**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΑΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ**
**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΧΑΝΙΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ**

# Μελέτη των βασικών αρχών των spread spectrum επικοινωνιών

**Κελέκης Παύλος**

Επιβλέπων Καθηγητής

Δρ. Ευάγγελος Κόκκινος

**ΧΑΝΙΑ - ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2013**

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το βιβλίο αυτό αναφέρεται στις αρχές του spread spectrum . Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά για την προσέγγιση της βασικής ιδέας του CDMA , προσδιορίζονται οι βασικές αρχές που το διέπουν και οργανώνεται το κείμενο. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στη μελέτη και παραγωγή των ψευδοτυχαίων ακολουθιών . Στο τρίτο μελετάται ο συνγχρονισμός των ψευδοτυχαίων σημάτων . Στο τέταρτο η διαμόρφωση- αποδιαμόρφωση spread spectrum σημάτων σε multipath περιβάλλον πολλαπλής παρεμβολής . Στο πέμπτο επικεντρωνόμαστε στην κωδικοποίηση και interleaving σήματα. Και τέλος στο έκτο αναφερόμαστε στην χωρητικότητα, την κάλυψη και τον έλεγχος δικτύων πολλαπλής πρόσβασης διάχυτου φάσματος

# SUMMARY

This book describes the principles of spread spectrum communication. In the first chapter there is an introduction about the definition and purpose of CDMA and its principles. Also there is the organization of the book. In the second chapter it refers in the study and produce of pseudorandom sequences. In the third there is a study about the synchronization of the pseudorandom signals. The forth speaks about the modulation and demodulation of spread spectrum signals in multipath environment of multipath distribution. The fifth focuses in coding and interleaving. And in the last chapter we refer to capacity, coverage and control of spread spectrum multiple access networks

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ


## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ορισμός και σκοπός

1.2 Βασικός περιορισμός της συμβατικής προσέγγισης

1.3 Αρχές της Διάδοσης Φάσματος

1.4 Οργάνωση του κειμένου

## Κεφάλαιο 2

Τυχαία και Ψευδοτυχαία Γενιά Σήματος

2.1 Λόγος

2.2 Ψευδοτυχαίες ακολουθίες

2.2.1 Μέγιστο μήκος γραμμικής αλληλουχίας μητρώου μετατόπισης

2.2.2 Ιδιότητες τυχαιότητας των MLSR ακολουθιών

2.2.3 Συμπέρασμα

2.3 Παραγωγή ψευδοτυχαίων σημάτων από ψευδοτυχαίες ακολουθίες

2.3.1 Πρώτης και δεύτερης τάξης στατιστικές αποδιαμόρφωσης εξόδου στην παρεμβολή πολλαπλής πρόσβασης

2.3.2 Στατιστικές για (QPSK) διαμόρφωση από ψευδοτυχαίες ακολουθίες

2.3.3 Παραδείγματα

2.3.4 Δέσμευση για την περιορισμένου εύρους φάσμα

2.4 Πιθανότητα σφάλματος για το BPSK ή το QPSK με συνεχή σήματα στον πρόσθετο Γκαουσιανό θόρυβο ή παρεμβολή

Βέλτιστο φίλτρο δέκτης για περιορισμένου εύρους φάσμα

# Κεφάλαιο 3

Συγχρονισμός ψευδοτυχαίων σημάτων

3.1 Σκοπός

3.2 Απόκτηση ψευδοτυχαίου σήματος χρονισμού

3.2.1 Εξέταση υπόθεσης για τη διάδοση BPSK

3.2.2 Εξέταση υπόθεσης για τη διάδοση QPSK

3.2.3 Το αποτέλεσμα της συχνότητας σφάλματος

3.2.4 Επιπλέον υποβάθμιση όταν N είναι πολύ λιγότερο από μια περίοδο

3.3 Πιθανότητες συναγερμού εύρεσης σφάλματος

3.3.1 Σταθερά σήματα σε γκαουσιανό θόρυβο ( L=1)

3.3.2 Σταθερά σήματα σε Γκαουσιανό θόρυβο με ολοκλήρωση ανίχνευσης ( L >1 )

3.4 Η διαδικασία έρευνας και απόκτησης χρόνου

3.4.1 Σειριακή αναζήτηση μονού περάσματος (Απλοποιημένη)

3.4.2 Σειριακή μονοφασική αναζήτηση (ολοκληρωμένη)

3.4.3 Σειριακή αναζήτηση πολλαπλής διάρκειας

3.5 Ανίχνευση χρόνου ψευδοτυχαίων σημάτων

3.5.1 Στατιστικές μέτρησης της νωρίς- αργά πύλης

3.5.2 Χρόνος ανίχνευσης βρόχου

3.6 Συγχρονισμός φέροντος

Λειτουργίες πιθανότητας και εκφράσεις πιθανότητας

3.Α.1 Bayes και Neyman – Pearson Εξέταση υπόθεσης

3.Α.2 Συνεκτική υποδοχή σε πρόσθετο λευκό θόρυβο

3.Α.3 Μη συνεκτική λήψη στο AWGN για μη εξασθενημένα σήματα

3.Α.4 Μη συνεκτική λήψη πολλών ανεξάρτητων παρατηρήσεων μη εξασθενημένων σημάτων στο AWGN

3.Α.5 Μη συνεκτική λήψη εξασθενημένων σημάτων Rayleigh σε AWGN

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση σημάτων διάδοσης φάσματος σε πολλαπλού μονοπατιού και πολλαπλής πρόσβασης παρεμβολή

4 .1 Σκοπός

4.2 Όρια του Chernoff και του Bhattacharyya

4.2.1 Όρια για το κανάλι Γκαουσιανού θορύβου

4.2.2 Όριο Chernoff για χρονικά συγχρονισμένη πολλαπλής πρόσβασης παρεμβολή με διάδοση BPSK

4.2.3 Όριο Chernoff για χρονικά συνγχρονισμένη πολλαπλής πρόσβασης παρεμβολή με διάδοση QPSK

4.2.4 Βελτιώνοντας το όριο Chernoff από ένα παράγοντα του 2

4.3 Διάδοση πολλαπλών μονοπατιών : δομή και εκμετάλευση του σήματος

4.4 Πιλοτικά υποβοηθούμενη σύγχρονη πολυδιαδρομική αποδιαμόρφωση

4.4.1 Φράγματα Chernoff στην πιθανότητα σφάλματος για σύμφωνη αποδιαμόρφωση με γνωστές παραμέτρους διαδρομών

4.4.2 Πολυδιαδρομικές συνιστώσες με απόσβεση Rayleigh και Rice

4.5 Ασύμφωνη λήψη

4.5.1 Ημι-βέλτιστη ασύμφωνη πολυδιαδρομική λήψη για M-αδική Διαμόρφωση ορθογωνισμού

4.5.2 Φράγματα επίδοσης

4.6 Επίδοση αναζήτησης  για Ασύμφωνους Μ-αδικούς Αποδιαμορφωτές με ορθογωνισμό

4.7 Επίδοση αναζήτησης  για Ασύμφωνους Μ-αδικούς Αποδιαμορφωτές με ορθογωνισμό

4.7.1 Επίδοση βρόχου ελέγχου ισχύος

4.7.2 Συμπεράσματα για τον ελέγχο ισχύος

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4Α

Φράγμα Chernoff με μη τέλειες εκτιμήσεις παραμέτρων

# Κεφάλαιο 5

Κωδικοποίηση και διεμπλοκή

5.1 Στόχος

5.2 Διεμπλοκή για επίτευξη διαφορισμού

5.3 Κωδικοποίηση εμπρόσθιου ελέγχου σφάλματος-Ένας άλλος τρόπος να εκμεταλλευτούμε το πλεόνασμα

5.3.1 Συνελικτική δομή κώδικα

5.3.2 Αποκωδικοποιητής μεγίστης πιθανοφάνειας-Αλγόριθμοι Viterbi

5.3.3 Γενίκευση του προηγούμενου παραδείγματος

5.4 Αξιολόγηση της επίδοσης του συνελικτικού κώδικα

5.4.1 Πιθανότητα σφάλματος για μειωμένο μπλοκ

5.4.2 Πιθανότητα σφάλματος bit

5.4.3 Γενικεύσεις του υπολογισμού της πιθανότητας σφάλματος

5.4.4 Καταστροφικοί κώδικες

5.4.5 Γενίκευση σε αυθαίρετα κανάλια χωρίς μνήμη-σύμφωνα και ασύμφωνα

5.4.6 Τα φράγματα σφάλματος για δυαδικά δεδομένα εισόδου, συμμετρικά κανάλια εξόδου με ακέραιες μετρικές

5.5 Μια σχεδόν βέλτιστη κατηγορία κωδίκων για πολλαπλή πρόσβαση σύμφωνου διάχυτου φάσματος

5.5.1 Εφαρμογή

5.5.2 Εφαρμογή του Αποκωδικοποιητή

5.5.3 Δημιουργία Συνάρτησης και Επίδοση

5.5.4 Σύγκριση επίδοσης και εφαρμογής

5.6 Ορθογωνικοί συνελικτικοί κώδικες για ασύμφωνη αποδιαμόρφωση Rayleigh σημάτων με απόσβεση

5.6.1 Εφαρμογή

5.6.2 Επίδοση για Rayleigh απόσβεση σε L-διαδρομή

5.6.3 Συμπεράσματα και περιορισμοί

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5Α

Βελτιωμένα φράγματα για συμμετρικά κανάλια χωρίς μνήμη και για το AWGN κανάλι

Παράρτημα 5Β

Άνω φράγμα σε ελεύθερη απόσταση συνελικτικών κωδίκων ρυθμού 1 / n

# Κεφάλαιο 6

Χωρητικότητα, κάλυψη και έλεγχος δικτύων πολλαπλής πρόσβασης διάχυτου φάσματος

6.1 Γενικά

6.2 Έλεγχος ισχύος ανάστροφης ζεύξης

6.3 Πιλοτική παρακολούθηση πολλαπλών κυψελών και ήπια μεταπομπή

6.4 Παρεμβολή άλλων κινητών

6.4.1 Μοντέλο διάδοσης

6.4.2 Λήψη μεμονωμένης κυψέλης-Σκληρή μεταπομπή

6.4.3 Λήψη ήπιας μεταπομπής από την καλύτερη από τις δύο πλησιέστερες κυψέλες

6.4.4 Λήψη ήπιας μεταπομπής από την καλύτερη από πολλαπλές κυψέλες

6.5 Ζητήματα κάλυψης κυψέλης με σκληρή και ήπια μεταπομπή

6.5.1 Σκληρή μεταπομπή

6.5.2 Ήπια μεταπομπή

6.6 Erlang χωρητικότητα των ανάστροφων ζευγών

6.6.1 Erlang χωρητικότητα για πολλαπλή πρόσβαση συμβατικά ανατιθέμενης θυρίδας

6.6.2 Διακοπή επικοινωνίας διάχυτου φάσματος πολλαπλής πρόσβασης-Μοναδική κυψέλη και τέλειος έλεγχος ισχύος

