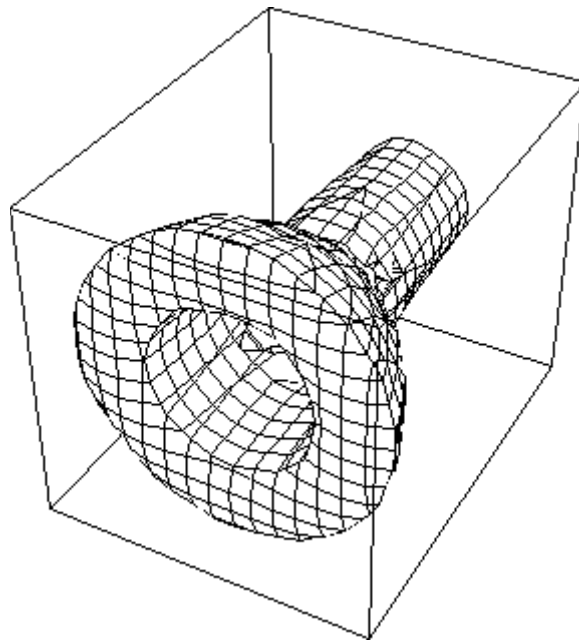




**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ**  
**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΧΑΝΙΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ**



**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΘΕΜΑ: Προσομοίωση διάδοσης παλμού λέιζερ στον αέρα για  
την δημιουργία ανακλαστήρα πλάσματος**

**ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ: ΤΣΟΡΑΚΙΔΗΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ**  
**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΣΚΟΥΛΑΚΗΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ**

**ΧΑΝΙΑ 2009**

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ .....   | 1         |
| 1.1.1. Ηλεκτρική πόλωση.....  | 2         |
| 1.1.2. Μη γραμμικά φαινόμενα.....   | 12        |
| 1.2. ΠΛΑΣΜΑ.....  | 15        |
| 1.2.1. Ορισμός πλάσματος.....   | 15        |
| 1.2.2. Βασικές έννοιες - Παράμετροι - Κριτήρια πλάσματος .....            | 16        |
| 1.2.3. διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε αραιό και «ψυχρό» πλάσμα..... | 23        |
| 1.3. ΔΙΑΔΟΣΗ ΥΠΕΡΒΡΑΧΕΩΝ ΚΑΙ ΥΨΗΛΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΠΑΛΜΩΝ LASER .....            | 25        |
| 1.3.1. Παλμικά laser.....   | 25        |
| 1.3.2. σύντομη περιγραφή – χαρακτηριστικά – ιστορική ανάδρομη.....        | 29        |
| 1.3.3. Σύστημα εξισώσεων.....   | 31        |
| 1.4. ΤΡΟΠΟΙ ΕΚΠΟΜΠΗΣ ΑΠΟ ΠΛΑΣΜΑ.....                                      | 35        |
| 1.4.1. THz .....  | 35        |
| 1.4.2. Δίπολο .....   | 39        |
| 1.4.3. Κλασική κεραία πλάσματος.....                                      | 41        |
| 1.5. ΑΝΑΚΛΑΣΤΗΡΑΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ .....   | 45        |
| 1.5.1. Περιγραφή της μεθόδου.....   | 45        |
| 1.5.2. Δομή της πτυχιακής.....  | 45        |
| <b>2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ .....</b>                                       | <b>47</b> |
| 2.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ .....  | 47        |
| 2.2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΧΗΜΑΤΑ .....  | 50        |
| <b>3. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ.....</b>                                       | <b>55</b> |
| 3.1. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....   | 55        |
| 3.2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ.....  | 56        |
| 3.3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ .....  | 57        |
| <b>4. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ.....</b>                                      | <b>62</b> |
| 4.1. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....   | 62        |
| 4.2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ .....  | 63        |

## Λίστα εικόνων

|   |    |
|---|----|
| Εικόνα 1-1 μονοδιάστατο μοντέλο χωρίς απώλειες [1]  | 2  |
| 1-2 Το πλάσμα στο σύμπαν [8]  | 16 |
| 1-3 θωράκιση Debye  | 18 |
| 1-4 Chirped-Pulse Amplification (CPA) παρατηρούμε πως μετά την βαθμίδα του ταλαντωτή ο παλμός μας ανοίγει στον χρόνο (βαθμίδα Stetcher), στην συνέχεια ενισχύεται (βαθμίδα ενισχυτή) και τέλος συμπιέζεται (βαθμίδα Compressor).  | 29 |
| 1-5 ρυθμός ιονισμού για οξυγόνο(συνεχής καμπύλη) και νίτρο (διακεκομμένη με τελείες καμπύλη) με ένταση 800nm. Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει το ρυθμό ιονισμού στο οξυγόνο.  | 35 |
| 1-6 a) Γενικό διάγραμμα για την ανίχνευση της υπο-THz ακτινοβολίας από ένα κανάλι πλάσματος που δημιουργήθηκε από μια λεπτή δέσμη φωτός. b) Διάγραμμα ακτινοβολίας, μας δείχνει δύο λοβούς με μέγιστη ένταση. Οι λοβοί είναι κάθετοι στη λεπτή δέσμη φωτός (Tzortzakis et al.2002). c) Σύγκριση των λεπτών δεσμών φωτός που μετρούνται από την αγωγιμότητα και από την ανίχνευση υπο-THz.   | 37 |
| 1-7 a) Πειραματική υλοποίηση για την μέτρηση εκπομπής των THz .b) Κατεύθυνση των THz κυμάτων πόλωσης σε εκπομπή κώνου. c) Σύγκριση μεταξύ ακτίνας και πρόωρης THz εκπομπής από μια δέσμη. Το διάγραμμα πόλωσης από μια THz για την ένταση εκπομπής σε συνάρτηση κωνικής γωνίας ορισμού στην (b) δείχνει δύο διαφορετικά μήκη εστίασης $f=2m$ (μέση) $f=75cm$ (δεξιά). Η ακτινική εκπομπή (αριστερά) είναι μεγεθυμένο από ένα παράγοντα 100. (D'Amico et al. 2007b). | 38 |
| 1-8 Πειραματική οργάνωση. Η ακτίνα λέιζερ κλείνει το κύκλωμα, αφήνοντας την ηλεκτρική τρέχουσα ροή μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων. Η κεραία ανιχνεύει το ηλεκτρομαγνητικό σήμα που εκπέμπεται στην κάθετη κατεύθυνση, και, συγχρόνως, το ρεύμα μετριέται πέρα από έναν αντιστάτη 8.2K. Η διατομή της ακτίνας λέιζερ στα διαφορετικά σημεία κατά μήκος του άξονα διάδοσης παρουσιάζει μια πολυ λεπτή δέσμη και σύστημα καναλιού.   | 40 |
| 1-9 a) Πειραματική δημιουργία για τη μέτρηση ακτινοβολίας σε μεγάλο μήκος κύματος από πλάσμα στον αέρα. b) Σήμα που ανιχνεύθηκε από μια κεραία ενεργή στα 10K-30MHz.  | 41 |
| 1-10 κλασική κεραία πλάσματος   | 44 |
| 1-11 Πειραματική διάταξη.   | 45 |
| 3-1 ακτινική κατανομή της πυκνότητας της ενέργειας ( $J/cm^2$ )   | 58 |
| 3-2 κατανομή του πλάσματος  | 59 |
| 3-3 Χρονική μορφοποίηση της έντασης του παλμού $I(W/cm^2)$ και της ηλεκτρονικής πυκνότητας ( $3 \cdot 10^{23} Ne/cm^3$ )  | 60 |
| 3-4 Ένταση $I(r=0,z,t)W/cm^2$   | 61 |
| 4-1 Το πλέγμα του ενός πεδίου είναι μετατοπισμένο σε σχέση με του άλλου κατά μισό κελί.   | 63 |
| 4-2 Στιγμιότυπα της διάδοσης και της ανάκλασης ενός παλμού σε πλάσμα.   | 64 |

## **Περίληψη**

Τα τελευταία χρόνια, η ανάπτυξη ισχυρών παλμικών λέιζερ επέτρεψε την παραγωγή πλάσματος σε διάφορα υλικά και σε δομές κατάλληλες με πιθανές εφαρμογές στις τηλεπικοινωνίες (πχ κυματοδηγοί, ανακλαστήρες H/M) και σε εργαστηριακά πειράματα. Η προτεινόμενη μέθοδος δημιουργίας ενός ανακλαστήρα H/M ακτινοβολίας από πλάσμα, περιλαμβάνει τη μη γραμμική διάδοση παλμού λέιζερ στον αέρα. Έγινε αριθμητική προσομοίωση της διάδοσης με τη χρήση της μη γραμμικής εξίσωσης του Schrödinger (NLS) και της παραγωγής του πλάσματος με το μοντέλο του Drude. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι οι πεπερασμένες διαφορές με το σχήμα Crank-Nicholson. Ακόμα, περιλαμβάνεται η προσομοίωση ενός μονοδιάστατου παραδείγματος ανάκλασης και έγινε με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (FDTD).

## **Abstract**

The last years , the pulse laser development allow applications to telecommunications and laboratory experiments. The creation of plasma reflector can be produced by nonlinear propagation of laser pulse in air. The numerical simulation of the propagation based upon a self guiding model <modified nonlinear Schrödinger equation (NLS)> and the plasma production on the Drude model. The method we used called finite differences in Crank-Nicholson scheme. In addition, the simulation of the reflections happened with an 1-D (FDTD) model.

# 1. Εισαγωγή

## 1.1. Μη γραμμική οπτική

Η μη γραμμική οπτική είναι ο κλάδος της οπτικής ο οποίος έχει να κάνει με οπτικά φαινόμενα τα οποία προκύπτουν από την αλληλεπίδραση έντονης σύμφωνης ακτινοβολίας με την ύλη. Με άλλα λόγια περιγράφει τα φαινόμενα εκείνα στα οποία εντάσεις υψηλών τάξεων του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου έχουν κυρίαρχο ρόλο. Η μη γραμμικότητα των φαινομένων αυτών έγκειται στο ότι η απόκριση του υλικού είναι μη γραμμική συνάρτηση της έντασης της ακτινοβολίας. Υπάρχει ιστορικός λόγος για τον οποίο ο 'καινούργιος' κλάδος της οπτικής ονομάζεται μη γραμμική οπτική.

Ιστορική αναδρομή μη γραμμικής οπτικής

- Townes et al. (1960) , ανακάλυψη του laser
- Franken et al. (1961) , πρώτη παρατήρηση των μη γραμμικών οπτικών φαινομένων, δεύτερης τάξης αρμονική ( $SHG$ )<sup>2</sup> .
- Terhune et al. (1962) , πρώτη παρατήρηση τρίτης τάξης αρμονική ( $SHG$ )<sup>3</sup>
- E. J. Woodbury W. K. Ng.(1962) , πρώτη επίδειξη της υποκινημένης σκέδασης Ραμάν
- Armstrong et al. (1962) , διατύπωση των γενικών σχέσεων συμμετρίας μεταλλαγής σε μη γραμμική οπτική
- A. Hasegawa and F. Tappert (1973) , πρώτη θεωρητική πρόβλεψη της παραγωγής soliton στις οπτικές ίνες
- H. M. Gibbs et al. (1976) , πρώτη επίδειξη και επεξήγηση οπτικής ισορροπίας
- L. F. Mollenauer et al. (1980) , πρώτη επιβεβαίωση της παραγωγής soliton στις οπτικές ίνες

### 1.1.1. Ηλεκτρική πόλωση

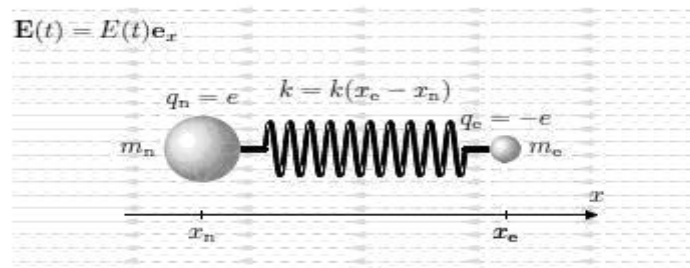
Η κλασική εικόνα υπολογισμού της ηλεκτρικής πόλωσης στα μέταλλα και στο πλάσμα, βασίζεται στην δύναμη Lorentz που ασκεί ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, στο νέφος των ελεύθερων ηλεκτρονίων. Περιγράφεται από την εξίσωση της κίνησης όπως φαίνεται παρακάτω[1]:

$$m_e \frac{d^2 r_e}{dt^2} = -eE(t) - e \frac{dr_e}{dt} * B(t) \quad (1.1)$$

Όπου E και B συμβολίζουμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα και  $r_e$  είναι η μετατόπιση του ηλεκτρονίου από το κέντρο του πυρήνα.

Για τα διηλεκτρικά ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της γραμμικής ηλεκτρικής πόλωσης είναι το μοντέλο των Drude Lorentz [2] όπου περιγράφει την αρμονική κίνηση των δέσμιων φορτίων.

Στην περιοχή της μη γραμμικής οπτικής χρησιμοποιείται το μοντέλο του αναρμονικού ταλαντωτή[1], όπου στην απλή του μορφή περιλαμβάνει ένα αρνητικό σωματίδιο (ηλεκτρόνιο) με τη μάζα  $m_e$ , ένα θετικό σωματίδιο (πρωτόνιο) με τη μάζα  $m_p$  και την αμοιβαία αλληλεπίδραση μέσω των ελκυστικών δυνάμεων Coulomb.



Εικόνα 1-1 μονοδιάστατο μοντέλο χωρίς απώλειες [1]

Σε αυτό το μοντέλο, μερικά επίπεδα προσέγγισης μπορούν να εφαρμοστούν για την επίλυση κάποιου προβλήματος. Σαν πρώτο επίπεδο προσέγγισης, το

πρωτόνιο θεωρείται ακίνητο και το ηλεκτρόνιο ελεύθερο να ταλαντώνει γύρω του. Γενικά, στο πλαίσιο της γραμμικής οπτικής, η ελκτική δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου η οποία κρατάει το ηλεκτρόνιο είναι σε γραμμική σχέση με την απόσταση απομάκρυνσής του. Διάφορα απλά μοντέλα υπολογισμού του δείκτη διάθλασης και της οπτικής διασποράς, έχουν εφαρμοσθεί από πάρα πολλούς συγγραφείς όπως τους Feynman [3], Born & Wolf [4].

Στο επόμενο επίπεδο προσέγγισης, το ζεύγος πρωτόνιο-ηλεκτρόνιο μπορεί να εξεταστεί σαν ένα σύστημα δύο σωμάτων κλασικής μηχανικής με ένα σταθερό κέντρο της μάζας του συστήματος, γύρω από το οποίο το πρωτόνιο και το ηλεκτρόνιο είναι ελεύθερα να ταλαντευτούν. Σε αυτό το επίπεδο προσέγγισης, με την εισαγωγή της έννοιας της μειωμένης μάζας για τα δύο τα κινούμενα σωματίδια, οι εξισώσεις της κίνησης μπορούν να γραφτούν ως μια εξίσωση κίνησης, για τον υπολογισμό της χρονικής εξέλιξης της διπολικής ροπής. Το τρίτο επίπεδο προσέγγισης που μπορεί να προσδιοριστεί είναι, τότε το κέντρο της μάζας έχει την άδεια για να ταλαντευτεί, οπότε σ' αυτή την περίπτωση μια εξίσωση της κίνησης για το κέντρο της μάζας εμφανίζεται επιπλέον για την εξέλιξη της ηλεκτρικής δημιουργίας δίπολων.

Σε κάθε ένα από τα πρότυπα, οι μη γραμμικότητες από την κεντρική δύναμη επαναφοράς του πεδίου, μπορούν να παρουσιαστούν σαν να περιλαμβάνουν γραμμικές αλληλεπιδράσεις. Το μοντέλο με το ελατήριο είναι ένα ιδανικό παράδειγμα για την περιγραφή των ανεξάρτητων μη μηδενικών στοιχείων των τανυστών επιδεκτικότητας.

Στην ανάλυση που ακολουθεί το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου θεωρείται ότι είναι αρκετά μεγάλο με αποτέλεσμα η χωρική μεταβολή του να είναι αμελητέα σε σχέση με τη χωρική έκταση που καταλαμβάνει το σύστημα ταλαντωτών. Η κεντρική δύναμη του πεδίου έχει μοντελοποιηθεί από μια μηχανική δύναμη ελατηρίου με σταθερά  $k_e$  όπως φαίνεται στην προηγούμενη εικόνα και περιγράφεται από τις εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων και του πυρήνα, του Νεύτωνα.

$$m_e \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial t^2} = -eE(t) - k_0(x_e - x_n) + k_1(x_e - x_n)^2 \quad (1.2)$$

$$m_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = +eE(t) + k_0(x_e - x_n) - k_1(x_e - x_n)^2 \quad (1.3)$$

Με σταθερά ελατηρίου κ

$$k = -\frac{\partial F_e^{(spring)}}{\partial(x_e - x_n)} = \frac{\partial F_n^{(spring)}}{\partial(x_e - x_n)} = k_0 - 2k_1(x_e - x_n) \quad (1.4)$$

Εισάγοντας την ισοδύναμη μάζα [5]  $m_r = m_e m_n / (m_e + m_n)$  του συστήματος, η εξίσωση κίνησης για την στιγμιαία διπολική ροπή  $p = -e(x_e - x_n)$ , θα γίνει

$$\frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial t^2} + \frac{k_0}{m_r} p + \frac{k_1}{em_r} p^2 = \frac{e^2}{m_r} E(t) \quad (1.5)$$

Η στιγμιαία διπολική ροπή όμως, μπορεί να εκφραστεί ως σειρά από όρους διαταραχών ως εξής:

$$p(t) = p^{(0)}(t) + p^{(1)}(t) + p^{(2)}(t) + p^{(3)}(t) + \dots \quad (1.6)$$

όπου ο κάθε όρος της σειράς είναι ανάλογος του ηλεκτρικού πεδίου υψωμένο στη δύναμη που ορίζεται από τον δείκτη (κ) και συνθέτει ένα σύστημα από n+1 εξισώσεις για  $p^{(k)}, k=0,1,2,\dots,n$ . Με την εισαγωγή της σειράς διαταραχών στην εξίσωση (1.5), αυτή τροποποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p^{(3)}}{\partial t^2} + \dots \\ & + \frac{k_0}{m_r} p^{(0)} + \frac{k_0}{m_r} p^{(1)} + \frac{k_0}{m_r} p^{(2)} + \frac{k_0}{m_r} p^{(3)} + \dots \\ & + \frac{k_1}{em_r} (p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots)(p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots) = \frac{e^2}{m_r} E(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Δεδομένου ότι αυτή η εξίσωση ισχύει για ένα αυθαίρετο ηλεκτρικό πεδίο E(t), τουλάχιστον μέσα στα όρια της ισχύος της ανάλυσης διαταραχών, κάθε σύνολο όρων με την ίση εξάρτηση ισχύος από το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει χωριστά να ικανοποιήσει την παραπάνω σχέση. Ταξινομώντας χωριστά τις διάφορες δυνάμεις και στα δύο μέλη της προηγούμενης εξίσωσης



κατασκευάζεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων με όρους του ηλεκτρικού πεδίου μέχρι και της τρίτης τάξης :

$$\frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial t^2} + \frac{k_0}{m_r} p^{(0)} + \frac{k_1}{em_r} p^{(0)2} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{k_0}{m_r} p^{(1)} + \frac{k_1}{em_r} 2p^{(0)2} p^{(1)} = \frac{e^2}{m_r} E(t) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 p^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{k_0}{m_r} p^{(2)} + \frac{k_1}{em_r} (2p^{(0)} p^{(2)} + p^{(1)2}) = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial^2 p^{(3)}}{\partial t^2} + \frac{k_0}{m_r} p^{(3)} + \frac{k_1}{em_r} (2p^{(0)} p^{(3)} + 2p^{(1)} p^{(2)}) = 0 \quad (1.11)$$

Από το σύστημα φαίνεται ότι μόνο η πρώτη τάξη διαταραχή εξαρτάται από το ηλεκτρικό πεδίο. Όμως όλες οι τάξεις της ηλεκτρικής διπολικής ροπής συνδέονται άμεσα με χαμηλότερης τάξης όρους.

Σαν παράδειγμα , για ένα αρμονικό ηλεκτρικό πεδίο  $E(t) = E_\omega \sin(\omega t)$  θα έχουμε:

Για τον όρο πρώτης τάξης:

$$p^{(1)} = \frac{(e^2 / m_r)}{(k_0 / m_r - \omega^2)} E_\omega \sin(\omega t) \quad , \quad \omega^2 \neq (k_0 / m_r) \quad (1.12)$$

Για υλικά αποτελούμενα από N δίπολα ανά μονάδα όγκου, υπολογίζεται στο διεθνές σύστημα (SI), η ηλεκτρική πόλωση πρώτης τάξης :

$$\begin{aligned} P^{(1)}(t) &= P_\omega^{(1)}(\sin \omega t) \\ &= \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) E_\omega \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (1.13)$$

Όπου η πρώτη τάξης (γραμμική) ηλεκτρική επιδεκτικότητα δίνεται ως

$$\chi^{(1)} \omega = \chi^{(1)}(-\omega; \omega) = \frac{N}{\varepsilon_0} \frac{(e^2 / m_r)}{(\Omega^2 - \omega^2)} \quad (1.14)$$

όπου  $\Omega^2 = k_0 / m_r$  είναι η φυσική συχνότητα ταλάντωσης (συντονισμού).

