ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ

Συγγραφή αλγορίθμου επίλυσης ευθέος προβλήματος διάδοσης σεισμικών κυμάτων

Nonlinear inversion of seismic data

Διπλωματική εργασία που υποβλήθηκε στο τμήμα Ηλεκτρονικής ΤΕΙ Κρήτης

Επιμέλεια: Παναγιώτης Παντζέκος Α.Μ. 3769
Επίβλεψη: Δρ. Παντελής Σουπιός

Χανιά 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός της εργασίας είναι η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος στη σεισμική διασκόπηση και η κατασκευή κατάλληλου λογισμικού. Το λογισμικό είναι σε θέση να παράγει μοντέλα ταχυτήτων για δισδιάστατο και τρισδιάστατο χώρο, έχοντας ως δεδομένα τους χρόνους διαδρομής σεισμικών κυμάτων και τις ακριβείς θέσεις των πηγών - γεωφώνων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην διασκόπηση μεταξύ γεωτρήσεων.

Μετά από μια σύντομη εισαγωγή, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη αναφορά στις θεωρητικές έννοιες που αφορούν τα σεισμικά κύματα και τις σεισμικές μεθόδους. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των μεθόδων σεισμικής τομογραφίας μεταξύ γεωτρήσεων. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η γενική θεωρία της Αντιστροφής. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μέθοδοι αντιστροφής και γίνεται επιλογή μιας από αυτές για την επίλυση του γραμμικού συστήματος, το οποίο προκύπτει στις συγκεκριμένες εφαρμογές. Γίνεται επίσης περιγραφή της συγκεκριμένης μεθόδου αντιστροφής που επιλέχθηκε. Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη παρουσίαση του προγράμματος επίλυσης του ευθέος και αντιστρόφου προβλήματος στη σεισμική διασκόπηση και γίνεται περιγραφή του λογισμικού. Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προήλθαν με την χρήση συνθετικών δεδομένων. Τέλος στο έβδομο κεφάλαιο γίνεται συνόψιση των επιστημονικών αποτελεσμάτων της διατριβής.

Ευχαριστώ θερμά τον Δρ. Παντελεήμων Σουπιό, Αν. Καθηγητή του ΤΕΙ Κρήτης και την ανάθεση και επίβλεψη της πτυχιακής μου εργασίας.

Κατά την διάρκεια της εργασίας που εκπονήθηκε, η οικογένεια μου με περιέβαλε με αγάπη και μου πρόσφερε βοήθεια σε κάθε είδους προβλήματα που παρουσιάστηκαν.

Υπήρξαν και άλλα άτομα που έδρασαν καταλυτικά και βοήθησαν να ολοκληρωθεί η παρούσα εργασία. Τα ευχαριστώ πολύ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πραγματοποίηση της γεωφυσικής διασκόπησης σε κάποιο χώρο είναι αναγκαία από οικονομικής άποψης για τον εντοπισμό και την ορθολογικότερη αξιοποίηση ενός κοιτάσματος, ενός υδροφορέα ή ενός γεωθερμικού πεδίου καθώς και για τη γνώση ιδιοτήτων του εδάφους για ασφαλή δόμηση (μικροζωνική μελέτη) ή και για άλλες γεωτεχνικές, γεωλογικές, τεκτονικές ή και αρχαιολογικές μελέτες.

Από τις μεθόδους γεωφυσικής διασκόπησης του υπεδάφους, αυτές που χρησιμοποιούνται περισσότερο στην έρευνα υδρογονανθράκων, είναι οι σεισμικές μέθοδοι.

Οι σεισμικές μέθοδοι βασίζονται στη δημιουργία ελαστικών κυμάτων με χρήση διαφόρων πηγών (μηχανικές κρούσεις ή εκρηκτικές ύλες), και στην ακριβή μέτρηση του χρόνου άφιξης στη θέση του γεωφώνου. Οι κύριες μέθοδοι σεισμικής διασκόπησης διακρίνονται επίσης :

σε σεισμική διάθλαση, σεισμική ανάκλαση και στη σεισμική διασκόπηση μεταξύ γεωτρήσεων.

1.1 Σεισμικά κύματα

Η θεωρία της ελαστικότητας διατείνεται ότι ένα εδαφικό υλικό όταν υπόκειται σε εξωτερικές δυνάμεις, τείνει να μεταβάλλει είτε τον όγκο του, είτε το σχήμα του. Οταν το υλικό παραμένει αμετάβλητο μετά την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, τότε χαρακτηρίζεται ως ελαστικό. Το αποτέλεσμα της επίδρασης τάσεων στο μέσο είναι η παραγωγή ελαστικών κυμάτων.

Τα σεισμικά κύματα είναι μια σύνθετη μορφή κίνησης μιας διαταραχής μέσα στο μέσο, στο οποίο εφαρμόστηκε η τάση. Οταν εφαρμοστεί τάση απότομα σε σημείο ελαστικού μέσου ή όταν στο σημείο αυτό απελευθερωθεί απότομα ενέργεια προκαλείται παραμόρφωση, η οποία διαδίδεται στο ελαστικό μέσο υπό μορφή ελαστικών κυμάτων. Η πρώτη περίπτωση μπορεί να υπάρξει με την κρούση του εδάφους με ένα σφυρί ή με την πτώση βάρους ή λόγω τεχνητής έκρηξης, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο. Η δεύτερη περίπτωση είναι αυτή που δημιουργείται λόγω διάρρηξης των πετρωμάτων στην εστία του σεισμού.

Σε ένα ελαστικό και ισότροπο μέσο απείρων διαστάσεων αναπτύσσονται δύο είδη ελαστικών κυμάτων, τα επιμήκη και τα εγκάρσια, τα οποία ονομάζονται κύματα χώρου. Όταν όμως το ελαστικό μέσο δεν επεκτείνεται στο άπειρο προς όλες τις διευθύνσεις, αλλά περιορίζεται από μία ορισμένη επιφάνεια, π.χ την επιφάνεια της Γης, αναπτύσσεται και ένα άλλο είδος ελαστικών κυμάτων, τα επιφανειακά κύματα, τα οποία διακρίνονται σε κύματα Rayleigh και Love.

1.2 Κύματα χώρου

Η κυματική κίνηση αναπτύσσεται εξαιτίας μιας διαταραχής μέσα στην ύλη και περιγράφεται από δύο είδη κυμάτων χώρου. Τη μία κατηγορία αποτελούν τα διαμήκη ή επιμήκη κύματα. Την δεύτερη κατηγορία αποτελούν, τα εγκάρσια ή διατμητικά κύματα. Τα κύματα αυτά συμβολίζονται με τα αγγλικά γράμματα P και S, αντίστοιχα.

Τα επιμήκη κύματα διαδίδονται γρηγορότερα μέσα στον χώρο, κατά την διεύθυνση διάδοσης του κύματος και προκαλούν πυκνώματα και αραιώματα της ύλης.

Η ταχύτητα διάδοσης δίνεται από την σχέση

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{1.1}$$

όπου λ, μ είναι οι σταθερές του Lame και ρ η πυκνότητα του μέσου.

Τα εγκάρσια κύματα θέτουν το μέσο σε ταλάντωση κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης τους, προκαλώντας έτσι διατμητική κίνηση στο εσωτερικό του υλικού (σχ. 1.1). Εχουν δύο βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι καθορίζονται με αντίστοιχες κινήσεις σε δύο διαφορετικά επίπεδα, είναι δηλαδή πολωμένα κύματα. Η ιδιότητα τους αυτή, χρησιμοποιείται για την αναγνώριση τους όταν εφαρμόζονται σεισμικές μέθοδοι διασκοπήσεις. Τα εγκάρσια κύματα είναι είτε κατακόρυφα πολωμένα οπότε χαρακτηρίζονται ως SV, είτε οριζόντια πολωμένα κύματα και χαρακτηρίζονται ως SH. Η ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων δίνεται από την σχέση

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.2}$$

όπου οι παράμετροι μ και ρ έχουν την ίδια σημασία με αυτή της σχέσης (1.1).

Οι ταχύτητες διάδοσης των σεισμικών κυμάτων στα πετρώματα εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως, το πορώδες, η λιθολογία, το βάθος, η ηλικία του πετρώματος, ο βαθμός διάρρηξης του πετρώματος, ο βαθμός πληρότητας του πετρώματος με ρευστά κ.α. Στην περίπτωση ενός μη ομογενούς και ισότροπου μέσου η διάκριση των πρώτων αφίξεων στα P και S κύματα είναι εξαιρετικά δύσκολη. Η δυσκολία αυτή οφείλεται στο πλήθος των φυσικών φαινομένων που συνδέονται με την διάδοση των σεισμικών κυμάτων στο μέσο, όπως για παράδειγμα στην μετατροπή των επιμήκων σε εγκάρσια κύματα και αντίστροφα. Από τη μεταβολή των σεισμικών ταχυτήτων προκύπτουν και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γεωλογικών σχηματισμών.

Οι Raymond et al. (1976), βρήκαν ότι οι ταχύτητες διάδοσης των επιμήκων κυμάτων εξαρτώνται περισσότερο από τον βαθμό κορεσμού του εδάφους. Αντίθετα, η ταχύτητα των διατμητικών κυμάτων εξαρτάται περισσότερο από τον τύπο του εδάφους και την αντοχή του.

Οι Mathisen et al. (1995) παρατήρησαν ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας με το βάθος ή η παρουσία στον χώρο έρευνας αερίων και γενικά ρευστών, επηρεάζουν κατά πολύ τα P κύματα ενώ τα S μένουν ουσιαστικά ανεπηρέαστα.

Η επίδραση των διαφορετικών πετρολογικών ιδιοτήτων, στις ταχύτητες των επιμήκων και εγκαρσίων κύματων, όπως και στον λόγο τους (Tatham και McCormack, 1991).

1.3 Επιφανειακά κύματα

Τα επιφανειακά κύματα, διαδίδονται παράλληλα στην επιφάνεια του ημιχώρου και κυρίως στην ελεύθερη επιφάνεια. Αυτά διακρίνονται ανάλογα με το επίπεδο διάδοσης, κυρίως σε κύματα Rayleigh R και Love L.

Τα κύματα Rayleigh προκαλούν μια σύνθετη κίνηση των σωματιδίων της ύλης κατά την οποία συνδυάζονται δύο συνιστώσες, η οριζόντια (ακτινική) και η κατακόρυφη (διατμητική). Τα υλικά σημεία ταλαντώνονται έτσι ώστε τα ακρότατα να κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές, των οποίων ο μεγάλος άξονας είναι κατακόρυφος και ο μικρός άξονας είναι παράλληλος προς την διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τα πλάτη των κυμάτων αυτών είναι μεγάλα κοντά στην επιφάνεια της Γης, και οι κινήσεις των υλικών σημείων πάνω στις ελλείψεις είναι ανάστροφες. Τα πλάτη των κυμάτων ελαττώνονται με το βάθος μέσα στη Γη και από ορισμένο βάθος και κάτω η φορά κίνησης των υλικών σημείων αντιστρέφεται.

Η σωματιδιακή κίνηση στα κύματα Love, περιορίζεται στο οριζόντιο επίπεδο και είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τέτοια επιφανειακά κύματα υπάρχουν μόνο στις περιπτώσεις όπου εδαφικοί σχηματισμοί χαμηλής ταχύτητας είναι υπερκείμενοι άλλων υψηλότερης ταχύτητας.

Τέλος στα επιφανειακά κύματα συμπεριλαμβάνονται και δύο ακόμη είδη, τα κύματα Stoneley και τα σωληνοκύματα (tube waves). Τα πρώτα, διαδίδονται κατά μήκος διεπιφανειών. Συνήθως διαδίδονται σε επιφάνειες επαφής στερεών και ρευστών στρωμάτων, και κάτω από περιορισμούς μεταξύ στερεών εδαφικών στρωμάτων. Τα δεύτερα διαδίδονται κατά την διεύθυνση του άξονα γεώτρησης, πληρωμένης με νερό. Παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για τις ελαστικές ιδιότητες του περιβάλλοντος μέσου.

1.4 Σεισμικές μέθοδοι διασκόπησης

1.4.1 Σεισμική Διάθλαση και Ανάκλαση

Η μέθοδος της σεισμικής διάθλασης εφαρμόζεται για διασκοπήσεις μικρού σχετικά βάθους και για αυτό χρησιμοποιείται περισσότερο για την επίλυση γεωτεχνικών προβλημάτων.

Εφαρμόζεται κυρίως αναγνωριστικά στα πρώτα στάδια μιας μελέτης και συνήθως σε συνδιασμό με άλλες μεθόδους. Η πηγή και τα γεώφωνα τοποθετούνται στην επιφάνεια του εδάφους. Η αρχή της μεθόδου βασίζεται στον προσδιορισμό των πρώτων αφίξεων των επιμήκων και των διατμητικών κυμάτων. Προυπόθεση εφαρμογής της μεθόδου είναι, η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στα υποκείμενα στρώματα να είναι πάντα μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ταχύτητα στα υπερκείμενα.

Η σεισμική μέθοδος της ανάκλασης χρησιμοποιείται για διασκόπηση γεωλογικών σχηματισμών σε μεγάλο βάθος.

Η διάταξη πηγής και γεωφώνων είναι παρόμοια με αυτή της σεισμικής διάθλασης, με τη διαφορά ότι οι αποστάσεις μεταξύ των στοιχείων της διάταξης είναι διαφορετικές. Με την μέθοδο αυτή αξιοποιούνται τα κύματα που προέρχονται από τις ανακλάσεις στις διαχωριστικές επιφάνειες των σχηματισμών. Πρόκειται για μια μέθοδο που χρησιμοποιείται συνήθως για την αναζήτηση κοιτασμάτων υδρογονανθράκων. Θεωρείται ως η πιο ακριβής μέθοδο σε τέτοιου είδους διασκοπήσεις, ενώ δεν μπορεί να εφαρμοστεί για τον καθορισμό της δομής των πολύ επιφανειακών στρωμάτων. Η μέθοδος της σεισμικής ανάκλασης είναι η πιο δαπανηρή από τις μεθόδους γεωφυσικής διασκόπησης.

Οι σεισμικές μέθοδοι έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι μη καταστροφικές και δίνουν την δυνατότητα της συνεχούς κατ΄ έκταση και σε βάθος διασκόπησης, σε μεγάλες αποστάσεις και βάθη, σε αντίθεση με τις εργαστηριακές ή τις σημειακές γεωτεχνικές. Πλεονέκτημα επίσης είναι το χαμηλό τους κόστος σε σχέση με τις γεωτρήσεις, γεγονός που κάνει την χρήση τους ελκυστική.

Τέλος, πρέπει να γίνει αναφορά στην διακριτική ικανότητα των σεισμικών καταγραφών. Με τον όρο διακριτική ικανότητα, εννοείται η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο δόμων, τέτοια ώστε να γίνεται αντιληπτή και εμφανής η παρουσία των δύο δόμων. Αναφερόμενοι στις σεισμικές μεθόδους, μπορούν να τεθούν τα εξής ερωτήματα:

α) τι απόσταση (στο χώρο ή το χρόνο) πρέπει να έχουν δύο επιφάνειες μεταξύ τους, έτσι ώστε να θεωρηθούν κατά την επεξεργασία ως δύο ανακλαστήρες; (κατακόρυφη διακριτική ικανότητα) και

β) τι απόσταση πρέπει να έχουν δύο δομές μεταξύ τους, έτσι ώστε να θεωρηθούν ως δύο ξεχωριστά στοιχεία; (οριζόντια διακριτική ικανότητα).

Ο εντοπισμός και ο διαχωρισμός μιας δομής, εξαρτάται από το λόγο σήματος προς θόρυβο (S/N) καθώς και από τη γνώση και εμπειρία του ερμηνευτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΓΕΩΤΡΗΣΕΩΝ

2.1 Σεισμική τομογραφία μεταξύ γεωτρήσεων (crosswell methods)

Από τις αρχές της δεκαετίας του 1970 έγινε φανερό ότι, τα μονοδιάστατα μοντέλα ταχυτήτων ήταν ανεπαρκή για την σωστή ερμηνεία των χρόνων διαδρομής των κυμάτων χώρου. Ετσι, έγινε αρχικά προσπάθεια επίλυσης αυτού του προβλήματος, με την σύνδεση πολλών μονοδιάστατων μοντέλων, τα οποία τελικά παράγουν ένα ψευδοτρισδιάστατο μοντέλο.

Την ίδια περίοδο έγινε μια προσπάθεια παραγωγής δισδιάστατων και τρισδιάστατων μοντέλων ταχυτήτων με χρήση νέων τεχνικών αντιστροφής. Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με την σεισμική τομογραφία στην γεωφυσική, ήταν οι Aki et al. (1977) για δεδομένα μακρινών σεισμών και οι Aki και Lee (1976) για δεδομένα τοπικών σεισμών.

Στην αυξανόμενη αξιοπιστία των σεισμικών μεθόδων σημαντική είναι η συμβολή της σεισμικής τομογραφίας. Ο όρος τομογραφία παράγεται από την λέξη “τομή” (φέτα, κομμάτι) και σημαίνει απεικόνιση τομής π.χ του υπεδάφους. Πρακτικά, γίνεται καθορισμός των εσωτερικών ιδιοτήτων ενός αντικειμένου, μελετώντας τα αποτελέσματα που προήλθαν από την διεύλεση των “σεισμικών” ακτίνων διαμέσου του σώματος.

Κατά την τομογραφική ανάλυση υποτίθεται είτε, ότι η ιδιότητα ή το χαρακτηριστικό για το οποίο έγινε η ερμηνεία είναι μια συνεχής συνάρτηση θέσης (μέθοδος μετασχηματισμού), ή ότι το μέσο που μελετήθηκε, συνίσταται από πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, καθένα από τα οποία έχει μια διακριτή τιμή της ιδιότητας. Έτσι ο χώρος χωρίζεται σε έναν τρισδιάστατο κάνναβο και τα δεδομένα εκφράζονται ως γραμμικό ολοκλήρωμα κατά μήκος της σεισμικής ακτίνας που κινείται διαμέσου των κελλιών του καννάβου.

Τα σεισμικά κύματα μεταφέρουν πληροφορίες για τον χώρο μελέτης, σκιαγραφώντας τις ανωμαλίες ταχύτητας. Η τομογραφία σαν θεωρία είναι ευρέως εφαρμόσιμη. Σε αντίθεση με άλλες επιστήμες όπου δεχόμαστε ευθύγραμμες ακτίνες, τα σεισμικά κύματα κινούνται σε καμπυλωμένες γραμμές και ο προσδιορισμός της γεωμετρίας αυτών, αποτελεί ένα πρόσθετο πρόβλημα.

Οι τομογραφίες κατατάσσονται στις παρακάτω κατηγορίες:

* Ανακλαστική τομογραφία: κατά την οποία, η πηγή και ο δέκτης είναι στην επιφάνεια και υπολογίζονται κάποιοι συνθετικοί χρόνοι διαδρομής οι οποίοι συγκρίνονται με τους πραγματικούς, σε μια διαδικασία διαδοχικών προσεγγίσεων.

Η μέθοδος αυτή, χρησιμοποιείται για την παραγωγή εικόνων ταχύτητας υψηλής διακριτικής ικανότητας.

* Τομογραφία διάθλασης: σε πεδίο όπου καταγράφονται διαθλώμενα κύματα.

* Τομογραφία χρόνων διαδρομής: στην οποία γίνεται η καταγραφή των χρόνων άφιξης των σεισμικών κυμάτων. Χρησιμοποιείται ως αναγνωριστική μέθοδος για την μοντελοποίηση του χώρου μελέτης (παραγωγή μοντέλων ταχύτητας), επειδή παράγονται χαμηλής διακριτικής ικανότητας εικόνες ταχύτητας. Πολλές φορές τα αποτελέσματα της τομογραφίας χρόνων διαδρομής, αποτελούν το αρχικό μοντέλο για την τομογραφία περίθλασης.

* Τομογραφία εξασθένισης (attenuation tomography): η μέθοδος βασίζεται στην μέτρηση του πλάτους των σεισμικών ακτίνων.

* Τομογραφία περίθλασης: κατά την οποία γίνεται ανάλυση των περιθλώμενων κυμάτων και των κυμάτων διασποράς, για τη παραγωγή του πεδίου ταχυτήτων (Wu και Toksoz 1987, Harris 1987, Pratt και Goulty 1991). Χρησιμοποιούνται τόσο οι χρόνοι άφιξης, όσο και άλλες πληροφορίες των κυματομορφών, όπως τα πλάτη και οι φάσεις.

Η τομογραφία αποτελεί μία από τις πιο ακριβής μεθόδους προσδιορισμού της ταχύτητας των P και των S κυμάτων. Ετσι από τα μέσα της δεκαετίας του 1980, εκδηλώθηκε ενδιαφέρον για την εφαρμογή της μεθόδου της σεισμικής τομογραφίας μεταξύ γειτονικών γεωτρήσεων. Ο λόγος είναι ότι έτσι οδηγούμαστε σε λεπτομερέστερη απεικόνιση του χώρου μελέτης.

Η εφαρμογή της μεθόδου προυποθέτει την ύπαρξη τουλάχιστον δύο γεωτρήσεων, στην μια εκ των οποίων τοποθετείται η πηγή και στην άλλη το γεώφωνο. Σκοπός, είναι η γνώση των ιδιοτήτων του χώρου μεταξύ των γεωτρήσεων (Wong et al. 1987, Rutledge 1989, Lines 1991).

Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου επιτρέπει τον άμεσο και ακριβή προσδιορισμό των ταχυτήτων των επιμήκων και διατμητικών κυμάτων με το βάθος. Πραγματοποιόντας έτσι κάποιο πείραμα με τη σεισμική πηγή τοποθετημένη σε μια γεώτρηση και τα γεώφωνα τοποθετημένα σε διάφορα βάθη σε μια άλλη γεώτρηση, έχουμε έναν αριθμό σεισμικών ακτίνων. Εάν αλλάξουμε την θέση της πηγής μέσα στην γεώτρηση, τότε θα έχουμε ένα νέο αριθμό σεισμικών ακτίνων. Επομένως, όσα περισσότερα είναι τα βάθη στα οποία πυροδοτείται η πηγή, τόσα περισσότερα είναι και τα δεδομένα από τον χώρο μελέτης. Οι χρόνοι διαδρομής των σεισμικών ακτίνων, παρέχουν τομογραφικά δεδομένα τα οποία μας δείχνουν, πως η μεταβολή των ταχυτήτων στον χώρο μεταξύ των γεωτρήσεων μπορούν να επηρεάσουν την σεισμική ακτίνα (Peterson et al. 1985). Θεωρητικά, μπορεί να γίνει καταγραφή τόσο των χρόνων διαδρομής όσο και του πλάτους των κυμάτων. Κατόπιν ακολουθεί επίλυση του συστήματος για τον προσδιορισμό του αγνώστου πεδίου ταχυτήτων και της κατανομής της απόσβεσης στο χώρο (Q-map), στην περιοχή μελέτης. Στη πραγματικότητα όμως, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, γίνεται ερμηνεία μόνο της κατανομής της ταχύτητας στον χώρο και αυτό διότι δεν είναι δυνατή η ακριβής μέτρηση των πλατών των κυμάτων, έτσι ώστε να γίνει ακριβής ερμηνεία της απόσβεσης.

Ανάλογα με τις θέσεις πηγής και γεωφώνου, τον αριθμό των γεωτρήσεων, τις μεταξύ τους αποστάσεις και το βάθος τους, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν κατά περίπτωση οι τρεις επιφανειακές μεθοδολογίες, δηλαδή η διάθλαση, η ανάκλαση και η αναστροφή επιφανειακών κυμάτων. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν κλασικές μεθοδολογίες οι οποίες αφορούν την χρήση κάποιας γεώτρησης ή πλήθους γεωτρήσεων. Για τον προσδιορισμό χαρακτηριστικών των επιμέρους σχηματισμών, γίνεται χρήση των απευθείας P και S κυμάτων, καθώς και των ανακλώμενων και διαθλώμενων, καθώς και των επιφανειακών που διαδίδονται στην διεπιφάνεια μεταξύ της γεώτρησης και του περιβάλλοντος εδάφους.

Η σεισμική τομογραφία μεταξύ γεωτρήσεων πλεονεκτεί έναντι της συμβατικής σεισμικής διάθλασης στο ότι μπορεί να ανιχνεύσει στρώσεις με ταχύτητες μικρότερες από αυτές των υπερκείμενων στρωμάτων.

Ως μειονέκτημα της σεισμικής τομογραφίας μεταξύ γεωτρήσεων θεωρείται η περιορισμένη ισχύς της πηγής γιατί η πυροδότηση γίνεται μέσα στη γεώτρηση. Το αποτέλεσμα είναι να περιορίζεται και η απόσταση όπου ένα σήμα μπορεί να ανιχνευθεί. Ενα άλλο μειονέκτημα της μεθόδου είναι το υψηλό κόστος εφαρμογής της.

Η σεισμική διασκόπηση μεταξύ γεωτρήσεων χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά στην έρευνα υδρογονανθράκων με σκοπό τη λεπτομερή χαρτογράφηση των πετροφυσικών παραμέτρων έτσι ώστε να αυξηθεί το ποσοστό απόληψης πετρελαίου. Μετέπειτα παρατηρήθηκε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την μελέτη των γεωθερμικών πεδίων, όπως π.χ για την εύρεση θραυσιγενών ζωνών. Επίσης χρησιμοποιήθηκε κατά κόρον για τον υπολογισμό των ταχυτήτων με το βάθος.

Η σεισμική τομογραφία είναι κατάλληλη και για εφαρμογές τοπικής κλίμακας, όπως για παράδειγμα σε υπόγεια έργα, φράγματα και λιγνιτορυχεία. Πρωτοποριακή δουλειά στη σεισμική τομογραφία έγινε από ομάδα επιστημόνων με επικεφαλής τον Bois (1972). Από τότε η μέθοδος εφαρμόσθηκε επιτυχώς σε πλειάδα περιπτώσεων όπως για παράδειγμα στην έρευνα αντοχής κρυσταλλικών πετρωμάτων για διάθεση πυρηνικών αποβλήτων, στην τριτογενή παραγωγή πετρελαίου και στην απεικόνιση του μετώπου των τάσεων σε ανθρακορυχεία. Με την επιβεβαίωση της χρησιμότητας της μεθόδου, οι επιστήμονες πειραματίστηκαν τόσο με διάφορες διατάξεις, όσο και με διάφορα είδη πηγών, αλλά και με διάφορες μεθόδους επεξεργασίας και ερμηνείας των δεδομένων.

2.2 Κατακόρυφη σεισμική τομογραφία (V.S.P ή Down - Hole)

Πολλές φορές η σεισμική τομογραφία εφαρμόζεται τοποθετώντας την πηγή στην επιφάνεια και τα γεώφωνα στην γεώτρηση. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να παίρνουμε μια κατακόρυφη σεισμική τομή (Κ.Σ.Τ vertical seismic profile - VSP). Στη μέθοδο αυτή, τα γεώφωνα βρίσκονται σε διάφορα βάθη και καταγράφουν τους χρόνους των πρώτων αφίξεων. Τα γεώφωνα είναι συνήθως σε μικρή απόσταση μεταξύ τους.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου γίνεται χρήση των κυμάτων χώρου P, SV και SH. Επίσης αξιοποιούνται και τα σωληνοκύματα (White 1983), καθώς και τα κύματα Stoneley με την μέθοδο της αναστροφής. Η συγκεκριμένη μέθοδος σεισμικής διασκόπησης, χρησιμοποιείται επίσης στον προσδιορισμό οριζόντων ανάκλασης, τους οποίους η γεώτρηση δεν έχει ακόμα διατρήσει. Η τομογραφική εικόνα που παράγεται από την μέθοδο VSP, δίνει πιο ευκρινή αποτελέσματα από την σεισμική διασκόπηση στην επιφάνεια διότι τα κύματα δεν έχουν να ταξιδέψουν μεγάλες αποστάσεις μέχρι να καταγραφούν. Επίσης η μέθοδος VSP παρέχει δεδομένα τα οποία δεν μπορούν να αποκτηθούν από την εφαρμογή των σεισμικών μεθόδων σε γεωτρήσεις, όπως για παράδειγμα να εντοπιστεί κάποιο ρήγμα.

Στην περίπτωση που μεταβάλλεται η απόσταση της πηγής από την κεφαλή της γεώτρησης, τότε το αποτέλεσμα είναι μια κατακόρυφη σεισμική τομή με ολίσθηση (offset VSP). Αν η πηγή κινείται, αλλά προς διάφορες διευθύνσεις, τότε αποτέλεσμα είναι η αζιμουθιακή σεισμική τομή (azimuthal VSP). Στην περίπτωση όπου η πηγή τοποθετείται στην γεώτρηση και τα γεώφωνα στην επιφάνεια, τότε ορίζεται η ανάστροφη κατακόρυφη σεισμική τομογραφία (reversed VSP - Up Hole) (σχ. 9).

Από τις δυο διατάξεις (κανονική - ανάστροφη κατακόρυφη σεισμική τομογραφία), η δεύτερη έχει τα περισσότερα πλεονεκτήματα (Chen et al. 1990). Τα δεδομένα από την ανάστροφη κατακόρυφη σεισμική τομογραφία (Α.Κ.Σ.Τ) συλλέγονται πιο γρήγορα και πιο οικονομικά. Επίσης, ο λόγος του σήματος προς το θόρυβο είναι μεγαλύτερος λόγω του ότι οι σεισμικές ακτίνες στην Α.Κ.Σ.Τ διανύουν το μεγαλύτερο μέρος του σχηματισμού πριν υποστούν την μεγάλη απόσβεση από το επιφανειακό στρώμα της αποσάρθρωσης. Αντίθετα, οι ακτίνες στην Κ.Σ.Τ. διασχίζουν τον υπό μελέτη σχηματισμό, αφού αποσβεσθούν στο παραπάνω στρώμα.

2.3 Προδιαγραφές διάνοιξης γεώτρησης

Ενα τμήμα της εργασίας υπαίθρου είναι η διάνοιξη των κατάλληλων γεωτρήσεων. Ολες οι εργασίες υπαίθρου (γεωτρήσεις, σωληνώσεις, πλήρωση με ένεμα, επιλογή θέσεων και αποστάσεων) καθώς και οι μετρήσεις που ακολουθούν την εργασία πεδίου, γίνονται σύμφωνα με τις προδιαγραφές της οδηγίας ASTM D4428/D4428M-84.

Για την πραγματοποίηση των μετρήσεων γίνονται γεωτρήσεις με διάμετρο 4.5 - 9.5 in, έτσι ώστε να είναι συμβατή με το μέγεθος του τεχνικού εξοπλισμού. Οι γεωτρήσεις γίνονται είτε και οι δύο κατακόρυφες (έχοντας κάποια μικρή απόκλιση από την κατακόρυφο), είτε και οι δύο κεκλιμένες με την ίδια ή διαφορετική κλίση, είτε η μία κατακόρυφη και η άλλη κεκλιμένη. Συνήθως οι γεωτρήσεις διανοίγονται όσον το δυνατό πιο κοντά στην κατακόρυφο.

Μετρήσεις πραγματοποιούνται τόσο σε σωληνομένες, όσο και σε μη σωληνομένες γεωτρήσεις. Εχει παρατηρηθεί ότι η σωλήνωση στην γεώτρηση, απλοποιεί τη διαδικασία συγκέντρωσης των δεδομένων πεδίου, διότι εξαλείφη την πιθανότητα βύθισης (κατακρήμνισης της γεώτρησης), κατά την διάρκεια ή πριν, της εργασίας υπαίθρου. Στην περίπτωση αμμωδών ή χαλικωδών εδαφών, η χρήση σωλήνωσης είναι επιτακτική.

Η γεώτρηση μπορεί να είναι στεγνή ή γεμάτη με νερό, χωρίς καμμιά επίδραση στην μέτρηση των ταχυτήτων των διατμητικών κυμάτων.

Συχνά είναι απαραίτητη η χρήση ενέματος, το οποίο είναι μίγμα τσιμέντου, μπετονίτη και νερού, έτσι ώστε ο σωλήνας και το περιβάλλον μέσο να αποκτήσουν στενή επαφή. Το πάχος του ενέματος μεταξύ του σωλήνα και των τοιχωμάτων της γεώτρησης δεν πρέπει να υπερβαίνει το 1% της απόστασης μεταξύ των γεωτρήσεων. Ενα πιο παχύ ένεμα θα είχε αρνητικές επιδράσεις στον χρόνο διαδρομής μεταξύ των γεωτρήσεων. Η χρήση ενέματος δεν είναι πάντα απαραίτητη. Η γεώτρηση στην οποία τοποθετούνται τα γεώφωνα, μπορεί να παραμείνει γεμάτη από την λάσπη που προέρχεται από την διάτρηση. Το γέμισμα με άμμο γύρω από τον σωλήνα της γεώτρησης, δεν φαίνεται να λειτουργεί καλά ειδικά για βαθιές γεωτρήσεις.

Οι γεωτρήσεις διατάσσονται στον χώρο με τρόπο έτσι ώστε να καλύπτεται μεγαλύτερη περιοχή του χώρου μελέτης. Επιδιώκεται επίσης η καλύτερη δυνατή απεικόνιση του αντικειμένου που πρέπει να ανιχνευθεί. Πολλές φορές οι γεωτρήσεις έχουν ακτινική διάταξη, έτσι ώστε μετά το τέλος της έρευνας να παράγεται τρισδιάστατη απεικόνιση του χώρου μελέτης.

Οι αποστάσεις των γεωτρήσεων μεταξύ τους, είναι της τάξης των δεκάδων μέτρων συνήθως, έως και εκατοντάδων μέτρων για μελέτες με μεγάλη απόσταση γεωτρήσεων. Η επιλογή κάθε φορά της απόστασης των γεωτρήσεων, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην ποιότητα των δεδομένων, καθορίζεται από το είδος της πηγής και από την ισχύ της, από το είδος των σχηματισμών που μεσολαβούν μεταξύ των γεωτρήσεων και καθορίζουν την απόσβεση ή όχι του σήματος και τέλος, από το αν είναι αναγκαία ή όχι, η μεγάλη απόσταση στην έρευνα.

Οι Mathisen et al. (1995) παρατήρησαν ότι τα δεδομένα κυμάτων P και S, από δίκτυο γεωτρήσεων με μεγάλη απόσταση, ήταν χαμηλότερης ποιότητας. Αντίθετα, αυτά των μικρών αποστάσεων είχαν υψηλότερο συχνοτικό περιεχόμενο, καλύτερο λόγο σήματος προς θόρυβο και μικρότερη παραμόρφωση φάσης.

Στην περίπτωση της διασκόπησης σε μεγάλες αποστάσεις προτιμούνται σεισμικές πηγές υψηλών συχνοτήτων (μερικών kHz), οι οποίες βελτιώνουν την ποιότητα των δεδομένων αλλά και την ευκολία με την οποία μπορεί να γίνει ο καθορισμός της πρώτης άφιξης.

Τα βάθη στα οποία πραγματοποιούνται οι μετρήσεις εξαρτώνται από τον στόχο που υπάρχει κάθε φορά. Ετσι, π.χ, στην μεταλλευτική και γεωθερμική έρευνα τα βάθη είναι μεγάλα φτάνοντας πολλές φορές μέχρι και τα 3000 m.