6.6.3 Διακοπή επικοινωνίας με παρεμβολή πολλαπλών κυψελών

6.6.4 Διακοπή επικοινωνίας με μη τέλειο έλεγχο ισχύος

6.6.5 Ένας κατά προσέγγιση ρητός τύπος για τη χωρητικότητα με μη τέλειο έλεγχο ισχύος

6.6.6 Σχεδιασμός της Ελάχιστης Εκπεμπόμενης Ισχύος

6.6.7 Απαιτήσεις Χωρητικότητας για αρχικές προσβάσεις

6.7 Erlang χωρητικότητα εμπρόσθιων ζεύξεων

6.7.1 Κατανομή ισχύος εμπρόσθιας ζεύξης

6.7.2 Επίδραση ήπιας μεταπομπής σε εμπρόσθια ζεύζη

6.7.3 Ορθογωνικά σήματα για χρήστες της ίδιας κυψέλης

6.8 Μείωση της παρεμβολής με πολυτομεακές και κατανεμημένες κεραίες

6.9 Ακύρωση Παρεμβολής

6.10 Επίλογος

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εξάπλωση φάσματος της τεχνολογίας επικοινωνιών έχει χρησιμοποιηθεί στις στρατιωτικές επικοινωνίες για περισσότερο από μισό αιώνα ,πρωτίστως για δυο λόγους: για να ξεπεραστούν τα αποτελέσματα των δυνατών διεθνών παρεμβολών και να γίνει απόκρυψη του σήματος από τον ωτακουστή (συγκάλυψη). Και οι δυο στόχοι μπορούν να επιτευχθούν διαδίδοντας το φάσμα του σήματος ώστε να γίνει σχεδόν πανομοιότυπο από τον παρασιτικό θόρυβο. Μερικά κείμενα , ή τμήματα κειμένων ,πάνω σε αυτό το θέμα έχουν δημοσιευθεί τα τελευταία είκοσι χρόνια . Αυτό το βιβλίο είναι το πρώτο που παρουσιάζει την τεχνολογία εξάπλωσης φάσματος για εμπορικές δικτυακές εφαρμογές.

Σε απάντηση προς μιας ολοένα και επιταχυνόμενης παγκόσμιας απαίτησης για κινητές και προσωπικές φορητές επικοινωνίες ,η εξάπλωση φάσματος ψηφιακής τεχνολογίας έχει επιτύχει πολύ υψηλότερη αποδοτικότητα εύρους ζώνης για μια συγκεκριμένη ασύρματη κατανομή φάσματος ,ώστε να εξυπηρετεί ένα πολύ μεγαλύτερο πληθυσμό χρηστών με χρήση πολλαπλής πρόσβασης, η οποία αναλογεί είτε σε αναλογική είτε σε ψηφιακή τεχνολογία. Ενώ είναι παρόμοια σε εφαρμογή με τους στρατιωτικούς του προκατόχους, η εξάπλωση φάσματος ασύρματων δικτύων επιτυγχάνει βελτίωση της αποδοτικότητας ενσωματώνοντας έναν αριθμό από μοναδικά χαρακτηριστικά που έγιναν δυνατά από χαρακτηριστικά των κυματοειδών σημάτων όπως ο ήπιος θόρυβος. Κυρίαρχος μεταξύ αυτών είναι η παγκόσμια επαναχρησιμοποίηση συχνότητας (το γεγονός ότι όλοι οι χρήστες, κατά πόσο και αν επικοινωνούν είτε βρίσκονται εντός μιας γειτονιάς , είτε εντός μιας μητροπολιτικής περιοχής, είτε εντός ενός έθνους καταλαμβάνουν μια κοινή κατανομή του φάσματος ραδιοσυχνοτήτων). Πέραν αυτού αυξάνοντας την αποδοτικότητα του φάσματος χρήσης, πετυχαίνουμε την εξουδετέρωση του προβλήματος του σχεδιασμού για την διαφορετική κατανομή συχνοτήτων για γειτονικούς χρήστες ή cells. Πολλά άλλα σημαντικά χαρακτηριστικά του συστήματος πολλαπλής πρόσβασης γίνονται εφικτά μέσω της

παγκόσμιας επαναχρησιμοποίησης συχνότητας από απασχολούμενα τερματικά μέσω των ευρείας ζώνης κυματοειδή σημάτων . Το ποιο σημαντικό είναι η γρήγορη και ακριβής ισχύς ελέγχου ,η οποία διασφαλίζει ένα υψηλό επίπεδο ποιότητας εκπομπής καθώς ξεπερνά το <<near-far>> πρόβλημα διατηρώντας ένα χαμηλού επιπέδου ισχύος σήμα για κάθε τερματικό και ως εκ τούτου μια χαμηλού επιπέδου παρεμβολή σε άλλα εν χρήσει τερματικά. Άλλο ένα χαρακτηριστικό είναι η μείωση της εξασθενημένης μετάδοσης μέσω χρήσης ενός Rake(τσουγκράνα) δέκτη , ο οποίος εποικοδομητικά συνδυάζει πολλαπλά εξαρτήματα αντί να τους επιτρέπει να συνδυάζονται καταστροφικά όπως στη στενή ζώνη μετάδοσης. *Ένα τρίτο σημαντικό όφελος είναι το* μαλακό handoff μεταξύ των πολλαπλάσιων σταθμών βάσεων κυττάρων, το οποίο παρέχει τη βελτιωμένη απόδοση *και αποτρέπει χαμένες κλήσεις*

Στα κεφάλαια 2 και 5, αυτό το βιβλίο καλύπτει όλες τις πτυχές της εξάπλωσης εκπομπής φάσματος πάνω σε ένα φυσικό πολλαπλής πρόσβασης κανάλι: σήματος γέννησης ,συγχρονισμού, διαμόρφωσης και κωδικοποίησης διόρθωσης σφάλματος μιας συνεχής ακολουθίας σημάτων εξάπλωσης φάσματος. Το κεφάλαιο 6 σχετίζει και δικτυώνει αυτές τις φυσικές λειτουργίες αυτού του επιπέδου για τη σύνδεση και το δίκτυο λειτουργιών εμπλέκοντας κυψελοειδή κάλυψη ,ικανότητα erlang και έλεγχο δικτύου. Αυτό το περίγραμμα είναι ασυνήθιστο στο να συνδυάζει μερικούς αρκετά ευρείς τεχνικούς κλάδους, οι οποίοι σπανίως καλύπτονται σε μια σελίδα ή ένα κείμενο. Ωστόσο η παρουσίαση είναι καλά ολοκληρωμένη από έναν αριθμό ενοποιημένων τμημάτων. Αρχικά ολόκληρο το κείμενο είναι αφιερωμένο στο θέμα της παγκόσμιας επαναχρησιμοποίησης συχνότητας από πολλούς χρήστες πολλαπλών cells. Επιπλέον, δυο θεμελιώδεις τεχνικές χρησιμοποιούνται σε μια ποικιλία διαφορετικών μορφών μέσω του κειμένου. Η πρώτη είναι η αντιπροσώπευση του τελικού μηχανικού σταδίου της ντετερμινιστικής και της τυχαίας ακολουθίας. Η δεύτερη είναι η χρήση απλών , κομψών άνω ορίων στις πιθανότητες ενός εύρους φάσματος γεγονότων βασισμένων στην απόδοση του συστήματος.

Ωστόσο, όσο αναφορά την επικέντρωση σε ταυτόχρονη ευρείας ζώνης μετάδοση για όλους τους χρήστες πέραν μιας κοινής συχνότητας ραδιοφάσματος, το κείμενο σκοπίμως παραλείπει δυο σημαντικούς τομείς εφαρμογών : τη στενή διαμόρφωση και τις μεθόδους κωδικοποίησης ,συμπεριλαμβανομένου τους σχηματισμούς πολλαπλών σημάτων και καφασωτών κωδικών καθώς και τα άλματα της συχνότητας πολλαπλής πρόσβασης όπου οι κυματομορφές διαφοροποίησης είναι ακαριαία στενές καθόλη τη διάρκεια κάθε άλματος. Επίσης αποφεύγονται γενικότερα παρεκβάσεις στις αρχές της θεωρίας πληροφοριών. Συντομία , παρόλο που το υλικό που καλύπτεται μέσω του κεφαλαίου 5 ως επί το πλείστον έχει εφαρμογή σε στενής ζώνης ψηφιακής μετάδοσης συστήματα ,το βιβλίο κυρίως καλύπτει θέματα που αφορούν ευρείας ζώνης διάδοση φάσματος πολλαπλής πρόσβασης.