Στη συνέχεια για τον όρο δεύτερης τάξης, προκύπτει η λύση για την αντίστοιχη ηλεκτρική διπολική ροπή

$$p^{(2)}(t) = -\frac{k_1 e^3}{2k_0 m_r^2} \frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2)} E_\omega^2 + \frac{k_1 e^3}{2m_r^3} \frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2)(\Omega^4 - 4\omega^2)} E_\omega^2 + \frac{k_1 e^3}{m_r^3} \frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2)(\Omega^4 - 4\omega^2)} E_\omega^2 \sin^2(\omega t). \quad (1.15)$$

Και άρα η αντίστοιχη ηλεκτρική πόλωση ορίζεται ως εξής:

$$P^{(2)}(t) = P_0^{(0)} + P_{2\omega}^{(0)} \sin(2\omega t) = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(0; \omega, -\omega) E_\omega E_\omega + \varepsilon_0 \chi^{(2)}(-2\omega; \omega, \omega) E_\omega E_\omega \sin(2\omega t) \quad (1.16)$$

με την δεύτερης τάξης ηλεκτρική διαπερατότητα να δίνεται ως:

$$\chi^{(2)}(0; \omega, \omega) = \frac{N}{\varepsilon_0} \frac{\kappa_1 e^3}{2m_r^3} \left[ \frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2)(\Omega^2 - 4\omega^2)} - \frac{1}{\Omega^2(\Omega^2 - \omega^2)} \right] \quad (1.17)$$

$$\chi^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) = \frac{N}{\varepsilon_0} \frac{\kappa_1 e^3}{m_r^3} \frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2)(\Omega^2 - 4\omega^2)} \quad (1.18)$$

Όπου ο πρώτος όρος της ηλεκτρικής επιδεκτικότητας είναι ο στατικός όρος (DC), ενώ ο δεύτερος όρος είναι υπεύθυνος για την παραγωγή της δεύτερης αρμονικής.

Από την εισαγωγική ανάλυση διαταραχής του κλασσικού μη αρμονικού ταλαντωτή που προηγήθηκε, μπορεί να εκφραστεί η συνιστώσα της ηλεκτρικής πόλωσης σε κάποια διεύθυνση  $\mu$  με μια σειρά δυνάμεων του ηλεκτρικού πεδίου.

$$P_\mu(\omega_\sigma) = \varepsilon_0 [\chi_{\mu\alpha}^{(1)}(-\omega_\sigma; \omega_\sigma) E_\alpha(\omega_\sigma) + \chi_{\mu\alpha\beta}^{(2)}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2) E_\alpha(\omega_1) E_\beta(\omega_2)] + \chi_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(3)}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \omega_3) E_\alpha(\omega_1) E_\beta(\omega_2) E_\gamma(\omega_3) + \dots \quad (1.19)$$

$$= P_\mu^{(1)}(\omega_\sigma) + P_\mu^{(2)}(\omega_\sigma, \omega_\sigma) + P_\mu^{(3)}(\omega_\sigma, \omega_\sigma)$$

Όπου οι δείκτες  $\mu, \alpha, \beta$  και  $\gamma$  αναπαριστούν τις καρτεσιανές συντεταγμένες  $\chi, \psi, \zeta$ .

Η εξίσωση είναι γραμμένη με τη σειρά άθροισης του Einstein για όλους τους επαναλαμβανόμενους όρους.

Οι όροι  $\chi_{\mu\alpha}^{(1)}$  είναι η γραμμική επιδεκτικότητα,  $\chi_{\mu\alpha}^{(2)}, \chi_{\mu\alpha}^{(3)}$  είναι οι μη γραμμικές επιδεκτικότητες δεύτερης και τρίτης τάξης αντίστοιχα. Επίσης οι όροι  $P_{\mu}^{(1)}(\omega_{\sigma}), P_{\mu}^{(2)}(\omega_{\sigma}), P_{\mu}^{(3)}(\omega_{\sigma})$  συμβολίζουν την γραμμική ηλεκτρική πόλωση πρώτης τάξης, και τις μη γραμμικές δεύτερης και τρίτης τάξης αντίστοιχα.

Πολύ σημαντικό είναι να αναφερθεί πως τα αέρια (κεντρο-συμμετρικά υλικά), παρουσιάζουν συμμετρία αναστροφής των όρων στην εξίσωση της πόλωσης και άρα θα εμφανίζονται μόνο οι όροι περιττής τάξης. Στην περίπτωση μας ο πρώτος μη γραμμικός όρος θα είναι ο  $P_{\mu}^{(3)}(\omega_{\sigma})$  ενώ ο όρος  $P_{\mu}^{(2)}(\omega_{\sigma})$  δεν υπάρχει.

Συνοπτικά περιγράφονται οι τέσσερις κατηγορίες συμμετριών που εμφανίζονται στη μη γραμμική οπτική, όπου είναι οι εξής:

(1) Εγγενής συμμετρία μεταλλαγής:

$$\begin{aligned}\chi_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(3)}(-\omega_{\sigma}; \omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \chi_{\alpha\mu\beta\gamma}^{(3)}(-\omega_{\sigma}; \omega_2, \omega_1, \omega_3) \\ &= \chi_{\alpha\beta\mu\gamma}^{(3)}(-\omega_{\sigma}; \omega_2, \omega_3, \omega_1) \\ &= \chi_{\alpha\beta\gamma\mu}^{(3)}(-\omega_{\sigma}; \omega_3, \omega_2, \omega_1)\end{aligned}\quad (1.20)$$

δηλαδή, σταθερότητα κάτω από  $n!$  πιθανούς συνδυασμούς από  $(\alpha_{\kappa}, \omega_{\kappa})$ ,  $\kappa=1,2,\dots,n$

(2) Γενική συμμετρία μεταλλαγής:

$$\begin{aligned}\chi_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(3)}(-\omega_{\sigma}; \omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \chi_{\alpha\mu\beta\gamma}^{(3)}(\omega_1; -\omega_{\sigma}, \omega_2, \omega_3) \\ &= \chi_{\alpha\beta\mu\gamma}^{(3)}(\omega_1; \omega_2 - \omega_{\sigma}, \omega_3) \\ &= \chi_{\alpha\beta\gamma\mu}^{(3)}(\omega_1; \omega_2, \omega_3, -\omega_{\sigma})\end{aligned}\quad (1.21)$$

δηλαδή, σταθερότητα κάτω από  $(n+1)!$  πιθανούς συνδυασμούς  $(\mu, \omega_{\sigma}), (\alpha_{\kappa}, \omega_{\kappa})$ ,  $\kappa=1,2,\dots,n$ . Αυτή η αρχή ισχύει, όπου όλη η οπτική εμφάνιση

συχνοτήτων στον τύπο για την ευαισθησία αφαιρείται από τις συχνότητες αλλαγής του μέσου.

### (3) Συμμετρία Kleinman

$$\begin{aligned}\chi_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(3)}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \chi_{\alpha\mu\beta\gamma}^{(3)}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ &= \chi_{\alpha\beta\mu\gamma}^{(3)}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ &= \chi_{\alpha\beta\gamma\mu}^{(3)}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \omega_3)\end{aligned}\quad (1.22)$$

δηλαδή, σταθερότητα κάτω από  $(n+1)!$  πιθανές μεταλλαγές των υπογεγραμμένων  $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n$

Αυτή η αρχή είναι μια συνέπεια της γενικής συμμετρίας μεταλλαγής, και ισχύει στο όριο χαμηλής συχνότητας των μη συντονιστικών μέσων.

(4) Συμμετρίες, που δίνονται χωρικές από την κατηγορία συμμετρίας σημείου του μέσου

Για τη μελέτη της χρονικής εξέλιξης της ηλεκτρικής πόλωσης συνήθως χρησιμοποιείται η φαινομενολογική περιγραφή των τανυστών της επιδεκτικότητας.

Ξεκινώντας με την έκφραση της πόλωσης σαν συνάρτηση του χρόνου γίνεται χρήση των συναρτήσεων απόκρισης στη θέση των τανυστών της επιδεκτικότητας. Αναλυτικά:

$$P(r, t) = P^{(0)}(r, t) + P^{(1)}(r, t) + P^{(2)}(r, t) + \dots + P^{(n)}(r, t) + \dots \quad (1.23)$$

Όπου οι όροι  $P^{(1)}(r, t)$ ,  $P^{(2)}(r, t)$  είναι πρώτου και δεύτερου βαθμού γραμμικοί στο ηλεκτρικό πεδίο αντίστοιχα κτλ. Ο όρος  $P^{(0)}(r, t)$  αντιστοιχεί στην στατική πόλωση του μέσου.

Πρέπει να υπογραμμιστεί ότι οποιοδήποτε από αυτούς τους όρους του ηλεκτρικού πεδίου του οπτικού κύματος μπορούν να θεωρηθούν γραμμικοί ανεξάρτητα αν είναι μη γραμμικές εξισώσεις του ηλεκτρικού πεδίου. Για παράδειγμα, ένα εξωτερικά εφαρμοσμένο στατικό ηλεκτρικό πεδίο μπορεί

μαζί με το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος να αλληλεπιδράσουν με αποτέλεσμα η ηλεκτρική πόλωση τρίτης τάξης  $P^{(3)}(r,t)$  να είναι γραμμική συνάρτηση της έντασης του πεδίου[6]. Ο κάθε όρος της πόλωσης μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο συνέλιξης μεταξύ του αντίστοιχου τανυστή επιδεκτικότητας και του ηλεκτρικού πεδίου εκφρασμένο στην αντίστοιχη τάξη. Για παράδειγμα, ο όρος της γραμμικής πόλωσης  $P_{\mu}^{(1)}$  θα γίνει:

$$P_{\mu}^{(1)}(r,t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\alpha}^{(1)}(t;\tau) E_{\alpha}(r,\tau) d\tau \quad (1.24)$$

Μερικές ιδιότητες του  $T_{\mu\alpha}^{(1)}(t,\tau)$  είναι

--Αιτιότητα, καμία παρατηρούμενη συμβολή δεν μπορεί να εμφανιστεί πριν την εφαρμογή του πεδίου. Δηλαδή,  $T_{\mu\alpha}^{(1)}(t;\tau) = 0$  για  $t \leq \tau$

--Χρονική σταθερότητα, οι παράμετροι του μέσου είναι αμετάβλητες στο χρόνο και άρα θα ισχύει [6]:

$$\begin{aligned} T_{\mu\alpha}^{(1)}(t;\tau) &= T_{\mu\alpha}^{(1)}(0;\tau-t) \\ &= R_{\mu\alpha}^{(1)}(\tau-t) \end{aligned} \quad (1.25)$$

όπου ορίζεται η γραμμική συνάρτηση απόκρισης της πόλωσης  $R_{\mu\alpha}^{(1)}(\tau-t)$ , να είναι δεύτερης τάξης τανυστής που εξαρτάται μόνο από την χρονική διαφορά « τ-t ».

Η γραμμική συμβολή στην ηλεκτρική πόλωση θα δίνεται τελικά από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} P_{\mu}^{(1)}(r,t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu\alpha}^{(1)}(t-\tau) E_{\alpha}(r,\tau) d\tau \\ &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu\alpha}^{(1)}(\tau') E_{\alpha}(r,t-\tau') d\tau' \end{aligned} \quad (1.26)$$

Όπου θέτοντας  $t=\tau'$  ικανοποιείται η ιδιότητα της αιτιότητας όπως φαίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$R_{\mu\alpha}^{(1)}(\tau-t) = 0, \quad t \leq \tau \quad (1.27)$$

Με ανάλογο τρόπο αναλύονται και η μεγαλύτερης τάξης όροι της πόλωσης , όπως φαίνεται στην παρακάτω σχέση όπου περιγράφεται ο n-ιοστής τάξης όρος:

$$\begin{aligned}
 P_{\mu}^{(n)}(r, t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu a_1 \dots a_n}^{(n)}(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) E_{a_1}(r, \tau_1) \dots E_{a_n}(r, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\
 &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu a_1 \dots a_n}^{(n)}(\tau'_1, \dots, \tau'_n) E_{a_1}(r, t - \tau'_1) \dots E_{a_n}(r, t - \tau'_n) d\tau'_1 \dots d\tau'_n
 \end{aligned}
 \tag{1.28}$$

όπου η n-ιοστής τάξης συνάρτηση απόκρισης  $R_{\mu a_1 \dots a_n}^{(n)}(\tau'_1, \dots, \tau'_n)$  είναι ένας τανυστής τάξης n+1 και μια πραγματική συνάρτηση των n παραμέτρων  $\tau_1, \dots, \tau_n$  του χρόνου. Ακόμα θα ικανοποιείται για κάθε  $\tau_i$  μικρότερο του μηδενός  $\tau_i < 0, i=1, 2, \dots, n$  και θα παραμένει αμετάβλητη για κάθε n! μετάθεση που μπορεί να γίνει μεταξύ των n συμμετρικών ζευγών  $(a_1, \tau_1), \dots, (a_n, \tau_n)$ .

Ο τρόπος που συνδέονται οι τανυστές επιδεκτικότητας με τις συναρτήσεις απόκρισης απαιτεί την έκφραση του στο πεδίο των συχνοτήτων. Το ηλεκτρικό πεδίο (1.29) μπορεί να εκφραστεί με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$E_{\alpha}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = F^{-1}[E_{\alpha}](t) \tag{1.29}$$

Ενώ στο πεδίο των συχνοτήτων θα είναι:

$$E_{\alpha}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha}(\tau) \exp(i\omega \tau) d\tau = F[E_{\alpha}](\omega) \tag{1.30}$$

Αντικαθιστώντας το ηλεκτρικό πεδίο από την (1.29) στη σχέση (1.26), ο τανυστής πρώτης τάξης θα γίνει:

$$\begin{aligned}
P_{\mu}^{(1)}(r,t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu\alpha}^{(1)}(\tau) E_a(r,t-\tau) d\tau \\
&= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} x_{\mu\alpha}^{(1)}(-\omega; \omega) E_a(r, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Όπου η γραμμική ηλεκτρική επιδεκτικότητα θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$x_{\mu\alpha}^{(1)}(-\omega; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu\alpha}^{(1)}(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau = F[R_{\mu\alpha}^{(1)}](\omega) \tag{1.32}$$

Με ανάλογο τρόπο η ηλεκτρική πόλωση n-ιστής τάξης θα είναι:

$$\begin{aligned}
P_{\mu}^{(n)}(r,t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)}(-\omega_{\sigma}; \omega_1, \dots, \omega_n) E_{\alpha_1}(r, \omega_1) \dots E_{\alpha_n}(r, \omega_n) \\
&\quad \times \exp[-i(\omega_1 + \dots + \omega_n)t] d\omega_1 \dots d\omega_n \\
&\quad (\omega_1 + \dots + \omega_n) \equiv \omega_{\sigma}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

όπου η n-ιστής τάξης ηλεκτρική επιδεκτικότητα εκφράζεται από τη σχέση:

$$x_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)}(-\omega_{\sigma}; \omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) \exp[i(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_n\tau_n)] d\tau_1 \dots d\tau_n \tag{1.34}$$

όπου  $\omega_{\sigma} = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ .

Θεωρώντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από την υπέρθεση μονοχρωματικών κυμάτων η ηλεκτρική πόλωση n-ιστής τάξης μπορεί να εκφραστεί με την παρακάτω σχέση:

$$P^{(n)}(r,t) = \sum_{\omega_{\sigma} \geq 0} \text{Re}[P_{\omega_{\sigma}}^{(n)} \exp(-i\omega_{\sigma}t)] \tag{1.35}$$

Όπου  $P_{\omega_{\sigma}}^{(n)}$  είναι το πλάτος της n-ιστής τάξης ηλεκτρικής πόλωσης της κάθε κυματικής συνιστώσας. Αυτή μπορεί να εκφραστεί με την σχέση που ακολουθεί:

$$(P_{\omega_\sigma}^{(n)})_\mu = 2\varepsilon_0 \sum_{\alpha_1} \dots \sum_{\alpha_n} \sum_{\omega} K(\Omega) \chi_{\mu\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{(n)}(\Omega) (E\omega_1)_{\alpha_1} (E\omega_2)_{\alpha_2} \dots (E\omega_n)_{\alpha_n} \quad (1.36)$$

$$\Omega = -\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

όπου ισχύει όπως και πριν  $\omega_\sigma = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$  και  $K$  είναι ο παράγοντας εκφυλισμού που περιγράφεται ως εξής:  $K(-\omega_\sigma; \omega_1 \dots \omega_n) = 2^{l+m-n} p$

όπου,

$p$  = αριθμός διακριτών συνδυασμών των  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$

$n$  = η τάξη της μη γραμμικότητας

$l=1$  για  $\omega_\sigma \neq 0$  και  $l=0$  σε κάθε άλλη περίπτωση.

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της τρίτης τάξης όρο της πόλωσης, ο παράγοντας εκφυλισμού θα είναι:  $K(-\omega_\sigma; \omega_1 \dots \omega_n) = 2^{l+m-n} p = 2^{1+0-3} 3 = 3/4$  και ο όρος  $P_\omega^{(3)}$ :

$$P_\omega^{(3)} = \sum_{\mu} e_{\mu} (P_\omega^{(3)})_{\mu} = \varepsilon_0 (3/4) \mathbf{e}_x x_{xxxx}^{(3)} |E_\omega^x|^2 E_\omega^x \quad (1.37)$$

Όπου  $\mathbf{e}_x$  είναι το διάνυσμα πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου.

### 1.1.2. Μη γραμμικά φαινόμενα

Στον πίνακα που ακολουθεί περιγράφονται συνοπτικά τα διάφορα μη γραμμικά φαινόμενα που συνδέονται με την τρίτης τάξης ηλεκτρική επιδεκτικότητα[7]:

|  |  |     |
|--|--|-----|
| Φαινόμενα 3 <sup>η</sup> τάξης                               | $-\omega_e; \omega_1, \dots, \omega_n$     | $K$ |
| Στατικό φαινόμενο Kerr (τετραγωνικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο) | $-\omega_s; \omega_p, -\omega_p, \omega_s$ | 3   |



|   |   |                                     |
|---|---|-------------------------------------|
| Παραγωγή τρίτης αρμονικής   | $-3\omega; \omega, \omega, \omega$  | $\frac{1}{4}$                       |
| Μίξη τεσσάρων κυμάτων   | $-\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3$   | $\frac{3}{2}$                       |
| Συχνότητα μίξης της τρίτης τάξης αθροίσματος και διαφοράς   | $-\omega_3; \pm\omega_1, \omega_2, \omega_3$  | $\frac{3}{4}$                       |
| Σύμφωνη σκέδαση anti-Stokes και Raman   | $-\omega_{AS}; \omega_p, \omega_p, -\omega_s$   | $\frac{3}{4}$                       |
| Οπτικό φαινόμενο Kerr (οπτική-ανάκλαση δέσμης σε 2 δέσμες) διαμόρφωσης διασταύρωσης Διεγερμένη σκέδαση Raman, Διεγερμένη σκέδαση Brillouin              | $-\omega_s; \omega_p, -\omega_p, \omega_s$  | $\frac{3}{2}$                       |
| Δείκτης διάθλασης εξαρτώμενος από την ένταση, Οπτικό φαινόμενο Kerr Αυτό-εστίαση, αυτό-διαμόρφωση φάσης και διασταυρωμένης φάσης, μίξη τεσσάρων κυμάτων | $-\omega; \omega, -\omega, \omega$  | $\frac{3}{4}$                       |
| απορρόφηση/ιονισμός/εκπομπή δύο φωτονίων  | $-\omega_1; -\omega_2, \omega_2, \omega_1$<br>ή<br>$-\omega; -\omega, \omega, \omega$ | $\frac{3}{2}$<br>ή<br>$\frac{3}{4}$ |

Όπου οι δείκτες S=Stokes, AS=anti-Stokes, P=άντληση

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το οπτικό φαινόμενο Kerr (Optical Kerr Effect), όπου η συνεισφορά του στον καθορισμό της ηλεκτρικής πόλωσης εκφράζεται με τον όρο τρίτης τάξης. Ο δείκτης διάθλασης  $n(\omega)$  τροποποιείται με την εισαγωγή του μη γραμμικού όρου  $n_2(\omega)$  και θα δίνεται από τη σχέση:

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2(\omega) |E|^2 \quad (1.38)$$

Όπου  $n_2(\omega)$  θα είναι σύμφωνα με την σχέση (1.37) ίσος με:

$$n_2(\omega) = \frac{3 \operatorname{Re}[x_{xxxx}^{(3)}]}{8n_0(\omega)} \quad (1.39)$$

Ένα αποτέλεσμα του οπτικού φαινομένου Kerr, είναι η αυτό-εστίαση (self-focusing). Δηλαδή αν μια δέσμη λέιζερ υψηλής έντασης διέλθει μέσα από ένα υλικό τότε ο δείκτης διάθλασης του παύει να είναι σταθερός και εξαρτάται από την ένταση του πεδίου. Το αποτέλεσμα είναι, το ίδιο το υλικό να δρα σαν ένας φακός εστίασης αφού ο δείκτης διάθλασης ακολουθεί την κατανομή της έντασης πάνω στο εγκάρσιο επίπεδο του άξονα διάδοσης. Για Γκαουσιανή κατανομή ο δείκτης διάθλασης θα μειώνεται εκθετικά. Η αυτό-εστίαση είναι υπεύθυνη για την οπτική καταστροφή των στερεών, αλλά επίσης παίζει πολύ σημαντικό ρόλο για την δημιουργία πλάσματος.

## 1.2. Πλάσμα

Στην παράγραφο αυτή γίνεται μια εισαγωγή στον ορισμό του πλάσματος, στις παραμέτρους του και μια σύντομη ανάλυση στην διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος μέσα σε ουδέτερο πλάσμα και χωρίς απώλειες.

### 1.2.1. Ορισμός πλάσματος

Ο όρος πλάσμα χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1929 από τους Tonks και Langmuir για να περιγράψουν το ιονισμένο αέριο μιας ηλεκτρικής εκκένωσης. Από τότε ο όρος αυτός επικράτησε για κάθε αέριο του οποίου τουλάχιστον ένα ποσοστό των ατόμων ή μορίων του είναι μερικά ή ολικά ιονισμένο. Όμως θα πρέπει να υπάρχουν κάποια κριτήρια για να θεωρείται ένα ιονισμένο αέριο, πλάσμα, τα οποία θα αναλυθούν στην συνέχεια.

