

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΧΑΝΙΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ:
Μεταβολικές Μέθοδοι, Κυματοδηγοί και Επιταχυντές

Υπεύθυνος Καθηγητής: Δημήτριος Πλιάκης

ΟΝΟΜΑΕΠΩΝΥΜΟ: ΒΑΜΒΑΚΟΣ ΚΥΡΙΑΚΟΣ

ΑΡΙΘ. ΜΗΤΡΩΟΥ: 4155

ΧΑΝΙΑ 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο (Αντίστοιχο Κεφάλαιο 5^ο)

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ.....	σελ. 2
• 5.1 Γραμμή Μεταφοράς Χωρίς Απώλειες.....	σελ. 2
• 5.2 Απώλειες Υψηλής Αντίστασης.....	σελ. 5
• 5.3 Παράδειγμα: Ομοαξονική Γραμμή.....	σελ. 6
• 5.4 Συχνότητες Αποκοπής.....	σελ. 7
• 5.5 Προβλήματα για το Κεφάλαιο 5.....	σελ. 8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο (Αντίστοιχο Κεφάλαιο 6^ο)

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΙ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ.....	σελ. 9
• 6.1 Διαμόρφωση Γραμμής Μεταφοράς.....	σελ. 9
• 6.2 Διανύσματα Hertz.....	σελ. 19
• 6.3 Ορθότητα Σχέσεων.....	σελ. 20
• 6.4 Ενεργειακή Πυκνότητα και Ροή.....	σελ. 22
• 6.5 Ορισμοί Σύνθετης Αντίστασης.....	σελ. 25
• 6.6 Σύνθετο Διάνυσμα Poynting και Ενεργειακά Θεωρήματα.....	σελ. 29
• 6.7 Προβλήματα για το Κεφάλαιο 6.....	σελ. 36

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο (Αντίστοιχο Κεφάλαιο 10^ο)

ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ.....	σελ. 41
• 10.1 Μεταβολικές Αρχές.....	σελ. 41
• 10.2 Αρχή του Rayleigh.....	σελ. 44
• 10.3 Απόδειξη της Πληρότητας.....	σελ. 51
• 10.4 Μέθοδος Διακύμανσης – Επανάληψης.....	σελ. 58
ο 10.4.1 Εκτιμήσεις Σφάλματος.....	σελ. 65
• 10.5 Προβλήματα για το Κεφάλαιο 10.....	σελ. 69

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο (Αντίστοιχο Κεφάλαιο 11^ο)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΓΙΑ ΚΥΚΛΙΚΟ ΟΔΗΓΟ....	σελ. 72
• 11.1 Ε Λειτουργίες.....	σελ. 72
ο 11.1.1 Όρια για την Δεύτερη Ιδιοτιμή.....	σελ. 76
• 11.2 Η Λειτουργίες.....	σελ. 84
• 11.3 Προβλήματα για το Κεφάλαιο 11.....	σελ. 87

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	σελ. 88
-------------------	---------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

5.1 Γραμμή Μεταφοράς Χωρίς Απώλειες

Σε αυτό το σύντομο κεφάλαιο θα εξετάσουμε μερικά απλά στοιχεία των γραμμών μεταφοράς χαμηλής συχνότητας, καθώς και μια πρώτη εισαγωγή στην ανάλυση των κυματοδηγών, θέμα βασικά του επόμενου κεφαλαίου. Συνεχίζοντας από το προηγούμενο κεφάλαιο, και στα περισσότερα από τα ακόλουθα, εδώ θα θεωρήσουμε αρμονική εξάρτηση του χρόνου μέσω του απόλυτου παράγοντα $e^{-i\omega t}$.

Μια γραμμή μετάδοσης είναι ένα σύστημα δύο αγωγών, με την μεταφραστική συμμετρία κατά μήκος ενός άξονα, τον άξονα z , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1. Διατομή της γραμμής μεταφοράς δύο αγωγών. Η z -διεύθυνση είναι προς τα έξω (από τη σελίδα). Η $I(z)$ επίσης ρέει προς έξω και $-I(z)$ ρέει προς τα μέσα (στη σελίδα).

Θεωρούμε ότι ο περιβάλλον μέσος έχει σταθερές ηλεκτρικές ιδιότητες, που χαρακτηρίζονται από διηλεκτρικό ϵ και διαπερατότητα μ . Κατ' αρχάς, θα υποθέσουμε πως οι αγωγοί έχουν άπειρη αγωγιμότητα. Αυτό σημαίνει ότι το εφαπτόμενο ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να μηδενίζεται στην επιφάνεια των αγωγών. Εδώ θα δούμε μόνο τη χαμηλότερη ηλεκτρομαγνητική λειτουργία του συστήματος, τη λεγόμενη **T** (ή TEM) λειτουργία. Οι υψηλότερες **TE** και **TM** λειτουργίες, θα είναι το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου. Αυτό σημαίνει ότι τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία βρίσκονται αποκλειστικά στα επίπεδα x - y . Δεν υπάρχουν διαμήκη πεδία. Μας βολεύει να διασπάσουμε τα πεδία στην εγκάρσια και διαμήκη εξάρτησή τους, πράγμα το οποίο το καταφέρνουμε γράφοντας:

$$\mathbf{E} = -\nabla \perp \varphi(x, y)V(z), \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{H} = -\mathbf{e} \times \nabla \perp \varphi(x, y)I(z), \quad (5.1b)$$

όπου έχουμε εισάγει συναρτήσεις “ρεύματος” και “τάσης” $I(z)$ και $V(z)$. Εδώ, το \mathbf{e} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της γραμμής, δηλαδή, ο άξονας z . Φυσικά, αυτή η διάσπαση αφήνει την ομαλοποίηση των τελευταίων συναρτήσεων απροσδιόριστη. Είναι εύκολο να ομαλοποιήσουμε τις εγκάρσιες συναρτήσεις ως εξής:

$$\int d\sigma (\nabla \perp \varphi)^2 = 1, \quad (5.2)$$

όπου το ολοκλήρωμα εκτείνεται σε όλο το επίπεδο που οριοθετείται από τους δύο αγωγούς.

Οι εξισώσεις του Maxwell καθορίζουν αυτές τις συναρτήσεις της γραμμής μεταφοράς. Ο νόμος του Gauss $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, μας λέει αμέσως ότι η φ είναι μια αρμονική συνάρτηση:

$$\nabla_{\perp}^2 \varphi = 0. \quad (5.3)$$

Επειδή οι αγωγοί θεωρούνται ιδανικοί, το δυναμικό φ πρέπει να είναι σταθερό σε κάθε επιφάνεια, αλλά φυσικά θα πάρει διαφορετικές τιμές στους δύο αγωγούς. Οι δύο καταρρωμένες εξισώσεις, (4.7a) και (4.7b), που βρίσκονται εκτός των αγωγών, παρέχουν τις εξισώσεις που καθορίζουν τις συναρτήσεις τάσης και ρεύματος:

$$\frac{d}{dz} V(z) = i\omega \mu I(z), \quad (5.4a)$$

$$\frac{d}{dz} I(z) = i\omega \varepsilon V(z). \quad (5.4b)$$

Από τη μορφή αυτών των εξισώσεων, βλέπουμε ότι το σύστημά μας ερμηνεύεται άμεσα από άποψη στοιχείων κυκλώματος. Δηλαδή, υπάρχει μια διακλάδωση χωρητικότητας C_{\perp} ανά μονάδα μήκους του ε , και μια σειρά αυτεπαγωγής L_s ανά μονάδα μήκους του μ . Το γενικό διάγραμμα του κυκλώματος χωρίς απώλειες που περιγράφει μια γενική γραμμή αναλύεται ως εξής. Μια ιδανική γραμμή μεταφοράς δύο αγωγών μπορεί να θεωρηθεί ως μια σειρά στοιχείων, έκαστο των οποίων αποτελείται από μια σειρά αυτεπαγωγής L_s και χωρητικότητας C_s , και μια διακλάδωση αυτεπαγωγής L_{\perp} και χωρητικότητας C_{\perp} , όπως απεικονίζεται στην Σχήμα 5.2. Αν το μήκος του κάθε στοιχείου είναι Δz τότε, η πτώση τάσης στα άκρα του στοιχείου, για μια δεδομένη συχνότητα ω , είναι:

$$\Delta V = i\omega L_s \Delta z I + \frac{\Delta z}{i\omega C_s} I, \quad (5.5a)$$

από την οποία προκύπτει μια σύνθετη αντίσταση σειράς ανά μονάδα μήκους:

$$-Z_s = i\omega L_s + \frac{1}{i\omega C_s}. \quad (5.5b)$$

Ομοίως, επειδή το ρεύμα βραχυκύκλωσης μεταξύ των δύο αγωγών είναι:

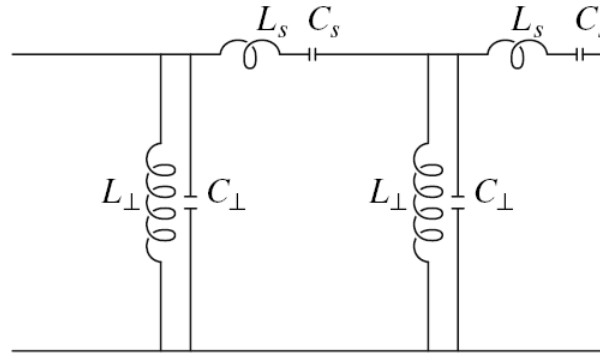
$$\Delta I = i\omega C_{\perp} \Delta z V + \frac{\Delta z}{i\omega L_{\perp}} V, \quad (5.6a)$$

η είσοδος της διακλάδωσης ανά μονάδα μήκους είναι:

$$-Y_{\perp} = i\omega C_{\perp} + \frac{1}{i\omega L_{\perp}}. \quad (5.6b)$$

Εδώ, μόνο δύο από τις παραμέτρους είναι πεπερασμένες:

$$C_{\perp} = \varepsilon, \quad L_s = \mu. \quad (5.7)$$



Σχήμα. 5.2. Η γραμμή μεταφοράς αντιπροσωπεύεται σε όρους ισοδύναμης σειράς και επαγωγικών διακλαδώσεων και χωρητικότητας. Παρουσιάζονται εδώ δύο στοιχεία, για κάθε μήκος της Δz , τα οποία επαναλαμβάνονται απεριόριστα.

Σκεφτείτε τώρα ένα κύμα μετάδοσης:

$$I(z) = Ie^{ikz}, \quad V(z) = Ve^{ikz}. \quad (5.8)$$

Η σχέση διασποράς σύμφωνα με τις συναρτήσεις (5.4a) και (5.4b) είναι:

$$\kappa^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2, \quad (5.9)$$

η οποία δεν παρουσιάζει αποκοπή, όπου σημαίνει ότι τα κύματα των αυθαίρετων χαμηλών συχνοτήτων μεταδίδονται. Επιπλέον, από το λόγο V προς I συμπεραίνουμε την χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής:

$$\frac{V}{I} = \frac{\kappa}{\omega \varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \zeta, \quad (5.10)$$

η οποία είναι απλά η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση του μέσου.

Προφανώς, υπάρχει σημαντική ασάφεια στον καθορισμό της σύνθετης αντιστάσεως της γραμμής. Θα φαινόταν πιο φυσικό να καθοριστεί η Z ως ο λόγος της τάσης μεταξύ των αγωγών, $\Delta_{\phi} V$, προς το ρεύμα που ρέει σε έναν από τους αγωγούς, όπως ορίζεται από το νόμο του Ampere, $\oint_C ds \cdot \mathbf{H}$. Δηλαδή:

$$Z' = \frac{\Delta_{\phi} V(z)}{\oint_C ds (\partial_n \phi) I(z)}, \quad (5.11)$$

όπου το κύκλωμα περιλαμβάνει μόνο έναν από τους αγωγούς, και η παράγωγος, σε σχέση με την κάθετο, είναι προς την επιφάνεια του εν λόγω αγωγού. Θα μπορούσαμε επίσης να καθορίσουμε την αυτεπαγωγή ως το λόγο της μαγνητικής ροής που διασχίζει ένα επίπεδο, που ορίζεται από μία γραμμή η οποία συνδέει τους δύο αγωγούς και επεκτείνεται κατά μια μονάδα μήκους στη z -διεύθυνση, προς το ρεύμα. Όπου, για την αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους, μας δίνει:

$$L' = \frac{\mu \int dl \partial_l \varphi}{\oint_C ds (\partial_n \varphi)} = \frac{\mu \Delta \varphi}{\oint_C ds (\partial_n \varphi)} = \frac{Z'}{c}, \quad (5.12)$$

όπου στην πρώτη μορφή του, το ολοκλήρωμα στον αριθμητή είναι κατά μήκος της γραμμής που ενώνει τους αγωγούς, και το παράγωγο είναι εφαπτόμενο στην εν λόγω γραμμή. Αν και αυτοί οι ορισμοί φαίνονται αρκετά φυσικοί, δεν μπορούν γενικά να επεκταθούν σε κατάσταση κυματοδηγού, όπως θα συζητήσουμε λεπτομερώς στην ακόλουθη ενότητα.

5.2 Απώλειες Υψηλής Αντίστασης

Τώρα, ας συμπεριλάβουμε την απαγωγή, αναγνωρίζοντας ότι τα πραγματικά υλικά έχουν μια πεπερασμένη αγωγιμότητα σ , οπότε το σήμα χάνεται καθώς ταξιδεύει κατά τη γραμμή μετάδοσης. Μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίσταση ανά μονάδα μήκους, εξετάζοντας τη ροή της ενέργειας στους αγωγούς:

$$P_{diss} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_C ds (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n}, \quad (5.13)$$

όπου το ολοκλήρωμα εκτείνεται πάνω από το όριο των αγωγών, και το \mathbf{n} είναι το φυσιολογικό όριο σε αυτό. Θα αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα με διαταρασόμενο τρόπο, από τη συνήθη σχέση μεταξύ της εφαπτομένης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στην επιφάνεια:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \zeta \frac{k\delta}{2} (1 - i)\mathbf{H}, \quad (5.14)$$

όπου το πάχος του φλοιού ισούται με $\delta = (2/\mu\omega\sigma)^{1/2}$. Άρα προκύπτει ότι:

$$P_{diss} = \frac{1}{2} \mathcal{R} |I|^2, \quad (5.15)$$

όπου η αντίσταση ανά μονάδα μήκους είναι:

$$\mathcal{R} = \frac{\zeta k\delta}{2} \oint_C ds (\partial_n \varphi)^2. \quad (5.16)$$

Εξαιτίας αυτού, η σύνθετη αντίσταση σειράς της γραμμής γίνεται:

$$Z_s = \mathcal{R} - i\omega L_s, \quad (5.17)$$

και η είσοδος διακλάδωσης είναι αμετάβλητη:

$$Y_{\perp} = -i\omega C_{\perp}. \quad (5.18)$$

Οι τροποποιημένες εξισώσεις γραμμής μεταφοράς:

$$\frac{dV}{dz} = -Z_s I, \quad \frac{dI}{dz} = -Y_\perp V. \quad (5.19)$$

από τις οποίες συμπεραίνουμε ότι η σταθερά διάδοσης δίνεται από την σχέση:

$$\kappa^2 = -Z_s Y_\perp. \quad (5.20)$$

Θεωρώντας τις απώλειες της αντίστασης ανά μονάδα μήκους ως μικρές, έχουμε:

$$\kappa = \omega \sqrt{L_s C_\perp} + i \frac{\mathcal{R}}{2} \sqrt{\frac{C_\perp}{L_s}}, \quad (5.21)$$

ή εισάγοντας τις τιμές $C_\perp = \varepsilon$ και $L_s = \mu$:

$$\kappa = k + i \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \frac{\mathcal{R}}{\zeta}. \quad (5.22)$$

Η ισχύς μεταδίδεται στη γραμμή και είναι ανάλογη με $e^{-\alpha z}$, όπου το α είναι η σταθερά εξασθένησης.

5.3 Παράδειγμα: Ομοαξονική γραμμή

Το απλούστερο παράδειγμα μιας γραμμής μεταφοράς δύο αγωγών είναι ένα ομοαξονικό καλώδιο, με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b . Στην περίπτωση αυτή, η ομαλοποιημένη συνάρτηση δυναμικού είναι:

$$\varphi = \frac{\ln r}{\sqrt{2\pi \ln b/a}}. \quad (5.23)$$

Τα αντίστοιχα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία είναι:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi \ln b/a}} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} V(z), \quad (5.24a)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi \ln b/a}} \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r} I(z). \quad (5.24b)$$

Η εναλλακτική σύνθετη αντίσταση Z' της (5.11) υπολογίζεται ότι είναι:

$$Z' = \frac{\zeta}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (5.25)$$

η οποία διαφέρει από την $Z = \zeta$ κατά ένα συντελεστή:

$$N = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (5.26)$$

ενώ η εναλλακτική αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους της (5.12) είναι:

$$L'_s = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (5.27)$$

πάλι διαφέρει από $L_s = \mu$ κατά τον ίδιο παράγοντα N . Η σταθερά εξασθένησης, ή η αντίσταση ανά μονάδα μήκους, όταν συμπεριλαμβάνεται μια πεπερασμένη αγωγιμότητα, είναι:

$$\alpha = \frac{\mathcal{R}}{\zeta} = \frac{k\delta}{2} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (5.28)$$

όπου $k\delta = 2/\zeta\sigma\delta$, έχοντας υποθέσει ότι οι δύο αγωγοί έχουν το ίδιο πάχος φλοιού.

5.4 Συχνότητες αποκοπής

Αντιμετωπίσαμε μόνο τη χαμηλότερη **T** λειτουργία της γραμμής σε αυτό το κεφάλαιο. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε τις υψηλότερες λειτουργίες. Για ένα κοίλο κυματοδηγό, σε αντίθεση με ένα ομοαξονικό καλώδιο, μόνο το τελευταίο υφίσταται, και δεν υπάρχει **T** λειτουργία. Αυτές οι υψηλότερες λειτουργίες δεν μπορούν να διαδοθούν αν έχουν μήκη κύματος μεγαλύτερα από μια κλίμακα που καθορίζεται από τις διαστάσεις του οδηγού, οπότε υπάρχει ένα μήκος κύματος αποκοπής, ή ένας κυματάρηθος αποκοπής από τον οποίο κανένα σήμα δεν μπορεί να μεταδοθεί. Μπορούμε να δούμε πώς αυτό συμβαίνει, από την εξέταση των γενικών εξισώσεων γραμμής (5.19) με τη γενική αντίσταση σειράς (5.5b) και την είσοδο διακλάδωσης (5.6b). Η αντίστοιχη σταθερά διάδοσης είναι η (5.20), ή η εξής:

$$\kappa^2 = \omega^2 L_s C_\perp - \left(\frac{C_\perp}{C_s} + \frac{L_s}{L_\perp} \right) + \frac{1}{\omega^2 C_s L_\perp}. \quad (5.29)$$

Για την λειτουργία μετάδοσης, αυτή πρέπει να είναι θετική. Αυτό θα ισχύει μόνο αν το ω^2 υπερβαίνει το μέγιστο των $1/L_s C_s$ και $1/L_\perp C_\perp$, ή είναι μικρότερο από οποιαδήποτε από αυτές τις ποσότητες. Θα αποδειχθεί ότι υπάρχουν ακριβώς δύο είδη λειτουργιών, α) **E** λειτουργίες, όπου ονομάζονται έτσι επειδή κατέχουν ένα διαμήκη ηλεκτρικό πεδίο επιπλέον στα εγκάρσια πεδία, και β) **H** λειτουργίες, εξαιτίας της παρουσίας μιας διαμήκους συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου. Οι αντίστοιχες παράμετροι του κυκλώματος είναι:

$$\mathbf{E}_{\text{mode}}: C_\perp = \varepsilon, \quad L_s = \mu, \quad C_s = \frac{\varepsilon}{\gamma^2}, \quad L_\perp = \infty, \quad (5.30a)$$

$$\mathbf{H}_{\text{mode}}: C_\perp = \varepsilon, \quad L_s = \mu, \quad C_s = \infty, \quad L_\perp = \frac{\mu}{\gamma^2}, \quad (5.30b)$$

όπου η ποσότητα γ^2 είναι μια χαρακτηριστική ιδιοτιμή του εγκάρσιου Λαπλασιανού φορέα, που αντιστοιχεί σε κάποιο τυπικό αντίστροφο τετραγωνικό μήκος. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, για να έχουμε μετάδοση, το ω πρέπει να υπερβαίνει την ποσότητα γc , ή το εγγενές μήκος κύματος της ακτινοβολίας θα πρέπει να είναι μικρότερο από ένα μήκος κύματος αποκοπής:

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\gamma}. \quad (5.31)$$

5.5 Προβλήματα για το Κεφάλαιο 5

1. Σκεφτείτε μια γραμμή μεταφοράς που αποτελείται από δύο ορθογώνιους παράλληλους αγωγούς, με απόσταση a ο ένας από τον άλλο, και με διάσταση $b \gg a$ στην εγκάρσια διεύθυνση που είναι κάθετη προς τον διαχωρισμό. Υπολογίστε την συνάρτηση δυναμικού ϕ , και υπολογίστε την εναλλακτική σύνθετη αντίσταση, και συμπεριλαμβανομένης της απαγωγής, την σταθερά εξασθένισης.
2. Υπολογίστε την αντίσταση ανά μονάδα μήκους για ένα μονό σύρμα ακτίνας ρ και την αγωγιμότητα σ , και συγκρίνεται τα με το αποτέλεσμα που βρέθηκε για το ομοαξονικό καλώδιο της (5.28).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΙ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Ο κυματοδηγός είναι μια συσκευή για τη μεταφορά ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας από ένα σημείο σε ένα άλλο χωρίς σημαντική απώλεια. Στην απλούστερη μορφή του αποτελείται από ένα κοίλο μεταλλικό σωλήνα με ορθογώνια ή κυκλική διατομή, εντός της οποίας μπορούν να μεταδοθούν ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Η γραμμή μεταφοράς δύο αγωγών, που συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 5, είναι ένα ιδιαίτερο είδος κυματοδηγού, με ειδικές ιδιότητες. Η απλή φυσική γενική ιδέα, που υπονοείται από αυτά τα παραδείγματα, μπορεί να επεκταθεί, ώστε να περιλάβει κάθε περιοχή εντός της οποίας μπορεί να συμβεί μονοδιάστατη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να καθορίσει τη θεωρία των απλών κυματοδηγών, εκφρασμένοι στην γενική ονοματολογία γραμμής μεταδόσεως, όπου σκιαγραφήθηκε στο Κεφάλαιο 5.

Αυτό το κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στη θεωρία των ενιαίων κυματοδηγών – κυλινδρικών μεταλλικών σωλήνων, οι οποίοι έχουν την ίδια διατομή σε οποιοδήποτε επίπεδο, κάθετο ως προς τον άξονα του οδηγού. Αρχικά, η απλούστερη παραδοχή που θα γίνει είναι ότι τα μεταλλικά τοιχώματα του κυματοδηγού είναι τέλεια αγωγίμα. Δεδομένου λοιπόν, ότι το πεδίο περιορίζεται εξολοκλήρου στο εσωτερικό του κυματοδηγού, ο οδηγός περιγράφεται ολοκληρωτικά, προσδιορίζοντας την καμπύλη C , η οποία ορίζει μία διατομή S του εσωτερικού κυματοδηγού επιφάνειας S . Η καμπύλη C μπορεί να είναι μια απλή κλειστή καμπύλη, η οποία αντιστοιχεί σε ένα κοίλο κυματοδηγό, ή δύο άσχετες μεταξύ τους καμπύλες, όπως σε μια ομοαξονική γραμμή.

6.1 Διαμόρφωση γραμμής μεταφοράς

Πρώτα εξετάζουμε το πρόβλημα εύρεσης πιθανών πεδίων που μπορεί να υπάρχουν μέσα σε έναν κυματοδηγό, απουσία οποιωνδήποτε αποτυπωμένων ρευμάτων. Αυτό είναι ισοδύναμο με την αναζήτηση των λύσεων των εξισώσεων του Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = ik\zeta\mathbf{H}, \quad (6.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -ik\eta\mathbf{E}, \quad (6.1b)$$

όπου έχουμε ορίσει (σε μονάδες SI):

$$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{c}, \quad (6.2a)$$

c είναι η ταχύτητα του φωτός στο μέσο εσωτερικά του οδηγού, και εισαγάγει τις ενδείξεις για την εσωτερική αντίσταση ή την αγωγιμότητα του μέσου:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \zeta^{-1}. \quad (6.2b)$$

Αυτές οι εξισώσεις πρόκειται να επιλυθούν λαμβάνοντας υπ' όψιν την οριακή συνθήκη:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{on } S, \quad (6.3)$$

όπου \mathbf{n} είναι η μονάδα κάθετη ως προς την επιφάνεια S του οδηγού. Υπενθυμίζουμε ότι οι άλλες δύο εξισώσεις του Maxwell, σε αποφορτισμένες περιοχές:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.4)$$

περιέχονται εντός αυτών των εξισώσεων, όπως και η οριακή συνθήκη $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Το μέσο πληρώσεως του κυματοδηγού θεωρείται ότι είναι ομοιόμορφο και δεν παράγει ενέργεια. Λόγω της κυλινδρικής φύσης της οριακής επιφάνειας, είναι βολικό να διαχωρίσουμε τις εξισώσεις πεδίου σε συνιστώσες, παράλληλες προς τον άξονα του οδηγού, τον οποίο λαμβάνουμε ως z -άξονα, και εγκάρσιες συνιστώσες προς τον άξονα του οδηγού. Αυτό το πετυχαίνουμε με βαθμιδωτό και διανυσματικό πολλαπλασιασμό με το \mathbf{e} , το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την z -διεύθυνση, λαμβάνοντας έτσι:

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{E} = -ik\zeta H_z, \quad (6.5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{H} = ik\eta E_z, \quad (6.5b)$$

και:

$$\nabla E_z - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E} = ik\zeta \mathbf{e} \times \mathbf{H}, \quad (6.6a)$$

$$\nabla H_z - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H} = -ik\eta \mathbf{e} \times \mathbf{E}. \quad (6.6b)$$

Με αντικατάσταση των (6.5b) και (6.5a) στις (6.6a) και (6.6b) αντίστοιχα, αναδιατυπώνονται στην παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E} = ik\zeta \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{e}, \quad (6.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H} = ik\eta \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{E}, \quad (6.7b)$$

στην οποία το 1 υποδηλώνει την δυαδική μονάδα. Αυτές οι εξισώσεις είναι πλήρως ισοδύναμες με τις αρχικές εξισώσεις πεδίου, καθώς εξακολουθούν να περιέχουν τις (6.5a) και (6.5b) όπως και η z -συνιστώσα. Οι εγκάρσιες συνιστώσες των (6.7a) και (6.7b) αποτελούν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων ώστε να καθορίσουν τις εγκάρσιες συνιστώσες των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Οι εξισώσεις αυτές είναι σε μορφή γραμμής μετάδοσης, αλλά με τη σύνθετη αντίσταση σειράς και τη

σύνθετη αγωγιμότητα διακλάδωσης ανά μονάδα μήκους να εμφανίζονται ως δυαδικοί διαφορικοί φορείς. Η επακόλουθη ανάλυση έχει σαν στόχο της, την αντικατάσταση του φορέα της γραμμής μεταφοράς από ένα άπειρο σύνολο συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων. Αυτό επιτυγχάνεται απαλείφοντας διαδοχικά τη διανυσματική πλευρά των εξισώσεων και τη σαφή εξάρτηση στις x και y συντεταγμένες του εγκάρσιου επιπέδου.

Οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο δύο-συνιστωσών, όπως το εγκάρσιο τμήμα του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E}_\perp , μπορεί να παρασταθεί σαν γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων που προέρχονται από μια δυναμική συνάρτηση και μία συνάρτηση ροής, αντιστοίχως. Έτσι:

$$\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp V' + \mathbf{e} \times \nabla V'', \quad (6.8)$$

όπου $V'(\mathbf{r})$ και $V''(\mathbf{r})$ είναι δύο αυθαίρετες βαθμιδωτές συναρτήσεις και το ∇_\perp υποδεικνύει το εγκάρσιο τμήμα της κλίσης του φορέα. Με παρόμοιο τρόπο, γράφουμε:

$$\mathbf{H}_\perp = -\mathbf{e} \times \nabla I' - \nabla_\perp I'', \quad (6.9a)$$

ή:

$$\mathbf{H} \times \mathbf{e} = -\nabla_\perp I' + \mathbf{e} \times \nabla I'', \quad (6.9b)$$

με $I'(\mathbf{r})$ και $I''(\mathbf{r})$ δύο νέες αυθαίρετες βαθμιδωτές συναρτήσεις. Η γενική αναπαράσταση μπορεί να ληφθεί με την κατασκευή των χαρακτηριστικών διανυσμάτων δύο-συνιστωσών (ιδιοδιανύσματα), του φορέα $1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla$. Τέτοια διανύσματα πρέπει να πληρούν την ιδιοδιανυσματική εξίσωση της μορφής:

$$\nabla_\perp \nabla \cdot \mathbf{A}_\perp = \gamma \mathbf{A}_\perp. \quad (6.10)$$

Ως εκ τούτου, είτε $\nabla \cdot \mathbf{A}_\perp = 0$ και $\gamma = 0$, υπονοώντας ότι το \mathbf{A}_\perp είναι το κατσάρωμα ενός διανύσματος που κατευθύνεται κατά μήκος του z -άξονα, είτε $\nabla \cdot \mathbf{A}_\perp \neq 0$, και το \mathbf{A}_\perp είναι η κλίση μίας βαθμιδωτής συνάρτησης. Το πιο γενικό διάνυσμα δύο-συνιστωσών \mathbf{A}_\perp είναι ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών των δύο τύπων, και το $\mathbf{e} \times \mathbf{A}$ παραμένει στην ίδια μορφή, όπως πρέπει να είναι. Σαν συνέπεια των ανωτέρω παρατηρήσεων, η αντικατάσταση των παραστάσεων (6,8) και (6.9a) στις διαφορικές εξισώσεις (6.7a) και (6.7b) θα παράγει ένα σύνολο εξισώσεων στις οποίες κάθε όρος έχει τη μία ή την άλλη από τις μορφές αυτές. Αυτό δίδει ένα σύστημα τεσσάρων βαθμιδωτών διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες ομαδοποιούνται σε δύο ζεύγη:

$$\frac{\partial}{\partial z} I' = ik\eta V', \quad \frac{\partial}{\partial z} V' = ik\zeta \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla_\perp^2 \right) I', \quad (6.11a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I'' = ik\eta \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla_\perp^2 \right) V'', \quad \frac{\partial}{\partial z} V'' = ik\zeta I'', \quad (6.11b)$$

όπου ∇_\perp^2 είναι η Λαπλασιανή για τις εγκάρσιες συντεταγμένες x και y . (Οποιαδήποτε σταθερά, εκμηδενισμένη από το ∇_\perp , αποκλείεται, διότι δεν θα μπορούσε να συμβάλει στα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία.) Οι διαμήκεις συνιστώσες του πεδίου μπορούν τώρα να γραφούν ως εξής:

$$ik\eta E_z = \nabla_{\perp}^2 I', \quad (6.12a)$$

$$ik\zeta H_z = \nabla_{\perp}^2 V''. \quad (6.12b)$$

Το καθαρό αποτέλεσμα αυτών των λειτουργιών είναι η αποσύνθεση του πεδίου σε δύο ανεξάρτητα τμήματα που προέρχονται, αντίστοιχα, από τις βαθμιδωτές συναρτήσεις V' , I' , και V'' , I'' . Σημειώστε ότι ο πρώτος τύπος πεδίου γενικά διαθέτει μια διαμήκη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, αλλά όχι διαμήκη συνιστώσα μαγνητικού πεδίου, ενώ η κατάσταση αντιστρέφεται με το δεύτερο τύπο του πεδίου. Για το λόγο αυτό, οι διάφορες διαμορφώσεις του πεδίου, που προέρχονται από τις V' και I' , ορίζονται ως **E** λειτουργίες, ενώ εκείνες που λαμβάνονται από τις V'' και I'' καλούνται **H** λειτουργίες. η ονοματολογία σε κάθε περίπτωση προσδιορίζει την ύπαρξη z -συνιστώσας στο πεδίο. (Μια πιο κοινή ορολογία για την **E** λειτουργία είναι TM λειτουργία, που σημαίνει "εγκάρσια μαγνητική", και για την **H** λειτουργία, TE που σημαίνει "εγκάρσιο ηλεκτρικό". Ακόμη, άλλοι συμβολισμοί είναι τα \perp για «κάθετη», όπου αναφέρεται σε **H** λειτουργία, και \parallel για "παράλληλη", όπου αναφέρεται σε **E** λειτουργία.)