Οι γεωτρήσεις κατά την διάρκεια της μελέτης χρησιμοποιούνται κατά ζευγάρια. Στην μία από αυτές τοποθετούνται οι σεισμικές πηγές και στην άλλη τα υδρόφωνα που είναι συνήθως τριών συνιστωσών. Πολλές φορές γίνεται χρήση δύο γεωτρήσεων, ή ενός δικτύου γεωτρήσεων με άλλο τρόπο διάταξης, όπου τοποθετούνται για παράδειγμα, μέσα σε όλες τις γεωτρήσεις, δέκτες και έχω μία πηγή ή ένα δίκτυο πηγών στην επιφάνεια, ή και το αντίστροφο.

2.4 Δέκτες - γεώφωνα

Τα γεώφωνα έχουν τον ρόλο του φωρατή, δηλαδή μετασχηματίζουν την κίνηση του εδάφους σε ηλεκτρικό σήμα. Συνήθως χρησιμοποιούνται γεώφωνα τριών συνιστωσών (μια κατακόρυφη και δύο οριζόντιες), ιδιοσυχνότητας 8Hz. Ο τρόπος με τον οποίο τοποθετούνται οι πηγές και οι φωρατές μέσα στις γεωτρήσεις, ποικίλει, για αυτό και κάθε εταιρία εφαρμόζει την δική της μέθοδο.

Υπάρχουν συστήματα, όπου ο πομπός και ο δέκτης διαθέτει ένα αερόσακκο που φουσκώνει και έτσι αυτά τα όργανα σταθεροποιούνται στο επιθυμητό βάθος. Η πίεση που εφαρμόζεται για να σταθεροποιηθεί το γεώφωνο είναι 5psi περίπου. Για την εισαγωγή του αέρα, χρησιμοποιείται μια αεραντλία. Στην σεισμική τομογραφία, τα γεώφωνα απαιτείται να έχουν υψηλή ευαισθησία, να λειτουργούν σε μεγάλο εύρος συχνοτήτων έτσι ώστε να δίνουν σήμα στις πιθανές μικρές συχνότητες, και να παρέχουν καλή ανάλυση του σήματος. Το σύστημα που έχει δώσει τα καλύτερης ποιότητας δεδομένα είναι η μέθοδος με τους τσιμεντομένους δέκτες (cemented receiver). Το τσιμεντομένο καλώδιο των γεωφώνων παίζει σπουδαίο ρόλο στη συλλογή καλής ποιότητας δεδομένων, διότι :

α) βελτιώνει την ποιότητα των δεδομένων, λόγω καλύτερης σύζευξης μεταξύ γεώτρησης και γεωφώνων,

β) μειώνεται κατά πολύ ο χρόνος που χρειάζεται για την ολοκλήρωση μιας τομογραφίας,

γ) μειώνει την αβεβαιότητα που εισάγει στις μετρήσεις η θέση και ο προσανατολισμός των γεωφώνων κατά την διάρκεια των μετρήσεων.

Υπάρχουν διαφορές και στις αποστάσεις μεταξύ των δεκτών ή των πηγών. Οι απόστασεις κυμαίνονται από τα 10 m έως και τα 70 cm. Στην τελευταία περίπτωση γίνεται μια πιο λεπτομερής μελέτη του χώρου. Στα πλεονεκτήματα της πολύ πυκνής δειγματοληψίας συμπεριλαμβάνεται η αποφυγή της τμηματικής δίπλωσης των υψηλών συχνοτήτων στα σωληνοκύματα. Με την πολύ πυκνή δειγματοληψία επιτυγχάνετε επίσης η αναγνώριση λεπτών ενστρώσεων.

Κατά την διαδικασία των μετρήσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί καταγραφικό ενός καναλιού ή πολυκάναλο.

Με την χρήση τέτοιου καταγραφικού, επιτυγχάνεται η καταγραφή έως και 1600 σεισμικών ακτίνων (π.χ με το συνδιασμό 40 πηγών και 40 δεκτών). Η πολλαπλότητα των σεισμικών ακτίνων, παίζει σπουδαίο ρόλο στην ακρίβεια και τη σωστή γεωλογική ερμηνεία των μετρήσεων. Σε διάφορες περιπτώσεις, έχει μετρηθεί ότι για την πραγματοποίηση των μετρήσεων με 40 κανάλια, χρειάζονται περίπου 6 ώρες, ενώ με 120 κανάλια μόνο 2 ώρες.

2.5 Είδη πηγών

Ένας από τους σημαντικούς παράγοντες για τη σωστή πραγματοποίηση μιας γεωφυσικής διασκόπησης είναι η πηγή των ελαστικών κυμάτων.

Τα είδη των πηγών που χρησιμοποιούνται κατά την διάρκεια σεισμικής διασκόπησης είναι, το αεροβόλο (Airgun), ο υδραυλικός δονητής (Vibrator), ο δυναμίτης (Dynamite) και ο πιεζοηλεκτρικός καμπτήρας (Piezoelectric bender). Η επιλογή της πηγής (μηχανική ή εκρηκτική), εξαρτάται κάθε φορά από το μέγεθος της ισχύος που επιθυμείται, όπως και από το συχνοτικό περιεχόμενο του συρμού που παράγεται και κατά συνέπεια επηρεάζει το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος (λόγω κοντινού πεδίου). Εάν χρειαζόμαστε υψίσυχνο περιεχόμενο, τότε χρησιμοποιούμε έκρηξη, ενώ στην περίπτωση που θέλουμε χαμηλόσυχνο περιεχόμενο χρησιμοποιούμε μηχανική πηγή.

Η παραγωγή των ελαστικών κυμάτων πρέπει να είναι επαναλήψιμη, έτσι ώστε στο ίδιο σημείο δοκιμής να επαναλαμβάνονται οι μετρήσεις. Οποιο είδος πηγής και να χρησιμοποιηθεί, το σήμα το οποίο κάθε φορά συλλέγεται και καταγράφεται, είναι το άθροισμα του αποτελέσματος 4 εως 16 ανά σημείο πυροδοτήσεων.

Η χρήση των εκρηκτικών πηγών, δίνει πιο ευδιάκριτες τις πρώτες αφίξεις των P κυμάτων, σε αντίθεση με τις μηχανικές πηγές που παράγουν πιο ευδιάκριτες τις αφίξεις των S κυμάτων και σχεδόν άτονες αφίξεις των P κυμάτων (McLamore et al. 1978).

2.6 Πραγματοποίηση των σεισμικών καταγραφών : stop-and-go method και on the fly method.

Οταν χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά η συνεχής μέθοδος μετρήσεων (on the fly) θεωρήθηκε σημαντική καινοτομία. Σύμφωνα με αυτήν, η πηγή πυροδοτείται κατ' επανάληψη, καθώς αυτή κινείται συνεχώς προς τα πάνω. Η μέθοδος με τις διακριτές μετρήσεις (stop and go) είναι γενικά πολύ αργή και ακατάλληλη για πυκνή δειγματοληψία. Η χρήση της νέας συνεχούς μεθόδου (on the fly) έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

α) βελτίωσε κατά πολύ τον έλεγχο των μετρήσεων με το βάθος (improve depth control),

β) έδωσε την δυνατότητα πολύ πυκνής δειγματοληψίας, πράγμα που είχε ως αποτέλεσμα την αποφυγή του φαινομένου της δίπλωσης σε σήματα υψηλών συχνοτήτων

γ) έδωσε την δυνατότητα καταγραφής με ρυθμό 1000 μετρήσεις ανά ώρα.

Με τη συνεχή μέθοδο, για να καταγραφούν 40000 σεισμικά ίχνη χρειάζεται περίπου 40 ώρες, δηλαδή 10 φορές ταχύτερα από την προηγούμενη μέθοδο καταγραφής. Η αύξηση της ταχύτητας με την οποία γίνεται η λήψη των μετρήσεων και η δυνατότητα πιο πυκνών μετρήσεων (on the fly method), είχε σαν αποτέλεσμα να μειωθεί η συμμετοχή του ανθρώπινου παράγοντα, και άρα να μειωθεί το ανθρώπινο λάθος, ενώ ταυτόχρονα βελτιώθηκε η ποιότητα των δεδομένων.

2.7 Τι μετράται σε ένα πείραμα μεταξύ γεωτρήσεων

Κατά την διάρκεια των μετρήσεων γίνεται καταγραφή των απευθείας P και S κυμάτων, των πρώτων P και S ανακλάσεων, των μετατροπών των P σε S και αντίστροφα. Τα απευθείας επιμήκη κύματα καταφθάνουν πριν τα εγκάρσια.

Οι χρόνοι διαδρομής των απευθείας επιμήκων κυμάτων είναι εύκολο να μετρηθούν με σημαντική ακρίβεια. Μεταγενέστερες αφίξεις επιμήκων κυμάτων, δεν αποτελούν δεδομένα για επεξεργασία, διότι περιέχουν καταγραφές θορύβων. Αντίθετα, οι πρώτες αφίξεις των εγκαρσίων κυμάτων είναι πολύ ασαφείς λόγω των άλλων τύπων κυμάτων (σωληνοκύματα και κύματα που προέκυψαν από τις μετατροπές), με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται ελάχιστα στην σεισμική τομογραφία. Τυπικές καταγραφές κυματομορφών μέσα σε γεωτρήσεις δίνονται στο σχήμα 2.10, στο οποίο παρουσιάζονται οι αφίξεις των P, S κυμάτων, καθώς και οι πρώτες αφίξεις των κυμάτων από τη λάσπη που εμπεριέχεται μέσα στη σωληνομένη γεώτρηση και τα σωληνοκύματα.

Στην περίπτωση όμως που γίνει χρήση κατάλληλης πηγής παραγωγής S κυμάτων, τότε τα S κύματα αναγνωρίζονται ευκολότερα από ότι τα P, γιατί χαρακτηρίζονται από σχετικά μεγάλο πλάτος και μεγάλη περίοδο, σε σχέση με τα P. Τα P κύματα, εύκολα συγχέονται με το θόρυβο, λόγο του μικρού πλάτους και του πλουσίου σε υψηλές συχνότητες φάσματός τους.

Με χρήση μόνο των P κυμάτων σε πειράματα σεισμικής τομογραφίας, έχει γίνει γεωλογική ερμηνεία μιας περιοχής (Lo et al. 1990, Harris et al. 1990, Lines 1991, Justice et al. 1992), προσδιορισμός λιθολογίας και πορώδους (Inderwiessen και Lo 1990, Lines et al. 1993), προσδιορισμός κορεσμού σε ρευστά (Lo et al. 1990) και ανίχνευση υπεδάφιου CO_2 (Justice et al. 1993).

Εχει παρατηρηθεί ότι η παρουσία ρευστών στον χώρο έρευνας, επηρεάζει πολύ την ταχύτητα των S κυμάτων και όχι των P. Σύμφωνα με τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι καλής ποιότητας δεδομένα κατά την έρευνα σε γεωθερμικά πεδία γίνεται μόνο με τη χρήση των διατμητικών κυμάτων όπως προτάθηκε από τους Medlin και Alhilali (1990).

Επίσης, η ύπαρξη υδροφόρου ορίζοντος, η μεγάλη ακουστική αντίθεση και οι ετερογένειες των εδαφικών υλικών είναι ικανές να προκαλέσουν συμβολές των ανακλώμενων, διαθλώμενων και περιθλώμενων κυμάτων, σε βαθμό που να αλλοιώνονται αισθητά οι χρόνοι διαδρομής των πρώτων αφίξεων, ιδιαίτερα των P κυμάτων (Statton et al. 1978).

Σε πειράματα σεισμικής τομογραφίας, έχει παρατηρηθεί ότι τα πλούσια σε υψηλές συχνότητες δεδομένα, είναι κατάλληλα μόνο για τομογραφία χρόνων διαδρομής, ενώ είναι ακατάλληλα για τομογραφία ανακλάσεων (Rector et al. 1995).

Μεταξύ των ποσοτήτων που μετρώνται σε ένα πείραμα σεισμικής τομογραφίας, είναι και ο λόγος Poisson (σ). Α η τιμή του λόγου αυτού, βρεθεί μικρότερη του 0.35 αυτό αποτελεί ένδειξη παρουσίας ρευστών (Mathisen et al. 1994).

Υπάρχει διαφορά στην καταγραφή και την επεξεργασία των P και των S κυμάτων. Ετσι για τα P κύματα χρησιμοποιούμε κοινές οικογένειες δεκτών ενώ για τα S κύματα χρησιμοποιούνται κοινές οικογένειες πηγών.

Ταυτόχρονα γίνεται καταγραφή διαθλάσεων και ανακλάσεων (προς τα πάνω και προς τα κάτω (upgoing - downgoing) επιφανειακών κυμάτων, κωνικών κυμάτων (conical waves) κ.α.

2.8 Θόρυβος

Τα κύματα που παράγει η σεισμική πηγή, είναι αυτά που απαιτούνται για την μελέτη της ερευνόμενης περιοχής. Στην περίπτωση όμως της σεισμικής διασκόπησης, τα κύματα που φθάνουν και καταγράφονται στα γεώφωνα, είναι ένα μίγμα από αυτά τα κύματα και θόρυβο. Ως θόρυβο θεωρούμε όλα τα σήματα, τα οποία παρεμβάλονται σε αυτά που παρήγαγε η πηγή, και από τα οποία δεν μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την δομή του υπεδάφους.

2.8.1 Θόρυβος κατά την διάρκεια των καταγραφών

Ο θόρυβος ανάλογα με την προέλευση του χωρίζεται σε πέντε κατηγορίες:

* *θόρυβος περιβάλλοντος*

Ο τύπος αυτός θορύβου προέρχεται από σήματα που καταφθάνουν στα όργανα συνεχώς, ακόμα και κατά την απουσία του σήματος της πηγής. Ο θόρυβος αυτός αποτελεί κάτι το μόνιμο αλλά μεταβάλλεται με τον χρόνο και την απόσταση. Πηγές του θορύβου είναι ο άνεμος, η ανθρώπινη κίνηση κατά την διάρκεια των μετρήσεων καθώς και οι μικροδονήσεις από την κυκλοφορία οχημάτων κοντά στην περιοχή μελέτης.

Για την εξουδετέρωση της επίδρασης του θορύβου αυτού, ενισχύεται το πλάτος του σεισμικού σήματος, δηλαδή αυξάνεται η ενέργεια του. Ετσι αφού ο θόρυβος δεν εξαρτάται από την πηγή γένεσης των κυμάτων, δεν θα αυξάνεται, με την αύξηση της ενέργειας την οποία εισάγουμε στο έδαφος στην θέση της πηγής.

- *Γεωλογικός θόρυβος*

Παράγοντα σφάλματος μπορεί να αποτελέσει επίσης, η πληρότητα ή όχι των διακένων ανάμεσα στην γεώτρηση και στην σωλήνωση της, καθώς και το είδος του υλικού πλήρωσης. Πρέπει τα διάκενα να γεμίσουν με υλικό που να έχει ανάλογη υφή με αυτή του εδάφους. Η πλήρωση με ένεμα βοηθάει, έτσι ώστε να περιορίζεται η ζώνη διατάραξης.

- *Θόρυβος από την πηγή*

Ο θόρυβος που παράγεται από την πηγή είναι αυτός της ιδιοκίνησης του εδάφους λόγω πυροδότησης. Γενικά το μέγεθος αυτού του θορύβου αυξάνει με την αύξηση της μεταδιδόμενης ενέργειας στο έδαφος. Ετσι αύξηση της ενέργειας της πηγής δεν βελτιώνει τον λόγο του σήματος προς το θόρυβο.

Ακόμη θόρυβος είναι οι φυσαλίδες που παράγονται κατά την διάρκεια της εκτόνωσης των αεροβόλων μέσα στις γεωτρήσεις. Αρα όσο μεγαλύτερης ενέργειας πηγή αυτού του είδους χρησιμοποιήσουμε, τόσο περισσότερο θόρυβο θα παράγουμε. Επίσης έχει διαπιστωθεί ότι ο θόρυβος μπορεί να προέρχεται από την εισαγωγή αέρα μέσα στα υγρά της γεώτρησης κατά την διάνοιξη.

- *Θόρυβος από τα όργανα*

Ο θόρυβος αυτός είναι μια διαφορετική κατηγορία. Οι παραπάνω τύποι καταγράφονται μαζί με τα χρήσιμα σήματα. Ο θόρυβος των οργάνων υπάρχει από τα ίδια τα όργανα και μπορεί να υφίσταται ακόμα και αν δεν υπάρχει εισαγωγή σήματος. Αποτελεί ουσιαστικά παραμόρφωση που προέρχεται από την επεξεργασία που υφίστανται το σήμα όταν εισάγεται στο όργανο. Τέτοιο παράδειγμα είναι η μετατροπή του αναλογικού σήματος εξόδου του γεωφώνου σε ψηφιακό από τον καταγραφέα.

- *Θόρυβος εξαιτίας ατελειών στη σχεδίαση της διασκόπησης και σφαλμάτων παρατήρησης.*

Στην κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται τα σφάλματα κατά τον σχεδιασμό του καννάβου μετρήσεων, καθώς και στη μέτρηση των αποστάσεων.

Η μη σωστή εκτίμηση του κατακόρυφου των γεωτρήσεων μπορεί να εισάγει λάθη μεγάλης τάξης στους χρόνους διαδρομής των αφίξεων βάσει των οποίων υπολογίζονται οι ταχύτητες. Το σφάλμα υπεισέρχεται λόγω του ότι η απόκλιση αυτή ως προς την κατακόρυφο, μεγαλώνει ή μικραίνει την απόσταση μεταξύ των γεωτρήσεων με αποτέλεσμα όταν υπολογίζετε η ταχύτητα να υπάρχει λάθος στους υπολογισμούς.

Σφάλματα παρατηρήσεως κατά την μέτρηση των χρόνων άφιξης των σεισμικών κυμάτων από τις κυματομορφές συμπεριλαμβάνονται επίσης στην κατηγορία αυτή.

Τέλος, σφάλματα κατά την επεξεργασία των μετρήσεων από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, μπορούν να εισαχθούν είτε ως παρενέργεια της συγκεκριμένης μαθηματικής διεργασίας που χρησιμοποιήθηκε, είτε από επιπολαιότητα του χειριστή.

2.8.2 Αξιολόγηση θορύβου - αντιμετώπιση

Εχοντας αξιολογήσει το πλάτος των σημάτων που καταγράφονται, πρέπει να γίνει και μια αξιολόγηση του θορύβου, έτσι ώστε κατόπιν να ακολουθήσει φιλτράρισμα των κυματομορφών.

Ο διαχωρισμός του σεισμικού σήματος από τη σύνθεση σήματος και θορύβου την οποία τελικά καταγράφουμε, εξαρτάται από τον λόγο του σήματος προς το θόρυβο και από την ύπαρξη κάποιων διαφορών μεταξύ των δύο αυτών ποσοτήτων. Το πιο σωστό είναι να επιμένουμε στη μεγιστοποίηση του λόγου σήματος προς το θόρυβο. Βέβαια πρέπει πάντα να έχουμε ως αρχή την προστασία της ακεραιότητας του σήματος. Ενας τρόπος βελτίωσης του λόγου σήματος προς θόρυβο είναι η χρήση φίλτρων κατά την διαδικασία συλλογής των μετρήσεων.

Γενικά προβλήματα που αντιμετωπίζουμε είναι, η δυσκολία στον προσδιορισμό των ανακλαστήρων λόγω του χαμηλού λόγου σήματος προς θόρυβο, η μη επάρκεια δεδομένων που προκαλεί δίπλωση και η παρουσία μεγάλου πλάτους σημάτων όπως οι αφίξεις των σωληνοκυμάτων.

2.8.3 Σφάλματα που οφείλονται στην επεξεργασίας των μετρήσεων και στις ερμηνευτικές υποθέσεις

Σφάλματα τέτοιου είδους προέρχονται από το στάδιο στο οποίο γίνεται η επεξεργασία των μετρήσεων από το πρόγραμμα επεξεργασίας ώστε να καταλήξουμε σε αναπαραγωγή του πεδίου των ταχυτήτων στην περιοχή.

Αιτίες τέτοιων σφαλμάτων είναι οι ακόλουθες:

- Η προσπάθεια ερμηνείας μοντέλων που δεν συμφωνούν με την υπόθεση της επίπεδης και οριζόντιας γεωμετρίας των εδαφικών στρώσεων.
- Για την ίδια περιοχή μελέτης, οι υψηλές αντιθέσεις ταχύτητας, συντελούν στο να εξάγονται λανθασμένα αποτελέσματα.
- Η περίπτωση κατά την οποία έχουμε ορική διάθλαση της σεισμικής ακτίνας.
- Όταν η σεισμική ακτίνα εφάπτεται μιας πλευράς ενός κελλιού, έτσι ώστε το κελί στο οποίο διέρχεται η ακτίνα, να μην αναγνωρίζεται.
- Ο μεγάλος αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης στην λύση οδηγεί τελικά σε απόκλιση αυτής.
- Οταν το μέγεθος της κλίμακας των ανομοιογενειών του πετρώματος είναι συγκρίσιμο με το μήκος κύματος της σεισμικής ακτίνας. Στην περίπτωση αυτή δεν εντοπίζεται η ανομοιογένεια.
- Οταν δεν υπάρχουν αρκετές μετρήσεις χρόνων διαδρομής ακτίνων οι οποίες να διέρχονται από τα κελλιά.

2.8.4 Σφάλματα που προέρχονται από μεθοδολογικούς περιορισμούς.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου διάθλασης, υπάρχουν δύο περιορισμοί οι οποίοι δεν επιτρέπουν την ανίχνευση ορισμένου στρώματος κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Συγκεκριμένα ο πρώτος περιορισμός είναι, όταν το στρώμα έχει μικρό πάχος ή η ταχύτητα του είναι σχεδόν η ίδια με την ταχύτητα στο αμέσως υπερκείμενο στρώμα. Ο δεύτερος περιορισμός αφορά την περίπτωση που η ταχύτητα μέσα σε κάποιο στρώμα είναι μικρότερη από τη ταχύτητα στο αμέσως από πάνω του στρώμα.

2. 9 Επίδραση των γεωτρήσεων πηγών - δεκτών

Οι γεωτρήσεις οι οποίες είναι πληρωμένες με νερό προκαλούν πολύπλοκα φαινόμενα με κύματα που κατά βάση είναι θόρυβος και καταγράφονται κατά την έρευνα. Η παρουσία σωληνοκυμάτων στην γεώτρηση πηγών, η παρουσία μαλακών σχηματισμών (στρώματα χαμηλής ταχύτητας) και η υψηλής αντίθεσης τοπική στρωματογραφία (επιφάνεια επαφής μαλακού με σκληρό πέτρωμα) είναι οι παράγοντες οι οποίοι είναι υπεύθυνοι για την εμφάνιση τέτοιων κυμάτων.

Σε πειράματα όπου γίνεται χρήση πηγών υψηλών συχνοτήτων και καταγράφονται υψηλές ταχύτητες, μπορούμε να παραβλέψουμε την επίδραση των γεωτρήσεων. Αυτό γιατί η πηγή εισάγει μόνο ένα μικρό ποσοστό της ενέργειας μέσα στην γεώτρηση και οι υψηλές ταχύτητες εξουδετερώνουν την πιθανότητα εμφάνισης κωνικών κυμάτων (Meredith 1990).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Γενικά κατά την διαδικασία ανακάλυψης ενός νέου φυσικού νόμου, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα: Πρώτα γίνεται μια πρόβλεψη αυτού. Μετά υπολογίζεται το αποτέλεσμα αυτής, έτσι ώστε να ελεγχθεί η ορθότητα της πρόβλεψης. Κατόπιν ακολουθεί σύγκριση, των αποτελεσμάτων από υπολογισμούς, με αυτά που προέκυψαν από την απευθείας παρατήρηση. Αν τα αποτελέσματα δεν συμφωνούν, τότε η πρόβλεψη ήταν λάθος. Αυτή η απλή ανάλυση είναι το κλειδί της επιστήμης.

- Richard P. Feynman (1965), The Character of Physical Law

Το αντίστροφο πρόβλημα, εμφανίζεται τόσο στις θετικές επιστήμες, όσο και στις τεχνικές εφαρμογές. Τι είναι όμως το αντίστροφο πρόβλημα : Σύμφωνα με τον Menke (1984), αντιστροφή, είναι το σύνολο των μεθόδων που εφαρμόζεται σε ένα σύνολο παρατηρήσεων, και χρησιμοποιείται για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων. Σκοπός δεν είναι η απλή εφαρμογή των μεθόδων αλλά η κατάλληλη οργάνωσή τους, έτσι ώστε να αποφέρουν το μέγιστο των πληροφοριών από ένα δοσμένο σύνολο παρατηρήσεων. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι η αφαίρεση είναι το αντίστροφο της πρόσθεσης. Η ρίζα ενός αριθμού είναι το αντίστροφο του τετραγώνου αυτού. Δίνοντας μια απάντηση (για παράδειγμα τον αριθμό 4), βρίσκεις μια σωρία ερωτήσεων (2+2=; ή 8/2=; ή $\sqrt{16}$ =;). Το τελευταίο αυτό παράδειγμα είναι το πιο σημαντικό, διότι δείχνει καθαρά ότι η ίδια απάντηση (π.χ δεδομένα), μπορεί να προέλθει από πολλές ερωτήσεις (π.χ μοντέλα και μεθόδους ανάλυσης). Για αυτόν το λόγο δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη ότι ο βαθμός της αβεβαιότητας (που συνήθως είναι πολύ υψηλός), είναι ένα εγγενές τμήμα των περισσότερων πραγματικών αντιστρόφων προβλημάτων. Ετσι η επιλογή των παραμέτρων που θα περιγράψουν το υπό μελέτη σύστημα, δεν θα είναι η μοναδική. Υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί παραμέτρων μοντέλου που θα οδηγήσουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Κοινή επιδίωξη πάντα είναι η επιλογή μοντέλου που να παρέχει το μέγιστο των πληροφοριών για τον πραγματικό χώρο μελέτης. Είναι φανερό ότι το απόσπασμα της επιφυλλίδας του παρόντος κεφαλαίου δείχνει καθαρά ότι ακόμα και η διαδικασία ανακάλυψης ενός φυσικού νόμου, είναι από μόνη της ένα αντίστροφο πρόβλημα.

Το σύνολο των πιθανών μοντέλων που περιγράφουν επαρκώς το υπό μελέτη φυσικό σύστημα, αποτελεί τον χώρο του μοντέλου. Αντίστοιχα, το σύνολο των δεδομένων τα οποία χαρακτηρίζουν το μοντέλο, αποτελούν τον χώρο των δεδομένων.

Οι φυσικοί επιστήμονες έχουν συνηθίσει να αντιμετωπίζουν προβλήματα τα οποία δίνονται από εξισώσεις με μοναδική λύση. Εξαιτίας της κλασικής παιδείας που οι περισσότεροι επιστήμονες έχουν λάβει, τα προβλήματα με μη μοναδική λύση τους οδηγούν μάλλον σε αμηχανία. Ακόμα και στη κβαντομηχανική ή στην θεωρία του Χάους, παρέχονται αριθμητικά παραδείγματα πραγματικών πειραμάτων, στα οποία η αβεβαιότητα στη λύση είναι γεγονός. Μέθοδοι οι οποίες είναι κυρίως στατιστικές και οι οποίες χειρίζονται και μελετούν την αβεβαιότητα στη λύση, έχουν ζωτικό, αν όχι κεντρικό, ρόλο στην ανάλυση του προβλήματος.

Πως γίνεται όμως η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος; Γενικά, ακολουθείται η διαδικασία όπως περιγράφηκε στην επιφυλλίδα από τον Feynman, δηλαδή: πρόβλεψη, αριθμητικός υπολογισμός, σύγκριση. Προστέθηκε ακόμα ένα στοιχείο κατά την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος που είναι η αναπροσαρμογή του μοντέλου με βάση τα αποτελέσματα (feedback). Οταν ερευνάται ένας φυσικός νόμος, γίνεται αρχικά μια πρόβλεψη, υπολογίζεται το αποτέλεσμα και συγκρίνεται με το αποτέλεσμα του πειράματος. Αν η σύγκριση είναι μη ικανοποιητική, αυτό σημαίνει ότι και η επιλογή του αρχικού μοντέλου (αρχική πρόβλεψη) ήταν κακή. Υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί μια καλύτερη αρχική πρόβλεψη. Αντίθετα, κατά την επίλυση προβλημάτων μη γραμμικής αντιστροφής και τομογραφίας, συνήθως είναι γνωστοί οι φυσικοί νόμοι που διέπουν το πρόβλημα (π.χ εξίσωση διάδοσης κύματος), χωρίς όμως να είναι γνωστές οι ακριβείς τιμές των παραμέτρων. Σε κάθε περίπτωση, είναι δυνατό να γίνει χρήση της ασυμφωνίας μεταξύ των υπολογιζόμενων και των παρατηρούμενων αποτελεσμάτων, έτσι ώστε να γίνει μια καλύτερη προσαρμογή στις παραμέτρους και άρα να προκύψει μια βελτιωμένη πρόβλεψη. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μια τέτοια διόρθωση της αρχικής πρόβλεψης είναι αρκετή, ενώ σε άλλες, απαιτούνται πολλές επαναλήψεις της παραπάνω διαδικασίας (feedback step) έτσι ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή συμφωνία μεταξύ μοντέλου και δεδομένων.

Οι φυσικές ιδιότητες κάποιου συστήματος χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη όπου οι ιδιότητες περιγράφονται από διακριτές παραμέτρους (π.χ η μάζα της Γης), και στην δεύτερη όπου γίνεται χρήση συνεχών συναρτήσεων. Η θεωρία της Αντιστροφής εφαρμόζει διαφορετικές μαθηματικές μεθόδους, για αυτές τις δύο κλάσεις παραμέτρων. Η θεωρία των εξισώσεων των πινάκων χρησιμοποιείται για τις διακριτές παραμέτρους και η θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων για τις συνεχείς συναρτήσεις. Είναι δυνατό φυσικά να θεωρήσουμε μια δειγματοληπτική (διακριτή) μορφή των συνεχών συναρτήσεων, οπότε να υπάρχει μια κοινή αντιμετώπιση των προβλημάτων αντιστροφής, και τα αποτελέσματα των συνεχών και διακριτών παραμέτρων να είναι τα ίδια. Ετσι τα δεδομένα παρατήρησης μπορεί να είναι διακριτά ή συνεχή. Επίσης τίθεται ένα άλλο πρόβλημα που έχει σχέση με τα δεδομένα, και είναι ο τρόπος συλλογής τους. Τα δεδομένα πρέπει να συλλεχθούν με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε μετά την επεξεργασία τους, να μας παρέχουν το μέγιστο των πληροφοριών για το μοντέλο του χώρου μελέτης.

Επίσης, τα δεδομένα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με την ακρίβειά τους, τα ιδανικά (θεωρητικά-συνθετικά) δεδομένα και τα πραγματικά. Τα ιδανικά δεδομένα είναι ακριβή, με την επιθυμητή πυκνότητα, διακριτά ή συνεχή και χωρίς σφάλματα. Τα ιδανικά δεδομένα είναι ανθρώπινο δημιούργημα, με σκοπό την χρήση τους στη προσπάθεια επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος (συνθετικά δεδομένα). Αντίθετα τα πραγματικά δεδομένα είναι κατά βάση διακριτά, με τυχαία ή όχι σφάλματα, ενώ η καλή ή όχι πυκνότητα δειγματοληψίας, είναι αποτέλεσμα μόνο της δυνατότητας ή όχι λήψης μετρήσεων.

3.1 Το αντίστροφο πρόβλημα για ***ιδανικά*** δεδομένα

Το ερώτημα που απευθείας τίθεται κατά την μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος, είναι : ποιος είναι ο λόγος της επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος στην περίπτωση ιδανικών δεδομένων ; Το ερώτημα πηγάζει από το γεγονός ότι, ουδέποτε κατά την εφαρμογή των μεθόδων της αντιστροφής ή της τομογραφίας για την κατασκευή ενός μοντέλου, δεν θα έχουμε ιδανικά δεδομένα στην διάθεση μας. Η μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος, προήλθε από την ανάγκη να απαντηθούν ερωτήματα του τύπου : υπάρχει λύση στο πρόβλημα ; αν υπάρχει λύση είναι η μοναδική ; και ποια η ευστάθεια της λύσης αυτής;

Το πρώτο πρόβλημα που τίθεται είναι της ύπαρξης ή μη λύσης στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό συνήθως παραλείπεται. Η ανυπαρξία ή όχι λύσης στο πρόβλημα, οφείλεται στο γεγονός ότι συνήθως το αρχικό μοντέλο της λύσης είναι υπεραπλουστευμένο σε σύγκριση με το πολυσύνθετο πραγματικό μοντέλο της περιοχής μελέτης. Ετσι κάθε μέθοδος αδυνατεί να συγκλίνει σε μία πιθανή λύση του συστήματος.

Το δεύτερο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται κατά την μελέτη της αντιστροφής ιδανικών δεδομένων, είναι το πρόβλημα της μοναδικότητας ή όχι της λύσης. Στην Γεωφυσική το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό και ως απροσδιοριστία του Backus (Backus ambiguity), από το γεωφυσικό Backus ο οποίος και μελέτησε εκτενώς το θέμα (Backus 1970 a,b,c;). Η μοναδικότητα ή όχι της λύσης έχει σχέση με το πως είναι καθορισμένο το πρόβλημα. Από μαθηματικής απόψεως, αν το πρόβλημα είναι έστω και μερικώς υποκαθορισμένο, τότε υπάρχει πρόβλημα ως προς την μοναδικότητα της λύσης. Σε αυτή τη περίπτωση το πρόβλημα είναι ακατάλληλα ορισμένο (ill posed problem). Σε αυτές τις περιπτώσεις, είτε η λύση δεν είναι η μοναδική, είτε δεν είναι συνεχής συνάρτηση των δεδομένων, δηλαδή, μικρές διαταραχές στα δεδομένα, επιφέρουν μεγάλες μεταβολές στα μοντέλα. Το τελευταίο αναφέρεται και ως ευστάθεια της λύσης.

Το πρόβλημα της έλλειψης της μοναδικότητας της λύσης μπορεί να είναι :

ι) Εγγενές, δηλαδή να οφείλεται στο τρόπο με τον οποίο παράγονται τα δεδομένα από τα μοντέλα. Διαφορετικά μοντέλα οδηγούν στο ίδιο σύνολο δεδομένων. Γνωστό παράδειγμα στη Γεωφυσική, αποτελεί το πρόβλημα του Gauss όπου, ενώ μια γνωστή κατανομή πυκνότητας καθορίζει ένα μοναδικό εξωτερικό βαρυτικό πεδίο, το ίδιο πεδίο δε μπορεί να καθορίσει μια μοναδική κατανομή πυκνότητας.

ιι) Αποτέλεσμα των απλοποιήσεων που συνήθως γίνονται κατά την κατασκευή του μοντέλου.

Η παρουσία των παραπάνω προβλημάτων, οδηγούν τον μελετητή να στραφεί στις παρακάτω κατευθύνσεις :

ι) Εξέταση της περίπτωσης, το πρόβλημα να επιλυθεί με την εισαγωγή πρόσθετων δεδομένων, ή ακόμα και με την τροποποίηση του μοντέλου.