Το πλάσμα, που μερικές φορές αναφέρεται ως "η τέταρτη κατάσταση της ύλης" (εκτός από τη στερεή, την υγρή και την αέρια), αναφέρεται σε αυτή την περίπτωση σε ένα αέριο στο οποίο έχει παρωχευθεί αρκετή ενέργεια για να αποχωριστούν τα άτομα από τα ηλεκτρόνια τους (ιονισμός) και να παραχθεί ένα νέφος από ιόντα και ηλεκτρόνια. Επειδή τα σωματίδια αυτά είναι ιονισμένα (φορτισμένα), το αέριο συμπεριφέρεται διαφορετικά από ένα ουδέτερο αέριο, για παράδειγμα όταν υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικά πεδία.

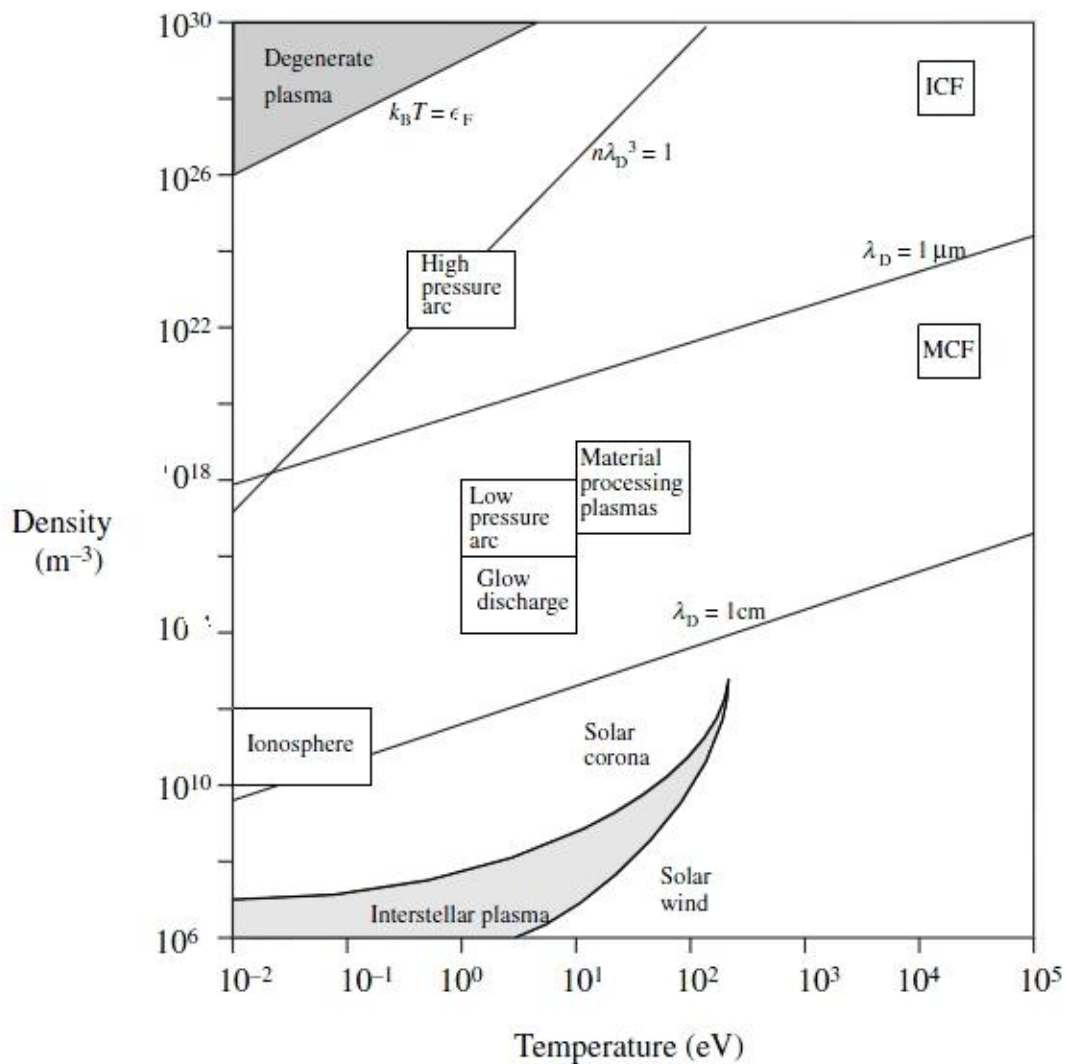
Αν και η κατάσταση πλάσματος δεν είναι πολύ συνηθισμένη στη Γη, περισσότερο από το 99% του σύμπαντος αποτελείται από πλάσμα.[8]

Το πλάσμα παράγεται με φυσικό τρόπο στη φύση με τους εξής τρόπους: στις ατμόσφαιρες των αστερών από συγκρούσεις μεταξύ ατόμων λόγω των υψηλών θερμοκρασιών (θερμικός ιονισμός) ή στις ατμόσφαιρες των πλανητών η ηλιακή ακτινοβολία ιονίζει τα άτομα (φωτο-ιονισμός) κτλ.

Πλάσμα μπορούμε όμως να παράγουμε και με τεχνητό τρόπο σε εργαστηριακούς χώρους, με ηλεκτρομαγνητικά κύματα ή με θέρμανση ή με βομβαρδισμό από ουδέτερα σωματίδια, αρκεί να ισχύει το εξής κριτήριο:

$$\rho_{\text{ρυθμός ιονισμού}} > \rho_{\text{ρυθμός επανασύνδεσης}}$$

Στην παρακάτω εικόνα απεικονίζονται διάφορες κατηγορίες πλάσματος σε συνάρτηση της θερμοκρασίας και της πυκνότητας. Οι διάφορες ζώνες χωρίζονται σύμφωνα με το μήκος Debye, έννοια που αναλύεται παρακάτω.



1-2 Το πλάσμα στο σύμπαν [8]

### 1.2.2. Βασικές έννοιες - Παράμετροι - Κριτήρια πλάσματος

#### Ηλεκτρική θωράκιση Debye [9]

Προσομοιώνοντας ένα ηλεκτρικό πεδίο σε πλάσμα, θα υποθέσουμε δύο φορτισμένες σφαίρες που ενώνονται με μια μπαταρία (Εικ.1-2). Οι σφαίρες θα έλκουν σωματίδια αντίθετου φορτίου και σχεδόν αμέσως ένα νέφος από ιόντα θα περικυκλώσουν την αρνητική σφαίρα καθώς και ένα νέφος ηλεκτρονίων θα

περικυκλώσουν την θετική σφαίρα. Αν το πλάσμα ήταν ψυχρό και δεν υπήρχε θερμική κίνηση, θα υπήρχαν τόσα φορτία γύρω από τη σφαίρα όσα και μέσα σε αυτή, η ηλεκτρική θωράκιση θα ήταν ιδανική και δεν θα υπήρχε ηλεκτρικό πεδίο στον κορμό του πλάσματος γύρω από τα νέφη.

Αν όμως η θερμοκρασία ήταν μεγάλη, τα σωματίδια που ήταν κοντά στην άκρη της σφαίρας, όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι ασθενές, θα είχαν αρκετή θερμική ενέργεια για να φύγουν από το ηλεκτροστατικό πηγάδι δυναμικού. Η άκρη του νέφους, βρίσκεται στην ακτίνα όπου η δυναμική ενέργεια είναι περίπου ίση με την θερμική ενέργεια  $KT$  των σωματιδίων και η θωράκιση δεν ολοκληρώνεται. Το δυναμικό της σειράς  $KT/e$  μπορεί να διαρρεύσει από το πλάσμα και προκαλεί την εμφάνιση μετρήσιμου ηλεκτρικού πεδίου.

Ορίζεται ως μήκος Debye  $\lambda_D$  η απόσταση εκείνη από το κέντρο των θετικών ιόντων, όπου το δυναμικό μειώνεται κατά τον παράγοντα  $1/e$  και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 K T_e}{n_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (1.40)$$

Αναλυτικότερα, το δυναμικό  $\varphi$  εκφράζεται από την εξίσωση Poisson:

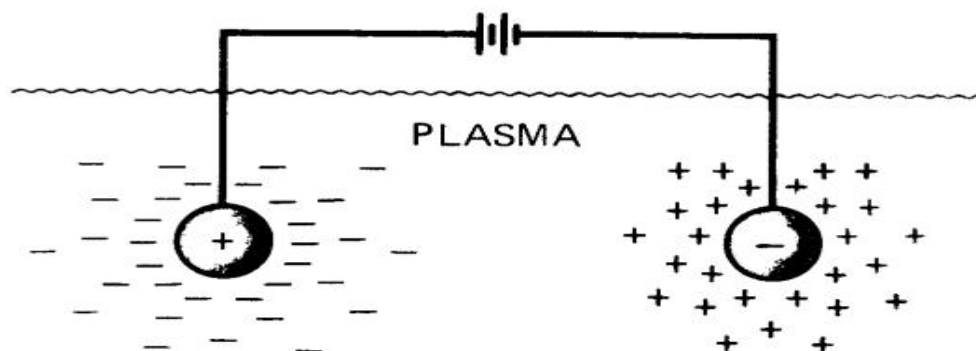
$$\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = \epsilon_0 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -e(n_i - n_e) \quad (1.41)$$

Όπου  $n_i, n_e$  είναι οι πυκνότητες των θετικών ιόντων και των ηλεκτρονίων αντίστοιχα.

Η λύση στη μονοδιάστατη περίπτωση θα είναι:

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp[-x / \lambda_D] \quad (1.42)$$

Όπου  $\varphi_0$  είναι το μέγιστο πεδίο για  $x=0$ .



### 1-3 θωράκιση Debye

Η ανάλυση που προηγήθηκε ισχύει μόνο όταν υπάρχουν αρκετά σωματίδια στο φορτισμένο νέφος. Θα πρέπει το πλάσμα να παρουσιάζει «συλλογική συμπεριφορά», δηλαδή να ισχύει  $\lambda_D \ll L$ , όπου  $L$  είναι η χωρική κλίμακα του προβλήματος. Ο υπολογισμός του αριθμού σωματιδίων  $N_D$  σε μια σφαίρα Debye δίνεται από τη σχέση:

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 = 1.38 \times 10^6 T^{3/2} / n^{1/2} \quad (T \text{ σε Kelvin}) \quad (1.43)$$

Για να ισχύει η προηγούμενη συνθήκη θα πρέπει η παράμετρος του πλάσματος να ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα:

$$N_D \gg \gg 1 \quad (1.44)$$

Εκτός τις δύο προηγούμενες συνθήκες, για να θεωρείται ένα ιονισμένο αέριο πλάσμα θα πρέπει να ισχύει και η ακόλουθη ανισότητα  $\omega\tau > 1$ , όπου  $\omega$  είναι η τυπική συχνότητα ταλάντωσης του πλάσματος και  $\tau$  ο μέσος χρόνος ανάμεσα στις συγκρούσεις με τα ουδέτερα άτομα.

Οι προηγούμενες συνθήκες αποτελούν τα κριτήρια ορισμού του πλάσματος και συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

|                   |
|-------------------|
| $\lambda_D \ll L$ |
| $N_D \gg \gg 1$   |
| $\omega\tau > 1$  |

### Συχνότητα πλάσματος [9]

Αν τα ηλεκτρόνια σε ένα πλάσμα μετατοπισθούν μακρύτερα από το σταθερό υπόβαθρο των ιόντων, τότε τα ηλεκτρικά πεδία που θα αναπτυχθούν θα έχουν τέτοια διεύθυνση ώστε να έλκουν τα ηλεκτρόνια προς στην αρχική τους θέση. Δηλαδή, θα είναι να τείνει να επέλθει πάλι ουδετερότητα στο πλάσμα. Εξαιτίας όμως της αδράνειας, αυτά θα προσπεράσουν τις θέσεις ισορροπίας και θα ταλαντώσουν γύρω από τους, με μια χαρακτηριστική συχνότητα γνωστή ως συχνότητα πλάσματος (βλ. σχέση (1.55)). Αυτή η ταλάντωση είναι τόσο γρήγορη ώστε τα «ογκώδη» ιόντα να μη μπορούν αποκριθούν στις δυνάμεις των πεδίων και έτσι μπορεί να θεωρηθούν ακίνητα.

Η συχνότητα πλάσματος μπορεί να βρεθεί από τις εξισώσεις κίνησης και συνέχειας των ηλεκτρονίων, όπως αυτές δίνονται παρακάτω:

$$mn_e \left[ \frac{\partial v_e}{\partial t} + (v_e \cdot \nabla) v_e \right] = -en_e E \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e v_e) = 0 \quad (1.46)$$

Η εξίσωση του Poisson δίνει :

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot E = \varepsilon_0 \partial E / \partial x = e(n_i - n_e) \quad (1.47)$$

Η εξίσωση (1.47) μπορεί να λυθεί με γραμμικοποίηση των όρων όπου οι όροι υψηλότερης τάξης παραλείπονται. Έτσι παραμένουν οι όροι ισορροπίας «0» και διαταραχών «1»

$$n_e = n_0 + n_1 \quad v_e = v_0 + v_1 \quad E_e = E_0 + E_1 \quad (1.48)$$

Οι όροι ισορροπίας εκφράζουν την κατάσταση του πλάσματος χωρίς την ταλάντωση, δηλαδή όπως έχει οριστεί ένα ενιαίο ουδέτερο πλάσμα σε

ηρεμία πριν τα ηλεκτρόνια μετατοπισθούν, με συνέπεια να εισχειουν οι παρακάτω παραδοχές:

$$\begin{aligned} \nabla n_0 = v_0 = E_0 = 0 \\ \frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

Οι ποσότητες των διαταραχών λαμβάνονται με ημιτονοειδή μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= u_1 e^{i(kx - \omega t)} \hat{x} \\ n_1 &= n_1 e^{i(kx - \omega t)} \\ \mathbf{E} &= E e^{i(kx - \omega t)} \hat{x} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Αντικαθιστώντας στις αρχικές εξισώσεις προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες:

$$-im\omega u_1 = -eE_1 \quad (1.51)$$

$$-im\omega n_1 = -n_0 i k u_1 \quad (1.52)$$

$$i k e_0 E_1 = -e n_1 \quad (1.53)$$

Αντικαθιστώντας τα  $n_1$  και  $E_1$  στην (1.51) αυτή τροποποιείται ως εξής :

$$-im\omega u_1 = -e \frac{-e}{i k \epsilon_0} \frac{-n_0 i k u_1}{-i\omega} = -i \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 \omega} u_1 \quad (1.54)$$

Αν το  $u_1$  δεν μηδενίζεται θα πρέπει να ισχύει  $\omega^2 = n_0 e^2 / m \epsilon_0$ , δηλαδή ίση με την συχνότητα πλάσματος :

$$\omega_p = \left( \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2} \quad rad \ sec \quad (1.55)$$



### Ponderomotive force [9].

Υψηλής ισχύος μικροκύματα ή ακτίνες λέιζερ χρησιμοποιούνται για να ζεσταίνουν ή να παγιδεύσουν το πλάσμα με την πίεση ακτινοβολίας να μπορεί να φτάσει τις μερικές εκατοντάδες χιλιάδες ατμόσφαιρες! Η δύναμη αυτή συνδέεται με τα σωματίδια του πλάσματος με περίπλοκο τρόπο και έχει επικρατήσει να αποκαλείται «ponderomotive force». Η ανάλυση αυτής της μη γραμμικής δύναμης μπορεί να γίνει, με την βοήθεια της εξίσωσης της κίνησης του ηλεκτρονίου μέσα στα πεδία ταλάντωσης  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$  ενός κύματος. Η είναι:

$$m \frac{dv}{dt} = -e[E(r) + v \times B(r)] \quad (1.56)$$

Αυτή η εξίσωση θα είναι ακριβής, εάν ο υπολογισμός των πεδίων γίνεται με την πραγματική θέση του ηλεκτρονίου. Η μη γραμμικότητα προέρχεται μερικώς από τον όρο  $v \times B$ , ο οποίος είναι δεύτερης τάξης γιατί και τα δύο « $v$  και  $B$ » απαλείφονται σε κατάσταση ισορροπίας, έτσι ο όρος αυτός δεν θα είναι μεγαλύτερος από  $v_1 \times B_1$ , όπου  $v_1, B_1$  είναι οι τιμές από την θεωρία της γραμμικοποίησης. Το άλλο μέρος μη γραμμικότητας, προέρχεται από τον υπολογισμό του  $\mathbf{E}$  στη ακριβή θέση του σωματιδίου αντί της αρχικής θέσης. Το ηλεκτρικό πεδίο θεωρείται της μορφής :

$$E = E_s(r) \cos \omega t \quad (1.57)$$

Όπου το πλάτος  $E_s(r)$  περιέχει την χωρική εξάρτηση του πεδίου. Αρχικά, με την ανάλυση πρώτης τάξης ο όρος  $v \times B$  παραλείπεται στην εξίσωση (1.56) και το  $\mathbf{E}$  υπολογίζεται στην αρχική θέση  $r_0$ . Άρα:

$$m dv_1 / dt = -eE(r_0) \quad (1.58)$$

$$v_1 = -(e / m\omega) E_s \sin \omega t = d_{r1} / dt \quad (1.59)$$

$$\delta_{r1} = (e / m\omega^2) E_s \cos \omega t \quad (1.60)$$

Στη συνέχεια το  $E(r)$  αναλύεται γύρω από την θέση  $r_0$ :

$$E(r) = E(r_0) + (\delta_{r1} \cdot \nabla)E|_{r=r_0} + \dots \quad (1.61)$$

Στον όρο  $v_1 \times B_1$ , το  $B_1$  δίνεται από την εξίσωση του Maxwell  $\nabla \times E = -\partial B / \partial t$ ,

$$B_1 = -(1/\omega)\nabla \times E_s|_{r=r_0} \sin \omega t \quad (1.62)$$

Ο όρος δεύτερης τάξης της εξίσωσης (1.56) θα είναι:

$$m dv_2 / dt = -e[(\delta_{r1} \cdot \nabla)E + v_1 \times B_1] \quad (1.63)$$

Με την εισαγωγή των εξισώσεων (1.59), (1.60) και (1.62) στην (1.63) και την έκφραση αυτής ως μέση τιμή στο χρόνο, υπολογίζεται γενικά η μη γραμμική δύναμη:

$$m \left\langle \frac{dv_2}{dt} \right\rangle = -\frac{e^2}{m\omega^2} \frac{1}{2} [(E_s \cdot \nabla)E_s + E_s \times (\nabla \times E_s)] = f_{NL} \quad (1.64)$$

Ο όρος όμως  $(E_s \cdot \nabla)E_s$  απαλείφεται και η δύναμη γίνεται:

$$f_{NL} = -\frac{1}{4} \frac{e^2}{m\omega^2} \nabla E_s^2 \quad (1.65)$$

Αυτή είναι η ενεργός μη γραμμική δύναμη για ένα απλό ηλεκτρόνιο. Η δύναμη ανά  $m^3$  είναι  $f_{NL}$  φορές η πυκνότητα ηλεκτρονίων  $n_0$ , η οποία μπορεί να γραφτεί σε σχέση με την  $\omega_p^2$ . Ακόμα αφού ισχύει  $E_s^2 = 2 \langle E^2 \rangle$ , ο τελικός τύπος για την ponderomotive force θα είναι:

$$f_{NL} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla \frac{(e_0 E^2)}{2} \quad (1.66)$$

### 1.2.3. Διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε αραιό και «ψυχρό» πλάσμα

Η ανάλυση της διάδοσης εγκάρσιων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα μπορεί να γίνει με την βοήθεια των εξισώσεων του Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1 \quad (1.67)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{j}_1}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbf{E}}_1 \quad (1.68)$$

Η παραγωγή της σχέσης (1.68) ως προς το χρόνο δίνει:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} + \ddot{\mathbf{E}}_1 \quad (1.69)$$

Ενώ ο στροβιλισμός της (1.67) δίνει:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_1) - \nabla^2 \mathbf{E}_1 = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1 \quad (1.70)$$

Ο όρος  $\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1$  μπορεί να αντικατασταθεί από την (1.69) και υποθέτοντας λύση της μορφής  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  η εξίσωση (1.70) γίνεται :

$$-k(k \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 \quad (1.71)$$

Για εγκάρσια κύματα ισχύει  $k \cdot \mathbf{E}_1 = 0$  και άρα τελικά θα ισχύει:

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -i\omega \mathbf{j}_1 / \varepsilon_0 \quad (1.72)$$

Για κύματα τέτοιας υψηλής συχνότητας ώστε τα ιόντα να μπορούν να θεωρηθούν ακίνητα, το ρεύμα  $\mathbf{j}_1$  δίνεται μόνο από την κίνηση ηλεκτρονίων :

$$\mathbf{j}_1 = -n_0 e \mathbf{v}_{e1} \quad (1.73)$$

Από την γραμμικοποιημένη εξίσωση κίνησης ηλεκτρονίων , θα ισχύει (για  $KT_e = 0$ , «ψυχρό πλάσμα» και χρόνο συγκρούσεων  $t_c \rightarrow \infty$ , «αραιό πλάσμα»):

$$m \frac{\partial v_{e1}}{\partial t} = -eE$$

$$v_{e1} = \frac{eE_1}{im\omega}$$
(1.74)

Η εξίσωση (1.72) μπορεί να γραφτεί ως

$$(\omega^2 - c^2k^2)E_1 = \frac{i\omega}{\epsilon_0} n_0 e \frac{eE_1}{im\omega} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} E_1$$
(1.75)

Η έκφραση στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης είναι η γνωστή συχνότητα πλάσματος  $\omega_p^2$  και άρα αυτή γίνεται:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$$
(1.76)

Αυτή είναι η **σχέση διασποράς** για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται σε πλάσμα χωρίς στατικό μαγνητικό πεδίο και είναι τροποποιημένη σε σχέση με τη σχέση διασποράς στο κενό ,με τον όρο  $\omega_p^2$ .