Οι βαθμιδωτές ποσότητες που εμπλέκονται στις (6.11a) και (6.11b) είναι συναρτήσεις των x , y και z . Το τελικό στάδιο της μείωσης, των μονοδιάστατων εξισώσεων, συνιστάται για την αντιπροσώπευση της εξάρτησης των x , y σε αυτές τις συναρτήσεις, από την επέκταση στο πλήρες σύνολο των συναρτήσεων, που αποτελούν τις ιδιοσυναρτήσεις του ∇_{\perp}^2 . Για τη λειτουργία **E**, αυτές οι συναρτήσεις είναι $\varphi_{\alpha}(x,y)$, ικανοποιώντας την:

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma_{\alpha}^{\prime 2})\varphi_{\alpha}(x,y) = 0, \quad (6.13)$$

και υπόκεινται σε οριακές συνθήκες, τις οποίες θα καθορίσουμε σύντομα. Αντικαθιστώντας την επέκταση:

$$V'(x,y,z) = \sum_a \varphi_{\alpha}(x,y)V'_a(z), \quad (6.14a)$$

$$I'(x,y,z) = \sum_a \varphi_{\alpha}(x,y)I'_a(z), \quad (6.14b)$$

στην (6.11a), παίρνουμε αμέσως τις εξισώσεις της γραμμής μεταφοράς:

$$\frac{d}{dz} I'_a(z) = ik\eta V'_a(z), \quad (6.15a)$$

$$\frac{d}{dz} V'_a(z) = ik\zeta \left(1 - \frac{\gamma_{\alpha}^{\prime 2}}{k^2}\right) I'_a(z). \quad (6.15b)$$

Με παρόμοιο τρόπο, εισαγάγουμε ένα άλλο σύνολο ιδιοσυναρτήσεων για την ∇_{\perp}^2 :

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma_{\alpha}^{\prime\prime 2})\psi_{\alpha}(x,y) = 0. \quad (6.16)$$

και επεκτείνουμε τις ποσότητες των **H** λειτουργιών των μεθόδων αυτών:

$$V''(x, y, z) = \sum_a \psi_a(x, y) V_a''(z), \quad (6.17a)$$

$$I''(x, y, z) = \sum_a \psi_a(x, y) I_a''(z). \quad (6.17b)$$

Οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις είναι:

$$\frac{d}{dz} I_a''(z) = ik\eta \left(1 - \frac{\gamma_a''^2}{k^2} \right) V_a''(z), \quad (6.18a)$$

$$\frac{d}{dz} V_a''(z) = ik\zeta I_a''(z). \quad (6.18b)$$

Οι οριακές συνθήκες για το ηλεκτρικό πεδίο απαιτούν:

$$E_z = 0, \quad E_s = 0 \quad \text{on } S, \quad (6.19)$$

όπου E_s είναι η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που εφάπτεται στην οριακή καμπύλη C . Από τις (6.12a) και (6.8), αυτές οι συνθήκες συνεπάγονται ότι:

$$\nabla_{\perp}^2 I' = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} V' = \frac{\partial}{\partial n} V'' = 0 \quad \text{on } S, \quad (6.20)$$

όπου $\frac{\partial}{\partial n}$ είναι η κάθετη παράγωγος προς την επιφάνεια του κυματοδηγού S , και $\frac{\partial}{\partial s}$ είναι η περιμετρική παράγωγος, εφαπτόμενη στην καμπύλη C . Δεδομένου ότι αυτές εξισώσεις πρέπει να ικανοποιούνται για όλα τα z , επιβάλλουν τις ακόλουθες απαιτήσεις για τις συναρτήσεις φ_a και ψ_a :

$$\gamma_a'^2 \varphi_a = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} \varphi_a = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \psi_a = 0 \quad \text{on } C. \quad (6.21)$$

Αν εξαιρέσουμε προσωρινά την πιθανότητα $\gamma_a' = 0$, η δεύτερη οριακή κατάσταση **E** λειτουργίας, αυτόματα συμπεριλαμβάνεται στην πρώτη δήλωση, ότι $\varphi_a = 0$ για την οριακή καμπύλη C . Ως εκ τούτου, οι **E** λειτουργίες προέρχονται από βαθμιδωτές συναρτήσεις που ορίζονται από τις:

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma_a'^2) \varphi_a(x, y) = 0, \quad (6.22a)$$

$$\varphi_a(x, y) = 0 \quad \text{on } C, \quad (6.22b)$$

ενώ οι **H** λειτουργίες προέρχονται από συναρτήσεις που ικανοποιούν τις:

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma_a''^2) \psi_a(x, y) = 0, \quad (6.23a)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \psi_\alpha(x, y) = 0 \quad \text{on } C, \quad (6.23b)$$

Αυτές οι εξισώσεις συχνά συναντώνται στη φυσική. Για παράδειγμα, περιγράφουν τους κραδασμούς μιας μεμβράνης που οριοθετείται από την καμπύλη C , η οποία είτε συσφίγγεται εύκαμπτά στο όριο [(6.22b)], ή εντελώς ελεύθερα στο [(6.23b)]. Από μαθηματική άποψη, αυτά αναφέρονται σε οριακές συνθήκες ενός τελεστή Dirichlet και ενός Neumann, αντιστοίχως. Κάθε εξίσωση ορίζει ένα άπειρο σύνολο ιδιοσυναρτήσεων και ιδιοτιμών $\varphi_\alpha, \gamma_\alpha'$ και $\psi_\alpha, \gamma_\alpha''$. Ως εκ τούτου, ένας κυματοδηγός έχει διπλά άπειρες πιθανές λειτουργίες ηλεκτρομαγνητικής ταλάντωσης, πλήρως χαρακτηρισμένες από μία από αυτές τις βαθμιδωτές συναρτήσεις και την συνοδευόμενη ιδιοτιμή τους.

Τώρα θα δείξουμε ότι η πιθανότητα που έχει απορριφθεί, $\gamma_\alpha' = 0$, δεν υφίσταται για κοίλους κυματοδηγούς, αλλά ανταποκρίνεται σε πραγματική διαμόρφωση πεδίου σε γραμμές δύο αγωγών, που στην πραγματικότητα είναι η \mathbf{T} λειτουργία που συζητήθηκε στο κεφάλαιο 5. Η βαθμιδωτή συνάρτηση φ που συνδέεται με την εξίσωση $\gamma_\alpha' = 0$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace:

$$\nabla_\perp^2 \varphi(x, y) = 0, \quad (6.24)$$

και περιορίζεται από τη δεύτερη οριακή συνθήκη, $\frac{\partial}{\partial s} \varphi(x, y)$ στην C , ή:

$$\varphi(x, y) = \text{constant on } C. \quad (6.25)$$

Δεδομένου ότι η φ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, συμπεραίνουμε ότι:

$$\oint_C ds \varphi \frac{\partial}{\partial n} \varphi = \oint_\sigma d\sigma (\nabla_\perp \varphi)^2, \quad (6.26)$$

στην οποία το γραμμικό ολοκλήρωμα λαμβάνεται γύρω από την καμπύλη C και το επιφανειακό ολοκλήρωμα εκτείνεται πάνω από τη διατομή του οδηγού σ . Για έναν κοίλο κυματοδηγό με διατομή που οριοθετείται από μια μόνο κλειστή καμπύλη επί της οποίας:

$$\varphi = \text{constant} = \varphi_0, \quad (6.27)$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$$\oint_C ds \varphi \frac{\partial}{\partial n} \varphi = \varphi_0 \oint_C ds \frac{\partial}{\partial n} \varphi = \varphi_0 \oint_\sigma d\sigma \nabla_\perp^2 \varphi = 0, \quad (6.28)$$

και συνεπώς από την (6.26), $\nabla_\perp \varphi = 0$ παντού μέσα στον οδηγό, η οποία συνεπάγεται ότι όλες οι συνιστώσες του πεδίου εξαφανίζονται, απορρίπτοντας ουσιαστικά την ύπαρξη μιας τέτοιας λειτουργίας. Εάν, ωστόσο, το περίγραμμα της C αποτελείται από δύο άσχετες καμπύλες C_1 και C_2 , όπως σε μια ομοαξονική γραμμή, η οριακή συνθήκη, $\frac{\partial}{\partial s} \varphi = 0$ στην C , προϋποθέτει ότι η φ είναι συνεχής σε κάθε περίγραμμα:

$$\varphi = \varphi_1 \text{ on } C_1, \quad \varphi = \varphi_2 \text{ on } C_2, \quad (6.29)$$

αλλά δεν απαιτεί ότι $\varphi_1 = \varphi_2$. Ως εκ τούτου:

$$\oint_C ds \varphi \frac{\partial}{\partial n} \varphi = \varphi_1 \oint_{C_1} ds \frac{\partial}{\partial n} \varphi + \oint_{C_2} ds \frac{\partial}{\partial n} \varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) \oint_{C_1} ds \frac{\partial}{\partial n} \varphi, \quad (6.30)$$

εφόσον:

$$0 = \oint_C ds \frac{\partial}{\partial n} \varphi = \oint_{C_1} ds \frac{\partial}{\partial n} \varphi + \oint_{C_2} ds \frac{\partial}{\partial n} \varphi, \quad (6.31)$$

και η προηγούμενη απόδειξη αποτυγχάνει εάν $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Η ταύτιση με τη λειτουργία T ολοκληρώνεται σημειώνοντας στην [(6.12a)] ότι $E_z = H_z = 0$.

Η προηγούμενη συζήτηση μας έδειξε ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εντός ενός κυματοδηγού, αποτελείται από μια γραμμική υπέρθεση ενός απείρου αριθμού των πλήρως ανεξάρτητων διαμορφώσεων πεδίου, ή λειτουργιών. Κάθε λειτουργία έχει ένα χαρακτηριστικό μοτίβο πεδίου σε οποιοδήποτε τμήμα του οδηγού, καθώς και οι παραλλαγές πλάτους από τα πεδία κατά μήκος του οδηγού καθορίζονται από "ρεύματα" και "τάσεις" που ικανοποιούν τις εξισώσεις της γραμμής μεταφοράς. Θα συνοψίσουμε τα αποτελέσματα συλλέγοντας μαζί τις θεμελιώδεις εξισώσεις που περιγράφουν μια τυπική \mathbf{E} λειτουργία και \mathbf{H} λειτουργία (παραλείποντας διακριτικούς δείκτες για ευκολία).

• \mathbf{E} λειτουργία:

$$\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp \varphi(x, y) V(z), \quad (6.32a)$$

$$\mathbf{H}_\perp = -\mathbf{e} \times \nabla \varphi(x, y) I(z), \quad (6.32b)$$

$$E_z = i\zeta \frac{\gamma^2}{k} \varphi(x, y) I(z), \quad (6.32c)$$

$$H_z = 0, \quad (6.32d)$$

$$(\nabla_\perp^2 + \gamma^2) \varphi(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0 \text{ on } C, \quad (6.32e)$$

$$\frac{d}{dz} I(z) = ik\eta V(z), \quad (6.32f)$$

$$\frac{d}{dz} V(z) = ik\zeta \left(1 - \frac{\gamma^2}{k^2} \right) I(z). \quad (6.32g)$$

• \mathbf{H} λειτουργία:

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{e} \times \nabla \psi(x, y) V(z), \quad (6.33a)$$

$$\mathbf{H}_\perp = -\nabla_\perp \psi(x, y) I(z), \quad (6.33b)$$

$$E_z = 0, \quad (6.32c)$$

$$H_z = i\eta \frac{\gamma^2}{k} \psi(x, y) V(z), \quad (6.33d)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma^2)\psi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \psi(x, y) = 0 \text{ on } C, \quad (6.33e)$$

$$\frac{d}{dz} I(z) = ik\eta \left(1 - \frac{\gamma^2}{k^2}\right) V(z), \quad (6.33f)$$

$$\frac{d}{dz} V(z) = ik\zeta I(z). \quad (6.33g)$$

Η **T** λειτουργία σε μια γραμμή δύο αγωγών πρέπει να θεωρηθεί ως μια λειτουργία **E** με $\gamma = 0$ και η οριακή συνθήκη να αντικατασταθεί από $\frac{\partial}{\partial s} \varphi = 0$. Μπορεί επίσης να θεωρηθεί **H** λειτουργία με $\gamma = 0$.

Οι εξισώσεις της γραμμής μετάδοσης για τους δύο τύπους λειτουργίας, γράφονται ως εξής:

• **E** λειτουργία:

$$\frac{d}{dz} I(z) = i\omega\varepsilon V(z), \quad (6.34a)$$

$$\frac{d}{dz} V(z) = \left(i\omega\mu + \frac{\gamma^2}{i\omega\varepsilon}\right) I(z), \quad (6.34b)$$

• **H** λειτουργία:

$$\frac{d}{dz} I(z) = \left(i\omega\varepsilon + \frac{\gamma^2}{i\omega\mu}\right) V(z), \quad (6.35a)$$

$$\frac{d}{dz} V(z) = i\omega\mu I(z), \quad (6.35b)$$

Αμέσως αναγνωρίζονται ως εξισώσεις τύπου **E** και **H** για την κατανομημένων κυκλωμάτων παράμετρο που συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 5. Η ισοδύναμη γραμμή μεταφοράς της **E** λειτουργίας έχει διανεμίει παραμέτρους ανά μονάδα μήκους που καθορίζονται από μια χωρητικότητα διακλάδωσης $C = \varepsilon$, και αυτεπαγωγή σειράς $L = \mu$, και μια χωρητικότητα σειράς $C' = \varepsilon/\gamma^2$. Οι κατανομημένες παράμετροι της γραμμής της **H** λειτουργίας είναι μια αυτεπαγωγή σειράς $L = \mu$, μια διακλάδωση χωρητικότητας $C = \varepsilon$ και μια διακλάδωση αυτεπαγωγής $L'' = \mu/\gamma^2$, όλα ανά μονάδα μήκους. (Η τιμή κενού της καθολικής αυτεπαγωγής σειράς και της διακλάδωσης χωρητικότητας είναι $L_0 = \mu_0 = 1.257\mu \text{ H/m}$ και $C_0 = \varepsilon_0 = 8.854\text{p F/m}$, αντίστοιχα.) Έτσι, αν θεωρήσουμε ένα προοδευτικό κύμα, $I \propto e^{ikz}$, με $V = ZI$, η σταθερά διάδοσης κ και η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση $Z = 1/Y$ που συνδέονται με τους δύο τύπους των γραμμών είναι:

• **E** λειτουργία:

$$\kappa = \sqrt{k^2 - \gamma^2}, \quad (6.36a)$$

$$Z = \zeta \frac{\kappa}{k}, \quad (6.36b)$$

• Η λειτουργία:

$$\kappa = \sqrt{k^2 - \gamma^2}, \quad (6.36c)$$

$$Y = \eta \frac{\kappa}{k}. \quad (6.36d)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ξανά το φίλτρο που ανήκει σε αυτές τις γραμμές μεταφοράς, το οποίο συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 5. Πραγματική μεταφορά ενέργειας, κατά μήκος ενός κυματοδηγού, σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, μπορεί να συμβεί μόνο αν ο κυματάρριθμος k υπερβαίνει την ποσότητα γ που σχετίζεται με την λειτουργία. Η ιδιοτιμή γ ως εκ τούτου αναφέρεται ως η αποκοπή ή ο κρίσιμος κυματάρριθμος για τη λειτουργία. Άλλες ποσότητες που σχετίζονται με την αποκοπή του κυματάρριθμου είναι το μήκος κύματος αποκοπής:

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\gamma}, \quad (6.37)$$

και η (γωνιακή) συχνότητα αποκοπής:

$$\omega_c = \gamma(\epsilon\mu)^{-1/2}. \quad (6.38)$$

Όταν η συχνότητα υπερβαίνει την συχνότητα αποκοπής για μια συγκεκριμένη λειτουργία, η κίνηση των κυμάτων επί της γραμμής μεταφοράς, που υποδεικνύει τη διακύμανση πεδίου κατά μήκος του οδηγού, περιγράφεται από ένα μήκος κύματος:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\kappa}, \quad (6.39)$$

το οποίο ονομάζεται μήκος κύματος οδηγού. Η σχέση ανάμεσα στο μήκος κύματος οδηγού, εγγενή μήκος κύματος, και το μήκος κύματος αποκοπής για μια συγκεκριμένη λειτουργία, σύμφωνα με την (6.36a) ή την (6.36c), είναι:

$$\frac{1}{\lambda_g} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}}, \quad (6.40a)$$

ή:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (6.40b)$$

Έτσι, στην αποκοπή ($\lambda = \lambda_c$), το μήκος κύματος του οδηγού είναι άπειρο και γίνεται φανταστικό σε μεγαλύτερα μήκη κύματος, υποδεικνύοντας εξασθένηση, ενώ σε πολύ βραχέα μήκη κύματος ($\lambda \ll \lambda_c$), το μήκος κύματος του οδηγού είναι ουσιαστικά ίσο με το εγγενή μήκος κύματος του μέσου του οδηγού. Αντίστοιχα, η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση για την **E** (**H**) λειτουργία είναι μηδέν (άπειρη) στη συχνότητα αποκοπής και είναι φανταστική σε χαμηλότερες συχνότητες με τον χαρακτηριστικό τρόπο χωρητικότητας (αυτεπαγωγής). Η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση προσεγγίζει την εγγενή αντίσταση του μέσου $\zeta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ για πολύ βραχέα μήκη κύματος. Για $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, η τελευταία μειώνει την αντίσταση του χώρου στο κενό:

$$\zeta_0 = \frac{1}{\eta_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega. \quad (6.41)$$

Η ύπαρξη μιας συχνότητας αποκοπής για κάθε λειτουργία περιλαμβάνει την έμμεση δήλωση ότι ο γ^2 είναι πραγματικός και θετικός (ο γ είναι θετικός εξ ορισμού). Η απόδειξη παρέχεται εύκολα τόσο για την **E** όσο και για την **H** λειτουργία με τη βοήθεια της ταυτότητας:

$$\oint_C ds f^* \frac{\partial}{\partial n} f = \int_\sigma d\sigma |\nabla_\perp f|^2 - \gamma^2 \int_\sigma d\sigma |f|^2, \quad (6.42)$$

όπου η f συμβολίζει είτε μια συνάρτηση φ , **E** λειτουργίας, είτε μια συνάρτηση ψ , **H** λειτουργίας. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, το γραμμικό ολοκλήρωμα εξαφανίζεται και:

$$\gamma^2 = \frac{\int_\sigma d\sigma |\nabla_\perp f|^2}{\int_\sigma d\sigma |f|^2}, \quad (6.43)$$

που θεσπίζει το θεώρημα. Πρέπει να σημειωθεί ότι έχουμε αναγνωρίσει, καθ' όλη τη γενικότητα, ότι η f μπορεί να είναι πολύπλοκη. Ωστόσο, με τη γνώση ότι ο γ^2 είναι πραγματικός, είναι προφανές, από τη μορφή της εξίσωσης της ορίζουσας του κύματος και τις οριακές προϋποθέσεις, ότι οι συναρτήσεις πραγματικής λειτουργίας μπορούν πάντα να επιλεγούν.

Η σύνθετη αντίσταση (εισόδου) σε ένα δεδομένο σημείο, επί της γραμμής μεταφοράς, περιγράφει μια συγκεκριμένη λειτουργία:

$$Z(z) = \frac{1}{Y(z)} = \frac{V(z)}{I(z)}, \quad (6.44)$$

Καθορίζει την αναλογία των εγκάρσιων συνιστωσών των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων σε εκείνο το σημείο. Σύμφωνα με την (6.32a) και την (6.32b), ένα μαγνητικό πεδίο **E** λειτουργίας σχετίζεται με το εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο από:

$$\mathbf{E} \text{ λειτουργία: } \mathbf{H} = Y(z) \mathbf{e} \times \mathbf{E}, \quad (6.45a)$$

η οποία είναι μια γενική διανυσματική σχέση, δεδομένου ότι προβλέπει σωστά ότι $H_z=0$. Η ανάλογη σχέση για την \mathbf{H} λειτουργία είναι:

$$\mathbf{H} \text{ λειτουργία: } \mathbf{E} = -Z(z)\mathbf{e} \times \mathbf{H}. \quad (6.45b)$$

Για κάθε τύπο λειτουργίας, οι συνδέσεις μεταξύ των ορθογώνιων συνιστωσών των εγκάρσιων πεδίων είναι:

$$E_x = Z(z)H_y, \quad E_y = -Z(z)H_x, \quad (6.46a)$$

$$H_x = -Y(z)E_y, \quad H_y = Y(z)E_x. \quad (6.46b)$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση της προοδευτικής μετάδοσης κύματος (ή εξασθένησης), εντός της θετικής z -διεύθυνσης, η σύνθετη αντίσταση σε κάθε σημείο ισούται με την σύνθετη χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής, $Z(z) = Z$. Η ανάλογη σχέση $Z(z) = -Z$ περιγράφει ένα προοδευτικό κύμα σε αρνητική κατεύθυνση.

6.2 Διανύσματα Hertz

Η μετατροπή των εξισώσεων διανυσματικού πεδίου σε ένα σύνολο εξισώσεων γραμμής μεταφοράς, όπως ορίζεται στο υποκεφάλαιο 6.1, απαιτεί τέσσερις βαθμιδωτές συναρτήσεις του z για τη σωστή του αναπαράσταση. Ωστόσο, είναι συχνά βολικό να εξαλειφθούν δύο από αυτές τις συναρτήσεις και να υποδείξουμε το γενικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, όπως προκύπτει από δύο βαθμιδωτές συναρτήσεις τοποθέτησης, οι οποίες εμφανίζονται σε ρόλο μοναδιαίων συνιστωσών διανυσμάτων Hertz. Για την εξάλειψη των συναρτήσεων $V'(r)$ και $I''(r)$, με τη βοήθεια των (6.11a) και (6.11b), οι εγκάρσιες συνιστώσες των \mathbf{E} και \mathbf{H} , (6.8) και (6.9a), γίνονται:

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{i}{k} \zeta \nabla_\perp \frac{\partial}{\partial z} I' + \mathbf{e} \times \nabla V'', \quad (6.47a)$$

$$\mathbf{H}_\perp = -\mathbf{e} \times \nabla I' + \frac{i}{k} \eta \nabla_\perp \frac{\partial}{\partial z} V'', \quad (6.47b)$$

οι οποίες μπορούν να συνδυαστούν με τις εκφράσεις για τις διαμήκεις συνιστώσες πεδίου, (6.12a) και (6.12b), σε γενικές διανυσματικές εξισώσεις:

$$\mathbf{E} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Pi}') + ik\zeta \nabla \times \mathbf{\Pi}'', \quad (6.48a)$$

$$\mathbf{H} = -ik\eta \nabla \times \mathbf{\Pi}' + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Pi}''). \quad (6.48b)$$

Τα ηλεκτρικά και μαγνητικά διανύσματα Hertz που εμφανίζονται σε αυτή τη διατύπωση κατέχουν μόνο z -συνιστώσες, τα οποία δίδονται από:

$$\Pi'_z = \frac{i}{k} \zeta I', \quad \Pi''_z = \frac{i}{k} \eta V''.$$
 (6.49)

Οι εξισώσεις του Maxwell ικανοποιούνται απόλυτα, εάν οι διανυσματικές συνιστώσες Hertz ικανοποιούν την βαθμιδωτή κυματική εξίσωση:

$$(\nabla^2 + k^2)\Pi'_z = 0, \quad (\nabla^2 + k^2)\Pi''_z = 0,$$
 (6.50)

η οποία επαληθεύεται από την εξάλειψη των V' και I'' από τις (6.11a) και (6.11b). Για μια συγκεκριμένη \mathbf{E} λειτουργία, η βαθμιδωτή συνάρτηση I' είναι ανάλογη ως προς το διαμήκη ηλεκτρικό πεδίο και:

$$\mathbf{E} \text{ λειτουργία: } \Pi'_z = \frac{1}{\gamma^2} E_z.$$
 (6.51a)

Ομοίως, το άλλο διάνυσμα Hertz προσδιορίζεται:

$$\mathbf{H} \text{ λειτουργία: } \Pi''_z = \frac{1}{\gamma^2} H_z.$$
 (6.51b)

Ως εκ τούτου η δομή του πεδίου μιας \mathbf{E} ή \mathbf{H} λειτουργίας μπορεί να προέρχεται πλήρως από την αντίστοιχη διαμήκη συνιστώσα πεδίου.

6.3 Ορθότητα Σχέσεων

Στρεφόμαστε στην εξέταση των θεμελιωδών φυσικών ποσοτήτων που συνδέονται με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε έναν κυματοδηγό – ενεργειακής πυκνότητας και ενεργειακής ροής. Κατά τη διάρκεια της έρευνας θα εξάγουμε επίσης ορισμένες ορθογώνιες ιδιότητες που διαθέτουν οι ηλεκτρικές και μαγνητικές συνιστώσες του πεδίου των διαφόρων λειτουργιών. Στο μέτρο που αυτές οι σχέσεις βασίζονται σε παρόμοιες ορθογώνιες ιδιότητες των βαθμιδωτών συναρτήσεων φ_a και φ_b , θα εισαγάγουμε τη συζήτηση με την παραγωγή των απαραίτητων θεωρημάτων. Ας εξετάσουμε δύο συναρτήσεις φ_a και φ_b \mathbf{E} λειτουργίας, και ας κατασκευάσουμε την ταυτότητα:

$$\int_C ds \varphi_a \frac{\partial}{\partial n} \varphi_b = \int_\sigma d\sigma \nabla_\perp \varphi_a \cdot \nabla_\perp \varphi_b - \gamma_a'^2 \int_\sigma d\sigma \varphi_a \varphi_b.$$
 (6.52)

Αν προσωρινά εξαιρέσουμε την \mathbf{T} λειτουργία ενός οδηγού δύο αγωγών, το γραμμικό ολοκλήρωμα εξαφανίζεται από την υπεροχή της οριακής συνθήκης. Εναλλάσσοντας τις φ_a και φ_b , και αφαιρώντας την προκύπτουσα εξίσωση, παίρνουμε:

$$(\gamma_a'^2 - \gamma_b'^2) \int_\sigma d\sigma \varphi_a \varphi_b = 0,$$
 (6.53)

το οποίο αποδεικνύει την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων δύο λειτουργιών με διαφορετικές ιδιοτιμές. Συνεπεία της εξαφάνισης του επιφανειακού ολοκληρώματος στην (6.52), μπορούμε να γράψουμε αυτή την ορθογώνια σχέση ως:

$$\int_{\sigma} d\sigma \nabla_{\perp} \varphi_a \cdot \nabla_{\perp} \varphi_b = 0, \quad \gamma'_a \neq \gamma'_b. \quad (6.54)$$

Εάν περισσότερες από μια γραμμικά ανεξάρτητη λειτουργική συνάρτηση συνδέεται με μια ιδιαίτερη ιδιοτιμή, μια κατάσταση που αναφέρεται ως "εκφυλισμός", καμία εγγύηση για ορθογωνιότητα αυτών των ιδιοσυναρτήσεων δεν παρέχεται από την (6.53). Ωστόσο, ένας γραμμικός συνδυασμός των εκφυλισμένων ιδιοσυναρτήσεων είναι πάλι μια ιδιοσυνάρτηση, και τέτοιοι γραμμικοί συνδυασμοί μπορούν πάντα να διατάσσονται έτσι ώστε να υπάρχει ορθογώνια ιδιότητα. Υπό την έννοια αυτή, το θεώρημα ορθογωνιότητας (6.54) ισχύει για όλα τα ζεύγη των διαφορετικών ιδιοσυναρτήσεων. Το θεώρημα ισχύει επίσης και για σύστημα δύο αγωγών \mathbf{T} λειτουργίας. Για να αποδειχθεί αυτό, επιστρέφουμε στην (6.52) και επιλέγουμε την λειτουργία a ως μια κανονική \mathbf{E} λειτουργία ($\varphi_a = 0$ στην C), και τη λειτουργία b ως μια \mathbf{T} λειτουργία ($\gamma'_b = 0$), η επιθυμητή σχέση ακολουθεί αμέσως. Σημειώστε, ωστόσο, ότι σε αυτή την περίπτωση, ορθογωνικότητα υπό μορφή $\int d\sigma \varphi_a \varphi_b = 0$ δεν έχει ληφθεί. Τελικά, στη συνέχεια, η ορθογώνια σχέση, που ισχύει για όλες τις \mathbf{E} λειτουργίες, είναι:

$$\int_{\sigma} d\sigma \nabla_{\perp} \varphi_a \cdot \nabla_{\perp} \varphi_b = \delta_{ab}, \quad (6.55)$$

η οποία περιλαμβάνει επίσης μια σύμβαση όσων αφορά την ομαλοποίηση των συναρτήσεων \mathbf{E} λειτουργίας:

$$\int_{\sigma} d\sigma (\nabla_{\perp} \varphi_a)^2 = 1, \quad (6.56)$$

μια βολική επιλογή για την ακόλουθη συζήτηση. Με εξαίρεση την \mathbf{T} λειτουργία, η προϋπόθεση ομαλοποίησης μπορεί επίσης να γραφεί:

$$\gamma_a'^2 \int_{\sigma} d\sigma \varphi_a^2 = 1. \quad (6.57)$$

Η αντίστοιχη παραγωγή για \mathbf{H} λειτουργίες προχωρά σε πανομοιότυπες γραμμές, τα αποτελέσματα εκφράζονται από:

$$\int_{\sigma} d\sigma \nabla_{\perp} \psi_a \cdot \nabla_{\perp} \psi_b = \delta_{ab}, \quad (6.58)$$

το οποίο περιέχει τη σύμβαση ομαλοποίησης:

$$\int_{\sigma} d\sigma (\nabla_{\perp} \psi_a)^2 = \gamma_a'^2 \int_{\sigma} d\sigma \psi_a^2 = 1. \quad (6.59)$$

Όπως θα δούμε τώρα, δεν απαιτείται δήλωση ορθογωνιότητας μεταξύ \mathbf{E} και \mathbf{H} λειτουργιών.