Τρεις δυνάμεις με παρακίνησαν να γράψω αυτό το βιβλίο. Ξεκινάει με τις τρεις δεκαετίες διδασκαλίας μου στο πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας. Εκεί, σύμφωνα με την υγιή τάση στα θέματα της μηχανικής επικοινωνιών, προσπαθούσα συνεχώς να κάνω τη θεωρία πιο σχετική με εφαρμογές. Στη συνέχεια υπήρξε η εκπλήρωση μιας εθελοντικής προμήθειας για το ίδρυμα Μαρκόνι , που με τίμησε με την υποτροφία Μαρκόνι το 1990. Το πιο σημαντικό ήταν η συμμετοχή μου σε ένα σημαντικό τεχνολογικό επίτευγμα που αφορούσε την εξέλιξη των συστημάτων επικοινωνίας : η εφαρμογή , η επίδειξη και η τυποποίηση ενός ψηφιακού κυψελωτού διαδιδόμενου φάσματος πολλαπλής πρόσβασης συστήματος με διαίρεση κώδικα. Εγκεκριμένο το 1993 από την τηλεπικοινωνιακή βιομηχανική ένωση, το πρότυπο CDMA IS-95 είναι η ενσάρκωση πολλών από τα αρχικά που παρουσιάζονται σε αυτό το κείμενο. Παρόλο που αυτό το βιβλίο δεν αποσκοπούσε αποκλείστηκα σε αυτό το σκοπό , εξηγεί και δικαιολογεί πολλές από τις τεχνικές που περιλαμβάνονται στο πρότυπο . Τονίζω ωστόσο ότι ο σκοπός μου είναι να παρουσιάσω τις αρχές που υπαγορεύουν την επικοινωνία διάδοσης φάσματος ,το μεγαλύτερο μέρος της αλλά όχι όλη όση εφαρμόζεται σε αυτό το πρότυπο . Δεν είναι για να εξηγήσει λεπτομερώς πως εφαρμόζονται οι αρχές. Αυτό επαφίεται στον συμμετέχοντα μηχανικό με την υπομονή και τη

δέσμευση να σκαλίσει τις λεπτομέρειες και να τις συσχετίσει με τις αρχές που παρουσιάζονται εδώ. Που με φέρνει στο ερώτημα των προαπαιτούμενων για μια βασική κατανόηση. Μερικά εξαιρετικά κείμενα αναφερόμενα σε στατιστικές για την επικοινωνία και σε πληροφορίες για τη θεωρία της υπήρξαν διαθέσιμα για τέσσερις δεκαετίες. Έτσι δεν έχω προσπαθήσει να προβάλλω όλες τις βασικές αρχές. Το κείμενο είναι παρ' όλα αυτά αυτοτελές: οποιαδήποτε παρόμοια αποτελέσματα είναι παράγωγα είτε μέσα στο κείμενο ή προσαρτήματα στο κεφάλαιο όπου πρωτοχρησιμοποιήθηκαν. Ακόμα, ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα προπτυχιακό ιστορικό ηλεκτρολόγου μηχανικού πιθανότατα πάνω στην τηλεπικοινωνιακή μηχανική. Μια πρωτοετής προπτυχιακή εμπειρία πάνω στην θεωρία των επικοινωνιών, στοχαστικές διαδικασίες, ή ανίχνευση και εκτίμηση θεωρίας θα ήταν προτιμότερα. Ως κείμενο για τη βαθμολόγηση του επιπέδου της πορείας, το βιβλίο μπορεί να διαβαστεί σε ένα εξάμηνο και με μερικούς συμβιβασμούς , ακόμα και στο ένα τέταρτο αυτής της περιόδου. Είναι εξίσου κατάλληλο για μια ή δυο βδομάδες εντατικής σύντομης πορείας

Αυτό αφήνει μόνο το εύχρηστο καθήκον να ευχαριστήσω τους πολλούς συνεργάτες που συνέβαλλαν στη δημιουργία αυτού του κειμένου. Πρώτον , από την υπέροχη ομάδα μου από συνάδελφους στην QUALCOMM , ανεβάζοντας την κλίμακα από ώριμους και φημισμένους μηχανικούς σε νεόκοπους απόφοιτους, έχει προέλθει η εφευρετικότητα του συστήματος εννοιών η εφαρμογή των καινοτόμων προσεγγίσεων που μετέτρεψαν το σύμπλεγμα εννοιών σε μια χρήσιμη πραγματικότητα. Μεταξύ των σημαντικότερων συνεργατών, οι Klein Gilhousen, Irwin Jacobs , Roberto Padovani , Lindsay Weaver and Charles Wheatley ξεχώρισαν. Σχετικά με τις πιο εστιασμένες πτυχές του συγγράμματος και της έρευνας η οποία προηγείται αυτού, χρωστάω ένα τεράστιο χρέος στην Audrey Viterbi. Συνέβαλε όχι μόνο ιδεολογικά αλλά αφιερώθηκε ιδιαίτερα στις ρευστές έννοιες και την παραγωγή σταθερότερων αποτελεσμάτων με τη στερεά θεωρητική ή στερεά υποστήριξη προσομοίωσης. Τελικά ήταν η πρώτη που διάβασε , έκανε κριτική και διόρθωσε το χειρόγραφο. Για αρκετά χρόνια , οι πολλές ιδέες και οι καινοτόμες προσεγγίσεις της Ephraim Zehavi παρήγαγαν

αποτελέσματα που συμπεριλαμβάνονται εδώ.  Ο  Jack Wolf , πάντα ένας σαφής ερμηνευτής , πρότεινε μερικές βελτιώσεις. Όσο αναφορά την αναθεώρηση του τελικού κειμένου και την προσφορά των διορθώσεων και των αλλαγών , είμαι υπόχρεος σε περισσότερους ανθρώπους από ότι μπορώ να θυμηθώ. Κύριο λόγο μεταξύ των οποίων είναι οι συνάδελφοί  μου στην QUALCOMM, συμπεριλαμβανομένου τους Joseph Odenwalder, Yu-cheun jou ,Paul Bender,Walid Hamdy, Samir Soliman, Matthew Grob,  John Miller and John McDonough. Οι τρεις τελευταίοι  εξυπηρέτησαν ως πειραματικά υποκείμενα μεταξύ της πρώτης σειράς μεταπτυχιακών φοιτητών στους οποίους δοκίμασα ολόκληρο το κείμενο. Πολύ χρήσιμες αναθεωρήσεις εξωτερικών απόψεων έχουν γίνει από τους Robert Gallager, Bijan Jabbari , Allen Levesque, James Mazo, Raymond  Pickholtz  and Robert  Scholtz. Σε όλους τους παραπάνω και ιδιαίτερα στην Deborah Casher, την απείρως υπομονετική και πολύ συνεργάσιμη βοηθό μου που επεξεργάστηκε όλες τις λέξεις και τις εξισώσεις μου εκφράζω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου.

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 Ορισμός και σκοπός

Η διαμόρφωση της εξάπλωσης φάσματος , μια τεχνική ασύρματης επικοινωνίας ,χρησιμοποιεί ένα εύρος ζώνης μετάδοσης πολλές φορές μεγαλύτερο από το πληροφοριακό εύρος ζώνης ή αυτό του ρυθμού δεδομένων οποιουδήποτε χρήστη. Υποδηλώνουμε το εύρος ζώνης σε hertz με W και το ρυθμό δεδομένων σε bits/second με R. Ο λόγος W/R είναι το εύρος ζώνης του παράγοντα διάδοσης ή της μεταποίησης κέρδους. Τιμές του λόγου W/R που κυμαίνονται από εκατό μέχρι ένα εκατομμύριο (20dB -60dB) είναι κοινότυπες. Οι εφαρμογές του φάσματος διάδοσης εμπίπτουν σε μερικές ευρείς κατηγορίες:

1. Υψηλή τιμή ανοχών σε σκόπιμες παρεμβολές (μπλοκάρισμα) ή ανούσιες παρεμβολές, μέσω της καταστολής από ποσό ανάλογο με το συντελεστή διάδοσης.
2. Η τοποθεσία της θέσης και η ταχύτητα εκτίμησης , με ακρίβεια αυξάνουν αναλογικά το φάσμα διάδοσης.
3. Χαμηλή ανιχνευσιμότητα του σήματος μετάδοσης από έναν ακούσιο δέκτη που μειώνεται με την αύξηση του παράγοντα διάδοσης.

4. Επικοινωνία πολλαπλής πρόσβασης από έναν μεγάλο πληθυσμό σχετικά ασυντόνιστων χρηστών μιας κοινής φασματικής κατανομής στις ίδιες γειτονικές γεωγραφικές περιοχές, με έναν αριθμό ταυτόχρονων χρηστών αναλογικά με τον παράγοντα διάδοσης.

Αυτό το κείμενο θα επικεντρωθεί στην τελευταία περιοχή εφαρμογών. Μπορεί να φαίνεται περίεργο ότι η πολλαπλή πρόσβαση μέσω επιμερισμού ενός κοινού διαδιδόμενου φάσματος μπορεί να ανταγωνιστεί σε φασματική απόδοση ποιο παραδοσιακές τεχνικές πολλαπλής πρόσβασης ,που απομονώνουν χρήστες με το να παρέχουν στον καθένα ένα μοναδικό ασυνεχές πεδίο συχνοτήτων ή

χρονοθυρίδων. Ακόμα αυτό το κείμενο θα αποδείξει ότι αυτή η προσέγγιση μπορεί να επιτύχει μια σημαντικά υψηλότερη απόδοση από οποιαδήποτε άλλη τεχνική πολλαπλής πρόσβασης.

## 1.2 Βασικός περιορισμός της συμβατικής προσέγγισης

Παραδοσιακά, κάθε χρήστης του συστήματος πολλαπλής πρόσβασης είναι προμηθευμένος με ορισμένους πόρους , όπως συχνότητα ή χρονοθυρίδες, ή και τα δυο, που είναι διαχωρισμένα από αυτά άλλων χρηστών. Με αυτή τη μορφή το κανάλι πολλαπλής πρόσβασης μειώνεται σε μια πολλαπλότητα του ενιαίου σημείου σε σημείο καναλιών , υποθέτοντας τέλεια απομόνωση των πόρων μετάδοσης καθενός χρήστη από αυτούς των άλλων χρηστών. Η χωρητικότητα κάθε καναλιού περιορίζεται μόνο από το εύρος ζώνης και το χρόνο που παραχωρείται σε αυτό, την υποβάθμιση που προκαλείται από τον εξωτερικό θόρυβο κυρίως θερμικής προέλευσης , και τη διάδοση ανωμαλιών, που παράγουν εξασθένηση πολλαπλών διαδρομών και αποτελέσματα σκίασης . Προφανώς, τότε, η σύνθετη ικανότητα των μεμονωμένων εξαρτημάτων των καναλιών πολλαπλής πρόσβασης θα ήταν ίση με την απόδοση ενός ενιαίου χρήστη καταλαμβάνοντας ολόκληρη τη σύνθεση των πόρων των ατομικών καναλιών.