ιι) Διεύρυνση του ορισμού της λύσης του αντιστρόφου προβλήματος. Σκοπός, -σε αυτή τη περίπτωση- μπορεί να αποτελέσει, όχι η μοναδικότητα της λύσης, αλλά απλά η γνώση ιδιοτήτων της λύσης από τα διαθέσιμα δεδομένα.

ιιι) Αναζήτηση πρόσθετων προυποθέσεων οι οποίες θα επιτρέψουν την εύρεση μοναδικής λύσης. Σε αυτή τη περίπτωση, θεωρούμε ότι τα ‘ακατάλληλα - ορισμένα’ προβλήματα έχουν “καλά ορισμένες“ επεκτάσεις (Franklin, 1970). Γνωστό παράδειγμα στη γεωφυσική αποτελεί η επέκταση του προβλήματος του Gauss, σύμφωνα με το οποίο είναι δυνατή η εύρεση του σχήματος του σώματος που δημιουργεί την ανωμαλία. Εφόσον ικανοποιούνται ορισμένες προυποθέσεις (Smith 1961), είναι δυνατό να δειχθεί ότι η λύση είναι μοναδική όταν είναι γνωστή η αντίθεση πυκνότητας.

3.2 Το αντίστροφο πρόβλημα για ***πραγματικά*** δεδομένα

Τα πραγματικά δεδομένα, είναι το αποτέλεσμα πειράματος ή παρατήρησης, και δημιουργούν πρόσθετα προβλήματα τόσο στη μοναδικότητα της λύσης, όσο και στην κατασκευή του μοντέλου. Τα δεδομένα σε αυτή τη περίπτωση είναι προφανώς, διακριτά και πεπερασμένα σε πλήθος. Το κύριο πρόβλημα είναι ότι, τα προβλήματα στη φύση περιγράφονται από τυχαίας μορφής συνεχείς συναρτήσεις, έχουν δηλαδή άπειρους βαθμούς ελευθερίας και κατά συνέπεια χρειάζονται “άπειρα” δεδομένα για την επίλυσή τους. Ο πρακτικός περιορισμός των πεπερασμένων δεδομένων κάνει κατ΄ουσία, όλα τα αντίστροφα προβλήματα να είναι πρακτικώς υποκαθορισμένα και επιβάλλει την εισαγωγή κάποιων απλοποιήσεων στο μοντέλο και την έστω και μερική διακριτοποίησή του. Ακόμα πιο πολύπλοκο γίνεται το πρόβλημα εξαιτίας των παρατηρησιακών και άλλων σφαλμάτων τα οποία περιέχονται στα δεδομένα. Ακόμα και η θεώρηση του είδους της κατανομής την οποία ακολουθούν τα σφάλματα, είναι εσφαλμένη. Επιπλέον όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, η λύση χάνει την μοναδικότητα της και αποκτά ένα στατιστικό χαρακτήρα. Με άλλα λόγια, τα πραγματικά δεδομένα, επιβάλλουν την αλλαγή του περιεχομένου της έννοιας της λύσης του αντιστρόφου προβλήματος.

Η ύπαρξη σφαλμάτων στα δεδομένα υποχρεώνει τη λεπτομερή μελέτη του αντιστρόφου προβλήματος, σχετικά με τα ακόλουθα θέματα :

α) Ευστάθεια (stability) της λύσης. Σε ορισμένα αντίστροφα προβλήματα, συνήθως σε μια περιοχή του χώρου του μοντέλου (model space), οι λύσεις είναι ασταθείς. Σε αυτή τη περίπτωση, μικρά σφάλματα στα δεδομένα οδηγούν σε μεγάλη αβεβαιότητα στις λύσεις δηλαδή σε ένα μεγάλο αριθμό πιθανών λύσεων. Είναι εύκολο να αντιληφθούμε ότι σε αυτό το θέμα η επιθυμητή κατάσταση είναι εντελώς αντίθετη με αυτή του ευθέος προβλήματος. Στο ευθύ πρόβλημα θα θέλαμε μεγάλες διαταραχές στις παραμέτρους να μην οδηγούν σε σημαντικές αλλαγές στα δεδομένα παρατήρησης. Ομως, σε μια τέτοια περίπτωση, θα είχαμε ένα φοβερά ασταθές αντίστροφο πρόβλημα. Η ιδανική λύση θα ήταν η περίπτωση όπου διαταραχές στις παραμέτρους του μοντέλου, να προκαλούν ίδιου μεγέθους διαταραχές στα δεδομένα μας, έτσι ώστε τόσο το ευθύ όσο και το αντίστροφο πρόβλημα να παρουσιάζουν μια σχετική ευστάθεια.

β) Ευρωστεία (robustness) της λύσης. Με τον όρο αυτό εννοούμε την ανθεκτικότητα της λύσης σε δεδομένα τα οποία ξεφεύγουν σημαντικά λόγω μεγάλων τυχαίων σφαλμάτων από τη στατιστική σφάλματος των δεδομένων. Γνωστό παράδειγμα, η ευρύτατα χρησιμοποιούμενη μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία δεν είναι εύρωστη μια και το κάθε σημείο επιδρά στη λύση με βάρος, το οποίο αυξάνει όσο περισσότερο απέχει το σημείο από τη μέση λύση, με αποτέλεσμα σημεία με μεγάλα τυχαία σφάλματα να επηρεάζουν πολύ τη λύση.

γ) Βάρος των δεδομένων (data importance). Σε κάθε περίπτωση επίλυσης ενός αντιστρόφου προβλήματος, πρέπει να εξετάζεται το βάρος της επίδρασης των δεδομένων στην τελική λύση. Η μελέτη αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία ως προς τον απαραίτητο αριθμό και την κατάλληλη επιλογή των δεδομένων, τα οποία θα επιτρέψουν την καλύτερη ανακατασκευή του μοντέλου.

3.3 Το γενικό αντίστροφο γεωφυσικό πρόβλημα

Εστω ότι έχουμε μια Γη σφαιρική και ισότροπη ενώ η ακτίνα της, r, μεταβάλλεται μεταξύ 0 και 1 στις κατάλληλες μονάδες. Κάθε ν-άδα φυσικών συναρτήσεων οι οποίες περιγράφουν την κατανομή διαφόρων φυσικών μεγεθών μέσα στη Γη μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γήινο μοντέλο, m(r). Το σύνολο, M, των μοντέλων, m(r), μπορεί να αποτελέσει ένα διανυσματικό χώρο πάνω στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ ο ορισμός κάποιου εσωτερικού γινομένου (άρα και κάποιου μέτρου) μετατρέπει αυτό το χώρο σε χώρο Hilbert. Οι Backus και Gilbert (1967) όρισαν ως γενικευμένο γεωφυσικό δεδομένο (gross Earth datum) κάθε συναρτησιοειδές F του χώρου M που αντιστοιχεί ένα μοντέλο m του M σε ένα πραγματικό αριθμό F(m). Η μελέτη μας περιορίζεται, συνήθως, στα γραμμικά συναρτησιοειδή, δηλαδή αυτά που είναι γραμμική συνάρτηση του m (r) :

$$F(m) = (G, m) = \int_0^1 G(r)m(r)dr \tag{3.1}$$

Τα γραμμικά συναρτησιοειδή προτιμούνται, γιατί εμφανίζονται αρκετά συχνά αλλά κυρίως για λόγους απλότητας αφού, συνήθως, μόνο για αυτό είναι δυνατό να καταλήξουμε σε συμπεράσματα. Επίσης, η επίλυση του προβλήματος των γραμμικών συναρτησιοειδών επιτρέπει και τη μελέτη των μη γραμμικών περιπτώσεων. Αυτό συμβαίνει, γιατί για τα μη γραμμικά συναρτησιοειδή μπορούμε να θεωρήσουμε την παράγωγό τους κατά Frechet, έτσι ώστε:

$$F\left(m + \delta m\right) = F(m) + (K(r), \delta m) + O\left|\delta m\right|^2 \tag{3.2}$$

όπου **K**(r) είναι ο πυρήνας Frechet και O|δm|^2 απειροστό 2^{ης} τάξης ως προς |δm|. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί σε όρους πρώτης τάξης ως:

$$F\left(m + \delta m\right) = F(m) + (K(r), \delta m) \tag{3.3}$$

Βλέπουμε ότι καταλήγουμε σε μια σχέση η οποία είναι γραμμική ως προς τις διαταραχές δm σ' ένα αρχικό μοντέλο m. Θα πρέπει βέβαια να λάβουμε υπόψη ότι αυτή η σχέση, άρα και όλες οι επόμενες στις οποίες Θα καταλήξουμε κατά τη μελέτη των γραμμικών συνσρτησιοειδών, είναι προσεγγιστική και ως τέτοια πρέπει να αντιμετωπίζεται.

Αρχικά, θα μελετήσουμε το αντίστροφο γεωφυσικό γραμμικό πρόβλημα για την περίπτωση πειραματικών δεδομένων τα οποία δεν περιέχουν σφάλματα. Εστω, ότι έχουμε N πειραματικά δεδομένα, e_J, j =1, 2, . . . , N. Αυτά αποτελούν τιμές διαφόρων συναρτησιοειδών F_j για το πραγματικό μοντέλο της Γης, m(r), δηλαδή:

$$e_j = F_j(m) \quad , \qquad j=1,2,\ldots,N \tag{3.4}$$

Το γενικό γεωφυσικό αντίστροφο πρόβλημα (γραμμικό ή γραμμικοποιημένο) μπορεί να γραφεί (εξισώσεις 3.1 και 3.4) ως εξής :

$$e_j = \int_0^1 G_j(r)m(r)dr \quad , \qquad j=1,2,\ldots,N \qquad (3.5)$$

Οι παραπάνω N εξισώσεις ορίζουν ισάριθμες υπερεπιφάνειες στην τομή των οποίων βρίσκεται και η πραγματική λύση. Προφανώς, αφού ο M είναι χώρος συναρτήσεων, δεν θα έχουμε μοναδική λύση. Η μη μοναδικότητα της λύσης αυξάνει για την περίπτωση των πραγματικών δεδομένων, αφού έχουμε την ύπαρξη σφαλμάτων. Γενικά η λύση της (3.5) μπορεί να γραφεί σαν $m(r) = m_p(r) + m_\perp(r)$, όπου $m_p(r)$ μια ειδική λύση της (3.5) και $m_\perp(r)$ κάθε λύση της:

$$0 = \int_0^1 K_i(r) \cdot m_\perp(r)dr \quad , \qquad i= 1,2,\ldots,N \qquad (3.6)$$

Η ύπαρξη της $m_\perp(r)$ για πεπερασμένα γεωφυσικά δεδομένα έχει αποδειχθεί από τους Backus και Gilbert (1967) και φανερώνει ότι η γενική λύση δεν είναι μοναδική, αφού είναι εμφανές ότι π.χ. κάθε πολλαπλάσιο της $m_\perp(r)$ είναι και αυτό λύση.

Θα εξετάσουμε τώρα τον τρόπο εύρεσης μιας "μέσης" λύσης του αντιστρόφου προβλήματος, όπως αυτή προτάθηκε από τους Backus και Gilbert. Στην περίπτωση αυτή, ενδιαφερόμαστε για μια λύση η οποία σε κάθε σημείο της, r_o, αποτελεί το μέσο όρο της κάθε δυνατής λύσης σε μια περιοχή τιμών του r εύρους I. Προφανώς, ενδιαφερόμαστε αυτή η περιοχή εύρους I να είναι όσο το δυνατό πιο μικρή, αφού αυτό σημαίνει ότι:

α) Οι δυνατές λύσεις είναι σχετικά συγγενείς μεταξύ τους,

β) Η "μέση" λύση είναι πιθανότερο να βρίσκεται πιο κοντά στην πραγματική στο σημείο r_o.

Αυτή η "μέση" λύση, $\langle m \rangle(r_o)$, θα είναι προφανώς ένας "παραλλαγμένος μέσος όρος" της πραγματικής λύσης, m(r). Θα υπάρχει δηλαδή μια συνάρτηση, $A(r,r_o)$, τέτοια ώστε :

$$\langle m \rangle(r_o) = \int_0^1 A(r,r_0)m(r)dr \qquad (3.7)$$

Προφανώς, θέλουμε η μέση λύση να διατηρεί συνολικά τα ίδια χαρακτηριστικά "πλάτους" με την πραγματική, δηλαδή :

$$\int_0^1 \langle m \rangle (r_0) dr_0 = \int_0^1 m(r) dr \Rightarrow \int_0^1 \left(\int_0^1 A(r, r_0) dr_0 \right) m(r) dr = \int_0^1 m(r) dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 A(r, r_0) dr = 1 \tag{3.8}$$

Αφού η "μέση" λύση, $<m>(r_o)$, είναι γραμμική συνάρτηση του m(r), θα υπάρχουν συντελεστές, $\alpha_j(r_o) \in R$, j =1, 2, . . . , N, οι οποίοι θα τη συνδέουν γραμμικά με τα $F_j(m)$, τα οποία είναι επίσης γραμμικές συναρτήσεις του m(r), έτσι ώστε :

$$\langle m \rangle (r_0) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (r_0) F_j (m) \tag{3.9}$$

και σύμφωνα με τη σχέση (3.4) :

$$\langle m \rangle (r_0) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (r_0) \cdot e_j = \mathbf{a}^{\mathbf{T}} \mathbf{e} \tag{3.10}$$

όπου **α** και **e** τα διανύσματα που περιέχουν τα α_j και e_j.

Η παραπάνω σχέση μας δείχνει ότι η “μέση” λύση δεν εξαρτάται από το μοντέλο, m, αλλά μόνο από τα πειραματικά δεδομένα. Βλέπουμε δηλαδή ότι το μόνο το οποίο χρειάζεται είναι να προσδιορίσουμε τα $\alpha_j(r_o)$. Από τις σχέσεις (3.5), (3.7) και (3.9) είναι προφανές ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση :

$$A(r, r_0) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{a}_j (r_0) G_j (r) \tag{3.11}$$

Αφού γνωρίζουμε τα $G_j(r)$, μας απομένει ο προσδιορισμός της μορφής της $A(r,r_o)$, ώστε να καθοριστούν τα $\alpha_j(r_o)$. Είναι εμφανές ότι θα επιθυμούσαμε η $A(r,r_o)$ να είναι η συνάρτηση Dirac, έτσι ώστε σύμφωνα και με την (3.7) να είχαμε $<m>(r_o)$ = m(r), δηλαδή η μέση λύση να συνέπιπτε με την πραγματική. Κατά συνέπεια, θα πρέπει να καθορίσουμε κάποιο κριτήριο ομοιότητας της $A(r,r_o)$ με τη συνάρτηση δ (δ-ness criterion). Ενα τέτοιο θα μπορούσε να είναι η ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος:

$$I = \int_0^1 \left[A(r, r_0) - \delta(r - r_0) \right]^2 dr \tag{3.12}$$

Ιδιαίτερα σημαντικό είναι η συνάρτηση $A(r,r_o)$ να είναι "στενή" γύρω από το $r=r_o$ με μικρά "πτερύγια" μακριά από το r_o, έτσι ώστε η συνεισφορά τιμών της m(r) στον υπολογισμό της $<m>(r_o)$ να είναι μικρή. Για το λόγο αυτό, μπορούμε να ζητήσουμε την ελαχιστοποίηση όχι της (3.12) αλλά γενικά της:

$$S(r_0, A) = \int_0^1 J(r, r_0)\left[A(r, r_0) - \delta(r - r_0)\right]^2 dr \qquad (3.13)$$

Η $J(r,r_o)$ θα θέλαμε να είναι μια θετική συνάρτηση η οποία να μηδενίζεται στο $r=r_o$ και να αυξάνει μονότονα μακριά από αυτό. Με αυτό τον τρόπο, "τιμωρούμε" τις μεγάλες διαφορές $A(r,r_o)$ - $\delta(r-r_o)$ μακριά από το $r = r_o$. Αν λάβουμε υπ' όψη ότι $J(r_o,r_o)=0$ καθώς και τις ιδιότητες της $\delta(r-r_o)$, η (3.13) γίνεται:

$$S(r_0, A) = \int_0^1 J\left(r, r_0\right) A^2(r, r_0) dr \qquad (3.14)$$

Η ελαχιστοποίηση αυτής της σχέσης, μετά την επιλογή μιας κατάλληλης $J(r,r_o)$ και αφού έχει ληφθεί υπ' όψη η σχέση (3.8), θα καθορίσει τη μορφή της $A(r,r_o)$. Ο Backus (1970c) παρουσίασε μια γενική θεωρία για όλα τα πιθανά δ-κριτήρια με κατάλληλη επιλογή της $J(r,r_o)$ και ανάλυσε τη σημασία της επιλογής αυτής, ανάλογα με το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται κάθε φορά.

Αντικαθιστώντας την (3.11) στις (3.14) και (3.8) έχουμε:

$$S(r_0, A) = \sum_{i,j=1}^{N} a_i a_j \int_0^1 J(r, r_0) G_i(r) G_j(r) dr \qquad (3.15)$$

και

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^1 G_j(r) dr = 1 \qquad (3.16)$$

Αν ορίσουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

$$S_{ij} = \int_0^1 J(r, r_0) G_i(r) G_j(r) dr \qquad (3.17)$$

και

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^1 G_j(r) dr = 1 \qquad (3.18)$$

τότε οι σχέσεις (3.15) και (3.16) μετασχηματίζονται στις:

$$S(r_0, A) = \sum_{i,j=1}^{N} a_j S_{ij} a_j = a^T S a \qquad (3.19)$$

και

$$\sum_{j=1}^{N} a_j u_j = 1 \Rightarrow u^T a = 1 \Rightarrow u^T a - 1 = 0 \tag{3.20}$$

Η ελαχιστοποίηση της (3.19) πρέπει να γίνει υπό τους περιορισμούς της (3.20). Εισάγουμε τον πολλαπλασιαστή Lagrange -2λ και αντί της $S(r_o,A)$ ελαχιστοποιούμε την ποσότητα :

$$S'(r_0, A) = S(r_o, A) - 2\lambda(u^T a - 1) = a^T Sa - 2\lambda(u^T a - 1) \tag{3.21}$$

Αν λάβουμε υπ' όψη ότι $S_{ij} = S_{ji}$ (σχέση 3.17), δηλαδή ότι $S = S_T$, τότε :

$$\frac{\partial S'}{\partial a} = 0 \Rightarrow 2a^T S - 2\lambda u^T = 0 \Rightarrow a = \lambda S^{-1} u \tag{3.22}$$

Αντικαθιστώντας το α από την (3.22) στην (3.20) έχουμε:

$$1 = u^T a = u^T \lambda S^{-1} u \Rightarrow \lambda = \frac{1}{u^T Su} \tag{3.23}$$

οπότε η (3.22) γίνεται:

$$a = \frac{S^{-1} u}{u^T Su} \tag{3.24}$$

Αντικαθιστώντας το α στην (3.10) έχουμε τελικά :

$$\langle m \rangle (r_0) = a^T e = \frac{u^T S^{-1} e}{u^T S^{-1} u} \tag{3.25}$$

Η λύση στην οποία καταλήξαμε είναι η λύση με τη μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα, δηλαδή η λύση εκείνη η οποία για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων, e, μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε στη μικρότερη δυνατή κλίμακα τις ιδιότητες της m(r). Τη λύση αυτή θα επιλέγαμε αν τα δεδομένα μας ήταν απαλλαγμένα από σφάλματα. Στην περίπτωση, όμως, όπου έχουμε σφάλματα, είναι αναγκαίο να εισάγουμε κάποιες τροποποιήσεις. Η διασπορά του μοντέλου δίνεται από τη σχέση :

$$\varepsilon^2 = \Delta m \Delta m^T \tag{3.26}$$

Από τη (3.10) έχουμε ότι:

$$\Delta m = a^T \Delta e \tag{3.27}$$

οπότε

$$\varepsilon^2 = a^T \Delta e \Delta e^T a = a^T R_{ee} a \tag{3.28}$$

όπου $R_{ee} = \Delta e\ \Delta e_T$ είναι ο πίνακας συμμεταβλητότητας των δεδομένων.

Η ελαχιστοποίηση του ε^2, με παρόμοιο τρόπο με αυτή του $S(r_o,A)$, οδηγεί σε αποτέλεσμα παρόμοιο με τη σχέση (3.25). Δηλαδή :

$$m_{\varepsilon^2=\min}(r_0) = \frac{u^T R_{ee}^{-1} e}{u^T R_{ee}^{-1} u} \tag{3.29}$$

Βλέπουμε ότι καταλήξαμε σε μια δεύτερη λύση η οποία παρουσιάζει το μικρότερο σφάλμα, ε^2, σε αντίθεση με τη (3.25) που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα, $S(r_o,A)$. Οι Backus και Gilbert (1970) έδειξαν ότι αυτές οι ποσότητες είναι γενικά αντιστρόφως ανάλογες. Ως ιδανική (optimum) λύση πρότειναν την ακόλουθη :

$$\hat{m}(r_0) = \frac{u^T W^{-1} e}{u^T W^{-1} u} \tag{3.30}$$

όπου ο W είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των S και R_{ee}. Δηλαδή:

$$W = (1-\theta)S + \theta R_{ee} \tag{3.31}$$

όπου $\theta \in [0,1]$.

Η παραπάνω λύση είναι ισοδύναμη με την επιλογή ενός α = α(Θ), το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$a(\theta) = \frac{W^{-1} u}{u^T W^{-1} u} \tag{3.32}$$

Αν για διάφορα θ, υπολογίσουμε το α και στη συνέχεια τα $\varepsilon^2 = \alpha^T R_{ee} a$ και $S(r_o,A) = a^T S\, a$.

Η καμπύλη αυτή επιβάλλει μια συναλλαγή (trade-off) μεταξύ διακριτικής ικανότητας και σφάλματος. Οι Backus και Gilbert προτείνουν η επιλογή του θ (και κατά συνέπεια των a, W και $m(r_o)$) να γίνει με την επιλογή ενός ιδανικού (optimum) σημείου στην καμπύλη συναλλαγής (trade-off curve) το οποίο ικανοποιεί κάποιο κριτήριο, π.χ. στο σχήμα μας αυτό για το οποίο $\varepsilon^2 + S(r_o,A) =$ minimum. Σε κάθε περίπτωση, αυτό το κριτήριο μπορεί να αλλάξει, ανάλογα με το αν μας ενδιαφέρει η λύση να έχει μικρό σφάλμα ή μεγάλη διακριτική ικανότητα.

Ολα τα προηγούμενα συμπεράσματα ισχύουν μόνο για τα γραμμικά προβλήματα. Για τα μη γραμμικά προβλήματα, τα οποία έχουν γραμμικοποιηθεί σε μια περιοχή μιας αρχικής προσεγγιστικής λύσης τους, όλες οι ανωτέρω σχέσεις ισχύουν κατά προσέγγιση. Ο σημαντικότερος περιορισμός είναι ότι η σχέση (3.10) δεν είναι ακριβής αλλά προσεγγιστική. Αυτό σημαίνει ότι η διόρθωση δm σε κάθε βήμα ενός μη γραμμικού προβλήματος δεν εξαρτάται μόνο από τα πειραματικά δεδομένα, e, αλλά και από το αρχικό μοντέλο, m. Εχουμε, έτσι, μια πρόσθετη αβεβαιότητα για την τελική μας λύση καθώς και για όλα τα χαρακτηριστικά της (καμπύλη συναλλαγής κλπ.).

3.4 Μέθοδοι Αντιστροφής Σεισμικών καταγραφών

Τα δεδομένα που αποκτώνται κατά την διάρκεια σεισμικής διασκόπησης, είναι είτε κυματομορφές (waveforms), είτε χρόνοι διαδρομής (traveltimes). Σε αυτά εφαρμόζονται κάποιες τεχνικές αντιστροφής ανάλογες του είδους των δεδομένων. Οι κυριότερες μέθοδοι αντιστροφής, ανάλογα με το είδος των δεδομένων και τη μεθοδολογία υπολογισμού συνθετικών δεδομένων, είναι οι παρακάτω :

1. Αντιστροφή χρόνων διαδρομής (travel time inversion).
2. Αντιστροφή των χρόνων διαδρομής με βάση την κυματική εξίσωση (Wave equation traveltime inversion - WT method).
3. Μέθοδος αντιστροφής πλήρους κυματομορφής (Full wave ή Full waveform inversion).
4. Μέθοδος αντιστροφής χρόνων διαδρομής και πλήρους κυματομορφής (Travel time Inversion + Full wave equation).

3.5 Βασικές Αρχές της Σεισμικής Τομογραφίας

Το βασικό αντικείμενο αυτής της μεθόδου, είναι ο προσδιορισμός της τρισδιάστατης κατανομής των ταχυτήτων των κυμάτων χώρου μέσα στη Γη, χρησιμοποιώντας τις πρώτες αφίξεις των χρόνων διαδρομής, μεταξύ πηγών και γεωφώνων που είναι γνωστές οι θέσεις τους μέσα στον χώρο. Αυτό το πρόβλημα είναι πολύ κοινό κατά την σεισμική τομογραφία μεταξύ γεωτρήσεων, όπου γίνεται προσπάθεια δισδιάστατης απεικόνισης του χώρου μεταξύ των γεωτρήσεων. Το ίδιο πρόβλημα του υπολογισμού του μοντέλου των ταχυτήτων σε ένα μέσο, εμφανίζεται και σε άλλες περιπτώσεις όπως στη περίπτωση της τομογραφίας τοπικών σεισμών ή τηλεσεισμών στη σεισμολογία.

3.5.1 Μοντέλα ταχύτητας των σεισμικών κυμάτων

Οταν ένα σεισμικό κύμα διαδίδεται σε κάποιο μέσο (medium) απαιτείται κάποιος χρόνος για τη διάδοση του, από την πηγή του κύματος έως το σημείο όπου θα γίνει η καταγραφή. Ο χρόνος αυτός καλείται χρόνος διαδρομής του κύματος (traveltime). Οταν ένα κύμα διαδίδεται σε ένα μέσο στο οποίο δεν παρατηρούνται φυσικές μεταβολές, το κύμα θα έχει μια σταθερή ταχύτητα, η οποία καλείται σεισμική ταχύτητα (wave velocity). Το πεδίο ταχύτητας μπορεί να καθοριστεί είτε μέσω συναρτήσεων οι οποίες θα περιγράφουν την συνολική μεταβολή του πεδίου ταχύτητας για όλο το χώρο μελέτης (Global velocity representation), είτε ορίζοντας τη τοπική σεισμική ταχύτητα (local velocity representation), που σχετίζεται με κάθε σημείο στο χώρο και η οποία μπορεί να εξαχθεί με βάση τη ταχύτητα δύο γειτονικών σημείων. Η τοπική καθυστέρηση (local slowness) είναι το αντίστροφο της τοπικής ταχύτητας. Γενικά, είναι πιο βολική η χρήση των μοντέλων καθυστέρησης των κυμάτων κατά την αντιστροφή ή τομογραφία, και αυτό διότι οι σχετικές εξισώσεις που επιλύουν το πρόβλημα είναι στην περίπτωση αυτή γραμμικές.

Στη περίπτωση της συνολικής παρουσίασης του πεδίου ταχύτητας επιλέγεται ένας πεπερασμένος αριθμός κανονικοποιημένων σφαιρικών αρμονικών $Y_l^m(\theta,\phi)$, οι οποίες σχηματίζουν μια ορθογώνια βάση :

$$h_i(r) = f_k(r) Y_l^m(\theta,\phi) \tag{3.33}$$

όπου $f_k(r)$ είναι ένα σύνολο συναρτήσεων βάθους οι οποίες είναι ορθοκανονικές ως προς το βάθος ενδιαφέροντος. Η παραπάνω προσέγγιση ακολουθήθηκε από τους Dziewonski (1984) και Morelli και Dziewonski (1985, 1986). Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι για μικρές μέγιστες τιμές των l και k περιορίζονται οι άγνωστοι παράμετροι. Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι η έλλειψη υψηλής διακριτικής ικανότητας. Είναι δυνατό μικρές (σε διαστάσεις) ανομοιογένειες ταχύτητας που εμφανίζονται και στους χρόνους διαδρομής να μη περιγράφονται από αυτό το γενικό μοντέλο ταχύτητας. Η παρουσίαση με βάση τις σφαιρικές αρμονικές είναι κατάλληλη για τον κατώτερο μανδύα και το πυρήνα, όπου οι αναμενόμενες ανομοιογένειες είναι πιο εξομαλυμένες από αυτές του πάνω μανδύα.

Στην περίπτωση παρουσίασης της τοπικής σεισμικής ταχύτητας, μπορούμε να θεωρήσουμε τα παρακάτω μοντέλα καθυστέρησης. Μερικές φορές δεχόμαστε την καθυστέρηση ως μια συνάρτηση s(x) της θέσης x.

ι) Το μοντέλο συνίσταται από ομογενή κελιά (cells) στο δισδιάστατο χώρο, ή κύβους (blocks) στον τρισδιάστατο χώρο, με καθυστέρηση s_j (την τιμή της καθυστέρησης στο jth κελί ή κύβο).

ιι) Το μοντέλο συνίσταται από ένα κάνναβο (grid), με τιμές της καθυστέρησης στους κόμβους του καννάβου αυτού (grid points), ενώ οι ενδιάμεσες τιμές καθυστέρησης καθορίζονται με παρεμβολή (bilinear, trilinear, spline, etc.). Φυσικά, καθώς οι διαστάσεις των κελλιών/κύβων, γίνονται ολοένα και μικρότερες (κάτω του απειροελάχιστου), θεωρούμε ότι καθένα από αυτά τα στοιχεία έχει σταθερή καθυστέρηση, ως μια περίπτωση ενός συνεχούς μοντέλου.

Οταν δεν είναι σημαντικό το ποιος τύπος μοντέλου καθυστέρησης θα επιλεγεί για την επίλυση, αναφερόμαστε στο μοντέλο ως ένα διάνυσμα s στον διανυσματικό χώρο S. Οπως και αν γίνει η παραμετροποίηση του μοντέλου, πρέπει πάντα να έχουμε υπόψην ότι, για πραγματικά προβλήματα, τα μοντέλα που προτείνουμε θα έχουν κατ΄ ανάγκη πολύ λιγότερες παραμέτρους, από τις παραμέτρους του χώρου που θέλουμε να παρουσιάσουμε. Κατά συνέπεια, το μοντέλο που προτείνουμε είναι ανάλογο με τις φιγούρες των κινουμένων σχεδίων, όπου γίνεται προσπάθεια να αποδώσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά με τις ελάχιστες λεπτομέρειες.

3.5.2 Αρχή του Fermat και Συναρτησιοειδές των χρόνων διαδρομής

Ο χρόνος διαδρομής για ένα σεισμικό κύμα, είναι το ολοκλήρωμα της καθυστέρησης κατά μήκος της σεισμικής ακτίνας που ενώνει πηγή με δέκτη. Για να γίνει πιο ξεκάθαρο, πρέπει να ορίσουμε δύο συναρτησιοειδή για τους χρόνους διαδρομής.

Ας θεωρήσουμε μια τροχιά P, μιας σεισμικής ακτίνας που ενώνει την πηγή και τον δέκτη σε ένα συνεχές μοντέλο καθυστέρησης **s**. Ορίζουμε ένα συναρτησιοειδές τ^P το οποίο δίνει τους χρόνους διαδρομής κατά μήκος της ακτίνας P :

$$\tau^{\mathrm{P}}(s) = \int_{\mathrm{P}} s(x)\, dl^{\mathrm{P}} \tag{3.34}$$

όπου dl^P είναι η απειροελάχιστη απόσταση κατά μήκος της σεισμικής ακτίνας P.

Σύμφωνα με την αρχή του Fermat (Fermat 1891, Goldstein 1950, Born and Wolf 1980) το κύμα το οποίο φθάνει σε ορισμένο σημείο από ορισμένη πηγή, ακολουθεί το συντομότερο δρόμο από όλους τους δρόμους που είναι δυνατό να ακολουθήσει, δηλαδή, ακολουθεί αυτόν που απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο. Δηλαδή η αρχή του Fermat ελαχιστοποιεί το $\tau^P(s)$ σε συνάρτηση με την τροχιά P.

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι η αρχή του Fermat είναι στην πραγματικότητα η πιο ασθενής συνθήκη, κατά την οποία το ολοκλήρωμα του χρόνου διαδρομής είναι σταθερό (stationary) σε συνάρτηση με τις μεταβολές στην σεισμική ακτίνα. Για την μέθοδο αντιστροφής με βάση τους χρόνους διαδρομής, η παραπάνω αρχή σημαίνει ότι οι χρόνοι διαδρομής πρέπει να είναι ελάχιστοι.

Ας ορίσουμε τώρα ένα συναρτησιοειδές τ^*, το οποίο και δίνει τους χρόνους διαδρομής υπακούοντας την αρχή του Fermat (ελάχιστος χρόνος διαδρομής). Το συναρτησιοειδές θα δίνεται από τον τύπο :

$$\tau^{*}(s) = \min_{P \in Paths} \tau^{P}(s) \tag{3.35}$$

όπου με τον όρο Paths θεωρούνται όλες οι δυνατές ακτίνες που ενώνουν το δοσμένο ζευγάρι πηγής - δέκτη. Η συγκεκριμένη ακτίνα που ικανοποιεί την σχέση (3.35) ορίζεται ως P^*. Αν περισσότερες της μιας ακτίνας ικανοποιούν την σχέση (3.35), τότε επιλέγεται μία από αυτές ως η αντιπροσωπευτική.

Αντικαθιστώντας την (3.34) στην (3.35), προκύπτει η αρχή του Fermat για τον ελάχιστο χρόνο :

$$\tau^*(s) = \int_{P^*} s(x) dl^{P^*} = \min_P \int_P s(x) dl^P \qquad (3.36)$$

Το συναρτησιοειδές του χρόνου διαδρομής $\tau^*(s)$, είναι αμετάβλητο σε μικρές μεταβολές στη σεισμική ακτίνα $P^*(s)$.

3.5.3 Νόμος του Snell.

Ο νόμος του Snell είναι συνέπεια της αρχής του Fermat (Born and Wolf 1980). Το συμπέρασμα αυτό μπορεί εύκολα να προκύψει χρησιμοποιώντας ένα απλό γεωμετρικό επιχείρημα, βασισμένο στην σταθερότητα του συναρτησιοειδούς του χρόνου διαδρομής. Το γνώστο αποτέλεσμα είναι ότι :

$$s_1 \sin\theta_1 = s_2 \sin\theta_2, \qquad \text{(Snell's law)} \qquad (3.37)$$

όπου θ_1 και θ_2 είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι σεισμικές ακτίνες, με την κάθετο στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων.