6.4 Ενεργειακή Πυκνότητα και Ροή

Οι ενεργειακές ποσότητες για τις οποίες θα πρέπει να ενδιαφερθούμε είναι οι γραμμικές ενεργειακές πυκνότητες (δηλαδή, οι ενεργειακές πυκνότητες ανά μονάδα μήκους) που λαμβάνονται με την ενσωμάτωση των διαθέσιμων πυκνοτήτων σε ένα τμήμα του οδηγού. Είναι βολικό να εξετάσουμε ξεχωριστά τις γραμμικές πυκνότητες που σχετίζονται με τις διάφορες ηλεκτρικές και μαγνητικές συνιστώσες του πεδίου. Έτσι, η γραμμική ηλεκτρική ενεργειακή πυκνότητα που συνδέεται με το διαμήκη ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$W_{E_z} = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\sigma} d\sigma [\text{Re}(E_z e^{-i\omega t})]^2 = \frac{\varepsilon}{4} \int_{\sigma} d\sigma |E_z|^2, \quad (6.60)$$

όπου οι όροι ταλαντώσεως παραλείπονται λόγω της μέσης τιμής του χρόνου [(4.6)]. Εισάγοντας τη γενική υπέρθεση των επιμέρους πεδίων \mathbf{E} λειτουργιών [(6.32c)]:

$$E_z = \frac{i\zeta}{k} \sum_a \gamma_a'^2 \varphi_a(x, y) I_a'(z), \quad (6.61)$$

Βρίσκουμε:

$$W_{E_z} = \frac{\varepsilon \zeta^2}{4 k^2} \sum_a \gamma_a'^2 |I_a'(z)|^2, \quad (6.62)$$

στην οποία η ορθογωνιότητα και η ομαλοποίηση (6.57) των συναρτήσεων \mathbf{E} λειτουργίας έχει χρησιμοποιηθεί. Η ορθογωνιότητα των διαμηκών ηλεκτρικών πεδίων που διαθέτεται από τις διαφορετικές \mathbf{E} λειτουργίες, είναι έτσι μια ασήμαντη συνέπεια της αντίστοιχης ιδιότητας των βαθμιδωτών συναρτήσεων φ_a . Η διαμήκης ηλεκτρική ενεργειακή πυκνότητα πεδίου μπορεί επίσης να γραφεί:

$$W_{E_z} = \frac{1}{4} \sum_a \frac{1}{\omega^2 C_a'} |I_a'(z)|^2, \quad (6.63)$$

εισάγοντας την κατανομημένη χωρητικότητα σειράς, $C_a' = \varepsilon/\gamma_a'^2$, που συνδέεται με τη γραμμή μεταφοράς που περιγράφει την $a^{\text{οστή}}$ της \mathbf{E} λειτουργίας. Κατά παρόμοιο τρόπο, η γραμμική ενεργειακή πυκνότητα:

$$W_{H_z} = \frac{\mu}{4} \int_{\sigma} d\sigma |H_z|^2, \quad (6.64)$$

προέρχεται από το διαμήκη μαγνητικό πεδίο [(6.33d)]:

$$H_z = \frac{i\eta}{k} \sum_a \gamma_a''^2 \psi_a(x, y) V_z''(z), \quad (6.65)$$

Διαβάζεται:

$$W_{H_z} = \frac{\mu \eta^2}{4 k^2} \sum_a \gamma_a''^2 |V_a''(z)|^2, \quad (6.66)$$

σαν συνεπεία της ομαλοποίησης της συνθήκης (6.59) για ψ_a και της ορθογωνιότητας των διαμήκων μαγνητικών πεδίων των διαφόρων \mathbf{H} λειτουργιών. Η εισαγωγή της κατανεμημένης διακλάδωσης αυτεπαγωγής, χαρακτηριστικό της $\alpha^{\text{οστής}}$ γραμμής μεταφοράς \mathbf{H} λειτουργίας, $L_a'' = \mu/\gamma_a''^2$, μετατρέπει αυτή την έκφραση ενεργειακής πυκνότητας σε:

$$W_{H_z} = \frac{1}{4} \sum_a \frac{1}{\omega^2 L_a''} |V_a''(z)|^2. \quad (6.67)$$

Για να αξιολογηθεί η γραμμική ενεργειακή πυκνότητα που συνδέεται με το εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο:

$$W_{\mathbf{E}_{\perp}} = \frac{\varepsilon}{4} \int_{\sigma} d\sigma |\mathbf{E}_{\perp}|^2, \quad (6.68)$$

είναι βολικό να προστεθεί πρώτα η γενική αναπαράσταση (6.8), λαμβάνοντας έτσι:

$$W_{\mathbf{E}_{\perp}} = \frac{\varepsilon}{4} \left[\int_{\sigma} d\sigma |\nabla_{\perp} V'|^2 + \int_{\sigma} d\sigma |\mathbf{e} \times \nabla V''|^2 - 2\text{Re} \int_{\sigma} d\sigma \nabla_{\perp} V' \cdot \mathbf{e} \times \nabla V''^* \right]. \quad (6.69)$$

Ο τελευταίος όρος αυτής της έκφρασης, που αντιπροσωπεύει την κοινή ενέργεια των \mathbf{E} και \mathbf{H} λειτουργιών, μπορεί να αποδειχθεί ότι εξαφανίζονται από την ακόλουθη αλληλουχία των εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma} d\sigma \nabla_{\perp} V' \cdot \mathbf{e} \times \nabla V''^* &= - \int_{\sigma} d\sigma \nabla_{\perp} V''^* \cdot \mathbf{e} \times \nabla V' \\
&= - \int_{\sigma} d\sigma \nabla_{\perp} \cdot (V''^* \mathbf{e} \times \nabla V') \\
&= - \oint_C ds V''^* \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \times \nabla V' = \oint_C ds V''^* \frac{\partial}{\partial s} V' = 0.
\end{aligned} \tag{6.70}$$

στις οποίες το τελευταίο βήμα περιλαμβάνει την γενική βασίμη οριακή συνθήκη, $\frac{\partial}{\partial s} V' = 0$ στη C , βλέπε (6.21). (Η απόδειξη που απασχολεί την οριακή συνθήκη $V'=0$ στη C δεν θα ισχύει για την λειτουργία \mathbf{T} .) Έχειδειχθεί ότι το εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο μιας \mathbf{E} λειτουργίας είναι ορθογώνια προς το εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο μιας \mathbf{H} λειτουργίας. Για την ενεργειακή πυκνότητα του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου της λειτουργίας \mathbf{E} , από (6.14a) έχουμε:

$$\frac{\varepsilon}{4} \int_{\sigma} d\sigma |\nabla_{\perp} V'|^2 = \frac{\varepsilon}{4} \sum_a |V'_a(z)|^2, \tag{6.71}$$

ως μια άμεση συνέπεια της συνθήκης ορθότητας (6.55), η οποία καταδεικνύει την κάθετη μορφή των εγκάρσιων ηλεκτρικών πεδίων των διαφόρων \mathbf{E} λειτουργιών. Παρομοίως, από την (6.17a) η ενεργειακή πυκνότητα του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{H} λειτουργίας:

$$\frac{\varepsilon}{4} \int_{\sigma} d\sigma |\mathbf{e} \times \nabla V''|^2 = \frac{\varepsilon}{4} \int_{\sigma} d\sigma |\nabla_{\perp} V''|^2 = \frac{\varepsilon}{4} \sum_a |V''_a(z)|^2, \tag{6.72}$$

είναι ένα άθροισμα μεμονωμένων λειτουργιών συνεισφοράς, αναφέροντας την ορθογωνιότητα των εγκάρσιων ηλεκτρικών πεδίων των διαφόρων \mathbf{H} λειτουργιών. Τέλος, η ενεργειακή πυκνότητα του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου είναι το άθροισμα των (6.71) και (6.72), ή:

$$W_{\mathbf{E}_{\perp}} = \frac{1}{4} \sum_a C |V'_a(z)|^2 + \frac{1}{4} \sum_a C |V''_a(z)|^2, \tag{6.73}$$

όπου $C = \varepsilon$ είναι η κατανεμημένη διακλάδωση χωρητικότητας, κοινή σε όλες τις γραμμές μεταφοράς των \mathbf{E} και \mathbf{H} λειτουργιών.

Η ανάλυση της ενεργειακής πυκνότητας του εγκάρσιου μαγνητικού πεδίου:

$$W_{\mathbf{H}_{\perp}} = \frac{\mu}{4} \int_{\sigma} d\sigma |\mathbf{H}_{\perp}|^2 = \frac{\mu}{4} \int_{\sigma} d\sigma |\mathbf{H} \times \mathbf{e}|^2, \tag{6.74}$$

είναι ακριβώς ανάλογη και δεν απαιτεί λεπτομερή κατεργασία, ένεκα των (6.8) και (6.9b) είναι απλώς απαραίτητο να γίνουν οι αντικαταστάσεις $V' \rightarrow I'$, $V'' \rightarrow I''$ (και $\varepsilon \rightarrow \mu$, φυσικά) για να ληφθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα. Η οριακή συνθήκη στην οποία η ανάλογη της (6.70) εξαρτάται, τώρα διαβάζεται $\frac{\partial}{\partial s} I' = 0$ στη C , η οποία είναι και πάλι μια έκφραση της οριακής συνθήκης της \mathbf{E} λειτουργίας. Ως εκ τούτου:

$$W_{\mathbf{H}_\perp} = \frac{1}{4} \sum_a L |I'_a(z)|^2 + \frac{1}{4} \sum_a L |I''_a(z)|^2, \quad (6.75)$$

όπου $L = \mu$ είναι η χαρακτηριστική κατανεμημένη αυτεπαγωγή σειράς των γραμμών μεταφοράς όλων των λειτουργιών. Η καθετότητα των εγκάρσιων μαγνητικών πεδίων που είναι συνδεδεμένη με δύο διαφορετικές λειτουργίες, η οποία περιέχεται στο αποτέλεσμα, μπορεί επίσης να προέρχεται από την προηγούμενη καθορισμένη εγκάρσια ηλεκτρική καθετότητα του πεδίου με τη βοήθεια των σχέσεων μεταξύ των εγκάρσιων συνιστωσών του πεδίου που παρουσιάζονται στις (6.45a) και (6.45b).

Η σύνθετη ισχύς που ρέει κατά μήκος του κυματοδηγού λαμβάνεται από τη διαμήκη συνιστώσα του σύνθετου διανύσματος Poynting, με ολοκλήρωση σε ένα τμήμα του οδηγού:

$$P = \frac{1}{2} \int_\sigma d\sigma \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{2} \int_\sigma d\sigma \mathbf{E} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{e})^*, \quad (6.76)$$

εξ ου και από τις (6.8) και (6.9b):

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left[\int_\sigma d\sigma \nabla_\perp V' \cdot \nabla_\perp I'^* + \int_\sigma d\sigma \mathbf{e} \times \nabla V'' \cdot \mathbf{e} \times \nabla I''^* \right. \\ &\quad \left. - \int_\sigma d\sigma \nabla V' \cdot \mathbf{e} \times \nabla I''^* - \int_\sigma d\sigma \mathbf{e} \times \nabla V'' \cdot \nabla I'^* \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_a V'_a(z) I'_a(z)^* + \frac{1}{2} \sum_a V''_a(z) I''_a(z)^*, \end{aligned} \quad (6.77)$$

η οποία χρησιμοποιεί τις (6.14a), (6.14b) και (6.17a), (6.17b), τις σχέσεις ορθότητας (6.55) και (6.58), και την ανάλογη της (6.70). Επομένως, η σύνθετη ροή της ισχύος είναι το άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών λειτουργίας, όπου η καθεμία έχει την κατάλληλη μορφή γραμμής μεταφοράς. Πλέον θα είναι προφανές ότι οι συνθήκες ομαλοποίησης (6.56) και (6.59), θεσπίστηκαν εν αναμονή του αποτελέσματος αυτού. Η καθετότητα που υπονοείται από την έκφραση (6.77) είναι μια απλή συνέπεια της ιδιότητας της καθετότητας των εγκάρσιων ηλεκτρικών πεδίων, δεδομένου ότι η $\mathbf{H} \times \mathbf{e}$, για μια μεμονωμένη λειτουργία, είναι ανάλογη προς το αντίστοιχο εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο.

6.5 Ορισμοί Σύνθετης Αντίστασης

Θα έχει παρατηρηθεί ότι οι γραμμικές ενεργειακές πυκνότητες, που σχετίζονται με τις διάφορες συνιστώσες του πεδίου, βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με τις ενέργειες που αποθηκεύονται ανά μονάδα μήκους στα διάφορα στοιχεία των κατανεμημένων κυκλωματικών παραμέτρων. Έτσι τα κυκλώματα \mathbf{E} και \mathbf{H} τύπου δίνουν μια πλήρη εικονογραφική περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων των \mathbf{E} και \mathbf{H} λειτουργιών με την κλασική έννοια: Η χωρητικότητα και η αυτεπαγωγή αντιπροσωπεύουν την ηλεκτρική και μαγνητική ενέργεια. Στοιχεία σε σειρά σχετίζονται με διαμήκη ηλεκτρικά και εγκάρσια μαγνητικά πεδία (διαμήκη μετατόπιση και μετάδοση ρευμάτων). Στοιχεία παράλληλα περιγράφουν εγκάρσια ηλεκτρικά και διαμήκη μαγνητικά πεδία (εγκάρσια μετατόπιση και μετάδοση ρευμάτων). [Βλέπε (6.63)

και (6.75) για στοιχεία σε σειρές και (6.67) και (6.73) για στοιχεία παράλληλα.] Ωστόσο, το ύψος του ακριβή ορισμού που συνδέεται με τις παραμέτρους της γραμμής, είναι ψευδές. Είμαστε ελεύθεροι να πολλαπλασιάσουμε μια τάση γραμμής μεταφοράς με μια σταθερά και να διαιρέσουμε το σχετικό ρεύμα με την ίδια σταθερά χωρίς να παραβιάζουμε την προϋπόθεση ότι η σύνθετη ισχύς έχει τη μορφή γραμμής μεταφοράς. Έτσι, αφήνουμε μια τάση λειτουργίας και ρεύματος να αντικατασταθεί από $N^{-1/2}V(z)$ και $N^{1/2}I(z)$, αντίστοιχα, υπονοώντας ότι η νέα τάση και το ρεύμα λαμβάνονται από τους παλιούς ορισμούς μέσω πολλαπλασιασμού με τις $N^{1/2}$ και $N^{-1/2}$, αντίστοιχα. Προκειμένου να διατηρηθεί η μορφή των εκφράσεων της ενέργειας, οι παράμετροι αυτεπαγωγής πρέπει να πολλαπλασιαστούν με τον N , και οι παράμετροι χωρητικότητας να διαιρεθούν από τον N . Επακόλουθο αυτών των δηλώσεων είναι ότι η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση πρέπει να πολλαπλασιασθεί με N , σε συμφωνία με τη σημασία της ως αναλογία τάσεως-ρεύματος. Φυσικά η σταθερά διάδοσης δεν επηρεάζεται από την αλλαγή αυτή. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μία από τις βασικές ποσότητες που καθορίζει τη γραμμή μεταφοράς, χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση, παραμένει ουσιαστικά απροσδιόριστη από οποιεσδήποτε εκτιμήσεις έχουν εισαχθεί μέχρι στιγμής. Η ίδια κατάσταση προέκυψε στην ανάλυση του πεδίου της γραμμής μεταφοράς δύο αγωγών και δείχθηκε ότι ένας φυσικός ορισμός για την χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση θα μπορούσε να επιτευχθεί αποδίδοντας τη συνήθη φυσική έννοια είτε με το ρεύμα ή την τάση, το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνεται σε κάθε περίπτωση. Αυτή η κάπως τεχνητή διαδικασία χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να τονίσουμε τον κάπως διαφορετικό χαρακτήρα των πεδίων του κυματοδηγού, όπως τώρα θα δείξουμε, πως ένας ακριβής ορισμός της χαρακτηριστικής σύνθετης αντίστασης μπορεί να επιτευχθεί αποδίδοντας έναν φυσικό ορισμό είτε στο ρεύμα είτε στην τάση, ανάλογα με τον τύπο της λειτουργίας, αλλά όχι και στα δύο ταυτόχρονα.

Μια λειτουργία E χαρακτηρίζεται ουσιαστικά από την E_z , από την οποία μπορεί να προέρχονται όλες οι άλλες συνιστώσες του πεδίου. Συνδυάζοντας ότι, το διαμήκη ηλεκτρικό πεδίο είναι ένα ηλεκτρικό ρεύμα μετατόπισης \mathbf{D} , η πυκνότητα ρεύματος είναι [(6.32c)]:

$$-i\omega\epsilon E_z = \gamma^2 \varphi(x, y) N^{1/2} I(z). \quad (6.78)$$

Επιπλέον, υπάρχει μια διαμήκης ηλεκτρική αγωγιμότητα ρεύματος επί των μεταλλικών τοιχωμάτων, με την επιφανειακή πυκνότητα (4.64b), σύμφωνα με την (6.32b):

$$-(\mathbf{n} \times \mathbf{H})_z = \frac{\partial}{\partial n} \varphi(x, y) N^{1/2} I(z), \quad (x, y) \in S. \quad (6.79)$$

Το συνολικό (αγωγιμότητα συν μετατόπιση) διαμήκη ηλεκτρικό ρεύμα είναι μηδέν (Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι στον αγωγό $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, έτσι ώστε $\oint_C \mathbf{ds} \cdot \mathbf{H} = \int_\sigma \mathbf{d}\sigma \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0$, εάν το περίβλημα της C βρίσκεται εξ ολοκλήρου εντός των τοιχωμάτων του κυματοδηγού, και έτσι περικλείει τόσο την αγωγιμότητα όσο και το ρεύμα μετατόπισης.), και είναι φυσικό να εντοπιστεί το συνολικό ρεύμα που ρέει προς την θετική κατεύθυνση με $I(z)$, το οποίο οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση για τον N :

$$N^{1/2} \left[\gamma^2 \int_+ \mathbf{d}\sigma \varphi + \int_+ \mathbf{d}\sigma \frac{\partial}{\partial n} \varphi \right] = 1, \quad (6.80)$$

όπου η επιφάνεια και τα ολοκληρώματα γραμμής, που συμβολίζονται με \int_+ , πρόκειται να καθοδηγούνται πάνω από αυτές τις περιοχές όπου φ και $\frac{\partial}{\partial n} \varphi$ είναι θετικά. Αυτή η εξίσωση είναι

ιδιαίτερα απλή για την χαμηλότερη **E** λειτουργία σε κάθε κοίλο κυματοδηγό, δηλαδή, η λειτουργία της ελάχιστης συχνότητας αποκοπής, για τη λειτουργία αυτή έχει την ιδιότητα που καθιερώθηκε στο Πρόβλημα 6.13, ότι η βαθμιδωτή συνάρτηση φ δεν είναι πουθενά αρνητική, και μηδενίζεται μόνο στο όριο. Επομένως, η (προς τα έξω) κανονική παράγωγος στο όριο δεν μπορεί να είναι θετική. Ως εκ τούτου, το ρεύμα μετατόπισης ρέει εξ ολοκλήρου στην θετική κατεύθυνση, και το ρεύμα αγωγής εξ ολοκλήρου στην αρνητική κατεύθυνση. Κατά συνέπεια:

$$N = \frac{1}{\gamma^4 \left(\int_{\sigma} d\sigma \varphi \right)^2} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\int_{\sigma} d\sigma \varphi^2}{\left(\int_{\sigma} d\sigma \varphi \right)^2}, \quad (6.81)$$

χρησιμοποιώντας την συνθήκη ομαλοποίησης για την φ , (6.57), για να εκφράσουμε τον N σε μια μορφή που είναι ανεξάρτητη από την απόλυτη κλίμακα της συνάρτησης φ , επομένως, για την χαμηλότερη **E** λειτουργία σε κάθε οδηγό, από την (6.36b), μια φυσική επιλογή της χαρακτηριστικής σύνθετης αντίστασης είναι:

$$Z = \zeta \frac{\kappa}{k} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\int_{\sigma} d\sigma \varphi^2}{\left(\int_{\sigma} d\sigma \varphi \right)^2}, \quad (6.82)$$

Για τις άλλες **E** λειτουργίες, η συνθήκη ομαλοποίησης της φ μπορεί να χρησιμοποιηθεί με έναν ανάλογο τρόπο ώστε να ληφθεί:

$$Z = \zeta \frac{\kappa}{k} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\int_{\sigma} d\sigma \varphi^2}{\left(\int_{\sigma} d\sigma \varphi + \frac{1}{\gamma^2} \int_{+} ds \frac{\partial}{\partial n} \varphi \right)^2}. \quad (6.83)$$

Μπορεί να φαίνεται πιο φυσικό να συμφωνεί με την τάση παρά με το ρεύμα στην αναζήτηση του ορισμού μιας σωστής χαρακτηριστικής σύνθετης αντίστασης, δεδομένου ότι το εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο μιας **E** λειτουργίας προέρχεται από ένα δυναμικό [(6.32a)]. Η τάση τότε θα μπορούσε να οριστεί ως το δυναμικό κάποιου σταθερού σημείου σε σχέση με το τοίχωμα σε μια δεδομένη διατομή, καθορίζοντας έτσι τον N . Σε έναν οδηγό με συμμετρική διατομή το μοναδικό φυσικό σημείο αναφοράς είναι το κέντρο, το οποίο συνεπάγεται τη δυσκολία του ότι υπάρχει μια άπειρη τάξη λειτουργιών για κάθε $\varphi = 0$ στο κέντρο, και ο ορισμός αδυνατεί. Επιπλέον, όταν αυτό δεν συμβαίνει, όπως στην χαμηλότερη **E** λειτουργία, το δυναμικό του κεντρικού σημείου δεν ισούται απαραίτητα με την τάση, αν η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση ορίζεται με βάση το ρεύμα όπως έχουμε κάνει. Ως εκ τούτου, όσο η σημασία μπορεί πάντα να συνδεθεί με το ρεύμα στην **E** λειτουργία, κανένας γενικός έγκυρος ορισμός τάσης δεν μπορεί να προταθεί.

Κατ'αναλογία με την ανάλυση των **E** λειτουργιών, θα στηρίξουμε μια χαρακτηριστική παραδοχή ορισμού για τις **H** λειτουργίες σχετικά με τις ιδιότητες των H_z , οι οποίες, μπορούμε να πούμε, από (6.33d), ότι θα καθορίσουν μία διαμήκη μαγνητική μετατόπιση της πυκνότητας του ρεύματος, οπότε:

$$-i\omega\mu H_z = \gamma^2 \psi(x, y) N^{-1/2} V(z). \quad (6.84)$$

Το συνολικό διαμήκης μαγνητικό ρεύμα μετατόπισης είναι μηδέν (Επειδή $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ στον αγωγό, οπότε $\oint_C \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E} = \int_\sigma \mathbf{d}\sigma \cdot \nabla \times \mathbf{E}$.) και θα προσδιορίσουμε το συνολικό μαγνητικό ρεύμα που ρέει στην θετική κατεύθυνση με $V(z)$. Έτσι η τάση, ορίζεται ίση με το γραμμικό ολοκλήρωμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που λαμβάνεται δεξιόστροφα γύρω από όλες τις περιοχές μέσα στις οποίες υπάρχει θετική μαγνητική μετατόπιση. Κατά συνέπεια:

$$N = \gamma^4 \left(\int_+ \mathbf{d}\sigma \psi \right)^2 = \gamma^2 \frac{\left(\int_+ \mathbf{d}\sigma \psi \right)^2}{\int_\sigma \mathbf{d}\sigma \psi^2}, \quad (6.85)$$

και από [(6.36d)]:

$$Y = \eta \frac{\kappa}{k} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\int_\sigma \mathbf{d}\sigma \psi^2}{\left(\int_+ \mathbf{d}\sigma \psi \right)^2}. \quad (6.86)$$

Θα ήταν επίσης δυνατό να βασίσουμε έναν ορισμό της εισόδου για την αναγνώριση της γραμμής μεταφοράς ρεύματος με τη συνολική ηλεκτρική αγωγιμότητα του διαμήκους ρεύματος που ρέει προς την θετική κατεύθυνση στα μεταλλικά τοιχώματα. Ωστόσο, η χαρακτηριστική είσοδος κατ' αυτόν τον τρόπο δεν θα συμφωνεί σε γενικές γραμμές με αυτήν που μόλις λήφθηκε.

Παρά το γεγονός ότι έχουμε προχωρήσει σε αρκετά λογικούς ορισμούς της χαρακτηριστικής σύνθετης αντίστασης και εισόδου, είναι σαφές ότι αυτές οι επιλογές έχουν αυθαίρετα χαρακτηριστικά και με καμία έννοια δεν μπορούν να θεωρηθούν αναπόφευκτες. Η δήλωση αυτή μπορεί να δίνει την εντύπωση ότι η υπό ανάπτυξη θεωρία είναι ουσιαστικά ασαφής και κακώς ορισμένη, πράγμα το οποίο θα ήταν παρανόηση. Φυσικά παρατηρήσιμες ποσότητες δεν μπορούν σε καμία περίπτωση να εξαρτώνται από τον ακριβή ορισμό της χαρακτηριστικής σύνθετης αντίστασης, αλλά αυτό δεν αναιρεί την εμφάνισή του σε μια θεωρία που επιδιώκει να εκφράσει τα αποτελέσματά της σε κυκλωματική συμβατική γλώσσα. Πράγματι, η αυθαιρεσία στον ορισμό είναι μια άμεση έκφραση της μεγαλύτερης πολυπλοκότητας των συστημάτων των κυματοδηγών σε σύγκριση με τις χαμηλής συχνότητας γραμμές μεταφοράς. Για παράδειγμα, στην σύνδεση των δύο χαμηλής συχνότητας γραμμών μεταφοράς με διαφορετικές διαστάσεις, τα συμβατικά ρεύματα και τάσεις της γραμμής μεταφοράς είναι συνεχείς κατά έναν υψηλό βαθμό προσέγγισης και ως εκ τούτου οι ιδιότητες αντανάκλασης του κόμβου είναι εντελώς καθορισμένες από τις ποσότητες που αφορούν το ρεύμα και την τάση σε κάθε γραμμή. Ωστόσο, σε γενικές γραμμές, σε μια αντίστοιχη κατάσταση κυματοδηγού, οι φυσικές ποσότητες με τέτοιες απλές ιδιότητες συνεχείας δεν υπάρχουν, και επομένως δεν είναι δυνατόν οι ιδιότητες του κόμβου να περιγραφούν σε όρους δύο ποσοτήτων από τις οποίες η καθεμιά είναι χαρακτηριστική ενός ατομικού οδηγού. Έχοντας αυτή τη γνώση, εμμένουμε αναγκαστικά στη θέση ότι η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση είναι καλύτερα να θεωρηθεί ως ποσότητα που επιλέγεται για να απλουστεύσει την ηλεκτρική αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης κατάστασης, και ότι οι διαφορετικοί ορισμοί μπορούν να χρησιμοποιούνται πλεονεκτικά σε διαφορετικές περιστάσεις. Ειδικότερα, ο ορισμός της σύνθετης αντίστασης που υιοθετήθηκε έμμεσα στην αρχή του κεφαλαίου, που αντιστοιχεί σε $N=1$, είναι πιο βολικός για μια γενική θεωρητική ανάλυση, δεδομένου ότι σχετίζει άμεσα τα εγκάρσια ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Η επιλογή αυτή, η οποία μπορεί να ονομαστεί σαν αντίσταση πεδίου (εισόδου), θα τηρηθεί στο υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου.

6.6 Σύνθετο Διάνυσμα Poynting και Ενεργειακά Θεωρήματα

Πριν από την εξέταση των συγκεκριμένων τύπων των οδηγών, θα πρέπει να αποκομίσουμε μερικές απλές ιδιότητες των ηλεκτρικών και μαγνητικών ενεργειών που συνδέονται με τις πολλαπλασιαστικές και μη λειτουργίες. Τα εργαλεία για το σκοπό αυτό παρέχονται από το θεώρημα σύνθετου διανύσματος Poynting (ϵ, μ πραγματικοί):

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = i\omega(\mu|\mathbf{H}|^2 - \epsilon|\mathbf{E}|^2), \quad (6.87)$$

και το ενεργειακό θεώρημα (αγνοώντας κάθε εξάρτηση των ϵ και μ από τη συχνότητα):

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \omega} \right) = i(\epsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{H}|^2). \quad (6.88)$$

(Οι αποδείξεις και γενικεύσεις αυτών των θεωρημάτων δίνονται στα Προβλήματα 6.1 και 6.2). Εάν η (6.87) είναι ολοκληρωμένη πάνω σε ένα σημείο του οδηγού, μόνο η διαμήκης συνιστώσα του διανύσματος Poynting επιβιώνει (γιατί η $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ μηδενίζεται στην S), και παίρνουμε τη μορφή της γραμμής μεταφοράς του θεωρήματος του σύνθετου διανύσματος Poynting, όπως εφαρμόζεται σε μια μόνο λειτουργία [cf. (6.77)]:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} V(z) I(z)^* \right] = \frac{d}{dz} P = 2i\omega(W_H - W_E), \quad (6.89)$$

όπου οι W_E και W_H είναι η ηλεκτρική και μαγνητική γραμμική ενεργειακή πυκνότητα. Μια παρόμοια λειτουργία στις αποδόσεις της (6.88):

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial V(z)}{\partial \omega} I(z)^* + V^*(z) \frac{\partial I(z)}{\partial \omega} \right] \right\} = 2i(W_E + W_H) = 2iW, \quad (6.90)$$

δεδομένου ότι η $\partial \mathbf{E}_\perp / \partial \omega$, για παράδειγμα, περιλαμβάνει την $\partial V(z) / \partial \omega$, με τον ίδιο τρόπο που η \mathbf{E}_\perp περιέχει την $V(z)$, οι συναρτήσεις βαθμιδωτής λειτουργίας δεν εξαρτώνται από τη συχνότητα. Ως πρώτη εφαρμογή αυτών των εξισώσεων θεωρούμε ένα πολλαπλασιαστικό κύμα που προχωράει προς την θετική κατεύθυνση, δηλαδή:

$$\begin{aligned} V(z) &= V e^{ikz}, \\ I(z) &= I e^{ikz}, \end{aligned} \quad V = ZI. \quad (6.91)$$

Η σύνθετη ισχύς είναι πραγματική και ανεξάρτητη του z :

$$P = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} Z |I|^2, \quad (6.92)$$

έτσι συμπεραίνουμε από την (6.89) ότι $W_E = W_H$. Οι πυκνότητες της ηλεκτρικής και μαγνητικής γραμμικής ενέργειας είναι ίσες σε ένα προοδευτικό κύμα. Για να εφαρμοσθεί το θεώρημα της ενέργειας παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial \omega} = \frac{\partial V}{\partial \omega} e^{ikz} + i \frac{dk}{d\omega} z V e^{ikz}, \quad (6.93a)$$

$$\frac{\partial I(z)}{\partial \omega} = \frac{\partial I}{\partial \omega} e^{ikz} + i \frac{dk}{d\omega} z I e^{ikz}, \quad (6.93b)$$

και ότι:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial V(z)}{\partial \omega} I(z)^* + V^*(z) \frac{\partial I(z)}{\partial \omega} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \omega} I^* + V^* \frac{\partial I}{\partial \omega} \right) + i \frac{dk}{d\omega} z \frac{1}{2} (VI^* + V^*I). \quad (6.94)$$

Ως εκ τούτου, η (6.90) συνεπάγεται:

$$\frac{dk}{d\omega} \frac{1}{4} (VI^* + V^*I) = \frac{dk}{d\omega} P = W, \quad (6.95)$$

ή:

$$P = vW, \quad (6.96)$$

όπου:

$$v = \frac{d\omega}{dk} = c \frac{dk}{dk} = c \frac{\kappa}{k'}, \quad (6.97)$$

με το κ να δίνεται από την (6.36a) και την (6.36c). Η σχέση που λαμβάνεται εκφράζει μια αναλογικότητα μεταξύ της ισχύος που μεταφέρεται από ένα προοδευτικό κύμα και της γραμμικής ενεργειακής πυκνότητας. Ο συντελεστής u θα πρέπει τότε να ερμηνευθεί ως η ταχύτητα της μεταφοράς ενέργειας. Είναι σύμφωνο με αυτήν την ερμηνεία ότι το u είναι πάντα μικρότερο από το c , και εξαφανίζεται στη συχνότητα αποκοπής. Σε συχνότητες μεγαλύτερες σε σύγκριση με τη συχνότητα αποκοπής, η u πλησιάζει την εγγενή ταχύτητα c του μέσου. Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε αυτή την ταχύτητα με τις δύο ταχύτητες που έχουν ήδη εισαχθεί στο Κεφάλαιο 1, στην ανάλυση της ροής της ενέργειας και της ορμής - της φάση και τις ομαδικές ταχύτητες. Η ταχύτητα της φάσης ισούται με το λόγο της γωνιακής συχνότητας και της σταθεράς διάδοσης:

$$u = \frac{\omega}{\kappa} = c \frac{k}{\kappa}, \quad (6.98)$$

ενώ η ομαδική ταχύτητα είναι η παράγωγος της γωνιακής συχνότητας με σεβασμό στη σταθερά πολλαπλασιασμού:

$$v = \frac{d\omega}{dk}. \quad (6.99)$$

Το ότι η ομαδική ταχύτητα και η ενέργεια της ταχύτητας μεταφοράς είναι ίσες δεν είναι απροσδόκητο. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα φάσης υπερβαίνει πάντα την εγγενή ταχύτητα του μέσου, και μάλιστα είναι άπειρη στη συχνότητα αποκοπής της λειτουργίας. Οι δύο ταχύτητες σχετίζονται με την σχέση:

$$uv = c^2, \quad (6.100)$$

η οποία συμπίπτει με την (1.39). Μια απλή φυσική εικόνα για τη φάση και τις ομαδικές ταχύτητες παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 7, (βλέπε ΣΧ. 7.3). Δείτε επίσης το Πρόβλημα 6.4, (6.137).

Μία άλλη παράγωγος της ενέργειας της ταχύτητας μεταφοράς, η οποία κάνει πιο ρητή χρήση των πεδίων κυματοδηγού, προτείνεται από την ορισμένη εξίσωση:

$$v = \frac{P}{W} = \frac{\frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{\frac{1}{4} \int_{\sigma} d\sigma (\epsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2)}. \quad (6.101)$$

Λόγω της ισότητας της ηλεκτρικής και μαγνητικής γραμμικής ενεργειακής πυκνότητας, και τη σχέση $\mathbf{e} \times \mathbf{E} = Z\mathbf{H}$, το οποίο ισχύει για ένα πεδίο \mathbf{E} λειτουργίας που διαδίδεται στη θετική κατεύθυνση [(6.45a)], με χρήση της (6.36b), βρίσκουμε:

$$v = \frac{Z \int_{\sigma} d\sigma |\mathbf{H}_{\perp}|^2}{\mu \int_{\sigma} d\sigma |\mathbf{H}|^2} = c \frac{\kappa}{k}, \quad (6.102a)$$

δεδομένου ότι η \mathbf{H} δεν έχει καμία διαμήκη συνιστώσα. Ομοίως, η ενέργεια της ταχύτητας μεταφοράς για μια λειτουργία \mathbf{H} προέρχεται από τις (6.45b) και (6.36d):

$$v = \frac{Y \int_{\sigma} d\sigma |\mathbf{E}_{\perp}|^2}{\epsilon \int_{\sigma} d\sigma |\mathbf{E}|^2} = c \frac{\kappa}{k}. \quad (6.102b)$$

Όταν η κυματική κίνηση στη γραμμική μεταφοράς δεν είναι ένα απλό προοδευτικό κύμα, αλλά η γενική υπέρθεση των στάσιμων κυμάτων (ή κινουμένων) που περιγράφεται από λύσεις των (6.34a) και (6.34b), ή (6.35a) και (6.35b), έχουμε:

$$V(z) = V \cos kz + iZI \sin kz, \quad (6.103a)$$

$$I(z) = I \cos kz + iYV \sin kz, \quad (6.103b)$$

ή:

$$V(z) = (2Z)^{1/2}(Ae^{ikz} + Be^{-ikz}), \quad (6.104a)$$

$$I(z) = (2Y)^{1/2}(Ae^{ikz} - Be^{-ikz}), \quad (6.104b)$$

οι ηλεκτρικές και μαγνητικές γραμμικές ενεργειακές πυκνότητες δεν είναι ίσες, σύμφωνα με την (6.89), επειδή η σύνθετη ισχύς είναι μία συνάρτηση της θέσης επί της γραμμής:

$$P(z) = \frac{1}{2} \left[VI^* \cos^2 kz + V^* I \sin^2 kz + i \frac{1}{2} \sin 2kz (Z|I|^2 - Y|V|^2) \right], \quad (6.105a)$$

ή:

$$P(z) = |A|^2 - |B|^2 - AB^* e^{2ikz} A^* B e^{-2ikz}. \quad (6.105b)$$

Ωστόσο, η ισότητα επιτυγχάνεται για το σύνολο των ηλεκτρικών και μαγνητικών ενεργειών που είναι τοποθετημένες σε οποιοδήποτε μήκος της γραμμής, το οποίο είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{1}{2}\lambda_g$. Για να αποδειχθεί αυτό, παρατηρούμε ότι με την ολοκλήρωση της (6.89) πάνω στο z από z_1 έως z_2 :

$$P(z_2) - P(z_1) = 2i\omega(E_H - E_E), \quad (6.106)$$

όπου E_E και E_H είναι τα σύνολα των ηλεκτρικών και μαγνητικών ενεργειών που είναι αποθηκευμένα στο μήκος της γραμμής μετάδοσης μεταξύ των σημείων z_1 και z_2 . Τώρα, η σύνθετη ισχύς είναι μια περιοδική συνάρτηση του z με χρονικό διάστημα περιοδικότητας $\pi/k = \frac{1}{2}\lambda_g$ [(6.39)], από την οποία συμπεραίνουμε ότι $P(z_2) = P(z_1)$, εάν τα δύο σημεία χωρίζονται από έναν ακέραιο αριθμό του μισού του μήκους κύματος του οδηγού, ο οποίος επαληθεύει η δήλωση. Μια ισοδύναμη μορφή αυτού του αποτελέσματος είναι ότι η μέση τιμή των ηλεκτρικών ενεργειακών πυκνοτήτων και η μέση τιμή των μαγνητικών ενεργειακών πυκνοτήτων είναι ίσες, δείχνοντας ότι η διαδικασία εύρεσης του μέσου όρου επεκτείνεται σε πάνω από έναν ακέραιο αριθμό του μισού μήκους κύματος του οδηγού, ή σε μια απόσταση μεγαλύτερη σε σύγκριση με την $\frac{1}{2}\lambda_g$.