Αυτό το συμπέρασμα πάσχει από τρεις αδυναμίες. Στο πρώτο υποθέτει ότι όλοι οι χρήστες μεταδίδουν συνεχώς για το ίδιο μήκος του χρόνου. Αυτό μπορεί να αληθεύει για μετάδοση πακέτων δεδομένων , αλλά συνήθως όχι για κύκλωμα μεταστρεφόμενης μετάδοσης φωνής. Σε μια ομιλία δυο ατόμων , κάθε ομιλητής είναι ενεργός λιγότερο από το μισό χρόνο. Όταν οι πόροι ορίζονται αποκλειστικά , η αναδιανομή του καναλιού για τις γρήγορες περιόδους απαιτεί τη γρήγορη μετατροπή κυκλωμάτων μεταξύ των δυο χρηστών. Και ακόμα και αν αυτό είναι δυνατό , μικρά κενά μεταξύ συλλαβών δεν μπορούν γρήγορα να ανακατανεμηθούν.

Άλλος ένας σημαντικός παράγοντας, ο οποίος έρχεται σε αντίθεση με το συμπέρασμα παραπάνω , είναι η γεωγραφική κατανομή του φάσματος. Μέχρι πρόσφατα , αυτή η ερώτηση εφαρμόστηκε κατά κύριο λόγο με τις ραδιοτηλεοπτικές εκπομπές. Η κατανομή των συχνοτήτων VHF ή UHF μιας τοπικής ραδιοτηλεοπτικής εκπομπής για το Λος Άντζελας δεν μπορούσε να κατανεμηθεί ούτε στο Σαν Ντιέγκο ή στη Σάντα Μπάρμπαρα , καθένα λιγότερο από 200 χιλιόμετρα μακριά αν και μπορούσαν να επαναχρησιμοποιηθούν στο Σαν Φρανσίσκο περισσότερο από 500 χιλιόμετρα μακριά. Ενώ η ραδιοτηλεοπτική είναι μια από ένα σε πολλά κανάλια μετάδοση, με έναν πομπό να εξυπηρετεί πολλούς χρήστες, η πολλαπλή πρόσβαση είναι ένα είδος μετάδοσης από πολλά κανάλια σε ένα , με έναν επίγειο σταθμό βάσης ή δορυφορικό σταθμό κόμβο που λαμβάνει από πολλούς χρήστες. Μέχρι την έλευση της κυψελωτής ασύρματης τηλεφωνίας, τα συστήματα πολλαπλής πρόσβασης συνήθως αποτελούνταν από ένα κελί. Αυτό το κελί κάλυπτε είτε μια αστική περιοχή από ένα μοναδικό σταθμό βάσης σε ένα υψηλό σημείο , ή μια μεγαλύτερη γεωγραφική περιοχή (μερικές φορές σε εθνικό επίπεδο) από έναν μοναδικό δορυφορικό αναμεταδότη προσβάσιμο μόνο από μερικά επίγεια τερματικά. Με την άφιξη των υπηρεσιών κινητής τηλεφωνίας, η επαναχρησιμοποίηση συχνότητας έγινε το κέντρο για την υλοποίηση της πολλαπλής πρόσβασης για ένα πολύ μεγαλύτερο αριθμό χρηστών διασκορπισμένο σε πολλές , συχνά συνεχόμενες μητροπολιτικές περιοχές. Στην βόρεια Αμερική, μια ενιαία κατανομή ενός μεγάλου αριθμού καναλιών έγινε για καθένα από τους δυο περιφερειακούς υπηρεσιακούς παρόχους. Η συχνότητα φάσματος κατανεμήθηκε για όλες τις περιοχές, αστικές και αγροτικές. Οι επιμέρους περιφερειακοί μεταφορείς αφέθηκαν να συντονίσουν τη χρήση των καναλιών εντός των δικών τους περιοχών με τις όμορες περιοχές. Το αναλογικό τεχνολογικό πρότυπο, γνωστό σαν προηγμένο σύστημα κινητού τηλεφώνου (AMPS), υιοθετεί την FM διαμόρφωση και καταλαμβάνει στην υποδοχή του καναλιού μια συχνότητα 30 kHz για κάθε σήμα φωνής. Κατανομές των 12.5MHz κάθε μια για μετάδοση μεταξύ σταθμού βάσης προς κινητό (γνωστή ως μπροστινή σύνδεση ή κατιούσα σύνδεση) και για μετάδοση από κινητό προς το σταθμό βάσης (γνωστή ως αντίστροφη σύνδεση ή ανέβασμα)

παρέχοντας λίγα περισσότερα από 400 κανάλια σε κάθε κατεύθυνση. Καθώς η απαίτηση στις αστικές περιοχές είναι πολλές φορές μεγαλύτερη από αυτή, πολλοί κυψελοειδείς σταθμοί βάσης πρέπει να χρησιμοποιούνται , τοποθετημένοι λιγότερο από 1 χιλιόμετρο χωριστά σε περιοχές με κυκλοφοριακή συμφόρηση. Η δυνατότητα αμοιβαίας παρεμβολής μεταξύ γειτονικών κυψελίδων απαιτεί μια πιο προσεκτική κατανομή προμηθειών σε σχέση με την ακαθάριστη κατανομή που απασχολείται στις τηλεοπτικές εκπομπές. Η εξιδανικευμένη κατανομή των κυψελοειδών καναλιών εικονογραφείται στο σχήμα 1.1, όπου οι κυψέλες φαίνονται σαν συνεχόμενα εξάγωνα. Η ίδια συχνότητα ή χρονοθυρίδες που ποτέ δεν επαναχρησιμοποιήθηκαν σε συνεχόμενες κυψέλες , αλλά μπορεί να επαναχρησιμοποιηθούν από μη συνεχόμενες κυψέλες. Το σχήμα 1.1 δείχνει δυο συνεχόμενα αντίγραφα πολλαπλών κυψελοειδών συμπλεγμάτων, που επαναχρησιμοποιούνται σαν κατασκευαστικό διάγραμμα για να σχηματίσουν ένα αναπαραγόμενο πρότυπο πάνω από μια αυθαίρετα μεγάλη περιοχή. Δυο κυψέλες που απασχολούν την ίδια κατανομή και ως εκ τούτου παρεμποδίζουν η μια την άλλη είναι ως εκ τούτου διαχωρισμένες από περισσότερες από μια κυψελοειδής διαμέτρους. Αυτός ο βαθμός απομόνωσης αρκεί διότι η επίγεια απώλεια δύναμης διάδοσης αυξάνεται σύμφωνα με περίπου την τέταρτη δύναμη της απόστασης. Επιπλέον δυνάμεις παρεμβολών μειώνονται χρησιμοποιώντας τομεακές κεραίες στο σταθμό βάσης, με τον κάθε τομέα να χρησιμοποιεί διαφορετικές μπάντες συχνοτήτων.

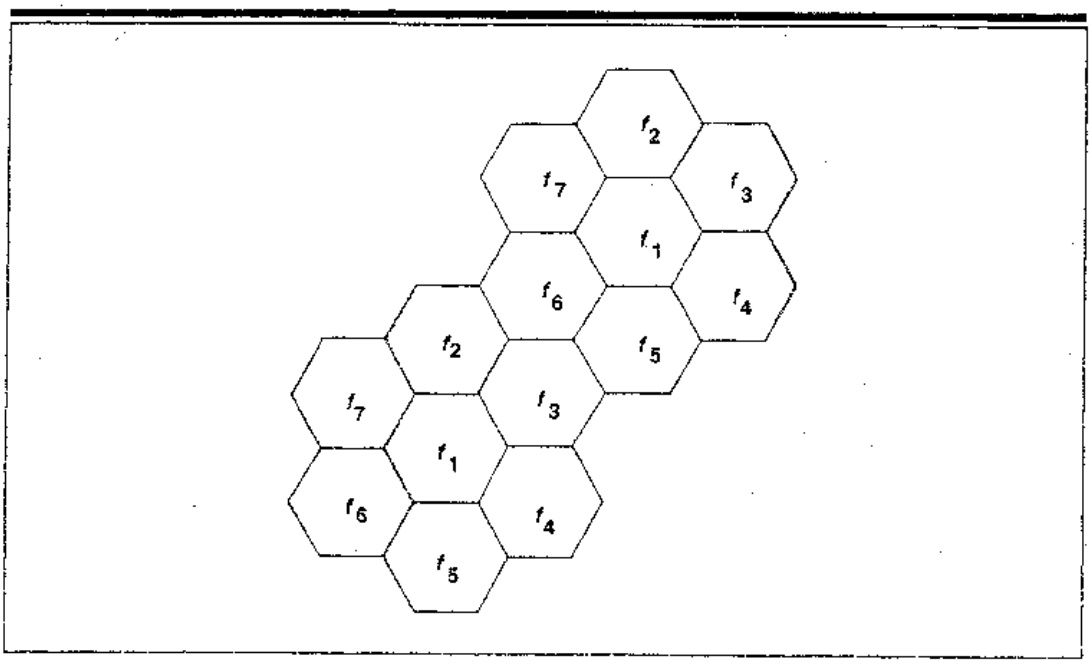



**Figure 1.1** Two contiguous frequency reuse clusters.

Η συνέπεια , ωστόσο, είναι ότι ο αριθμός των καναλιών ανά κυψέλη είναι μειωμένος από τον παράγοντα επαναχρησιμοποίησης (επτά στο παράδειγμα του σχήματος 1.1). Επιπλέον, τα περίπου 400 κανάλια για κάθε υπηρεσία παροχής μειώνονται σε λιγότερα από 60 ανά κυψέλη. Χρησιμοποιώντας τομεακές κεραίες, καθώς μειώνεται η παρεμβολή , δεν αυξάνεται ο αριθμός των υποδοχών . Για παράδειγμα, κάθε τομέας μιας κεραίας αποτελούμενης από τρεις τομείς καταλαμβάνει το ένα τρίτο των υποδοχών.( περίπου 20 ανά τομέα για παράδειγμα). Ακόμα και με αυτές τις προφυλάξεις, η δύναμη της παρεμβολής που λαμβάνεται σε ένα δεδομένο σταθμό βάσης από επαναχρησιμοποιημένα κανάλια σε άλλες κυψέλες είναι μόνο γύρω στα 18 dB παρακάτω της δύναμης του λαμβανόμενου σήματος από τον επιθυμητό χρήστη του ίδιου καναλιού στη δεδομένη κυψέλη [Lee 1989]. Παράγοντες επαναχρησιμοποίησης (συμπλέγματα) τόσο χαμηλοί όσο οι 4 και 3 έχουν θεωρηθεί , αλλά αν ανεκτικές τεχνικές διαμόρφωσης δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν περισσότερο, μειώνοντας την απόσταση μεταξύ κυψελών παρεμβολής, αυξάνεται η παρεμβολή των άλλων κυψελίδων σε μη αποδεκτό σημείο ποιότητας σήματος .