Η ταχύτητα φάσης  $u_\phi$  θα είναι αντίστοιχα, μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό  $c$  :

$$u_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} > c^2$$
(1.77)

Όμως , η ταχύτητα ομάδας  $u_g$  δεν υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός :

$$\frac{d\omega}{dk} = u_g = \frac{c^2}{u_\phi}$$
(1.78)

Από την σχέση διασποράς για  $k=0$  υπολογίζεται η συχνότητα αποκοπής  $\omega = \omega_p$ , όπου και ορίζεται σαν την μικρότερη συχνότητα που μπορεί να διαδοθεί στο πλάσμα.

### **1.3. Διάδοση υπερβραχέων και υψηλής έντασης παλμών laser**

#### **1.3.1. Παλμικά laser**

Η λέξη Laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) σημαίνει «Ενισχυτής Φωτός που χρησιμοποιεί εξαναγκασμένη εκπομπή ακτινοβολίας». Η λέξη κλειδί εδώ είναι η «εξαναγκασμένη εκπομπή», το οποίο είναι και αυτό που επιτρέπει στο laser να παράγει υψηλής ισχύος ακτίνες φωτός που βρίσκονται σε μία ή παραπάνω ξεχωριστές συχνότητες.

Για την κατανόηση του τρόπου λειτουργίας ενός laser, πρέπει να γνωρίζουμε την ενεργειακή θεωρία των ατόμων. Έτσι στα σταθερά άτομα, τα ηλεκτρόνια βρίσκονται στα χαμηλότερα δυνατά επίπεδα/στιβάδες ενέργειας. Σε κάθε άτομο υπάρχει ένας αριθμός διακριτών επιπέδων ενέργειας, τα οποία μπορεί να έχουν ένα ηλεκτρόνιο, αυτά τα ονομάζουμε καταστάσεις (states). Για να αλλάξει επίπεδο ένα ηλεκτρόνιο που βρίσκεται στην κατώτερη στοιβάδα, θα πρέπει το άτομο να απορροφήσει ενέργεια. Όταν αυτό συμβεί αυτό, το άτομο διεγείρεται και το ηλεκτρόνιο ανεβαίνει σε ψηλότερο ενεργειακό επίπεδο. Στη φάση αυτή το ηλεκτρόνιο είναι ασταθές και συνήθως γυρνάει γρήγορα στην αρχική του κατάσταση, απελευθερώνοντας ενέργεια με τη μορφή φωτός (φωτόνιο).

Οι τεχνικές δημιουργίας παλμών είναι οι εξής:

- Η τεχνική διαμόρφωσης του παράγοντα Q (Q-switching)
- Η τεχνική της εγκλειδωσής ρυθμών (Mode locking)

- Q switched laser

Η αξίωση ότι το κέρδος σταθερής κατάστασης του μέσου λείζερ είναι κλειδωμένο στη στάθμη κατωφλίου περιορίζει την έξοδο του λείζερ. Εάν η ποιότητα του παράγοντα Q του μέτρου συντονισμένου λείζερ μπορεί να είναι κρατημένος πρώτος σε μια χαμηλή αξία, κατόπιν το κατώτατο όριο

ταλάντωσής τους (δηλ. ο κορεσμός  $\gamma$ ) δεν θα επιτευχθεί παρά το πολύ μεγάλο  $\gamma$  που μπορεί να ληφθεί με την ισχυρή άντληση.

Όταν αυτός ο χαμηλός παράγοντας του  $Q$  μεταπηδά ξαφνικά στην κανονική τιμή  $\tau = 0$ , κατόπιν το αρχικό  $\gamma$  υπερβαίνει πολύ το  $\gamma_t$  της κοιλότητας προς στιγμήν στο εκείνο το  $\tau = 0_+$ . Μέσα σε ένα λίγο χρονικό διάστημα στο  $\tau > 0$ , τα εύρη διάφορων ηχηρών τρόπων, δηλ. η συνολική αποθηκευμένη ενέργεια στην κοιλότητα λείζερ, θα ενισχύσουν γρήγορα σε μια πολύ μεγάλη αξία. Δεδομένου ότι η αποθηκευμένη ενέργεια ενισχύει σε ένα τέτοιο μεγάλο εύρος, η αρχική αντιστροφή πληθυσμών εξαντλείται από την υποκινημένη εκπομπή. Επομένως, μετά από την αρχική συγκέντρωση, η αποθηκευμένη ενέργεια της κοιλότητας θα αρχίσει να αποσυντίθεται. Κατά τη διάρκεια αυτής της παροδικής περιόδου, η μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια στην κοιλότητα θα φθάσει προσωρινά πολύ σε έναν μεγάλης αξίας, και μέρος αυτής της αποθηκευμένης ενέργειας διαβιβάζεται ως παραγωγή. Αυτό είναι γνωστό ως μετατροπή του  $Q$ . Είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται για να λάβει έναν σφυγμό της υψηλής δύναμης λείζερ. Ο τύπος για το  $Q$  είναι ο εξής

$$Q = -\frac{\omega E_{cavity}}{dE_{cavity} / dt} = \omega t_c = \frac{\omega n D}{c[aD - \ln(r_1 r_2)]} \quad (1.79)$$

όπου  $Q$ (quality factor) ο συντελεστής απόδοσης (ενέργεια που έχει συσσωρευτεί μέσα στη κοιλότητα/ενέργεια ανά κύκλο )

- -Mode locked laser-

Είναι γνωστό στην ανάλυση Fourier ότι όταν υπάρχουν διάφοροι όροι Fourier με το ίδιες εύρος και τη φάση, καθώς επίσης και ίσο διάστημα συχνότητας μεταξύ των παρακείμενων όρων, το άθροισμα όλων των όρων θα έχει μια περιοδική χρονική παραλλαγή των αιχμηρών παλμών. Με άλλα λόγια, εάν προσθέτουμε απλά τους τομείς διάφορων ταλαντευμένων τρόπων με ίδιο εύρος και τη φάση, καθώς επίσης και ίσο διάστημα στη συχνότητα, λαμβάνουμε από μαθηματική άποψη

$$E = \pm \sum_{-(N-1)/2}^{+(N-1)/2} A e^{j(\omega_0 + n\omega + \varphi_n)t} = e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi_n} A \frac{\sin(N\omega t / 2)}{\sin(\omega t / 2)} \omega_0 \quad (1.80)$$

Όπου  $A$  και  $\varphi_n$  είναι τα πλάτη και οι φάσεις όλων των καταστάσεων,  $\omega_0$  η κεντρική συχνότητα και  $\omega$  η πεπερασμένου χρόνου συχνότητα ανάμεσα σε γειτονικούς ρυθμούς.  $E(t)$  είναι τώρα η περίοδος σε  $T=2\pi/\omega$ . Η δύναμη η οποία είναι ανάλογη στο  $E^*E$  είναι ανάλογη του  $\sin^2(N\omega t)/\sin^2(\omega t)$

Άρα μπορούμε να πούμε

-Η συνολική δύναμη εκπέμπεται υπό μορφή τύπου σφυγμού με  $T = 2\pi/\omega$ .

-Η μέγιστη δύναμη είναι  $N$  φορές η μέση δύναμη. Το  $N$  είναι ο συνολικός αριθμός των καταστάσεων.

-Το μέγιστο εύρος πεδίου είναι χρόνοι  $N$  το εύρος ενός ενιαίου τρόπου

-Το μεμονωμένο πλάτος σφυγμού, που ορίζεται ως ο χρόνος από την αιχμή στο πρώτο μηδέν, είναι  $\tau = T/N$ . Κατά συνέπεια ο σφυγμός μπορεί να είναι πολύ στενός με το μεγάλο  $N$ .

Με την εγκλείδωση ρυθμών, οι ρυθμοί της κοιλότητας ταλαντώνονται σε συμφωνία και η δέσμη εξόδου είναι χρονικά ορισμένη με περίοδο ανά παλμό το μίας πλήρους διαδρομής μέσα στην κοιλότητα.

Υπάρχουν δύο τεχνικές εγκύδωσης, η ενεργητική και η παθητική.

-Ενεργή εγκλείδωση έχουμε όταν, όπου η ακτινοβολία στην κοιλότητα διαμορφώνεται με κάποιο σήμα που παράγεται εκτός κοιλότητας και είναι συντονισμένο στο χρόνο μίας πλήρους διαδρομής στην κοιλότητα

- Παθητική εγκλείδωση (self mode locking) έχουμε όταν, όπου η ακτινοβολία δημιουργεί την απαραίτητη διαμόρφωση μέσω χρήσης μη γραμμικών φαινομένων σε κάποια από τα υποσυστήματα της κοιλότητας.

Το πλεονέκτημα αποτελεί το ότι η διαμόρφωση είναι αυτομάτως συντονισμένη με την κοιλότητα.

## Q SWITCHING-MODE LOCKING

Δύο τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή των σύντομων οπτικών παλμών από τα λέιζερ είναι γνωστές σαν την q-switching και mode locking. Ένας ακουστικοοπτικός διαμορφωτής χρησιμοποιήθηκε από το 1986 για να λάβει τους Q-switched οπτικούς παλμούς από τα λέιζερ ινών. Η q-switch παραμένει μια χρήσιμη τεχνική για τα λέιζερ ινών δεδομένου ότι μπορεί

να παραγάγει την υψηλή μέγιστος-δύναμη (> παλμοί 1 KW) τα των οποίων μήκη κύματος μπορούν να καλύψουν πέρα από ένα ευρύ φάσμα που καλύπτει το ολόκληρο φάσμα κέρδους. Σε ένα πείραμα του 1999, οι Q-switched παλμοί από ένα διπλό-ντυμένο λέιζερ Yb-ινών θα μπορούσαν να συντονιστούν από 1060 έως 1100nm διατηρώντας τις μέγιστες δυνάμεις τόσο μεγάλες όπως 2 KW. Σε ένα άλλο πείραμα, ένα fabry-Perot étalon, με μια ελεύθερη φασματική σειρά 0.535 nm και μιας λεπτότητας 76, επέτρεψε την εκπομπή των Q-switched παλμών από ένα EDFL σε περισσότερα από 90 ευδιάκριτα μήκη κύματος ταυτόχρονα. Ενέργειες παλμού τόσο υψηλές όπως 2.3mJ έχουν παραχθεί σε ένα επαναληπτικό ποσοστό 500Hz από ένα επένδυση-αντλημένο Yb-doped λέιζερ ινών.

Η q- switched παράγει τους σχετικά ευρείς οπτικούς παλμούς (100nsec). Αντίθετα, το mode-locking τρόπου μπορεί να παραγάγει τους παλμούς πιο σύντομους από 100fs. Τα πρόωρα πειράματα στα ND- doped λέιζερ ινών παρήγαγαν τους παλμούς διάρκειας >1nsec. Τα πλάτη παλμών 120psec λήφθηκαν μέχρι το 1988 χρησιμοποιώντας μια σειρά λέιζερ-διόδων για την άντληση. Το 1989, η προσοχή εστίασε στην ανάπτυξη του EDFLs λόγω των πιθανών αιτήσεων τους στα φωτοκυματικά συστήματα.

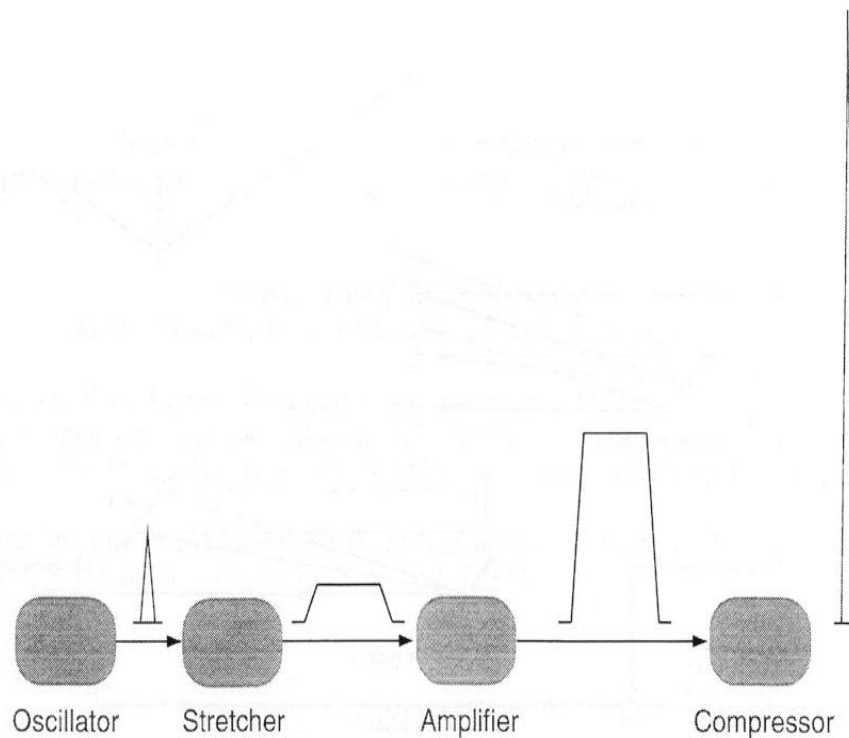
#### --- Chirped-Pulse Amplification (CPA)---

Πολλές εφαρμογές απαιτούν τους οπτικούς παλμούς τις υψηλές ενέργειες (1 J ή περισσότεροι) που δεν είναι εύκολα διαθέσιμα από το λέιζερ που παράγει η ακολουθία παλμού. Είναι έπειτα απαραίτητο να ενισχυθεί ο παλμός εξωτερικά με τη χρησιμοποίηση ενός ή περισσότερων ενισχυτών. Η τεχνική chirped-pulse amplification έχει βρεθεί εξαιρετικά χρήσιμη για αυτόν το λόγο. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε από το 1974 αλλά επέστησε τη διαδεδομένη προσοχή μόνο μετά από το 1985 όταν χρησιμοποιήθηκε για να λάβει τους υπερβραχιούς παλμούς με τις μέγιστες δυνάμεις teraWatt.

Η βασική ιδέα πίσω από την ενίσχυση chirped-παλμού αποτελείται από το γρήγορο ανοιγο-κλείσιμο και το τέντωμα του σφυγμού προτού να ενισχυθεί. Τα μη γραμμικά αποτελέσματα στις οπτικές ίνες (SPM) χρησιμοποιούνται συχνά για αυτόν το λόγο. Κατά τη διάρκεια της μετάβασής του μέσω της ίνας, ο παλμός όχι μόνο ανοιγο-κλείνει αλλά διευρύνει επίσης. Η διεύρυνση παλμού



μειώνει τη μέγιστη δύναμη ουσιαστικά, που καθιστά το πιθανό να ενισχύσει το παλμό από μια μεγάλη ποσότητα πριν από τα όρια κορεσμού κέρδους η αποδοτικότητα ενέργεια-εξαγωγής.



**1-4 Chirped-Pulse Amplification (CPA)** παρατηρούμε πως μετά την βαθμίδα του ταλαντωτή ο παλμός μας ανοίγει στον χρόνο (βαθμίδα Stetcher), στην συνέχεια ενισχύεται (βαθμίδα ενισχυτή) και τέλος συμπιέζεται (βαθμίδα Compressor).

### 1.3.2. σύντομη περιγραφή – χαρακτηριστικά – ιστορική ανάδρομη

Την διάρκεια των τελευταίων 30 χρόνων έχει γίνει μεγάλη πρόοδος όσο αναφορά την παραγωγή υπερβραχέων παλμών λέιζερ. Με τον όρο υπερβραχέα εννοούμε τους παλμούς λέιζερ με πολύ μικρή χρονική διάρκεια, της τάξης 1 nano-second και με πολύ μεγάλη ισχύ. Ένας φωτεινός παλμός διάρκειας 1 picosecond, αντιστοιχεί σε μήκος 0.3mm οπότε καταλαβαίνουμε πως μπορούμε να μετρήσουμε χάρις σε αυτούς μεγάλες αποστάσεις με ακρίβεια χιλιοστού. Η αλληλεπίδραση παλμών λέιζερ μεγάλης ισχύος με

ανόργανη και οργανική ύλη έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον σε αρκετούς κλάδους (ιατρική, στρατός κτλ), όμως μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές αυτών των υπερβραχέων παλμών είναι για την παραγωγή πλάσματος. Μερικές ακόμα εφαρμογές συναντάμε στα οπτικά ραντάρ και στους οπτικούς υπολογιστές, στις μη γραμμικές ιδιότητες υλικών, επικοινωνίες κτλ.

Το 1961 έχουμε θα κάνουν την εμφάνιση τους τα πρώτα παλμικά λέιζερ όταν ο Hellwarth πρότεινε μια νέα τεχνική για την παραγωγή παλμών λέιζερ μεγάλης ισχύος, η οποία ονομάστηκε μετατροπή Q (Q-switching). Αυτή πραγματοποιήθηκε το 1962 από τους McClung και ο Hellwarth, με μικρότερη χρονική διάρκεια παλμών το 1nanosecond. Η μετάβαση σε διάρκεια παλμών της τάξεως picosecond άρχισε με την τεχνική εγκλείδωσης ρυθμού (mode-locking). Το 1965 έχουμε τα πρώτα πειράματα από τον Crowell, με την μέθοδο της αυθόρμητης εγκλείδωσης παλμού (spontaneous mode-locking) σε λέιζερ He-Ne. Αυτή είναι η βάση που αποτελούν οι σημερινές τεχνικές ενεργής και παθητικής εγκλείδωσης ρυθμού. Οι παλμοί με την παραπάνω τεχνική φτάνουν τα  $10^{-14}$  sec. Το μειονέκτημα αυτής της τεχνικής είναι ότι παράγονται σειρές από παλμούς 1picosecond και όχι μόνο ένας παλμός, με αποτέλεσμα να αναπτυχθεί μια τεχνική που να απομονώνει έναν παλμό από αυτούς. Οι σύγχρονες απαιτήσεις της έρευνας και εφαρμογών τοποθετούνται στην παραγωγή παλμών pico-second μεγάλης ισχύος με δυνατότητα επιλογής του μήκους κύματος. Αυτό το μεγάλο πλεονέκτημα οδήγησε στην ευρύτερη χρήση των τεχνικών εγκλείδωσης ρυθμού. Συνήθως οι παλμοί pico-second, προέρχονται από χρωστικής συνεχούς ακτινοβολίας αντλούμενο από ένα λέιζερ ιόντων εγκλειδωμένου ρυθμού, απομονώνονται από ένα ηλεκτροοπτικό επιλογέα παλμών και στη συνέχεια ενισχύονται σε μια αλυσίδα ενισχυτών χρωστικής διάταξης που αντλείται είτε από την δεύτερη είτε από την τρίτη αρμονική ενός λέιζερ Nd:YAG είτε από ένα λέιζερ διεγερμένων διμερών.

Για την αποφυγή των περιορισμών των παραπάνω συστημάτων από το 1975 γίνονται προσπάθειες νέων και πιο εύχρηστων μεθόδων για την παραγωγή πολύ στενών παλμών λέιζερ από τα λέιζερ χρωστικής.

### 1.3.3. Σύστημα εξισώσεων

Πρότυπες εξισώσεις που κατευθύνουν τη μη γραμμική διάδοση των παλμών λέιζερ και το της λεπτής δέσμης.

Προκειμένου να γίνει αντιληπτή η φυσική των λεπτών δεσμών των υπερβραχιών σφυγμών λέιζερ στον αέρα και γενικότερα στα αέρια, τα στερεά και τα υγρά, διάφορες ομάδες έχουν αναπτύξει τους κώδικες διάδοσης βασισμένους στις διάφορες ομοιοκατευθυνόμενες εξισώσεις διάδοσης (δείτε π.χ. Moloney και Kolesik, το 2007 Couairon και Mysyrowicz, 2006 Chin et al. 2005, για μια αναθεώρηση). Οι πρώτες αριθμητικές προσομοιώσεις σε αυτόν τον τομέα άρχισαν με ένα ελάχιστο πρότυπο υπό μορφή μη γραμμικής εξίσωσης του Schrodinger που περιγράφει τη διάδοση σφυγμού και που πιάνει τον ουσιαστικό της φυσικής χωρίς ανάπτυξη των βαριών αριθμητικών εργαλείων. Η επιρροή των διάφορων φυσικών αποτελεσμάτων μελετήθηκε αργότερα θεωρητικά και αριθμητικά με την προσθήκη των όρων πηγής σε αυτό το πρότυπο. Εδώ, η παρουσίαση παρακολουθεί την ιστορική ανάπτυξη αυτού του προτύπου, το οποίο έχει γίνει σαν πρότυπο στον τομέα.

Πρόσφατα, οι Kolesik και Moloney (2004a) έχουν δείξει ότι μια γενική ομοιοκατευθυνόμενη εξίσωση διάδοσης παλμού επιτρέπει την παραγωγή όλων των προτύπων που έχουν χρησιμοποιηθεί προηγουμένως στην λεπτή δέσμη femtosecond καθώς επίσης και σε άλλη ενασχόληση τομέων με τη διάδοση των σφυγμών λέιζερ. Από τις εξισώσεις Maxwell και τις συστατικές εξισώσεις για το μέσο, μια διανυσματική εξίσωση κυμάτων που οδηγεί την εξέλιξη από το λέιζερ ο παλμός σε ένα διαφανές μη γραμμικό μέσο διαβάσει:

$$\nabla^2 E - \nabla(\nabla \cdot E) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^t n^2(r, t-t') E(t') dt' = \mu_0 \left( \frac{\partial^2 P_{nl}}{\partial t^2} + \frac{\partial J_p}{\partial t} \right) \quad (1.81)$$

Όπου  $n^2 = 1 + \epsilon_0 \chi^{(1)}$  είναι ο γραμμικός δείκτης διάθλασης λόγω του κενού και τα περιορισμένων ηλεκτρονίων,  $\chi^{(1)}$  είναι ο γραμμικός όρος επιδεκτικότητας,  $P_{nl}$  είναι η μη γραμμική πόλωση που συνδέεται με σταθερά ηλεκτρόνια,  $J_p$  πυκνότητα πλάσματος που συνδέεται με τα ελεύθερα ηλεκτρόνια (Newell and Moloney, 1992; Liu et al., 2002a; Couairon et al., 2002; Sprangle et al., 2002).