Μια ρητή έκφραση για τη μέση ενεργειακή πυκνότητα μπορεί να ληφθεί από το θεώρημα της ενέργειας (6.88). Η ολική ενέργεια E , που είναι αποθηκευμένη στον οδηγό μεταξύ τα επιπέδων $z = z_1$ και $z = z_2$, δίνεται από το ολοκλήρωμα της (6.90), ή:

$$E = \frac{1}{4i} \left[\frac{\partial V(z)}{\partial \omega} I(z)^* + V(z)^* \frac{\partial I(z)}{\partial \omega} \right]_{z=z_1}^{z=z_2}. \quad (6.107)$$

Στο διαχωρισμό των εκφράσεων της τάση και του ρεύματος (6.103a) και (6.103b), σε σχέση με τη συχνότητα, βρίσκουμε:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial \omega} = iz \frac{dk}{d\omega} ZI(z) + \left[\cos kz \frac{\partial V}{\partial \omega} + i \sin kz \frac{\partial ZI}{\partial \omega} \right], \quad (6.108a)$$

$$\frac{\partial I(z)}{\partial \omega} = iz \frac{d\kappa}{d\omega} YV(z) + \left[\cos \kappa z \frac{\partial I}{\partial \omega} + i \sin \kappa z \frac{\partial YV}{\partial \omega} \right]. \quad (6.108b)$$

Ως εκ τούτου:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial \omega} I(z)^* + V(z)^* \frac{\partial I(z)}{\partial \omega} = iz \frac{d\kappa}{d\omega} [Z|I(z)|^2 + Y|V(z)|^2] + \dots, \quad (6.109)$$

όπου το άγραφο μέρος αυτής της εξίσωσης αποτελείται από αυτούς τους όρους, που προκύπτουν από τις παρενθετικές εκφράσεις (6.108a) και (6.108b), οι οποίες είναι περιοδικές συναρτήσεις του z με περίοδο $\frac{1}{2}\lambda_g$. Έτσι, εάν τα σημεία z_1 και z_2 διαχωρίζονται από μια απόσταση που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{1}{2}\lambda_g$, οι όροι αυτοί δεν συνεισφέρουν καθόλου στη συνολική ενέργεια. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η ποσότητα $Z|I(z)|^2 + Y|V(z)|^2$ είναι ανεξάρτητη του z :

$$Z|I(z)|^2 + Y|V(z)|^2 = Z|I|^2 + Y|V|^2 = 4(|A|^2 + |B|^2), \quad (6.110)$$

από την οποία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνολική ενέργεια (6.107) που είναι αποθηκευμένη σε ένα μήκος l του οδηγού, η οποία είναι ακέραιος αριθμός του μισού του μήκους κύματος του οδηγού, από την άποψη της ταχύτητα της ενέργειας (6.97), είναι:

$$E = l \frac{d\kappa}{d\omega} \frac{1}{4} (Z|I|^2 + Y|V|^2) = \frac{l}{v} \frac{1}{4} (Z|I|^2 + Y|V|^2) = \frac{l}{v} (|A|^2 + |B|^2). \quad (6.111)$$

Η μέση συνολική γραμμική ενεργειακή πυκνότητα είναι $\bar{W} = E/l$, η οποία έχει μια απλή φυσική σημασία από την άποψη των εν κινήσει κυμάτων, είναι απλά το άθροισμα των πυκνοτήτων ενέργειας που συνδέεται με κάθε προοδευτική κυματική συνιστώσα, αν είναι η μόνη που υπάρχει στη γραμμή μεταφοράς.

Οι ενεργειακές σχέσεις για μια μη πολλαπλασιαστική λειτουργία είναι μάλλον διαφορετικές. Υπάρχει σαφή υπέρβαση της ηλεκτρικής ή μαγνητικής ενέργειας, ανάλογα με τον τύπο της λειτουργίας. Η σταθερά διάδοσης για μια μη πολλαπλασιαστική (κάτω αποκοπής) λειτουργία είναι φανταστική:

$$\kappa = i\sqrt{\gamma^2 - k^2} = i|\kappa|, \quad (6.112)$$

και ένα πεδίο που εξασθενεί στη θετική z -διεύθυνση, περιγράφεται από:

$$\begin{aligned} V(z) &= Ve^{-|\kappa|z}, \\ I(z) &= Ie^{-|\kappa|z}, \end{aligned} \quad V = ZI. \quad (6.113)$$

Η φανταστική χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση (είσοδος) της **E (H)** λειτουργίας δίνεται από:

$$\mathbf{E} \text{ λειτουργία: } Z = i\zeta \frac{|\kappa|}{k} = i|Z|, \quad (6.114a)$$

$$\mathbf{H} \text{ λειτουργία: } Y = i\eta \frac{|\kappa|}{k} = i|Y|. \quad (6.114b)$$

Οι ποσότητες ενέργειας που μας ενδιαφέρουν είναι η συνολική ηλεκτρική και μαγνητική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο θετικό ήμισυ του οδηγού ($z > 0$). Η διαφορά αυτών των ενεργειών δίνεται από την (6.106), όπου $z_1=0$ και $z_2 \rightarrow \infty$. Δεδομένου ότι όλες οι ποσότητες του πεδίου προσεγγίζουν το μηδέν εκθετικά, για την αύξηση του z , $P(z_2) \rightarrow 0$, και:

$$E_E - E_H = \frac{1}{2i\omega} P(0) = \frac{1}{4i\omega} VI^*. \quad (6.115)$$

Για μια λειτουργία \mathbf{E} :

$$VI^* = Z|I|^2 = i|Z||I|^2, \quad (6.116)$$

και έτσι:

$$\mathbf{E} \text{ λειτουργία: } E_E - E_H = \frac{1}{4\omega} |Z||I|^2, \quad (6.117)$$

η οποία είναι θετική. Ως εκ τούτου, μια λειτουργία \mathbf{E} κάτω αποκοπής έχει περίσσεια ηλεκτρική ενέργεια, σε συμφωνία με τη μορφή της χωρητικής άεργης αντίστασης (βλέπε παρακάτω) της χαρακτηριστικής σύνθετης αντίστασης. Ομοίως, για μια λειτουργία \mathbf{H} :

$$VI^* = Y^*|V|^2 = -i|Y||V|^2, \quad (6.118)$$

απ' όπου:

$$\mathbf{H} \text{ λειτουργία: } E_H - E_E = \frac{1}{4\omega} |Y||V|^2, \quad (6.119)$$

πράγμα που σημαίνει ότι η λειτουργία \mathbf{H} κάτω από την αποκοπή, κατά το μεγαλύτερο ποσοστό, αποθηκεύει μαγνητική ενέργεια, όπως θα προτεινόταν στην ευαίσθητη επαγωγική μορφή (βλέπε παρακάτω) της χαρακτηριστικής της αντίστασης.

Για να λάβουμε τη συνολική ενέργεια που αποθηκεύεται σε μια λειτουργία μη πολλαπλασιαστική, χρησιμοποιούμε την (6.107), και πάλι με $z_1=0$ και $z_2 \rightarrow \infty$:

$$E = \frac{i}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial \omega} I^* + V^* \frac{\partial I}{\partial \omega} \right). \quad (6.120)$$

Διαφοροποιώντας την σχέση $V=ZI$ σε σχέση με την ω , και τις κατάλληλες αντικαταστάσεις στην (6.120), βρίσκουμε:

$$E = \frac{i}{4} \left[\frac{dZ}{d\omega} |I|^2 + (Z + Z^*) \frac{\partial I}{\partial \omega} I^* \right]. \quad (6.121)$$

Τότε η φανταστική μορφή της $Z (= i|Z|$ για μια λειτουργία \mathbf{E}), σημαίνει ότι:

$$E = -\frac{i}{4} \frac{d|Z|}{d\omega} |I|^2. \quad (6.122)$$

Παρεμπιπτόντως, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο θετικός χαρακτήρας της συνολικής ενέργειας απαιτεί το ότι ο $|Z|$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της συχνότητας, ή καλύτερα, ότι η επαγωγική ηλεκτρική αντίσταση που χαρακτηρίζει τον $Z (=iX)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της συχνότητας. Η απαίτηση αυτή επαληθεύεται με άμεση διαφοροποίηση:

$$-\frac{d|Z|}{d\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - k^2} |Z|, \quad (6.123)$$

και:

$$\mathbf{E} \text{ λειτουργία: } E = \frac{1}{4\omega} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - k^2} |Z| |I|^2. \quad (6.124)$$

Μία σύγκριση αυτού του αποτελέσματος με την (6.117) μας δείχνει ότι:

$$\frac{2E_H}{E} = \frac{k^2}{\gamma^2}. \quad (6.125)$$

Έτσι, οι ηλεκτρικές και μαγνητικές ενέργειες είναι ίσες ακριβώς στη συχνότητα αποκοπής ($k = \gamma$), και καθώς η συχνότητα μειώνεται, η μαγνητική ενέργεια μειώνεται σταδιακά σε σύγκριση με την ηλεκτρική ενέργεια. Σύμφωνα με την τελευταία παρατήρηση, η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση της \mathbf{E} λειτουργίας $i\zeta\gamma/k = i\gamma/\omega\epsilon$ όταν $k/\gamma \ll 1$, το οποίο σημαίνει ότι η γραμμή μεταφοράς που περιγράφει μια εξασθενημένη \mathbf{E} λειτουργία σε μια συχνότητα σημαντικά μικρότερη από τη συχνότητα αποκοπής, συμπεριφέρεται σαν συσσωρευμένη χωρητικότητα $C = \epsilon/\gamma = \epsilon\epsilon_c/(2\pi)$.

Η ανάλυση της \mathbf{H} λειτουργίας είναι τελείως ανάλογη με τους ρόλους των ηλεκτρικών και μαγνητικών εναλλασσόμενων πεδίων. Έτσι, η συνολική αποθηκευμένη ενέργεια είναι:

$$E = -\frac{1}{4} \frac{d|Y|}{d\omega} |V|^2, \quad (6.126)$$

υπονοώντας ότι η ευαισθησία που χαρακτηρίζει την $Y (= -iB)$ θα πρέπει να είναι μια αυξανόμενη συνάρτηση της συχνότητας. Έχουμε:

$$\mathbf{H} \text{ λειτουργία: } E = \frac{1}{4\omega} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - k^2} |Y||V|^2, \quad (6.127)$$

και:

$$\frac{2E_E}{E} = \frac{k^2}{\gamma^2}. \quad (6.128)$$

Σε συχνότητες αρκετά κάτω από την συχνότητα αποκοπής, η ηλεκτρική ενέργεια είναι αμελητέα σε σύγκριση με τη μαγνητική ενέργεια, και η χαρακτηριστική εισόδου γίνεται $i\eta\gamma/k = i\gamma/\omega\mu$. Έτσι, η γραμμή μεταφοράς μιας \mathbf{H} λειτουργίας, υπό αυτές τις συνθήκες, συμπεριφέρεται σαν μια συσσωρευμένη επαγωγή $L = \mu/\gamma = \mu\lambda_c/(2\pi)$.

6.7 Προβλήματα για το Κεφάλαιο 6

1. Αποδείξτε το θεώρημα του σύνθετου διανύσματος Poynting, (6.87), και το θεώρημα της ενέργειας, (6.88), αρχίζοντας από τους ορισμούς του μετασχηματισμού Fourier:

$$\mathbf{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{E}(t), \quad (6.129a)$$

$$\mathbf{H}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \mathbf{H}(t). \quad (6.129b)$$

Ποιες είναι οι γενικές μορφές αυτών των θεωρημάτων εάν υποθεθεί ότι δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ των $\mathbf{D}(\omega)$ και $\mathbf{E}(\omega)$ και μεταξύ των $\mathbf{B}(\omega)$ και $\mathbf{H}(\omega)$;

2. Δείξτε ότι, εάν συμπεριληφθεί διασπορά, η γενίκευση της (6.88) είναι:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}(\omega)}{\partial \omega} \times \mathbf{H}^*(\omega) + \mathbf{E}^* \times \frac{\partial \mathbf{H}(\omega)}{\partial \omega} \right) \\ = i \left[\left(\frac{d}{d\omega} (\omega\varepsilon) \right) |\mathbf{E}|^2 + \left(\frac{d}{d\omega} (\omega\mu) \right) |\mathbf{H}|^2 \right] \equiv 4iU. \end{aligned} \quad (6.130)$$

3. Το θεώρημα της ενέργειας (6.130) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξει το θεώρημα μοναδικότητας: δηλαδή ότι, τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία σε μια περιοχή εντελώς καθορισμένη από τον προσδιορισμό των τιμών του ηλεκτρικού (ή μαγνητικού) πεδίου, εφάπτονται στην κλειστή επιφάνεια οριοθέτησης της εν λόγω περιοχής. Το θεώρημα αυτό είναι αληθές εκτός για ευκρινείς και μεμονωμένες τιμές της συχνότητας. Αποδείξτε το, σημειώνοντας πρώτα ότι εάν \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 και \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 είναι δύο λύσεις των εξισώσεων Maxwell στην περιοχή, η διαφορά $\mathcal{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$, $\mathcal{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ θα πρέπει να πληρεί τις ομογενείς εξισώσεις:

$$\nabla \times \mathcal{H} = -i\omega\epsilon\mathcal{E}, \quad \nabla \times \mathcal{E} = i\omega\mu\mathcal{H}, \quad (6.131)$$

ως συνεχείς συναρτήσεις του ω , ενώ στην περιβάλλουσα επιφάνεια S έχουμε την ομοιογενή οριακή συνθήκη:

$$\mathbf{n} \times \mathcal{E} = \mathbf{0} \text{ on } S, \quad (6.132)$$

δεδομένου ότι τόσο το \mathbf{E}_1 όσο και το \mathbf{E}_2 έχουν τις ίδιες εφαπτόμενες τιμές στην S . Τώρα, δείξτε ότι η ολοκληρωτική μορφή του θεωρήματος της ενέργειας, που εφαρμόζεται σε διαφορά πεδία, συνεπάγεται ότι:

$$\mathcal{E} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{H} = \mathbf{0} \text{ in } V. \quad (6.133)$$

Δείξτε ότι λαμβάνουμε το ίδιο αποτέλεσμα εάν το εφαπτόμενο μαγνητικό πεδίο ορίζεται στο όριο, ή εάν επιβάλλεται μίξη των δύο ειδών οριακών συνθηκών. Ωστόσο, σημειώστε ότι αυτό το αποτέλεσμα εξαρτάται από τις συνεχείς απαιτήσεις, έτσι είναι πιθανόν να αποτύχει να κρατηθεί σε μεμονωμένες τιμές της ω . Πράγματι, υπάρχουν άπειρα πολλές τέτοιες έκτακτες λύσεις, φυσικά αντιστοιχούσες στις κανονικές λειτουργίες της περικλειόμενης κοιλότητας από τέλεια αγωγίμα τοιχώματα που συμπίπτουν με την επιφάνεια S .

4. Θεωρήστε έναν παλμό φωτός μονής κατεύθυνσης. Υπολογίστε την αντίστοιχη ομαδική ταχύτητα u , που ορίζεται ως ο λόγος του ρυθμού ροής της ενέργειας ή της ισχύος:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{e}, \quad (6.134)$$

όπου \mathbf{e} είναι η κατεύθυνση διάδοσης της ηλεκτρομαγνητικής διαταραχής και το ολοκλήρωμα είναι πάνω από την αντίστοιχη κάθετη περιοχή σ , στην ενέργεια ανά μονάδα μήκους:

$$W = \int_{\sigma} d\sigma U. \quad (6.135)$$

Υποθέτοντας ότι οι χρόνοι, κατά μέσο όρο, των ηλεκτρικών και μαγνητικών ενεργειών, ανά μονάδα μήκος, είναι ίσοι, μας δείχνουν ότι:

$$v = \frac{c}{1 - \frac{d \ln c'}{d \ln \omega}}, \quad (6.136)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο μέσο. Εναλλακτικά, αυτό μπορεί να είναι γραφτεί ως:

$$v = c \frac{n}{\frac{d}{d\omega}(\omega n)}, \quad n = \left(\frac{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}{\varepsilon_0\mu_0} \right)^{1/2}. \quad (6.137)$$

Υπολογίστε αυτό στο παράδειγμα του μοντέλου του πλάσματος, όπου $\varepsilon = \varepsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$, $\mu = \mu_0$, όσον αφορά την παράμετρο που ονομάζεται συχνότητα πλάσματος ω_p , και δείξτε ότι $v < c_0$.

5. Το σταθερό ηλεκτροστατικό πεδίο μεταξύ των παράλληλων αγωγίων πλακών σε διάφορα δυναμικά, μπορεί να πολλαπλασιαστεί με $e^{ikx}e^{-i\omega t}$, $k = \omega/c$, για να καταλήξουμε σε ένα δυνατό ηλεκτρικό πεδίο E_z για κάθε ω . Ελέγξτε ποιο είναι το σχετικό μαγνητικό πεδίο. Βρείτε το ανάλογο ηλεκτρομαγνητικό κύμα μεταξύ των ομόκεντρων κυλινδρικών αγωγών. Να αποδοθούν αυτά τα κύματα σε όρους των \mathbf{E} ή \mathbf{H} λειτουργιών, και να δοθούν οι αντίστοιχες αντιστάσεις.

6. Ξεκινήστε με τη μακροσκοπική εξίσωση του Maxwell, συχνότητας ω και εγκάρσιου πολλαπλασιαστικού διανύσματος \mathbf{k}_\perp , κατάλληλο για $\varepsilon = \varepsilon(z)$ και $\mu = \mu_0$, και καταλήξτε στις:

$$-\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{H}_\perp + i\omega\varepsilon\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{E}_\perp = \mathbf{n} \times \mathbf{J}_\perp, \quad (6.138a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_\perp + i\omega\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{B}_\perp = \mathbf{k}_\perp \frac{1}{\omega\varepsilon}J_z, \quad (6.138b)$$

όπου:

$$\mathbf{P} = \mathbf{1}_\perp - \frac{c^2}{\omega^2}\mathbf{k}_\perp\mathbf{k}_\perp. \quad (6.139)$$

(Υπενθυμίζεται ότι c είναι η ταχύτητα του φωτός στο μέσο.) Ελέγξτε ότι μια άλλη έκδοση αυτών των εξισώσεων είναι:

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\perp + i\omega\varepsilon\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_\perp = \mathbf{J}_\perp, \quad (6.140a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\perp + i\omega\mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_\perp = -\mathbf{n} \times \mathbf{k}_\perp \frac{1}{\omega\varepsilon}J_z, \quad (6.140b)$$

στις οποίες:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1}_\perp - \frac{c^2}{\omega^2}\mathbf{n} \times \mathbf{k}_\perp\mathbf{n} \times \mathbf{k}_\perp. \quad (6.141)$$

7. Δείξτε ότι:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} = \left(1 - \frac{c^2 k_\perp^2}{\omega^2} \right) \mathbf{1}_\perp, \quad (6.142)$$

και ότι:

$$Q + P = \left(2 - \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega^2}\right) 1_{\perp}. \quad (6.143)$$

Παρουσιάστε την τετραγωνική εξίσωση όπου τα P και Q υπακούουν μεμονωμένα. Τα χαρακτηριστικά (ίδιο) διανύσματα και τις τιμές των P και Q που ορίζεται από, για παράδειγμα:

$$P \cdot V = \lambda V. \quad (6.144)$$

Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές των P και Q. Οι ιδιοτιμές υπακούουν στην τετραγωνική εξίσωση; Ποια είναι η γεωμετρική σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών;

8. Θεωρήστε έναν διηλεκτρικό κυματοδηγό με ασυνεχές διηλεκτρική σταθερά:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 < z < a, \\ \varepsilon_2, & z < 0, z > a. \end{cases} \quad (6.145)$$

υποθέτουμε ότι $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, και η συχνότητα επιλέγεται έτσι ώστε ο κ να είναι πραγματικά για $0 < z < a$ αλλά φανταστικός εκτός αυτού του εύρους. Οι διαμήκης λειτουργικές συναρτήσεις για αυτόν τον διηλεκτρικό κυματοδηγό είναι της μορφής $\cos(\kappa z - a)$ για $0 < z < a$ και μειώνονται εκθετικά, όπως καθορίζεται από τον κ , για $z < 0$ και $z > a$. Ποιες είναι οι επιπτώσεις των οριακών συνθηκών στο $z = 0$ και στο a ; Εξετάστε και τις δύο πολώσεις.

9. Διηλεκτρικό 2 με πλάκα πάχους $2a$, είναι ενσωματωμένο στο διηλεκτρικό 1, το οποίο περιέχει πηγές κυμάτων, με συχνότητα ω και εγκάρσιο πολλαπλασιαστικό διάνυσμα \mathbf{k}_{\perp} , που είναι πολωμένο παράλληλα στις επαφές μεταξύ των μέσων (\perp πόλωση). Θεωρούνται δύο συμμετρικές περιπτώσεις:

(α) ίσες αλλά αντίθετα χαρακτηρισμένες πηγές είναι τοποθετημένες στις αντίστοιχες πλευρές της πλάκας, που οδηγούν στην εξαφάνιση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο της.

(β) ίσες πηγές χρησιμοποιούνται, οδηγώντας στο μέγιστο το ηλεκτρικό πεδίο στο το κέντρο της πλάκας.

Προσθέτοντας τα πεδία και τις πηγές των δύο περιπτώσεων, βρείτε τα μεταδιδόμενα και αντανακλώμενα εύρη των κυμάτων που προσπίπτουν στην πλάκα. Ελέγξτε τη διατήρηση της ενέργειας, τόσο όταν τα κύματα διαδίδονται στην πλάκα όσο και όταν δεν διαδίδονται.

10. Θεωρήστε ένα διηλεκτρικό σώμα σε κίνηση με ταχύτητα \mathbf{V} . Δείξτε ότι παρουσιάζει ένταση μαγνήτισης:

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \times \mathbf{V}. \quad (6.146)$$

Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι ένα άλλο αποτέλεσμα μιας τέτοιας κίνησης θα πρέπει να τροποποιεί τη σχέση μεταξύ των \mathbf{P} και \mathbf{E} σε:

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (6.147)$$

Τώρα γράψτε τις εξισώσεις του Maxwell για ένα κύμα συχνότητας ω και πολλαπλασιαστικού διανύσματος \mathbf{k} παράλληλα με την \mathbf{V} σε χώρο άνευ πηγής, αν υποθεθεί ότι $|\mathbf{V}|/c \ll 1$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, η ταχύτητα του φωτός, ω/k , στο κινούμενο σώμα, είναι:

$$c'(\mathbf{V}) = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)V \equiv c' + \left(1 - \left(\frac{c'}{c}\right)^2\right)V. \quad (6.148)$$

Τι παρατηρείτε;

11. Η απάντηση στο προηγούμενο πρόβλημα, μας αρκεί αν το μέσο δεν έχει διασπορά (το n είναι ανεξάρτητο από το ω). Γενικότερα, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο καθορίζει την πόλωση:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (6.149)$$

που εκτιμάται σε καθορισμένα σημεία στο κινούμενο σώμα. Βρείτε τη σωστή μορφή του $c'(V)$ για φως συχνότητας ω , όταν η εξάρτηση συχνότητας του n είναι αναγνωρισμένη.

12. Η ταχύτητα της μεταφοράς ενέργειας σε ένα μέσο διασποράς δεν είναι c' αλλά:

$$c'' = \frac{d\omega}{dk}, \quad (6.150)$$

σύμφωνα με την (6.99). Δείξτε ότι:

$$c''(V) = c'' + \left(1 - \left(\frac{c''}{c}\right)^2\right)V, \quad (6.151)$$

και να κάντε σαφή την έμμεση αναφορά στην συχνότητα. Θα έπρεπε αυτό το αποτέλεσμα να έχει προβλεφθεί;

13. Αποδείξει ότι η χαμηλότερη \mathbf{E} λειτουργία ενός κοίλου κυματοδηγού χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση φ , η οποία δεν είναι πουθενά αρνητική, και εξαφανίζεται μόνο στο όριο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

10.1 Μεταβολικές Αρχές

Λόγω του πολύ περιορισμένου αριθμού μορφών του οδηγού, οι οποίες υπάγονται στην ακριβή ανάλυση των όρων γνωστών συναρτήσεων, η περαιτέρω πρόοδος απαιτεί την ανάπτυξη μεθόδων προσέγγισης που ισχύουν για τα όρια μιας γενικότερης μορφής. Αν και υπάρχουν αρκετές ειδικές μέθοδοι που εξυπηρετούν αυτόν τον σκοπό, είναι βολικό να συζητήσουμε, σε αυτό το σημείο, μια σειρά από γενικές αρχές που είναι ιδιαίτερα σχετικές με τον προσδιορισμό των κυματαριθμών αποκοπής του οδηγού και τις συναρτήσεις λειτουργίας. Οι αρχές αυτές βασίζονται κυρίως στην μεταβολική διατύπωση των εξισώσεων πεδίου. Στο Κεφάλαιο 4 δείχνεται ότι, εάν μία από τις εξισώσεις του Maxwell γίνει δεκτή ως ορισμός μιας μεταβλητής ενός πεδίου, η άλλη εξίσωση μπορεί να προκύπτει ως η προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα μιας συγκεκριμένης ποσότητας, Λαγκρατζιανή, είναι σταθερό σε σχέση με τις μεταβολές της άλλης μεταβλητής πεδίου. Για περιοχή χωρίς διάδοση, που περικλείεται από τέλεια αγωγίμα τοιχώματα και άνευ εσωτερικών ρευμάτων, οι μεταβολικές αρχές (4.28) και (4.26) δηλώνουν ότι:

$$\delta \int_V (d\mathbf{r})(\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) = 0, \quad (10.1)$$

όπου είτε η ποσότητα πεδίου \mathbf{H} ποικίλει και η \mathbf{E} ορίζεται από:

$$\nabla \times \mathbf{H} = -ik\eta \mathbf{E}, \quad (10.2)$$

είτε η \mathbf{E} ποικίλει και η \mathbf{H} ορίζεται από:

$$\nabla \times \mathbf{E} = ik\zeta \mathbf{H}. \quad (10.3)$$

Επιπλέον, όταν η \mathbf{H} είναι η θεμελιώδης μεταβλητή, η σταθερή προϋπόθεση, που εφαρμόζεται στην επιφάνεια μεταβολών, αυτόματα αποδίδει τις οριακές συνθήκες (6.19) που είναι κατάλληλες για μεταλλικά τοιχώματα, ενώ αν η \mathbf{E} είναι η ανεξάρτητη θεματική ποσότητα πεδίου σε διακύμανση, είναι απαραίτητο να περιοριστεί η διακύμανση σε πεδία που ικανοποιούν την οριακή συνθήκη ώστε η συμβολή του επιφανειακού ολοκληρώματος στην διακύμανση να αφαιρεθεί [cf. (4.26)]. Θα πρέπει να εφαρμόσουμε αυτά τα αποτελέσματα για να κατασκευάσουμε δύο Μεταβολικές διατυπώσεις της εξίσωσης κύματος όπου και οι οριακές συνθήκες θα ικανοποιούνται από λειτουργικές συναρτήσεις του κυματοδηγού.

Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τις συνιστώσες του πεδίου, μιας λειτουργίας με τον εγγενή κυματάριθμο, ίσες με τον κυματάριθμο αποκοπής, $k = \gamma$, ούτως ώστε το μήκος κύματος του οδηγού να είναι άπειρο και όλες οι ποσότητες του πεδίου ανεξάρτητες του z . Παραπέμποντας στις (6.32g) και (6.33f), βλέπουμε ότι μια τάση της \mathbf{E} λειτουργίας και ένα ρεύμα της \mathbf{H} λειτουργίας εξαφανίζονται κάτω από αυτές τις συνθήκες (μηδενική χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση και αγωγιμότητα, αντίστοιχα) και

ότι, από τις (6.32c), (6.32b), (6.33d) και (6.33a), οι μόνες συνιστώσες του πεδίου που δεν εξαφανίζονται είναι ανάλογες στις:

$$\mathbf{E} \text{ λειτουργία: } E_z = i\gamma\zeta\varphi(x, y), \quad \mathbf{H} = -\mathbf{e} \times \nabla\varphi(x, y), \quad (10.4a)$$

$$\mathbf{H} \text{ λειτουργία: } H_z = i\gamma\eta\psi(x, y), \quad \mathbf{E} = \mathbf{e} \times \nabla\psi(x, y). \quad (10.4b)$$

Σε αυτή τη μορφή, το πεδίο της \mathbf{E} λειτουργίας ικανοποιεί την (6.1a) πανομοιότυπα, ενώ το πεδίο της \mathbf{H} λειτουργίας την (6.1b). Για να αντιστραφεί αυτή η κατάσταση, θα μπορούσαμε, με την ίδια εγκυρότητα, να γράψουμε:

$$\mathbf{E} \text{ λειτουργία: } E_z = -i\frac{\zeta}{\gamma}\nabla^2\varphi(x, y), \quad \mathbf{H} = -\mathbf{e} \times \nabla\varphi(x, y), \quad (10.5a)$$

$$\mathbf{H} \text{ λειτουργία: } H_z = -i\frac{\eta}{\gamma}\nabla^2\psi(x, y), \quad \mathbf{E} = \mathbf{e} \times \nabla\psi(x, y). \quad (10.5b)$$

Δεδομένου ότι όλες οι ποσότητες του πεδίου είναι ανεξάρτητες του z , το ολοκλήρωμα της έντασης στην (10.1) εκφυλίζεται σε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα που επεκτείνεται σε ένα τμήμα του οδηγού. Αντικαθιστώντας τις παραστάσεις (10.4) - (10.4b) στην (10.1), παίρνουμε:

$$\delta \int_{\sigma} d\sigma [(\nabla f)^2 - \gamma^2 f^2] = 0, \quad (10.6)$$

και για τις δύο συναρτήσεις λειτουργίας, $\mathbf{E}(f = \varphi)$ και $\mathbf{H}(f = \psi)$. Ωστόσο, δεδομένου ότι αυτή η αναπαράσταση χρησιμοποιεί τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, αντίστοιχα, όπως οι θεμελιώδεις μεταβλητές του πεδίου για τις \mathbf{E} και \mathbf{H} λειτουργίες, η Μεταβολική αρχή (10.6), που εφαρμόζεται στις \mathbf{E} λειτουργίες, αποκλείει οποιαδήποτε μεταβολή που παραβιάζει την οριακή συνθήκη $\varphi = 0$ στην οριακή καμπύλη C , αποδίδοντας αυτόματα τις οριακές συνθήκες της \mathbf{H} λειτουργίας, $\frac{\partial}{\partial n}\psi = 0$ στην C , για τις απεριόριστες παραλλαγές στο όριο. Αν και έχουμε αυτό το αποτέλεσμα που προέρχεται από τη Μεταβολική διατύπωση των εξισώσεων του πεδίου, προς το συμφέρον της γενικότητας, αμέσως επιβεβαιώνεται στην εκτέλεση της διακύμανσης:

$$-\int_{\sigma} d\sigma \delta f (\nabla^2 f + \gamma^2 f) + \oint_C ds \delta f \frac{\partial}{\partial n} f = 0, \quad (10.7)$$

ότι η σταθερή προϋπόθεση αποδίδει την κυματική εξίσωση και την οριακή συνθήκη της \mathbf{H} λειτουργίας, για απεριόριστες μεταβολές, και απαιτεί την επιβολή της οριακής συνθήκης στην ποικίλη συνάρτηση, $\delta f = 0$, όταν ασχολείται με \mathbf{E} λειτουργίες. Μια άλλη Μεταβολική διατύπωση παρέχεται από την αναπαράσταση των (10.5a) - (10.5b), οι οποίες όταν αντικαθίστανται στην (10.1), αποδίδει:

$$\delta \int_{\sigma} d\sigma [(\nabla^2 f)^2 - \gamma^2 (\nabla f)^2] = 0, \quad (10.8)$$

όπου πλέον η Μεταβολική αρχή αποδίδει την οριακή συνθήκη της **E** λειτουργίας για απεριόριστες μεταβολές, και όταν εφαρμόζεται στην **H** λειτουργία, η διακύμανση δεν πρέπει να παραβιάζει τις οριακές συνθήκες. Για να επιβεβαιώσουμε αυτές τις δηλώσεις άμεσα, εκτελούμε τις αναφερόμενες διακυμάνσεις στην (10.8), και βρίσκουμε:

$$- \int_{\sigma} d\sigma \nabla (\nabla^2 f + \gamma^2 f) \cdot \delta(\nabla f) + \oint_C ds \delta \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right) \nabla^2 f = 0. \quad (10.9)$$

Η σταθερή προϋπόθεση για αυθαίρετες μεταβολές της ∇f στο εσωτερικό της περιοχής αποδόσεων:

$$\nabla^2 f + \gamma^2 f = \text{const.}, \quad (10.10)$$

η οποία είναι πλήρως ισοδύναμη με την εξίσωση κύματος, για την σταθερά ολοκλήρωσης που μπορεί να απορροφηθεί στην συνάρτηση f αν το γ δεν είναι μηδέν. Πράγματι, είναι προφανές ότι η Μεταβολική αρχή της (10.8) δεν επηρεάζεται από την προσθήκη μιας σταθεράς στην f . Η απαίτηση ότι το γραμμικό ολοκλήρωμα εξαφανίζεται για αυθαίρετες μεταβολές της $\frac{\partial f}{\partial n}$ στο όριο, συνεπάγεται ότι $\nabla^2 f = 0$ στο όριο της C , το οποίο είναι ισοδύναμο της συνθήκης της **E** λειτουργίας σε περίπτωση που $\gamma \neq 0$). Προκειμένου η μεταβολική αρχή να εφαρμόζεται σε **H** λειτουργίες, η οριακή συνθήκη, $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ στην C , δεν πρέπει να παραβιάζεται από την διακύμανση.