Πρέπει να τονιστεί ότι ο νόμος του Snell είναι πολύ ειδικός και συγκεκριμένος. Υπάρχουν διάφορες υποθέσεις που στηρίζουν την εφαρμοσιμότητα του νόμου αυτού, όπως : τα σημεία Α (πηγή) και Β (δέκτης) να βρίσκονται μακρυά από την διαχωριστική επιφάνεια, τα δύο μέσα (media) εκατέρωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, να είναι ομογενή με σταθερή ισότροπη τιμή καθυστέρησης. Σε προβλήματα όμως πιο γενικής απεικόνισης, το υποκείμενο μέσο μπορεί να είναι πολύ πολύπλοκο, οπότε δεν είναι πρόσφορη η χρήση του νόμου του Snell. Μια τυπική μέθοδος προσδιορισμού της ακτίνας με τη χρήση του νόμου αυτού, μπορεί να αποτύχει σε ορισμένες περιπτώσεις, οπότε πρέπει να ληφθεί μέριμνα χρησιμοποιώντας πιο εύρωστες (robust) μεθόδους για τον προσδιορισμό της σεισμικής ακτίνας και του αντίστοιχου χρόνου διαδρομής. Τέτοιες μέθοδοι θα παρουσιαστούν παρακάτω.

3.6 Σεισμική Αντιστροφή και Τομογραφία

Θεωρούμε μια ομάδα παρατηρούμενων χρόνων διαδρομής, $t_1, \ldots, t_m$, που προέρχονται από m ζευγάρια πηγών-δεκτών, τα οποία βρίσκονται σε μέσο με κατανομή καθυστέρησης s(x). Εστω ότι, P_i είναι η ακτίνα που ικανοποιεί την αρχή του Fermat και ενώνει τα *i* ζευγάρια πηγών-δεκτών. Αγνοώντας τα παρατηρησιακά σφάλματα προκύπτει ότι :

$$\int_{\mathrm{P}_i} s(x)dl^{\mathrm{P}_i} = t_i \quad , \quad i=1,\ldots,m \tag{3.38}$$

Εστω ένα μοντέλο σταθερής καθυστέρησης σε κελιά και l_{ij} το μήκος της *i* σεισμικής ακτίνας που διέρχεται από το *j*th κελί :

$$l_{ij} = \int_{P_i \cap cell_j} dl^{P_i} \tag{3.39}$$

Αν *n* είναι το σύνολο των κελιών, η σχέση (3.38) μπορεί να γραφεί ως :

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij} s_j = t_i \quad , \qquad i=1,\ldots,m \tag{3.40}$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι, για κάθε *i*, η σεισμική ακτίνα μήκους l_{ij} είναι μηδέν για τα περισσότερα κελιά j, καθώς μια σεισμική ακτίνα τέμνει μόνο μερικά από τα κελιά του μοντέλου.

Μπορούμε να επαναπαρουσιάσουμε την εξίσωση (3.40), υπό μορφή πινάκων, καθορίζοντας τα διανύσματα στήλης **s** και **t** και τον πίνακα **M**, ως :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ t_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdot & l_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

Επομένως η σχέση (3.40) μπορεί να γραφεί ως :

$$\mathbf{M\ s = t} \tag{3.42}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε την εξίσωση (3.42), ως την αριθμητική προσέγγιση της σχέσης (3.36) (η διακριτή μορφή της εξίσωσης). Η σχέση (3.42) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε σύνολο σεισμικών ακτίνων, ανάλογα με το κατά πόσο αυτές οι σεισμικές ακτίνες ελαχιστοποιούν την σχέση (3.36) ή όχι. Αν οι σεισμικές ακτίνες που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του πίνακα M, είναι οι ακτίνες με ελάχιστο χρόνο διαδρομής, τότε, πρέπει να έχουμε κατά νου ότι ο M είναι μια συνάρτηση του s.

Ο χρόνος διαδρομής για την i_{th} σεισμική ακτίνα,

$$t_i = \sum_{j=1}^{16} l_{ij} s_j$$

Οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν εφαρμόζονται τόσο στο δισδιάστατο χώρο, όσο και στο τρισδιάστατο. Χρησιμοποιείται ο όρος *αντιστροφή* τόσο σε 2-D όσο και σε 3-D εφαρμογές. Οταν γίνεται αναφορά σε εφαρμογές δύο διαστάσεων, τότε χρησιμοποιείται ο όρος *τομογραφία*. Το πρόθεμα τομο- είναι ελληνικό και σημαίνει φέτα (αποδίδεται αγγλικά από το *slice*). Παρομοίως, τα κελιά στις δύο διαστάσεις, συχνά καλούνται *pixels* καθώς αποτελούν στοιχεία εικόνας δύο διαστάσεων. Τα κελιά στις τρεις διαστάσεις συχνά καλούνται *voxels* καθώς αποτελούν στοιχεία όγκου τριών διαστάσεων.

3.6.1 Προσεγγιστικός προσδιορισμός του μοντέλου καθυστέρησης με οπισθοπροβολή (Backprojection)

Ο όρος οπισθοπροβολή (*backprojection)* χρησιμοποιήται για να οριστεί η προσεγγιστική ανακατασκευή του μοντέλου καθυστέρησης, επιλύοντας την εξίσωση (3.42) ως προς το διάνυσμα καθυστέρησης s. Αν έχουμε το χρόνο διαδρομής t_i κατά μήκος της *i*th ακτίνας, και γνωρίζουμε ότι το ολικό μήκος της ακτίνας κατά μήκος της ίδιας τροχιάς είναι :

$$L_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} \tag{3.43}$$

τότε η μέση τιμή της καθυστέρησης κατά μήκος συγκεκριμένης σεισμικής ακτίνας, θα είναι :

$$\langle s \rangle_i = \frac{t_i}{L_i} = \frac{\int_{P_i} s\,dl^{P_i}}{\int_{P_i} dl^{P_i}} \,. \tag{3.44}$$

Η *i*th σεισμική ακτίνα θα θεωρείται ότι διέρχεται από το *j*th κελί αν $l_{ij}>0$, ενώ δεν τέμνει καθόλου το κελί αν $l_{ij}=0$. Ενας υπολογισμός για την καθυστέρηση του j κελιού μπορεί να γίνει υπολογίζοντας τον μέσο όρο της βραδύτητας $\langle s \rangle_i$, για όλες τις σεισμικές ακτίνες που διέρχονται από το συγκεκριμένο κελί. Αυτή η διαδικασία αποτελεί και τη οπισθοπροβολή (backprojection) : Αθροιση όλων των μέσων καθυστερήσεων και διαίρεση με τον αριθμό των ακτίνων για το κάθε κελί.

Στην πιο απλή περίπτωση μπορούμε να διαμορφώσουμε την παραπάνω διαδικασία, εισάγοντας την συνάρτηση προσήμου (sgn), έτσι ώστε $\mathrm{sgn}(l_{ij})=1$ αν $l_{ij}>0$ και $\mathrm{sgn}(l_{ij})=0$ αν $l_{ij}=0$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ολικός αριθμός των ακτίνων που διέρχονται από το jth κελί θα είναι :

$$N_j = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{sgn}(l_{ij}) \tag{3.45}$$

οπότε η μέση καθυστέρηση θα είναι :

$$s_j \cong N_j^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}\left(l_{ij}\right) \frac{t_i}{L_i} \tag{3.46}$$

Η εξίσωση (3.46) είναι η πιο βασική για τον πιο απλουστευμένο υπολογισμό της καθυστέρησης (elementary backprojection). Η παραπάνω σχέση εφαρμόζεται το ίδιο επιτυχώς και για τις ταχύτητες. Η ανωτέρω εξίσωση παρέχει ένα γρήγορο, αλλά όχι ακριβή υπολογισμό της τιμής της καθυστέρησης σε ένα κελί, και βασίζεται στα διαθέσιμα δεδομένα.

Σε πολλές περιπτώσεις στις οποίες εφαρμόζεται η σχέση (3.46), φαίνεται να οδηγεί σε λανθασμένους υπολογισμούς, πράγμα που δειχνεί την αδυναμία της μεθόδου, να χρησιμοποιηθεί σε εργασίες που απαιτούν υψηλής ακρίβειας ανακατασκευή του μοντέλου ταχυτήτων. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η καθυστέρηση σε ένα κελί j, δίνεται ως το άθροισμα με βάρος των γινομένων $l_{ij}t_i$. Αυτός ο υπολογισμός φαίνεται να είναι βελτιωμένος σε σύγκριση με τον προηγούμενο, καθώς λαμβάνει υπόψην κατά τους υπολογισμούς την περίπτωση κατά την οποία $l_{ij}=0$, αλλά συμπληρωματικά δίνει μεγαλύτερο βάρος κατά τους υπολογισμούς, στην ακτίνα με το μεγαλύτερο μήκος εντός του κελλιού. Ετσι η παραπάνω εξίσωση γίνεται :

$$s_j \cong \sum_{i=1}^{m} w_i l_{ij} t_i \, , \tag{3.47}$$

όπου πρέπει να γίνει και κάποια επιλογή του παράγοντα w. Αντικαθιστώντας την (3.47) στην (3.42), προκύπτει ότι :

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij} s_j = \sum_{k=1}^{m} w_k \left(\sum_{j=1}^{n} l_{ij} l_{kj} \right) \cdot t_k \cong t_i \tag{3.48}$$

Συνήθως η επιλογή του παράγοντα του βάρους στις παραπάνω εξισώσεις, δίνεται από μια σχέση της μορφής :

$$w_i = \left(\sum_{j=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{-1} \tag{3.49}$$

Ορίζοντας ένα διαγώνιο πίνακα $\overline{D}$ του οποίου τα στοιχεία δίνονται από την σχέση :

$$\overline{D}_{ii} = \left(M M^T \right)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}^2 \tag{3.50}$$

προκύπτει ότι οι σχέσεις (3.47) και (3.49) δίνουν την εξίσωση :

$$s \cong \overline{D}^{-1} M^T t \, . \tag{3.51}$$

Οι σχέσεις (3.46) και (3.51), όπως και οι αριθμητικές παραλλαγές αυτών, αποτελούν μεθόδους βασικού υπολογισμού της καθυστέρησης με οπισθοπροβολή (elementary backprojection). Στην προσπάθεια υπολογισμού ολοένα και ακριβέστερων αντιστρόφων οι παραπάνω προσεγγιστικοί υπολογισμοί της καθυστέρησης, συχνά αποτελούν το αρχικό μοντέλο μιας επαναληπτικής διαδικασίας υπολογισμών.

3.6.2 Τομογραφία με δεδομένα χρόνων διαδρομής (travel time tomography).

Γενική αρχή της μεθόδου είναι ότι το μήκος κύματος των ανωμαλιών που προσδιορίζονται, είναι μεγαλύτερο του μήκους κύματος της ακτινοβολίας. Η αδυναμία της μεθόδου συνίσταται στην χρήση της προσέγγισης υψηλών συχνοτήτων (high frequency approximation). Η παραδοχή της προσέγγισης αυτής, γίνεται διότι η κυματική εξίσωση στις υψηλές συχνότητες παίρνει την μορφή :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.52}$$

που είναι και η κατάλληλη για ευθεία σεισμική ακτίνα ή απλή καμπύλη. Η περιοχή στην οποία κινείται η σεισμική ακτίνα, ορίζεται από την ακτίνα Fresnel ($r=[L.\lambda]^{1/2}$), όπου L είναι το μήκος της σεισμικής ακτίνας και λ είναι το μήκος κύματος. Οσο αυξάνεται η συχνότητα, τόσο μειώνεται η ακτίνα Fresnel. Στην περίπτωση όπου η μεταβολή της συχνότητας με το βάθος, είναι ανάλογη της μεταβολής των ταχυτήτων, τότε η μέθοδος αποτυγχάνει στον προσδιορισμό του τελικού μοντέλου των ταχυτήτων. Οταν δεν ισχύει η θεώρηση υψηλών συχνοτήτων, τότε παρουσιάζονται φαινόμενα συμβολής και περίθλασης. Ο Williamson (1991) παρατήρησε ότι το μικρότερου μεγέθους χαρακτηριστικό που μπορεί με ακρίβεια να ανακατασκευαστεί, με εφαρμογή της μεθόδου αντιστροφής χρόνων διαδρομής, έχει διάσταση που δίνεται από τον τύπο $(L.\lambda)^{1/2}$, όπου L είναι η απόσταση διάδοσης του κύματος και λ είναι το μήκος κύματος. Η ανάλυση και ακρίβεια του μοντέλου που προσδιορίζεται από την μέθοδο αυτή, είναι μικρότερη από αυτή που παρέχει η μέθοδος αντιστροφής πλήρους κυματομορφής (Full wave inversion).

Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι η συνάρτηση προσαρμογής (misfit function) - το άθροισμα των τετραγώνων σφάλματος, μεταξύ παρατηρούμενων και υπολογιζόμενων χρόνων διαδρομής - μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά γραμμική σε σχέση με τις κανονικοποιημένες διαφορές μεταξύ αρχικών και πραγματικών μοντέλων ταχυτήτων. Αποτέλεσμα είναι, να υπάρξει μικρή μεταβολή της κατανομής των ταχυτήτων στον χώρο και επομένως να επιφέρει μικρή μεταβολή στους χρόνους διαδρομής. Συμπερασματικά, αυτό σημαίνει ότι πετυχημένη αντιστροφή μπορεί να επιτευχθεί ακόμα και στην περίπτωση κατά την οποία το αρχικό μοντέλο είναι μακριά από το πραγματικό μοντέλο.

3.6.3 Τομογραφία με χρήση των χρόνων διαδρομής και επίλυση με βάση την κυματική εξίσωση (Wave equation traveltime inversion - WT method).

Χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι η χρήση συνθετικών σεισμογραμμάτων, τα οποία υπολογίζονται με κάποια μέθοδο μοντελοποίησης, πλήρους κυματομορφής (χρησιμοποιείται κυρίως η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών). Ετσι στην εφαρμογή της μεθόδου σε σεισμογράμματα δεν γίνεται χρήση της θεωρίας σεισμικών ακτίνων, οπότε δεν γίνεται και η παραδοχή της προσέγγισης υψηλών συχνοτήτων στα δεδομένα. Η μέθοδος WT είναι παρόμοια της μεθόδου αντιστροφής πλήρους κυματομορφής, όταν το αρχικό μοντέλο ταχύτητας προσεγγίζει πολύ καλά το πραγματικό μοντέλο ταχύτητας. Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι, ότι μπορεί να δώσει ένα ικανοποιητικό μοντέλο, ακόμα και όταν οι μέθοδοι προσδιορισμού της σεισμικής ακτίνας (ray tracing methods), αποτυγχάνουν να υπολογίσουν τους σωστούς χρόνους πρώτων αφίξεων. Οπως και η προηγούμενη μέθοδος, έτσι και η WT δεν είναι σε θέση να παράγουν μοντέλα ανάλογης ποιότητας και ακρίβειας με αυτά της μεθόδου αντιστροφής πλήρους κυματομορφής.

3.6.4 Τομογραφία περίθλασης και αντιστροφή πλήρους κυματομορφής.

Η τομογραφία περίθλασης (Devaney 1984, Harris 1987, Wu και Toksoz 1987, Lo et al. 1990) αποτελείται από μια συλλογή μεθόδων, συμπεριλαμβανομένου και των μεθόδων του Born (Born 1926, Newton 1966) και Rytov (Rytov 1937, 1938, Keller 1969, Born and Wolf 1980), οι οποίες κάνουν χρήση των πληροφοριών που παρέχουν οι κυματομορφές, ως σεισμικά δεδομένα. Επιτυχής αντιστροφές πραγματικών δεδομένων έχουν επιτευχθεί χρησιμοποιώντας τόσο δεδομένα μικροκυμάτων (συχνότητες μεγαλύτερες των 20GHz), όσο και δεδομένα υπερηχητικών κυμάτων (ultrasonic), σε τομογραφίες περίθλασης (Tabbara et al. 1988). Σε αυτή την περίπτωση αντί να γίνει χρήση μόνο των πρώτων αφίξεων των χρόνων διαδρομής, ως δεδομένα για την αντιστροφή, γίνεται χρήση τόσο των χρόνων όσο και των πλατών και φάσεων των κυματομορφών. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες μεθόδους (π.χ αντιστροφή χρόνων διαδρομής) η μέθοδος αυτή είναι πολύ ευαίσθητη στην επιλογή του αρχικού μοντέλου και στα πλάτη του θορύβου. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου, αν γίνει χρήση μιας μεθόδου βαθμίδας (gradient method) θα οδηγήσει σε εσφαλμένο τοπικό ελάχιστο, στην περίπτωση όπου το αρχικό μοντέλο είναι πολύ διαφορετικό από το πραγματικό.

Είναι απαραίτητη η χρήση όλων των πληροφοριών που παρέχει η κυματομορφή, όταν το μήκος κύματος αυτής, είναι συγκρίσιμο με το μέγεθος της ανωμαλίας που θέλουμε να απεικονίσουμε. Η θεώρηση της ακτινικής θεωρίας, ισχύει περιοριστικά μόνο για τις πολύ υψηλές συχνότητες, ή ισοδύναμα, για μήκη κύματος πολύ "μικρά" συγκρινόμενα με το μέγεθος της ανωμαλίας. Ο όρος "μικρά" είναι αντικείμενο της ερμηνείας, αλλά μακρόχρονη εμπειρία στην ασυμπτωτική θεωρία της διάδοσης του κύματος (Bleistein 1984) έχει δείξει ότι, αν το μεγαλύτερο μήκος κύματος των δεδομένων είναι λ_{max}, τότε η ακτινική θεωρία ισχύει για ανωμαλίες μεγέθους $\cong 3\lambda_{\max}$ ή μεγαλύτερες. Αν η παραπάνω σχέση παραβιάζεται κατά την διάρκεια ενός τομογραφικού πειράματος, τότε η τομογραφία περίθλασης (δηλαδή χωρίς τη παραδοχή προσέγγισης υψηλών συχνοτήτων στα δεδομένα μας) παίζει ένα σημαντικό ρόλο στην ικανοποιητική ανακατασκευή του χώρου μελέτης.

Η τομογραφία περίθλασης έχει διάφορα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα έναντι της μεθόδου τομογραφίας χρόνων διαδρομής. Με τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται σήμερα, είναι μια αυστηρά γραμμική μέθοδος τομογραφίας. Η ύπαρξη ενός αρχικού μοντέλου είναι απαραίτητη. Το αρχικό μοντέλο είναι συνήθως ομογενές και απλό. Η μέθοδος αυτή απαιτεί μια σύγκριση μεταξύ του προβλεπόμενου κυματικού πεδίου (wave fields) και του παρατηρούμενου. Αν θεωρήσουμε πολύπλοκο αρχικό μοντέλο τότε στην τομογραφία περίθλασης θα λάβουμε παραμορφωμένα κύματα (distorted wave), ως διαφορά μεταξύ του υπολογιζόμενου σύνθετου κυματικού πεδίου και του παρατηρούμενου. Επίσης, επειδή γίνεται χρήση κυματομορφών και όχι χρόνων, όλα τα στοιχεία συμμετέχουν στην συνάρτηση σφάλματος. Το πρόβλημα που εμφανίζεται σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι ότι η συνάρτηση σφάλματος (misfit function) μπορεί να είναι ισχυρά μη γραμμική, σε σχέση με το προτεινόμενο μοντέλο ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι, μια μικρή μεταβολή στα δεδομένα επιφέρει μεγάλη μεταβολή στο μοντέλο. Σε άλλες περιπτώσεις, είναι δυνατό να καταλήξουμε στην λύση του τομογραφικού προβλήματος, αν το υπολογιζόμενο και το παρατηρούμενο κυματικό πεδίο διαφέρουν κατά μια μικρή ποσότητα. Κατά συνέπεια, η τομογραφία περίθλασης είναι ένας τύπος γραμμικής τομογραφίας, παρόλο που στην περίπτωση αυτή οι ακτίνες δεν είναι ευθείες, ενώ παραμένει γραμμικό το πρόβλημα και από μαθηματικής απόψεως, καθώς οι διαταραχές του αρχικού μοντέλου πρέπει να είναι πολύ μικρές. Άρα, η τομογραφία περίθλασης είναι σαφώς υποδιαίστερη της τομογραφίας χρόνων διαδρομής, αφού εν γένει ανήκει στη γραμμική τομογραφία. Μια επαναληπτική μέθοδος για τομογραφία περίθλασης, πρόσφατα προτάθηκε από τους Ladas και Devaney (1991, 1992), ενώ μια μη γραμμική μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για αντιστροφή πλήρους κυματομορφής έχει προταθεί από τους Tarantola και Valette (1982) και Tarantola (1984).

Από την άλλη πλευρά, η τομογραφία περίθλασης είναι πιο επιτυχής από τη τομογραφία χρόνων διαδρομής, και αυτό διότι χρησιμοποιεί περισσότερες πληροφορίες, οι οποίες περιέχονται στις σεισμικές κυματομορφές. Η μέθοδος αυτή έχει ακόμα σοβαρά προβλήματα που σχετίζονται με την αβεβαιότητα των δεδομένων πλάτους. Είναι καλά γνωστό ότι η απόσβεση των κυμάτων, η σκέδαση αυτών, η τρισδιάστατη γεωμετρική διασπορά, η μετατροπή των ιδιομορφών των κυμάτων (mode conversion), όπως και οι επιδράσεις ανάκλασης / εκπομπής, μπορούν όλα μαζί να δράσουν αρνητικά στις κυματομορφές που καταγράφονται. Κατά συνέπεια, για να θεωρηθεί επιτυχής μια τομογραφία περίθλασης πρέπει να βρεθεί τρόπος ταυτόχρονης απομάκρυνσης των θορύβων, οι οποίοι αναφέρθηκαν νωρίτερα, από τα πραγματικά δεδομένα. Ετσι, η χρήση της τομογραφίας περίθλασης, έχει περιοριστεί στην αντιστροφή δύο διαστάσεων, και η πιο επιτυχής εφαρμογή της έχει γίνει με υπέρηχους στην Ιατρική, ή με μικροκύματα για χαρτογράφηση και ανίχνευση μεταλλικών οπλισμών σε σκυρόδεμα.

Συμπερασματικά, η τομογραφία περίθλασης και η αντιστροφή πλήρους κυματομορφής μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ανοικτή σε μια πιο επιστάμενη μελέτη. Τα αποτελέσματα μοντέλων καθυστέρησης από την τομογραφία χρόνων διαδρομής, μπορούν να αποτελέσουν αρχικό μοντέλο για την τομογραφία περίθλασης. Ετσι, η τομογραφία περίθλασης παρέχει ένα ακόμα εργαλείο για βελτίωση των αποτελεσμάτων της αντιστροφής και τομογραφίας των χρόνων διαδρομής.

3.6.5 Τομογραφία με αντιστροφή των χρόνων διαδρομής και της πλήρους κυματομορφής (Travel time Inversion + Full wave equation).

Εκμεταλλευόμενοι τα πλεονεκτήματα των δύο μεθόδων που αναφέρθηκαν παραπάνω γίνεται εφαρμογή μιας νέας μεθόδου, η οποία θεωρείται περισσότερο αξιόπιστη (Zhou et al. 1995). Κύρια χαρακτηριστικά της είναι :

1. Αυξημένος ρυθμός σύγκλισης στο πραγματικό μοντέλο, λόγω μη ευαισθησίας στο αρχικό μοντέλο.
2. Μεγάλου βαθμού διακριτική ικανότητα .
3. Δεν είναι αναγκαία η παραδοχή προσέγγισης υψηλών συχνοτήτων στα δεδομένα.
4. Η μέθοδος αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στην ύπαρξη θορύβου στα δεδομένα.

Βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι πρώτα γίνεται αντιστροφή για τα μεγάλου μήκους κύματος χαρακτηριστικά ταχύτητας με βάση την αντιστροφή των χρόνων διαδρομής (traveltime inversion) και κατόπιν γίνεται ένας εμπλουτισμός του παρόντος μοντέλου με πιο λεπτομερή χαρακτηριστικά, με βάση την μέθοδο αντιστροφής πλήρους κυματομορφής (waveform inversion).

3.7 Γραμμική - Μη Γραμμική Αντιστροφή και Τομογραφία

Κατά την επίλυση του ευθέος προβλήματος (*forward problem*), ζητείται να καθοριστούν τα **M** και **t**, με δεδομένο το **s**. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπολογιστεί η σεισμική ακτίνα μεταξύ κάθε ζεύγους πηγής και δέκτη (κάνοντας χρήση κάποιου αλγορίθμου ray tracing) και κατόπιν να υπολογιστεί ο χρόνος διαδρομής ως ολοκλήρωμα κατά μήκος της σεισμικής ακτίνας.

Στο γραμμικό τομογραφικό ή αντίστροφο (*linear tomography or inversion*) πρόβλημα, παρέχονται ως δεδομένα τα **M** και **t**, και σκοπός είναι ο προσδιορισμός του **s**. Η θεώρηση που γίνεται σε αυτή τη περίπτωση είναι ότι οι σεισμικές ακτίνες είναι εκ των προτέρων (*a priori*) γνωστές, το οποίο και ισχύει στην γραμμική θεώρηση, αγνοώντας την εξάρτηση της σεισμικής ακτίνας από τη κατανομή των τιμών της καθυστέρησης στον χώρο. Συχνά, δεχόμαστε την σεισμική ακτίνα ως μια ευθεία γραμμή που ενώνει την πηγή με τον δέκτη. Η γραμμική τομογραφία εφαρμόζεται στη γεωφυσική διασκόπηση αλλά ακόμα περισσότερο στην ιατρική ενδοσκόπηση.

Σε προβλήματα μη γραμμικής τομογραφίας και αντιστροφής (*nonlinear tomography or inversion*), δίδονται μόνο οι χρόνοι διαδρομής **t** (για το ζεύγος πηγής-δέκτη, έχοντας γνωστές τις θέσεις αυτών), και σκοπός είναι ο προσδιορισμός του **s** και του **M**. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η εξάρτηση των σεισμικών ακτίνων από την κατανομή των τιμών της καθυστέρησης στο χώρο, είναι πολύ ισχυρή και καθορίζει άμεσα την αρχιτεκτονική του αλγόριθμου αντιστροφής. Η μη γραμμική αντιστροφή, εφαρμόζεται κατά τις περιπτώσεις όπου παρατηρείται σημαντική μεταβολή των τιμών καθυστέρησης στην περιοχή ενδιαφέροντος. Οι σεισμικές ακτίνες σε τέτοια μέσα, παύουν να είναι ευθείες γραμμές (γραμμικό πρόβλημα), και παρουσιάζουν μεγάλη καμπυλότητα (μη γραμμικό), η τιμή της οποίας δεν μπορεί να είναι γνωστή πριν η διαδικασία της αντιστροφής αρχίσει.

Τα προβλήματα γραμμικής τομογραφίας και αντιστροφής, μπορούν προσεγγιστικά να λυθούν εφαρμόζοντας μεθόδους οπισθοπροβολής (backprojection) (παρ. 3.6.1). Τα γραμμικά αντίστροφα προβλήματα μπορούν να λυθούν με μεγαλύτερη ακρίβεια με χρήση κάποιας μεθόδου βελτιστοποίησης (optimization technique). Χρησιμοποιώντας την λύση ελαχίστων τετραγώνων για παράδειγμα, η κανονική εξίσωση για το διάνυσμα **s** δίνεται από το παρακάτω τύπο :

$$\hat{s} = \left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\right)^{-1}\mathrm{M}^{\mathrm{T}} t \tag{3.53}$$

δεχόμενοι φυσικά ότι ο αντίστροφος του πίνακα $\mathbf{M}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}$ υπάρχει. Αν ο αντίστροφος δεν υπάρχει, τότε η εξίσωση (3.53) πρέπει να κανονικοποιηθεί (regularized). Η κανονικοποίηση πραγματοποιείται με άθροιση ενός θετικού πίνακα στον $\mathbf{M}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}$, και αντικατάσταση του αντιστρόφου της σχέσης (3.53), από τον τροποποιημένο πια αντίστροφο.

Για την επίλυση της μη γραμμικής αντιστροφής, απαιτείται η χρήση ενός επαναληπτικού αλγορίθμου, ο οποίος θα βρίσκει την προσεγγιστική λύση $\mathbf{s_b}$. Η δομή ενός τέτοιου προγράμματος δίνεται παρακάτω:

1. Θέτουμε ως $\mathbf{s_b}$ ένα αρχικό μοντέλο, το οποίο μπορεί να είναι π.χ ένα ομογενές μοντέλο ή το καλύτερο μοντέλο βασισμένο σε γνωστές γεωλογικές παρατηρήσεις.
2. Υπολογίζουμε τον πίνακα των σεισμικών ακτίνων **M** και τους χρόνους διαδρομής $\mathbf{t_b}$ για τις παραμέτρους $\mathbf{s_b}$, και κατόπιν υπολογίζεται η διαφορά των δύο χρόνων $\mathbf{\Delta t = t - t_b}$ (παρατηρούμενος - υπολογιζόμενος).
3. Αν το Δt είναι ικανοποιητικά μικρό τότε θεωρείται το $\mathbf{s_b}$ ως τελική λύση και τέλος. Αλλιώς προχωράμε στο βήμα 4.
4. Βρίσκεται μια διόρθωση του μοντέλου $\mathbf{\Delta s}$ ως λύση του γραμμικού αντίστροφου προβλήματος : $\mathbf{M.\Delta s=\Delta t}$.
5. Βελτιώνονται οι παράμετροι του μοντέλου $\mathbf{s_b}$, παρέχοντας νέες παραμέτρους που δίνονται από το άθροισμα των παλίων $\mathbf{s_b}$ και των διορθώσεων $\mathbf{\Delta s}$.
6. Επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Ο παραπάνω αλγόριθμος λειτουργεί ικανοποιητικά τις περισσότερες φορές, αλλά όχι πάντα. Για μοντέλα τα οποία έχουν μικρή αντίθεση τιμών καθυστέρησης, ο παραπάνω αλγόριθμος θα συγκλίνει σε μια αληθοφανή λύση. Οταν όμως η μέθοδος αποτυγχάνει, σημαίνει ότι το μοντέλο παρουσίαζε υψηλή διακύμανση στις τιμές του. Για την αντιμετώπιση τέτοιου είδους προβλημάτων, προτείνονται τεχνικές που μειώνουν την διακύμανση των τιμών καθυστέρησης, και εγγυούνται υψηλό βαθμό ομαλότητας (smoothness) του μοντέλου.

Αναλύοντας τον αλγόριθμο, παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο μόνο στάδια, κατά τα οποία λαμβάνουν χώρα σημαντικοί υπολογισμοί. Το στάδιο 2, είναι η επίλυση του ευθέος προβλήματος για τις παραμέτρους $\mathbf{s_b}$. Το στάδιο αυτό δεν παρουσιάζει κάποια αστάθεια στην επίλυση και αυτό διότι μπορεί να επιλυθεί με όση ακρίβεια επιθυμείται (φυσικά υπάρχουν περιορισμοί υπολογιστικής ισχύος). Στο στάδιο 4, παρουσιάζεται το βήμα της γραμμικής αντιστροφής σε ένα αλγόριθμο μη γραμμικής αντιστροφής. Αυτό πρέπει να δημιουργήσει κάποιους περιορισμούς αφού στη γραμμική αντιστροφή δεχόμαστε ότι το καινούργιο μοντέλο (ύστερα από την άθροιση της διόρθωσης), δεν είναι τόσο διαφορετικό από το προηγούμενο, έτσι ώστε να δικαιολογούνται οι σημαντικές διαφορές στον πίνακα **M** των σεισμικών ακτίνων, από το ένα βήμα στο επόμενο. Αν η παραπάνω παραδοχή δεν ισχύει, τότε το στάδιο 4, παύει να ισχύει, και τα στάδια 4 και/ή 5 στον αλγόριθμο, πρέπει να τροποποιηθούν.

Η ανάλυση εφαρμοσιμότητας (feasibility analysis), παρέχει ένα σετ αυστηρών φυσικών περιορισμών στην διαδικασία της ανακατασκευής του μοντέλου. Η εμπειρία έχει δείξει ότι, αν εφαρμοστούν περιορισμοί στην εφαρμοσιμότητα, τότε δεν απαιτούνται περιορισμοί στην ομαλοποίηση της λύσης, ή, στα όρια της μέγιστων και ελάχιστων τιμών του μοντέλου. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, θα γίνει ανάλυση τέτοιων προβλήματων με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, ενώ θα αναφερθούν μέθοδοι σταθεροποίησης του μη γραμμικού αντίστροφου προβλήματος.

3.8 Ανάλυση της εφαρμοσιμότητας, κατά την εφαρμογή μεθόδων αντιστροφής των χρόνων διαδρομής

Η ιδέα της χρήσης κάποιων περιορισμών εφαρμοσιμότητας είναι πρόβλημα που εμφανίζεται κυρίως κατά την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων (Fiacco and McCormick, 1990). Παρόλα αυτά, μόλις πρόσφατα διαπιστώθηκε ότι κάποιες φυσικές αρχές, όπως για παράδειγμα η αρχή του Fermat, στην πραγματικότητα οδηγούν στην εφαρμογή αυστηρών περιορισμών εφαρμοσιμότητας σε μη γραμμικά προβλήματα (Berryman 1991). Η κύρια διαφορά που παρουσιάζεται μεταξύ της ανάλυσης που γινόταν έως τώρα στον μη γραμμικό προγραμματισμό και στη νέα ανάλυση που εφαρμόζεται, είναι ότι οι συναρτήσεις οι οποίες χρησιμοποιούνταν στο μη γραμμικό προγραμματισμό ήταν συνεχείς και διαφοροποιήσιμες, οπότε ήταν σχετικά εύκολο να υπολογιστούν επακριβώς. Αντίθετα, τα συναρτησιοειδή στη μη γραμμική αντιστροφή (π.χ τα συναρτησιοειδή των χρόνων διαδρομής), δεν είναι συνεχή ή διαφοροποιήσιμα, οπότε είναι δύσκολος και ο υπολογισμός τους. Οι περιορισμοί εφαρμοσιμότητας που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση ενός αντιστρόφου προβλήματος, είναι θα λέγαμε περισσότερο γενικοί παρά συγκεκριμένοι.

Η ανάλυση που μελετάται, είναι πολύ σημαντική διότι βοηθάει στο να χαρακτηριστεί η λύση του αντιστρόφου προβλήματος, καθώς και να απαντηθούν ερωτήματα που έχουν σχέση με την εύρεση του τοπικού ή ολικού ελαχίστου του αντιστρόφου προβλήματος.

3.8.1 Καθορισμός των περιορισμών εφαρμοσιμότητας

Η εξίσωση (3.38), θεωρεί ότι P_i είναι η σεισμική ακτίνα που υπακούει στην αρχή του Fermat (ελάχιστος χρόνος) και οδηγεί σε ισότητες οι οποίες μπορούν να εκφραστούν υπό μορφή διανυσμάτων με την εξίσωση **Ms=t**. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι P_i είναι μια τυχαία σεισμική ακτίνα, ανεξάρτητα από το αν είναι η ακτίνα ελάχιστου χρόνου διαδρομής. Η αρχή του Fermat μας επιτρέπει να γράψουμε την εξίσωση

$$\int_{P_i} s(x)dl^{P_i} \geq t_i \tag{3.54}$$

όπου t_i είναι ο παρατηρούμενος χρόνος διαδρομής για το ζευγάρι *i* πομπού και δέκτη. Οταν γίνει εφαρμογή της παραπάνω σχέσης για κάθε μοντέλο (κελιά ή κύβους) και για όλες τις σεισμικές ακτίνες *i*, θα προκύψουν m ανισότητες οι οποίες μπορούν να γραφούν υπό μορφή διανυσμάτων ως :

$$M \cdot s \geq t \tag{3.55}$$

Οι εξισώσεις (3.54) και (3.55), μπορούν να θεωρηθούν ως μια ομάδα περιοριστικών ανισοτήτων, ως προς τον προσδιορισμό του μοντέλου καθυστέρησης **s**. Οταν το **s** ικανοποιεί τις m ανισότητες, τότε το **s** είναι αποδεκτό (εφαρμόσιμο - *feasible*). Οταν έστω και ένας περιορισμός δεν ικανοποιείται, τότε χαρακτηρίζουμε το **s** ως μη αποδεκτό (μη εφαρμόσιμο - *infeasible*). Το σύνολο των ανισοτήτων, αποτελεί τους περιορισμούς εφαρμοσιμότητας (*feasibility constraints*).