-Απλοποιημένο μοντέλο. Όταν το πεδίο λέιζερ είναι και παραμένει γραμμικά πολωμένο ανάλογο του  $e_x$ , το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να αποσυντεθεί σε ένα φέρον κύμα και μια περιβάλλουσα σαν,  $E(x, y, z, t) = 1/2 \mathcal{E}(x, y, z, t) \exp[i(kz - \omega_0 t)] e_x + c.c.$ , όπου  $z$  που το  $z$  είναι η κατεύθυνση διάδοσης,  $k$  και  $\omega_0$  είναι ο κυματάρριθμος και η συχνότητα του σφυγμού λέιζερ αντίστοιχα. Μια κλιμακωτή εξίσωση του μη γραμμικού τύπου Schrodinger λαμβάνεται έπειτα με την παραμέληση του διανισματικού τελεστή  $\nabla(\nabla \cdot E)$  και χρησιμοποιώντας το πλαίσιο αναφοράς του παλμού ( $z, t = t_{lab} - z / u_g(\omega_0)$ ), όπου  $u_g(\omega_0) \equiv \partial\omega / \partial k|_{\omega_0}$  δείχνει την ταχύτητα ομάδας

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \mathcal{E} + ik_0 n_2 |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} - i \frac{k_0}{2n_0} \frac{\rho}{\rho_c} \mathcal{E} \quad (1.82)$$

Εδώ η γραμμική ολοκλήρωση του δείκτη  $n_0$  έχουμε υποθέσει ότι είναι σταθερό. Η εξίσωση (1.82) περιγράφει την μπροστινή διάδοση της αργά ποικίλλουσας περιβάλλουσας  $\mathcal{E}(x, y, z, t)$  του παλμού στην παρα-αξονική προσέγγιση. Ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά (rhs) στην (1.82) είναι ο απολογισμός για τη διάθλαση μέσα στο εγκάρσιο επίπεδο με  $\Delta_{\perp} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Ο δεύτερος όρος υπολογίζει τους όρους για το Kerr effect. Η εξάρτησή της προέρχεται από τη μη γραμμική πόλωση  $P_{nl}$  που διαβάζει στην κυρίαρχη τρίτης τάξης για ένα κέντρο-συμμετρικό μέσο:

$$P_{nl} \equiv \epsilon_0 x^{(3)} |E|^2 E, \quad \mu\epsilon \quad x^{(3)} = 4\epsilon_0 c n_2 n_0^2 / 3 \quad (1.83)$$

Ο όρος Kerr στην εξίσωση (1.82) λαμβάνεται με την εισαγωγή της αποσύνθεσης μεταφορέας-κυμάτων στην εξίσωση (1.83). Για να πάρουμε την αποεστίαση πλάσματος στην εξίσωση (1.82), αυτή η αποσύνθεση εισάγεται επίσης στην εξίσωση εξέλιξης για την πυκνότητα ρεύματος στο πλάσμα

$$\frac{\partial J_p}{\partial t} = -\frac{e^2}{m_e} p E \quad (1.84)$$

Όπου  $\rho$  συμβολίζουμε την πυκνότητα ηλεκτρονίων και  $p_c \equiv \epsilon_0 m_e \omega_0^2 / e^2$  η κρίσιμη πυκνότητα πλάσματος επάνω από την οποία το πλάσμα γίνεται

αδιαφανές. Επομένως, το πρότυπο λαμβάνει υπόψη τα κύρια φυσικά αποτελέσματα που προτείνονται για να είναι αρμόδιο για αυτό-διοχέτευση υπερβραχιών παλμών λέιζερ στον αέρα από Brauh (1995). Υιοθετούμε τη σύμβαση  $I \equiv |\mathcal{E}|^2$  είναι μια ένταση που εκφράζεται σε  $W/cm^2$  ώστε να γίνει το  $n_2 |\mathcal{E}|^2$  αδιάστατο. Η εξίσωση (1.82) πρέπει να λυθεί ταυτόχρονα με την εξίσωση περιγράφοντας την εξέλιξη της πυκνότητας των ηλεκτρονίων που παράγονται κυρίως από το φωτοϊονισμό:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \kappa |\mathcal{E}|^{2K} \rho_{at} \quad (1.85)$$

όπου υποτίθεται εδώ ότι ο φωτοϊονισμός εμφανίζεται στο σύστημα φωτονίων. Η ποσότητα  $K$  δείχνει το συντελεστή του ποσοστού ιονισμού φωτονίων.

---Μοντέλο που συμπεριλαμβάνει την διασπορά ταχύτητας ομάδας, την συμβολή Raman, απορρόφησης φωτονίων πλάσματος, χιονοστιβάδας και του επανασυνδυασμού.

Αυτό το πρότυπο επεκτάθηκε με να λάβει υπόψη τα πρόσθετα φυσικά αποτελέσματα ως όρους πηγής για την εξίσωση διάδοσης καθώς επίσης και για την εξίσωση παραγωγής ηλεκτρονίων:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathcal{E} - i \frac{k'' \partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + N(|\mathcal{E}|^2, \rho) \mathcal{E} \quad (1.86)$$

$$N(|\mathcal{E}|^2, \rho) = N_{kerr}(|\mathcal{E}|^2) + N_{plasma}(\rho) + N_{MPA}(|\mathcal{E}|^2), \quad (1.87)$$

$$N_{kerr}(|\mathcal{E}|^2) = ik_0 n_2 (1-a) |\mathcal{E}(x, y, z, t)|^2 + ik_0 n_2 \alpha \int_{-\infty}^t R(t-\tau) |\mathcal{E}(x, y, z, \tau)|^2 d\tau$$

$$(1.88)$$

$$N_{plasma}(\rho) = -\frac{\sigma}{2} (1 + i\omega_0 \tau_c) \rho \quad (1.89)$$

$$N_{MPA}(|\mathcal{E}|^2) = -\frac{\beta \kappa}{2} |\mathcal{E}|^{2K-2} \left[ 1 - \frac{\rho}{\rho_{at}} \right] \quad (1.90)$$

Η εξέλιξη της πυκνότητας ηλεκτρονίων που εισάγεται στην εξίσωση (1.89) δίνεται από

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \kappa |\mathcal{E}|^{2\kappa} (\rho_{at} - \rho) + \frac{\sigma}{U_i} \rho |\mathcal{E}|^2 - \alpha \rho^2 \quad (1.91)$$

Για την ακρίβεια η εξάρτηση του ηλεκτρικού πεδίου της περιβάλλουσας  $\mathcal{E}$  και ηλεκτρικής πυκνότητας  $\rho$  σε  $(x,y,z,t)$  που έχουμε αναφέρει στην εξίσωση (1.88). Ο δεύτερος όρος rhs στην εξίσωση (1.86) έχει απολογισμό για τη διασπορά ταχύτητας ομάδας με το συντελεστή  $\kappa \equiv \partial^2 \kappa / \partial^2 \omega|_{\omega_0}$ . Η τελευταία περίοδος στα rhs στην εξίσωση (1.86) μετράει τη μη γραμμικότητα από το οπτικό φαινόμενο Kerr, το πλάσμα και την μεγάλη απορρόφηση φωτονίων (MPA) (εξίσωση (1.87)).

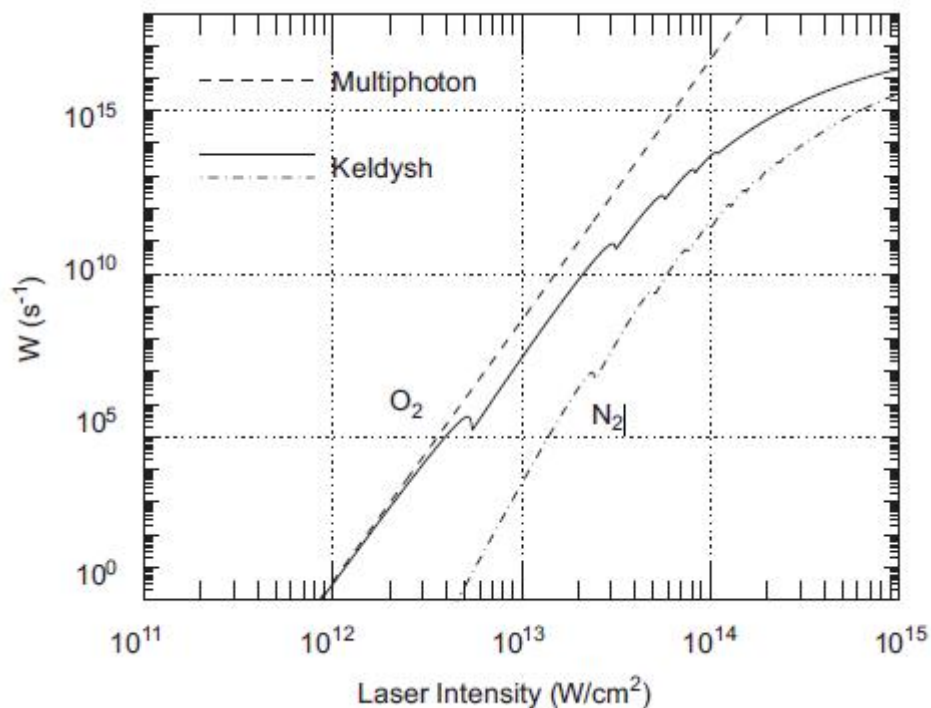
-Παραγωγή πλάσματος από τον οπτικό ιονισμό πεδίου

Η εξίσωση εξέλιξης για την πυκνότητα ηλεκτρονίων μπορεί να γενικευτεί ελαφρώς προκειμένου να περιγραφεί ο φωτοϊονισμός όχι μόνο στο πολύ-φωτονιακό καθεστώς αλλά και στο καθεστώς σηράγγων έγκυρο για τις υψηλές εντάσεις.

$$\frac{\partial}{\partial t} = W(|\mathcal{E}|^2)(\rho_{at} - \rho) + \frac{\sigma}{U_i} \rho |\mathcal{E}|^2 \quad (1.92)$$

Στην εξίσωση (1.92) ο φωτο-ιονιστικός βαθμός  $W(|\mathcal{E}|^2)$  περιγράφει την πιθανότητα ιονισμού από ένα άτομο με δυναμικό  $U_i$ .

Το ποσοστό ιονισμού φωτονίων φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή. Το ποσοστό ιονισμού από την πλήρη διατύπωση keldysh-PPT παρουσιάζεται από τη συνεχή καμπύλη για το οξυγόνο και από την διακεκομμένη με τελείες καμπύλη για το άζωτο. Γύρω από 1013W/cm<sup>2</sup> το ποσοστό ιονισμού φωτονίων για το οξυγόνο που παρουσιάζεται στην διακεκομμένη γραμμή υπερβαίνει μέχρι δύο δεκαετίες το αντίστοιχό του που υπολογίζεται από την πλήρη διατύπωση keldysh-PPT



1-5 ρυθμός ιονισμού για οξυγόνο(συνεχής καμπύλη) και νίτρο (διακεκομμένη με τελείες καμπύλη) με ένταση 800nm. Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει το ρυθμό ιονισμού στο οξυγόνο.

## 1.4. τρόποι εκπομπής από πλάσμα

### 1.4.1. THz

Τα τελευταία χρόνια CPA fempto-second terawatt λειζερ, όπως teramobile

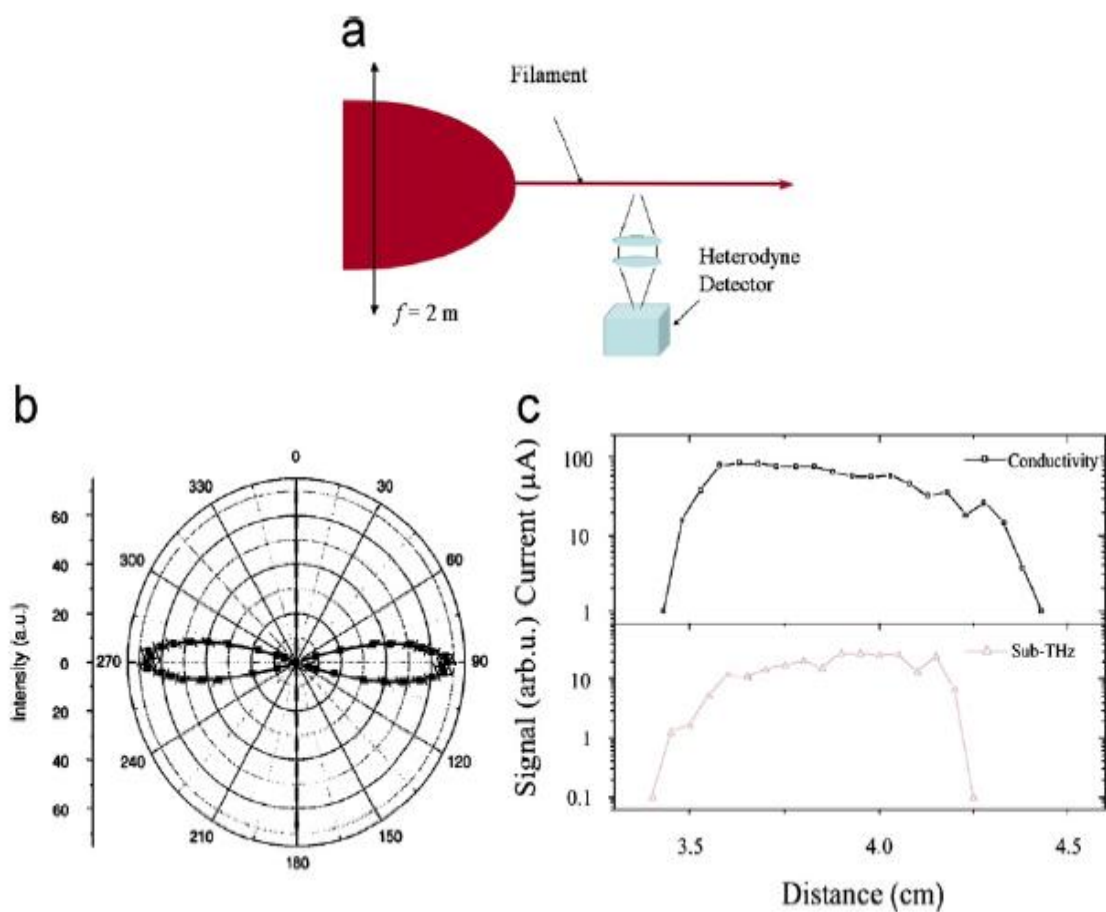
αυξάνουν ολοένα και περισσότερο και χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές της φυσικής, όπως συσκευή εκπομπής παλμών, εργαστηριακές μετρήσεις, ηλεκτρικές εκκενώσεις και παραγωγή THz κυμάτων.

Μια πολύ λεπτή δέσμη είναι το αποτέλεσμα του δυναμικού ανταγωνισμού ανάμεσα σε δύο βασικά φαινόμενα, το οπτικό φαινόμενο Kerr (optical Kerr effect), το οποίο περιλαμβάνει την αυτό-εστίαση, και ιονισμός πολλαπλών φωτονίων (multi-photon ionization), που δημιουργεί το πλάσμα, τα οποία διαχωρίζουν την ακτίνα λέιζερ.

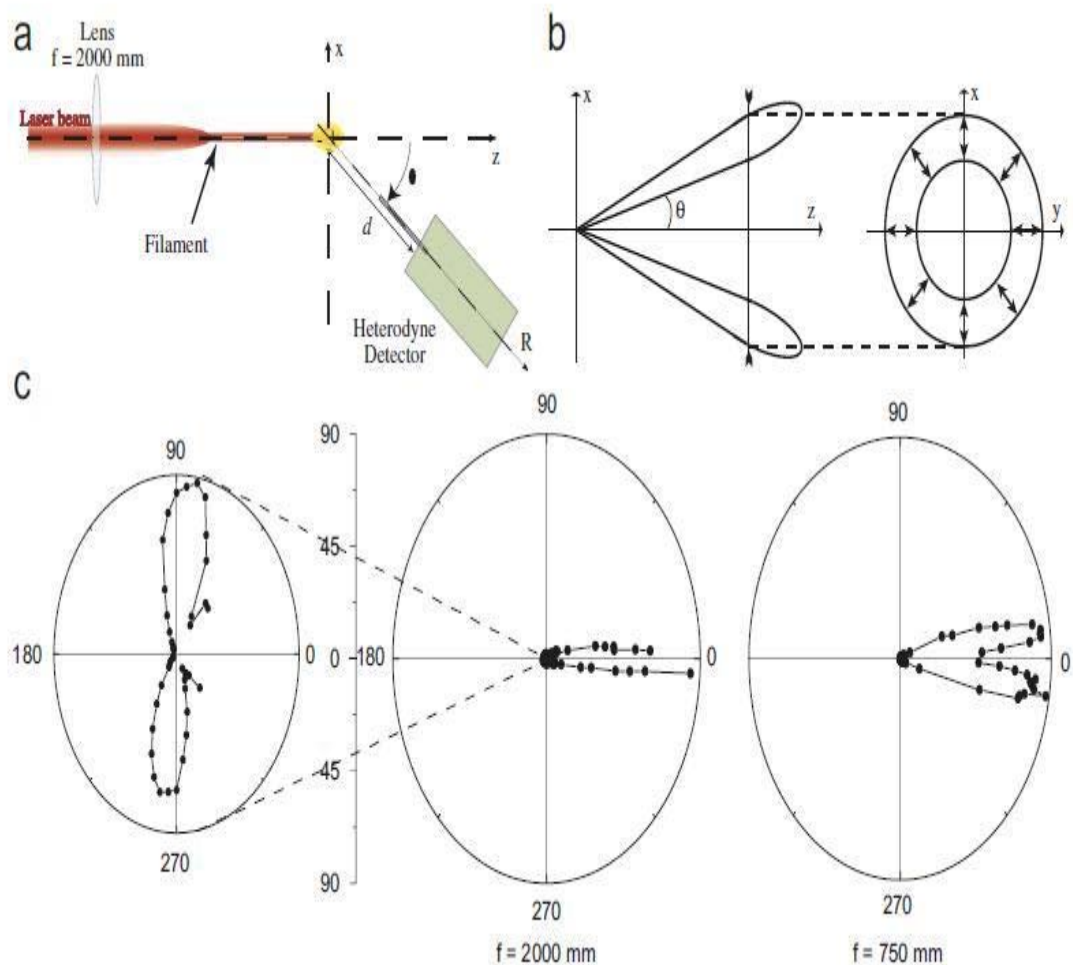
Επομένως ο παλμός λέιζερ μπαίνει σε αυτό-οδηγούμενο σύστημα, το οποίο παραμένει σταθερό μέχρι η ισχύς του παλμού να πέσει κάτω από την οριακή τιμή (κατώφλι)  $P_{cr}$  που ονομάζεται κρίσιμη ισχύς. Στον αέρα το μήκος κύματος του λέιζερ είναι περίπου  $800\text{nm} \approx 5\text{GW}$ . Στην διέγερση αυτό-διεγερούμενου παλμού, ένα λεπτό κανάλι πλάσματος με πυκνότητα  $\approx n_e = 10^{16}\text{cm}^{-3}$  μπορεί να παραχθεί. Η διάρκεια ύπαρξης του πλάσματος ορίζεται από μια πρώτη γρήγορη εξασθένηση μερικών nano-second και συνεχίζει να πέφτει εκθετικά με διάρκεια ζωής περίπου 120 nano-second.

Κατά την διάρκεια διαδικασίας δημιουργίας της δέσμης, η ενέργεια του λέιζερ είναι μερικώς μετασχηματισμένη σε δευτερογενή ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, καταλήγοντας σε υπέρ-συνεχής σειράς ή κωνική διάδοση φωτός, όπως επίσης και μια THz μετάδοση από μια δέσμη, από μέσα διαφορετικών μηχανισμών. Άρα η δευτερογενής ακτινοβολία που εκπέψαμε καλύπτει ολόκληρο το ορατό φάσμα από UV έως IR, και το THz πεδίο κάτω από 100GHz. Παρ' όλα αυτά δεν υπάρχει πειραματική απόδειξη και/ή θεωρητική πρόβλεψη ακόμα αναφέρει για ένα εσωτερικό μηχανισμό στο κανάλι του πλάσματος, ο οποίος θα είναι υπεύθυνος για την εκπομπή αυθόρμητης ακτινοβολίας





1-6 a) Γενικό διάγραμμα για την ανίχνευση της υπο-THz ακτινοβολίας από ένα κανάλι πλάσματος που δημιουργήθηκε από μια λεπτή δέσμη φωτός. b) Διάγραμμα ακτινοβολίας, μας δείχνει δύο λοβούς με μέγιστη ένταση. Οι λοβοί είναι κάθετοι στη λεπτή δέσμη φωτός (Tzortzakis et al.2002). c) Σύγκριση των λεπτών δεσμών φωτός που μετρούνται από την αγωγιμότητα και από την ανίχνευση υπο-THz.



1-7 a) Πειραματική υλοποίηση για την μέτρηση εκπομπής των THz .b) Κατεύθυνση των THz κυμάτων πόλωσης σε εκπομπή κώνου. c) Σύγκριση μεταξύ ακτίνας και πρόωρης THz εκπομπής από μια δέσμη. Το διάγραμμα πόλωσης από μια THz για την ένταση εκπομπής σε συνάρτηση κωνικής γωνίας ορισμού στην (b) δείχνει δύο διαφορετικά μήκη εστίασης  $f=2\text{m}$  (μέση)  $f=75\text{cm}$  (δεξιά). Η ακτινική εκπομπή (αριστερά) είναι μεγεθυμένο από ένα παράγοντα 100. (D'Amico et al. 2007b).