Στη συνέχεια θα πρέπει να δούμε σαν πλεονέκτημα την εξέταση περισσότερων γενικών οριακών συνθηκών του τύπου:

$$\frac{\partial f}{\partial n} + \rho f = 0 \text{ στην } C, \quad (10.11)$$

όπου ρ είναι μια προκαθορισμένη συνάρτηση της θέσης στην οριακή καμπύλη. Οι οριακές συνθήκες των **E** και **H** λειτουργιών είναι ιδιαίτερες μορφές της (10.11) που ανταποκρίνονται για $\rho = \infty$ και $\rho = 0$, αντίστοιχα. [Η γενική γραμμική οριακή συνθήκη μελετήθηκε στην (4.19) και (4.23).] Αυτή η οριακή συνθήκη μπορεί να προέρχεται από τις δύο Μεταβολικές αρχές με την προσθήκη κατάλληλων γραμμικών ολοκληρωμάτων στα επιφανειακά ολοκληρώματα των (10.6) και (10.8). Έτσι, η σταθερή προϋπόθεση που εκφράζεται από την εξαφανιζόμενη διακύμανση της:

$$\int_{\sigma} d\sigma [(\nabla f)^2 - \gamma^2 f^2] + \oint_C ds \rho f^2, \quad (10.12)$$

συγκεκριμένα η:

$$- \int_{\sigma} d\sigma \delta f (\nabla^2 + \gamma^2) f + \oint_C ds \delta f \left(\frac{\partial f}{\partial n} + \rho f \right) = 0, \quad (10.13)$$

αποδίδει την κυματική εξίσωση και την οριακή συνθήκη, για αυθαίρετες μεταβολές εντός της περιοχής και στο όριο. Ομοίως, η σταθερή ιδιότητα του:

$$\int_{\sigma} d\sigma [(\nabla^2 f)^2 - \gamma^2 (\nabla f)^2] - \gamma^2 \oint_C ds \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial n} f \right)^2, \quad (10.14)$$

όπως εκφράζεται από την:

$$- \int_{\sigma} d\sigma \nabla (\nabla^2 f + \gamma^2 f) \cdot \delta(\nabla f) + \oint_C ds \delta \left(\frac{\partial}{\partial n} f \right) \left(\nabla^2 f - \frac{\gamma^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} f \right) = 0, \quad (10.15)$$

υποδηλώνει την κυματική εξίσωση και μια οριακή συνθήκη που ισοδυναμεί της (10.11), εάν $\gamma \neq 0$. Και στις δύο αυτές πιο γενικότερες Μεταβολικές αρχές, δεν επιβάλλονται περιορισμοί, από τη φύση της διακύμανσης. Αν είναι επιθυμητό, ωστόσο, να αφήσουμε τον ρ να προσεγγίσει το ∞ στην (10.12), προκειμένου να λάβουμε την οριακή συνθήκη της **E** λειτουργίας, το γραμμικό ολοκλήρωμα μπορεί να παραλειφθεί μόνο εφόσον επιβάλλεται η οριακή συνθήκη $f = 0$ στην διαφορική συνάρτηση. Ομοίως, εάν η έκφραση (10.14) περιορίζεται στην οριακή συνθήκη της **H** λειτουργίας, αφήνοντας τον ρ να προσεγγίσει το μηδέν, είναι αυστηρά αναγκαίο να επιβάλουμε την οριακή συνθήκη $\frac{\partial}{\partial n} f = 0$ πριν παραλείψουμε το γραμμικό ολοκλήρωμα. Με αυτόν τον τρόπο, οι παραπάνω περιορισμοί των επιτρεπόμενων διακυμάνσεων, στις (10.6) και (10.8), προκύπτουν για τις **E** και **H** λειτουργίες, αντίστοιχα.

10.2 Αρχή του Rayleigh

Πριν αναφέρουμε την πρακτική χρησιμότητα των μεταβολικών αυτών αρχών, είναι απαραίτητο να σημειώσουμε ότι οι διάφορες ποσότητες, που έχουν σταθερή τιμή σε σχέση με τις μεταβολές συγκεκριμένων συναρτήσεων f , έχουν τιμή μηδέν για συγκεκριμένες συναρτήσεις. Για να αποδειχθεί αυτό, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι εκφράσεις (10.12) και (10.14), οι οποίες είναι ειδικές παραλλαγές των (10.6) και (10.8), έχουν την ιδιότητα να είναι ομοιογενείς στην f . Αν λοιπόν, θεωρήσουμε μια μεταβολή στην f , η οποία είναι ανάλογη προς την ίδια, ας πούμε $\delta f = \epsilon f$ (όπου ϵ μια απειροελάχιστη ποσότητα), οι διακυμάνσεις των εκφράσεων (10.12) και (10.14) είναι πολλαπλάσια της αρχικής μορφής, τα οποία από την άλλη πρέπει να είναι μηδέν, αφού η στατική ιδιότητα είναι ανεξάρτητη από την ειδικότερη μορφή της διακύμανσης. Έτσι, ο ισχυρισμός αποδεικνύεται. Ως εκ τούτου, εάν η f είναι μια λύση για την κυματική εξίσωση και ικανοποιεί την οριακή συνθήκη (10.11), έχουμε:

$$\int_{\sigma} d\sigma [(\nabla f)^2 - \gamma^2 f^2] + \oint_C ds \rho f^2 = 0, \quad (10.16a)$$

$$\int_{\sigma} d\sigma [(\nabla^2 f)^2 - \gamma^2 (\nabla f)^2] - \gamma^2 \oint_C ds \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial n} f \right)^2 = 0, \quad (10.16b)$$

ή:

$$\gamma^2 = \frac{\int_{\sigma} d\sigma (\nabla f)^2 + \oint_C ds \rho f^2}{\int_{\sigma} d\sigma f^2}, \quad (10.17a)$$

$$\gamma^2 = \frac{\int_{\sigma} d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int_{\sigma} d\sigma (\nabla f)^2 + \oint_C ds \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial n} f \right)^2}. \quad (10.17b)$$

Όταν λαμβάνονται υπ' όψιν οι οριακές συνθήκες των \mathbf{E} και \mathbf{H} λειτουργιών, οι τελευταίες αυτές εκφράσεις μετατρέπονται σε:

$$\gamma^2 = \frac{\int_{\sigma} d\sigma (\nabla f)^2}{\int_{\sigma} d\sigma f^2}, \quad (10.18a)$$

$$\gamma^2 = \frac{\int_{\sigma} d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int_{\sigma} d\sigma (\nabla f)^2}, \quad (10.18b)$$

εκ των οποίων η πρώτη έχει ήδη οριστεί στην (6.43). Ας επιλέξουμε τώρα μια αυθαίρετη συνάρτηση f , που υπόκεινται σε ορισμένους περιορισμούς συνεχείας, και ας ορίσουμε μια ποσότητα γ που συνδέεται με αυτή μέσω των (10.17a) και (10.17b). Από την κατηγορία αυθαίρετων συναρτήσεων, οι ιδιοσυναρτήσεις f , οι οποίες ικανοποιούν την κυματική εξίσωση και την οριακή συνθήκη, είναι οι μοναδικές που κατέχουν την ιδιότητα, η ποσότητα γ να είναι σταθερή σε σχέση με τις αυθαίρετες μεταβολές της f . Έτσι, μια συνάρτηση που αποκλίνει από μια πραγματική ιδιοσυνάρτηση, κατά μια μικρή ποσότητα πρώτης τάξης, θα δώσει την δυνατότητα να υπολογιστεί μια τιμή του γ ώστε να αποκλίνει από την σωστή τιμή του, μόνο στη μικρή ποσότητα δεύτερης τάξης. Για να αποδείξουμε αυτή τη δήλωση, εξετάζουμε μια απειροελάχιστη απόκλιση της f , από μια ιδιοσυνάρτηση, και υπολογίζουμε την ταυτόχρονη αλλαγή της γ , σύμφωνα με την (10.17a) ή (10.17b). Τώρα, οι εκφράσεις που περιέχονται στις τελευταίες εξισώσεις, έχουν την ιδιότητα να είναι σταθερές (και μόνο σταθερές) σε σχέση με τις μεταβολές της συνάρτησης f , και ως εκ τούτου, για τη διατήρηση της ισότητας, η ποσότητα γ πρέπει να είναι επίσης σταθερή. Αντίθετα, για να είναι η γ ποσότητα σταθερή, τα δεξιά μέλη των (10.17a) και (10.17b) πρέπει να είναι σταθερά (και μόνο σταθερά) σε σχέση με τις μεταβολές της f , οι οποίες είναι οι δύο μεταβολικές αρχές που δίνουν την κυματική εξίσωση και την οριακή συνθήκη. Σαν μια περαιτέρω ιδιότητα των (10.17a) και (10.17b) που παρατηρούμε, είναι ότι εάν το ρ είναι θετικό, ή πιο συγκεκριμένα, εάν οι οριακές συνθήκες της \mathbf{E} ή \mathbf{H} λειτουργίας είναι ενεργές, οι εκφράσεις για το γ^2 δεν θα είναι ποτέ αρνητικές, και ως εκ τούτου, θα πρέπει να υπάρχει μια συνάρτηση, από τις συναρτήσεις που καθιστούν το γ^2 σταθερό, η οποία να το κάνει, με απόλυτη προσέγγιση, ελάχιστο. Η ιδιοσυνάρτηση που έχει αυτή την ιδιότητα είναι η συνάρτηση λειτουργίας του ελάχιστου κυματάριθμου αποκοπής, δηλαδή, η κυρίαρχη \mathbf{E} ή \mathbf{H} λειτουργία του οδηγού. (Η δήλωση αυτή υπόκειται σε σημαντικές προϋποθέσεις. Βλέπε υποκεφάλαιο 10.4.) Οποιοδήποτε άλλη συνάρτηση πρέπει να αποδώσει μεγαλύτερη τιμή για το γ^2 , δηλαδή, μια συνάρτηση f που διαφέρει από την επικρατούσα συνάρτηση λειτουργίας παράγει μια τιμή για το γ^2 που υπερβαίνει την πραγματική. Η στατική ιδιότητα των κυματάριθμων αποκοπής και η ελάχιστη ιδιότητα του απόλυτου κυματάριθμου αποκοπής, είναι πτυχές της αρχής του Rayleigh, η οποία είναι γενικά εφαρμόσιμη σε συχνότητες συστημάτων με δυναμικές εξισώσεις που προέρχονται από μια μεταβολική αρχή.

Στις δύο μορφές κυματαριθμών αποκοπής μπορεί επίσης να δοθεί κι άλλη ερμηνεία κατά τον ακόλουθο τρόπο. (Στο εξής, στο παρόν κεφάλαιο, όταν εμφανίζονται μόνο επιφανειακά ολοκληρώματα, θα καταλαβαίνουμε ότι εκτείνονται πάνω από την επιφάνεια διατομής σ .) Η ποσότητα:

$$\int d\sigma (\nabla^2 f + \gamma^2 f)^2, \quad (10.19)$$

είναι προφανώς μεγαλύτερη από το μηδέν, εκτός εάν η f είναι μια λύση της κυματικής εξίσωσης και το γ^2 η αντίστοιχη ιδιοτιμή. Επομένως οι ιδιοσυναρτήσεις χαρακτηρίζονται από την εξαφάνιση της (10.19). Αν η f δεν είναι μια ιδιοσυνάρτηση, η καλύτερη προσέγγιση ως προς το γ^2 , επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της (10.19) σε σχέση με το γ . Αυτό μας δίνει:

$$\gamma^2 = - \frac{\int d\sigma f \nabla^2 f}{\int d\sigma f^2} = \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2}, \quad (10.20)$$

η τελευταία αυτή μορφή παράγεται αν επιβληθούν οι οριακές συνθήκες της **E** ή **H** λειτουργίας στην f . Επιπλέον, για αυτήν την επιλογή του γ^2 , έχουμε:

$$\int d\sigma (\nabla^2 f + \gamma^2 f)^2 = \int d\sigma (\nabla^2 f)^2 - \frac{[\int d\sigma (\nabla f)^2]^2}{\int d\sigma f^2}, \quad (10.21)$$

(Μαθηματικά, αυτό ονομάζεται ανισότητα Cauchy - Schwarz - Bunyakovskii ανισότητα, η οποία αναφέρει γενικά ότι:

$$\int d\sigma |f|^2 \int d\sigma |g|^2 \geq \left| \int d\sigma f^* g \right|^2. \quad (10.22)$$

η οποία μας δείχνει ότι:

$$\frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2} \geq \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2}, \quad (10.23)$$

Ως εκ τούτου, η τιμή του γ , που υπολογίζεται από μια υποθετική συνάρτηση f μέσω της (10.18a), δεν υπερβαίνει ποτέ εκείνη που λαμβάνεται από την (10.18b), και οι δύο τιμές του γ^2 είναι ίσες μόνο εάν η f είναι μια ιδιοσυνάρτηση με την κοινή τιμή του γ^2 ως ιδιοτιμή. Έτσι, ένα τμήμα του φάσματος στο οποίο μια συνάρτηση προσεγγίζει μια ιδιοσυνάρτηση δίνεται από το βαθμό κατά τον οποίο οι (10.18a) και (10.18b) συμφωνούν. Ομοίως η:

$$\int d\sigma [\nabla(\nabla^2 f + \gamma^2 f)]^2, \quad (10.24)$$

είναι μεγαλύτερη του μηδενός, εκτός κι αν η f είναι λύση της (10.10). Για μια υποτιθέμενη συνάρτηση f , η ελάχιστη τιμή της (10.24), ως συνάρτηση του γ^2 , λαμβάνεται όταν:

$$\gamma^2 = -\frac{\int d\sigma \nabla(\nabla^2 f) \cdot \nabla f}{\int d\sigma (\nabla f)^2} = \frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2}. \quad (10.25)$$

Γράφοντας τον τελευταίο τύπο θεωρούμε ότι η f ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες της \mathbf{H} λειτουργίας ή ότι η $\nabla^2 f$ υπακούει στις οριακές συνθήκες της \mathbf{E} λειτουργίας. Έχοντας το γ^2 αυτήν την τιμή, παίρνουμε:

$$\int d\sigma [\nabla(\nabla^2 f + \gamma^2 f)]^2 = \int d\sigma [\nabla(\nabla^2 f)]^2 - \frac{[\int d\sigma (\nabla^2 f)^2]^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2}, \quad (10.26)$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\frac{\int d\sigma [\nabla(\nabla^2 f)]^2}{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2} \geq \frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2} \geq \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2}, \quad (10.27)$$

υπό την προϋπόθεση:

$$\frac{\partial}{\partial n} f = 0 \text{ στην } C, \quad (10.28a)$$

ή:

$$f = 0, \quad \nabla^2 f = 0 \text{ στην } C. \quad (10.28b)$$

Τα σημεία ισότητας διατηρούνται μόνο εάν η f είναι λύση της κυματικής εξίσωσης υπακούοντας είτε στις οριακές συνθήκες της \mathbf{E} είτε της \mathbf{H} λειτουργίας.

Οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να οριστούν, κατ' αρχήν, ανεξάρτητα και να κατασκευαστούν μέσω της στατικής ιδιότητας των ιδιοτιμών. Έτσι, από η κατηγορία των αποδεκτών συναρτήσεων, εκείνες που είναι συνεχείς και έχουν τμηματικά συνεχή παράγωγα, η συνάρτηση f_1 που κάνει την (10.17a) απόλυτα ελάχιστη είναι λύση της κυματικής εξίσωσης υπακούοντας στην οριακή συνθήκη της (10.11). Η ελάχιστη τιμή της (10.17a), γ_1^2 , είναι η ιδιοτιμή που σχετίζεται με την συνάρτηση f_1 . Εάν, τώρα, η ελάχιστη τιμή της (10.17a) ζητείται μέσα στην κατηγορία των παραδεκτών συναρτήσεων που είναι ορθογώνιες στην f_1 :

$$\int d\sigma f f_1 = 0, \quad (10.29)$$

η συνάρτηση f_2 που ικανοποιεί αυτές τις προϋποθέσεις είναι λύση της κυματικής εξίσωσης, που υπακούει στις οριακές συνθήκες, και που συνδέεται με την ιδιοτιμή $\gamma_2^2 \geq \gamma_1^2$. Γενικότερα, αν η (10.17a) ελαχιστοποιείται, μεταξύ των αποδεκτών συναρτήσεων, ορθογώνια προς τις πρώτες n ιδιοσυναρτήσεις, έχουμε:

$$\int d\sigma f f_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.30)$$

η ελαχιστοποιημένη συνάρτηση f_{n+1} είναι μια λύση της κυματικής εξίσωσης και της συνακόλουθης οριακής συνθήκης, που συνδέεται με μια ιδιοτιμή γ_{n+1}^2 , η οποία υπερβαίνει ή, ενδεχομένως, ισούται με την $n^{\text{οστή}}$ ιδιοτιμή που λαμβάνεται με την διαδικασία ελαχιστοποίησης. Με τον τρόπο αυτό, λαμβάνεται ένα άπειρο σύνολο ιδιοσυναρτήσεων και ιδιοτιμών, που είναι διατεταγμένο σε αύξουσα σειρά βάσει των ιδιοτιμών. Το ότι το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων, που σχηματίζονται κατ' αυτόν τον τρόπο, αποτελεί ολόκληρο το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων, θα αποδειχθεί σύντομα. Για να αποδειχθεί ότι η μέθοδος ελαχιστοποίησης, που αναφέρεται παραπάνω, δημιουργεί διαδοχικές ιδιοσυναρτήσεις, προχωρούμε με επαγωγή, υποθέτοντας ότι η κάθε μια από τις πρώτες n συναρτήσεις, f_i , $i = 1, \dots, n$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης και της οριακής συνθήκης και ότι κάθε συνάρτηση είναι ορθογώνια με τα προηγούμενα μέλη του συνόλου. Επιπλέον, υποτίθεται ότι οι ιδιοτιμές συγκροτούν μια μονότονη αύξουσα ακολουθία, $\gamma_{i+1}^2 \geq \gamma_i^2$. Η μεταβολική εξίσωση (10.13) είναι μια αναγκαία προϋπόθεση ώστε η (10.17a) να είναι ελάχιστη, η οποία πρέπει να συμπληρωθεί από τους όρους που συμπαιρένονται από την (10.30):

$$\int d\sigma \delta f f_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.31)$$

n εξισώσεις, των περιορισμών στις αυθαίρετες συναρτήσεις δf . Με την εισαγωγή των Λαγκρατζιανών πολλαπλασιαστών α_i , $i = 1, \dots, n$, συμπεραίνουμε ότι οι προϋποθέσεις που επιβάλλονται στην f ώστε η (10.17a) να είναι ελάχιστη, είναι:

$$\frac{\partial}{\partial n} f + \rho f = 0 \text{ στην } C, \quad (10.32a)$$

$$(\nabla^2 + \gamma^2)f = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j, \quad (10.32b)$$

όπου το α_j καθορίζεται από τις συμπληρωματικές προϋποθέσεις της (10.31). Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού της (10.32b) με f_i , ένα μέλος του συνόλου των αμοιβαία ορθογώνιων συναρτήσεων, και την ολοκλήρωσή του πάνω από τη διατομή του οδηγού, είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_i \int_{\sigma} d\sigma f_i^2 &= \int_{\sigma} d\sigma f (\nabla^2 + \gamma^2) f_i + \oint_C ds \left(f_i \frac{\partial}{\partial n} f - f \frac{\partial}{\partial n} f_i \right) \\ &= (\gamma^2 - \gamma_i^2) \int_{\sigma} d\sigma f f_i \\ &\quad + \oint_C ds \left[f_i \left(\frac{\partial}{\partial n} f + \rho f \right) - f \left(\frac{\partial}{\partial n} f_i + \rho f_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Τώρα, το γραμμικό ολοκλήρωμα είναι μηδέν όταν και η f και η f_i πληρούν την οριακή συνθήκη της (10.32a), και το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι επίσης μηδέν, λόγω της (10.30). Ως εκ τούτου, όλοι οι Λαγκρατζιανοί πολλαπλασιαστές εξαφανίζονται, και η ελαχιστοποιημένη συνάρτηση f_{n+1} είναι μια λύση της κυματικής εξίσωσης και της οριακής συνθήκης. Επιπλέον, είναι σαφές ότι, εάν μια ποσότητα που περιλαμβάνει μια συνάρτηση f πρόκειται να μειωθεί στο ελάχιστο από μια τάξη αποδεκτών συναρτήσεων, όποιος περιορισμός κι αν επιβληθεί στην εν λόγω τάξη δεν μπορεί να μειώσει την

ελάχιστη τιμή της ποσότητας, παρά μόνο να την αυξήσει ή να την αφήσει ανεπηρέαστη. Δεδομένου ότι τις συναρτήσεις f_{n+1} που αποδίδουν το ελάχιστο του γ^2 , αντικείμενο ορθογωνιότητας με την αρχική ιδιοσυνάρτηση του n , θα τις συναντήσουμε σε μια μικρότερης τάξης συναρτήσεις από την f_n , η οποία είναι ορθογώνια ως προς την αρχική ιδιοσυνάρτηση του $n - 1$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\gamma_{n+1}^2 \geq \gamma_n^2, \quad (10.34)$$

και έτσι επαληθεύονται οι ισχυρισμοί μας.

Η ίδια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί με την έκφραση (10.17b) για το γ^2 . Για λόγους απλότητας, εξετάζουμε μόνο τις συνοριακές συνθήκες της \mathbf{E} ή της \mathbf{H} λειτουργίας, έτσι ώστε να εφαρμόζεται η (10.18b). Η τάξη των αποδεκτών συναρτήσεων είναι εκείνη στην οποία οι συναρτήσεις έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και τμηματικά συνεχείς δεύτερων παραγώγων. Επιπλέον οι συναρτήσεις των \mathbf{H} λειτουργιών πρέπει να πληρούν την κατάλληλη οριακή συνθήκη. Η συνάρτηση που κάνει ελάχιστη την (10.18b) είναι η ιδιοσυνάρτηση f_1 , μέσα στα πλαίσια μιας πρόσθετης σταθεράς. Η δεύτερη ιδιοσυνάρτηση f_2 λαμβάνεται με ελαχιστοποίηση της (10.18b) με την f να είναι περιορισμένη από την κατάσταση της ορθογωνιότητας:

$$\int d\sigma \nabla f \cdot \nabla f_1 = 0, \quad (10.35)$$

και, γενικότερα, η ιδιοσυνάρτηση f_{n+1} βρίσκεται με την ελαχιστοποίηση της (10.18b) εντός της τάξης των συναρτήσεων που ικανοποιούν την συνθήκη:

$$\int d\sigma \nabla f \cdot \nabla f_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.36)$$

Για να αποδειχθεί η τελευταία δήλωση, συνδυάζουμε την (10.9), τους ελάχιστες όρους για το γ^2 , με τους συμπληρωματικούς όρους που συνάγονται από την (10.36):

$$\int d\sigma \delta(\nabla f) \cdot (\nabla f_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.37)$$

μέσω των Λαγκρατζιανών πολλαπλασιαστών α_i , και λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση για την μειωμένη στο ελάχιστο συνάρτηση f :

$$\nabla(\nabla^2 f + \gamma^2 f) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \nabla f_j, \quad (10.38)$$

υπό τις οριακές συνθήκες:

$$\mathbf{E} \text{ λειτουργία: } \nabla^2 f = 0, \quad (10.39a)$$

$$\mathbf{H} \text{ λειτουργία: } \frac{\partial}{\partial n} f = 0. \quad (10.39b)$$

Οι Λαγκρατιανοί πολλαπλασιαστές μπορεί να αποδειχθεί ότι εξαφανίζονται όπως και πριν. Πολλαπλασιάζουμε την (10.38) με ∇f_i και χρησιμοποιούμε την υποτιθέμενη ορθογωνιότητα των πρώτων ιδιοσυναρτήσεων n για να λάβουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_i \int_{\sigma} d\sigma (\nabla f_i)^2 &= \int_{\sigma} d\sigma \nabla f_i \cdot \nabla (\nabla^2 + \gamma^2) f \\ &= \int_{\sigma} d\sigma \nabla (\nabla^2 + \gamma^2) f_i \cdot \nabla f \\ &+ \oint_C ds \left(\nabla^2 f \frac{\partial}{\partial n} f_i - \nabla^2 f_i \frac{\partial}{\partial n} f \right) = 0, \end{aligned} \quad (10.40)$$

σαν συνεπεία των οριακών συνθηκών, μοιρασμένες από την μειωμένη στο ελάχιστο συνάρτηση και τις πρώτες ιδιοσυναρτήσεις n , και την προϋπόθεση ορθογωνιότητας της (10.35) σε συνδυασμό με την κυματική εξίσωση που ικανοποιείται από την ιδιοσυνάρτηση f_i . Έτσι, η μειωμένη στο ελάχιστο συνάρτηση f_{n+1} είναι μια λύση της κυματικής εξίσωσης και της οριακής συνθήκης. Το επιχείρημα που αποδεικνύει την μονοτονική φύση των διαδοχικών ιδιοτιμών εφαρμόζεται εξίσου και σε αυτή τη μέθοδο κατασκευής.

Έτσι, μέχρι στιγμής, έχουμε αγνοήσει την πιθανότητα ότι η πρώτη ιδιοσυνάρτηση, που αποδόθηκε από την αρχή του Rayleigh, μπορεί να ανταποκρίνεται για $\gamma = 0$ και επομένως να είναι μη αποδεκτή ως συνάρτηση λειτουργίας κυματοδηγού. Είναι προφανές ότι το απόλυτο ελάχιστο της (10.18a) είναι πράγματι το $\gamma = 0$, πράγμα το οποίο επιτυγχάνεται με την f να είναι ίση με μια σταθερά. Η πιθανότητα αυτή αναιρείται από την οριακή συνθήκη της \mathbf{E} λειτουργίας, $f = 0$ στην C . Η λειτουργία της μηδενικής αποκοπής κυματάρθμου είναι μια ψευδής \mathbf{H} λειτουργία. Ως εκ τούτου, η πρώτη φυσικά σημαντική λειτουργία \mathbf{H} , είναι η δεύτερη λειτουργία που παράγεται από την αρχή του Rayleigh. Για να εξαιρέσουμε τη λειτουργία όπου $\gamma = 0$, πρέπει να απαιτήσουμε από την συνάρτηση f να είναι ορθογώνια ως προς μια σταθερά, ή:

$$\int d\sigma f = 0. \quad (10.41)$$

Η ιδιοσυνάρτηση που βρέθηκε με την ελαχιστοποίηση της (10.18a), υπό τις προϋποθέσεις αυτής και της (10.39b), είναι η κύρια \mathbf{H} λειτουργία του οδηγού και στο εξής θα θεωρείται η πρώτη λειτουργία. Η δεύτερη \mathbf{H} λειτουργία βρίσκεται μεταξύ των λειτουργιών που υπακούουν στην (10.41) και είναι ορθογώνια στην κύρια συνάρτηση λειτουργίας, και η διαδικασία συνεχίζεται όπως και πριν. Μια παρόμοια δυσκολία που αντιμετωπίζει η αρχή του Rayleigh, εφαρμόζεται στην (10.18b). Η απόλυτη ελάχιστη τιμή της (10.18b) είναι μηδέν, το οποίο επιτυγχάνεται με μια συνάρτηση f_0 , η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$$\nabla^2 f_0 = 0. \quad (10.42)$$

Όταν έχουμε να κάνουμε με τις \mathbf{H} λειτουργίες, η συνάρτηση f_0 περιορίζεται από την οριακή συνθήκη:

$$\frac{\partial}{\partial n} f_0 = 0 \text{ στην } C, \quad (10.43)$$

και αυτό συνεπάγεται ότι η ∇f_0 εξαφανίζεται με τον ίδιο τρόπο:

$$\int_{\sigma} d\sigma (\nabla f_0)^2 = \oint_C ds f_0 \frac{\partial}{\partial n} f_0 - \int_{\sigma} d\sigma f_0 \nabla^2 f_0 = 0. \quad (10.44)$$

Ως εκ τούτου, μόνο μια ψευδή \mathbf{E} λειτουργία υπάρχει. Για να αφαιρέσουμε αποτελεσματικά αυτή τη λειτουργία, δεχόμαστε ότι μόνο συναρτήσεις σαν την f είναι ορθογώνιες στην f_0 κατά την έννοια της εξίσωσης (10.36):

$$\int_{\sigma} d\sigma \nabla f \cdot \nabla f_0 = \oint_C ds f \frac{\partial}{\partial n} f_0 = 0. \quad (10.45)$$

Τώρα, εφόσον η f_0 περιορίζεται μόνο από την (10.42), η κανονική παράγωγος της f_0 μπορεί να οριστεί αυθαίρετα στο όριο, και η γενική ισχύς της (10.45) μπορεί να διασφαλιστεί μόνο αν η f μηδενίζεται, ή είναι σταθερή [βλέπε (6.28)], στο όριο. Ως εκ τούτου, παρά το γεγονός ότι η (10.18b) είναι σταθερή σε σχέση με τις αυθαίρετες μεταβολές σε μια συνάρτηση \mathbf{E} λειτουργίας, η συνάρτηση f πρέπει να πληροί την οριακή συνθήκη της \mathbf{E} λειτουργίας εάν η απόλυτη ελάχιστη τιμή του γ πρόκειται να είναι ο κυματάριθμος αποκοπής για την κύρια \mathbf{E} λειτουργία.

Συνοψίζοντας, για την εγκυρότητα της αρχής του Rayleigh που εφαρμόζεται στην έκφραση (10.18b), είναι αναγκαίο η f να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες της \mathbf{E} ή της \mathbf{H} λειτουργίας. Όταν εφαρμόζεται στην έκφραση (10.18a), η οριακή συνθήκη της \mathbf{E} λειτουργίας δεν πρέπει να παραβιάζεται, ενώ στην \mathbf{H} λειτουργία δεν υπάρχει άλλος περιορισμός εκτός από την (10.41). (Εδώ, εξαιρούμε την μελέτη των \mathbf{T} λειτουργιών, οι οποίες μπορεί να συμβούν για ομοαξονικές γραμμές. Παράδειγμα, βλέπε Κεφάλαιο 6.)