Μια τρίτη πηγή υποβάθμισης γνωστή σε όλα τα συστήματα πολλαπλής πρόσβασης, ειδικά σε επίγεια περιβάλλοντα , είναι το πολλαπλό μονοπάτι. Η ακύρωση φάσης μεταξύ διαφορετικών μονοπατιών διάδοσης μπορεί να προκαλέσει σοβαρή εξασθένιση , επιδεινώνοντας το αποτέλεσμα της παρεμβολής μειώνοντας τη διαθέσιμη ισχύ του σήματος. Αυτό το φαινόμενο είναι ειδικότερα σοβαρό όταν κάθε κανάλι κατανέμεται σε ένα στενό εύρος ζώνης.

Ένα σύστημα πολλαπλής πρόσβασης που να είναι πιο ανεκτικό σε παρεμβολές μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας τεχνικές ψηφιακής διαμόρφωσης στον πομπό (συμπεριλαμβανομένου και των δυο μορφών κωδικοποίησης ,την κωδικοποίηση προέλευσης και την κωδικοποίηση διόρθωσης λάθος καναλιού) και οι αντίστοιχες τεχνικές επεξεργασίας σήματος στον δέκτη. Οι ψηφιακές μέθοδοι από μόνες τους , ωστόσο, δεν θα αλλάξουν τους βασικούς περιορισμούς: τα κανάλια δεν μπορούν να απελευθερωθούν κατευθείαν όταν η εργασία ενός χρήστη παύει προσωρινά, η παύση της συχνότητας περιορίζεται σε μη συνεχόμενες κυψέλες και τα κανάλια στενής ζώνης είναι πιο ευπαθή στην εξασθένιση των πολλαπλών μονοπατιών. Μαζί αυτοί οι παράγοντες μειώνουν την ικανότητα του καναλιού κατά περίπου μια τάξη μεγέθους.

## 1.3 Αρχές της Διάδοσης Φάσματος

Μια τελείως διαφορετική προσέγγιση , που προτάθηκε τουλάχιστον εν μέρει από τις αρχές των πληροφοριών της θεωρίας του Shannon, δεν επιχειρεί να διαθέσει ασυνεχή συχνότητα ή χρονικούς πόρους σε κάθε χρήστη. Αντίθετα αυτή η προσέγγιση διαθέτει όλες τις πηγές σε όλους τους συνεχόμενους χρήστες, ελέγχοντας τη ισχύ που μεταδίδεται από τον καθένα στην ελάχιστη απαιτούμενη για να διατηρήσει ένα δοσμένο λόγο σήματος προς θόρυβο για το απαιτούμενο επίπεδο απόδοσης. Κάθε χρήστης απασχολεί ένα σαν θορύβου σήμα ευρείας ζώνης καταλαμβάνοντας όλη την κατανομή της συχνότητας για όσο χρειάζεται. Με αυτόν τον τρόπο, κάθε χρήστης συμβάλλει στον περιβαλλοντικό θόρυβο επηρεάζοντας όλους τους υπόλοιπους χρήστες, αλλά τουλάχιστον στον λιγότερο δυνατό βαθμό.

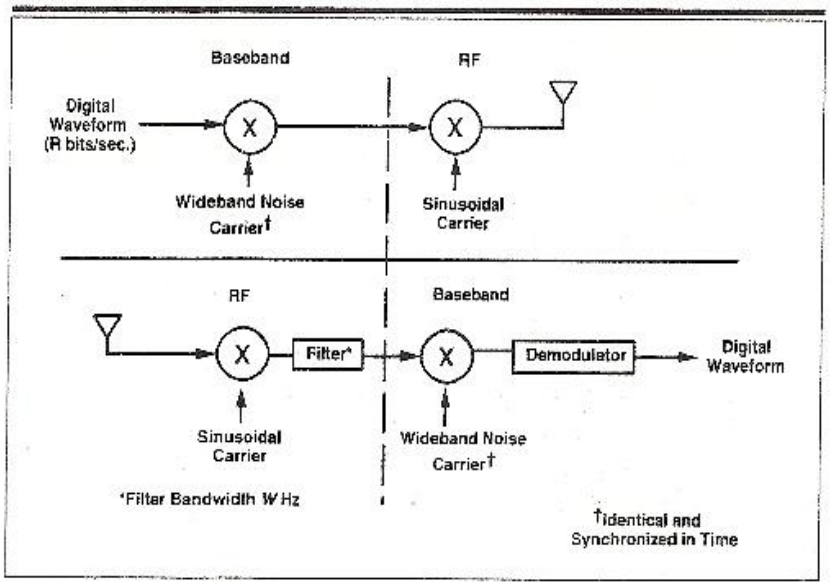



**Figure 1.2** Spread spectrum modem.

Αυτό τοποθετεί όρια στη δυναμικότητα των παρεμβολών, αλλά επειδή η κατανομή των πόρων του χρόνου και του εύρους ζώνης είναι απεριόριστη , η ικανότητα του αποτελέσματος είναι σημαντικά μεγαλύτερη από ότι για συμβατικά συστήματα.

Μια εκτίμηση πορείας της αντίστροφης σύνδεσης επετεύχθη από ένα τέτοιου είδους σύστημα διάδοσης φάσματος πετυχημένο από το παρακάτω ζήτημα. Υποθετικά κάθε χρήστης απασχολεί ένα ευρείας ζώνης φέρον γκαουσιανού θορύβου. Για τους σκοπούς μας υποθέτουμε ότι αυτό το κύμα είναι αποθηκευμένο και στον πομπό και στον δέκτη και ότι η διαμόρφωση και η αποδιαμόρφωση είναι απλά πολλαπλασιαστικές λειτουργίες στη ζώνη βάσης συγχρονισμένες μεταξύ των τοποθεσιών( σχήμα 1.2). Υποθέτουμε περαιτέρω ότι η ισχύς μετάδοσης κάθε χρήστη είναι ελεγχόμενη έτσι όλα τα σήματα λαμβάνονται στο σταθμό βάσης σε ίσα επίπεδα ισχύος. Αν η λαμβανόμενη ισχύς σήματος κάθε χρήστη είναι $P_s$ watts, και ο εξωτερικός θόρυβος είναι αμελητέος, η συνολική ισχύς παρεμβολής, I , που παρουσιάζεται σε κάθε χρήστη αποδιαμορφωμένη είναι

$$I=(k_u - 1)P_s \qquad (1.1)$$

όπου $k_u$ είναι το σύνολο των ίσων ενεργειακά χρηστών.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι η ψηφιακή αποδιαμόρφωση για κάθε χρήστη μπορεί να λειτουργήσει ενάντια στον γκαουσιανό θόρυβο σε επίπεδο ενός bit ενεργειακής πυκνότητας θορύβου του $E_b / I_0$. Αυτή η παράμετρος είναι ο συντελεστής κέρδους του ψηφιακού μόντεμ. Τυπικά ποικίλλει μεταξύ 3 και 9 dB, εξαρτάται από την εφαρμογή, τη χρήση της διόρθωσης λάθους του κώδικα, τις βλάβες των καναλιών όπως το ξεθώριασμα , και φυσικά τις παραμέτρους του ποσοστού σφάλματος. Η πυκνότητα θορύβου που λαμβάνεται από την αποδιαμόρφωση κάθε χρήστη είναι

$$I_0 = I/w \qquad (1.2)$$

Αφού W Hz είναι ολόκληρη η εξάπλωση του εύρους ζώνης των ευρείας ζώνης φερόντων θορύβου, των οποίων η φασματική πυκνότητα υποτίθεται ότι είναι ομοιόμορφη σε αυτό το εύρος ζώνης. Απλά η λαμβανόμενη ενέργεια ανά bit είναι η λαμβανόμενη ισχύς σήματος διαχωρισμένη από τον ρυθμό δεδομένων R σε bits ανά δευτερόλεπτο, έτσι ώστε

$$E_b=P_s/R \qquad (1.3)$$

Συνδυάζοντας την (1.1) μέσω της (1.3) δείχνει ότι κάτω από αυτές τις παραδοχές , ο αριθμός των συνεχόμενων χρηστών που μπορούν να συνυπάρχουν σε μια απομονωμένη κυψέλη σχετίζεται με τον παράγοντα διασποράς και τις απαιτήσεις αποδιαμόρφωσης $E_b / I_0$ από

$$k_u - 1 = \frac{I}{P_s} = \frac{W/R}{E_b/I_o} \qquad (1.4)$$

Ας υποθέσουμε περαιτέρω ότι άλλες δυο δυνατότητες επεξεργασίας προστίθενται στο σύστημα πολλαπλής πρόσβασης με διάδοση φάσματος ώστε να μειωθεί η παρεμβολή. Το πρώτο είναι να σταματήσει η μετάδοση ή τουλάχιστον να μειωθεί ο ρυθμός και η ισχύς της , όταν η φωνητική (ή δεδομένα) δραστηριότητα είναι απούσα ή μειωμένη. Για μια ομοιόμορφη κατανομή πληθυσμού , αυτό μειώνει την ισχύ του μέσου σήματος για όλους τους χρήστες και τελικά την παρεμβολή που λαμβάνεται από κάθε χρήστη. Η χωρητικότητα είναι προσαυξημένη σε αυτήν τη συνολική μείωση του συντελεστή, εφόσον ο