Η εφαρμογή των περιορισμών εφαρμοσιμότητας είναι σχετικά εύκολη σε προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού (Fiacco and McCormick, 1990), όταν οι περιορισμοί για το διάνυσμα της λύσης είναι συγκεκριμένοι. Ομως, κατά την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος απαιτείται ένας ακόμη υπολογισμός. Γενικά, οι περιορισμοί για το διάνυσμα των χρόνων διαδρομής είναι συγκεκριμένοι, σε αντίθεση με τους περιορισμούς του διανύσματος της καθυστέρησης, που είναι τελείως ασαφής, άρα πρέπει να υπολογιστούν. Αυτός ο πρόσθετος βαθμός πολυπλοκότητας του αντιστρόφου προβλήματος, είναι αναπόφευκτος, αν και αντιμετωπίζεται σχετικά εύκολα με μια μικρή τροποποίηση του αλγορίθμου της μη γραμμικής αντιστροφής.

3.9 Προβλήματα κατά την επίλυση του Αντιστρόφου προβλήματος (Ghosts in Traveltime Inversion and Tomography)

Κατά την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος εμφανίζονται προβλήματα τα οποία στην διεθνή βιβλιογραφία αναφέρονται ως φαντάσματα (**ghosts**). Φάντασμα στην σεισμική αντιστροφή χρόνων διαδρομής, είναι ένα μοντέλο το οποίο όμως δεν επηρρεάζει διόλου τη προσαρμογή των αναμενόμενων και των παρατηρούμενων χρόνων διαδρομής. Για παράδειγμα αν ισχύει το παρακάτω :

$$\mathbf{Ms=t}, \quad \mathbf{M(s+g)=t}, \tag{3.56}$$

τότε με επίλυση των δύο σχέσεων προκύπτει ότι :

$$\mathbf{Mg = 0}, \tag{3.57}$$

οπότε το g ανήκει στον μηδενικό χώρο (null space) του πίνακα M, δηλαδή στο μηδενικό χώρο του αντίστοιχου συναρτησιοειδούς των χρόνων διαδρομής. Προσεκτική ανάλυση των προβλημάτων που συχνά εμφανίζονται, έδειξε ότι μερικά από αυτά είναι αναπόφευκτα λόγω της περιορισμένης δυνατότητας ελέγχου των δεδομένων, όταν αυτά συλλέγονται. Αλλα προβλήματα προέρχονται από ατυχή επιλογή του τρόπου διακριτοποίησης του μοντέλου.

Σημαντικό είναι να επισημάνουμε, ότι πολλές φορές είναι αδύνατη ή/και μη επιθυμητή η απομάκρυνση όλων των προβλημάτων - φαντασμάτων. Η λύση ελαχίστων τετραγώνων, δεν μπορεί να προσδιοριστεί στην περίπτωση κατά την οποία ο πίνακας $\mathbf{M^T M}$ είναι μη αντιστρέψιμος. Η αδυναμία αντιστροφής του παραπάνω πίνακα οφείλεται στην ύπαρξη μηδενικού χώρου στον πίνακα M, ο οποίος χώρος απαρτίζεται από φαντάσματα (ghosts). Σε ορισμένες περιπτώσεις αναπτύσσονται τεχνικές για την απομάκρυνση των φαντασμάτων (Ivansson, 1986), αλλά όχι πάντα.

3.9.1 Περιορισμοί εφαρμοσιμότητας και Φαντάσματα

Σε προηγούμενη παράγραφο αναφέρθηκε ότι οι περιορισμοί εφαρμοσιμότητας εξαρτώνται από τα δεδομένα (χρόνοι διαδρομής), ενώ τα φαντάσματα είναι ανεξάρτητα των χρόνων διαδρομής και εξαρτώνται μόνο από τον πίνακα των σεισμικών ακτίνων. Συμπερασματικά, οι περιορισμοί εφαρμοσιμότητας είναι πάντα ορθογώνιοι σε όλα τα διανύσματα των φαντασμάτων.

Στην πραγματικότητα, η παραπάνω θεώρηση είναι υπεραπλουστευμένη για τη περίπτωση της μη γραμμικής αντιστροφής, και αυτό διότι μπορεί να ζητείται η ταυτόχρονη εξέταση πολλών πινάκων σεισμικών ακτίνων.

3.9.2 Τύποι “φαντασμάτων”

Παρακάτω θα γίνει ανάλυση των συνηθέστερων προβλημάτων που εμφανίζονται σε προβλήματα σεισμικής αντιστροφής.

3.9.2.1 Φάντασμα ενός μεμονωμένου κελιού (Single cell ghost)

Φάντασμα ενός μεμονωμένου κελιού εμφανίζεται όταν ένα κελί δεν τέμνεται από καμμία σεισμική ακτίνα. Το κελί αυτό δεν καλύπτεται από καμία σεισμική ακτίνα άρα δεν υπάρχει κανένα στοιχείο για τον χώρο αυτό. Κατά συνέπεια και η τιμή καθυστέρησης του χώρου αυτού θα είναι αυθαίρετη, μιας και δεν υπάρχει κανένας χρόνος διαδρομής από την ομάδα των δεδομένων. Ο πιο κατάλληλος τρόπος επίλυσης του παραπάνω προβλήματος είναι, η υιοθέτηση μιας αυθαίρετης τιμής καθυστέρησης, που θα είναι η μέση τιμή για όλα τα κελιά, ή η μέση τιμή καθυστέρησης όλων των παρακείμενων κελιών.

3.9.2.2 Δύο κελιά από τα οποία διέρχεται μια μόνο σεισμική ακτίνα

Στην περίπτωση κατά την οποία δύο κελιά καλύπτονται μόνο από μια σεισμική ακτίνα, προκύπτει φάντασμα και αυτό διότι η αύξηση δt_i στους χρόνους διαδρομής κατά τη κίνηση των ακτίνων διαμέσου των δύο κελιών, είναι αμετάβλητη σε διαταραχές της μορφής :

$$g^{\mathrm{T}} = \left(0,\ldots,0, l_{ik}, 0,\ldots,0, -l_{ij}, 0,\ldots,0\right) \tag{3.58}$$

καθώς

$$\delta t_i = l_{ij} s_j + l_{ik} s_k = l_{ij}\left(s_j + \alpha l_{ik}\right) + l_{ik}\left(s_k - \alpha l_{ij}\right) \tag{3.59}$$

όπου α είναι μια αυθαίρετη μονόμετρη ποσότητα. Ο μόνος περιορισμός στον α είναι ότι το διαταρασσόμενο διάνυσμα καθυστέρησης

$$\mathbf{s'=s+\alpha g} \tag{3.60}$$

πρέπει να είναι θετικό. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι δεν υπάρχει φάντασμα που να προέρχεται από κελί το οποίο καλύπτεται από μια σεισμική ακτίνα.

Ο σωστότερος τρόπος αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος είναι η θεώρηση ότι τα δύο κελιά (ιδιαίτερα αν είναι παρακείμενα), αποτελούν ένα κελί μεγαλύτερης διάστασης με την ίδια τιμή καθυστέρησης και για τα δύο. Με αυτό το τρόπο επιτυγχάνεται η απομάκρυνση του προβλήματος αλλά ταυτόχρονα και η μείωση των παραμέτρων του μοντέλου που πρέπει να προσδιοριστούν, κατά ένα.

Αν περισσότερα των δύο κελιών καλύπτονται από μια σεισμική ακτίνα, τότε θα εμφανιστούν πολλαπλά φαντάσματα (για ν κελιά θα υπάρχουν ν-1 φαντάσματα). Ξανά, ένας τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι η θεώρηση όλων των κελιών ως ένα κελί. Αυτή η λύση δεν είναι και η καλύτερη για την περίπτωση όπου τα κελιά δεν είναι παρακείμενα, και για αυτό άλλοι τρόποι θα αναφερθούν παρακάτω.

3.9.2.3 Υποκαθορισμένα κελιά

Οι προηγούμενες αναφορές είναι ειδικές περιπτώσεις ενός πιο γενικού προβλήματος που είναι η περίπτωση υποκαθορισμένων κελιών σε υπερκαθορισμένο πρόβλημα αντιστροφής. Με τον όρο υποκαθορισμένο εννοούμε την περίπτωση όπου οι εξισώσεις είναι λιγότερες των αγνώστων. Το παράδειγμα των δύο κελιών με τη μια σεισμική ακτίνα είναι αντιπροσωπευτικό της περίπτωσης που μελετάται. Αλλα παραδείγματα μπορεί να είναι τρία κελιά με δύο σεισμικές ακτίνες, 20 κελιά με 15 ακτίνες κ.τ.λ. Η ύπαρξη υποκαθορισμένων κελιών μπορεί να είναι αποτέλεσμα του κακού σχεδιασμού εκτέλεσης της έρευνας, των φυσικών περιορισμών που εισάγει ο χώρος μελέτης και οι οποίοι μειώνουν σημαντικά το πεδίο έρευνας (όπως για παράδειγμα η γεωμετρία πειράματος σεισμικής τομογραφίας σε γεωτρήσεις) ή λόγω ύπαρξης ισχυρών αντιθέσεων στις τιμές των καθυστερήσεων στον χώρο, οι οποίες και προκαλούν ισχυρή κύρτωση των σεισμικών ακτίνων. Είναι αναμενόμενο οι σεισμικές ακτίνες να αποφεύγουν περιοχές χαμηλής ταχύτητας, υπακούοντας την αρχή του Fermat, σύμφωνα με την οποία η ακτίνα θα προτιμήσει την γρηγορότερη διαδρομή. Καθώς στα πειράματα προσχεδιάζεται η επιθυμητή ανάλυση και ακρίβεια του μοντέλου, με βάση την παραδοχή της κάλυψης του χώρου από ευθείες σεισμικές ακτίνες, η πραγματική κάλυψη του χώρου στις περιοχές χαμηλών ταχυτήτων είναι σημαντικά μικρότερη της αναμενόμενης. Αυτή η μικρή κάλυψη του συγκεκριμένου χώρου προκαλείται από την κάμψη των σεισμικών ακτίνων και προκαλεί τον υποκαθορισμό των αντίστοιχων κελιών.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί ως εξής :

$$M' \cdot s' = \delta t' \tag{3.61}$$

όπου $\mathbf{M}'$ είναι ένας πίνακας με διαστάσεις $m' \times n'$ και $m' < n'$, $\mathbf{s}'$ είναι υποδιάνυσμα με μήκος n' του μοντέλου καθυστέρησης και $\delta\mathbf{t}'$ είναι το υποδιάνυσμα με μήκος m' των χρόνων διαδρομής. Η λύση της παραπάνω σχέσης δίνεται ως :

$$s' = M'^{T}\left(M'M'^{T}\right)^{-1}\delta t' \tag{3.62}$$

στη περίπτωση κατά την οποία ο πίνακας $\mathbf{M}'\mathbf{M}'^{\mathbf{T}}$ είναι αντιστρέψιμος. Η γενική λύση της σχέσης (3.61) είναι ένα διάνυσμα της μορφής :

$$s' = M'^{T}\left(M'M'^{T}\right)^{-1}\delta t' + g' \tag{3.63}$$

όπου $\mathbf{g}'$ είναι κάθε διάνυσμα του μηδενικού χώρου του $\mathbf{M}'$. Ο χώρος αυτός πρέπει να έχει διαστάσεις τουλάχιστον $n' - m'$.

Η προτεινόμενη λύση και σε αυτή τη περίπτωση είναι ο συνδυασμός πολλών κελιών σε ένα, έως το σημείο όπου ο αριθμός των εξισώσεων θα είναι τουλάχιστον ίσος του αριθμού των αγνώστων. Σε αυτή τη περίπτωση $n' - m' = 0$, οπότε και ο μηδενικός χώρος του πίνακα Μ έχει αφανιστεί. Στην περίπτωση κατά την οποία τα κελιά δεν είναι παρακείμενα οπότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί η προηγούμενη μέθοδος, θέτουμε μια τιμή καθυστέρησης για τα κελιά τα οποία έχουν την ελάχιστη κάλυψη, απομακρύνοντάς τα ως παραμέτρους από το αντίστροφο πρόβλημα.

3.9.2.4 Ράβδωση του χώρου μελέτης (Stripes)

Ενα από τα πιο κοινά προβλήματα που εμφανίζονται κατά την εφαρμογή της μεθόδου της σεισμικής τομογραφίας μεταξύ γεωτρήσεων, είναι η κατακόρυφη ράβδωση. Οι ραβδώσεις είναι φαντάσματα που προκαλούνται είτε από κακή παραμετροποίηση του μοντέλου, είτε λόγω περιορισμένης δυνατότητας ανάλυσης του μοντέλου που προέρχεται από τη γεωμετρία της συγκεκριμένης μεθόδου, είτε λόγω χρήσης ευθειών ακτίνων για την ανακατασκευή του μοντέλου.

Για να γίνει πιο εμφανές το πρόβλημα, ας θεωρήσουμε δύο κατακόρυφες γεωτρήσεις, μεταξύ των οποίων ορίζουμε κάνναβο με δύο κελιά κατά την κατακόρυφη διεύθυνση και τρία κατά την οριζόντια. Αν θεωρηθεί ότι στην μια γεώτρηση είναι οι πηγές και στη άλλη οι δέκτες, τότε για να καταγραφεί ένας παλμός που παράγεται στην πηγή, πρέπει η ακτίνα να τμήσει τις τρεις γραμμές που υλοποιούν τα κατακόρυφα όρια μεταξύ των κελλιών. Θεωρώντας ευθείες ακτίνες το ολικό μήκος αυτών θα είναι $L_i=3h/cos\theta_i$, όπου θ_i είναι η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα με την οριζόντιο και h είναι η διάσταση του τετράγωνου κελιού. Ετσι για κάθε μία από τις κατακόρυφες στήλες του καννάβου που ορίσαμε, το μήκος της ακτίνας είναι $h/cos\theta_i$. Αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι το άθροισμα για όλες τις σεισμικές ακτίνες, για κάθε μία στήλη είναι σταθερό. Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας των σεισμικών ακτίνων παίρνει την μορφή

$$M = \begin{pmatrix} \frac{d_{11}h}{\cos\theta_1} & \frac{d_{12}h}{\cos\theta_1} & \frac{e_{13}h}{\cos\theta_1} & \frac{e_{14}h}{\cos\theta_1} & \frac{f_{15}h}{\cos\theta_1} & \frac{f_{16}h}{\cos\theta_1} \\ \frac{d_{21}h}{\cos\theta_2} & \frac{d_{22}h}{\cos\theta_2} & \frac{e_{23}h}{\cos\theta_2} & \frac{e_{24}h}{\cos\theta_2} & \frac{f_{25}h}{\cos\theta_2} & \frac{f_{26}h}{\cos\theta_2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{d_{m1}h}{\cos\theta_m} & \frac{d_{m2}h}{\cos\theta_m} & \frac{e_{m3}h}{\cos\theta_m} & \frac{e_{m4}h}{\cos\theta_m} & \frac{f_{m5}h}{\cos\theta_m} & \frac{f_{m6}h}{\cos\theta_m} \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

όπου $\frac{d_{ij}h}{\cos\theta_i}, \frac{e_{ij}h}{\cos\theta_i}, \frac{f_{ij}h}{\cos\theta_i}$ είναι θετικά ικανοποιώντας τηνπαρακάτω σχέση :

$$\sum_{j=1}^{2} d_{ij} = \sum_{j=3}^{4} e_{ij} = \sum_{j=5}^{6} f_{ij} = 1 \tag{3.65}$$

για κάθε σεισμική ακτίνα i, με $1 \leq i \leq m$. Είναι ξεκάθαρο ότι τα d, e, f σχετίζονται αντίστοιχα με τις τρεις στήλες του ορισμένου καννάβου. Αποδεικνύεται ότι τα τρία αυτά διανύσματα είναι (Berryman, 1991)

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

αποτελούν φαντάσματα για το πρόβλημα που εξετάζεται, καθώς σε κάθε περίπτωση προκύπτει ότι

$$Mg = \begin{pmatrix} \frac{h}{\cos\theta_1} - \frac{h}{\cos\theta_1} \\ \frac{h}{\cos\theta_2} - \frac{h}{\cos\theta_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{h}{\cos\theta_m} - \frac{h}{\cos\theta_m} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.67}$$

χρησιμοποιώντας και την σχέση (3.65).

Τέτοιου είδους “φαντάσματα” εμφανίζονται στο ανακατασκευασμένο μοντέλο ως κατακόρυφες ραβδώσεις και προκύπτουν διότι μια σταθερή ποσότητα διαταραχής στο μοντέλο των καθυστερήσεων, αφαιρείται από την μια στήλη και προστίθεται σε μια άλλη.

Για την απομάκρυνση των προβλημάτων πρέπει να διασπάσουμε την συμμετρία της διάταξης. Τα φαντάσματα δεν θα εμφανίζονται εάν, τα κελιά δεν ευθυγραμμίζονται πλήρως με την κατακόρυφη διάταξη των γεωτρήσεων. Έτσι μια προτεινόμενη λύση είναι η επιλογή κελιών τα οποία δεν θα είναι τετράγωνα ή ορθογώνια παραλληλόγραμμα, αλλά τρίγωνα ή εξάγωνα (όπως για παράδειγμα τρίγωνα Delauny, πολύγωνα Voronoi). Βελτίωση των αποτελεσμάτων παρουσιάζεται κατά την αντικατάσταση των τριγώνων του καννάβου από τα πολύγωνα Voronoi, καθώς και μειώνοντας την διακριτική τους ικανότητα. Έτσι φαίνεται καθαρά ότι ο μηδενικός χώρος (null space), δεν έχει τόσο υψηλή ενέργεια παντού (Vesnaver 1994, Bohm et al. 1995).

Άλλη λύση είναι η συννένωση των κελιών με τη μικρότερη κάλυψη από ακτίνες. Η λύση αυτή όμως θα οδηγήσει σε μια διάσπαση της συμμετρίας. Μια απλούστερη μέθοδος (τουλάχιστον θεωρητικά) είναι η χρήση των καμπυλωμένων ακτινών, αντί των ευθειών σεισμικών ακτινών.

3.9.2.5 Γραμμική εξάρτηση

Τα φαντάσματα προκύπτουν λόγω γραμμικής εξάρτησης του πίνακα **M**, αλλά και κάθε άλλου υποπίνακα αυτού **M’**. Το πρόβλημα των ραβδώσεων προέρχεται από την γραμμική εξάρτηση όλων των γραμμών του πλήρους πίνακα **M**. Στην περίπτωση των υποκαθορισμένων κελιών, το πρόβλημα πηγάζει από την φτωχή κάλυψη του χώρου αυτού από σεισμικές ακτίνες.

Η εξίσωση η οποία και καθορίζει την παρουσία φαντασμάτων :

$$M \cdot g = 0 \tag{3.68}$$

δείχνει καθαρά την γραμμική εξάρτηση μεταξύ των γραμμών του πίνακα **M**. Η εξίσωση (3.68) είναι ένα σύστημα *m* εξισώσεων και *n* αγνώστων συνιστώσων του g, με $m>n$. Κάθε n από τις *m* εξισώσεις είναι ικανές να ερμηνεύσουν το **g**, καθώς και τις υπόλοιπες m-n εξισώσεις. Εξαίρεση στα παραπάνω αποτελεί το πρόβλημα του “φαντάσματος” ενός κελιού (single cell ghost).

3.9.3 Τρόποι εξουδετέρωσης των “φαντασμάτων” (Ghostbusting)

Τα φαντάσματα που εμφανίζονται κατά την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος, μπορούν να απομακρυνθούν εφαρμόζοντας μια ποικιλία μεθόδων, μερικές από τις οποίες αναφέρθηκαν παραπάνω. Παρόλο, που όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι καμπυλόγραμμες ακτίνες εισάγουν φαντάσματα στις περιοχές χαμηλών ταχυτήτων, αποτελούν μια απλή και συχνά εφαρμοζόμενη λύση σε πειράματα σεισμικής τομογραφίας μεταξύ γεωτρήσεων. Αναπτύχθηκαν πολλές μέθοδοι βελτίωσης της σύζευξης μεταξύ κελιών και ακτίνων, όπως η εφαρμογή παχιών σεισμικών ακτίνων (fat rays) (Kak 1984, Michelena and Harris 1991).

3.9.3.1 Παχιές σεισμικές ακτίνες (Fat rays)

Το γεγονός ότι οι σεισμικές ακτίνες είναι σταθερές (δηλαδή, μικρές μεταβολές στην σεισμική ακτίνα δεν επηρρεάζουν κατά πολύ τους χρόνους διαδρομής) σημαίνει, ότι στη πραγματικότητα κάθε σεισμική ακτίνα αποτελείται από μια ομάδα ακτίνων οι οποίες φαινομενικά όλες έχουν τον ίδιο χρόνο διαδρομής. Κάνοντας χρήση της παραπάνω ιδιότητας είναι δυνατή η βελτίωση της κάλυψης των κελιών από σεισμικές ακτίνες. Ετσι είναι δυνατό, μεταξύ ενός ζεύγους πηγής - δέκτη να χρησιμοποιηθούν παραπάνω της μιας σεισμικές ακτίνες. Για παράδειγμα, κατά τον υπολογισμό των σεισμικών ακτίνων είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε όχι μόνο την ακτίνα με τον μικρότερο χρόνο διαδρομής, αλλά και όλες τις άλλες σεισμικές ακτίνες οι οποίες είναι προσεγγιστικά “καλές”. Στην περίπτωση αυτή, στη θέση του απλού στοιχείου του πίνακα των σεισμικών ακτίνων για την ith σεισμική ακτίνα, εισάγουμε πολλαπλές γραμμές σχηματίζοντας ένα πίνακα της μορφής :

$$M_i = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ . & . & & . \\ & & \dots & \\ . & . & & . \\ l_{\mu 1} & l_{\mu 2} & \dots & l_{\mu n} \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

όπου μ είναι η πολλαπλότητα της ith σεισμικής ακτίνας. Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται σχετικά εύκολα στην ακτινική θεωρία, είτε στη περίπτωση της μεθόδου των καμπυλωμένων ακτίνων είτε στην περίπτωση της μεθόδου βολών. Η επίδραση που έχει στην όλη διαδικασία είναι ότι αυξάνει το μέγεθος των δεδομένων κατά ένα παράγοντα μ. Ετσι το πρόβλημα που απευθείας προκύπτει είναι ο αυξημένος αποθηκευτικός χώρος που απαιτείται.

Η μέθοδος των παχιών ακτίνων, είναι μια εναλλακτική μέθοδος η οποία χρησιμοποιεί την ίδια θεωρία με τη προηγούμενη μέθοδο, αλλά αποφεύγει το πρόβλημα του αποθηκευτικού χώρου διότι δεν μεταβάλλει (αυξάνει) τις διαστάσεις των πινάκων. Στην μέθοδο αυτή δεχόμαστε ότι η σεισμική ακτίνα έχει κάποιο πεπερασμένο πάχος. Αποτέλεσμα αυτού, είναι ότι ενώ μέχρι τώρα γινόταν υπολογισμός του μήκους της ακτίνας που διέρχεται ανά κελί, τώρα εξετάζεται η περιοχή (εμβαδό) επικάλυψης που έχει η ακτίνα στη περιοχή του κελιού. Στις τρεις διαστάσεις, η επιφάνεια αυτή γίνεται όγκος. Αν το εύρος της ακτίνας στις δύο διαστάσεις είναι Δw και η κατακόρυφη τομή της ακτίνας στην περίπτωση των τριών διαστάσεων είναι μια επιφάνεια Δα, τότε ο πίνακας των σεισμικών ακτίνων δίνεται ως :

$$M = \frac{1}{\Delta w} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

όπου τα στοιχεία που απαρτίζουν το πίνακα είναι οι επιφάνειες επικάλυψης στις δύο διαστάσεις, και

$$M = \frac{1}{\Delta a}\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

και v_{ij} είναι οι όγκοι επικάλυψης για τις τρεις διαστάσεις. Πρέπει να τονιστεί ότι, στην περίπτωση της τομογραφίας χρόνων διαδρομής το άθροισμα των γραμμών του πίνακα M, είναι μήκος και όχι επιφάνεια ή όγκος, διότι αλλιώς δεν θα είχαν σημασία οι τιμές καθυστέρησης του ανακατασκευασμένου μοντέλου. Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι η δυσκολία με την οποία υπολογίζονται οι επιφάνειες και οι όγκοι επικάλυψης.

Αναπτύχθηκε μια μέθοδος που κάνει χρήση των πλεονεκτημάτων και των δυο μεθόδων που προαναφέρθησαν. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, πρώτα γίνεται ο καθορισμός του μήκους των σεισμικών ακτίνων με “κοινό” χρόνο διαδρομής (εξίσωση 3.69), και κατόπιν πέρνουμε τον μέσο όρο αυτών σύμφωνα με το τύπο :

$$\bar{l}_{ij} = \frac{1}{\mu}\sum_{i'=1}^{\mu} l_{i'j} \tag{3.72}$$

Με αυτό το τρόπο χρησιμοποιούμε μία και θεωρητικά τη πιο αποτελεσματική σεισμική ακτίνα, ενώ δεν παρουσιάζεται το πρόβλημα του αποθηκευτικού χώρου. Ακόμη, υπάρχει το πλεονέκτημα ότι τα μεμονομένα μήκη των ακτίνων $l_{i'j}$ από τα οποία υπολογίστηκαν και τα μέσα μήκη (3.72), είναι εύκολο να υπολογιστούν. Τελικά, ο πίνακας των σεισμικών ακτίνων που προκύπτει είναι

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{12} & \cdots & \bar{l}_{1n} \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \cdots & \bar{l}_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \bar{l}_{m1} & \bar{l}_{m2} & \cdots & \bar{l}_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

Είναι φανερό ότι χρησιμοποιώντας τις παχιές σεισμικές ακτίνες, επιτυγχάνεται σαφής βελτίωση της σύζευξης των σεισμικών ακτίνων και των κελιών του μοντέλου. Ακόμη οι πίνακες των σχέσεων (3.70, 3.71) έχουν σημαντικά περισσότερα στοιχεία από ότι ένας πίνακας **M**, απλών σεισμικών ακτίνων. Το κατά πόσο η μέθοδος αυτή βελτιώνει τα αποτελέσματα κατά την ανακατασκευή του μοντέλου, εξαρτάται από την εφαρμογή. Γενικά, οι παχιές ακτίνες πρέπει να χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με άλλες μεθόδους απομάκρυνσης των "φαντασμάτων" που εμφανίζονται κατά την διαδικασία της αντιστροφής.

3.9.3.2 Απόσβεση (Damping)

Η γενική λύση ελαχίστων τετραγώνων με απόσβεση κατά την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος είναι

$$s = s_0 + \left(M^T F^{-1} M + \mu G\right)^{-1} M^T F^{-1}\left(t - M s_0\right) \qquad (3.74)$$

η οποία και ικανοποιεί την σχέση

$$\left(M^T F^{-1} M + \mu G\right)\cdot\left(s - s_0\right) = M^T F^{-1}\left(t - M s_0\right) \qquad (3.75)$$

Η χρήση του παράγοντα απόσβεσης έγινε προκειμένου να μείωση την επίδραση που έχουν οι πολύ χαμηλές ιδιοτιμές των ιδιοδιανυσμάτων στη λύση του αντιστρόφου προβλήματος. Παράλληλα, πρέπει να εξεταστεί αν η απόσβεση απομακρύνει τα "φαντάσματα". Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (3.75) από δεξιά με το διάνυσμα $\mathbf{g^T}$ και δεδομένου ότι **Mg=0**, προκύπτει ότι :

$$g^T G\left(s - s_0\right) = 0 \qquad (3.76)$$

Με βάση την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση που ο πίνακας βάρους είναι ο μοναδιαίος (**G=I**), τότε κανένα "φάντασμα" δεν εμφανίζεται στο **s** διάνυσμα, εκτός εάν το $\mathbf{s_0}$ διάνυσμα περιέχει ήδη κάποιους όρους. Αρα, σε αυτή τη περίπτωση η απόσβεση βοηθάει στην εξουδετέρωση των "φαντασμάτων". Στην περίπτωση κατά την οποία $G \neq I$, η σχέση (3.76) αποτελεί συζυγή συνθήκη, η οποία αποδεικνύει ότι το διάνυσμα **g** και το διάνυσμα διόρθωσης $\mathbf{s\text{-}s_0}$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους, σε σχέση με τον πίνακα βάρους **G**. Παρόλο που η σχέση (3.76) συμφωνεί με την απουσία φαντασμάτων στο διάνυσμα διόρθωσης, δεν εγγυάται την εξουδετέρωση των φαντασμάτων σε όλες τις περιπτώσεις. Οταν **G=C**, όπου **C** είναι ο πίνακας κάλυψης (coverage matrix), η ερμηνεία της παραπάνω σχέσης είναι η ίδια της περίπτωσης όπου **G=I**. Οταν $\mathbf{G=K^TK}$ όπου **K** είναι ο πίνακας της βαθμίδας (gradients) ή της λαπλασιανής (Laplacians) του διανύσματος του μοντέλου, τότε η ερμηνεία γίνεται αρκετά πολύπλοκη.

3.10 Ανακεφαλαίωση

Οι μέθοδοι οι οποίες χρησιμοποιούνται για την εξουδετέρωση των "φαντασμάτων", μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες : (α) πειραματικής σχεδίασης, (β) τρόπου μοντελοποίησης και χρήσης αναλυτικών μεθόδων.

Καμμιά χρήση αναλυτικής μεθόδου δεν μπορεί να αντιμετωπίσει μια κακή πειραματική σχεδίαση. Οταν σχεδιάζεται ένα πείραμα τομογραφίας είναι πολύ σημαντικό να γίνει η συλλογή των δεδομένων με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να καλύπτεται πλήρως ο χώρος. Είναι επίσης σημαντικό να συλλέξουμε αρκετά δεδομένα έτσι ώστε να είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του μοντέλου. Ενας εμπειρικός κανόνας υποστηρίζει ότι ο αριθμός των ζευγαριών πηγής-δέκτη, πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσιος του αριθμού των παραμέτρων (αριθμού των κελιών) του μοντέλου που πρέπει να υπολογιστούν. Ενας άλλος χρήσιμος κανόνας ορίζει ότι το μέσο μέγεθος των κελιών του μοντέλου πρέπει να είναι περίπου $3\lambda_{max}$, όπου $\lambda_{max}=1/f_{min}s_{min}$ είναι το μέγιστο αναμενόμενο μήκος κύματος που σχετίζεται με την ελάχιστη συχνότητα f_{min} της διάδοσης του παλμού, και την ελάχιστη αναμενόμενη τιμή καθυστέρησης για τον χώρο μελέτης. Οι παραπάνω κανόνες προσδιορίστηκαν με βάση την ασυμπτωτική ανάλυση της διάδοσης του κύματος.

Ο αναλυτής πρέπει να σχεδιάσει το μοντέλο με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε τα δεδομένα να αποδώσουν το μέγιστο των πληροφοριών που μεταφέρουν. Το σχήμα και το μέγεθος των κελιών του μοντέλου είναι δική μας επιλογή. Είναι δυνατόν να παραλείψουμε κατά την ανάλυση κελιά τα οποία δεν έχουν την επιθυμητή κάλυψη, ή να συννενώσουμε κελιά μεταξύ τους για λόγους που εξυπηρετούν την πληρέστερη ανακατασκευή του μοντέλου. Τα κελιά μπορεί να έχουν οποιοδήποτε σχήμα. Πολλές φορές επιλέγονται ορθογώνια ή τετράγωνα κελιά για τα οποία είναι ευκολότερη η γραφική απεικόνιση του ανακατασκευασμένου μοντέλου όπως και ο υπολογισμός της σεισμικής ακτίνας. Αλλες φορές χρησιμοποιούνται ακανόνιστα σχήματα κελιών. Οι αναλυτικές μέθοδοι (τεχνάσματα) επεξεργασίας των δεδομένων, εφαρμόζονται όταν τα δεδομένα έχουν ήδη συλλεχθεί. Η εξομάλυνση και η οριοθέτηση (clipping) εφαρμόζονται ως μέθοδοι στις τιμές του μοντέλου καθυστέρησης, έτσι ώστε οι τιμές του ανακατασκευασμένου μοντέλου να βρίσκονται μεταξύ λογικών και αναμενόμενων ορίων. Τέλος, οι παχιές ακτίνες χρησιμοποιούνται ως τελευταίος τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος στην περίπτωση που οι άλλες μέθοδοι έχουν αποτύχει.

3.11 Σπουδαιότητα των “φαντασμάτων”

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι η απομάκρυνση όλων των φαντασμάτων κατά την διαδικασία της αντιστροφής, είναι τόσο απίθανη λόγω δυσκολίας, όσο και μη επιθυμητή. Στην πραγματικότητα είναι επιθυμητή μια διαταραχή του μηδενικού χώρου του πίνακα M, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ποικίλες γεωλογικές και φυσικές συνθήκες που είναι παρούσες στο χώρο που συλλέγονται τα τομογραφικά δεδομένα. Η διαδικασία αυτή είναι ανάλογη της διαδικασίας επίλυσης μιας κανονικής διαφορικής εξίσωσης, στην οποία προσδιορίζεται μια συγκεκριμένη λύση, υπολογίζονται το σύνολο των ομογενών λύσεων και τελικά παράγεται ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών, που ικανοποιεί την αρχική ή τις οριακές συνθήκες.

3.12 Γρήγορες μέθοδοι προσεγγιστικού καθορισμού της σεισμικής ακτίνας (Fast Ray Tracing Methods)

Ο προσεγγιστικός καθορισμός της σεισμικής ακτίνας, αποτελεί τη πιο χρονοβόρα (υπολογιστικά) διαδικασία κατά την σεισμική αντιστροφή ή τομογραφία χρόνων διαδρομής και είναι πρόβλημα συνοριακών τιμών. Συνεπώς, είναι πολύ σημαντική η επιλογή του κατάλληλου αλγορίθμου για τον προσδιορισμό της σεισμικής ακτίνας. Η επιλογή του κατάλληλου αλγορίθμου είναι στενά συνδεδεμένη με την επιλογή του τρόπου με τον οποίο θα δωθεί το μοντέλο. Τρεις είναι οι συνήθεις δυνατότητες για την παρουσίαση του μοντέλου : α) κελιά δύο ή τριών διαστάσεων σταθερής τιμής βραδύτητας, β) ένας ορθογώνιος κάνναβος στους κόμβους του οποίου ορίζονται οι τιμές καθυστέρησης του μοντέλου ενώ οι τιμές καθυστέρησης για το εσωτερικό των κελιών υπολογίζονται με μεθόδους γραμμικής παρεμβολής, γ) άθροιση ενός συνόλου συναρτήσεων βάσης των οποίων οι συντελεστές ερμηνεύουν το μοντέλο. Η μέθοδος καθορισμού της σεισμικής ακτίνας πρέπει να είναι η βέλτιστη για τον συγκεκριμένο τρόπο παρουσίασης του μοντέλου.