10.3 Απόδειξη της πληρότητας

Τώρα θα αποδειχθεί ότι το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων που λαμβάνονται με τη βοήθεια της αρχής του Rayleigh είναι κλειστό και πλήρες. Ένα σύνολο συναρτήσεων $\{f_n\}$ καλείται κλειστό εάν δεν υπάρχει συνάρτηση ορθογώνια σε κανένα μέλος του συνόλου, δηλαδή, εάν:

$$\int d\sigma f f_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10.46)$$

και συνεπάγεται ότι $f = 0$. Μια σειρά από ιδιοσυναρτήσεις θεωρείται πλήρης εάν οποιαδήποτε συνάρτηση, με ορισμένη συνέχεια και συνοριακές συνθήκες, μπορεί να προσεγγιστεί στο μέσο με αυθαίρετη ακρίβεια από ένα γραμμικό συνδυασμό ιδιοσυναρτήσεων. Η δήλωση αυτή πρόκειται να κατανοηθεί, υπό την έννοια ότι οι σταθερές c_n μπορεί να συνδέονται με οποιαδήποτε συνάρτηση f τέτοια ώστε:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int d\sigma \left[f - \sum_{n=1}^N c_n f_n \right]^2 = 0, \quad (10.47)$$

η οποία μπορεί να γραφτεί:

$$\text{l. i. m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n f_n(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (10.48)$$

όπου το l.i.m. υποδηλώνει το όριο στο μέσο. Αρχικά σημειώνουμε ότι η καλύτερη προσέγγιση του μέσου, με ένα πεπερασμένο ποσό ιδιοσυναρτήσεων, λαμβάνεται δια της ελαχιστοποίησης:

$$\int d\sigma \left[f - \sum_{n=1}^N c_n f_n \right]^2 = \int d\sigma f^2 - 2 \sum_{n=1}^N c_n \int d\sigma f_n f + \sum_{n=1}^N c_n^2 \int d\sigma f_n^2, \quad (10.49)$$

η οποία θεωρείται σαν μια συνάρτηση των σταθερών c_n . Αυτό μας δίνει:

$$c_n = \frac{\int d\sigma f_n f}{\int d\sigma f_n^2}, \quad (10.50)$$

ή, πιο απλά:

$$c_n = \int d\sigma f_n f, \quad (10.51a)$$

εάν οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ομαλοποιημένες από την:

$$\int d\sigma f_n^2 = 1. \quad (10.51b)$$

[Σημείωση ότι χρησιμοποιούμε μια διαφορετική ομαλοποίηση απ' ό τι στην (6.57) και (6.59).] Ως εκ τούτου, οι συντελεστές επελέγησαν σύμφωνα με τον κανόνα του Φουριέ, και είναι ανεξάρτητες του N , τον αριθμός των όρων στην προσεγγιστική συνάρτηση. Για τις τιμές αυτές του c_n , έχουμε:

$$\int d\sigma \left[f - \sum_{n=1}^N c_n f_n \right]^2 = \int d\sigma f^2 - \sum_{n=1}^N c_n^2 \geq 0, \quad (10.52)$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^N c_n^2 \leq \int d\sigma f^2, \quad (10.53)$$

μια σχέση που είναι γνωστή ως η ανισότητα του Bessel. Δεδομένου ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι έγκυρο για κάθε N , συμπεράνουμε ότι η σύγκλιση του αθροίσματος των τετραγώνων των συντελεστών Fourier, που συνδέονται με την συνάρτηση, ολοκληρώνεται εις το τετράγωνο:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \int d\sigma f^2. \quad (10.54)$$

Για να αποδείξουμε την ιδιότητα της πληρότητας των ιδιοσυναρτήσεων, πρέπει να δείξουμε ότι η τελευταία σχέση είναι, στην πραγματικότητα, μια ισότητα. Για το σκοπό αυτό εξετάζουμε, με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, τη διαφορά μεταξύ μιας αυθαίρετης συνάρτησης f και της προσεγγιστικής συνάρτησης που είναι κατασκευασμένη από τις αρχικές ιδιοσυναρτήσεις N :

$$g_N = f - \sum_{n=1}^N c_n f_n, \quad (10.55)$$

η οποία έχει την ιδιότητα:

$$\int d\sigma f_n g_N = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (10.56)$$

σαν συνεπεία της (10.51a). Εφόσον το g_N είναι ορθογώνιο ως προς τις αρχικές ιδιοσυναρτήσεις N , η τιμή του γ^2 υπολογίζεται από την (10.18a), η οποία αναγκαστικά υπερβαίνει ή ισούται με γ_{N+1}^2 , σύμφωνα με την αρχή του Rayleigh:

$$\frac{\int d\sigma (\nabla g_N)^2}{\int d\sigma g_N^2} \geq \gamma_{N+1}^2. \quad (10.57)$$

Προκειμένου να πληρούνται οι όροι της αρχής του Rayleigh, η συνάρτηση f πρέπει να μηδενίζεται στο όριο, εάν χρησιμοποιούνται συναρτήσεις \mathbf{E} λειτουργίας. Δεν είναι αναγκαίος κανένας περιορισμός στην f εάν οι ιδιοσυναρτήσεις είναι συναρτήσεις \mathbf{H} λειτουργίας. Οπότε τώρα έχουμε:

$$\int d\sigma (\nabla g_N)^2 = \int d\sigma (\nabla f)^2 - 2 \sum_{n=1}^N c_n \int d\sigma \nabla f_n \cdot \nabla f + \sum_{n=1}^N \gamma_n^2 c_n^2, \quad (10.58)$$

για:

$$\int d\sigma \nabla f_n \cdot \nabla f_m = \gamma_n^2 \int d\sigma f_n f_m = \gamma_n^2 \delta_{nm}. \quad (10.59)$$

Επιπλέον:

$$\int_{\sigma} d\sigma \nabla f_n \cdot \nabla f = \oint_C ds f \frac{\partial}{\partial n} f_n + \gamma_n^2 \int_{\sigma} d\sigma f_n f = \gamma_n^2 c_n, \quad (10.60)$$

εφόσον το γραμμικό ολοκλήρωμα εξαφανίζεται τόσο για τις \mathbf{E} λειτουργίες, όπου $f = 0$ στην C , όσο και για τις \mathbf{H} λειτουργίες, όπου $\frac{\partial}{\partial n} f_n = 0$ στην C . Ως εκ τούτου, από την (10.58):

$$\int d\sigma (\nabla g_N)^2 = \int d\sigma (\nabla f)^2 - \sum_{n=1}^N \gamma_n^2 c_n^2 \geq 0, \quad (10.61)$$

η οποία που συνεπάγεται ότι:

$$\sum_{n=1}^N \gamma_n^2 c_n^2 \leq \int d\sigma (\nabla f)^2. \quad (10.62)$$

Επομένως, αν η κλίση της f ολοκληρώνεται στο τετράγωνο, το όριο του αθροίσματος που διαπιστώνεται στην (10.62) είναι συγκλίνουσα της:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 c_n^2 \leq \int d\sigma (\nabla f)^2. \quad (10.63)$$

Η εξίσωση (10.57), προκύπτει από την αρχή του Rayleigh, και μας πληροφορεί τώρα ότι:

$$\int d\sigma g_N^2 \leq \frac{\int d\sigma (\nabla g_N)^2}{\gamma_{N+1}^2} < \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\gamma_{N+1}^2}. \quad (10.64)$$

Μια ουσιώδης παρατήρηση που απαιτείται για την ολοκλήρωση της απόδειξης είναι ότι οι διαδοχικές ιδιοτιμές δεν έχουν ανώτατο όριο, αλλά αυξάνονται μονότονα χωρίς όριο:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \infty. \quad (10.65)$$

(Μη εμπεριστατωμένη απόδειξη αυτής της δήλωσης θα δοθεί, ωστόσο, δείτε το τέλος του παρόντος τμήματος.). Τα στοιχεία που προσφέρονται από τα συγκεκριμένα προβλήματα που είδαμε στα Κεφάλαια 7 και 8, είναι μία επαρκής διασφάλιση της γενικής εγκυρότητάς της. Σύμφωνα με αυτήν την ιδιότητα των ιδιοτιμών, η απόδειξη είναι πλήρης, βάσει της (10.64), η $\int d\sigma g_N^2$ έχει ένα ανώτατο όριο που προσεγγίζει το μηδέν καθώς το $N \rightarrow \infty$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int d\sigma g_N^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\sigma \left[f - \sum_{n=1}^N c_n f_n \right]^2 = 0. \quad (10.66)$$

Ως εκ τούτου, από την (10.52), έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int d\sigma f^2, \quad (10.67)$$

ένα αποτέλεσμα που είναι γνωστό ως το θεώρημα του Parseval, ή τη σχέση πληρότητας. Μία πολύτιμη συμβολική μορφή της σχέσης πληρότητας μπορεί να κατασκευαστεί με την αναδιατύπωση της (10.67), ως:

$$\begin{aligned} \int d\sigma f^2(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int d\sigma f_n(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) \right]^2 \\ &= \int d\sigma d\sigma' f(\mathbf{r}) \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\mathbf{r}) f_n(\mathbf{r}') \right] f(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (10.68)$$

απ' όπου:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\mathbf{r}) f_n(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (10.69)$$

δεδομένου ότι η (10.68) ισχύει για μια αυθαίρετη συνάρτηση, $f(\mathbf{r})$. Η κλειστή ιδιότητα (10.46) του συνόλου των ιδιοσυναρτήσεων $\{f_n\}$ προκύπτει αμέσως από την σχέση πληρότητας. Εάν μια συνάρτηση f είναι ορθογώνια σε κάθε ιδιοσυνάρτηση, όλοι οι συντελεστές Fourier μηδενίζονται και $\int d\sigma f^2 = 0$.

Περαιτέρω αποτελέσματα μπορούν να ληφθούν με τη χρήση της (10.18b), σε συνδυασμό με την αρχή του Rayleigh. Αν η f πληροί τις οριακές συνθήκες της \mathbf{E} ή της \mathbf{H} λειτουργίας, ενόψει των (10.59) και (10.60), παίρνουμε:

$$\frac{\int d\sigma (\nabla^2 g_N)^2}{\int d\sigma (\nabla g_N)^2} \geq \gamma_{N+1}^2. \quad (10.70)$$

Ο αριθμητής του αριστερού μέλους μπορεί να ξαναγραφτεί από την ακόλουθη αλληλουχία πράξεων:

$$\nabla^2 g_N = \nabla^2 f + \sum_{n=1}^N \gamma_n^2 c_n f_n, \quad (10.71a)$$

$$\begin{aligned}
\int d\sigma(\nabla^2 g_N)^2 &= \int d\sigma(\nabla^2 f)^2 + 2 \sum_{n=1}^N \gamma_n^2 c_n \int d\sigma f_n \nabla^2 f + \sum_{n=1}^N \gamma_n^4 c_n^2 \\
&= \int d\sigma(\nabla^2 f)^2 - \sum_{n=1}^N \gamma_n^4 c_n^2 \geq 0,
\end{aligned} \tag{10.71b}$$

επειδή:

$$\int d\sigma f_n \nabla^2 f = \int d\sigma f \nabla^2 f_n = -\gamma_n^2 c_n. \tag{10.72}$$

Επομένως:

$$\sum_{n=1}^N \gamma_n^4 c_n^2 \leq \int d\sigma(\nabla^2 f)^2, \tag{10.73}$$

η οποία συνεπάγεται τη σύγκλιση των αντίστοιχων άπειρων σειρών, αν f είναι τέτοια ώστε η $\nabla^2 f$ ολοκληρώνεται στο τετράγωνο:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^4 c_n^2 \leq \int d\sigma(\nabla^2 f)^2. \tag{10.74}$$

Από την (10.70), μπορούμε τώρα να γράψουμε ότι:

$$\int d\sigma(\nabla g_N)^2 \leq \frac{\int d\sigma(\nabla^2 g_N)^2}{\gamma_{N+1}^2} < \frac{\int d\sigma(\nabla^2 f)^2}{\gamma_{N+1}^2} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \tag{10.75}$$

πράγμα που αποδεικνύει από την (10.61) ότι η ανισότητα της (10.63) είναι στην πραγματικότητα μια ισότητα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 c_n^2 = \int d\sigma(\nabla f)^2. \tag{10.76}$$

Έχουμε δείξει ότι το σύνολο των συναρτήσεων που παρέχονται από την αρχή του Rayleigh είναι κλειστό και πλήρες, και επομένως είναι ταυτόσημο με το σύνολο των λύσεων της κυματικής εξίσωσης και της σχετικής οριακής συνθήκης. Αντιθέτως, εάν η πληρότητα των ιδιοσυναρτήσεων γίνει δεκτή, η αρχή του Rayleigh μπορεί να συναχθεί με απλό τρόπο. Σύμφωνα με την (10.76) και την (10.67), η έκφραση της ιδιότητας της πληρότητας του συστήματος των ιδιοσυναρτήσεων ερμηνεύεται ως:

$$\gamma^2 = \frac{\int d\sigma(\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 c_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2}. \tag{10.77}$$

Αν αναζητήσουμε τη συνάρτηση f που καθιστά το γ^2 σταθερό, θεωρώντας τους συντελεστές Fourier της f , ως αυθαίρετες σταθερές που υπόκεινται σε ανεξάρτητη μεταβολή, παίρνουμε:

$$(\gamma^2 - \gamma_n^2)c_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.78)$$

Ως εκ τούτου, οι πιθανές τιμές του γ^2 είναι ακριβώς το σύνολο των ιδιοτιμών, και για κάθε τέτοια τιμή, οι σταθερές c_n , που σχετίζονται με άλλες ιδιοτιμές, μηδενίζονται. Οι συναρτήσεις που έχουν σταθερή ιδιότητα είναι οι ιδιοσυναρτήσεις, και οι σταθερές τιμές του γ^2 είναι οι σχετικές ιδιοτιμές. Για να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος της αρχής του Rayleigh, γράφουμε:

$$\gamma^2 = \gamma_1^2 + \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (\gamma_n^2 - \gamma_1^2) c_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2} \geq \gamma_1^2, \quad (10.79)$$

δηλαδή, η τιμή του γ^2 που υπολογίζεται από μια αυθαίρετη συνάρτηση, δεν μπορεί ποτέ να είναι μικρότερη από την ελάχιστη ιδιοτιμή. Το σύμβολο της ισότητας ισχύει μόνο αν $c_2 = c_3 = \dots = 0$. Η συνάρτηση που κάνει την (10.79) ένα απόλυτο ελάχιστο είναι η ιδιοσυνάρτηση που συνδέεται με τη μικρότερη ιδιοτιμή. Επιπλέον, εάν η f περιορίζεται από:

$$c_n = \int d\sigma f_n f = 0, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (10.80)$$

συνάγεται ότι:

$$\gamma^2 = \frac{\sum_{n=N}^{\infty} \gamma_n^2 c_n^2}{\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2} = \gamma_N^2 + \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} (\gamma_n^2 - \gamma_N^2) c_n^2}{\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2} \geq \gamma_N^2. \quad (10.81)$$

Το ελάχιστο, $\gamma = \gamma_N$, επιτυγχάνεται με την $f = f_N$.

Αυτή η διατύπωση της αρχής του Rayleigh δίνει τη δυνατότητα να προτείνουμε μια απόδειξη της δήλωσης ότι δεν υφίστανται μεγαλύτερη ιδιοτιμή, της (10.65). Για το αν ένα τέτοιο ανώτατο υπήρχε:

$$\gamma_n^2 < \gamma_{\infty}^2 < \infty, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10.82)$$

θα προκύψει από:

$$\gamma^2 = \gamma_{\infty}^2 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{\infty}^2 - \gamma_n^2) c_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2} \leq \gamma_{\infty}^2, \quad (10.83)$$

δηλαδή, ότι η τιμή του γ^2 που υπολογίζεται από την (10.77), με μια αυθαίρετη συνάρτηση f , δεν θα μπορούσε να υπερβεί το πεπερασμένο ανώτατο όριο γ_{∞}^2 . Δεδομένου, ωστόσο, ότι είναι δυνατόν να παρουσιάσουμε μία αποδεκτή συνάρτηση που κάνει το γ^2 αυθαίρετα μεγάλο, η υπόθεση ενός πεπερασμένου ανώτατου ορίου διαψεύδεται. Για να παρουσιάσουμε μια τέτοια συνάρτηση, εντοπίζουμε την αρχή των συντεταγμένων στο εσωτερικό της περιοχής που σχηματίζεται από το όριο του οδηγού και

επιλέγουμε μια απόσταση a η οποία είναι μικρότερη από την ελάχιστη απόσταση από την πηγή στο όριο. Μια αποδεκτή συνάρτηση \mathbf{E} ή \mathbf{H} λειτουργίας, ορίζεται από:

$$f = \begin{cases} a^2 - r^2, & r \leq a, \\ 0, & r \geq a, \end{cases} \quad (10.84)$$

δεδομένου ότι είναι συνεχής, έχει τμηματικά συνεχείς παραγώγους, και ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες. Η τιμή του γ^2 λαμβάνεται:

$$\gamma^2 = \frac{4 \int_0^a 2\pi r dr r^2}{\int_0^a 2\pi r dr (a^2 - r^2)^2} = \frac{6}{a^2}, \quad (10.85)$$

η οποία τείνει προς το άπειρο καθώς το a μειώνεται στο μηδέν.

10.4 Μέθοδος Διακύμανσης - Επανάληψης

Τώρα θα συζητήσουμε μια μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων, που θα χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με την αρχή του Rayleigh, η οποία παράγει σταθερά βελτιωμένες προσεγγίσεις στην κύρια λειτουργία κυματάριθμου αποκοπής και στην συνάρτηση λειτουργίας, προσεγγίσεις που τελικά συγκλίνουν στις αληθείς τιμές. (Μια συζήτηση αυτής της μεθόδου στην ηλεκτροστατική δίδεται στο [9].) Θα ήταν βολικό σε ό, τι ακολουθεί να χρησιμοποιούσαμε ένα πιο συμπαγές σύμβολο για την ιδιοτιμή γ^2 . Θα το συμβολίζουμε με λ , χωρίς να υπάρχει σύγχυση με το σύμβολο του μήκους κύματος. Για να λάβουμε μια προσέγγιση της ιδιοτιμής λ_1 στην κύρια λειτουργία, επιλέγουμε μία συνάρτηση $F_1^{(0)}$ που ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στην περίπτωση της \mathbf{E} λειτουργίας, και υπόκειται μόνο στην (10.41), εφόσον οι \mathbf{H} λειτουργίες είναι υπό συζήτηση. Σύμφωνα με την αρχή του Rayleigh:

$$\lambda_1^{(0)} = \frac{\int d\sigma (\nabla F_1^{(0)})^2}{\int d\sigma (F_1^{(0)})^2} > \lambda_1, \quad (10.86)$$

και το $\lambda_1^{(0)}$ υποδηλώνει την μηδενική προσέγγιση στην ιδιοτιμή λ_1 , που προέρχεται από την $F_1^{(0)}$, την μηδενική προσέγγιση στην κύρια συνάρτηση λειτουργίας f_1 . Το σημείο της ισότητας έχει παραλειφθεί από την (10.86) με την παραδοχή ότι πιθανότητα της συλλογής της σωστής κύριας συνάρτησης λειτουργίας μέσα από έλεγχο είναι αμελητέα. Μια πρώτη προσέγγιση της f_1 ορίζεται πλέον από:

$$\nabla^2 F_1^{(1)} + F_1^{(0)} = 0. \quad (10.87)$$

Θα πρέπει να υποθεθεί ότι αυτή η εξίσωση μπορεί να επιλυθεί για την $F_1^{(1)}$ που υπόκεινται είτε στις οριακές συνθήκες της \mathbf{E} είτε της \mathbf{H} λειτουργίας με το πρόσθετο περιορισμό της (10.41) για τις \mathbf{H} λειτουργίες. Μια πρώτη προσέγγιση στο λ_1 υπολογίζεται από την $F_1^{(1)}$ με την αρχή του Rayleigh:

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{\int d\sigma \left(\nabla F_1^{(1)} \right)^2}{\int d\sigma \left(F_1^{(1)} \right)^2} > \lambda_1. \quad (10.88)$$

Αυτή η διεργασία συνεχίζεται με τον προφανή τρόπο: η $n^{\text{οστη}}$ προσεγγιστική συνάρτηση $F_1^{(n)}$ προέρχεται από την $F_1^{(n-1)}$ ως εξής:

$$\nabla^2 F_1^{(n)} + F_1^{(n-1)} = 0, \quad (10.89)$$

υπό τις διάφορες συνθήκες που ήδη αναφέρθηκαν, και η $n^{\text{οστη}}$ προσέγγιση του λ_1 υπολογίζεται από την:

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{\int d\sigma \left(\nabla F_1^{(n)} \right)^2}{\int d\sigma \left(F_1^{(n)} \right)^2} > \lambda_1. \quad (10.90)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} d\sigma \left(\nabla F_1^{(n)} \right)^2 &= \oint_C ds F_1^{(n)} \frac{\partial}{\partial n} F_1^{(n)} - \int_{\sigma} d\sigma F_1^{(n)} \nabla^2 F_1^{(n)} \\ &= \int_{\sigma} d\sigma F_1^{(n)} F_1^{(n-1)}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (10.91)$$

δεδομένου ότι οι συναρτήσεις που εισάγουν το γραμμικό ολοκλήρωμα, είναι κατασκευασμένες ώστε να ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες της **E** ή της **H** λειτουργίας. Ως εκ τούτου:

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{\int d\sigma F_1^{(n)} F_1^{(n-1)}}{\int d\sigma \left(F_1^{(n)} \right)^2} > \lambda_1, \quad n \geq 1. \quad (10.92)$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι οι διαδοχικές προσεγγίσεις στο λ_1 μειώνονται σταθερά. Εάν βάλουμε την $f = F_1^{(n+1)}$ στην σχέση (10.27), παίρνουμε:

$$\frac{\int d\sigma \left(\nabla F_1^{(n)} \right)^2}{\int d\sigma \left(F_1^{(n)} \right)^2} \geq \frac{\int d\sigma \left(F_1^{(n)} \right)^2}{\int d\sigma \left(\nabla F_1^{(n+1)} \right)^2} \geq \frac{\int d\sigma \left(\nabla F_1^{(n+1)} \right)^2}{\int d\sigma \left(F_1^{(n+1)} \right)^2}, \quad (10.93)$$

ή:

$$\lambda_1^{(n)} \geq \lambda_1^{(n+1/2)} \geq \lambda_1^{(n+1)}, \quad (10.94a)$$

όπου η:

$$\lambda_1^{(n+1/2)} = \frac{\int d\sigma (F_1^{(n)})^2}{\int d\sigma (\nabla F_1^{(n+1)})^2} = \frac{\int d\sigma (F_1^{(n)})^2}{\int d\sigma F_1^{(n+1)} F_1^{(n)}}, \quad n \geq 0, \quad (10.94b)$$

φυσικά ονομάζεται η $n + \frac{1}{2}$ προσέγγιση στο λ_1 . Τώρα, δεδομένου ότι οι διαδοχικές προσεγγίσεις στο λ_1 μειώνονται μονότονα, αλλά ποτέ δεν μπορεί να είναι μικρότερες του λ_1 , η ακολουθία $\{\lambda_1^{(n)}\}$ πρέπει να προσεγγίζει ένα όριο. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτό το όριο δεν είναι άλλο από το λ_1 , εκτός εάν η $F_1^{(0)}$, η παράγωγη συνάρτηση της ακολουθίας των προσεγγιστικών συναρτήσεων, έχει δυστυχώς επιλεγθεί ορθογώνια προς την κύρια συνάρτηση λειτουργίας f_1 . Σε αυτήν την περίπτωση, η αλληλουχία των προσεγγίσεων των ιδιοτιμών θα πλησιάσει τη μικρότερη ιδιοτιμή που σχετίζεται με τις εν λόγω ιδιοσυναρτήσεις στις οποίες η $F_1^{(0)}$ δεν είναι ορθογώνια.

Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, κατασκευάζουμε τη συνάρτηση:

$$F_1(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n F_1^{(n+1)}(\mathbf{r}), \quad (10.95)$$

όπου το α είναι μία αυθαίρετη παράμετρος. Προκειμένου να διερευνηθεί το πεδίο σύγκλισης της (10.95) ως συνάρτηση του α , χρειαζόμαστε κάποιες πληροφορίες ως προς το μέγεθος του $F_1^{(n+1)}(\mathbf{r})$. Στο πρόβλημα 10.8 θα δειχθεί ότι:

$$[F_1^{(n+1)}(\mathbf{r})]^2 < C(\mathbf{r}) \int d\sigma (F_1^{(n)})^2, \quad (10.96)$$

όπου η $C(\mathbf{r})$ είναι ανεξάρτητη του n . Ως εκ τούτου, η σειρά είναι απολύτως και ομοιόμορφα συγκλίνουσα, όποτε η:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[\int d\sigma (F_1^{(n)})^2 \right]^{1/2}, \quad (10.97)$$

συγκλίνει. Έτσι ο περιορισμός που επιβάλλεται στο α είναι:

$$\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\int d\sigma (F_1^{(n+1)})^2}{\int d\sigma (F_1^{(n)})^2} \right]^{1/2} < 1. \quad (10.98)$$

Ωστόσο:

$$\frac{\int d\sigma \left(F_1^{(n)}\right)^2}{\int d\sigma \left(F_1^{(n+1)}\right)^2} = \lambda_1^{(n+1/2)} \lambda_1^{(n+1)}, \quad (10.99)$$

οπότε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int d\sigma \left(F_1^{(n)}\right)^2}{\int d\sigma \left(F_1^{(n+1)}\right)^2} = \mu^2, \quad (10.100)$$

όπου μ είναι το όριο που προσεγγίζεται από την αλληλουχία των προσεγγίσεων των ιδιοτιμών. Ως εκ τούτου, η (10.95) στην πραγματικότητα προσδιορίζει μια συνάρτηση $f_1(\mathbf{r})$ για $\alpha < \mu$. Η συνάρτηση $F_1(\mathbf{r})$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\nabla^2 F_1 = - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n F_1^{(n)} = -\alpha F_1 - F_1^{(0)}. \quad (10.101)$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή την εξίσωση με την ιδιοσυνάρτηση f_1 και ολοκληρώνοντας την πάνω από την διατομή του οδηγού, παίρνουμε:

$$\int d\sigma F_1^{(0)} f_1 = - \int d\sigma F_1 (\nabla^2 + \alpha) f_1 = -(\alpha - \lambda_1) \int d\sigma F_1 f_1. \quad (10.102)$$

Τώρα, μπορεί να αποδειχθεί ότι το μ στην πραγματικότητα ισοδυναμεί με το λ_1 , υπό την προϋπόθεση ότι η παράγωγη συνάρτηση $F_1^{(0)}$ δεν είναι ορθογώνια προς την ιδιοσυνάρτηση f_1 , μια προϋπόθεση που την συναντάμε εύκολα στην πράξη. Αν υποθεθεί ότι η ακολουθία $\{\lambda_1^{(n)}\}$ πλησιάζει ένα όριο που υπερβαίνει το λ_1 , $\mu > \lambda_1$, τότε η σειρά της (10.95) συγκλίνει για $\alpha = \lambda_1$ και η (10.102) παρέχει την πληροφορία ότι:

$$\int d\sigma F_1^{(0)} f_1 = 0, \quad (10.103)$$

η οποία έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η $F_1^{(0)}$ δεν είναι ορθογώνια προς την f_1 . επομένως, $\mu = \lambda_1$. Αν η $F_1^{(0)}$ είναι ορθογώνια στην f_1 , αλλά όχι στην f_2 , η αλληλουχία των ιδιοτιμών θα συγκλίνει στο λ_2 , και γενικότερα, θα συγκλίνει προς τη μικρότερη ιδιοτιμή που δεν εξαιρείται από τις ιδιότητες ορθογωνιότητας της $F_1^{(0)}$.

Έχουμε δείξει ότι η μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων παράγει μια ακολουθία προσεγγίσιμων ιδιοτιμών οι οποίες τελικά συγκλίνουν στο λ_1 . Το σφάλμα σε κάθε φάση είναι θετικό, δηλαδή, κάθε μέλος του συνόλου $\{\lambda_1^{(n)}\}$ αναγκαστικά υπερβαίνει το λ_1 , και ως εκ τούτου παρέχει μια σταθερή μείωση του ανώτατου ορίου για το λ_1 . Για την πρακτική αξιοποίηση της μεθόδου, είναι επιθυμητό να παρέχουμε μια εκτίμηση του ρυθμού σύγκλισης, καθώς και του μέγιστου σφάλματος σε κάθε φάση της διαδικασίας.

Θα δείξουμε ότι η απάντηση και στα δύο αυτά προβλήματα περιλαμβάνει την τιμή του λ_2 , τη δεύτερη ιδιοτιμή. Για το σκοπό αυτό, αναζητούμε τη συνάρτηση f που ελαχιστοποιεί την:

$$\int d\sigma (\nabla^2 f + \lambda_1 f)(\nabla^2 f + \lambda_2 f), \quad (10.104)$$

με την υπόθεση ότι η f ικανοποιεί είτε τις οριακές συνθήκες της \mathbf{E} είτε της \mathbf{H} λειτουργίας, και ότι, ως συνήθως, η f περιορίζεται από την (10.41) στην περίπτωση που οι \mathbf{H} λειτουργίες βρίσκονται υπό συζήτηση. Σχετικά με την εκτέλεση της διακύμανσης, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η ελαχιστοποιημένη συνάρτηση ικανοποιεί την:

$$(\nabla^2 + \lambda_1)(\nabla^2 + \lambda_2)f = 0, \quad (10.105)$$

και μια πρόσθετη οριακή συνθήκη, η οποία προϋποθέτει ότι η $\nabla^2 f$ ικανοποιεί την ίδια οριακή συνθήκη όπως η f . Η ελαχιστοποιημένη συνάρτηση είναι προφανώς ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων ιδιοσυναρτήσεων f_1 και f_2 :

$$f = \alpha f_1 + \beta f_2. \quad (10.106)$$

Η τιμή που υπολογίστηκε για την (10.104) με αυτή την ελαχιστοποιημένη συνάρτηση, είναι μηδέν, πράγμα το οποίο μπορεί να επιβεβαιωθεί με άμεσο υπολογισμό ή με την επίκληση ενός θεωρήματος που αναφέρθηκε σχετικά με τις (10.16a) και (10.16b): μια ομοιογενής έκφραση στην f λαμβάνει την τιμή μηδέν για τις συναρτήσεις που το καθιστούν σταθερό. Έτσι μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι:

$$\int d\sigma (\nabla^2 f + \lambda_1 f)(\nabla^2 f + \lambda_1 f) \geq 0, \quad (10.107)$$

και το σύμβολο της ισότητας διατηρείται μόνο αν η f είναι της μορφής (10.106). Μια εναλλακτική απόδειξη που χρησιμοποιεί τη σχέση πληρότητας εφαρμόζεται για την επέκταση της f και της $\nabla^2 f$ όσον αφορά τις ιδιοσυναρτήσεις f_n . Προχωράμε τυπικά αντικαθιστώντας τις επεκτάσεις:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n, \quad \nabla^2 f = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n f_n, \quad (10.108)$$

στην (10.104), η οποία μας δίνει:

$$\int d\sigma (\nabla^2 f + \lambda_1 f)(\nabla^2 f + \lambda_2 f) = \sum_{n=3}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) c_n^2 \geq 0. \quad (10.109)$$

Το σύμβολο της ισότητας λαμβάνεται μόνο αν $c_3 = c_4 = \dots = 0$, το οποίο συνεπάγεται, όπως και πριν, ότι η ελαχιστοποιημένη συνάρτηση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των f_1 και f_2 . Ένα παρόμοιο θεώρημα δηλώνει ότι:

$$\int d\sigma \nabla(\nabla^2 f + \lambda_1 f) \cdot \nabla(\nabla^2 f + \lambda_2 f) \geq 0, \quad (10.110)$$

υπό την προϋπόθεση ότι, για τις **H** λειτουργίες, $\frac{\partial}{\partial n} f = 0$ στην C , και τις **E** λειτουργίες, $f = \nabla^2 f = 0$ στην C . Η ελαχιστοποιημένη συνάρτηση ικανοποιεί την:

$$\nabla(\nabla^2 + \lambda_1)(\nabla^2 + \lambda_2)f = 0, \quad (10.111)$$

και τις πρόσθετες οριακές συνθήκες: για τις **H** λειτουργίες, $\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 f = 0$ στην C , και για τις **E** λειτουργίες, $\nabla^2 \nabla^2 f = 0$ στην C . Όπως και στο προηγούμενο θεώρημα, το ελάχιστο επιτυγχάνεται όταν η f είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των f_1 και f_2 , εκτός από μια ασήμαντη πρόσθετη σταθερά (Πρόβλημα 10.9).