χρήστης πληθυσμός είναι αρκετά μεγάλος ώστε το ασθενές δίκαιο του μεγάλου αριθμού εγγυήσεων όπου η παρεμβολή είναι κοντά στη μέση τιμή της την περισσότερη ώρα. Δηλώνουμε αυτό τον παράγοντα ως το κέρδος της φωνητικής δραστηριότητας, $G_v$ . Πολυάριθμες μετρήσεις πάνω σε αμφίδρομες τηλεφωνικές συνομιλίες [Brady, 1968] έχουν διαπιστώσει ότι η φωνή είναι ενεργή μόνο τα τρία όγδοα του χρόνου , έτσι ώστε $G_v$ = 2.67. Ομοίως , αν υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός των χρηστών είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος πάνω από την απομονωμένη κυψελίδα, χρησιμοποιώντας μια τομεακή κεραία μειώνουμε την παρεμβολή και ως εκ τούτου αυξάνουμε την χωρητικότητα μέσω του παράγοντα κέρδους της κεραίας , $G_A$. Σημειώστε ότι αν οι χρήστες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στην περιοχή, έχουμε τον κλασικό ορισμός του ( δυο διαστάσεων) κέρδους κεραίας. [Lee, 1989], που είναι η λαμβανόμενη ενέργεια στην κατεύθυνση του πομπού διαχωρισμένη από τη μέση λήψη ενέργειας, κατά μέσο όρο πάνω από τον κύκλο . Για μια τριών τομέων κεραία , αυτός ο παράγοντας κέρδους είναι μικρότερος από 3. Αν υποθέσουμε ότι η απώλεια από το ιδανικό κέρδος είναι 1 dB, $G_A$=2.4

Τελικά, για ένα κυψελωτού σύστημα στο οποίο όλοι οι χρήστες σε όλες τις κυψέλες απασχολούν την κοινή φασματική κατανομή των W Hz, πρέπει να αξιολογήσουμε την παρεμβολή που παρουσιάστηκε στην αποδιαμόρφωση κάθε χρήστη από όλους τους χρήστες σε όλες τις άλλες κυψέλες. Ένα μεγάλο γεωμετρικό και στατιστικό επιχείρημα βασισμένο στις απώλειες διάδοσης της επίγειας μετάδοσης, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο πληθυσμό χρηστών σε όλες τις κυψέλες, κάθε ισχύς ελεγχόμενη από τον κατάλληλο σταθμό βάσης, η συνολική παρεμβολή από χρήστες σε όλες τις άλλες κυψέλες ισοδυναμεί περίπου με τα τρία πέμπτα αυτού προκαλούμενα από όλους τους χρήστες στη συγκεκριμένη κυψέλη. Έτσι η ικανότητα της εξίσωσης (1.4) πρέπει να μειωθεί από τον παράγοντα

$$f + 1 = \frac{\text{παρεμβολή από άλλες κυψέλες}}{\text{παρεμβολή από τις δοσμένες κυψέλες}} + 1 \approx 1.6$$

Έτσι, παρουσιάζοντας τη φωνή και τους παράγοντες κέρδους της κεραίας, $G_v$ και $G_A$ , και των άλλων κυψελών του παράγοντα παρεμβολής, f στην έκφραση της χωρητικότητας αποδίδει

$$K_u \approx \frac{W/R}{E_b/I_o} \frac{G_v G_A}{1+f} \qquad (1.5)$$

Με $G_v \approx 2.67$ , και 1 + f = 1.6 , αυτή αποδίδει

$$K_u \approx \frac{4W/R}{E_b/I_o}$$

Με καλά σχεδιασμένα συστήματα διαμόρφωσης, χρησιμοποιώντας κώδικα διόρθωσης λάθους σε συνδυασμό με διπλής ποικιλομορφίας κεραίες και ένα δέκτη συνδιασμού ποικιλόμορφων μονοπατιών στο σταθμό βάσης, είναι δυνατό να επιτευχθεί μια υψηλού επιπέδου απόδοση (χαμηλές τιμές λαθών) με $E_b / I_0$ =6dB. Για το παράδειγμά μας , η επιτυχούσα χωρητικότητα του συστήματος πολλαπλής πρόσβασης ανά κυψέλη είναι περίπου

$K_u$ =W/R χρήστες

Αυτό θα φανεί να είναι σχεδόν μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από αυτή που επετεύχθει με συστήματα που διαθέτουν ασυνεχές πεδίο πόρων σε μεμονωμένους χρήστες, με συνήθως απασχολούμενους επαναχρησιμοποιήσιμους παράγοντες.

Αυτή ήταν μόνο μια ακαθάριστη εκτίμηση , φυσικά, προορίζεται να επισημάνει τις θεμελιώδεις παραμέτρους για τον καθορισμό της χωρητικότητας του χρήστη στη διάδοση φάσματος πολλαπλής πρόσβασης. Πολλή πιο λεπτομερή και εξελιγμένη ανάλυση χρειάζεται για να τελειοποιηθεί και να επικυρωθεί προσεγγίστηκα αυτό το θέμα. Αυτή η ανάλυση είναι και ο σκοπός του υπόλοιπου κειμένου ,με αποκορύφωμα μια πιο ολοκληρωμένη και ακριβή ανάλυση της χωρητικότητας στο κεφάλαιο 6.

## 1.4 Οργάνωση του κειμένου

Το πρώτο θέμα που πρέπει να αντιμετωπιστεί στην ανάπτυξη ενός συστήματος διάδοσης φάσματος είναι η γέννηση ενός σήματος

θορύβου. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με μια ποικιλία τρόπων , αλλά η διαδικασία γέννησης πρέπει να είναι εύκολα υλοποιήσιμη και αναπαραγωγίσιμη ,γιατί η ίδια διαδικασία πρέπει να παράγεται στον πομπό διάδοσης και στο δέκτη και το αντίθετο, ανασυνιστώντας έτσι την αρχική διαδικασία πληροφόρησης. Θα φανεί ότι αυτή η διαδικασία διάδοσης ψευδοθορύβου είναι πιο εύκολα εφαρμόσιμη ως μια γραμμική δυαδική ακολουθιακή γεννήτρια ακολουθούμενη από ένα γραμμικό φίλτρο. Οι απαραίτητες ιδιότητες της ακολουθιακής γεννήτριας και του γραμμικού φίλτρου θα αναπτυχθούν στο κεφάλαιο 2. Είναι εξίσου σημαντικό κατά την πραγματοποίηση ενός συστήματος εξάπλωσης φάσματος για την εφαρμογή μιας συγχρονιστικής τεχνικής που επιτρέπει στο δέκτη το τυχαίο σήμα που δημιουργεί το φέρον σήμα από τον πομπό. Και οι δυο τεχνικές για την αρχική απόκτηση τέτοιου συγχρονισμού και για τον εντοπισμό του μέσω παραλλαγών σύμφωνα με την κίνηση και των τυχαίων αποτελεσμάτων θα αντιμετωπιστούν στο κεφάλαιο 3.

Όπως φαίνεται από τη θεμελιώδη χωρητικότητα ή παρεμβολή στην εξίσωση ανοχής (1.5), όσο χαμηλότερη η αναλογία $E_b / I_0$ κατά την οποία το σύστημα επικοινωνίας μπορεί να λειτουργήσει κανονικά , τόσο υψηλότερη είναι η αποτελεσματικότητα της χρήσης. Η διαμόρφωση και η εγγενής εμπρός της, τεχνική διόρθωσης λάθους θα πρέπει να σχεδιαστεί ώστε να επιτρέπει την αποδιαμόρφωση και τον συναφή διόρθωσης λάθους αποκωδικοποιητή στον δέκτη να λειτουργήσει στο χαμηλότερο $E_b / I_0$ , σταθερά με το απαιτούμενο ποσοστό σφάλματος και ένα πρακτικό επίπεδο πολυπλοκότητας. Αυτό το ζήτημα είναι πολύπλοκο από το γεγονός ότι το διαδιδόμενο σήμα είναι αντικείμενο που υπόκεινται σε πολλαπλό μονοπάτι και ως εκ τούτου σε χαρακτηριστικά ξεθωριάσματος. Η φύση του σήματος της διάδοσης φάσματος παρέχει τρόπους άμβλυνσης αυτών των χαρακτηριστικών υποβάθμισης . Αν η συνοχή φάσης μπορεί να διατηρηθεί μεταξύ πομπού και δέκτη, επιτυγχάνεται καλύτερη απόδοση. Αν όχι , μη συνεκτική αποδιαμόρφωση απαιτείται. Και οι δυο περιπτώσεις θα θεωρηθούν καθώς και μέσο για την επίτευξη συνοχής φάσης. Τέτοιου είδους τεχνικές αποδιαμόρφωσης αντιμετωπίζονται στο κεφάλαιο 4 , και η περεταίρω βελτίωσή τους, μέσω κωδικοποίησης και παρεμβολής,

αντιμετωπίζεται στο κεφάλαιο 5. Με πολλούς τρόπους αυτά τα δυο κεφάλαια ασχολούνται με την ψηφιακή διαμόρφωση και τα συστήματα κωδικοποίησης που είναι πιο γενικά από αυτά που απασχολούνται στα συστήματα διάδοσης φάσματος. Ωστόσο η χρήση θα δίνει έμφαση και στις προκλήσεις και στα πλεονεκτήματα και στις απλουστεύσεις που είναι δυνατά όταν τα σήματα είναι ευρείας ζώνης και έχουν χαρακτηριστικά θορύβου. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των συστημάτων πολλαπλής πρόσβασης με διάδοση φάσματος είναι η ισχύς ελέγχου κάθε χρήστη από τον σταθμό βάσης με τον οποίο επικοινωνεί . Η επίπτωση του ελέγχου της ισχύος με ακρίβεια για την απόδοση είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος και θα εξεταστεί σε αυτά τα κεφάλαια.

Επιστρέφοντας σε ευρύτερα θέματα του συστήματος, στο κεφάλαιο 6 η συνεισφορά της παρεμβολής των χρηστών των άλλων κυψελών και των άλλων σταθμών βάσης θα αξιολογηθεί , λαμβάνοντας υπόψη και τη γεωμετρική εξάρτηση και την τυχαία φύση της επίγειας διάδοσης σήματος. Αυτά τα αποτελέσματα , καθώς και αυτά των κεφαλαίων 4 και 5 πάνω στη διαμόρφωση , την κωδικοποίηση και του ελέγχου απόδοσης ισχύος, θα χρησιμοποιηθούν για να αναλύσουν την κάλυψη των κυψελών και την αληθή χωρητικότητα του συστήματος μετρούμενη σε erlangs ανά hertz του εύρους ζώνης ανά κυψέλη για τις ανάστροφες και προθεσμιακές συνδέσεις. Τεχνικές για τη βελτίωση της απόδοσης, συμπεριλαμβανομένου της παράδοσης μεταξύ κελιών , και τη χρήση τομεακών και διανεμικών κεραιών και η ακύρωση παρεμβολής καλύπτονται επίσης στο κεφάλαιο 6.