Για την επίλυση του προβλήματος προτάθηκε αρχικά η τεχνική της σκόπευσης (shooting method). Εκτός από αυτή τη μέθοδο κατά την οποία επιλύονται διαφορικές εξισώσεις, υπάρχουν τεχνικές εύρεσης του πεδίου των ελάχιστων χρόνων (minimum time) επιλύοντας εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών (Vidale, 1988, 1990). Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών απαιτεί μεγαλύτερη υπολογιστική προσπάθεια ιδιαίτερα για την εύρεση της πορείας των μετωπικών κυμάτων (Vesnaver, 1996). Κατόπιν προτάθηκαν τεχνικές ελαχίστου χρόνου (Moser 1989, 1991, Saito 1989, Fischer και Lee 1993). Παρόλο που αυτές οι τεχνικές είναι γρήγορες, η επιλογή του διαστήματος των κόμβων στο πλέγμα που περιγράφει το πεδίο ταχυτήτων, παίζει σημαντικό ρόλο καθώς υπάρχει ανταγωνισμός μεταξύ ακρίβειας και υπολογιστικού κόστους. Οι τεχνικές της κάμψης (bending) και της συνέχισης (continuation) ανήκουν σε αυτή τη κατηγορία.

Πριν εξετάσουμε τις μεθόδους και ιδιαίτερα την μέθοδο που εφαρμόστηκε στη παρούσα εργασία, θα πρέπει να απαντήσουμε στην ερώτηση που τίθεται για την αναγκαιότητα ή όχι των καμπυλομένων σεισμικών ακτίνων στην τομογραφία χρόνων διαδρομής.

3.12.1 Ευθείες ή Καμπυλωμένες σεισμικές ακτίνες ;

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι στην ιατρική τομογραφία χρησιμοποιούνται ευθείες σεισμικές ακτίνες και τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά. Το ερώτημα είναι γιατί στην σεισμική τομογραφία είναι απαραίτητη η χρήση καμπυλωμένων σεισμικών ακτίνων ; Η απάντηση είναι ότι στην ιατρική τομογραφία οι συντελεστές διάθλασης κατά την κίνηση των ακτίνων διαμέσου του ανθρώπινου σώματος, είναι ουσιαστικά σταθερή, οπότε και οι ακτίνες είναι ουσιαστικά ευθείες. Αντίθετα, η Γη είναι ένα ανομοιογενές μέσο, στο οποίο η ταχύτητα μεταβάλλεται σημαντικά οπότε και ο συντελεστής διάθλασης είναι μη σταθερός. Ακόμη, στην ιατρική τομογραφία η ανακατασκευή γίνεται με χρήση των συντελεστών απόσβεσης, ενώ στην σεισμική αντιστροφή και τομογραφία με χρήση των τιμών καθυστέρησης, οπότε γενικά θα λέγαμε ότι οι δύο περιπτώσεις δεν μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους. Κατά συνέπεια, στη σεισμική τομογραφία είναι απαραίτητη η χρήση καμπυλωμένων ακτίνων και πρέπει να λαμβάνεται υπόψην κατά την ανακατασκευή του μοντέλου.

Ας θεωρήσουμε ότι κατά την ανακατασκευή του μοντέλου χρησιμοποιούμε ευθείες ακτίνες, άσχετα του γεγονότος ότι οι παρατηρούμενοι χρόνοι διαδρομής προέκυψαν από κεκκαμένες ακτίνες υπακούοντας στην αρχή του Fermat και τον νόμο του Snell. Σε μια περιοχή χαμηλών ταχυτήτων, οι πραγματικές (καμπυλωμένες) ακτίνες θα κινηθούν περιμετρικά της περιοχής αυτής, ενώ οι ευθείες ακτίνες θα κινηθούν διαμέσου της περιοχής αυτής. Ετσι η οπισθοπροβολή κατά μήκος της ευθείας σεισμικής ακτίνας θα δώσει μια ψευδή εικόνα της ανωμαλίας με μικρότερα χωρικά χαρακτηριστικά. Παρομοίως, στην περίπτωση περιοχών υψηλών ταχυτήτων οι πραγματικές σεισμικές ακτίνες θα συγκεντρωθούν στο χώρο αυτό, ενώ οι ευθείες ακτίνες θα αγνοήσουν την ύπαρξη της αντίθεσης ταχύτητας στον χώρο αυτό. Ετσι μετά την ανακατασκευή του χώρου μελέτης με βάση τις ευθείες ακτίνες, θα εμφανίζεται μια πιο ευρεία περιοχή υψηλών ταχυτήτων από ότι στην πραγματικότητα είναι. Είναι σημαντικό τελικά, να καταλάβουμε ότι η χρήση ευθείων σεσμικών ταχυτήτων επιδρά αρνητικά στην διακριτική ικανότητα του ανακατασκευασμένου μοντέλου.

Υπάρχουν περιπτώσεις που σε αντίθεση με τα παραπάνω προτείνεται η χρήση των ευθείων σεισμικών ακτίνων. Τέτοιες είναι οι παρακάτω :

α) Σε περίπτωση όπου στη περιοχή μελέτης παρατηρούνται υψηλές αντιθέσεις ταχύτητας οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν σε παραβίαση των βασικών αρχών της ακτινικής θεωρίας (αρχή Fermat, νόμος του Snell). Σε αυτή την περίπτωση οι ευθείες ακτίνες είναι δυνατό να δώσουν χρήσιμες πληροφορίες σε αντίθεση με τις καμπυλωμένες ακτίνες που αδυνατούν να ανακατασκευάσουν το μοντέλο.

β) Είναι αρκετή η χρήση των ευθείων σεισμικών ακτίνων στη περίπτωση που απαιτείται μια εικόνα του χώρου, με φτωχή διακριτική ικανότητα η οποία πιστοποιεί μόνο την παρουσία ή όχι μιας ανώμαλης περιοχής.
γ) Κατά την ανακατασκευή ενός ανισότροπου χώρου ταχυτήτων, προτείνεται η χρήση ευθείων σεισμικών ακτίνων λόγω της μη μοναδικότητας που παρέχει η ανακατασκευή του μοντέλου με βάση της καμπυλωμένες σεισμικές ακτίνες. Το πρόβλημα είναι η σύζευξη μεταξύ των κεκκαμένων ακτίνων και της ανισοτροπίας (Jech and Psencik 1989, 1991).

Οι ευθείες σεισμικές ακτίνες υπολογίζονται πολύ γρήγορα καθώς εξαρτώνται μόνο από τις θέσεις των πηγών - γεωφώνων. Συμπερασματικά, στην περίπτωση που ενδιαφέρει περισσότερο η ταχύτητα από την διακριτική ικανότητα συνιστάται η χρήση των ευθείων ακτίνων. Στην περίπτωση αυτή περιοριζόμαστε σε μια γραμμική αντιστροφή ή τομογραφία.

3.12.2 Τεχνική της σκόπευσης (Shooting Method)

Η κυματική εξίσωση είναι η βάση για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής. Η κυματική εξίσωση δίνεται παρακάτω :

$$\nabla s = \frac{d}{dl}\left(s\frac{d}{dl}x\right) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 u \tag{3.77}$$

Στη τεχνική αυτή χρησιμοποιείται ο νόμος του Snell σύμφωνα με τον οποίο το πηλίκο του ημιτόνου της γωνίας πρόσπτωσης προς τη ταχύτητα είναι αριθμός σταθερός και χαρακτηριστικός κάθε ακτίνας. Αυτός παριστάνεται με το p και λέγεται παράμετρος της ακτίνας. Συνεπώς είναι :

$$p = \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2} = \frac{\sin i_3}{v_3} = \ldots \tag{3.78}$$

όπου v_1, v_2, v_3, .., οι ταχύτητες των αντίστοιχων στρωμάτων και i_1, i_2, i_3,…, οι γωνίες που σχηματίζονται από την προσπίπτουσα ακτίνα και την κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια.

Σε αυτή τη τεχνική σχεδιάζεται η διαδρομή της σεισμικής ακτίνας με βάση τον παραπάνω νόμο. Ετσι, ξεκινώντας με αρχική γωνία πρόσπτωσης i_1, υπολογίζεται η οριζόντια απόσταση της πηγής από το σημείο της επιφάνειας της Γης στο οποίο φθάνει η αναδυόμενη ακτίνα. Αν αυτή η απόσταση είναι διαφορετική από την απόσταση πηγής - γεωφώνου, τότε η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για καινούργια γωνία η οποία προκύπτει από την προηγούμενη προσθέτοντας ένα βήμα da.

Συνήθως καμμιά ακτίνα δεν φθάνει ακριβώς στη θέση του γεωφώνου, αλλά μερικές ακτίνες φθάνουν πλησίον του γεωφώνου και από αυτές δεχόμαστε εκείνη που πλησιάζει περισσότερο. Ομως πολλές φορές, η επαναληπτική αυτή διαδικασία σταματά όταν βρεθεί η πρώτη αποδεκτή σεισμική ακτίνα, δηλαδή η ακτίνα που φθάνει σε σημείο που απέχει απόσταση Δx (ανοχή - tolerance) από το γεώφωνο. Με αυτό το τρόπο εξοικονομείται υπολογιστικός χρόνος, αλλά μειώνεται η ακρίβεια του υπολογιζόμενου χρόνου διαδρομής.

Τα κυριότερα προβλήματα αυτής της τεχνικής είναι : η αρχική εκτίμηση της γωνίας και ο τρόπος υπολογισμού του βήματος da. Ακόμη, υπάρχουν προβλήματα που εμφανίζονται στην αντιστροφή και τομογραφία στα οποία είναι δύσκολος ή αδύνατος ο καθορισμός της σεισμικής ακτίνας λόγω του υπολογιζόμενου μοντέλου ταχυτήτων. Τέτοια προβλήματα εμφανίζονται σε μοντέλα με υψηλές αντιθέσεις ταχύτητας.

Η τεχνική της σκόπευσης είναι κατάλληλη για εξομαλυμένα μοντέλα και για την εφαρμογή τομογραφίας μεταξύ γεωτρήσεων.

3.12.3 Μέθοδοι καθορισμού της σεισμικής ακτίνας με χρήση πεπερασμένων διαφορών (Vidale Method)

Η μέθοδος του Vidale (1988), κάνει χρήση των πεπερασμένων διαφορών για τον υπολογισμό των χρόνων διαδρομής των κυμάτων σε ένα αυθαίρετο μέσο. Οι τιμές καθυστέρησης δίνονται για τους κόμβους του καννάβου (grid nodes), ενώ για το ενδιάμεσο η καθυστέρηση υπολογίζεται με μεθόδους γραμμικής παρεμβολής. Η μέθοδος αυτή δέχεται ότι επίπεδα κύματα[1] διαδίδονται στο χώρο μελέτης. Η παραδοχή αυτή είναι έγκυρη μόνο στη περίπτωση του μακρυνού πεδίου.

([1]Επίπεδα κύματα είναι αυτά για τα οποία δεχόμαστε ότι το μέτωπο κύματος είναι επίπεδο χωρίς να παρουσιάζει καμμιά καμπυλότητα. Είναι μια παραδοχή που εφαρμόζεται τόσο στην θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού όσο και στη θεωρία των σεισμικών. Σε αυτή τη περίπτωση το επίπεδο κύμα δίνεται από το παρακάτω σχέση :

$$f\left(lx + my + nz \pm Vt\right),$$

όπου l,m,n, είναι τα συνημίτονα διεύθυνσης τα οποία δίνουν τη διεύθυνση του κύματος, V είναι η ταχύτητα του κύματος και t ο χρόνος.)

3.12.4 Τεχνική της κάμψης (Bending Methods)

Οι μέθοδοι κάμψης εισήχθησαν στη σεισμολογία από τους Wesson (1971), Chander (1975), και Julian et al. (1977). Αναπτύχθηκαν δύο παραλλαγές της μεθόδου :

α) Η αρχική παραλλαγή της μεθόδου από τους Julian και Gubbins (1977), η οποία αργότερα βελτιώθηκε από τους Pereyra et al. (1980), χρησιμοποιεί τη παρακάτω εξίσωση :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(\vec{r})}\frac{d\vec{r}}{ds}\right) - \nabla\left(\frac{1}{c(\vec{r})}\right) = 0 \tag{3.79}$$

για ακτίνα $\vec{r}$ παραμετροποιημένη με μήκη τόξων s, σε ένα πεδίο ταχυτήτων $c(\vec{r})$. Η ακτίνα χωρίζεται σε k+1 τμήματα (για τον δισδιάστατο και τρισδιάστατο χώρο) ($\vec{r}_0, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$) και με πεπερασμένες διαφορές που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραγώγων επιλύεται η εξίσωση. Το σύστημα εξισώσεων που παράγεται, γραμμικοποιείται και κατόπιν υπολογίζεται η διόρθωση που πρέπει να εφαρμοστεί στην αρχική επιλογή έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η εξίσωση (3.79). Πρόκειται για μια επαναληπτική διαδικασία.

β) Η δεύτερη παραλλαγή, πρωτοπαρουσιάστηκε από τους Um και Thurber (1987) και Prothero et al. (1988), οι οποίοι επιχείρησαν τον απευθείας υπολογισμό του χρόνου διαδρομής ως ένα συναρτησιοειδές της καμπυλότητας της ακτίνας γ.

$$T(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{ds}{c} \to Min \tag{3.80}$$

Η δεύτερη μέθοδος πλεονεκτεί έναντι της πρώτης διότι η ολοκλήρωση αριθμητικά είναι πιο αξιόπιστη από την παραγώγιση. Το γεγονός αυτό εισάγει μικρά σφάλματα στο σύστημα των γραμμικών εξισώσεων της πρώτης μεθόδου. Σε περιπτώσεις με πολύπλοκο μοντέλο ταχυτήτων το γραμμικό σύστημα εξισώσεων γίνεται κακώς ορισμένο (ill-conditioned), με αποτέλεσμα τα μικρά προαναφερθέντα σφάλματα να οδηγούν σε κακή σύγκλιση ή ακόμη και σε απόκλιση της λύσης. Οπότε προτιμάται η δεύτερη μέθοδος ως πιο σταθερή.

Η μέθοδος κάμψης δεν είναι τόσο μεθοδική και ακριβής όσο είναι η μέθοδος σκόπευσης. Παράλληλα όμως, είναι λιγότερο επιρρεπής στην αποτυχία, σε περιπτώσεις κατά τις οποίες τα μοντέλα ταχύτητας παρουσιάζουν υψηλές αντιθέσεις (ζώνες σκιάς πίσω από περιοχές χαμηλής ταχύτητας), από ότι είναι οι μέθοδοι σκόπευσης. Κατά την μέθοδο κάμψης απαιτείται μια αρχική σεισμική ακτίνα μεταξύ πηγής - γεωφώνου, που συνήθως συνδέει γεώτρηση με γεώτρηση, και κατόπιν χρησιμοποιούνται μέθοδοι οι οποίες επανασχηματίζουν την ακτίνα ή απλώς τη κάμπτουν. Η όλη διαδικασία βασίζεται στην αρχή του Fermat, διότι γίνεται επαναληπτική προσπάθεια ελαχιστοποίησης του ολικού χρόνου διαδρομής εφαρμόζοντας την διαδικασία δοκιμής - σφάλματος (trial - error). Η μέθοδος είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί τόσο στις δύο όσο και στις τρεις διαστάσεις. Η μέθοδος αυτή είναι εξίσου αξιόπιστη και ακριβής όπως και οι προηγούμενες, στην περίπτωση όπου ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι καλά δομημένος. Η τεχνική της κάμψης είναι πιο γρήγορη υπολογιστικά από αυτή της σκόπευσης. Υπάρχουν και γρηγορότερες μέθοδοι όπως η μέθοδος της συνέχισης (continuation method), η οποία όμως χρειάζεται αρχική ακτίνα που υπολογίζεται από την μέθοδο κάμψης. Η μέθοδος κάμψης (bending method) προτείνεται για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες χρησιμοποιείται μοντέλο με κελιά σταθερής τιμής καθυστέρησης και εξαρτάται από την πολυπλοκότητα των μοντέλων.

3.12.5 Προσεγγιστικός καθορισμός της αρχικής ακτίνας

Οι Thurber και Ellsworth (1980) ανέπτυξαν μια πολύ ταχεία μέθοδο προσεγγιστικού προσδιορισμού της σεισμικής ακτίνας, την οποία ονόμασαν μέθοδο αρχικής ακτίνας (ray initializer), η οποία διαφέρει σημαντικά από τις υπόλοιπες. Συγκεκριμένα, αντί να αναζητείται μια προσεγγιστική πορεία της σεισμικής ακτίνας στο τρισδιάστατο μέσο, κατασκευάζεται ένα ισοδύναμο μονοδιάστατο μέσο στο οποίο υπολογίζεται η ισοδύναμη μονοδιάστατη αναλυτική λύση. Για να επιτευχθεί το παραπάνω, στρέφουμε το δίκτυο, θεωρώντας την πηγή ως σημείο με συντεταγμένες (0,0), ενώ το γεώφωνο αποκτά συντεταγμένες (0,Δ). Δ είναι η επικεντρική απόσταση των σημείων και φ είναι η γωνία μεταξύ, νέου και παλιού συστήματος μετά τη στροφή.

Παρόμοια μεθοδολογία ανέπτυξε ανεξάρτητα και ο Horie (1980). Το ισοδύναμο μονοδιάστατο μοντέλο κατασκευάζεται σύμφωνα με το σχήμα 3.10. Σε κάθε ένα στρώμα ορίζεται ο χώρος μεταξύ του υπόκεντρου και του σταθμού αναγραφής. Το πλάτος, D, αυτού του χώρου μεταβάλλεται ανάλογα με την επικεντρική απόσταση Δ. Στην αρχική εργασία των Thurber και Elsworth, το πλάτος αυτό ήταν ίσο με D=Δ/10. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η σχέση lam=delta/8, όπου lam είναι το πλάτος του χώρου και delta είναι η επικεντρική απόσταση. Μέσα σε αυτή τη περιοχή, υπολογίζεται η μέση ταχύτητα των κυμάτων χώρου σε κάθε στρώμα ως ένας μέσος όρος των αντίστοιχων ταχυτήτων των κυψελών του τρισδιάστατου μέσου. Το βάρος στους υπολογισμούς είναι ανάλογο της επιφάνειας της κάθε κυψέλης η οποία βρίσκεται μέσα στο χώρο αυτό. Κατασκευάζεται, με αυτό το τρόπο, ένα ισοδύναμο μονοδιάστατο μοντέλο στο οποίο υπολογίζονται οι χρόνοι διαδρομής των απευθείας και των διαθλώμενων κυμάτων, για όλες τις πιθανές περιπτώσεις αυτών. Η σεισμική ακτίνα με το μικρότερο χρόνο διαδρομής επιλέγεται ως η πρώτη άφιξη. Κατόπιν πραγματοποιείται αποστροφή του δικτύου στο αρχικό και εισάγεται η αρχική υπολογιζόμενη ακτίνα στον αλγόριθμο υπολογισμού της προσεγγιστικής ακτίνας με τη μέθοδο της κάμψης (bending method). Ο τελικός χρόνος διαδρομής (ελάχιστος) είναι αυτός που υπολογίζεται με τη παρακάτω μέθοδο στο αρχικό τρισδιάστατο μοντέλο. Οι χωρικές παράγωγοι του χρόνου διαδρομής μπορούν να υπολογιστούν σύμφωνα με τις γνωστές σχέσεις που ισχύουν για τα απευθείας και διαθλώμενα κύματα στο “ισοδύναμο” μονοδιάστατο μοντέλο (Eaton 1969).

3.12.6 Αναθεωρημένη μέθοδος κάμψης

Στη παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η βελτιωμένη έκδοση της παραπάνω μεθόδου, η οποία και χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή του αλγόριθμου του προσεγγιστικού καθορισμού της σεισμικής ακτίνας στη παρούσα εργασία. Πρόκειται για μια εργασία των Moser, Nolet και Snieder (1992) στην οποία παρουσιάστηκαν βελτιώσεις στο συμβατικό αλγόριθμο των Um και Thurber (1987) σε δύο κύρια σημεία. Πρώτον, έγινε παραμετροποίηση με χρήση των συναρτήσεων Beta-Splines αντί των πολυγωνικών προσεγγίσεων των ακτίνων. Δεύτερον, εφαρμόστηκε ολική διαταραχή στην σεισμική ακτίνα και όχι τριών σημείων, προκειμένου να επιτευχθεί ελαχιστοποίηση του χρόνου διαδρομής T. Σε αντίθεση με τους Prothero et al. (1988), οι οποίοι χρησιμοποίησαν την simplex μέθοδο για την ελαχιστοποίηση (Nelder και Mead 1965), οι Moser et al. (1992) παρατήρησαν ότι λόγω της εξομάλυνσης των χρόνων διαδρομής, ήταν δυνατή η ελαχιστοποίηση με χρήση μεθόδων παραγώγων όπως η μέθοδος συζυγούς βαθμίδας (Fletcher and Reeves 1964).

Για υπολογιστικούς σκοπούς, η σεισμική ακτίνα χωρίζεται σε πολυγωνικά τμήματα τα οποία αποτελούνται από k+1 σημεία, αριθμημένα από 0 έως k και ενωμένα με ευθείες γραμμές. Ο αριθμός των τμημάτων (k) στα οποία χωρίζεται η σεισμική ακτίνα δεν πρέπει να είναι μικρός, διότι σε αυτή τη περίπτωση ο υπολογισμός του χρόνου διαδρομής με το κανόνα του τραπεζοειδούς θα οδηγήσει σε τελείως λανθασμένους χρόνους. Ο λόγος είναι ότι προσεγγίζουμε μια συνεχής καμπύλη με διακριτά ευθύγραμμα τμήματα, επομένως είναι πολύ πιθανή η μη αναγνώριση ταχέων μεταβολών στο πεδίο ταχύτητας. Οι συντεταγμένες x, z ή οι x, y, z των σημείων, ορίζουν ένα διάνυσμα **γ** με διάσταση n (n=2(k+1) ή n=3(k+1)).

$$\gamma = \left(x_0, z_0, x_1, z_1, \ldots, x_k, z_k\right) \tag{3.81}$$

Ο χρόνος διαδρομής κατά μήκος της σεισμικής ακτίνας υπολογίζεται με τον κανόνα του τραπεζοειδούς :

$$T(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_{i-1}}\right)\sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(z_i - z_{i-1}\right)^2} \tag{3.82}$$

όπου c_i είναι η σεισμική ταχύτητα στο (x_i,z_i) σημείο.

Η βαθμίδα του χρόνου διαδρομής T, ως προς το σημείο γ που είναι n διαστάσεων δίνεται από το παρακάτω διάνυσμα :

$$\nabla T(\gamma) = \left(\frac{\partial T}{\partial x_0}, \frac{\partial T}{\partial z_0}, \frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial x_k}, \frac{\partial T}{\partial z_k}\right) \tag{3.83}$$

Για τους σκοπούς της μεθόδου θεωρούμε το αρχικό και τελικό σημείο της ακτίνας σταθερά.

$$\delta x_0 = \delta z_0 = \delta x_k = \delta z_k = 0 \tag{3.84}$$

Ο ευκολότερος τρόπος υπολογισμού των άλλων σημείων είναι η αριθμητική διαφοροποίηση της σχέσης (3.82). Ο τύπος που εφαρμόζεται για την αριθμητική διαφοροποίηση με κεντρικές διαφορές, είναι :

$$T(\gamma + \delta\gamma) - T(\gamma - \delta\gamma) = 2\left(\nabla T(\gamma), \delta\gamma\right) + O\left(\left\|\delta\gamma\right\|^3\right), \quad \left(\left\|\delta\gamma\right\| \to 0\right) \tag{3.85}$$

Προτιμήθηκε η χρήση τεχνικών ελαχιστοποίησης για την συνάρτηση του χρόνου διαδρομής με παραγώγους, και συγκεκριμένα η μέθοδος της συζυγούς βαθμίδας. Προτιμήθηκε η μέθοδος αυτή διότι έχει τις μικρότερες απαιτήσεις χώρου μνήμης και λόγω των εξαιρετικών ιδιοτήτων σύγκλισης που παρουσιάζει. Αλλες μέθοδοι ελαχιστοποίησης όπως η Newton (Stoer and Bulirsch 1980) απαιτεί $O(n^2)$ χώρο μνήμης, ενώ η μέθοδος μεγίστης κλίσης παρουσιάζει προβλήματα σύγκλισης στην παρουσία επιμηκυσμένης στενής ζώνης στη συνάρτηση χρόνου διαδρομής (Conte and de Boor 1980). Η επαναληπτική διαδικασία της ελαχιστοποίησης πέρνει τέλος όταν η λύση προσεγγίση μια τιμή ανοχής που ο ερμηνευτής έχει εκ των προτέρων καθορίσει. Ενα κριτήριο διακοπής μπορεί να αποτελέσει ο ρυθμός μειώσης του χρόνου διαδρομής μετά κάθε επανάληψη. Αυτή η ανοχή μπορεί να είναι της τάξης της υπολογιστικής ακρίβειας του υπολογιστή επεξεργασίας. Αλλο κριτήριο διακοπής είναι μεταβολή της θέσης του ελάχιστου σημείου μετά κάθε επανάληψη. Η ανοχή δεν πρέπει να είναι μικρότερη της τετραγωνικής ρίζας της υπολογιστικής ακρίβειας του χρόνου διαδρομής T (Press et al. 1988). Αντί της μεθόδου συζυγούς βαθμίδας για την ελαχιστοποίηση του χρόνου διαδρομής, μπορούν να εφαρμοστούν μέθοδοι ελαχιστοποίησης δευτέρου βαθμού με δεδομένα από τον πίνακα δευτέρων παραγώγων (Hessian).

Ενας τρόπος βελτίωσης της λύσης είναι η γραμμική παρεμβολή στις συναρτήσεις Beta-Splines. Υπάρχουν δύο σημαντικοί λόγοι που επιβάλουν την παρεμβολή σημείων μεταξύ των k+1 σημείων της σεισμικής ακτίνας. Το πρώτο πρόβλημα οφείλεται στο μοντέλο ταχυτήτων και κυρίως στις περιοχές χαμηλών ταχυτήτων. Από τον Pereyra et al. (1980), προτάθηκε παρεμβολή σημείων με διάστημα μεταξύ τους, ανάλογο των μεταβολών του πεδίου ταχύτητας. Το δεύτερο πρόβλημα οφείλεται στην προσέγγιση μιας συνεχούς καμπύλης όπως η σεισμική ακτίνα, από συνεχή ευθύγραμμα τμήματα. Το πρόβλημα αυτό αναφέρθηκε και παραπάνω στο σημείο όπου χωρίζεται η σεισμική ακτίνα σε τμήματα. Μια λύση είναι αρχικά η επιλογή λιγότερων k+1 σημείων και κατόπιν η παρεμβολή άλλων μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των σημείων που θα διαταραχθούν, θα είναι μικρότερος των σημείων που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του χρόνου διαδρομής μέσω ολοκλήρωσης (κανόνας τραπεζοειδούς).

Προτιμήθηκε η χρήση των συναρτήσεων Beta-Splines (Barsky 1988) αντί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων λόγω της μεγαλύτερης προσαρμοστικότητας που έχουν αυτές. Η καμπύλη Beta-Spline είναι μια τροποποιημένη μορφή (επέκταση) της καμπύλης cubic B-spline (Newman και Sproull 1981). Η καμπύλη Beta-Spline έχει τις παρακάτω ιδιότητες :

α) Δεν υπάρχει κάποιος κύριος περιορισμός στον τρόπο καμπυλοποίησης των σεισμικών ακτίνων.

β) Η καμπύλη δεν είναι απαραίτητο να περνάει από τα k+1 σημεία της αρχικής σεισμικής ακτίνας.

γ) Είναι δυνατός ο επαναυπολογισμός ενός τμήματος της σεισμικής ακτίνας χωρίς να γίνεται αναθεώρηση των ήδη υπολογισμένων τμημάτων αυτής.

δ) Η συμπεριφορά της καμπύλης ελέγχεται από δύο παραμέτρους β_1 και β_2, οι οποίες περιγράφουν την συνέχεια στη πρώτη και δεύτερη παράγωγο στα σημεία επαφής των ευθύγραμμων τμημάτων. Στην περίπτωση όπου και οι δύο παράγωγοι είναι συνεχής (β_1=1 και β_2=0), τότε η καμπύλη προσεγγίζεται από την cubic B-spline. Στην περίπτωση όπου $\beta_1=\beta_2=0$, η Beta-Spline καμπύλη αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ των k+1 σημείων (polygonal path).

Ο χρόνος διαδρομής κατά μήκος της καμπύλης beta-spline υπολογίζεται μέσω του κανόνα του τραπεζοειδούς από τον τύπο :

$$T(\gamma)=\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_{ij}}+\frac{1}{c_{i,j-1}}\right)\left\|\vec{Q}_i\left(u_j\right)-\vec{Q}_i\left(u_{j-1}\right)\right\| \tag{3.86}$$

όπου $\vec{Q}_i(u)$ με (ι=1,…,k και 0≤u≤1) είναι σημείο του i*th* τμήματος της καμπύλης, m είναι ο αριθμός των σημείων που θα χρησιμοποιηθούν για να γίνει η ολοκλήρωση κατά μήκος των επιμέρους τμημάτων, $\|\cdot\|$ είναι η Ευκλείδια απόσταση και c_{ij} είναι η σεισμική ταχύτητα στο σημείο $\vec{Q}_i(u_j)$. Συνήθως u_j=j/m.

Μια σύγκριση των μεθόδων ως προς την αποτελεσματικότητά τους είναι μόνο μερικώς δυνατή, λόγω της διαφορετικής συμπεριφοράς των μεθόδων στην σύγκλιση, σε περιπτώσεις όπου τα μοντέλα έχουν ισχυρή ανομοιογένεια και ασυνέχεια. Η παρούσα μέθοδος δεν παρουσιάζει προβλήματα σε περιπτώσεις όπως αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω, όπως άλλες μέθοδοι (Julian και Gubbins, 1977) σε πολύπλοκα μοντέλα ταχυτήτων, ή στη περίπτωση των κακώς ορισμένων γραμμικών συστημάτων (Um and Thurber, 1987). Πειραματική εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου απέδειξε ότι, οι συναρτήσεις Beta-Splines είναι ακριβέστερες και πιο αποτελεσματικές από ότι οι πολυγωνικές ακτίνες. Επίσης δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς την επιλογή της αρχικής ακτίνας διότι είναι απίθανη η απόκλιση της λύσης. Παρόλα αυτά δεν είναι ξεκάθαρο το κατά πόσο η τελική σεισμική ακτίνα ελάχιστου χρόνου διαδρομής, είναι μια ακτίνα ολικού ή τοπικού ελαχίστου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Για την επίλυση του υπερκαθορισμένου συστήματος της μορφής T=DS υπάρχει μια ποικιλία από αλγορίθμους. Οι Phillips και Fehler (1991) πραγματοποίησαν σύγκριση των πιο δημοφιλών αλγορίθμων. Αναζητώντας τον καλύτερο αλγόριθμο προτάθηκαν και αξιολογήθηκαν οι εξής :

Τεχνικές ελαχίστων τετραγώνων damped least squares (DLS), regularization, singular value decomposition (SVD), IRLS και convolutional quelling (CQ).

Τεχνική Αλγεβρικής Ανακατασκευής (Algebraic Reconstruction Technique ή ART).

Τεχνική Ταυτόχρονης Επαναληπτικής Ανακατασκευής (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique ή SIRT).

Τεχνική Συζυγούς Βαθμίδας (Conjugate Gradients ή CG)

Τεχνική Lanczos.

Τεχνική LSQR (Paige and Saunders, 1982).

Η σύγκριση των παραπάνω τεχνικών έγινε για το πρόβλημα της σεισμικής τομογραφίας όσον αφορά την ακρίβεια, την ταχύτητα σύγκλισης και την ευελιξία στη χρήση του πίνακα των αποστάσεων.

Τελικά, ως πιο κατάλληλη μέθοδος αντιστροφής επιλέχθηκε η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, αν και γίνονται αναφορές και στις άλλες μεθόδους, λόγω της μαθηματικής της ευρωστίας, στην περίπτωση όπου τα δεδομένα είναι ανακριβή, ανεπαρκή και ασυνεπή (Jackson, 1972).

Πολλά μοντέλα στη Γεωφυσική είναι μη γραμμικές συναρτήσεις των παραμέτρων του μοντέλου. Η μέθοδος Marquardt-Levenberg παρέχει μια “ισχυρή” μέθοδο αντιστροφή για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του μοντέλου (Levenberg 1944, Marquardt 1963).

4.1 Γραμμική Αντιστροφή Ελαχίστων Τετραγώνων

Η βασική ιδέα κατά την εφαρμογή της μεθόδου αυτής, είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ των αποκρίσεων του μοντέλου και των παρατηρήσεων. Ας θεωρήσουμε ότι n είναι το σύνολο των παρατηρήσεων και δίνεται από το διάνυσμα :

$$y = col(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{4.1}$$

ενώ το διάνυσμα της απόκρισης του μοντέλου δίνεται ως :

$$f = col(f_1, f_2, \ldots, f_n) \tag{4.2}$$

Το μοντέλο είναι μια συνάρτηση των p παραμέτρων οι οποίες είναι στοιχεία του διανύσματος θ,

$$\theta = col(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p) \tag{4.3}$$

Αν το θ_j^0 είναι μια αρχική προσέγγιση των θ_j παραμέτρων, (j=1,2,…,p), τότε το f^0 είναι η αρχική απόκριση του μοντέλου. Αν η απόκριση του μοντέλου είναι γραμμική συνάρτηση των παραμέτρων, μια διαταραχή στην απόκριση του μοντέλου λόγω μεταβολής κατά θ_j-θ_j^o μπορεί να παρουσιαστεί απ΄το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης :

$$f = f^0 + \sum_{j=1}^{p} \left.\frac{\partial f}{\partial \theta_j}\right|_{\theta=\theta^0} (\theta_j - \theta_j^0) \tag{4.4}$$

ή υπό μορφή πινάκων,

$$f = f^0 + Z\delta \tag{4.5}$$

όπου Z είναι ο Ιακωβιανός (nxp) πίνακας των μερικών παραγώγων με στοιχεία

$$Z_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} \tag{4.6}$$

και δ είναι η παράμετρος μεταβολής του διανύσματος με στοιχεία τα δ_j τα οποία ορίζουν τη διαταραχή στις παραμέτρους του μοντέλου

$$\delta_j = \theta_j - \theta_j^0 \; , \qquad (j=1,2,\ldots,p)$$

Οι μη γραμμικές μέθοδοι ελαχίστων τετραγώνων, είναι πολύ ευαίσθητες στην επιλογή του αρχικού διανύσματος των παραμέτρων θ_0 όπως προτάθηκε από τους Box και Kanemasu (1972). Αν για παράδειγμα η αρχική επιλογή του μοντέλου είναι πολύ μακριά από τη πραγματική λύση, το διάνυσμα διόρθωσης δ θα αποκτήσει μεγάλες τιμές παραβιάζοντας τη θεώρηση της γραμμικότητας - ανάπτυγμα κατά Taylor όπου το δ θεωρείται πολύ μικρό. Αυτό αυτόματα οδηγεί στην απόκλιση της λύσης.