Κατά συνέπεια των οριακών συνθηκών που επιβάλλονται στην f , οι δύο ανισότητες των (10.107) και (10.110), μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\int d\sigma (\nabla^2 f)^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \int d\sigma (\nabla f)^2 + \lambda_1 \lambda_2 \int d\sigma f^2 \geq 0, \quad (10.112a)$$

$$\int d\sigma (\nabla \nabla^2 f)^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \int d\sigma (\nabla^2 f)^2 + \lambda_1 \lambda_2 \int d\sigma (\nabla f)^2 \geq 0, \quad (10.112b)$$

ή:

$$\left[\int d\sigma (\nabla^2 f)^2 - \lambda_1 \int d\sigma (\nabla f)^2 \right] - \lambda_2 \left[\int d\sigma (\nabla f)^2 - \lambda_1 \int d\sigma f^2 \right] \geq 0, \quad (10.113a)$$

$$\left[\int d\sigma (\nabla \nabla^2 f)^2 - \lambda_1 \int d\sigma (\nabla^2 f)^2 \right] - \lambda_2 \left[\int d\sigma (\nabla^2 f)^2 - \lambda_1 \int d\sigma (\nabla f)^2 \right] \geq 0. \quad (10.113b)$$

Το ότι οι τέσσερις ποσότητες που περιλαμβάνονται σε αγκύλες δεν είναι αρνητικές είναι συνέπεια της (10.27) και της αρχής του Rayleigh. Ως εκ τούτου οι δύο ανισότητες συνεπάγονται ότι:

$$\lambda_2 \leq \frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2 - \lambda_1 \int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2 - \lambda_1 \int d\sigma f^2} = \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2 \frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2} - \lambda_1}{\frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} - \lambda_1}, \quad (10.114a)$$

$$\lambda_2 \leq \frac{\int d\sigma (\nabla \nabla^2 f)^2 - \lambda_1 \int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2 - \lambda_1 \int d\sigma (\nabla f)^2} = \frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2 \frac{\int d\sigma (\nabla \nabla^2 f)^2}{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2} - \lambda_1}{\frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2} - \lambda_1}. \quad (10.114b)$$

Έτσι έχουμε λάβει δύο εναλλακτικές μορφές της αρχής του Rayleigh που εφαρμόζονται στη δεύτερη ιδιοτιμή, οι οποίες έχουν το χαρακτηριστικό ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί, εκτός από τις οριακές συνθήκες, που επιβάλλονται στην συνάρτηση f . Αυτές οι σχέσεις μας παρέχουν τις πληροφορίες του ρυθμού σύγκλισης που χρειαζόμαστε. Με βάση την αξιωματική μέθοδο κατασκευής, οι συναρτήσεις $f = F_1^{(n+1)}$, $n \geq 0$, ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες που απαιτούνται για την εφαρμογή των (10.114a) και (10.114b). Αυτή η δήλωση ισχύει για τα δύο είδη λειτουργιών. Μια ματιά στους ορισμούς των προσεγγίσεων της ιδιοτιμής $\lambda_1^{(n)}$ της (10.90) και $\lambda_1^{(n+1/2)}$ της (10.94b), μας δείχνει ότι, με αυτήν την επιλογή της f , οι ανισότητες (10.114a) και (10.114b) γίνονται:

$$\lambda_2 \leq \lambda_1^{(n+1)} \frac{\lambda_1^{(n+1/2)} - \lambda_1}{\lambda_1^{(n+1)} - \lambda_1}, \quad (10.115a)$$

$$\lambda_2 \leq \lambda_1^{(n+1/2)} \frac{\lambda_1^{(n)} - \lambda_1}{\lambda_1^{(n+1/2)} - \lambda_1}. \quad (10.115b)$$

Παρατηρείται ότι η (10.115a) μπορεί τυπικά να ληφθεί από την (10.115b) απλά αντικαθιστώντας το n με $n + 1/2$. Οι ανισότητες αυτές μπορούν να συνδυαστούν με πολλαπλασιασμό, εξάγοντας:

$$\frac{\lambda_1^{(n)} - \lambda_1}{\lambda_1^{(n+1)} - \lambda_1} \geq \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^{(n+1/2)} \lambda_1^{(n+1)}}, \quad (10.116)$$

το οποίο δηλώνει ότι το σφάλμα της $n^{\text{οστής}}$ προσέγγισης στο λ_1 , διαιρούμενο από το σφάλμα της $(n+1)$ προσέγγισης, υπερβαίνει έναν αριθμό ο οποίος προσεγγίζει την $(\lambda_2/\lambda_1)^2 = (\gamma_2/\gamma_1)^4$, καθώς οι προσεγγίσεις προχωρούν. Έτσι, η ταχύτητα της σύγκλισης της μεθόδου της διαδοχικής προσέγγισης στην ουσία καθορίζεται από το μέγεθος της δεύτερης ιδιοτιμής σε σχέση με την πρώτη ιδιοτιμή, όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος αυτό τόσο πιο γρήγορη είναι η σύγκλιση. Πράγματι, ο αριθμός του $(\gamma_2/\gamma_1)^2$ είναι συνήθως αρκετά μεγάλος, για παράδειγμα, έχει τις τιμές 27.8 και 70.3 για τις **E** και **H** λειτουργίες ενός κυκλικού οδηγού, αντίστοιχα.

Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε σε αυτή τη σχέση ότι η δεύτερη ιδιοτιμή που αναφέρεται στο κριτήριο της σύγκλισης μπορεί να υπερβαίνει την πραγματική δεύτερη ιδιοτιμή του οδηγού. Η κατάσταση αυτή θα προκύπτει κάθε φορά που ο οδηγός έχει ειδικές ιδιότητες συμμετρίας που επιτρέπουν την διάσπαση των ιδιοσυναρτήσεων σε διάφορες τάξεις συμμετρίας. Αν η παράγωγη συνάρτηση $F_1^{(0)}$ κατέχει τα κατάλληλα χαρακτηριστικά συμμετρίας της ιδιοσυνάρτησης f_1 , θα τα έχουν και οι διαδοχικές προσεγγίσεις $F_1^{(n)}$. Κάθε μέλος αυτής της ακολουθίας θα είναι αυτομάτως ορθογώνιο προς τις ιδιοσυναρτήσεις άλλων τάξεων συμμετρίας, και η σχετική δεύτερη λειτουργία είναι αυτή που έχει την ίδια συμμετρία όπως η f_1 . Επιπλέον, ως συνεπεία της αυτόματης ορθογωνιότητας μεταξύ των μελών των διαφορετικών τάξεων συμμετρίας, οι μέθοδοι μας είναι εφαρμόσιμες, ανεξάρτητα από την κύρια λειτουργία του κάθε τύπου συμμετρίας. Για να τονίσουμε αυτές τις παρατηρήσεις, μπορούμε να εξετάσουμε έναν οδηγό με κυκλική συμμετρία. Κάθε συνάρτηση λειτουργίας έχει τη γωνιακή εξάρτηση $\frac{\sin}{\cos} m\phi$, και οι συναρτήσεις λειτουργίας που συνδέονται με διαφορετικές τιμές του m είναι αυτομάτως ορθογώνιες, ασχέτως από την εξάρτηση του r των συναρτήσεων λειτουργίας. Έτσι, οι λειτουργίες που σχετίζονται με κάθε τιμή του m σχηματίζουν μια τάξη συμμετρίας, και η αρχή του Rayleigh είναι εφαρμόσιμη σε κάθε τάξη ξεχωριστά. Ως εκ τούτου, στην εφαρμογή της αρχής του Rayleigh για την

κατασκευή της κύριας \mathbf{E} λειτουργίας ενός κυκλικού οδηγού, \mathbf{E}_{01} , η δεύτερη λειτουργία που καθορίζει την ταχύτητα της σύγκλισης δεν είναι η δεύτερος \mathbf{E} λειτουργία του οδηγού, \mathbf{E}_{11} , αλλά \mathbf{E}_{02} , η δεύτερη λειτουργία με την ίδια συμμετρία όπως η \mathbf{E}_{01} . Ομοίως, στην κατασκευή της κύριας \mathbf{H} λειτουργίας, \mathbf{H}_{11} , η σχετική δεύτερη \mathbf{H} λειτουργία είναι η \mathbf{H}_{12} , όχι η \mathbf{H}_{21} . Με αυτό το σκεπτικό οι αριθμοί που αναφέρονται στην προηγούμενη παράγραφο έχουν παραχθεί.

10.4.1 Εκτιμήσεις Σφάλματος

Οι ανισότητες (10.115a) και (10.115b) όχι μόνο παρέχουν ένα κριτήριο για το ρυθμό σύγκλισης των διαδοχικών μεθόδων προσέγγισης, αλλά και την ύπαρξη μιας εκτίμησης σφάλματος για κάθε στάδιο της διαδικασίας, εφόσον η δεύτερη ιδιοτιμή, ή ένα αρκετά ακριβές κατώτερο όριο σε αυτή, είναι γνωστό. Για να αποδειχθεί αυτό, παρατηρούμε ότι οι ανισότητες μπορούν να ξαναγραφτούν με τη μορφή:

$$(\lambda_2 - \lambda_1^{(n+1/2)}) \lambda_1^{(n+1)} \leq \lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1^{(n+1)}), \quad (10.117a)$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1^{(n)}) \lambda_1^{(n+1/2)} \leq \lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1^{(n+1/2)}). \quad (10.117b)$$

Τώρα, σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας, οι προσεγγίσεις της ιδιοτιμής γίνονται μικρότερες από το λ_2 , και όλες οι ποσότητες στις παρενθέσεις είναι θετικές. Αυτό θα είναι κανονικά αληθές ακόμα και για την μηδενική προσέγγιση. Για να ελέγξουμε την εγκυρότητα αυτής της υπόθεσης, μια εκτίμηση του λ_2 , υπό τη μορφή κατώτερου ορίου, πρέπει να είναι διαθέσιμη. Υποθέτοντας ότι το γεγονός αυτό εξασφαλίζεται, συμπεραίνουμε ότι:

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^{(n+1)} \frac{\lambda_2 - \lambda_1^{(n+1/2)}}{\lambda_2 - \lambda_1^{(n+1)}} = \lambda_1^{(n+1)} - \frac{\lambda_1^{(n+1/2)} - \lambda_1^{(n+1)}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1^{(n+1)}} - 1}, \quad (10.118a)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^{(n+1/2)} \frac{\lambda_2 - \lambda_1^{(n)}}{\lambda_2 - \lambda_1^{(n+1/2)}} = \lambda_1^{(n+1/2)} - \frac{\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n+1/2)}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1^{(n+1/2)}} - 1}, \quad (10.118b)$$

οι οποίες αποτελούν χαμηλότερα όρια για το λ_1 . Επομένως μπορούμε να δηλώσουμε ότι, στο στάδιο $n+1$ της διαδικασίας προσέγγισης, η ιδιοτιμή λ_1 εντοπίζεται εντός των ορίων:

$$\lambda_1^{(n+1)} \geq \lambda_1 \geq \lambda_1^{(n+1)} - \frac{\lambda_1^{(n+1/2)} - \lambda_1^{(n+1)}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1^{(n+1)}} - 1}, \quad (10.119)$$

το οποίο τείνει σε σύμπτωση, καθώς αυξάνεται το n . Η παρόμοια προσέγγιση για το $n + \frac{1}{2}$ στάδιο λαμβάνεται με την αντικατάσταση του $n + 1$, με $n + \frac{1}{2}$. Η έννοια της ανισότητας της (10.118b) δεν επηρεάζεται αν το λ_2 αντικαθίσταται από μια μικρότερη ποσότητα, υπό την προϋπόθεση ότι το κατώτατο όριο στο λ_2 υπερβαίνει το $\lambda_1^{(n+1/2)}$.

Ένα στενά συνδεδεμένο θεώρημα, το οποίο είναι κάπως ευρύτερο σε έκταση, προκύπτει από μια εκτίμηση της ποσότητας:

$$\mu^2 = \frac{\int d\sigma (\nabla^2 f + \lambda f)^2}{\int d\sigma f^2}, \quad (10.120)$$

όπου το λ είναι μια αυθαίρετη παράμετρος. Η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το μ^2 , εντός της τάξης των συναρτήσεων που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες της **E** ή της **H** λειτουργίας, είναι τέτοια ώστε:

$$(\nabla^2 + \lambda)^2 f = \mu^2 f, \quad (10.121)$$

όπου η $\nabla^2 f$ ικανοποιεί τις ίδιες οριακές συνθήκες όπως η f . Επαναδιατυπώνοντας την (10.121) ως:

$$(\nabla^2 + \lambda + \mu)(\nabla^2 + \lambda - \mu)f = 0, \quad (10.122)$$

είναι προφανές ότι η ελαχιστοποιημένη συνάρτηση πρόκειται να βρεθεί εντός των ιδιοσυναρτήσεων $\{f_n\}$. Τότε, δεδομένου ότι οι σταθερές τιμές του μ^2 είναι:

$$\mu^2 = (\lambda_n - \lambda)^2, \quad (10.123)$$

η (10.120) ελαχιστοποιείται από αυτήν την ιδιοσυνάρτηση f_n , της οποίας η ιδιοτιμή είναι πλησιέστερη στο λ , υπό την άποψη ότι η $|\lambda_n - \lambda|$ είναι μικρότερη. Κατανοώντας ότι το λ_n έχει αυτή τη σπουδαιότητα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι:

$$\frac{\int d\sigma (\nabla^2 f + \lambda f)^2}{\int d\sigma f^2} \geq (\lambda_n - \lambda)^2, \quad (10.124)$$

ή ότι:

$$\lambda_n \leq \lambda + \left[\frac{\int d\sigma (\nabla^2 f + \lambda f)^2}{\int d\sigma f^2} \right]^{1/2}, \quad \lambda_n \geq \lambda, \quad (10.125a)$$

$$\lambda_n \geq \lambda - \left[\frac{\int d\sigma (\nabla^2 f + \lambda f)^2}{\int d\sigma f^2} \right]^{1/2}, \quad \lambda_n \leq \lambda, \quad (10.125b)$$

Επομένως, εάν μια αυθαίρετη επιλογή του λ είναι μικρότερη από την πλησιέστερη ιδιοτιμή, η (10.125a) προσφέρει ένα ανώτατο όριο για την εν λόγω ιδιοτιμή. Αντιθέτως, εάν το λ έχει επιλεγεί μεγαλύτερο από την πλησιέστερη ιδιοτιμή, η (10.125b) αποτελεί ένα κατώτερο όριο για την εν λόγω ιδιοτιμή. Η δυσκολία στην εφαρμογή αυτού του θεωρήματος βρίσκεται, φυσικά, στην προσπάθεια του καθορισμού ποιός από αυτές τις περιπτώσεις υλοποιείται, απουσία οποιασδήποτε γνώσης των ιδιοτιμών. Δεν υπάρχει δυσκολία, ωστόσο, καθορίζοντας ένα ανώτατο όριο για την πρώτη ιδιοτιμή, στην περίπτωση που το λ δεν είναι

θετικό, η προϋπόθεση $\lambda < \lambda_1$ είναι εξασφαλισμένη, δεδομένου ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές. Ως εκ τούτου, για $\lambda \leq 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &< \lambda + \left[\lambda^2 - 2\lambda \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} + \frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma f^2} \right]^{1/2} \\ &= \lambda + \left\{ \left[\frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} - \lambda \right]^2 + \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} \left[\frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2} - \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.126)$$

Τώρα, το δεξί μέλος της (10.126) είναι μια μονοτονικά αύξουσα συνάρτηση του λ , δεδομένου ότι η παράγωγός της σε σχέση με το λ :

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} - \lambda \right) \left\{ \left[\frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} - \lambda \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} \left[\frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2} - \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} \right] \right\}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (10.127)$$

είναι κατά κύριο λόγο θετική, λόγω της (10.27). Ως εκ τούτου, το ανώτατο όριο μειώνεται σταθερά καθώς το λ πλησιάζει στο $-\infty$, και το αυστηρότερο ανώτατο όριο που συνάγεται από την (10.126) είναι η γνωστή έκφραση της αρχής του Rayleigh:

$$\lambda_1 < \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2}. \quad (10.128)$$

Αν μια τιμή του λ μπορεί να επιλεγεί στο εύρος:

$$\lambda_1 \leq \lambda \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad (10.129)$$

η (10.125b) προσφέρει ένα χαμηλότερο όριο για την πρώτη ιδιοτιμή:

$$\lambda_1 > \lambda - \left[\lambda^2 - 2\lambda \frac{\int d\sigma (\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2} + \frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma f^2} \right]^{1/2}. \quad (10.130)$$

Μπορεί να αποδειχθεί, όπως στην προηγούμενη παράγραφο, ότι το δεξί μέλος της (10.130) είναι μια μονοτονικά αύξουσα συνάρτηση του λ . Έτσι, το πιο εύστοχο κατώτερο όριο λαμβάνεται από τη μεγαλύτερη τιμή του λ που είναι συμβατή με την (10.129). Δηλαδή, θα πρέπει να θέσουμε:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (10.131)$$

όπου το $\underline{\lambda}_1$ και το $\underline{\lambda}_2$ είναι γνωστό ότι είναι χαμηλότερα όρια στις πρώτες και στις δεύτερες ιδιοτιμές, αντιστοίχως. Από μόνη της, τώρα, η (10.130) παρέχει την καλύτερη διαθέσιμη τιμή για το $\underline{\lambda}_1$, και συνδυάζοντας την τελευταία εξίσωση με την (10.131), παίρνουμε:

$$\underline{\lambda}_1 = \frac{\int d\sigma(\nabla f)^2 \underline{\lambda}_2 - \frac{\int d\sigma(\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma(\nabla f)^2}}{\underline{\lambda}_2 - \frac{\int d\sigma(\nabla f)^2}{\int d\sigma f^2}}. \quad (10.132)$$

Θέτοντας το $f = F_2^{(n+1)}$, το αποτέλεσμα αυτό γίνεται ίδιο με της (10.118a), εκτός του ότι το λ_2 έχει αντικατασταθεί κατάλληλα από το κατώτερο όριο $\underline{\lambda}_2$:

$$\underline{\lambda}_1 = \lambda_1^{(n+1)} \frac{\underline{\lambda}_2 - \lambda_1^{(n+1/2)}}{\underline{\lambda}_2 - \lambda_1^{(n+1)}} = \lambda_1^{(n+1)} - \frac{\lambda_1^{(n+1/2)} - \lambda_1^{(n+1)}}{\frac{\underline{\lambda}_2}{\lambda_1^{(n+1)}} - 1}. \quad (10.133)$$

Προκειμένου αυτό το αποτέλεσμα να είναι έγκυρο, είναι απαραίτητο να ισχύει ότι $\frac{1}{2}(\underline{\lambda}_1 + \underline{\lambda}_2) > \lambda_1$, το οποίο θα εξασφαλιστεί αν $\underline{\lambda}_1 + \underline{\lambda}_2 > 2\lambda_1^{(n+1)}$. Ο περιορισμός αυτός, που λαμβάνεται σε συνδυασμό με την (10.133), καθορίζει το μικρότερο κατώτερο όριο στη δεύτερη ιδιοτιμή που θα είναι αποδεκτό στην τελευταία εξίσωση:

$$\underline{\lambda}_2 \geq \lambda_1^{(n+1)} + \left[\lambda_1^{(n+1)} \left(\lambda_1^{(n+1/2)} - \lambda_1^{(n+1)} \right) \right]^{1/2}. \quad (10.134)$$

Δηλαδή, εάν ένα κατώτερο όριο στη δεύτερη ιδιοτιμή είναι γνωστό, ο τύπος (10.133) δεν μπορεί να εφαρμοστεί με ασφάλεια εκτός αν η (10.134) ικανοποιείται. Απουσία οποιασδήποτε πληροφορίας σχετικά με τη δεύτερη ιδιοτιμή, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το δεξί μέλος της (10.134) τελικά συγκλίνει στο λ_1 και πρέπει, συνεπώς, να γίνει μικρότερο από το λ_2 σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας προσέγγισης. Ως εκ τούτου, η (10.134) παρέχει ένα πιθανό κατώτερο όριο στο λ_2 , το οποίο αντικαθιστώντας το στην (10.133) μας δίνει:

$$\underline{\lambda}_1 = \lambda_1^{(n+1)} - \left[\lambda_1^{(n+1)} \left(\lambda_1^{(n+1/2)} - \lambda_1^{(n+1)} \right) \right]^{1/2}. \quad (10.135)$$

Σημειώστε ότι αυτό το αποτέλεσμα λαμβάνεται αμέσως από την (10.130), θέτοντας το $\lambda = \lambda_1^{(n+1)}$ και το $f = F_1^{(n+1)}$, χρησιμοποιώντας την (10.94b). Αυτό το κατώτατο όριο τελικά συγκλίνει με το λ_1 . Ωστόσο, είναι μια φτωχότερη προσέγγιση απ' ό,τι θα μπορούσε να επιτευχθεί από την (10.133) με μια σταθερή τιμή του $\underline{\lambda}_2$, δεδομένου ότι, στην τελευταία περίπτωση, η διαφορά μεταξύ του ανώτατου ορίου $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^{(n+1)}$ και του κατώτερου ορίου της (10.133) πλησιάζει το μηδέν, καθώς το n αυξάνει, με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\bar{\lambda}_1 - \underline{\lambda}_1 \rightarrow \frac{\lambda_1^{(n+1/2)} - \lambda_1^{(n+1)}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1}, \quad (10.136)$$

η οποία είναι πολύ πιο γρήγορη από αυτή που περιγράφεται από την (10.135):

$$\bar{\lambda}_1 - \underline{\lambda}_1 \rightarrow \left[\lambda_1 \left(\lambda_1^{(n+1/2)} - \lambda_1^{(n+1)} \right) \right]^{1/2}. \quad (10.137)$$

Παρόμοια αποτελέσματα μπορεί να βρεθούν από την μελέτη της ποσότητας:

$$\mu^2 = \frac{\int d\sigma [\nabla(\nabla^2 f + \lambda^2 f)]^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2}. \quad (10.138)$$

Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε μια εξίσωση ανάλογη της (10.126), η οποία οδηγεί στην δεύτερη μορφή της αρχής του Rayleigh για τη χαμηλότερη ιδιοτιμή:

$$\lambda_1 < \frac{\int d\sigma (\nabla^2 f)^2}{\int d\sigma (\nabla f)^2}, \quad (10.139)$$

και ένα κατώτερο όριο στο λ_1 το οποίο είναι ίδιο με αυτό της (10.133).

10.5 Προβλήματα για το Κεφάλαιο 10

1. Ένα αγώγιμο σώμα ενσωματωμένο στο κενό χαρακτηρίζεται από το σταθερό δυναμικό ϕ_0 στην επιφάνειά του S , το οποίο μεταφέρει φορτίο $Q = \oint_S dS\sigma$. Η προϋπόθεση ότι το δυναμικό στην περιοχή V γύρω από το σώμα:

$$\phi(\mathbf{r}) = \oint_S \frac{dS' \sigma(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.140)$$

που γίνεται η καθορισμένη σταθερά ϕ_0 στην S αποτελεί ολοκληρωτική εξίσωση που καθορίζει το σ . Αποδείξτε ότι η λύση σε αυτήν την επιφανειακή ολοκληρωτική εξίσωση είναι η λύση:

(α) συγκρίνοντας κατάλληλα ανώτερα και κατώτερα όρια στην ενέργεια, και

(β) εξετάζοντας την $\int_V (d\mathbf{r})(\nabla\phi)^2$, όπου ϕ είναι η διαφορά των δύο λύσεων.

2. Η δισδιάστατη απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$P = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\Phi}, \quad (10.141)$$

όπου Φ είναι η γωνία μεταξύ των δύο κατευθύνσεων. Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες της συνάρτησης του Bessel, για να δείξετε ότι:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{1}{P} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{d\Phi'}{2\pi} \pi \delta(\rho \cos \varphi + \rho \cos \varphi'). \quad (10.142)$$

3. Ας πούμε ότι το x' είναι η x συντεταγμένη ενός μεταβλητού σημείου στην επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας a . Επαληθεύστε το ακόλουθο στερεάς γωνίας ολοκλήρωμα πάνω από την επιφάνεια της σφαίρας:

$$\int d\Omega' \delta(x' + x) = \frac{2\pi}{a}, \quad (10.143)$$

όπου x είναι μια σταθερή ποσότητα, τέτοια ώστε $|x| < a$. Συμβουλή: αλλάξτε το σύστημα συντεταγμένων.

4. Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε τα δύο προηγούμενα προβλήματα για να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση που καθορίζει την πυκνότητα φορτίου σε ένα αγωγίμο δίσκο. Με το δίσκο να έχει ακτίνα a . Γράψτε την ολοκληρωτική εξίσωση του προβλήματος 10.1 σε πολικές συντεταγμένες ρ, ϕ . Η κυλινδρική συμμετρία μας δείχνει ότι $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(\rho)$. Εισάγετε νέες μεταβλητές: $\rho = a \sin \theta, \rho' = a \sin \theta'$ όπου η θ και η θ' μεταβαίνουν από 0 έως $\pi/2$. Τώρα, συνδυάστε τα αποτελέσματα από τα Προβλήματα 10.2 και 10.3. Αναγνωρίστε μια απλή λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης, σύμφωνα με το Πρόβλημα 10.1 αυτή είναι η λύση. Υπολογίστε το συνολικό φορτίο Q και προσδιορίστε τη χωρητικότητα $C = Q/\phi_0$.

5. Δείξτε ότι οι κυματάριθμοι αποκοπής της \mathbf{E} λειτουργίας δίνονται από την:

$$\gamma'^2 = \frac{\int_{\sigma} d\sigma (\nabla_{\perp} \varphi)^2 - 2 \oint_C ds \frac{\partial \varphi}{\partial n} \varphi}{\int_{\sigma} d\sigma \varphi^2}, \quad (10.144)$$

η οποία είναι σταθερή για μεταβολές σχετικά με την:

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma'^2)\varphi = 0, \quad \varphi = 0 \text{ στην } C, \quad (10.145)$$

χωρίς να απαιτείται ότι η φ υπακούει σ' αυτήν την οριακή συνθήκη (δηλαδή, η $\delta\varphi$ δεν χρειάζεται να μηδενίζεται στην C). Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι οποιαδήποτε εξωτερική (εσωτερική) μετατόπιση του ορίου χαμηλώνει (αυξάνει) την τιμή του γ'^2 .

6. Παρουσιάστε το παραπάνω θεώρημα εξετάζοντας, για τις \mathbf{E} λειτουργίες, ένα κυκλικό οδηγό ακτίνας a , που οριοθετείται από αναγραφόμενους και οριοθετημένους τετραγωνικούς οδηγούς. Δείξτε ότι η χαμηλότερη τιμή του $\gamma'a$ είναι πράγματι στο ενδιάμεσο μεταξύ αυτών των δύο τετραγώνων.

7. Εξετάστε την ανισότητα της (10.23) για ένα μονοδιάστατο πρόβλημα, αγωγούς παράλληλων πλακών, με δοκιμαστική συνάρτηση για την \mathbf{E} λειτουργία:

$$\varphi_0(x) = x(1 - x/a), \quad 0 < x < a. \quad (10.146)$$

Στη συνέχεια, βρείτε πώς λειτουργεί, με τη συνάρτηση που παράγεται από επανάληψη, η λύση της:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = \text{const. } x(1 - x/a)? \quad (10.147)$$

8. Λύστε την επαναληπτική εξίσωση (10.89) για την συνάρτηση $F^{(n+1)}$ σε όρους της $F^{(n)}$ και τη συνάρτηση Green για τον Λαπλασιανό τελεστή:

$$F^{(n+1)}(\mathbf{r}) = \int d\sigma G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F^{(n)}(\mathbf{r}'). \quad (10.148)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz της (10.22) για τον εξαγωγή της (10.96).

9. Αποδείξτε ότι το ελάχιστο της (10.110) επιτυγχάνεται όταν η f είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο χαμηλότερων συναρτήσεων λειτουργίας.

10. Αποδείξτε την (10.139) και την ακόλουθη παρατήρηση σχετικά με το κατώτερο όριο για το λ_1 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ – ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ

Θα παρουσιάσουμε τώρα τη μέθοδο που προτεινόταν στο προηγούμενο κεφάλαιο σε ένα απλό ρεαλιστικό πλαίσιο .

11.1 Ε Λειτουργίες

Θεωρούμε ένα κυκλικό κύλινδρο με ακτίνα a και εξετάζουμε τη μορφή με την χαμηλότερη ιδιοτιμή όπου $m = 0$:

$$\varphi_{01}(\rho, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} P_{01}(\rho), \quad P_{01}(a) = 0. \quad (11.1)$$

Η εξίσωση που καθορίζουν τις διαδοχικές επαναλήψεις (10.89) είναι (στο εξής θα παραλείπονται οι δείκτες):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} P^{(n+1)}(\rho) = P^{(n)}(\rho), \quad (11.2)$$

και τα απαιτούμενα ολοκληρώματα είναι:

$$[m + n] = \int_0^a d\rho \rho P^{(m)}(\rho) P^{(n)}(\rho). \quad (11.3)$$

Σημειώστε ότι μπορούμε να ολοκληρώσουμε ανά μέρη ώστε να δείξουμε πραγματικά ότι πρόκειται μόνο για τη συνάρτηση $m + n$.

Καθώς το a είναι η φυσική μονάδα μήκους, και οι διάφορες λειτουργίες διαφοροποίησης και ενσωμάτωσης είναι ίσες στο ρ , είναι σκόπιμο να εισαχθεί η μεταβλητή:

$$t = (\rho/a)^2, \quad (11.4)$$

και να καθορίσουμε τις λειτουργίες:

$$T^{(n)}(t) = \left(\frac{4}{a^2}\right)^n P^{(n)}(\rho), \quad (11.5)$$

οι οποίες υπακούουν στην οριακή κατάσταση:

$$T^{(n)}(1) = 0, \quad (11.6)$$

και στην διαφορική εξίσωση:

$$-\frac{d}{dt}t \frac{d}{dt}T^{(n+1)}(t) = T^{(n)}(t). \quad (11.7)$$

Τα ολοκληρώματα (11.3) εμφανίζονται τώρα ως:

$$[m+n] = 2 \left(\frac{a^2}{4}\right)^{m+n+1} \langle m+n \rangle, \quad (11.8)$$

με:

$$\langle m+n \rangle = \int_0^1 dt T^{(m)}(t)T^{(n)}(t). \quad (11.9)$$

Σε αυτή την σημειογραφία, η νιοστή προσέγγιση στην επιθυμητή ιδιοτιμή δίνεται από:

$$\lambda^{(n)} = \frac{[2n-1]}{[2n]} = \frac{4}{a^2} \frac{\langle 2n-1 \rangle}{\langle 2n \rangle}, \quad (11.10)$$

η οποία ισχύει τόσο για ακέραιους και όσο και για ακέραιους με τιμή $+\frac{1}{2}$ του n .

Θα μας ήταν χρήσιμο να εισάγουμε μια επαναληπτική συνάρτηση, $T^{(-1)}(t)$, σύμφωνα με:

$$-\frac{d}{dt}t \frac{d}{dt}T^{(0)}(t) = T^{(-1)}(t), \quad (11.11)$$

η οποία συνάρτηση δεν πληροί την οριακή συνθήκη. Πράγματι, χρησιμοποιούμε:

$$T^{(-1)}(t) = 1, \quad (11.12)$$

το οποίο καθιστά την αρχή της γραμμής:

$$-\frac{d}{dt}t \frac{d}{dt}T^{(-1)}(t) = T^{(-2)}(t) = 0. \quad (11.13)$$

Προκειμένου να δούμε τα οφέλη που προκύπτουν, θεωρούμε:

$$\begin{aligned}\langle k \rangle &= \int_0^1 dt T^{(k)}(t)T^{(0)}(t) = \int_0^1 dt \left[-\frac{d}{dt} t \frac{d}{dt} T^{(k+1)}(t) \right] T^{(0)}(t) \\ &= \int_0^1 dt T^{(k+1)}(t)T^{(-1)}(t),\end{aligned}\quad (11.14)$$

όπου $T^{(k+1)}$ και $T^{(0)}$ υπακούουν στην οριακή συνθήκη. Στη συνέχεια, με την επιλογή (11.12), φτάνουμε στον απλό υπολογισμό:

$$\langle k \rangle = \int_0^1 dt \left[-\frac{d}{dt} t \frac{d}{dt} T^{(k+2)}(t) \right] = -\frac{d}{dt} T^{(k+2)}(1). \quad (11.15)$$

Για την εκτέλεση των ολοκληρωμάτων που απαιτούνται ώστε να παραχθούν τα διαδοχικά $T^{(n)}(t)$, αρκεί να σημειωθεί ότι:

$$-\frac{d}{dt} t \frac{d}{dt} \left[-\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \right] = t^n. \quad (11.16)$$

Έτσι, το αποτέλεσμα της (11.11) που υπακούει την οριακή συνθήκη (11.6) είναι (εδώ $n = 0$):

$$T^{(0)}(t) = 1 - t = T^{(-1)}(t) - t. \quad (11.17)$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε διαδοχικά:

$$T^{(1)}(t) = T^{(0)}(t) + \frac{1}{2^2} (t^2 - T^{(-1)}(t)), \quad (11.18a)$$

$$T^{(2)}(t) = T^{(1)}(t) - \frac{1}{2^2} T^{(0)}(t) - \frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} (t^3 - T^{(-1)}(t)), \quad (11.18b)$$

$$T^{(3)}(t) = T^{(2)}(t) - \frac{1}{(2!)^2} T^{(1)}(t) + \frac{1}{(3!)^2} T^{(0)}(t) + \frac{1}{(4!)^2} (t^4 - T^{(-1)}(t)), \quad (11.18c)$$

και, γενικά:

$$T^{(n)}(t) = \sum_{l=1}^{n+1} \frac{(-1)^{l-1}}{(l!)^2} T^{(n-l)}(t) + (-1)^{n-1} \frac{t^{n+1}}{[(n+1)!]^2}. \quad (11.19)$$

Από αυτό συνάγουμε επανάληψη στις σχέσεις των ολοκληρωμάτων όπως υπολογίστηκαν στο (11.15):

$$\langle k \rangle = \sum_{l=1}^{k+3} \frac{(-1)^{l-1}}{(l!)^2} \langle k-l \rangle + (-1)^k \frac{1}{(k+2)!(k+3)!}. \quad (11.20)$$

Οι ποσότητες που εμφανίζονται εδώ με αρνητικούς αριθμούς, $\langle -3 \rangle, \langle -2 \rangle, \langle -1 \rangle$, πρέπει να κατανοηθούν σύμφωνα με την τελευταία έκδοση του (11.14), και ως εκ τούτου είναι προϊόντα των ολοκληρώματα των με έναν παράγοντα της $T^{(-1)}(t)$:

$$\langle -3 \rangle = \int_0^1 dt T^{(-2)}(t) T^{(-1)}(t) = 0, \quad (11.21a)$$

$$\langle -2 \rangle = \int_0^1 dt T^{(-1)}(t) T^{(-1)}(t) = 1, \quad (11.21b)$$

$$\langle -1 \rangle = \int_0^1 dt T^{(0)}(t) T^{(-1)}(t) = \frac{1}{2}, \quad (11.21c)$$

και τότε θα έχουμε:

$$\langle 0 \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{(2!)^2} + \frac{1}{2!3!} = \frac{1}{3}, \quad (11.22a)$$

$$\langle 1 \rangle = \frac{1}{3} - \frac{1}{(2!)^2} \frac{1}{2} + \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{3!4!} = \frac{11}{48}, \quad (11.22b)$$

$$\langle 2 \rangle = \frac{11}{48} - \frac{1}{(2!)^2} \frac{1}{3} + \frac{1}{(3!)^2} \frac{1}{2} - \frac{1}{(4!)^2} + \frac{1}{4!5!} = \frac{19}{120}, \quad (11.22c)$$

$$\langle 3 \rangle = \frac{19}{120} - \frac{1}{(2!)^2} \frac{11}{48} + \frac{1}{(3!)^2} \frac{1}{3} - \frac{1}{(4!)^2} \frac{1}{2} + \frac{1}{(5!)^2} - \frac{1}{5!6!} = \frac{473}{4320}, \quad (11.22d)$$

$$\begin{aligned} \langle 4 \rangle &= \frac{473}{4320} - \frac{1}{(2!)^2} \frac{19}{120} + \frac{1}{(3!)^2} \frac{11}{48} - \frac{1}{(4!)^2} \frac{1}{3} + \frac{1}{(5!)^2} \frac{1}{2} - \frac{1}{(6!)^2} + \frac{1}{6!7!} \\ &= \frac{229}{3024}, \end{aligned} \quad (11.22e)$$

$$\begin{aligned} \langle 4 \rangle &= \frac{229}{3024} - \frac{1}{(2!)^2} \frac{473}{4320} + \frac{1}{(3!)^2} \frac{19}{120} - \frac{1}{(4!)^2} \frac{11}{48} + \frac{1}{(5!)^2} \frac{1}{3} - \frac{1}{(6!)^2} \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{1}{(7!)^2} - \frac{1}{7!8!} = \frac{101369}{1935360}, \end{aligned} \quad (11.22f)$$

$$\langle 6 \rangle = \frac{946523}{26127360}, \quad (11.22g)$$

$$\langle 7 \rangle = \frac{64567219}{261273600}. \quad (11.22h)$$

αυτοί οι αριθμοί επαρκούν για να παράγουν τέσσερις επαναλήψεις με ακέραιο n , και με τέσσερις ακέραιος n συν $1/2$.