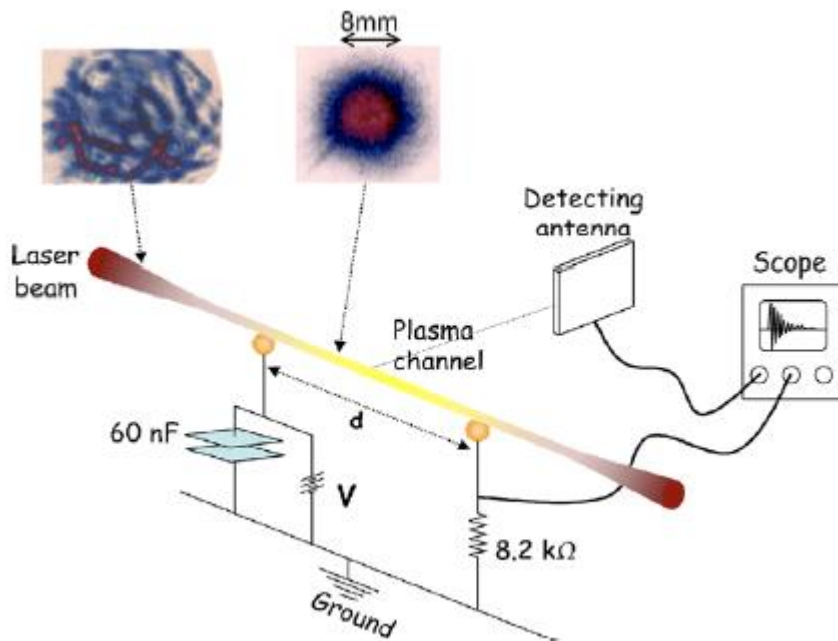
### 1.4.2. Δίπολο

Για να πραγματοποιηθούν ασύρματες επικοινωνίες θα πρέπει η ισχύς εξόδου του πομπού να μεταφερθεί σε κάποια κατάλληλη διάταξη από την οποία θα ακτινοβοληθεί στον χώρο σαν ηλεκτομαγνητικό κύμα.

Σαν κεραίες θα ορίσουμε τις διατάξεις που ακτινοβολούν ή λαμβάνουν ηλεκτομαγνητικά κύματα στον χώρο. Σαν γραμμές μεταφοράς θα ορίσουμε τις διατάξεις που χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά ισχύος από τους πομπούς στις κεραίες ή από τις κεραίες στους δέκτες. Έτσι για την εκπομπή θα συνδέουμε τις κεραίες στην έξοδο ενός πομπού ενώ για την λήψη στην είσοδο ενός δέκτη. Μια κεραία εκπομπής μπορεί να εργαστεί εξίσου καλά και ως κεραία λήψης και αντίστροφα. Για τον λόγο αυτό θα περιοριστούμε στην εξέταση της κεραίας εκπομπής αφού η μελέτη καλύπτει και τις κεραίες λήψης, παρά το γεγονός ότι στην πράξη οι κεραίες εκπομπής έχουν διαφορετική μορφή από αυτές της λήψης και αυτό γιατί σχεδιάζονται για να ικανοποιούν διαφορετικές απαιτήσεις. Οι κεραίες συναντιούνται με μεγάλη ποικιλομορφία σε μεγέθη και σχήματα. Μπορεί να είναι κυλινδρική, επίπεδη, να είναι μεγάλων διαστάσεων αποτελώντας συστοιχία από επιμέρους κεραίες, ή ακόμα να είναι διακριτική όσο ένα κομμάτι καλωδίου. Η πιο απλή κεραία είναι το δίπολο το οποίο ονομάζεται και "στοιχειώδες βραχύ δίπολο" ή απλά "δίπολο του HERTZ".

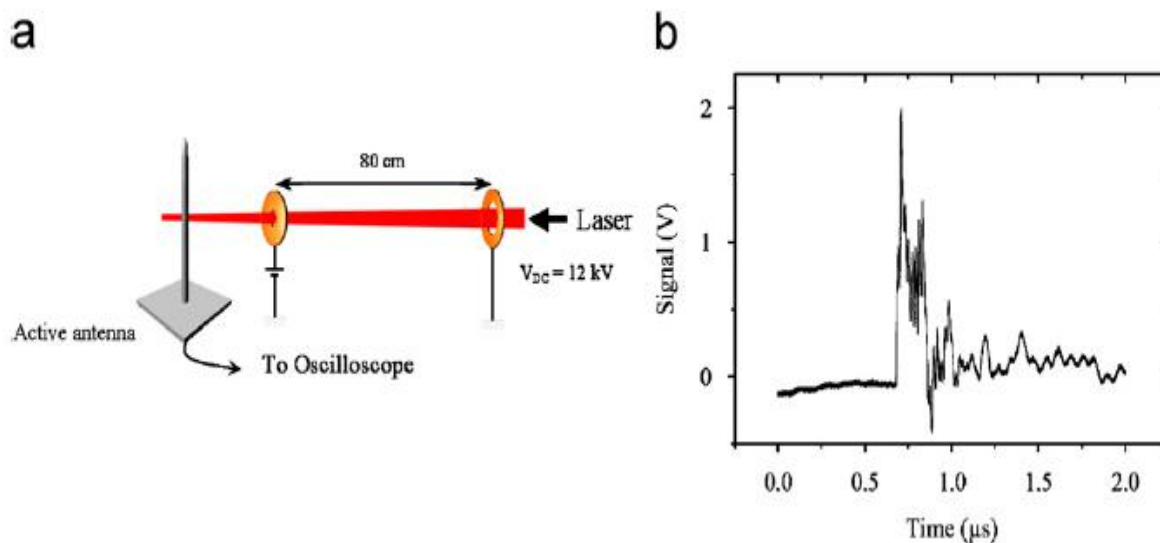
Η κεραία αποτελεί απαραίτητο στοιχείο ενός ασύρματου πομποδέκτη και φαινομενικά είναι ένα από τα πιο απλά μέρη αφού λειτουργεί παθητικά. Παρόλα αυτά, ο ρόλος της για μια σταθερή και απροβλημάτιστη ζεύξη είναι μεγάλος και θα πρέπει να κάνουμε την επιλογή μας με ιδιαίτερη προσοχή.

Μια κεραία όταν λειτουργεί ως τμήμα του δέκτη λαμβάνει ραδιοκύματα και τα μετατρέπει σε εναλλασσόμενο ρεύμα, και όταν λειτουργεί ως τμήμα του πομπού, λαμβάνει εναλλασσόμενο ρεύμα και το μετατρέπει αντίστοιχα σε ραδιοκύματα.



1-8 Πειραματική οργάνωση. Η ακτίνα λέιζερ κλείνει το κύκλωμα, αφήνοντας την ηλεκτρική τρέχουσα ροή μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων. Η κεραία ανιχνεύει το ηλεκτρομαγνητικό σήμα που εκπέμπεται στην κάθετη κατεύθυνση, και, συγχρόνως, το ρεύμα μετριέται πέρα από έναν αντιστάτη 8.2K. Η διατομή της ακτίνας λέιζερ στα διαφορετικά σημεία κατά μήκος του άξονα διάδοσης παρουσιάζει μια πολύ λεπτή δέσμη και σύστημα καναλιού.

Πηγή(Dipolar-like antenna emission in the radiofrequency range by laser-produced plasma channels in air)



1-9 a) Πειραματική δημιουργία για τη μέτρηση ακτινοβολίας σε μεγάλο μήκος κύματος από πλάσμα στον αέρα. b) Σήμα που ανιχνεύθηκε από μια κεραία ενεργή στα 10K-30MHz.

### 1.4.3. Κλασική κεραία πλάσματος

Τα ραντάρ χρησιμοποιούν ραδιοκύματα ώστε να παρέχουν σε αεροσκάφη, πλοία και επίγειους σταθμούς τη δυνατότητα εντοπισμού αντικειμένων που βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις και παρά τις άσχημες καιρικές συνθήκες. Οι μεταλλικές κεραίες, όμως, οι οποίες εκπέμπουν τα εν λόγω κύματα, αντανakλούν τα ραδιοκύματα, κάτι που τα καθιστά ορατά σε άλλα ραντάρ που αποτελεί τεράστιο μειονέκτημα ειδικά κατά τη διάρκεια πολεμικών συρράξεων.

Ένα νέο είδος μη μεταλλικών κεραιών ραδιοκυμάτων μπορεί να γίνει αόρατο για τα ραντάρ, παύοντας να αντανakλά ραδιοκύματα όταν απενεργοποιείται! Η καινοτομία αυτή, η οποία ονομάζεται τεχνολογία κεραίας πλάσματος και στηρίζεται στη διέγερση αερίων εγκλεισμένων σε γυάλινους ή πλαστικούς σωλήνες και την εξ αυτής δημιουργία νεφών ελεύθερα κινούμενων ηλεκτρονίων και φορτισμένων ιόντων.

Η λειτουργία της κεραίας πλάσματος είναι σε γενικές γραμμές ίδια με μια κλασική κεραία, εκτός από το ότι εξαφανίζεται όταν δεν εκπέμπει. Στην κεραία πλάσματος έχουμε σε ένα ένα γυάλινο ή πλαστικό σωλήνα αέριο που

θερμαίνεται μέχρι στο σημείο που τα ηλεκτρόνια αποσχίζονται από τον πυρήνα και κινούνται μακριά από τα άτομα και τα μόρια (ιονισμός). Προφανώς τέτοιες κεραίες θα είναι σημαντικές στο πεδίο της μάχης και σε άλλες εφαρμογές. Επιπλέον, αντίθετα από τις κεραίες μετάλλων, τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά μιας κεραίας πλάσματος μπορούν να ρυθμιστούν γρήγορα για να αντιδράσουν στις προσπάθειες μπλοκαρίσματος σημάτων (jamming). Οι κεραίες πλάσματος συμπεριφέροντε σαν τις στερεές κεραίες μετάλλων επειδή η ροή των ηλεκτρονίων γίνεται ελεύθερα στο θερμό αέριο, ακριβώς όπως και στους αγωγούς μετάλλων.

-Εικονική κεραία. Είναι ενδιαφέρον να δει κανείς εάν οι στήλες πλάσματος που παράγονται από το λεπτές δέσμες είναι σε θέση να ενεργήσουν ως εικονικές κεραίες εκπομπής. Τέτοιες κεραίες θα ήταν κρυφές και εύκολα αναπτυσσόμενες. Αναμένονται για να ακτινοβολήσουν τους ηλεκτρομαγνητικούς σφυγμούς πέρα από μια ευρεία ζώνη συχνότητας. Η ηλεκτρομαγνητική εκπομπή από μια στήλη πλάσματος ερευνήθηκε με τη χρησιμοποίηση μιας κεραίας υποδοχής ενεργού στην περιοχή 10 kHz-30MHz (Mechain, 2005c). Το πλάσμα παρήχθη από ένα σύστημα λέιζερ CPA που εκπέμπει τους σφυγμούς σε ένα επαναληπτικό ποσοστό 10 Hz. Κάθε σφυγμός είχε τη διάρκεια 100 fs και την ενέργεια 200 MJ για μια διάμετρο ακτίνων 5 εκατ. Η δύναμη 2TW υπερβαίνει την κρίσιμη δύναμη για τη λεπτή δέσμη από έναν παράγοντα 400. Υπό τέτοιους όρους, ένας μεγάλος αριθμός ινών παράγεται στον αέρα. Προκειμένου να ομαδοποιηθούν αυτές οι ίνες σε ένα ενιαίο κανάλι διεύθυνσης, η ακτίνα στράφηκε με ένα αντανακλαστικό τηλεσκόπιο σε μια απόσταση 30 μ. περίπου 20-30 ομαδοποιημένες ίνες παρατηρήθηκαν έπειτα, αρχικός σε μια απόσταση 20m από τον καθρέφτη εστίασης. Το μήκος 1015m για την αγωγήμη περιοχή αέρα μετρήθηκε την ηλεκτρική τεχνική που περιγράφηκε από στην παράγραφο της 4.1.11. Μια διαφορά της δυνατότητας 12 kV εφαρμόστηκε έπειτα σε μια μερίδα της στήλης πλάσματος. Αυτό εκτελέστηκε με δύο ανέθεσε στα ηλεκτρόδια μετάλλων με τις κυκλικές τρύπες για να αφήσει την ακτίνα να περάσει μέσω, όπως φαίνεται στο σύκο 100 (α). Το πρώτο ηλεκτρόδιο τοποθετήθηκε μερικούς μετρητές μετά από την αρχή του πλάσματος, το δεύτερο ηλεκτρόδιο 81 εκατ. πίο πέρα.

Η κεραία υποδοχής τοποθετήθηκε σε μια απόσταση μεταξύ 1 και 8m σε μια κάθετο κατεύθυνσης στον άξονα ινών και συνδέθηκε άμεσα με έναν παλμογράφο με μια αντίσταση 50 Ohm. Το σήμα αντιστοιχεί στο μέσο όρο 8 διαδοχικών πυροβολισμών. Το σήμα αρχίζει με ένα σύνολο ταλαντώσεων υψηλής συχνότητας, με μια περιοδικότητα σε παραγγελία 140ns. Αυτό αντιστοιχεί σε μια συχνότητα επάνω από το λαμβάνον εύρος ζώνης της κεραίας. Ακολουθείται από ένα σύνολο 9 ταλαντώσεων στη χαμηλότερη συχνότητα με μια περιοδικότητα που αποτελείται μεταξύ 1 και 2  $\mu$ s, αντίστοιχος σε μια συχνότητα περίπου 14 MHz. Σημειώστε ότι η συχνότητα συντονισμού είναι 92MHz για μια 81 εκατ. μακριά  $\lambda/4$  κεραία, και γύρω από 10MHz για μια 10m μακριά κεραία. Αυτά τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η στήλη πλάσματος μπορεί πράγματι να εκπέμψει τους σφυγμούς EM των σχετικά μακροχρόνιων μηκών κύματος, της διαταγής μερικών δεκάδων των μετρητών.



**1-10 κλασική κεραία πλάσματος**

(πηγή:

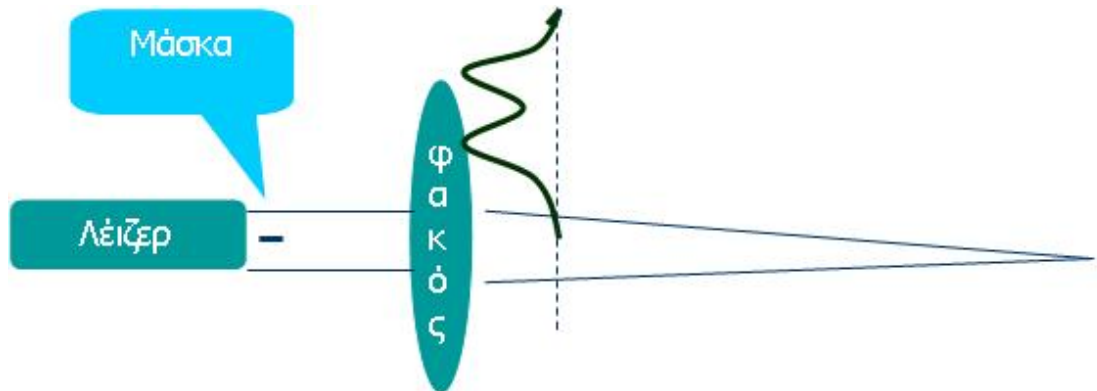
[http://www.scientificblogging.com/news\\_account/stealth\\_antenna\\_made\\_of\\_gas\\_as\\_impervious\\_to\\_jamming](http://www.scientificblogging.com/news_account/stealth_antenna_made_of_gas_as_impervious_to_jamming))



## 1.5. Ανακλαστήρας πλάσματος

### 1.5.1. Περιγραφή της μεθόδου

Η προτεινόμενη μέθοδος δημιουργίας του ανακλαστήρα Η/Μ ακτινοβολίας από πλάσμα, περιλαμβάνει την διάδοση ενός παλμού λέιζερ στον αέρα. Για τη μορφοποίηση του θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια κατάλληλη μάσκα στην έξοδο του λέιζερ, έτσι ώστε η ενέργεια του παλμού να βρίσκεται συγκεντρωμένη σε ένα «δαχτυλίδι» γύρω από τον άξονα διάδοσης. Η παραπάνω πρόταση φαίνεται σχηματικά στην παρακάτω εικόνα:



1-11 Πειραματική διάταξη.

Ακόμα απεικονίζεται η ακτινική κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου μετά τον φακό εστίασης.

### 1.5.2. Δομή της πτυχιακής

Η πτυχιακή περιλαμβάνει δύο βασικά μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται η προσομοίωση της διάδοσης του παλμού λέιζερ και της παραγωγής πλάσματος στον αέρα. Η βασική θεωρία της αριθμητικής

επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, περιγράφεται στο κεφάλαιο 2, ενώ η παρουσίαση των αποτελεσμάτων στο κεφάλαιο 3. Στο κεφάλαιο 4, περιλαμβάνεται η αριθμητική προσομοίωση ενός μονοδιάστατου μοντέλου, ανάκλασης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε πλάσμα. Ακόμα γίνεται χαρακτηρισμός του ανακλάστηρα σε σχέση με την συχνότητα αποκοπής και τις διαστάσεις του.

## 2. Αριθμητικές μέθοδοι

### 2.1. Πεπερασμένες διάφορες

--Αριθμητικές τεχνικές για την ολοκλήρωση προτύπων. Αρκετές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να λύσουμε τα μοντέλα που έχουμε προαναφέρει. Το ευκολότερο σχέδιο να εφαρμοστεί ένα σχέδιο διάσπαση-βημάτων στο οποίο όλοι οι γραμμικοί όροι (διάθλαση και διασπορά) υπολογίζονται στο διάστημα Fourier (FSS για το διασπασμένο βήμα Fourier) στο πρώτο μισό βήμα ενώ οι μη γραμμικοί όροι υπολογίζονται άμεσα στο φυσικό διάστημα πέρα από ένα δεύτερο μισό-βήμα χρησιμοποιώντας μια διαδικασία Adams-Bashforth ή Runge-Kutta.

Χαρακτηριστικά μερικές ώρες του υπολογισμού σε έναν τερματικό σταθμό είναι απαραίτητες για να υπολογίσουν τη διάδοση παλμού πέρα από μερικούς μετρητές (2 + 1) στις διαστάσεις. Στη γενική (3 + 1) περίπτωση D, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν τα ισχυρά μέσα των υπολογισμών. Εναλλακτικά, ο υπολογιστικός χρόνος ή τα σημεία πλέγματος μπορεί να κερδηθεί από μια συγκεκριμένη επιλογή του αριθμητικού σχεδίου σύμφωνα με το πρότυπο που λύνεται. Παραδείγματος χάριν αν υποθέσουμε μια συμμετρία περιστροφής γύρω από τον άξονα διάδοσης, είναι κατάλληλο για τον υπολογισμό του γραμμικού μέρους να συνδεθεί η ανάλυση Fourier στην κατεύθυνση του χρόνου με το τυποποιημένο σχήμα Crank-Nicholson στην εγκάρσια κατεύθυνση (FCN). Μια άλλη ενδιαφέρουσα επιλογή μπορεί να είναι η χρήση της τυποποιημένης εναλλασσόμενης κατεύθυνσης υπονοούμενης (ADI) μέθοδος με τις εναλλάσσομενες κατευθύνσεις χρόνου και χώρου, αν και μεγάλης τάξης οι διασποράς όροι είναι λιγότερο εύκολο να εφαρμοστούν στην τελευταία μέθοδο. Τα αριθμητικά σχέδια μπορούν έπειτα ακόμη και να τροποποιηθούν εύκολα ώστε να εισαχθούν οι χαρτογραφήσεις μεταξύ του φυσικού διαστήματος και του υπολογιστικού διαστήματος, οι οποίες μετασχηματίζουν ένα κανονικό υπολογιστικό πλέγμα σε ένα ανομοιόμορφο πλέγμα στη φυσική περιοχή. Το πλεονέκτημα αυτής της διαδικασίας είναι να επιτραπεί ένα αποδοτικό ψήφισμα της εξίσωσης διάδοσης σχετικά με τα πλέγματα που ταιριάζουν στις κλίσεις έντασης του κύματος, με τις

δυνατότητες να προσαρμοστεί το πλέγμα κατά τη διάρκεια του υπολογισμού. (3 + 1) οι αριθμητικές προσομοιώσεις D δεσμών εκτελέστηκαν σε έναν τερματικό σταθμό μ' αυτό τον τρόπο (Mechain, 2004a, β, 2005a). Ψευδο-φασματική αποσύνθεση το σχήμα που χρησιμοποιεί τα πολυώνυμα Chebishev είναι μια μέθοδος με σκοπό εγγενώς να χρησιμοποιήσει αυτές τις χαρτογραφήσεις (Canuto, 1988). Γενικά, η FCN μέθοδος είναι πολύ αποδοτική. Η μέθοδος ADI μπορεί να γίνει απολύτως υπονοούμενη και είναι σταθερότερη αλλά κάθε βήμα είναι πιά μακροχρόνιο. Η διασπασμένη φασματική μέθοδος Chebishev βημάτων είναι πιά αργή από FCN ή την ADI αλλά είναι εξαιρετικά ακριβής όταν πρέπει να περιγραφούν οι πολύ υψηλές κλίσεις. Μια κατάλληλη τεχνική καθαρισμού πλέγματος χρησιμοποιήθηκε από Mlejnek και λοιποί. (1999a), Moloney et al. (2000) για να αυξήσει το ψήφισμα γύρω από κάθε ένα μέγιστη ένταση σε 3+1 διαστάσεις. Πιά πρόσφατα, οι Ando και Fujimoto (2005) έχουν αναπτύξει μια αποδοτική μέθοδο βασισμένη στην επέκταση εκθετικός-προϊόντων Suzuki (Suzuki, 1985, 1990, 1991, 1993) που εφαρμόζεται στο χειριστή εξέλιξης, η οποία επέτρεψε σε τους για να εκτελέσει (3 + 1) τις αριθμητικές προσομοιώσεις D του νημάτιου, χωρίς υπολογισμούς μεγάλων κλιμάκων. Τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων εξαρτώνται με ευαισθησία από τη σωστή εκτίμηση αυτών των παραμέτρων, ακόμα κι αν η φυσική είναι περιορισμένη σε ένα δεδομένο σύνολο φυσικών αποτελεσμάτων. Οι κύριοι παράμετροι που απαιτούνται είναι οι εξής: μεταξύ των μη γραμμικών αποτελεσμάτων που εξετάζονται, υπάρχει η οπτική επίδραση Kerr με την πιθανή συμβολή Raman του (μη γραμμικό n<sup>2</sup> συντελεστή δεικτών, μέρος του καθυστερημένου συστατικού a, ελάττωση Γ και συχνότητα ω<sub>R</sub> της μοριακής απάντησης), την απορρόφηση φωτονίων (βK) και η δημιουργία πλάσματος σK, U<sub>i</sub>), ενώ η περιγραφή των διασποράς ιδιοτήτων του μέσου χρειάζεται καθένα οι δεύτεροι και υψηλότεροι διασποράς συντελεστές (κ'', κ''', ...) στο μήκος κύματος λέιζερ, ή μια σχέση διασποράς έγκυρη στο πεδίο συχνότητας υπό εξέταση.

--Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών. Οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών για τα ελλειπτικά προβλήματα συνοριακών τιμών προχωρούν όπως έχουμε δει και πιο πριν: ορίζουμε μία διακριτή διαμέριση σημείων μέσα στο πεδίο ορισμού της εξίσωσης, αντικαθιστούμε τις παραγώγους στη ΜΔΕ με πεπερασμένες διαφορές, και ψάχνουμε για μία αριθμητική λύση στην καθεμία από τις διαμερίσεις σημείων. Παρόλα αυτά, σε αντίθεση με τα προβλήματα που εξαρτώνται από το χρόνο, δεν παράγουμε τη λύση βαθμιαία προχωρώντας προς τα εμπρός στο χρόνο, αλλά αντί αυτού καθορίζουμε την προσεγγιστική λύση σε όλα τα σημεία διαμέρισης ταυτόχρονα λύνοντας ένα μόνο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων.

Οι ρητές μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών ολοκληρώνουν τις βασικές μερικές διαφορικές εξισώσεις λαμβάνοντας υπόψη τις αλλαγές στις εξαρτημένες μεταβλητές κατά μήκος των διευθύνσεων των ανεξάρτητων μεταβλητών. Με αυτόν τον τρόπο παράγονται οι τιμές των λύσεων σε ισαπέχοντα σημεία στο φυσικό επίπεδο.

Η πλήρως άρρητη μέθοδος πεπερασμένων διαφορών είναι μια μέθοδος οπίσθιων πεπερασμένων διαφορών (αν και οι διατάξεις των άμεσων πεπερασμένων διαφορών είναι πρόσω πεπερασμένες μέθοδοι). Για τη μέθοδο των Crank-Nicolson, οι Forsythe & Wasow (1960) ανέφεραν ότι οι ρητές μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών φαίνεται να έχουν χρησιμοποιηθεί πρώτη φορά από τους Crank & Nicolson (1947). Αυτό που τώρα είναι γνωστό ως η μέθοδος των Crank-Nicolson είναι μια λύση κεντρικής διαφοράς, υψηλής τάξης ακρίβειας. Η λύση αυτή ωστόσο είναι επιρρεπής σε ταλαντεύσεις, γύρω από την πραγματική λύση, για ξαφνικές αλλαγές στη δυναμική συνάρτηση των οριακών συνθηκών.

Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

α. Αντικατάσταση της συνεχούς περιοχής του προβλήματος από ένα πλέγμα διακριτών σημείων (κόμβοι).

β. Αντικατάσταση της αρχικής εξίσωσης με μία εξίσωση διαφορών που συνδέει το δυναμικό ενός κόμβου  $(i,j)$  με τα δυναμικά των γειτονικών κόμβων. Οι τελικές εξισώσεις προκύπτουν παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο  $(i,j)$  για μετατοπίσεις κατά τους άξονες  $x$  και  $y$ .

γ. Εισαγωγή αρχικών συνθηκών ή οριακών συνθηκών Dirichlet και Neumann. Σύμφωνα με τις συνθήκες Dirichlet η τιμή του αγνώστου μεγέθους παραμένει σταθερή, ενώ οι συνθήκες Neumann δηλώνουν τη μηδενική μεταβολή του αγνώστου μεγέθους ως προς  $x$  ή ως προς  $y$ .

δ. Επίλυση του συστήματος των εξισώσεων και προσδιορισμός της τιμής του ζητούμενου αγνώστου μεγέθους για όλους τους κόμβους του πλέγματος.

Για παράδειγμα, έστω

$$y = f(x)$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad \text{κεντρική διαφορά}$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{διαφορά επόμενου σημείου}$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \quad \text{διαφορά προηγούμενου σημείου}$$

Με την χρήση σειρών Taylor θα έχουμε

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(\eta_+)$$

$$\eta_- \in (a-h, a),$$

$$\eta_+ \in (a, a+h)$$

## 2.2. Διάφορα σχήματα

-Implicit Euler σχήμα

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{k} + A^{n+1} U^{n+1} &= F^{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-1 \\ U^0 &= U_0 \\ A^{n+1} &\equiv A(t_{n+1}), \quad F^{n+1} \equiv F(t_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

-Explicit Euler σχήμα

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{k} + A^n U^n &= F^n, \quad n = 0, \dots, N-1 \\ U^0 &= U_0 \\ A^n &\equiv A(t_n), \quad F^n \equiv F(t_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

-Crank–Nicolson σχήμα

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{k} + A^{n+\frac{1}{2}} \frac{U^{n+1} + U^n}{2} &= F^{n+\frac{1}{2}}, \quad n = 0, \dots, N-1 \\ U^0 &= U_0 \\ A^{n+\frac{1}{2}} &\equiv A(t_{n+\frac{1}{2}}), \quad F^{n+\frac{1}{2}} \equiv F(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Σημειώνοντας από αυτά τα σχέδια ότι το στοιχείο είναι γνωστό χρονικό σε επίπεδο  $n$  μπορούμε έπειτα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές χρονικό σε επίπεδο  $n + 1$ . Τυπικά, οι νέες τιμές είναι:

-Implicit Euler σχήμα

$$(I + kA^{n+1})U^{n+1} = U^n + kF^{n+1} \quad (2.4)$$

-Explicit Euler σχήμα

$$U^{n+1} = (I - kA^n)U^n + kF^n \quad (2.5)$$

-Crank–Nicolson σχήμα

$$\left(I + \frac{kA^{n+\frac{1}{2}}}{2}\right)U^{n+1} = \left(I - \frac{kA^{n+\frac{1}{2}}}{2}\right)U^n + kF^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

όπου το  $I$  είναι η μήτρα ταυτότητας. Η λύση χρονικό σε επίπεδο  $(n + 1)$  στην εξίσωση (2.5) μπορεί να βρεθεί άμεσα ενώ πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα

μητρών για τις εξισώσεις (2.4) και (2.6). Σημειώνουμε ότι το υπονοούμενο σχέδιο Euler καλείται επίσης μέθοδο προς τα πίσω-διαφοράς και η ρητή μέθοδος Euler καλείται μέθοδο μπροστινός-διαφοράς.

Πέρνουμε τώρα την περίπτωση  $F(t)=0$  και όπου η μήτρα  $A$  είναι ανεξάρτητη από το χρόνο. Μπορούμε έπειτα να γράψουμε τις εξισώσεις (2.4), (2.5) και (2.6) στις ισοδύναμες μορφές,

$$U^{n+1} = (I + kA)^{-1}U^n \quad \text{(a)}$$

$$U^{n+1} = (I + kA)U^n \quad \text{(b)} \quad (2.7)$$

$$U^{n+1} = (I + \frac{k}{2}A)^{-1}(I - \frac{k}{2}A)U^n \quad \text{(c)}$$

Συγκρίνοντας αυτές τις εξισώσεις με την εξίσωση

$$V(t) = \exp(-At)U_0 + \exp(-At) \int_0^t \exp(A\lambda)d\lambda, \quad t \geq 0 \quad (2.8)$$

,  
καταλήγουμε

$$W(t) = \exp(-tA)U_0 \quad (2.9)$$

συνειδητοποιούμε ότι οι λύσεις στο σύστημα (2.7) είναι ουσιαστικά προσεγγίσεις στον εκθετικό όρο μητρών για την (2.9). Μπορούμε να παρουσιάσουμε πόσο καλά οι κατά προσέγγιση λύσεις συμφωνούν με τη σειρά στην εξίσωση

$$\exp(A) \equiv I + A \frac{A^2}{2!} + \dots \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \quad (2.10)$$

Για να καταστήσουμε αυτήν την δήλωση περισσότερο σαφή, εξετάζουμε το σχέδιο αστάθειας Crank-Nicholson λόγω της δημοτικότητάς της στις εφαρμογές οικονομικής εφαρμοσμένης μηχανικής. Υποθέτουμε ότι το χρόνος-



βήμα  $K$  είναι αρκετά μικρός. Κατόπιν μπορούμε τυπικά να επεκτείνουμε την έκφραση για την κατά προσέγγιση λύση ως εξής (με το  $A$  που αντικαθίσταται από  $-A$ ):

$$\left(I + \frac{k}{2}A\right)^{-1} \left(I - \frac{k}{2}A\right) = I - kA + \frac{(kA)^2}{2} - \frac{(kA)^3}{4} + \dots \quad (2.11)$$

και έτσι βλέπουμε ότι αυτή η σειρά συμφωνεί με την (2.10) στη δεύτερη τάξη. Ομοίως μπορεί να αποδειχθεί ότι οι άλλες αριθμητικές λύσεις στις εξισώσεις (6.23) προσεγγίζουν τον εκθετικό όρο στην πρώτη γραμμή στο  $K$ . Εντούτοις, το σχέδιο για το ρητό σχήμα Euler είναι μόνο υπό όρους σταθερό, έτσι σημαίνει ότι το  $K$  πρέπει να επιλεγθεί για να είναι λιγότερο από κάποια κρίσιμη αξία. Τα υπονοούμενα σχήματα Euler και ασταθής Crank -Nicolson είναι άνευ όρων σταθερά για οποιαδήποτε αξία του  $K$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$\|U^n\| \leq M \|U_0\| \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.12)$$

σε κάποιο κανόνα. Εδώ το σταθερό  $M$  είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος  $K$  βημάτων.

Ερευνάμε εάν στην αριθμητική λύση του  $u_t + au_x = 0$  για διαφορετικές συχνότητες που ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα  $a$  όπως πρέπει. Όμως δεν έχουν ίδια ταχύτητα και παρατηρείται ότι ταξιδεύουν στην πραγματικότητα με ταχύτητα  $a(h\Delta x)$  περίπου ίση με  $a$ . Ψάχνοντας για μια λύση προκύπτει:

$$u_t + au_x = 0, \quad u(0, x) = f(x) \quad (2.13)$$

το οποίο έχει μοναδική λύση ( $u(t, x) = f(x - at)$ ). Με τη χρήση της μεθόδου διαχωρισμού μεταβλητών έχουμε

$$u(x, t) = g(t)e^{ix\xi} \quad (2.14)$$

Συνοψίζοντας,

$$u(0, x) = g(0, x)e^{ix\xi} = e^{ix\xi} = \text{περιοδικό κύμα (υποθέτουμε } g(0) = 1) \quad \text{ΤΟΤΕ}$$

συνεπάγεται ότι:

$$u_t + au_x = g'(t)e^{ix\xi} + ag(t)i\xi e^{ix\xi} = (g'(t) + ai\xi g(t))e^{ix\xi} = 0 \quad (2.15)$$

Αφού  $|e^{ix\xi}| = 1$  και επίσης  $g'(t) + ai\xi g(t) = 0$ , συνεπάγεται ότι  $g(t) = e^{ix\xi} g(0)$ .

Άρα συμπεραίνεται ότι

$$u(t, x) = g(0)e^{-iat\xi} e^{ix\xi} = e^{i(x-at)\xi} \quad (2.16)$$

Αφού  $g(0) = 1$ .

Επομένως ο αρχικός όρος είναι μεταφρασμένος με την ταχύτητα  $a$  για όλο το  $\xi$ .

(MATH336.PDF σελ.13)

Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται ευσταθές (stability), όταν ένα σχήμα λύνει ένα πρόβλημα χρόνου-ολοκλήρωσης και κατόπιν η λύση για πεπερασμένο (άπειρο) χρόνο παραμένει οριακή (η διαφορική εξίσωση παραμένει οριακή).

### 3. Προσομοίωση διάδοσης

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η αριθμητική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων διάδοσης του παλμού λέιζερ και η παραγωγή του πλάσματος. Το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιήθηκε ήταν το Crank-Nicholson σε κυλινδρικές συντεταγμένες και με αζιμουθιακή συμμετρία.

#### 3.1. Σύστημα εξισώσεων

Το σύστημα των εξισώσεων που χρησιμοποιήθηκε στην προσομοίωση της διάδοσης του παλμού λέιζερ και για την παραγωγή του πλάσματος στον αέρα είναι το παρακάτω και δίνεται από τον Τζορτζάκη στην αναφορά [10]

$$\begin{aligned}
 2i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{k_0} \Delta_{\perp} \mathcal{E} + k_0 n_2 |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} - k_0 \frac{\rho_e}{\omega_0^2} \mathcal{E} + \\
 + i \sum_m \frac{\beta \kappa_m}{2} |\mathcal{E}|^{2K_m - 2} \mathcal{E} = 0 \quad (3.1) \\
 \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = \sum_m \frac{\beta \kappa_m}{K_m \hbar \omega_0} |\mathcal{E}|^{2K_m} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_{at_m}}\right)
 \end{aligned}$$

Στον σύστημα , ο αέρας αναλύεται στα βασικά συστατικά N<sub>2</sub> και O<sub>2</sub>. Οι τιμές των σταθερών δίνονται μέσα στην αναφορά.

Το σύστημα αυτό αποτελεί μια τροποποιημένη μορφή αυτού που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 1.3 σύμφωνα με τις παρακρατώ παραδοχές:

1. ο όρος της διασποράς της ταχύτητας ομάδος παραλείπεται επειδή επιφέρει μικρή μεταβολή στην μορφή του παλμού.
2. η χρόνο-υστέρηση της απόκρισης του φαινομένου Kerr απαλείφεται εξαιτίας της μεγάλης χρονικής διάρκειας της περιβάλλουσας του παλμού.

3. ο χρόνος συγκρούσεων τc θεωρείται πολύ μεγαλύτερος από την κεντρική συχνότητα του λέιζερ.
4. η μεικτή παράγωγος χώρου και χρόνου (self-steepening[7]) έχει παραληφθεί.
5. οι όροι που περιγράφουν τον ιονισμό χιονοστιβάδας και τις επανασυνδέσεις των ηλεκτρονίων απαλείφονται από την εξίσωση του ρυθμού ιονισμού εξαιτίας της μικρής συνεισφοράς τους.

### 3.2. Εξισώσεις διαφορών

Εφαρμόζοντας το σχήμα Crank-Nicholson για κυλινδρικές συντεταγμένες και με ανάλογο τρόπο της αναφοράς [11] προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις διαφορών:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_{r,z}}{\partial r} &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{r+dr,z} - \varepsilon_{r-dr,z}}{2dr} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{r+dr,z+dz} - \varepsilon_{r-dr,z+dz}}{2dr} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{r,z}}{\partial r^2} &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{r+dr,z} - 2\varepsilon_{r,z} + \varepsilon_{r-dr,z}}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{r+dr,z+dz} - 2\varepsilon_{r,z+dz} + \varepsilon_{r-dr,z+dz}}{dr^2} \\
\frac{\partial \varepsilon_{r,z}}{\partial z} &= \frac{\varepsilon_{r,z+dz} - \varepsilon_{r,z}}{dz} \text{ και } \varepsilon_{r,z} = \frac{\varepsilon_{r,z+dz} + \varepsilon_{r,z}}{2}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (3.1) τροποποιείται ως εξής:

$$a1\varepsilon_{r+dr,z+dz} + b1\varepsilon_{r,z+dz} + c1\varepsilon_{r-dr,z+dz} = a2\varepsilon_{r+dr,z} + b2\varepsilon_{r,z} + c2\varepsilon_{r-dr,z} \tag{3.3}$$

Αυτή η εξίσωση αποτελεί ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα N εξισώσεων, όπου N είναι το πλήθος των δειγμάτων στον άξονα r και μπορεί να λυθεί για κάθε εγκάρσιο διάνυσμα πάνω στο άξονα z με τους γνωστούς τρόπους[12]. Ειδικότερα, υπό την μορφή των τρι-διαγώνιων πινάκων των συντελεστών και των ανυσμάτων για κάθε δείγμα στον άξονα z θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{pmatrix} b1 & c1 & 0 & \dots & 0 \\ a1 & b1 & c1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a1 & b1 & c1 \\ 0 & \dots & 0 & a1 & b1 \end{pmatrix}_{N \times N} \bullet \mathbf{E}_{z+dz} = \begin{pmatrix} b2 & c2 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & b2 & c2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a2 & b2 & c2 \\ 0 & \dots & 0 & a2 & b2 \end{pmatrix}_{N \times N} \bullet \mathbf{E}_z \tag{3.4}$$

$\mathbf{E}$  = διάνυσμα μήκους N

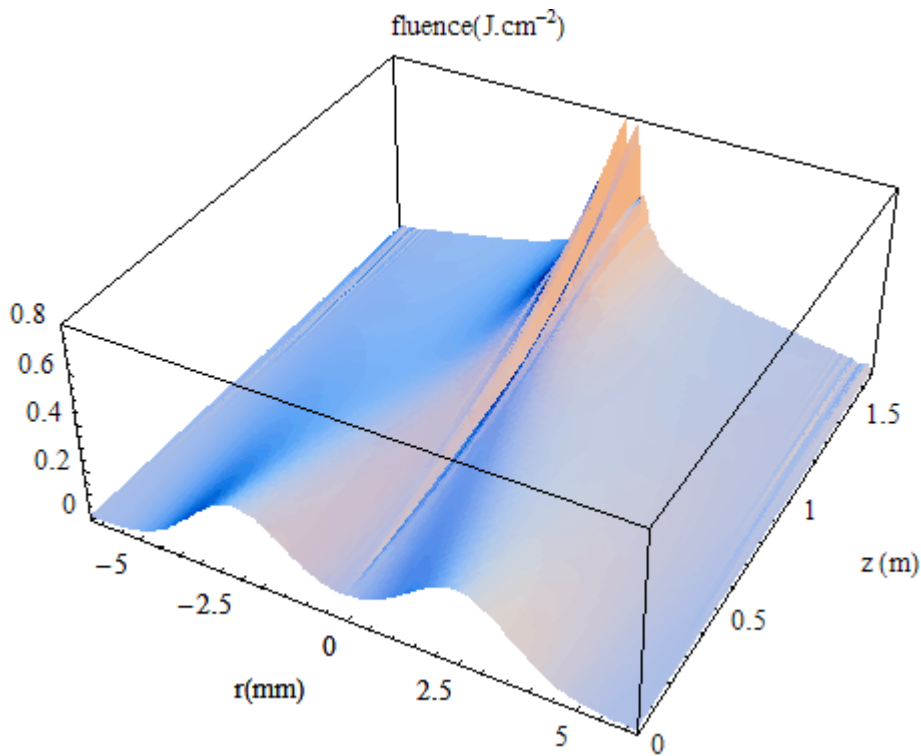
### 3.3. Αριθμητικά αποτελέσματα

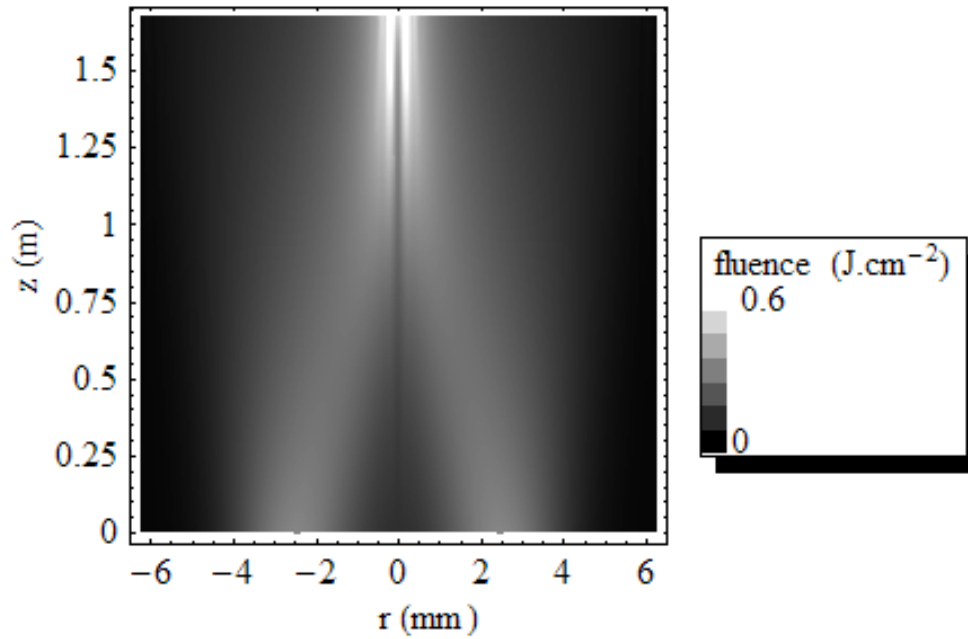
Για τη δημιουργία του ανακλαστήρα η εγκάρσια κατανομή του πεδίου θα πρέπει να είναι δύο συναρτήσεις γκαουσιανής μορφής μετατοπισμένες από το κέντρο κατά μια απόκλιση  $a$ . Αριθμητικά αυτό εκφράζεται με την παρακάτω σχέση η οποία αποτελεί και την αρχική συνθήκη.

$$\varepsilon(r, \tau, z=0) = \sqrt{I_0} e^{-r^2 \left( \frac{1}{w_0^2} + \frac{ik_0}{2f} \right)} \left( e^{-\frac{(r-a)^2}{(\beta w_0)^2}} + e^{-\frac{(r+a)^2}{(\beta w_0)^2}} \right) e^{-\frac{z^2}{t_0^2}} \quad (3.5)$$

Όπου  $W_0$  είναι το εύρος του παλμού,  $\beta$  είναι ο συντελεστής αλλαγής του εύρους των μετατοπισμένων συναρτήσεων και  $t_0$  είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος του παλμού.