Ως e ορίζουμε το διάνυσμα σφάλματος το οποίο εκφράζει τη διαφορά μεταξύ της απόκρισης του μοντέλου f και των παρατηρούμενων δεδομένων y :

$$y - f = e \tag{4.7}$$

Από τις σχέσεις (4.5) και (4.7) προκύπτει :

$$y - (f^0 + Z\delta) = e \Rightarrow y - f^0 = Z\delta + e \tag{4.8}$$

Το διάνυσμα y-f^0, το οποίο και περιέχει τις διαφορές μεταξύ των αρχικών αποκρίσεων των μοντέλων και των παρατηρούμενων δεδομένων, καλείται διάνυσμα ασυμφωνίας g,

$$g = y - f^0$$

και

$$e = g - Z\delta \tag{4.9}$$

Στη πιο απλή περίπτωση ελαχίστων τετραγώνων ή Gauss-Newton προσέγγιση, επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση του αθροιστικού τετραγωνικού σφάλματος $S=e^Te$ ως προς το διάνυσμα διαταραχής των παραμέτρων δ. Από τη σχέση (4.9) προκύπτει :

$$S = e^T e = (g - Z\delta)^T (g - Z\delta) \tag{4.10}$$

Η ελαχιστοποίηση του S ως προς το δ απαιτεί :

$$\frac{\partial S}{\partial \delta} = 0 \tag{4.11}$$

Η διαφόριση ενός διανύσματος ως προς ένα διάνυσμα περιγράφεται από τον Graybill (1969).

Εφαρμόζοντας τη (4.10) στη σχέση (4.11), προκύπτει ότι :

$$\frac{\partial}{\partial \delta}\left(\delta^T Z^T Z\delta - g^T Z\delta - \delta^T Z^T g + g^T g\right) = 0 \tag{4.12}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι κανονικές εξισώσεις :

$$Z^T Z\delta = Z^T g \tag{4.13}$$

Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών για το διάνυσμα δ είναι :

$$\delta = (Z^T Z)^{-1} Z^T g \tag{4.14}$$

η οποία καλείται λύση ελαχίστων τετραγώνων ή Gauss-Newton λύση.

Ο όρος “κανονικές” εξισώσεις, προέρχεται από τη γεωμετρική ιδιότητα του διανύσματος σφάλματος e να είναι κάθετο του διανύσματος στήλης του πίνακα Z.

Η πραγματική τιμή του αθροιστικού τετραγωνικού σφάλματος S υπολογίζεται αντικαθιστώντας τη σχέση (4.14) στη σχέση (4.10),

$$\hat{S} = (Z\hat{\delta} - g)^T (Z\hat{\delta} - g) = g^T (I_n - ZZ_L^{-1})g \tag{4.15}$$

όπου $\hat{\delta}$ είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων (4.14) και $Z_L^{-1} = (Z^T Z)^{-1} Z^T$. Ο pxn πίνακας Z_L^{-1}, είναι ο Lanczos αντίστροφος του Z και I_n (nxn) είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Στην βιβλιογραφία πολύ συχνά ο Lanczos αντίστροφος αναφέρεται και ως φυσικός ή γενικευμένος αντίστροφος ενός nxp πίνακα Z.

Η λύση ελαχίστων τετραγώνων που υπολογίστηκε παραπάνω παρουσιάζει ορισμένα προβλήματα που έχουν σχέση με την ύπαρξη ή όχι αντιστρόφου στο πίνακα Z^TZ. Και στη περίπτωση που υπάρχει αντίστροφος, πάλι παρουσιάζονται προβλήματα που έχουν σχέση με την απόκλιση της λύσης ή την αργή σύγκλιση αυτής. Αυτό συμβαίνει όταν η επιλογή του αρχικού μοντέλου είναι κακή (Draper and Smith, 1981). Οι Smith και Shanno (1971) παρατήρησαν ότι στην περίπτωση όπου ο πίνακας Z^TZ είναι ιδιάζων, οι αναβαθμισμένες τιμές των παραμέτρων $\theta=\theta^0+\delta$ οδηγούν σε απόκλιση της λύσης.

4.2 Ασθενώς ορισμένα προβλήματα και σφάλματα στα δεδομένα

Ενα από τα συνήθη και πιο κύρια προβλήματα που εμφανίζονται κατά την επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων είναι ότι ο πίνακας Z^TZ είναι ιδιάζων. Ο Lanczos (1960) ανέλυσε τη φυσική σημασία που έχει ένα ιδιάζων σύστημα σε σχέση με τα παρατηρησιακά σφάλματα. Παρατήρησε ότι η ύπαρξη μικρών ιδιοτιμών σε ένα σύστημα, υποδεικνύει το γραμμικό συνδυασμό μερικών από τις άγνωστες παραμέτρους, οι οποίες πολύ ασθενώς παρουσιάζονται μέσα στο σύστημα. Στη περίπτωση όπου δεν υπάρχουν παρατηρησιακά σφάλματα, η αντιστροφή ενός περίπου ιδιάζων πίνακα, δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα. Ο συνδυασμός κακώς ορισμένων προβλημάτων και παρατηρησιακών σφαλμάτων είναι αυτός που δημιουργεί τα περισσότερα προβλήματα. Ο Lanczos (1960) έδειξε ότι για ένα ιδανικό γραμμικό πρόβλημα (m=n), το μέγεθος του σφάλματος στη λύση (x_i^e) σχετίζεται με τα σφάλματα μέτρησης (y_i^e) και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές (λ_i) και δίνεται από τη παρακάτω σχέση,

$$\left|x_i^e\right| = \frac{1}{\lambda_i}\left|y_i^e\right| \tag{4.16}$$

Μια ιδιοτιμή με τιμή 0.01 και ένα σφάλμα μέτρησης της τάξης 1% θα μεγενθύνουν το σφάλμα του διανύσματος της λύσης κατά παράγοντα 100.

4.3 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων με απόσβεση (Marquardt-Levenberg method - DLS)

Προκειμένου να μειωθούν τα προβλήματα που δημιουργούνται στη περίπτωση στη οποία ο πίνακας Z^TZ είναι ιδιάζων, επιλύεται μια παραλλαγμένη μορφή ελαχίστων τετραγώνων. Στη μέθοδο αυτή εφαρμόζεται η περιοριστική συνθήκη ότι το άθροισμα των τετραγώνων, ή η ενέργεια των στοιχείων του διανύσματος μεταβολής των παραμέτρων δ, περιορίζεται από μια ποσότητα δ_0^2 . Η μέθοδος αυτή προτάθηκε από τον Levenberg (1944) και αργότερα περιγράφηκε λεπτομερώς από τον Marquardt (1963). Καλείται και ως μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων με απόσβεση ή ως “ridge regression” (Inman, 1975). Σκοπός του προαναφερθέντος περιορισμού είναι η ελεγχόμενη μεταβολή της λύσης.

Η λύση των ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμό, προκύπτει από την επίλυση προβλήματος με πολλαπλασιαστή Lagrange, στο οποίο η ποσότητα e^Te ελαχιστοποιείται ικανοποιώντας και την συνθήκη $\delta^T\delta=\delta_0^2$. Τελικά προκύπτει ότι :

$$S(\delta,\beta) = e^Te + \beta(\delta^T\delta - \delta_0^2) \tag{4.17}$$

όπου β είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange.

Διαφορίζοντας τη παραπάνω σχέση ως προς το διάνυσμα δ, παράγεται μια τροποποιημένη μορφή των κανονικών εξισώσεων :

$$(Z^TZ + \beta I)\delta = Z^Tg \tag{4.18a}$$

οπότε,

$$\delta = (Z^TZ + \beta\mathbf{I})^{-1}Z^Tg \tag{4.18β}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4.14) και (4.18β), προκύπτει ότι ο περιορισμός που εισάγει η μέθοδος αποφεύγει προβλήματα ιδιαζόντων τιμών στο πίνακα Z^TZ. Αυτό επιτυγχάνεται προσθέτωντας τη σταθερή αυτή ποσότητα στη κύρια διαγώνιο του πίνακα Z^TZ, οπότε αυξάνουν οι τιμές των μικρών ιδιοτιμών. Ο Levenberg (1944) ονόμασε τη σταθερά β, παράγοντα απόσβεσης. Η ποσότητα β επιλέγεται έτσι ώστε να μην επηρρεάζει την ακρίβεια και ταυτόχρονα να περιορίζει τον αριθμό των μηδενικών στοιχείων.

Η σχέση (4.18β) έχει και άλλα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Μπορεί να θεωρηθεί ως η διασταύρωση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων και της μεθόδου μεγίστης κλίσης.

Το διάνυσμα της λύσης για τη μέθοδο μεγίστης κλίσης δίνεται από το τύπο :

$$\delta_g = 2Z^Tg \tag{4.19}$$

Το διάνυσμα λύσης της μεθόδου Marquardt-Levenberg, οριοθετείται από τα διανύσματα λύσης των μεθόδων Gauss-Newton και της μεθόδου μεγίστης κλίσης. Ετσι είναι κατανοητό ότι κατάλληλη επιλογή του παράγοντα απόσβεσης β, μπορεί να οδηγήσει σε μια από τις τρεις σχετιζόμενες μεταξύ τους μεθόδους. Για τιμή β=0, εφαρμόζεται η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, ενώ όσο η τιμή του β αυξάνεται τόσο οδηγούμαστε στη μέθοδο μεγίστης κλίσης.

Κατά καιρούς αναπτύχθηκαν τρόποι - μέθοδοι, κατά τις οποίες πραγματοποιείται αύξηση της ταχύτητας σύγκλισης στη λύση. Μια από αυτες είναι η χρήση κλίμακας (scaling). Ο Marquardt (1963) όρισε με ποιο τρόπο πρέπει να καθοριστεί ένας διαγώνιος πίνακας D, τέτοιος ώστε ο πίνακας ZD^{-1} να τοποθετεί τα μοναδιαία στοιχεία κατά μήκος της κύριας διαγώνιας του κλιμακωτού πίνακα $(ZD^{-1})^T(ZD^{-1})$. Τα στοιχεία d_i του πίνακα D είναι ίσα με το μέσο τετραγωνικό άθροισμα (r.m.s), των στοιχείων στην ith στήλη του ανευ κλίμακας Ιακωβιανού πίνακα Ζ. Η λύση που προκύπτει είναι ίση με :

$$\delta = D^{-1}\delta^{(D)} \tag{4.20}$$

Η μέθοδος DLS αποτελεί την βάση σειράς τεχνικών που χρησιμοποιούνται στην ανακατασκευή του πεδίου όπως η επαναληπτική μέθοδο με επαναπροσδιορισμό των συντελεστών βαρύτητας (iteratively reweighted least squares, IRLS) και convolutional quelling (CQ).

Συνήθως εξομαλύνουμε τη λύση DLS εφαρμόζοντας φίλτρα τα οποία αντικαθιστούν τη τιμή της ταχύτητας σε κάθε κελί του τομογράμματος από τη μέση τιμή των γειτονικών κελιών των οποίων οι τιμές είναι πολλαπλασιασμένες με συντελεστές βαρύτητας :

$$D_g^{-1} = G(D^T D + \varepsilon^2 I)^{-1} D^T \tag{4.21}$$

όπου ο πίνακας G περιγράφει το φίλτρο εξομάλυνσης. Παρόμοια φίλτρα προκύπτουν αν αντί της μέσης τιμής χρησιμοποιηθεί η κεντρική (median) τιμή. Τα φίλτρα κεντρικής τιμής δεν εκφράζονται υπό μορφή πινάκων, αλλά βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στη σεισμική τομογραφία. Αυτά τα φίλτρα δεν παραμορφώνουν τα όρια περιοχών υψηλής αντίθεσης της σεισμικής ταχύτητας και δεν εισάγουν σφάλματα σε γειτονικά κελιά περιοχής με πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες ταχύτητες.

Από τη μέθοδο CQ (convolutional quelling) προκύπτει λύση παρόμοια με αυτή της μεθόδου συζυγούς βαθμίδας. Στη μέθοδο αυτή το φίλτρο εξομάλυνσης G εφαρμόζεται απευθείας στο πίνακα D, δηλαδή

$$D_g^{-1} = G(GD^T DG^T + \varepsilon^2 I)^{-1} GD^T \tag{4.22}$$

Ετσι οι γραμμές του πίνακα D εξομαλύνονται και τα μηδενικά στοιχεία του αντικαθίστανται από τις εξομαλυμένες τιμές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα κάθε σεισμική ακτίνα να διευρύνεται και να περνά από περισσότερα κελιά (ray broadening). Η μέθοδος CQ δίνει τη καλύτερη λύση DLS, αλλά λόγω της διεύρυνσης της σεισμικής ακτίνας, η διακριτική ικανότητα είναι υποδιαίστερη.

Γενικότερα, για τη βελτιστοποίηση της ακρίβειας και της ευστάθειας της λύσης ελαχίστων τετραγώνων προτείνεται μέθοδος η οποία περιγράφεται από την

$$D_g^{-1} = (D^T D + \lambda A^T A)^{-1} D^T \tag{4.23}$$

όπου ο πίνακας Α περιγράφει διαφορικό τελεστή πρώτης ή δεύτερης τάξης, ενώ το λ προκύπτει από τη βελτιστοποίηση. Το $D^T D$ καθορίζει τη συσχέτιση των παραμέτρων (πίνακας συμμεταβλητότητας - covariance matrix). Η τεχνική ρύθμισης με παραγώγους πρώτης τάξης παρουσιάζει ευσταθεία και καλύτερη ακρίβεια ανεξάρτητα από το επίπεδο του θορύβου.

Στη μέθοδο IRLS (iterative regularized least squares) ελαχιστοποιούμε αντί της νόρμας δεύτερης τάξης L_2, τη πιο γενικευμένη L_p η οποία για p=1 αντιστοιχεί στο άθροισμα των απολύτων τιμών του υπολειματικού πεδίου (data residuals) (Scales, 1987).

Από την ελαχιστοποίηση της L_p προκύπτουν οι εξισώσεις (normal equation):

$$D^T RDS = D^T RT \tag{4.24}$$

όπου R είναι διαγώνιος πίνακας αποτελούμενος από όρους $|\Delta r_i|^{p-2}$ και Δr_i είναι το υπολλειματικό πεδίο. Η παραπάνω σχέση επιλύεται με επαναληπτική διαδικασία όπου ο διαγώνιος πίνακας R επαναπροσδιορίζεται σε κάθε επανάληψη.

Στις περιπτώσεις όπου ο πίνακας D^TD είναι ιδιάζων ή περίπου ιδιάζων, η πιο κατάλληλη μέθοδος επίλυσης του είναι η τεχνική singular value decomposition (SVD, Lanczos, 1961).

Η μέθοδος DLS έχει δύο κύρια μειονεκτήματα : α) το τελικό αποτέλεσμα είναι στενά εξαρτημένο από την αρχική επιλογή μοντέλου (Smith and Vozoff, 1984) και β) σε μερικές περιπτώσεις η μέθοδος αυτή παράγει πολύπλοκες λύσεις οι οποίες μαθηματικά πληρούν τη λύση, αλλά δεν είναι λογικά αποδεκτές.

4.4 Μέθοδος Ανάλυσης Ιδιαζουσών Τιμών (S.V.D)

Είναι γνωστό ότι η επίλυση του γραμμικού προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων, απαιτεί τη χρήση των κανονικών εξισώσεων (4.13) :

$$Z^T Z\delta = Z^T g \tag{4.25}$$

Η λύση απαιτεί τον πολλαπλασιασμό των παραπάνω πινάκων. Ο πίνακας Z^TZ είναι ένας μη αρνητικός καθορισμένος, τετραγωνικός και συμμετρικός πίνακας, ο οποίος είναι πάντα θετικά ορισμένος κατά τη περίπτωση χρήσης του παράγοντα απόσβεσης του Marquardt. Είναι επομένως δυνατή η επίλυση του παραπάνω συστήματος με ανάλυση Cholesky, χωρίς να απαιτείται η αντιστροφή κανενός πίνακα (Lawson and Hanson, 1974).

Ομως, ο σχηματισμός των πινάκων Z^TZ και Z^Tg εισάγει αριθμητικές ανακρίβειες. Οι Golub και Reinsch (1970) παρατήρησαν το πρόβλημα αστάθειας της λύσης και πρότειναν την επίλυση του συστήματος :

$$Z\delta = g \tag{4.26}$$

αντί των κανονικών εξισώσεων.
Η λύση του σχέσης (4.19) είναι :

$$\delta = Z^{-1} g \tag{4.27}$$

αλλά ο αντίστροφος του Z (Z^{-1}), υπάρχει μόνο στη περίπτωση όπου ο Z είναι τετραγωνικός (n=p) και μη ιδιάζων. Στη γεωφυσική όμως, τα περισσότερα προβλήματα είναι υπερκαθορισμένα (n>>p), με αποτέλεσμα ο αντίστροφος του Z να υπολογίζεται με χρήση του γενικευμένου αντίστροφου (Lanczos, 1961).

Οι Golub και Reinsch (1970), ανέπτυξαν μια πολύ αποτελεσματική μέθοδο για την επίλυση των εξισώσεων της σχέσης (4.19), στη περίπτωση όπου αυτές είναι ιδιάζουσες ή περίπου ιδιάζουσες. Η μέθοδος αυτή κάνει χρήση της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών (Singular Value Decomposition - S.V.D). Στις περιπτώσεις όπου μέθοδοι όπως οι Gauss elimination, LU decomposition αδυνατούν να δώσουν ικανοποιητική λύση, εφαρμόζεται η ανάλυση ιδιαζουσών ιδιοτιμών η οποία κάνει ακριβής διάγνωση της φύσης του προβλήματος. Πέρα από τη διάγνωση του προβλήματος, η μέθοδος παρέχει μια ικανοποιητική αριθμητική λύση. Η μέθοδος S.V.D χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων ελαχίστων τετραγώνων. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου ο πίνακας Z (MxN) αναλύεται ως (Golub and Van Loan, 1989):

$$Z = U\Lambda V^T \tag{4.28}$$

όπου U είναι ένας ορθοκανονικός πίνακας (MxM) των ιδιοδιανυσμάτων και ο οποίος καλύπτει τον χώρο των δεδομένων, V είναι ένας (NxN) ορθοκανονικός πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων, ο οποίος και καλύπτει το χώρο των παραμέτρων του μοντέλου και Λ είναι ένας (MxN) διαγώνιος πίνακας, τα στοιχεία του οποίου είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα Z. Οι στήλες του πίνακα U είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα ZZ^T και οι στήλες του V είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Z^TZ. Στη πιο γενική περίπτωση όπου η ανάλυση παράγει κάποιες μηδενικές ιδιοτιμές (ας θεωρήσουμε p τον αριθμό των μη μηδενικών ιδιοτιμών), η παραπάνω ανάλυση του πίνακα Z (Lines and Treitel, 1984) γίνεται,

$$Z = U_p \Lambda_p V_p^T \tag{4.29}$$

όπου U_p και V_p είναι ημιορθογώνιοι πίνακες με διαστάσεις mxp και nxp αντίστοιχα, ενώ ο πίνακας Λ_p είναι ένας pxp διαγώνιος πίνακας.

Οταν μια από τις ιδιοτιμές είναι μηδενική, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα δεν μπορεί να απεικονιστεί από το χώρο των δεδομένων στο χώρο των παραμέτρων του μοντέλου και αντίστροφα. Διανύσματα των δεδομένων και των παραμέτρων του μοντέλου, τα οποία έχουν μηδενικές ιδιοτιμές, ανήκουν στο μηδενικό χώρο και δεν μπορούν να υπολογιστούν. Οταν μια ιδιοτιμή δεν είναι μηδενική, αλλά έχει πολύ μικρή τιμή συγκρινόμενη με τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή (ο λόγος των δύο τιμών είναι μεγάλος - condition number), η συμβολή που θα έχουν στη λύση τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, πρέπει να είναι ελάχιστη διότι αυτό θα οδηγήσει σε αστάθεια της λύσης.

4.5 Μέθοδος ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών και παράγοντα απόσβεσης

Γνωρίζοντας τα πλεονεκτήματα της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων με απόσβεση και της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών, έγινε μια προσπάθεια εφαρμογής και των δύο σε μια κοινή μέθοδο. Η εφαρμογή της μεθόδου SVD προτάθηκε μεταξύ των άλλων και από τους Lawson και Hanson (1974) και από τους Jupp και Vozoff (1975).

Η λύση των κανονικών τροποποιημένων εξισώσεων δίνεται ως :

$$\delta = (Z^T Z + \beta I)^{-1} Z^T g \tag{4.30}$$

Αν επαναδιατυπώσουμε τους (Z^TZ) με την μορφή U, Λ και V:

$$Z^T Z = V\Lambda^2 V^T \tag{4.31}$$

οπότε,

$$(Z^T Z)^{-1} = V\Lambda^{-2} V^T . \tag{4.32}$$

Ο πίνακας $(Z^TZ+\beta I)$ γίνεται,

$$(Z^T Z + \beta I) = V\Lambda^2 V^T + \beta I = V(\Lambda^2 + \beta I)V^T . \tag{4.33}$$

Τελικά,

$$(Z^T Z + \beta I)^{-1} = V(\Lambda^2 + \beta I)^{-1} V^T = V diag\left(\frac{1}{\lambda_j^2 + \beta}\right) V^T \quad (4.34)$$

όπου $(\Lambda^2+\beta I)^{-1}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας της μορφής,

$$(\Lambda^2 + \beta I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2 + \beta} & 0 & \dots & 0 \\ & & & . \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2^2 + \beta} & & . \\ & & & . \\ . & & . & . \\ . & & & \\ 0 & & \dots & \frac{1}{\lambda_p^2 + \beta} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στις γνωστές σχέσεις προκύπτει,

$$\delta = V diag\left(\frac{1}{\lambda_j^2 + \beta}\right) V^T V \Lambda U^T g \Rightarrow$$

$$\delta = V diag\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \beta}\right) U^T g. \quad (4.36)$$

Η λύση του συστήματος μπορεί να γραφεί και ως άθροισμα των γινομένων των διανυσμάτων με βάρος,

$$\delta = v_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \beta} u_1^T g + v_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + \beta} u_2^T g + \ldots + v_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \beta} u_n^T g \quad (4.37)$$

Συγκρίνοντας τις λύσεις που προκύπτουν, παρατηρούμε ότι το στοιχείο $1/\lambda_i$ του πίνακα Λ^{-1} στην μέθοδο Marquardt, αντικαθίσταται από το στοιχείο,

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \beta} \quad (4.38)$$

όπου β είναι ο παράγοντας απόσβεσης. Στο σημείο αυτό φαίνεται καθαρά η αποτελεσματικότητα αυτής της λύσης στη περίπτωση ιδιάζοντα πίνακα. Αν οι ιδιοτιμές είναι μεγάλες τότε και η επίδραση της άθροισης του παράγοντα β σε αυτές είναι αμελητέα οπότε είναι αμελητέα και η επίδραση στο διάνυσμα της λύσης. Στη περίπτωση κατά την οποία οι ιδιοτιμές είναι μικρές (το $\lambda_j \rightarrow 0$), η άθροιση του παράγοντα απόσβεσης προκαλεί μείωση της παράστασης που δίνεται παραπάνω, άρα είναι ασθενέστερη η επίδραση του διανύσματος της λύσης.

Οταν το β παίρνει μεγάλες τιμές, τότε βελτιώνεται η ευστάθεια της λύσης, αλλά χειροτερεύει η διακριτική ικανότητα της μεθόδου. Άρα είναι επιθυμητό το β να επιλεγεί έτσι ώστε να υπάρχει ευσταθής λύση και καλή διακριτική ικανότητα.

4.6 Μέθοδος αντιστροφής υπό περιορισμούς με εξομάλυνση (Occam method)

Ενας τρόπος επίλυσης της αστάθειας της λύσης του αντιστρόφου προβλήματος, είναι η εφαρμογή εξομαλυμένων περιορισμών. Η εφαρμογή τέτοιων περιορισμών που σταθεροποιούν φτωχά καθορισμένα προβλήματα, ανήκει στη γενική κατηγορία μεθόδων κανονικοποίησης (Tikhonov, 1963). Αυτού του τύπου οι μέθοδοι είναι γνωστοί και ως μέθοδοι ελαχίστων τετραγώνων με τετραγωνικούς περιορισμούς ανισοτήτων (LSQI method - Golub and Van Loan, 1989). Η τεχνική που θα παρουσιαστεί, εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στις γεωφυσικές επιστήμες από τον Constable et al. (1987), την οποία και ονόμασε τεχνική αντιστροφής του Occam (όνομα φιλοσόφου του 14^{ου} αιώνα). Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά για την επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σε μελέτες μαγνητοτελλουρικών και προσδιορισμού γεωηλεκτρικής δομής. Η αρχή της τεχνικής είναι ο προσδιορισμός του πιο εξομαλυμένου μοντέλου το οποίο προσαρμόζει τα δεδομένα παρατήρησης, με βάση το γεγονός ότι το τελικό μοντέλο θα παρεκκλίνει τόσο από το πιο απλοποιημένο μοντέλο όσο χρειάζεται για να επιτευχθεί η προσαρμογή των δεδομένων.

Η ανάγκη εφαρμογής αυτής της μεθόδου, προέκυψε από την αδυναμία της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων με απόσβεση να δώσει απλές και ρεαλιστικές λύσεις, όπως και λόγω της εξάρτησης της τελικής λύσης από την επιλογή του αρχικού μοντέλου. Η μέθοδος αυτή (Occam method) δεν υπόσχεται την καλύτερη λύση αλλά σίγουρα τη πιο απλή και αληθοφανής. Επίσης, η μέθοδος αυτή παρέχει σταθερότητα στη λύση και είναι ανεξάρτητη της επιλογής του αρχικού μοντέλου.

Για την εφαρμογή της μεθόδου απαιτείται ο προσδιορισμός ενός παράγοντας ο οποίος θα περιγράφει την επιθυμητή σχέση εξομάλυνσης μεταξύ των παραμέτρων ως συνάρτηση των τιμών βραδύτητας του μοντέλου. Αυτός ο παράγοντας τραχύτητας (roughness term) (Constable et al., 1987) μπορεί να εκφραστεί με διακριτή μορφή ως ένας τελεστής πεπερασμένων διαφορών.

Ενας τέτοιος παράγοντας τραχύτητας για δισδιάστατη Γη, προτάθηκε από τον Sasaki (1992), όπου αν θεωρήσουμε L παραμέτρους στρωμάτων και Q παραμέτρους ανά στρώμα, τότε το ολικό μοντέλο τραχύτητας R δίνεται από τη παρακάτω σχέση,

$$R = \sum_{k=2}^{L-1} \sum_{l=2}^{Q-1} \left[-x_{(k-1,l)} - x_{(k,l-1)} + 4x_{(k,l)} - x_{(k,l+1)} - x_{(k+1,l)} \right]^2 \quad (4.39)$$

όπου $x_{(k,l)}$ είναι το κεντρικό σημείο και $x_{(k-1,l)}$, $x_{(k,l-1)}$, $x_{(k,l+1)}$ και $x_{(k+1,l)}$ είναι οι παρακείμενοι του κεντρικού κόμβοι προς το νότο, δύση, ανατολή και βορρά αντίστοιχα.

Στη παρούσα εργασία εφαρμόστηκε φίλτρο εξομάλυνσης με δεύτερες παραγώγους όπου το βάρος καθενός των παρακείμενων του κεντρικού, κόμβων, έχει τιμή -1 πολλαπλασιασμένο με τον επιθυμητό βαθμό εξομάλυνσης. Ο κεντρικός κόμβος έχει τιμή ίση με τον αριθμό των παρακείμενων κόμβων πολλαπλασιασμένο με τον επιθυμητό βαθμό εξομάλυνσης.

Συχνά εφαρμόζεται η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων με απόσβεση και παράλληλα με περιορισμούς εξομάλυνσης. Στη περίπτωση αυτή η λύση δίνεται από τη παρακάτω σχέση,

$$\delta = (Z^T Z + \beta C^T C)^{-1} Z^T g \quad (4.40)$$

Παρατηρείται ότι η μόνη διαφορά με τον γνωστό τύπο λύσης της DLS μεθόδου, είναι ότι ο μοναδιαίος πίνακας I αντικαθίσταται από τον εξομαλυμένο πίνακα $C^T C$.

4.7 Διακριτική ικανότητα και πίνακας συμμεταβλητότητας της λύσης του γραμμικού συστήματος

Μελετώντας ένα απλό γραμμικό σύστημα και έχοντας ορίσει την τελική λύση αυτού, τίθεται το ερώτημα κατά πόσο οι υπολογιζόμενες παράμετροι του μοντέλου προσαρμόζουν καλά στα δεδομένα. Ετσι μπορεί να δοθεί η παρακάτω σχέση :

$$\left. \begin{aligned} d^{pre} &= Gm^{est} \\ Gm = d \Rightarrow m^{est} &= G^{-g} \cdot d^{obs} \end{aligned} \right\} \Rightarrow d^{pre} = G\left(G^{-g} d^{obs}\right) = \left(GG^{-g}\right) d^{obs} = Nd^{obs} \quad (4.41)$$

όπου τα pre και obs είναι οι αναμενόμενες και παρατηρούμενες τιμές αντίστοιχα, ενώ G^{-g} είναι ο γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα G.

Ο NxN τετραγωνικός πίνακας $N=GG^{-g}$ καλείται *πίνακας διακριτικής ικανότητας των δεδομένων*. Ο πίνακας αυτός περιγράφει την καλή ή όχι προσαρμογή των προβλέψεων στα δεδομένα. Αν ο πίνακας N=I, τότε εύκολα φαίνεται ότι $d^{pre}=d^{obs}$ και το λάθος πρόβλεψης είναι μηδέν. Στην αντίθετη περίπτωση όπου ο πίνακας N δεν ισούται με το μοναδιαίο I, τότε το σφάλμα πρόβλεψης είναι μη μηδενικό. Η γραμμή αυτή του πίνακα δίνει το βαθμό που μπορούν τα γειτονικά δεδομένα να προβλεφθούν. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα αυτού δείχνουν το βάρος που έχει κάθε στοιχείο στη πρόβλεψη.

Ομοίως μπορεί να υπολογιστεί και ο πίνακας διακριτικής ικανότητας των παραμέτρων του μοντέλου. Για να υπολογιστεί το παραπάνω ας θεωρήσουμε ένα σύνολο παραμέτρων του μοντέλου (m^{true}) οι οποίες είναι άγνωστες αλλά επιλύουν τη σχέση $Gm^{true}=d^{obs}$. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις για τα παρατηρούμενα δεδομένα και τις υπολογιζόμενες παραμέτρους του μοντέλου προκύπτει η παρακάτω σχέση :

$$\left.\begin{aligned} G\cdot m^{true} &= d^{obs} \\ m^{est} &= G^{-g}\cdot d^{obs} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m^{est} = G^{-g}\left(G\cdot m^{true}\right) = \left(G^{-g}\cdot G\right)m^{true} = R\cdot m^{true} \tag{4.42}$$

Ο πίνακας R (MxM) καλείται *πίνακας διακριτικής ικανότητας του μοντέλου*. Στην περίπτωση όπου R=I κάθε παράμετρος του μοντέλου καθορίστηκε μοναδικά. Πλοτάρισμα των γραμμών του πίνακα αυτού, μας ορίζουν πόσο καλά οι παράμετροι του πραγματικού μοντέλου έχουν καθοριστεί.

Ο έλεγχος της ποιότητας των πινάκων διακριτικής ικανότητας των δεδομένων και των παραμέτρων του μοντέλου γίνεται με τις παρακάτω σχέσεις,

$$\begin{aligned} spread\left[N\right] &= \left\|N - I\right\|_2^2 \\ spread\left[R\right] &= \left\|R - I\right\|_2^2 \end{aligned} \tag{4.43}$$

όπου γίνεται ο έλεγχος κατά πόσο οι δύο πίνακες (N, R) απέχουν από τον μοναδιαίο.

Στη περίπτωση που εξετάζουμε ένα γραμμικό αντίστροφο πρόβλημα, η διαταραχή στο μοντέλο εξαιτίας σφαλμάτων στα δεδομένα δίνεται ως :

$$\delta m = A^T \delta d \tag{4.44}$$

Ο πίνακας συμμεταβλητότητας Cov(δm), που συνδέεται με την αβεβαιότητα στο προσδιορισμό των παραμέτρων του μοντέλου δm, δίνεται ως,

$$Cov(\delta m) = A^T Cov(d) A^T \tag{4.45}$$

Αν τα δεδομένα είναι ασυσχέτιστα, ο πίνακας Cov(d), είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι οι τυπικές αποκλίσεις των δεδομένων σ_d^2. Σε αυτή τη περίπτωση,

$$Cov(\delta m) = \sigma_d^2 A^T A^T = \sigma_d^2 V_p \Lambda_p^{-2} V_p^T \tag{4.46}$$

Από τη παραπάνω σχέση φαίνεται καθαρά ότι η αβεβαιότητα στις υπολογιζόμενες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου, είναι ανάλογες των αβεβαιοτήτων στα δεδομένα και αντιστρόφως ανάλογες των τετραγώνων των ιδιοτιμών. Αυτό συνεπάγεται ότι : όσο ο θόρυβος αυξάνει τόσο και η αβεβαιότητα των υπολογισμών των παραμέτρων του μοντέλου αυξάνει και ακόμα ότι όσες παράμετροι σχετίζονται με μικρές ιδιοτιμές είναι κακώς υπολογισμένες.

Τέλος, θα αναφερθούμε στο μοναδιαίο πίνακα συμμεταβλητότητας, ο οποίος χαρακτηρίζει το βαθμό με τον οποίο τα σφάλματα στα δεδομένα, μεγενθύνονται και επηρεάζουν τις παραμέτρους του μοντέλου. Αν τα δεδομένα τα θεωρήσουμε ασυσχέτιστα και όλα με την ίδια διακύμανση σ^2, ο μοναδιαίος πίνακας συμμεταβλητότητας δίνεται από τη σχέση :

$$\left[\operatorname{cov}_u m\right] = \sigma^{-2} G^{-g}\left[\operatorname{cov} d\right] G^{-gT} = G^{-g} G^{-gT} \qquad (4.47)$$

Ακόμα και αν τα δεδομένα είναι συσχετισμένα, μπορεί να οριστεί ο μοναδιαίος πίνακας συμμεταβλητότητας των δεδομένων $[\operatorname{cov}_u d]$, ο οποίος σχετίζεται με τον πίνακα συμμεταβλητότητας του μοντέλου με τη σχέση :

$$\left[\operatorname{cov}_u m\right] = G^{-g}\left[\operatorname{cov}_u d\right] G^{-gT} \qquad (4.48)$$

Ο πίνακας συμμεταβλητότητας του μοντέλου μας, αποτελεί ένα ακόμα κριτήριο για την ποιότητα της λύσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Πρόγραμμα επίλυσης του ευθέος και αντιστρόφου προβλήματος

Η διαδικασία η οποία ακολουθείται στη παρούσα εργασία βασίζεται στη μέθοδο του Thurber (1983), η οποία αναπτύχθηκε για ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Εστω ότι έχουμε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Ο χώρος, ο οποίος θεωρείται επίπεδος, χωρίζεται σε ένα σύνολο από κυψέλες με πλευρές παράλληλες με τους άξονες του συστήματος και η ταχύτητα των σεισμικών κυμάτων είναι σταθερή για κάθε κόμβο του δικτύου που δημιουργείται.