Αυτές οι διαδοχικές τιμές τα των $\lambda^{(n)} a^2$ είναι:

$$n = 0: \quad 4 \frac{\langle -1 \rangle}{\langle 0 \rangle} = 6 = 6.0, \quad (11.23a)$$

$$n = \frac{1}{2}: \quad 4 \frac{\langle 0 \rangle}{\langle 1 \rangle} = \frac{64}{11} = 5.8181818, \quad (11.23b)$$

$$n = 1: \quad 4 \frac{\langle 1 \rangle}{\langle 2 \rangle} = \frac{110}{19} = 5.7894737, \quad (11.23c)$$

$$n = \frac{3}{2}: \quad 4 \frac{\langle 2 \rangle}{\langle 3 \rangle} = \frac{2736}{473} = 5.7843552, \quad (11.23d)$$

$$n = 2: \quad 4 \frac{\langle 3 \rangle}{\langle 4 \rangle} = \frac{6622}{1145} = 5.7834061, \quad (11.23e)$$

$$n = \frac{5}{2}: \quad 4 \frac{\langle 4 \rangle}{\langle 5 \rangle} = \frac{586240}{101369} = 5.7832276, \quad (11.23f)$$

$$n = 3: \quad 4 \frac{\langle 5 \rangle}{\langle 6 \rangle} = \frac{5473926}{946523} = 5.7831939, \quad (11.23g)$$

$$n = \frac{7}{2}: \quad 4 \frac{\langle 6 \rangle}{\langle 7 \rangle} = \frac{378609200}{65467219} = 5.7831875. \quad (11.23h)$$

11.1.1 Όρια στη δεύτερη ιδιοτιμή

Προκειμένου να παραχθούν αντίστοιχα κατώτατα όρια, θα στρέψουμε την προσοχή μας στο $\underline{\lambda}_2$. Το καλύτερο αποτέλεσμα για το $\underline{\lambda}_2 \alpha^2$ μέχρι στιγμής επιτυγχάνεται μέσα από σύγκριση ενός τετραγώνου, βλέπε πρόβλημα 10.6. Ακόμα καλύτερα, εφαρμόζουμε την τεχνική που αναπτύχθηκε στο Κεφ. 23 του [9]. Αρχικά δηλώνουμε, κι έπειτα παράγουμε την ακόλουθη εξίσωση που αναφέρεται στις λειτουργίες $m = 0$ του κύκλου με ακτίνα a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{0n}(\rho)P_{0n}(\rho')}{\gamma_{0n}^2} = \log \frac{a}{\rho}, \quad (11.24)$$

Όπου:

$$P_{mn}(\rho) = \frac{\sqrt{2} J_m(\gamma_{mn}\rho)}{a J'_m(\gamma_{mn}a)}. \quad (11.25)$$

Κατανοούμε εδώ ότι για $m = 0$, το όριο $k \rightarrow 0$ της σχέσης εκφράζει την ισότητα της επέκτασης των ιδιοσυναρτήσεων και των εκφράσεων κλειστής μορφής για τις μειωμένων συναρτήσεις Green στο πρόβλημα Coulomb σε κυλινδρικές συντεταγμένες (βλ. Πρόβλημα 11.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}(\rho)P_{mn}(\rho')}{k^2 + \gamma_{mn}^2} = I_m(k\rho_{<}) \left[K_m(k\rho_{>}) - I_m(k\rho_{>}) \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} \right], \quad (11.26)$$

για $\rho, \rho' < a$, υποκείμενο των οριακών συνθηκών Dirichlet στο $\rho = a$. Σύμφωνα τώρα με το Πρόβλημα με 8.8, έχουμε:

$$t \ll 1: \quad K_0(t) \sim \log \frac{1}{t} + \text{const.}, \quad I_0(t) \sim 1, \quad (11.27)$$

από το οποίο (11.24) ακολουθεί.

Ο έλεγχος αυτός μπορεί, βεβαίως, να γίνει και πιο άμεσα. Το αριστερό μέρος του (11.24) - αποκαλούμενο $g_0(\rho, \rho')$ - υπακούει:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} g_0(\rho, \rho') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho'), \quad (11.28a)$$

$$g_0(a, \rho') = 0. \quad (11.28b)$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $\log(a / \rho_{>})$ εξαφανίζεται για $\rho_{>} = a$, και ότι:

$$-\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log \frac{a}{\rho_{>}} = \begin{cases} 1, & \rho > \rho' \\ 0, & \rho < \rho' \end{cases}, \quad (11.29)$$

το παράγωγο αυτής της ασυνεχούς λειτουργίας παράγει την απαιτούμενη συνάρτηση δέλτα.

Τώρα εξάγουμε, ενσωματώνοντας την (11.24) με $\rho = \rho'$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0n}^2} = \int_0^a d\rho \rho \log \frac{a}{\rho} = \frac{a^2}{4} \int_0^1 dt \log \frac{1}{t} = \frac{a^2}{4}, \quad (11.30)$$

στην οποία έχουμε εισάγει τη μεταβλητή (11.4). Μια τέτοια σχέση δίνει ένα πιο χαμηλό όριο λ_2 όσον αφορά το ανώτερο όριο για λ_1 :

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_1 a^2} + \frac{1}{\lambda_2 a^2} = \frac{1}{4} \quad (11.31)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε το καλύτερο ανώτερο όριο στο (11.23h), που είναι για $n = 7/2$, παίρνουμε $\lambda_2 a^2 = 12.97$, το οποίο είναι ένα ιδιαίτερα μη ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Ως εκ τούτου, περνάμε στο επόμενο στάδιο, το οποίο περιλαμβάνει την ολοκλήρωση του τετραγώνου (11.24):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0n}^4} &= 2 \int_0^a d\rho \rho \int_0^\rho d\rho' \rho' \left(\log \frac{a}{\rho} \right)^2 = \frac{a^4}{8} \int_0^1 dt \int_0^t dt' \left(\log \frac{1}{t} \right)^2 \\ &= \frac{a^4}{8} \int_0^1 dt t \left(\log \frac{1}{t} \right)^2 = \frac{a^4}{32}, \end{aligned} \quad (11.32)$$

το τελευταίο ολοκλήρωμα, όπως αυτό στο (11.30), εκτελείται από μερική ενσωμάτωση ή με μια αλλαγή της μεταβλητής : $t = \exp(-x)$. Τώρα πλέον έχουμε:

$$\frac{1}{(\bar{\lambda}_1 a^2)^2} + \frac{1}{(\underline{\lambda}_2 a^2)^2} = \frac{1}{32}, \quad (11.33)$$

από την οποία παίρνουμε:

$$\underline{\lambda}_2 a^2 = 27.213, \quad (11.34)$$

σημαντικά καλύτερο αποτέλεσμα από το 19.74 που είχαμε πάρει μέσω της σύγκρισης με τετράγωνο.

Αλλά προτού να εξετάσουμε πόσο καλά εκτελεί η (11.34), ας δούμε τι μας δίνει η (11.26) αν της προσθέσουμε $\rho = \rho'$, συγκεκριμένα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \gamma_{mn}^2} = \int_0^a d\rho \rho I_m(k\rho) \bar{K}_m(k\rho), \quad (11.35)$$

Όπου:

$$\bar{K}_m(t) = K_m(t) - I_m(t) \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)}. \quad (11.36)$$

Οι δύο συναρτήσεις που εισάγονται στο ολοκλήρωμα της (11.35) υπακούουν στην ίδια διαφορική εξίσωση, για $\rho > 0$:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right] \begin{Bmatrix} I_m(k\rho) \\ \bar{K}_m(k\rho) \end{Bmatrix} = 0. \quad (11.37)$$

Πρέπει, ακόμη, οι διαφορικές εξισώσεις τηρούνται από:

$$\frac{\partial}{\partial k} I_m(k\rho) = \rho I'_m(k\rho), \quad (11.38)$$

είναι:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right] \rho I'_m(k\rho) = 2kI_m(k\rho). \quad (11.39)$$

Έπειτα πολλαπλασιάζοντας χιαστή την τελευταία εξίσωση με εκείνη του \bar{K}_m προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\bar{K}_m(k\rho) \rho \frac{d}{d\rho} \rho I'_m(k\rho) - \rho I'_m(k\rho) \rho \frac{d}{d\rho} \bar{K}_m(k\rho) \right] = 2k\rho I_m(k\rho) \bar{K}_m(k\rho), \quad (11.40)$$

έτσι το ολοκλήρωμα της (11.35) βγαίνει ως ένα ολικό διαφορικό.

Στο ανώτερο όριο του ολοκληρώματος, $\rho = a$:

$$\bar{K}_m(ka) = 0, \quad (11.41)$$

και:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \bar{K}_m(k\rho) \Big|_{\rho=a} = ka \left[K'_m - I'_m \frac{K_m}{I_m} \right] (ka) = -\frac{1}{I_m(ka)}, \quad (11.42)$$

σύμφωνα με την Wronskian (Πρόβλημα 8.8). Για να χειριστούμε το κατώτερο όριο, $\rho = 0$, αναγνωρίζουμε ότι η δομή που διαφοροποιείται στη (11.40) μπορεί, εκτός από συντελεστής $1/k$, να παρουσιαστεί ως:

$$K_m(t) \left(t \frac{d}{dt} \right)^2 I_m(t) - t \frac{d}{dt} I_m(t) t \frac{d}{dt} K_m(t), \quad (11.43)$$

γιατί μόνο μέσα από την μοναδικότητα του $K_m(t)$ με $t = 0$ μπορεί να προκύψει πεπερασμένη συνεισφορά. Σχετικά με μικρές τιμές του t , $I_m(t) \sim t^m$, και:

$$t \ll 1: \quad t \frac{d}{dt} I_m(t) \sim m I_m(t), \quad (11.44)$$

έτσι ώστε η (11.43) να γίνεται:

$$mt[K_m(t)I'_m(t) - I_m(t)K'_m(t)] = m, \quad (11.45)$$

το οποίο πάλι κάνει χρήση Wronskian. Έτσι, το ολοκλήρωμα στην (11.35) ισούται:

$$\frac{1}{2k} \left[a \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} - \frac{m}{k} \right]. \quad (11.46)$$

Το αποτέλεσμα, που παρουσιάζεται ως:

$$\frac{I'_m(t)}{I_m(t)} = \frac{m}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + (\gamma_{mn}a)^2}, \quad (11.47)$$

δεν είναι άγνωστο: εξάγαμε την πολική διαστολή της λογαριθμικής παραγώγου $I_m(t)$ σε σχέση με το $t = 0$ και τις φανταστικές ρίζες στο $\pm i\gamma_{mn}$. Στη συνέχεια, τους αρχικούς όρους των διεσταλμένων δυναμοσειρών:

$$m \geq 0: \quad I_m(t) = \frac{\left(\frac{1}{2}t\right)^m}{m!} \left[1 + \frac{\left(\frac{1}{2}t\right)^2}{m+1} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}t\right)^4}{(m+1)(m+2)} + \dots \right], \quad (11.48)$$

με τη λογαριθμική συνέπεια:

$$\frac{I'_m(t)}{I_m(t)} = \frac{m}{t} + \frac{1}{2} \frac{t}{m+1} - \frac{1}{8} \frac{t^3}{(m+1)^2(m+2)} + \dots, \quad (11.49)$$

να δίνει τα δύο πρώτα ενός απειροστικού συνόλου αθροισμάτων:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{mn}a^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{m+1}, \quad (11.50a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{mn}a^2)^2} = \frac{1}{16} \frac{1}{(m+1)^2(m+2)}. \quad (11.50b)$$

Τα αποτελέσματα που έχουμε ήδη λάβει από τις (11.30) και (11.32) για $m = 0$ επαναλαμβάνονται, και υποκαθιστώντας $m \rightarrow l + \frac{1}{2}$, ανακτούμε πάλι τη σφαιρική αθροιστική συνάρτηση Bessel που δίνεται στο [9], στα (23,40) και (23,44).

Εμείς, για λόγους ευκολίας, καταγράφουμε τις διαδοχικές διαφορές $\lambda^{(n)} a^2 - \lambda^{(n+1/2)} a^2$, με $n = 0, 1/2, \dots, 2$, και τους λόγους των παρακείμενων διαφορών:

$$\frac{\lambda^{(n)} a^2 - \lambda^{(n+1/2)} a^2}{\lambda^{(n+1/2)} a^2 - \lambda^{(n+1)} a^2}, \quad (11.51)$$

όπως διαπιστώθηκαν στις (11.23a) - (11.23f):

$$\lambda^{(0)} a^2 - \lambda^{(1/2)} a^2 = 0.1818182$$

$$: \quad 6.333, \quad (11.52a)$$

$$\lambda^{(1/2)} a^2 - \lambda^{(1)} a^2 = 0.0287081$$

$$: 5.609, \quad (11.52b)$$

$$\lambda^{(1)}a^2 - \lambda^{(3/2)}a^2 = 0.0051185$$

$$: 5.393, \quad (11.52c)$$

$$\lambda^{(3/2)}a^2 - \lambda^{(2)}a^2 = 0.0009491$$

$$: 5.317, \quad (11.52d)$$

$$\lambda^{(2)}a^2 - \lambda^{(5/2)}a^2 = 0.0001785$$

$$: 5.288, \quad (11.52e)$$

$$\lambda^{(5/2)}a^2 - \lambda^{(3)}a^2 = 0.0000338$$

$$: 5.277. \quad (11.52f)$$

$$\lambda^{(3)}a^2 - \lambda^{(7/2)}a^2 = 0.0000064$$

Ας υιοθετήσουμε τώρα προσωρινά το κατώτερο όριο του λ_2 από την (11.34). Τα παρακάτω παρουσιάζουν τα χαμηλότερα όρια [(10.133)] που παράγονται για $n = \frac{1}{2}, \dots, \frac{7}{2}$, μαζί με τα αντίστοιχα ανώτερα όρια:

$$n = \frac{1}{2}: \quad 5.8181818 > \lambda_1 a^2 > 5.7687375, \quad (11.53a)$$

$$n = 1: \quad 5.7894737 > \lambda_1 a^2 > 5.7817156, \quad (11.53b)$$

$$n = \frac{3}{2}: \quad 5.7843552 > \lambda_1 a^2 > 5.7829735, \quad (11.53c)$$

$$n = 2: \quad 5.7834061 > \lambda_1 a^2 > 5.7831500, \quad (11.53d)$$

$$n = \frac{5}{2}: \quad 5.7832276 > \lambda_1 a^2 > 5.7831794, \quad (11.53e)$$

$$n = 3: \quad 5.7831939 > \lambda_1 a^2 > 5.7831848, \quad (11.53f)$$

$$n = \frac{7}{2}: \quad 5.7831875 > \lambda_1 a^2 > 5.7831858. \quad (11.53g)$$

Παρουσιάζουμε επίσης, αναλογικά με τις (11.52a) - (11.52f), τις διαδοχικές διαφορές και τους λόγους τους:

$$\underline{\lambda}^{(1)}a^2 - \underline{\lambda}^{(1/2)}a^2 = 0.0129781$$

$$: 10.3, \quad (11.54a)$$

$$\underline{\lambda}^{(3/2)}a^2 - \underline{\lambda}^{(1)}a^2 = 0.0012579$$

$$: 7.11, \quad (11.54b)$$

$$\underline{\lambda}^{(2)}a^2 - \underline{\lambda}^{(3/2)}a^2 = 0.0001769$$

$$: 6.02, \quad (11.54c)$$

$$\underline{\lambda}^{(5/2)}a^2 - \underline{\lambda}^{(2)}a^2 = 0.0000294$$

$$: 5.44, \quad (11.54d)$$

$$\underline{\lambda}^{(3)}a^2 - \underline{\lambda}^{(5/2)}a^2 = 0.0000054$$

$$: 5.4, \quad (11.54e)$$

$$\underline{\lambda}^{(7/2)}a^2 - \underline{\lambda}^{(3)}a^2 = 0.0000010$$

Όλα είναι όπως αναμένεται: Με κάθε επιπλέον επανάληψη το ανώτερο όριο μειώνεται και το κατώτερο αυξάνεται. Παρατηρούμε επίσης στα (11.53a) - (11.53g) ότι η καθαρή αύξηση του κατώτατου ορίου, 0.01445, είναι μικρότερη από το μισό της καθαρής μείωσης στο ανώτερο όριο, 0.03499. Αυτό σημαίνει ότι δεν ήταν και τόσο κακή η επιλογή του λ_2 . Μια σχετική και πιο εντυπωσιακή παρατήρηση είναι η αντίθεση μεταξύ της ομαλής σύγκλισης των ανώτερων οριακών λόγων στις (11.52a) - (11.52f), και της αρχικής πιο ταχείας πτώσης των κατώτερων οριακών λόγων (11.54a) - (11.54e), το οποίο δείχνει ότι η δεύτερη λειτουργία είναι πιο περιορισμένη στο κατώτερο όριο, ενώ κυριαρχεί μόνο αφού πραγματοποιηθούν αρκετές επαναλήψεις.

Και τώρα πλέον είμαστε στο στάδιο για έναν εσωτερικό προσδιορισμό του λ_2 . Σύμφωνα με το Πρόβλημα με 11.2, η ασύμπτωτη τιμή των λόγων στις (11.52a) - (11.52f) είναι λ_2 / λ_1 . Η προφανής σύγκλιση καθιστά σαφές ότι $\lambda_2 / \lambda_1 \leq 5.277$, ή, χρησιμοποιώντας τις έξι σημαντικές παραστάσεις που έχουν ήδη θεσπιστεί για λ_1 σε (11.53g), ότι $\lambda_2 a^2 \leq 30.52$.

Πρώτα ελέγχουμε αν, όπως είχε φανεί στη σχέση (25.111) στο [9], η χρήση μιας τιμής λ_2 μεγαλύτερης από λ_2 θα έκανε εμφανή μια ποιοτική αλλαγή στη διαδικασία επανάληψης. Παρακάτω εμφανίζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών των κατώτερων ορίων που αφορούν $\lambda_2 a^2 = 30.52$, καθώς και οι διαδοχικές τους διαφορές και οι λόγοι τους:

$$n = \frac{1}{2} : 5.7753570$$

$$:0.0073961$$

$$n = 1 : 5.7827530$$

$$: 18.3,$$

$$:0.0004052$$

$$(11.55)$$

$$n = \frac{3}{2} : 5.7831582$$

$$: 15.6,$$

$$:0.0000260$$

$$n = 2 : 5.7831842$$

$$: 16,$$

$$\begin{array}{rcl}
& & :0.00000017 \\
n = \frac{5}{2} : & 5.78318588 & : 20, \\
& & :0.000000084 \\
n = 3 : & 5.78318597 & : -70. \\
& & :-0.0000000012 \\
n = \frac{7}{2} : & 5.783185965 &
\end{array}$$

Η αντίθεση στους λόγους (11.54a) - (11.54e) είναι αποκαλυπτική. Έχουμε σαφώς αφομοιώσει: Μετά από μια πρώτη επαναλαμβανόμενη αύξηση στα "κατώτερα όρια", αυτή η αύξηση σταμάτησε και ξεκίνησε η σύγκλιση προς λ_1 , με αποτέλεσμα να μαθαίνουμε ότι $\lambda_2 a^2 < 30.52$, και ότι:

$$\lambda_1 a^2 < 5.783185965, \quad (11.56)$$

Ένα πρόγραμμα αναζήτησης σε ηλεκτρονικό υπολογιστή θα ήταν πιο αποτελεσματικό σε αυτό το τελευταίο στάδιο, στην προσπάθεια μετάβασης από την ποιοτική συμπεριφορά του (11.55) σε εκείνη των (11.54a) - (11.54e), η οποία προσδιορίζει το λ_2 . Αντ' αυτού, παρουσιάζουμε μόνο ένα παράδειγμα, στο οποίο ο αριθμός 30.52 μειώνεται περίπου κατά 0.2% έως το 30.45:

$$\begin{array}{rcl}
n = \frac{1}{2} : & 5.7752353 & \\
& & :0.0074987 \\
n = 1 : & 5.7827340 & : 17.8, \\
& & :0.0004209 \\
n = \frac{3}{2} : & 5.7831548 & : 14.6, \\
& & :0.0000288 \\
n = 2 : & 5.7831836 & : 13.2, \\
& & :0.00000217 \\
n = \frac{5}{2} : & 5.7831858 & : 12.1, \\
& & :0.00000018 \\
n = 3 : & 5.78318594 & : 10.6. \\
& & :0.000000017
\end{array} \quad (11.57)$$

$$n = \frac{7}{2} : 5.783185961$$

Η κατάσταση έχει γίνει ομαλοποιηθεί, και έτσι πλέον γνωρίζουμε ότι $\lambda_2 a^2 > 30.45$, και ότι:

$$\lambda_1 a^2 > 5.783185961, \quad (11.58)$$

Τι έχουμε πετύχει ως εδώ; Ο καλύτερος προσδιορισμός του $\lambda_1 a^2$ στην (11.53g) μπορεί να παρουσιαστεί ως:

$$\lambda_1 a^2 = 5.7831866 \pm 0.0000009, \quad (11.59)$$

μια ακρίβεια της τάξης περίπου 1×10^{-7} . Χωρίς καμία επιπλέον εισροή, το $\lambda_1 a^2$ έχει, σύμφωνα με την (11.56) και (11.58), πλέον εντοπισθεί σε:

$$\lambda_1 a^2 = 5.783185963 \pm 0.000000002, \quad (11.60)$$

ακρίβεια 1×10^{-10} .

Έχουμε απέφυγε ρητά τη χρήση των πραγματικών αξιών λ_1 και λ_2 , που είναι, αντίστοιχα, τα τετράγωνα των γ_{01} και γ_{02} :

$$\lambda_1 a^2 = 5.78318596297, \quad (11.61a)$$

$$\lambda_2 a^2 = 30.4712623438. \quad (11.61b)$$

Το ότι η επιλογή μας του λ_2 στην (11.57) είναι πολύ κοντά σε αυτή του λ_2 είναι αρκετά εμφανές στην σημαντικά αυξημένο ρυθμό σύγκλισης εκεί, σε σύγκριση με τις (11.54a) - (11.54c). Τι θα συμβεί αν χρησιμοποιήσουμε την πραγματική τιμή λ_2 ; Το αποτέλεσμα της $\lambda^{(7/2)}$ αυξάνεται σχεδόν ανεπαίσθητα, οι διαδοχικοί λόγοι κάπως περισσότερο, ειδικότερα, ο τελευταίος λόγος, 10.6, που ανυψώνεται στο 13.2. Και αυτό είναι λογικό, γιατί τότε οι λόγοι αυτοί συγκλίνουν μεταξύ τους (Πρόβλημα 11.3):

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = 12.949092. \quad (11.62)$$

11.2 Η Λειτουργίες

Ο περιορισμός της (10.41) στην Η λειτουργία ικανοποιείται αυτόματα όλα, εκτός από την H_{0n} λειτουργία ενός κυκλικού οδηγού. Κατά την κατασκευή της κυρίαρχης λειτουργίας του πρόσφατου τύπου, H_{01} , που είναι ουσιαστικά η τρίτη υψηλότερη λειτουργία Η μετά την H_{11} και την H_{21} , κάθε προσεγγιστική συνάρτηση πρέπει να υπακούει στην απαίτηση:

$$\int_0^a R_1^{(n)}(r) r dr = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.63)$$

Οι διαδοχικές προσεγγιστικές συναρτήσεις που προέκυψαν από την εξίσωση καθορισμού:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) R_1^{(n)}(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R_1^{(n)}(r) = -R_1^{(n-1)}(r), \quad (11.64)$$

ικανοποιούν αυτόματα την οριακή συνθήκη (10.43), λόγω της (11.63). Αυτό αποδεικνύεται πολλαπλασιάζοντας την (11.64) με το r και την ενσωματώνοντας το αντίστοιχα στο r από 0 έως a , απ' όπου:

$$a \frac{d}{dr} R_1^{(n)}(a) = - \int_0^a R^{(n-1)}(r) r dr = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.65)$$

Μια απλή παραγωγική συνάρτηση, σύμφωνα με (11.63), είναι:

$$R_1^{(0)}(r) = a^2 - 2r^2, \quad (11.66)$$

και οι τρεις πρώτες προσεγγιστικές συναρτήσεις που προκύπτουν από την (11.64), προϊόν της (11.63), είναι:

$$R_1^{(1)}(r) = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{3} a^4 - 2a^2 r^2 + r^4 \right), \quad (11.67a)$$

$$R_1^{(2)}(r) = \frac{1}{288} \left(\frac{7}{4} a^6 - 6a^4 r^2 + \frac{9}{2} a^2 r^4 - r^6 \right), \quad (11.67b)$$

$$R_1^{(3)}(r) = \frac{1}{18432} \left(\frac{39}{5} a^8 - 28a^6 r^2 + 24a^4 r^4 - 8a^2 r^6 + r^8 \right), \quad (11.67c)$$

Οι διαδοχικές προσεγγίσεις του $\gamma_1 a$ όπως είχαν υπολογιστεί από την (10.90) που χρησιμοποιούν αυτές τις συναρτήσεις είναι:

$$\gamma_1^{(0)} a = \sqrt{24} = 4.898980, \quad (11.68a)$$

$$\gamma_1^{(1/2)} a = \sqrt{16} = 4.0, \quad (11.68b)$$

$$\gamma_1^{(1)} a = \sqrt{15} = 3.872983, \quad (11.68c)$$

$$\gamma_1^{(3/2)} a = \sqrt{\frac{192}{13}} = 3.843076, \quad (11.68d)$$

$$\gamma_1^{(2)} a = \sqrt{\frac{1456}{99}} = 3.834980, \quad (11.68e)$$

$$\gamma_1^{(5/2)} a = \sqrt{\frac{9504}{647}} = 3.832667, \quad (11.68f)$$

$$\gamma_1^{(3)} a = \sqrt{\frac{116460}{7931}} = 3.831990. \quad (11.68g)$$

Η τρίτη προσέγγιση υπερβαίνει τη σωστή τιμή, $\gamma_1 a = 3.8317060$, με 0.000284 , ένα σφάλμα σχεδόν του 7 επί 10^5 . Η προσέγγιση $3/2$ έχει ικανοποιητική ακρίβεια για τις περισσότερες λειτουργίες, με απόκλιση $0,025\%$. Η σχετικά αργή σύγκλισης, σε αντίθεση με αυτή που βρέθηκε για την E_{01} λειτουργία, οφείλεται κυρίως στο μικρότερη τιμή της $(\gamma_2/\gamma_1)^4$, 11.24 . Διαδοχικά ανώτερα όρια $\gamma_2 a$, συναγόμενες από (10.115a) και (10.115b) με τη σωστή αξία $\gamma_1 a$ είναι: $10.6355, 7.8845, 7.3368, 7.1505, 7.0756, 7.0433$. Το τελευταίο αποτέλεσμα υπερβαίνει την πραγματική αξία της $\gamma_2 a$, 7.015587 , κατά $0,4\%$. Ένα χαμηλότερο όριο για τη δεύτερη ιδιοτιμή παρέχεται από το αποτέλεσμα, να συσταθεί στο Πρόβλημα 11.4, ώστε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{a^4}{192}, \quad (11.69)$$

από όπου:

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} < \frac{a^4}{192}. \quad (11.70)$$

Εάν το λ_1 αντικατασταθεί με το ανώτερο όριο που δίνεται από την τρίτη προσέγγιση, παίρνουμε $\gamma_2 a > 6,4701$. Τα κατώτερα όρια για το $\gamma_1 a$ που προέκυψαν από (10.133) είναι: $3.324252, 3.800209, 3.826674, 3.830588, 3.831416, 3.831625$. Συνδυάζοντας τα ανώτερα και κατώτερα όρια, βρίσκουμε, τις εκτιμήσεις για τα διαδοχικά $\gamma_1 a$:

$$3.662126 \pm 0.337874, \quad (11.71a)$$

$$3.836596 \pm 0.036387, \quad (11.71b)$$

$$3.834875 \pm 0.008201, \quad (11.71c)$$

$$3.832784 \pm 0.002196, \quad (11.71d)$$

$$3.832042 \pm 0.000626, \quad (11.71e)$$

$$3.831807 \pm 0.000183. \quad (11.71f)$$

Έτσι, η τρίτη προσέγγιση λύνει το $\gamma_1 a$ με μια αβεβαιότητα της τάξης του ± 5 επί 10^5 .

11.3 Προβλήματα για το Κεφάλαιο 11

1. Λύστε τη συνάρτηση Green του Coulomb με κυλινδρικές συντεταγμένες, βρίσκοντας μειωμένη συνάρτηση Green (δηλαδή, το μέρος εξαρτώμενο από τις ακτινικές συντεταγμένες) είτε άμεσα, είτε μέσω επέκτασης της ιδιοσυνάρτησης. Με αυτό τον τρόπο καθορίστε την ισότητα της (11.26).
2. Αναπτύσσοντας μια ασταθής συνθήκη, δείξτε ότι για μεγάλο n , οι διαδοχικοί λόγοι των ανώτερων ορίων:

$$\frac{\lambda^{(n-1/2)} - \lambda^{(n)}}{\lambda^{(n)} - \lambda^{(n+1/2)'}}$$
(11.72)

προσεγγίζουν λ_2 / λ_1 .

3. Σε γενικές γραμμές, δείξτε ότι οι διαδοχικοί λόγοι των χαμηλότερων ορίων πλησιάζουν το ίδιο όριο, αλλά με πιο αργούς ρυθμούς. Ωστόσο, εάν το κατώτερο όριο για λ_2 αντικατασταθεί ακριβώς με την τιμή του λ_2 , η σύγκλιση είναι πολύ πιο γρήγορη, και η οριακή τιμή είναι λ_3 / λ_1 .
4. Θεσπίστε των αθροιστικό κανόνα για τις ιδιοτιμές H -λειτουργία, (11.69).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Kimball A. Milton, J. Schwinger: *Electronic Radiation: Variational Methods, Waveguides and Accelerators* (University of Oklahoma, USA). Εκδόσεις Springer, Ολλανδία, 2006. Μπφ Κ. Βαμβάκος, (μπφ σελίδες: 95-131 και 185-225)

<http://thesciencedictionary.org/>