# Κεφάλαιο 2

# Τυχαία και Ψευδοτυχαία Γενιά Σήματος

## 2.1 Λόγος

Το κεφάλαιο ένα περιέγραψε τις δυνατότητες των πλεονεκτημάτων των μεταδιδόμενων σημάτων που παρουσιάζονται σαν θόρυβοι και τυχαία. Το να χρησιμοποιηθούν σε πραγματοποιήσιμα συστήματα , τέτοια σήματα πρέπει να κατασκευαστούν από ένα πεπερασμένο αριθμό προεκλεγμένων αποθηκευμένων παραμέτρων . Εξίσου σημαντικό , τα σήματα πρέπει να παράγονται στο δέκτη καθώς και πρέπει να συγχρονίζονται να συμπίπτουν τέλεια με το χρόνο της λαμβανόμενης μετάδοσης . Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με γενιά τυχαίων σημάτων και το επόμενο κεφάλαιο με το πρόβλημα συγχρονισμού .

Επειδή μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός παραμέτρων μπορεί να αποθηκευτεί και στις περιοχές του πομπού και του δέκτη, ακολουθώντας τις καθιερωμένες κατευθυντήριες γραμμές από το θεώρημα του Nyquist ,οι τυχαίες αριθμητικές τιμές της κυματομορφής χρειάζεται μόνο να προσδιοριστούν σαν δείγματα σε χρονικά διαστήματα αντιστρόφως ανάλογα στο εύρος ζώνης που καταλαμβάνεται από τα σήματα. Περνώντας αυτά τα δείγματα μέσω ενός γραμμικού φίλτρου δημιουργεί το σύνολο του χρόνου συνεχούς κυματομορφής ως παρεμβολή των δειγμάτων εισόδου. Κυριολεκτικά τα σήματα θα πρέπει να εμφανιστούν σαν γκαουσιανός θόρυβος, το οποίο θα υπαγόρευε ότι κάθε δείγμα θα προσέγγιζε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή. Ωστόσο αυτό θα απαιτούσε συγκεκριμένα bits ανά δευτερόλεπτο για να ανταποκριθεί στον επιθυμητό ακριβή κβαντισμό. Εμείς θα περιορίσουμε αντί αυτού την πολυπλοκότητα καθορίζοντας μόνο ένα bit ανά δευτερόλεπτο ανταποκρινόμενοι σε μια δυαδική ακολουθία . Ακόμα και με αυτήν την δραστική απλοποίηση, το αποτέλεσμα της χρήσης μιας τέτοιας τυχαίας κυματομορφής είναι περίπου η ίδια σαν να χρησιμοποιήθηκαν κυματομορφές γκαουσιανού θορύβου. Το γεγονός ότι τυχαίες δυαδικές κυματομορφές μπορούν

εύκολα και ευέλικτα να διαφοροποιηθούν με ένα φέρον ψηφιακό σήμα πληροφορίας έχει πολύτιμες πρακτικές συνέπειες.

## 2.2 Ψευδοτυχαίες ακολουθίες

Μια τυχαία ανεξάρτητη τυχαία ακολουθία, γνωστή στην θεωρία πιθανοτήτων σαν ακολουθία Μπερνούλι , αναφέρεται μερικές φορές στη λογοτεχνία εφαρμοσμένης μηχανικής σαν ακολουθία ρήψης νομίσματος όπου κάθε 0 ή 1 ανταποκρίνεται σε κορόνα ή γράμματα, αποτέλεσμα σε μια διαδοχή ανεξάρτητων πειραμάτων ρήψης νομίσματος. Ακόμα και αυτή η απλοποιημένη ακολουθία , ωστόσο , θα απαιτούσε αυθαίρετα μεγάλη χωρητικότητα και στον πομπό και στον δέκτη . Τώρα θα αποδείξουμε ότι οι βασικές ιδιότητες τυχαιότητας της ακολουθίας Bernoulli μπορούμε επιτυχημένα να τις μιμηθούμε από μια μακρά ντετερμινιστική περιοδική ακολουθία που μπορεί να παραχθεί από μια απλή γραμμική λειτουργία προσδιοριζόμενη από ένα μέτριο αριθμό δυαδικών παραμέτρων (bits) . Έτσι , η μόνη τυχαία μεταβλητή είναι το σημείο εκκίνησης της ακολουθίας .

Προτού ερευνήσουμε τη διαδικασία παραγωγής για τέτοιου είδους ψευδοτυχαίες ακολουθίες είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε τις βασικές ιδιότητες τυχαιότητας που πρόκειται να επιτευχθούν από τις απόλυτες ντετερμινιστικές ακολουθίες. Αυτές οι τρεις ιδιότητες ταξινομούνται σαν R1 R2 R3 όπως παρακάτω :

R.1: Οι σχετικές συχνότητες 0 και 1 είναι η κάθε μια ½

R.2: Τα τρέχοντα μήκη (των μηδενικών και των άσσων) είναι όπως αναμενόταν , το μισό όλων των τρεχόντων μηκών μαζί , το ένα τέταρτο είναι του δεύτερου μήκους , το ένα όγδοο είναι του μήκους 3 , ένα κλάσμα $1/2^n$ όλων των τρεχόντων είναι του μήκους n για όλα τα πεπερασμένα n .

R.3: Αν η τυχαία ακολουθία είναι μετατοπισμένη από ένα μη μηδενικό αριθμό στοιχείων η προκύπτουσα ακολουθία θα έχει έναν ίσο αριθμό συμφωνιών και διαφωνιών με την αρχική ακολουθία.

Μια ντετερμινιστικά παραγμένη ακολουθία που σχεδόν ικανοποιεί (R.1) μέσω της (R.3) μέσα σε εξαιρετικά μικρές αποκλίσεις , θα αναφερόταν σε εμάς σαν ψευδοτυχαία ακολουθία . Θα παρέχουμε έναν πιο ακριβή προσδιορισμό αφού λάβουμε υπόψη την διαδικασία στον επόμενο τομέα.

## 2.2.1 Μέγιστο μήκος γραμμικής αλληλουχίας μητρώου μετατόπισης

Θεωρούμε τη ντετερμινιστική γραμμική γεννήτρια δυαδικής ακολουθίας του σχήματος 2.1.

Με κάθε χρόνο του ρολογιού ο κατάλογος μετατοπίζει όλα τα περιεχόμενα στα δεξιά. Η ακολουθία [$\alpha_n$ , ο οποιοσδήποτε ακέραιος] διαδίδεται κατευθείαν με κάθε όρο που παράγεται γραμμικά από τους

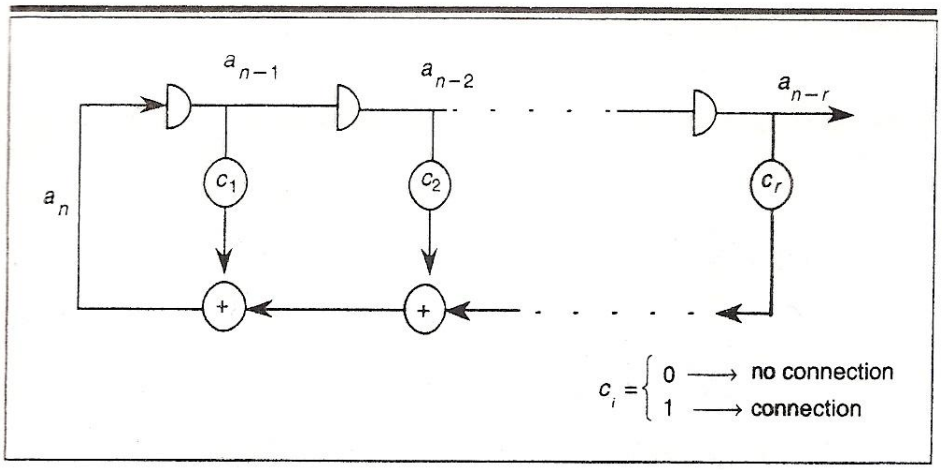



**Figure 2.1** Linear shift register sequence generator.

προαναφερθέντες όρους r σύμφωνα με τη φόρμουλα

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots\ldots\ldots + c_r a_{n-r} = \sum_{i=1}^{r} c_i \; a_{n-i} \; (x+a)^n$ (2.1)

Εδώ όλοι οι όροι είναι δυαδικά (0 ή 1) , από το $c_1$ μέχρι το $c_r$ είναι μεταβλητές σύνδεσης ( 1 για σύνδεση , 0 για καμία σύνδεση ), και συνηθισμένοι κανόνες πολλαπλασιασμού κρατουμένου , αλλά επιπλέον

είναι modulo -2 (ή αποκλειστική OR) , που σημαίνει ότι 0+1=1+0=1 αλλά 0+0=1+1=0 . Με αυτούς τους κανόνες όλες οι λειτουργίες είναι γραμμικές και η διανομή του νόμου a(b + c) = ab+ac εφαρμόζεται . Η ακολουθία ($a_n$) που παράγεται έτσι μπορεί να είναι διπλά άπειρη . Ωστόσο λαμβάνοντας υπόψη μόνο όρους με μη αρνητικό δείκτη , ορίζουμε τη παραγόμενη λειτουργία της ακολουθίας σαν

$$G(D) \triangleq a_o + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n \quad (2.2)$$

όπου D είναι ο παράγοντας καθυστέρησης , και η δύναμη του D κάθε όρου αυτής της πολυουρικής ανταποκρίνεται στον αριθμό των μονάδων ( κύκλοι ρολογιού ) της καθυστέρησης για αυτόν τον όρο .