Στις παρακάτω εικόνες απεικονίζονται η ακτινική κατανομή της πυκνότητας της ενέργειας ( $J/cm^2$ ) για ολόκληρο τον άξονα διάδοσης  $z$ :

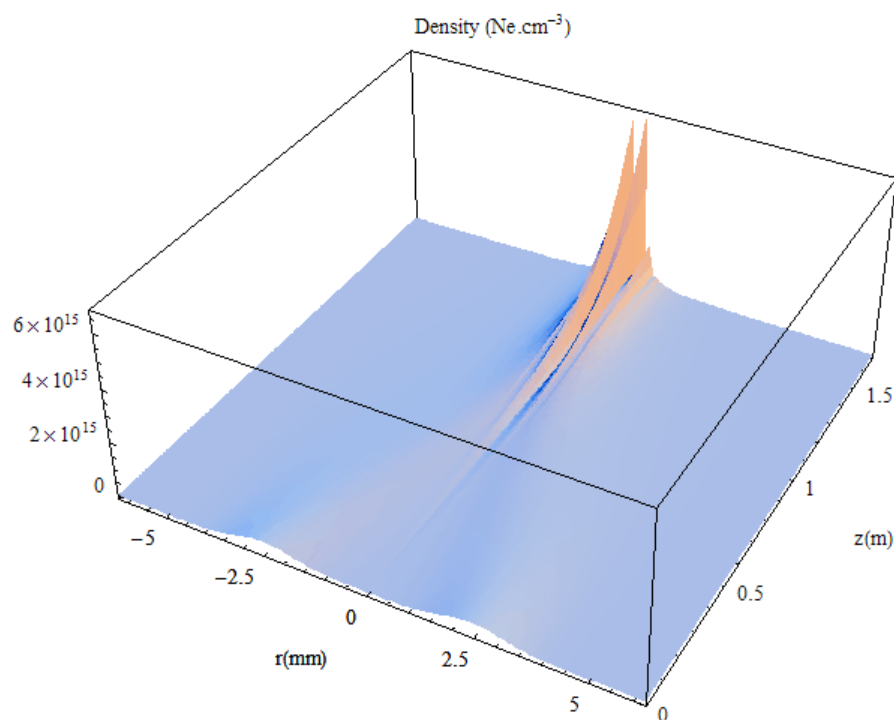


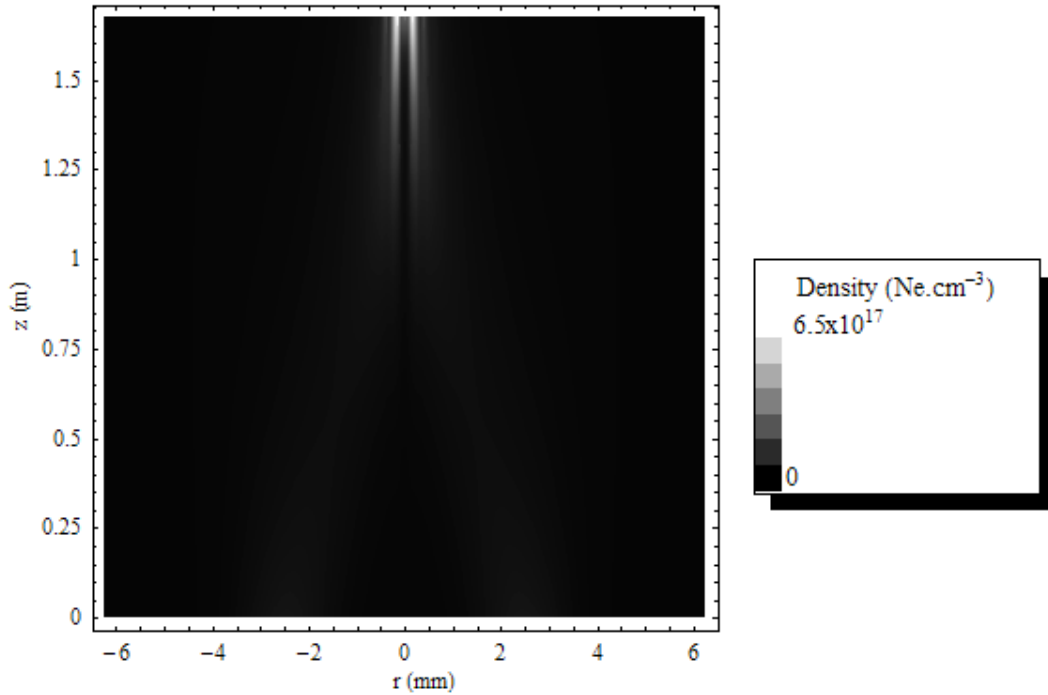


**3-1 ακτινική κατανομή της πυκνότητας της ενέργειας ( $J/cm^2$ )**

Από τις προηγούμενες εικόνες φαίνεται καθαρά ότι η κατανομή της ενέργειας βρίσκεται στα εξωτερικά τοιχώματα ενός υποτιθέμενου κώνου.

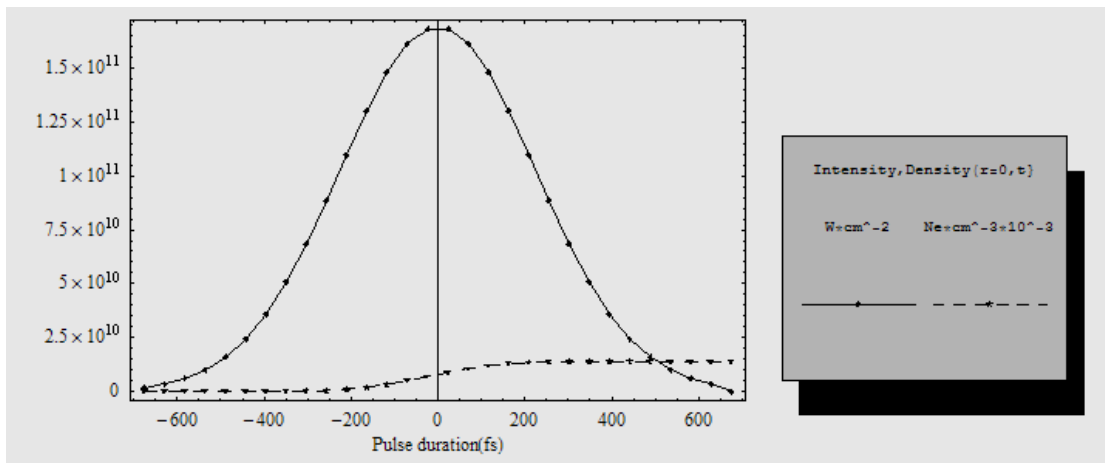
Στη συνέχεια απεικονίζεται στους ίδιους άξονες η κατανομή της πυκνότητας ( $Ne/cm^3$ ) του πλάσματος:



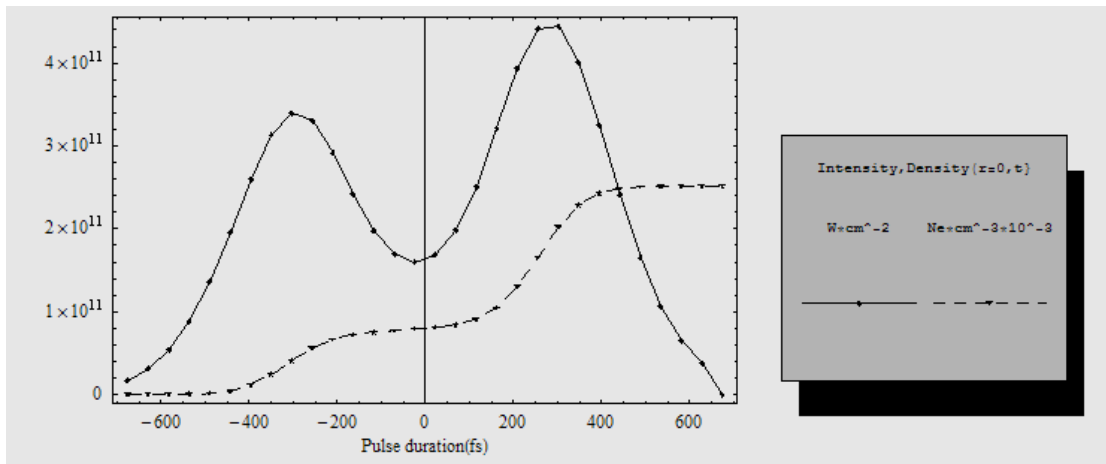


### 3-2 κατανομή του πλάσματος

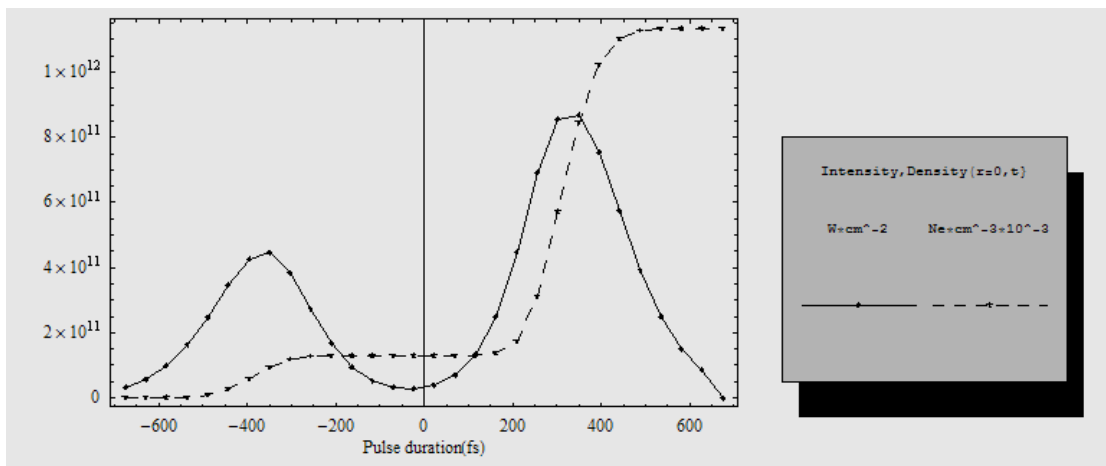
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η χρονική μεταβολή της περιβάλλουσας του παλμού κάτω από την επίδραση του πλάσματος. Στις παρακάτω εικόνες απεικονίζονται η περιβάλλουσα σε μονάδες έντασης  $I$  ( $W/cm^2$ ) και η πυκνότητα πλάσματος για ακτίνα  $r=0$ , για ολόκληρο τον χρόνο  $t$  και για μερικές τιμές πάνω στον άξονα  $z$ .



Για  $z=0m$ .



Για  $z=1.4\text{m}$ .



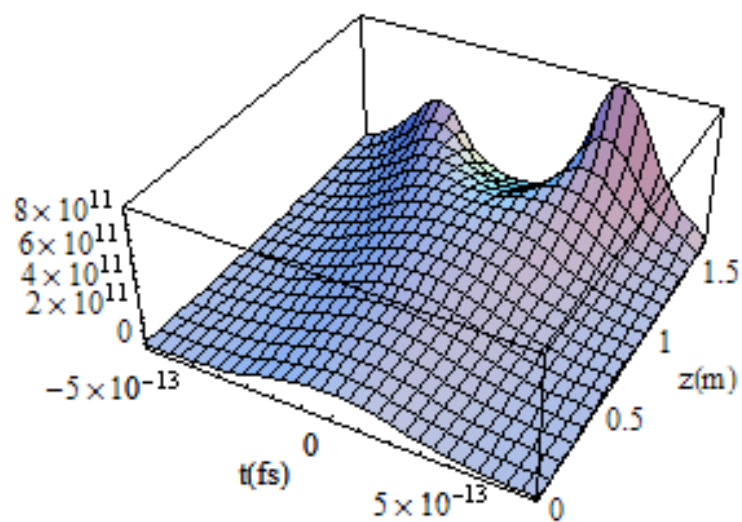
**3-3 Χρονική μορφοποίηση της έντασης του παλμού ( $W/cm^2$ ) και της ηλεκτρονικής πυκνότητας ( $3 \cdot 10^3 \cdot Ne / cm^3$ )**

Για  $z=1.6\text{m}$ .

Από τις προηγούμενες εικόνες φαίνεται καθαρά ο διαχωρισμός του αρχικού παλμού σε δύο νέους παλμούς.

Στο γράφημα που ακολουθεί φαίνεται σε τρισδιάστατη μορφή η ένταση για  $r=0$ , για ολόκληρο τον άξονα διάδοσης  $z$  και για τον χρόνο  $t$ .





3-4 Ένταση  $I(r=0, z, \tau)$   $\text{W}/\text{cm}^2$

## 4. Προσομοίωση ανάκλασης[13]

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα μονοδιάστατο παράδειγμα ανάκλασης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε πλάσμα με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (FDTD).

### 4.1. Σύστημα εξισώσεων

Οι εξισώσεις του Maxwell τροποποιούνται για να περιλαμβάνουν την μιγαδική αντίσταση του πλάσματος σύμφωνα με τον μοντέλο του Drude:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{E}}{\partial t} &= c \nabla \times H - \frac{i\omega_p^2}{\omega_0} \widehat{E}, & \widehat{E} &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -c \nabla \times E\end{aligned}\tag{4.1}$$

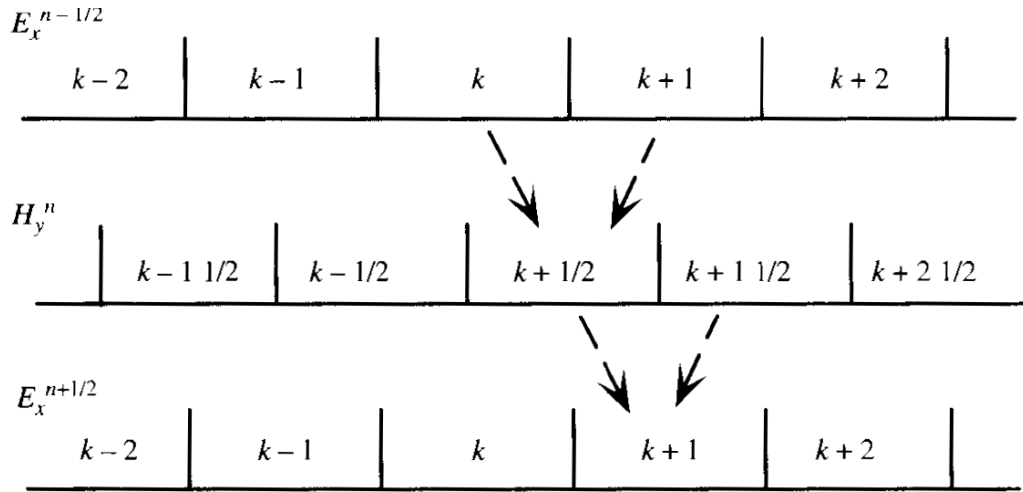
Στο μοντέλο αυτό το ηλεκτρικό πεδίο έχει τροποποιηθεί με την ηλεκτρική αντίσταση του αέρα για να έχει καλύτερη αριθμητική σταθερότητα. Οι συνιστώσες που επιβιώνουν στο μονοδιάστατο παράδειγμα είναι: η συνιστώσα  $E_x$  του ηλεκτρικού πεδίου και η  $H_y$  του μαγνητικού. Άρα οι εξισώσεις (4.1) γίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial t} &= -c \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{i\omega_p^2}{\omega_0} \widehat{E}_x \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -c \frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial z}\end{aligned}\tag{4.2}$$

Παίρνοντας την προσέγγιση των παραγώγων με ένα κεντρικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών οι εξισώσεις (4.2) μετατρέπονται στις παρακάτω εξισώσεις διαφορών:

$$\begin{aligned}\widehat{E}x_k^{n+1/2} &= \widehat{E}x_k^{n-1/2} - c \frac{\Delta t}{\Delta z} (Hy_{k+1/2}^n - Hy_{k-1/2}^n) - \frac{i\Delta t\omega_p^2}{2\omega_0} (\widehat{E}x_k^{n+1/2} + \widehat{E}x_k^{n-1/2}) \\ Hy_{k+1/2}^{n+1} &= Hy_{k+1/2}^n - c \frac{\Delta t}{\Delta z} (\widehat{E}x_{k+1}^{n+1/2} - \widehat{E}x_k^{n-1/2})\end{aligned}\quad (4.3)$$

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι της παρακάτω μορφής:

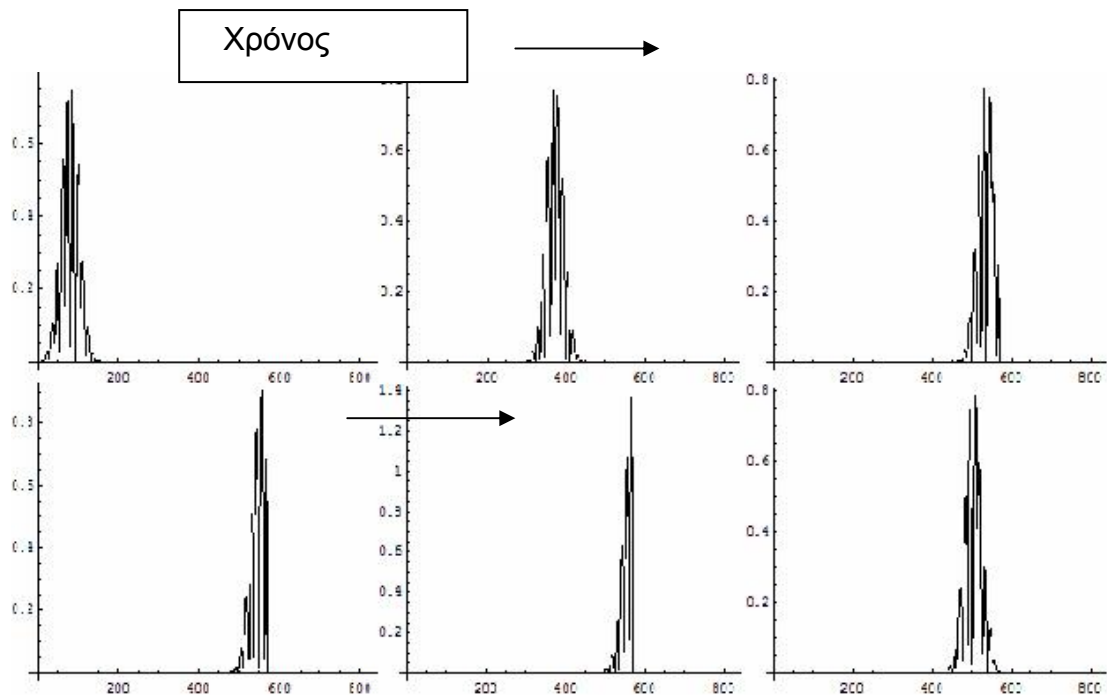


4-1 Το πλέγμα του ενός πεδίου είναι μετατοπισμένο σε σχέση με του άλλου κατά μισό κελί.

ο υπολογισμός του κάθε πεδίου γίνεται με τις προηγούμενες χρονικά τιμές του άλλου.

## 4.2. Αριθμητικά αποτελέσματα

Στα αποτελέσματα που απεικονίζονται παρακάτω, θεωρείται ελεύθερος χώρος για ολόκληρο τον άξονα διάδοσης εκτός ενός σημείου όπου είναι τοποθετημένο το πλάσμα. Η συχνότητα επιλέχθηκε να είναι μικρότερη της συχνότητας πλάσματος, δηλαδή να μην ικανοποιείται η σχέση διασποράς της παραγράφου 1.2.3. Φαίνεται καθαρά η ανάκλαση του παλμού πάνω στο πλάσμα. Ακόμα κατά τη διάρκεια της αλλαγής της κατεύθυνσης του παλμού το πλάτος του διπλασιάζεται ενώ η διάρκεια του γίνεται η μισή. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται με στην αποθήκευση της ενέργειας στο πλάσμα, αφού αυτό θεωρείται χωρίς απώλειες και δρα σαν διηλεκτρικό υλικό.



4-2 Στιγμιότυπα της διάδοσης και της ανάκλασης ενός παλμού σε πλάσμα.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] F. Jonsson, “Lectures Notes on Non Linear Optics”, site(2003)
- [2] R. Becker, “Elektronen Theorie” (Teubner Leipzig, 1933)
- [3] R. P. Feynman, “Lectures on Physics” (Addison-Wesley, Massachusetts, 1963)
- [4] M. Born and E. Wolf, “Principles of Optics” (Cambridge University Press, Cambridge, 1980)
- [5] Herbert Goldstein, “Classical Mechanics, 2<sup>nd</sup> ed.” (Addison-Wesley, Massachusetts, 1980)
- [6] P.N. Butcher & D. Cotter, “The elements of Nonlinear Optics” (Cambridge Studies, 1990)
- [7] R. W. Boyd, “Non Linear Optics Second Edition” (Academic Press, 2003)
- [8] T. Boyd, “The Physics of Plasmas”, (Cambridge Press 2003)
- [9] πλάσμα
- [10] S. Tzortzakis et al. , “femtosecond and picosecond ultra violet laser filaments in air: experiments and simulations” (Opt. Commun. 197,131-143 ,2001)
- [11] Plamen Koev, “Numerical Methods for Partial Differential Equations”, (2005)
- [12] Daniel J. Duffy, “Finite Difference Methods in Financial Engineering” (Wiley Finance Series, 2006)
- [13] D.M.Sullivan, “Electromagnetic Simulation using the FDTD method” (IEEE press, 2000)