Το σύστημα αναφοράς μπορεί να οριστεί τόσο για ισαπέχοντα σημεία όσο και για μη ισαπέχοντα σημεία - κόμβους. Αυτό σημαίνει ότι τα κελιά είναι δυνατό να μην έχουν όλα τις ίδιες διαστάσεις. Αυτό έγινε προκειμένου να δοθεί λύση στη περίπτωση όπου χρειάζεται αυξημένη διακριτική ικανότητα σε ένα συγκεκριμένο χώρο της περιοχής μελέτης (έντονη μεταβολή της ταχύτητας). Το παραπάνω σύστημα αναφοράς είναι δυνατό να οριστεί παρέχοντας τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές ανά άξονα, καθώς και το σταθερό βήμα μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών του άξονα.

Αφού οριστεί το σύστημα αναφοράς, κατόπιν γίνεται εισαγωγή στο πρόγραμμα του μοντέλου ταχυτήτων. Το μοντέλο ταχυτήτων μπορεί να είναι μονοδιάστατο ή τρισδιάστατο. Με την εισαγωγή του μοντέλου ταχυτήτων, γίνεται απευθείας τοποθέτηση αυτών στους αντίστοιχους κόμβους του δικτύου ενώ παράλληλα υπολογίζεται η τιμή καθυστέρησης για κάθε κόμβο ως το αντίστροφο της τιμής της ταχύτητας. Η τιμή της ταχύτητας για κάθε στρώμα, στο μονοδιάστατο μοντέλο ταχύτητας, ισούται με το μέσο όρο των τιμών ταχυτήτων των κόμβων που βρίσκονται εκατέρωθεν του στρώματος. Στην περίπτωση του τρισδιάστατου μοντέλου ταχυτήτων ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφηκε κατά το προσεγγιστικό καθορισμό της σεισμικής ακτίνας (Thurber and Ellsworth, 1980), κατά την οποία κατασκευάζεται ένα ισοδύναμο μονοδιάστατο μέσο και κατόπιν υπολογίζεται ο μέσος όρος όπως προαναφέρθηκε.

Το επόμενο βήμα είναι η εισαγωγή στο πρόγραμμα, των ακριβών θέσεων στο χώρο, των πηγών και δεκτών που χρησιμοποιήθηκαν κατά την διεξαγωγή του πειράματος σεισμικής τομογραφίας μεταξύ γεωτρήσεων. Κατόπιν, εισάγονται τα ζευγάρια πηγών - γεωφώνων και οι αντίστοιχοι χρόνοι διαδρομής. Είναι δυνατόν να μην υπάρχουν καταγραφές από όλα τα γεώφωνα για κάθε πυροδότηση της πηγής, για αυτό και κρίθηκε αναγκαία η δημιουργεία ενός αρχείου που πληροφορεί ποια γεώφωνα διεγέρθηκαν κατά την πυροδότηση μιας πηγής και τι χρόνους κατέγραψαν.

Κατά την επίλυση του ευθέος προβλήματος, ακολουθούνται τα παρακάτω στάδια. Αρχικά, για κάθε ζευγάρι πηγής-δέκτη, υπολογίζονται οι χρόνοι διαδρομής καθώς και η γεωμετρία των σεισμικών ακτίνων στο τρισδιάστατο μέσο. Βασική αρχή για τους υπολογισμούς αυτούς είναι ο νόμος του Snell, δηλαδή η παράμετρος της σεισμικής ακτίνας όπως παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τα παραπάνω στοιχεία υπολογίστηκαν με βάση τις γνωστές σχέσεις που ισχύουν για την περίπτωση οριζοντίων στρωμάτων (Παπαζάχος, 1986). Ξέρουμε ότι και για τη περίπτωση των οριζοντίων επίπεδων στρωμάτων, δεν υπάρχει αναλυτική λύση για τα κύματα που εξετάζουμε. Ετσι εφαρμόστηκαν αριθμητικές μέθοδοι προσδιορισμού αυτών. Στην περίπτωση των απευθείας κυμάτων το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε με την εύρεση της γωνίας αναχώρησης του απευθείας κύματος το οποίο καταγράφεται σε απόσταση Δ (επικεντρική απόσταση). Συνήθως, χρησιμοποιούνται η μέθοδος της λανθασμένης θέσης (false position method) και του αντιστρόφου ημιτόνου (secant method). Με αυτό το τρόπο, υπολογίζονται εύκολα τα μήκη και οι χρόνοι διαδρομής της σεισμικής ακτίνας μέσα σε κάθε στρώμα. Από τους τελικούς χρόνους για τα δύο είδη σεισμικών κυμάτων, επιλέγεται το κύμα με τον μικρότερο χρόνο διαδρομής, ενώ παράλληλα υπολογίζονται και οι συντεταγμένες (x,y,z) των σημείων, που αποτελούν τα σημεία τομής των σεισμικών ακτίνων με τις οριζόντιες επιφάνειες του ορισμένου συστήματος αναφοράς. Εφαρμόζεται παρεμβολή στα σημεία που προαναφέρθηκαν με βάση το μήκος της σεισμικής ακτίνας που κάθε φορά εξετάζεται, προκειμένου να αυξηθεί το πλήθος τους και να αποτελέσουν το αρχείο εισαγωγής για τον τελικό προσδιορισμό της σεισμικής ακτίνας με βάση την αναθεωρημένη μέθοδο κάμψης (Moser, Nolet and Snieder, 1992).

Στη συνέχεια εφαρμόζεται μέθοδος η οποία κάμπτει τις σεισμικές ακτίνες προκειμένου να προσομοιάσουν την πραγματική πορεία των ακτίνων σε ένα τρισδιάστατο μέσο, ομοιογενές ή ανομοιογενές ως προς τις ταχύτητες. Η παρουσίαση της μεθόδου αναφέρεται συνοπτικά στο κεφάλαιο προσδιορισμού της σεισμικής ακτίνας (τεχνική της κάμψης - bending methods). Κατά τη διαδικασία της κάμψης των σεισμικών ακτίνων, ξαναυπολογίζεται ο χρόνος διαδρομής (κανόνας του τραπεζοειδούς) ο οποίος είναι και ο τελικός χρόνος. Η διαφορά του υπολογιζόμενου χρόνου διαδρομής από τον παρατηρούμενο μας δίνει το διάνυσμα Β (χρονικό υπόλοιπο) της γραμμικής σχέσης Ax=B. Η σχέση αυτή θα επιλυθεί με κάποια μέθοδο αντιστροφής. Ο πίνακας Α της γραμμικής σχέσης, είναι ο πίνακας των παραγώγων των σεισμικών ακτίνων ως προς τις μεταβολές αυτών στο χώρο.

Τελικά, για την επίλυση του παραπάνω γραμμικού συστήματος εφαρμόστηκε μια μέθοδος μη γραμμικής αντιστροφής ελαχίστων τετραγώνων. Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν στο αντίστοιχο κεφάλαιο παρουσίασης των μεθόδων αντιστροφής, θεωρήθηκαν ως καλύτερες η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων με απόσβεση (Damped Least Squares-DLS) και η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων με εξομάλυνση (Occam method). Κατόπιν εφαρμόστηκαν και οι δύο σε κοινό αλγόριθμο αντιστροφής. Η επιτυχία του παρόντος αλγόριθμου βασίζεται στη κατάλληλη επιλογή του παράγοντα απόσβεσης και του παράγοντα εξομάλυνσης. Για την εύρεση των κατάλληλων τιμών των παραμέτρων αυτών (damping factor, smoothing), εφαρμόστηκε η διαδικασία δοκιμής - σφάλματος (trial-error method).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΕΙΣΜΙΚΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

6.1. Εφαρμογή σε συνθετικά δεδομένα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα εφαρμογής του λογισμικού επίλυσης του ευθέος και αντιστρόφου προβλήματος σε συνθετικά δεδομένα.

Το μοντέλο αποτελείται από 11 κόμβους κατά τη x διεύθυνση με ελάχιστη τιμή 0m μέγιστη στα 25m και απόσταση ανά κόμβο 2.5m, 3 κόμβους κατά τη y διεύθυνση με ελάχιστη τιμή 0m μέγιστη στα 10m και απόσταση ανά κόμβο 5m και 11 κόμβους (ορίζοντες) κατά τη z διεύθυνση με ελάχιστη τιμή 0m μέγιστη στα 100m και απόσταση ανά κόμβο 10m (σχ. 6.1).

Το χρησιμοποιούμενο συνθετικό μοντέλο ταχύτητας, είναι ένα τρισδιάστατο ανομοιογενές μοντέλο. Αποτελείται από κάποιο μέσο στο οποίο υπάρχουν δύο δομές με ανώμαλες ταχύτητες. Οι ταχύτητες αυτές είναι της τάξης του 15% υψηλότερη για τους κόμβους του καννάβου στους οποίους εφαρμόζεται η πρώτη (θετική) ανωμαλία και 10% αρνητική ανωμαλία, δηλαδή, χαμηλότερη του περιβάλλοντος για τους συγκεκριμένους κόμβους του καννάβου (σχ. 6.1). Το συνθετικό μοντέλο δημιουργήθηκε για να διαπιστωθεί η δυνατότητα και η ακρίβεια υπολογισμού του μοντέλου ταχυτήτων.

Το συνθετικό τρισδιάστατο ανομοιογενές μοντέλο ταχύτητας, αποτέλεσε αρχικά το μοντέλο εισαγωγής στον αλγόριθμο επίλυσης του ευθέος προβλήματος. Από αυτό παρήχθησαν οι συνθετικοί χρόνοι διαδρομής οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν ως οι παρατηρούμενοι (observed traveltimes) για το πείραμα σεισμικής τομογραφίας. Από το συνθετικό μοντέλο ταχύτητας παρήχθησαν και οι συνθετικές σεισμικές ακτίνες, οι οποίες συμφωνούν με τη παρουσία των ανωμαλιών.

Στο επόμενο στάδιο, εισήχθηκε το αρχικό μονοδιάστατο μοντέλο ταχυτήτων το οποίο χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τους παραπέρα υπολογισμούς. Το χρησιμοποιούμενο μονοδιάστατο μοντέλο ταχυτήτων φαίνεται στο πίνακα (πιν. 6.1),

Πίνακας 6.1 Το μονοδιάστατο μοντέλο ταχυτήτων το οποίο χρησιμοποιήθηκε στους υπολογισμούς των συνθετικών χρόνων διαδρομής

Βάθος (m)	***Ταχύτητα (m/sec)***
0	0.7
10	0.8
20	0.9
30	1.0
40	1.1
50	1.2
60	1.3
70	1.4
80	1.5
90	1.6
100	1.7

Το μονοδιάστατο μοντέλο ταχύτητας του πίνακα (6.1), αποτέλεσε τη βάση για το προσδιορισμό του τρισδιάστατου μοντέλου ταχυτήτων της περιοχής μελέτης. Κάθε φορά που υπολογιζόταν ένα νέο μοντέλο ταχύτητας, (πράγμα που σημαίνει υπολογισμό νέων χρόνων διαδρομής), υπολογίζονταν ταυτόχρονα το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (r.m.s) των χρονικών υπολοίπων ως κριτήριο σύγκλισης.

Στο ίδιο μοντέλο εφαρμόστηκαν τρεις διαφορετικές πειραματικές διατάξεις γεωφώνων - πηγών :

α) Στη πρώτη διάταξη τοποθετήθηκαν οι πηγές σε μια γεώτρηση βάθους 100m (όσο και η μέγιστη διάσταση του z άξονα του καννάβου), ενώ τα γεώφωνα τοποθετήθηκαν σε άλλη γεώτρηση με το ίδιο βάθος. Τόσο τα γεώφωνα όσο και οι πηγές τοποθετήθηκαν ανά 2m. Επομένως έχουμε 51 ζεύγη γεωφώνων - πηγών. Οι γεωτρήσεις είχαν απόσταση 25m μεταξύ τους, όσο δηλαδή και η μέγιστη διάσταση του x άξονα (σχ. 6.1).

β) Η δεύτερη διάταξη διαφέρει από τη προηγούμενη στο γεγονός ότι γεώφωνα τοποθετήθηκαν και στην επιφάνεια εκτός του χώρου των γεωτρήσεων. Συνολικά χρησιμοποιήθηκαν 50 πηγές και 76 γεώφωνα (σχ. 6.2).

γ) Τέλος, στη τρίτη διάταξη τα γεώφωνα τοποθετήθηκαν όπως και στη προηγούμενη διάταξη στη μια γεώτρηση και στην επιφάνεια, ενώ οι πηγές τοποθετήθηκαν τυχαία κατά τη x και z διεύθυνση μέσα στο χώρο του καννάβου. Ομοίως χρησιμοποιήθηκαν 50 πηγές και 76 γεώφωνα (σχ. 6.3).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη παρούσα διατριβή αναπτύχθηκαν ορισμένες τεχνικές και αλγόριθμοι, με σκοπό τη προσαρμογή της μεθόδου της σεισμικής τομογραφίας στη μελέτη του χώρου μεταξύ γεωτρήσεων. Συγκεκριμένα, αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα της τομογραφίας σε χώρο μεταξύ δύο γεωτρήσεων με διάφορες διατάξεις πηγών και γεωφώνων όπως αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 6. Για την αντιστροφή των σεισμικών δεδομένων (χρόνοι διαδρομής), κατασκευάστηκε κατάλληλο λογισμικό στη γλώσσα FORTRAN, το οποίο συμπεριλήφθηκε στη βάση προγραμμάτων του Τομέα Γεωφυσικής.

Από την εφαρμογή της μεθόδου σε συνθετικά δεδομένα (αποτελέσματα του κεφαλαίου 6), είναι προφανές ότι είναι δυνατή η επιτυχής αντιστροφή χρόνων διαδρομής σεισμικών κυμάτων, με σκοπό την ανακατασκευή του μοντέλου του χώρου μελέτης. Η μέθοδος αυτή είναι από τις πλέον κατάλληλες μεθόδους ανάλυσης σεισμικών δεδομένων. Προβλήματα που παρουσιάστηκαν στα αποτελέσματα της αντιστροφής είχαν τη βάση τους στην εγγενώς προβληματική διάταξη των πηγών - γεωφώνων σε πειράματα σεισμικής τομογραφίας μεταξύ γεωτρήσεων. Κύριο στοιχείο ήταν η ύπαρξη πολλών υποπαράλληλων σεισμικών ακτίνων οι οποίες δεν ήταν σε θέση να δώσουν σαφή εικόνα του πεδίου των ταχυτήτων, λόγω της προσανατολισμένης πορείας των ακτίνων από τη μία γεώτρηση στην άλλη. Για το λόγο αυτό, εφαρμόστηκαν οι δύο τεχνικές επίλυσης προβλημάτων ελαχίστων τετραγώνων (με απόσβεση και με εξομάλυνση) προκειμένου να απομακρύνουν τα σφάλματα στο προσδιορισμό των παραμέτρων των μοντέλων. Παρατηρείται ότι στη περίπτωση του πειράματος κατά το οποίο έχουμε πηγές τυχαία στο χώρο, τα αποτελέσματα είναι πολύ καλά λόγω ακριβώς της μη παράλληλης κίνησης των σεισμικών ακτίνων.

Από την ακρίβεια των παραγόμενων μοντέλων ταχύτητας επιβεβαιώνεται η ορθότητα του τρόπου εργασίας και της ακολουθούμενης μεθοδολογίας.

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

Aki, K., and Lee, W.H.K., 1976, Determination of three - dimensional velocity anomalies under a seismic array using first P arrival times from local earthquakes: 1. A homogeneous initial model. J. Geophys. Res., 81, 4381-4399.

Aki, K., Christofferson, A., and Husebye, E., 1977, Determination of the three dimensional seismic structure of the lithosphere. J. Geophys. Res., 82, 277-296.

Backus, G., 1970a, Inference from inadequate and inaccurate data: I. Proceedings of the National Academy of Sciences, 65, 1-105.

Backus, G., 1970b, Inference from inadequate and inaccurate data: II. Proceedings of the National Academy of Sciences, 65, 1-105.

Backus, G., 1970c, Inference from inadequate and inaccurate data: III. Proceedings of the National Academy of Sciences, 65, 1-105.

Barsky, B. A., 1988, Computer Graphics and Geometric Modeling Using Beta-Splines, Springer, New York.

Berryman, J. G., 1991, Convexity properties of inverse problems with variational constraints, J. Franklin Inst. 328, 1-13.

Berryman, J. G., 1991, Nonlinear Inversion and Tomography : Borehole Seismic Tomography, Lecture Notes from MIT.

Blestein, N., 1984, Mathematical Methods for Wave Phenomena, Academic Press, New York, p. 18.

Bohm, G., Cavallini, F. and Vesnaver, A. 1995, Getting rid of the grid. Expanded Abstracts of the 65th SEG Meeting, 655-658.

Bois, P., La Porte, M., Lavergne, M. and Thomas, G., 1972. Well-to-well seismic measurements, Geophysics, 50, 1253-1265.

Born, M., 1926, Quantenmechanik der Strossvorgange (Quantum mechanics of impact processes), Z. Phys. 38, 803-827.

Born, M., and E. Wolf, 1980, Principles of Optics - Electromagnetic Theory of Propagation, Interference, and Diffraction of Light, Pergamon Press, Oxford, p. 453 (Born approximation); pp. xxi-xii, 112, 128-130, 719, 732, 740, 742 (Fermat's principle); pp. 112, 724-725 (Hamilton-Jacobi theory); pp. 110, 119 (Rytov); p. xxi (Snell).

Box, G. E. P., and Kanemasu, H., 1972, Topics in model building, part II: on non-linear least squares. Technical Report No. 321. Department of Statistics, University of Wisconsin, Madison.

Chen, S. T., Zimmerman, L. J., and Tugnait, J. K., 1990. Subsurface imaging using reversed vertical seismic profiling and crosshole tomographic methods, Geophysics, 55, 1478-1487.

Constable, S., Parker, R., and Constable, C., 1987, Occam's inversion : A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. Geophysics, 52, 289-300.

Conte, S. D. and C. de Boor, 1980, Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill. New York.

Devaney, A. J., 1984, Geophysical Diffraction tomography, IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing 22, 3-13.

Dziewonski, A. M., 1984, Mapping the lower mantle: Determination of lateral heterogeneity in P velocity up to degree and order 6, J. Geophys. Res., 89, 5929-5952.

Dobrin, M. B. 1951. Dispersion in seismic waves. Geophysics, 16: 63-80.

Draper, N. R., and Smith, H., 1981, Applied Regression Analysis, 2nd edn., Wiley, New York.

Eaton, J. P., 1969, HYPOLAYR, a computer program for determining hypocenters of local earthquakes in an Earth consisting of uniform flat layers over a half space, USGS, Poen File Report, 155pp.

Fermat, P. de, 1891, Oeuvres de Fermat, Paris, Vol. 2, p. 354.

Feynman, R. P., 1965, The Character of Physical Law, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, p. 156.

Fiacco, A. V. and G. P. McCormick, 1990, Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques, SIAM, Philadelphia, Chapter 6, 86-112.

Fisher, R. and Lees, J. M., 1993, Shortest path ray tracing with sparse graphs, Geophysics, 58, 987-996.

Fletcher, R. and Reeves, C. M., 1964, Function minimization by conjugate gradients, Computer J., 7, 149-154.

Franklin, J. N., 1970. Well-posed stochastic extension of ill-posed linear problems. J. Math. Anal. Appl., 31, 682-716.

Goldstein, H., 1950, Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, pp. 231, 312.

Golub, G. H., and Reinsch, C., 1970, Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions : Handbook for Automatic Computation, II, Linear Algebra, eds. J. Wilkinson and C. Reinsch, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Golub, H. G., and Van Loan, F. C., 1989, Matrix Computations. 2nd Edition, The John Hopkins University Press.

Graybill, F. A., 1969, Introduction to Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Co. Inc., Belmont.

Harris, J. M., 1987, Diffraction tomography with arrays of discrete sources and receivers: IEEE Trans. Geosci. And Remote Sensing, Vol GE-25, 4, 448-455.

Harris, J. M., Tan, H., Lines, L., Pearson, C., Treitel, S., Mavko, G., Moos, D., and Nolen-Hoeksma, R. N., 1990, Cross-well tomographic images of geological structures in Gulf Coast sedimends, California: 60th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 37-40.

Harris, J. M., Nolen-Hoeksema, R. C., Langan, R. T., Van Schaack, M., Lazaratos, S. K., Rector III, J. W., 1995. High-resolution crosswell imaging of west Texas carbonate reservoir: Part 1- Project summary and interpretation. Geophysics, vol. 60, no. 3, p. 667-681

Howell, B. 1959. Introduction to Geophysics. New York: McGraw-Hill.

Inderwiesen, P. I., and Lo, T., 1990, Cross-hole seismic tomographic imaging of reservoir inhomogeneities in the Midway Sunset Field, California: 60th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 22-25.

Inman, J. R., 1975, Resistivity inversion with ridge regression, Geophysics 40, 798-817.

Ivansson, S., 1986. Crosshole transmission tomography, in Seismic Tomography with Applications in Global Seismology and Exploration Geophysics, edited by G. Nolet, D. Reidel Publishing Company.

Ivansson, S., 1986, Seismic borehole tomography - Theory and computational methods, Proc. IEEE 74, 328-338.

Jackson, D. D., 1972, Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data, Geophys, J. R. Astr. Soc., 28, 97-109.

Jech, J., and I. Psencik, 1989, First-order perturbation method for anisotropic media, Geophys. J. Int. 99, 369-379.

Jech, J., and I. Psencik, 1991, Kinematic inversion for qP and qS waves in inhomogeneous hexagonally symmetric structures, Geophys. J. Int., in press.

Julian, B. R., and Gubbins, D., 1977, Three dimensional seismic ray tracing, J. Geophys., 43, 95-113.

Jupp, D. L. B., and Vozoff, K., 1975, Stable iterative methods for the inversion of geophysical data, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 42, 957-976..

Justice, J. H., Vassiliou, A. A., Mathisen, M. E., Singh, S., Cunningham, P. S., and Hutt, P. R., 1992, Acoustic tomography in reservoir surveillance, in Sheriff, R. E., Ed., Reservoir geophysics: Soc. Expl. Geophys., Investigations in Geophysics 7, 321-334.

Justice, J. H., Mathisen, M. E., Vassiliou, A. A., Shiao, I., Alameddine, B. R., and Alhiliali, K. A., 1993, Crosshole seismic tomography in improved oil recovery: First Break, 11, 229-239.

Kak, A. C., 1984, Image reconstruction from projections, in Digital Image Processing Techniques, M. P. Ekstrom (ed.), Academic, New York, Chapter 4, 111-170.

Karey, P., Brooks, M. Introduction to Geophysical Exploration, Oxford-London-Boston, Blackwell Scientific Publication, 1984.

Keller, J. B., 1969, Accuracy and validity of the Born and Rytov approximations, J. Opt. Soc. Am. 59, 1003-1004.

Labo, J. 1987. A Practical Introduction to Borehole Geophysics. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists.

Ladas, K. T., and A. J. Devaney, 1991, Generalized ART algorithm for diffraction tomography, Inverse Problems 7, 109-125.

Ladas, K. T., and A. J. Devaney, 1992, Iterative methods in geophysical diffraction tomography, Inverse Problems 8, 119-132.

Lanczos, C., 1960, Linear differential operators. D. Van Nostrad Company Ltd.

Lanczos, C., 1961, Linear Differential Operators, Van Nostrand, Princeton. 665-679.

Lawson, C. L., and Hanson, R. J., 1974, Solving Least Squares Problems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Lee, D. S., Veronica M. Stevenson, Phill F. Johnston and C. E. Mullen, 1995. Time-lapse crosswell seismic tomography to characterize flow structure in the reservoir during the thermal stimulation, Geophysics, vol. 60, No. 3 p. 660-666.

Levenberg, K., 1944, A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, Quart. Appl. Math. 2, 164-168.

Lines, L. R., 1991, Applications of tomography to borehole and reflection seismology, The Leading Edge, 10, 11, 11-17.

Lines, L. R., Miller, M., Tan, H., Chambers, R., and Treitel, S., 1993, Integrated interpretation of borehole and crosswell data from a west Texas field: The Leading Edge, 12, 12, 13-16.

Lines, L. R., and Treitel, S., 1984, Tutorial : A Review of Least Squares Inversion and its Apllication to Geophysical Problems, Geophysical prospecting 32, 159-186.

Lo, T., Inderwiesen, P. L., Howlett, D. L., Melton, D. R., Livingston, N. D., Paulsson, B. N. P., and Fairborn, J. W., 1990, McKittrick cross-well seismology project: Part II. Tomographic processing and interpretation. 60th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 30-33.

Marquardt, D. W., 1963, An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters, SIAM J. Appl. Math. 11, 431-441.

Mathisen, M. E., Vassiliou, A. A., Cunningham, P. S., Shaw, J., Justice, J. H., and Guinzy, N. J., 1995, Time-lapse crosswell seismic tomogram interpretation: Implications for heavy oil reservoir characterization, thermal recovery process monitoring, and tomographic imaging technology: Geophysics, 60, 631-650.

McLamore, V. R., Anderson, D. G., Espana, C., 1981, Cross-hole testing using explosive and mechanical energy sources. ASTMP STP 654, American Society for Testing and Materials 1978, Dynamic Geotechnical Testing, pp. 30-55

Medlin, W. L., and Alhilali, K. A., 1990, Shear wave porosity logging in sands: 65^{th} Ann. Tech. Conf., Soc. Pert. Eng. SPE Paper 20558, 283-293.

Menke, W. (1984). Geophysical data analysis: Discrete Inverse Theory. Academic Press, New York.

Meredith, J. A., 1990, Numeric and analytical modeling of downhole seismic sources: The near and far field: Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Michelena, R. J., and J. M. Harris, 1991, Tomographic traveltime inversion using natural pixels, Geophysics 56, 635-644.

Morelli, A., and A. M. Dziewonski, 1985, Stability of aspherical models of the lower mantle (abstract), EOS Trans. AGU, 66, 975.

Morelli, A., and A. M. Dziewonski, 1986, 3D structure of the Earth's core inferred from travel time residuals (abstract), EOS Trans. AGU, 67, 311.

Morris, C. F., Little, T. M., and Letton, W. 1984. Soc. Petr. Eng. 59^{th} Ann. Fall Tech. Conf., paper SPE 13285.

Moser, T. J., 1989, Efficient seismic ray tracing using graph theory, Expanded Abstracts of the 59^{th} SEG Meeting, Dallas, 1106-1108.

Moser, T. J., 1991, Shortest path calculation of seismic rays, Geophysics 56, 59-67.

Moser, T. J., Nolet, G., and Snieder. R., 1992, Ray Bending Revisited. Bull. Seism. Soc. Am. 82, 259-288.

Nelder, J. A., and R. Mead, 1965, A simplex method for function minimization, Computer J. 7, 308-313.

Newman, W. M., and R. F. Sproull, 1981, Principles of Interactive Computer Graphics, McGraw-Hill, New York.

Newton, R. G., 1966, Scattering Theory of Waves and Particles, McGraw-Hill, New York, pp. 233-246.

Παπαζάχος Κ. Βασίλειος, 1986. Εισαγωγή στην Εφαρμοσμένη Γεωφυσική. Εκδόσεις ΖΗΤΗ, 1986.

Παπαζάχος Β. Κωνσταντίνος, 1994, Συμβολή στη μελέτη της δομής του φλοιού και του πάνω μανδύα στην Νοτιοανατολική Ευρώπη με αντιστροφή σεισμικών και βαρυτικών δεδομένων. Διδακτορική Διατριβή, Παν/μιο Θεσ/νίκης 1994.

Pereyra, V., Lee, W. H. K., and Keller, H. B., 1980, Solving two point seismic ray tracing problem in a heterogeneous medium, Part I: A general adaptive finite difference method, Bull. Seism. Soc. Am., 70, 79-99.

Press, F., and R. Siever. 1978. Earth, 2d ed. San Francisco: W. H. Freeman.

Paige, C. C., and Saunders, M. A., 1982, LSQR: An algorithm for space linear equations and sparse least squares, ACM Trans. Math. Softw., 8, 43-71.

Ραπτάκης Γ. Δημήτριος, 1995, Συμβολή στον προσδιορισμό των δυναμικών ιδιοτήτων των εδαφικών σχηματισμών και στη σεισμική απόκριση τους. Διδακτορική Διατριβή, Πολυτεχνική Σχολή - Α.Π.Θ. 1995.

Peterson, J. E., Bjorn, N. P. Paulsson, and Thomas V. McEvilly., 1985, Applications of algebraic reconstrunction techniques to crosshole seismic data. Geophysics, 50, 1566-1580.

Phillips, W. S., and Fehler, M. C., 1991, Traveltime tomography : A comparison of popular methods, Geophysics, 56, 1639-1649.

Pratt, R. G., and Goulty, N. R., 1991, Combining wave-equation imaging with traveltime tomography to form high resolution images from crosshole data: Geophysics, 56, 208-225.

Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, 1988, Numerical Recipes in Fortran - The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 292, 305-309.

Prothero, W. A., W. J. Taylor, and J. A. Eickemeyer, 1988, A fast, two-point, three-dimensional ray tracing algorithm using a simple step search method, Bull. Seism. Soc. Am. 78, 1190-1198.

Raymond, W. C., Warrick R. E., and Bennett M. J., 1978, Seismic velocities of San Francisko bayshore sediments. Earthquake Engineering and Soil Dynamics, June 19-21, 1978, Pasadena, CA.

Rector, J., S. Lazaratos, Harris J. M., and Van Schaack, M., 1995. High-resolution crosswell imaging of a west Texas carbonate reservoir: Part 3 - Wavefield separation of reflections, Geophysics, 60, 692-701.

Rutledge, J. T. 1989. Interwell seismic surveying workshop: An overview. The Leading Edge, 8(6): 38-40.

Rytov, S. M., 1937, Izv. Akad. Nauk SSSR 2, 223.

Rytov, S. M., 1938, Compt. Rend. (Doklady) Acad. Sci., URSS 18, 263.

Saito, H., 1989, Traveltimes and ray paths of first arrival seismic waves, Expanded Abstracts of the 59th SEG Meeting, Dallas, 244-247.

Sasaki, Y., 1992, Resolution of resistivity tomography inferred from numerical simulation. Geophysical prospecting, 40, 453-464.

Scales, J. A., 1987, Tomographic Inversion via Conjugate Gradient method, Geophysics, 52, 179-185.

Scales, J. A., and Smith, M. L., 1994, Introductory Geophysical Inverse Theory, Samizdat Press, 1994.

Sheriff, R. E., and Geldart, L. P., 1995. Exploration Seismology. Cambridge University Press.

Smith, N., and Vozoff, K., 1984, Two dimensional DC resistivity inversion for dipole-dipole data. IEEE Trans. Geosc., 22, (1), 21-28.

Smith, R. A., 1961. Some theorems concerning local magnetic anomalies. Geophys. Prosp., 9, 3-25.

Smith, F. B., and Shanno, D. F., 1971, An improved Marquardt procedure for nonlinear regressions, Technometrics 13, 63-75.

Statton, C. T., Auld, B., Fritz, A., 1978, In situ seismic shear wave velocity measurements and proposed procedures. A.S.T.M. 1978, Dynamic Geotechnical Testing, pp. 56-65.

Stoer, J. and R. Bulirsch, 1980, Introduction to Numerical Analysis. Springer, New York.

Tabbara, W., B. Duchene, Ch. Pichot, D. Lesselier, L. Chommeloux, and N. Joachimowicz, 1988, Diffraction tomography: Contribution to the analysis of some applications in microwaves and ultrasonics, Inverse Problems 4, 305-331.

Tarantola, A., 1984, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation, Geophysics 49, 1259-1266.

Tarantola, A., and B. Valette, 1982, Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion, Rev. Geophys. Space Phys. 20, 219-232.

Tatham, R. H., and M. D. McCormack. 1991. Multicomponent Seismology in Petroleum Exploration. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists.

Thurber, C. H., 1983, Earthquake locations and three-dimensional crustal structure in the Coyote Lake area, central California. J. Geophys. Res., 88, 8226-8236.

Thurber, C. H., and Ellsworth, W. L., 1980, Rapid solution of ray tracing problems in heterogeneous media. Bull. Seism. Soc. Am., 70, 1137-1148.

Tikhonov, A. N., 1963, Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. Soviet Mathematics, 4, 1035-1038.

Uhm, J., and Thurber, C. H., 1987, A fast algorithm for two points seismic ray tracing. Bull. Seism. Soc. Am., 77, 972-986.

Van Schaack, M., Harris, J. M., Rector, J. W. and Lazaratos, S., 1995. High-resolution crosswell imaging of a west Texas carbonate reservoir: Part 2 - Wavefield modeling and analysis, Geophysics, 60, 682-691.

Vesnaver, A. 1994, Towards the uniqueness of tomographic inversion solutions, Journal of Seismic Exploration 3, 323-334.

Vesnaver, A. L., 1996, The contribution of reflected, refracted and transmitted waves to seismic tomography : A tutorial, First Break, 14, 159-168.

Vidale, J. E., 1988, Finite-difference calculation of travel time, Bull. Seismol. Soc. Am. 78, 2062-2076.

Vidale, J. E., 1990, Finite-difference calculation of travel time in 3-D, Geophysics 55, 521-526.

Wesson, R., 1971, Travel time inversion for laterally inhomogeneous crustal velocity models. Bull. Seism. Soc. Am., 61, 729-746.

White, J. E., 1983, Underground sound: Application of seismic waves: Elsevier.

Williams, M. C., Van L. Leighton, Antony A. Vassiliou, Henry Tan, and Tamas Nemeth, V. Dale Cox, Don L. Howlett, 1997. Crosswell Seismic Imaging: A technology whose time has come?. The Leading Edge, 16(3): 285-291.

Williamson, P. R., 1991, A guide to the limits of resolution imposed by scattering in ray tomography: Geophysics, 56, 202-207.

Wong, J., N. Bregman, G. West, and P. Hurley. 1987. Crosshole seismic scanning and tomography. The Leading Edge, 6(1): 36-41.

Wu, R., and Toksoz, M. N., 1987, Diffraction tomography and multisource holography applied to seismic imaging: Geophysics, 52, 11-25.

Zhou, C., Wenying Cai, Yi Luo, G. T. Schuster, and S. Hassanzadeh, 1995. Acoustic wave-equation traveltime and waveform inversion of crosshole seismic data. Geophysics, 60, p. 765-773.