Συνδυάζοντας την (2.1) και την (2.2) , μπορούμε να μειώσουμε τα τελευταία στην πεπερασμένη σχέση επανάληψης

$$G(D) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} c_i a_{n-i} D^n$$

$$= \sum_{i=1}^{r} c_i D^i [\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-i} D^{n-i}]$$

$$= \sum_{i=1}^{r} c_i D^i [a_{-1} D^{-i} + \ldots + a_{-1} D^{-1} + G(D)]$$

Από αυτό, η G(D) μπορεί να εκφραστεί σαν ποσοστό των πεπερασμένων πολυωνύμων διότι

$$G(D)\,(1 - \sum_{i=1}^{r} c_i D^i (a_{-1} D^{-i} + \ldots + a_{-1} D^{-1})$$

ή

$$G(D) = \frac{\sum_{i=1}^{r} c_i D^i (a_{-i} D^{-i} + \ldots + a_{-1} D^{-1})}{1 - \sum_{i=1}^{r} c_i} \triangleq \frac{g_0(D)}{f(D)} \quad (2.3)$$

όπου

$$f(D) = 1 - \sum_{i=1}^{r} c_i D^i \quad (2.4)$$

ονομάζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της γεννήτριας ακολουθίας κατάλογων μετατόπισης και εξαρτάται αποκλειστικά από το διάνυσμα σύνδεσης $c_1$,……., $c_r$ . Το πολυώνυμο $g_0(D)$ εξαρτάται επίσης από το

αρχικό διάνυσμα κατάστασης $\alpha_{-r}$ ,$\alpha_{-r-1}$ …… , $\alpha_{-1}$ , τα περιεχόμενα του μητρώου ακριβώς πριν ο $\alpha_0$ όρος παράγεται . Μπορεί να γραφτεί σαν

$$g_0(D) = \sum_{i=1}^{r} c_i \left(a_{-i} + a_{-i+1}D + \ldots + a_{-1}D^{i-1}\right)$$

$$= c_1 a_{-1}$$

$$+ c_2(a_{-2} + a_{-1}D) \qquad (2.5)$$

$$+ c_3(a_{-3} + a_{-2}D + a_{-1}D^2)$$

$$+ c_r(a_{-r} + a_{-r+1}D + \ldots + a_{-1} D^{r-1})$$

Σημειώστε ότι από όλες τις συνδετικές μεταβλητές , τουλάχιστον $c_r = 1$ , διαφορετικά η μετατόπιση μητρώου δεν θα χρειαζόταν να έχει r στάδια. Επιπλέον , προς το παρόν θεωρούμε το αρχικό διάνυσμα

$$a_{-r} = 1,\ a_{-r+1} = \ldots = a_{-2} = 0$$

στο οποίο η περίπτωση (2.5) και η (2.3) μειώνονται στο

$$g_0(D) = 1\ , \quad G(D) = \frac{1}{f(D)}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.3) και αρχικά την ειδική περίπτωση (2.6) , προχωράμε για την επίτευξη τριων βασικών ιδιοτήτων της γραμμικής μετατόπισης μητρώου (LSR) ακολουθιών , που περιγράφουμε την (P-1) μέσω της (P-3).

P-1: Κάθε (LSR ) ακολουθία είναι περιοδική με περίοδο

$$P \leq 2^r - 1$$

Απόδειξη : Υπάρχουν ακριβώς $2^r - 1$ μη μηδενικής διάκρισης διανύσματα που μπορούν να είναι τα περιεχόμενα του μητρώου σε οποιαδήποτε δοσμένη στιγμή. Αν τα περιεχόμενα είναι όλα μηδενικά , τότε όλα τα μηδενικά περιεχόμενα θα είναι μηδενικά , κι έτσι η περίοδος θα είναι 1 . Για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση μπορούν να υπάρξουν το πολύ $2^r - 1$ κύκλοι ρολογιού κατά τη διάρκεια των οποίων οι μη μηδενικοί περιέχοντες παράγοντες είναι όλοι σαφείς , για αυτόν το μέγιστο αριθμό πιθανοτήτων. Όταν ένας συγκεκριμένος παράγοντας

επαναλαμβάνεται μετά από $P \leq 2^r - 1$ κύκλων , θα προχωρήσει για να επαναλάβει όλα τα διαδοχικά περιεχόμενα από τη στιγμή που η μελλοντική ιστορία εξαρτάται μόνο από αυτό το αρχικό διάνυσμα , όπως φαίνεται από την (2.3) . Έτσι η ακολουθία είναι περιοδική με περίοδο

$P \leq 2^r - 1$ .

Αυτό μας οδηγεί να ορίσουμε μια μέγιστη ακολουθία (γραμμική) καταλόγων μετατόπισης μήκους (MLSR) σαν LSR ακολουθία της οποίας η περίοδος είναι $P = 2^r - 1$ για όλους τους μη μηδενικούς αρχικούς όρους . Επιπλέον , έχουμε

P-2: Για όλες τις περιπτώσεις πλην των εκφυλισμένων ,η περίοδος P του G(D) είναι η μικρότερη θετική ακέραια τιμή P για την οποία f(D) διαιρεί $1-D^P$ . Ο εκφυλισμός αναφέρεται στην περίπτωση όπου ο $g_0(D)$ και ο f(D) έχουν κοινούς παράγοντες , όπως συζητήθηκε , όταν προτείναμε την γενική περίπτωση .

Απόδειξη της ειδικής περίπτωσης : Πρώτα αποδεικνύουμε αυτό για το αρχικό διάνυσμα της παραγωγικής λειτουργίας $g_0(D) = 1$ , και μεταγενέστερα γενικεύουμε . Δείχνουμε ότι αν G(D) έχει περίοδο P , τότε f(D) διαιρεί $1- D^P$ , και αντιστρόφως ότι αν f(D) διαιρεί $1- D^P$ , τότε G(D) πρέπει να έχει περίοδο P. Έτσι , αν G(D) έχει περίοδο P με $g_0(D)=1$ , μπορεί να γραφτεί σαν

$$\frac{1}{f(D)} = G(D) = (a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1})$$

$$+ D^P(a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1})$$

$$+ D^{2P}(a_0 + a_1D + \ldots a_{P-1}D^{P-1}) + \ldots$$

$$= \frac{a_0 + a_1 D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1}}{1-D^P}$$

Έτσι ,

$$\frac{1-D^P}{f(D)} = a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1} ,$$

Που αποδεικνύει το άμεσο αποτέλεσμα.

Για την αντιστροφή , αν το f(D) διαχωρίζει το 1- $D^P$ , τότε

$$\frac{1-D^P}{f(D)} = a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1} \ ,$$

Έτσι , αφού $g_0(D) = 1$,

$$G(D) = \frac{1}{f(D)} = \frac{a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1}}{1-D^P}$$

$$= (1 + D^P + D^{2P} + \ldots) (a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1}) ,$$

Όπου συνεπάγεται ότι το G(D) είναι περιοδικό με περίοδο P .

Απόδειξη της γενικής περίπτωσης : Τώρα αναγνωρίζουμε ως εκφυλισμένη την περίπτωση όπου $g_0(D)$ και f(D) δεν είναι σχετικά πρωταρχικές. Τότε σύμφωνα με την (2.3) , ο βαθμός της f(D) μειώνεται , υπονοώντας ότι το μήκος μετατόπισης μητρώου μπορεί να μειωθεί . Έτσι για μη παραγωγικές διαδικασίες - που σημαίνει ότι ο $g_0(D)$ και ο f(D) δεν έχουν κανένα κοινό (πολυωνυμικό ) παράγοντα –τροποποιούμε την άμεση απόδειξη για την ειδική περίπτωση . Σημειώστε ότι αν ο G(D) έχει περίοδο P ,

$$\frac{g_0(D)}{f(D)} = G(D) = \frac{a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1}}{1-D^P}$$

έτσι ώστε

$$g_0(D)(1-D^P) = (a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1})f(D)$$

Έτσι από το μοναδικό θεώρημα παραγοντοποίσης , από τη στιγμή που οι $g_0(D)$ και f(D) δεν έχουν κοινούς παράγοντες , f(D) πρέπει να διαιρεί 1- $D^P$ .

Για την αντίστροφη , αν ο f(D) διαιρεί το 1- $D^P$ , τότε όπως και για την ειδική περίπτωση

$$\frac{1}{f(D)} = (a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1})(1 + D^P + D^{2P} + \ldots).$$

Αλλά τώρα ο αρχικός παράγοντας $g_0(D) = g_0 + g_1D + \ldots\ldots + g_{r-1} D_{r-1}$ , με $g_k$ =1 για τουλάχιστον μια τιμή του k#0 . Έτσι ,

$$G(D) = \frac{g_0(D)}{f(D)}$$

$$= g_0(a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1})(1 + D^P + D^{2P} + \ldots)$$

$$+ g_1D(a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1})(1 + D^P + D^{2P} + \ldots)$$

$$+ \ldots$$

$$+ g_{r-1}D^{r-1}(a_0 + a_1D + \ldots + a_{P-1}D^{P-1})(1 + D^P + D^{2P} + \ldots).$$

Έτσι , κάθε όρος του αθροίσματος είναι μια περιοδική ακολουθία με περίοδο P , και το άθροισμα τέτοιων περιοδικών ακολουθιών είναι επίσης περιοδικό με περίοδο P

Αυτό μας οδηγεί στην τρίτη ιδιότητα , που ασχολείται με το να αποφεύγονται χαρακτηριστικά πολυώνυμα f(D) που μπορούν να υπολογιστούν . Για αυτό αν ο f(D) έχει ένα συντελεστή , τότε θα υπάρχει κάποιο αρχικό διάνυσμα $g_0(D)$ που ανταποκρίνεται στο συντελεστή του f(D) . Αυτό προκαλεί έναν εκφυλισμό όπως ορίστηκε νωρίτερα , ο οποίος μειώνει τον r και ως εκ τούτου την περίοδο $P <= 2^r -1$ .

Ειδικότερα ,

P-3: Μια απαραίτητη προϋπόθεση για τον G(D) για την παραγωγή μιας MLSR ακολουθίας (με $P= 2^r -1$) είναι η f(D) με βαθμό r να είναι αμείωτος

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι ο G(D) είναι μια MLSR ακολουθία με $P= 2^r -1$, αλλά f(D) είναι οριζόμενος . Δείχνουμε ότι αυτό οδηγεί στο ασυμβίβαστο συμπέρασμα ότι $P< 2^r -1$ , και ως εκ τούτου αποδεικνύουμε την ιδιότητα από αντίφαση .

Χωρίς απώλεια της γενικότητας , μπορούμε να πάρουμε τον αρχικό παράγοντα σαν 100,....., 0 [$g_0(D) = 1$]: Αν G(D) είναι MLSR , η ακολουθία έχει περίοδο $2^r -1$, και κατά συνέπεια κάθε μη μηδενικός

παράγοντας θα είναι κάποια στιγμή στον κατάλογο και οποιοσδήποτε μπορεί να μεταχειριστεί ως ο αρχικός παράγοντας .

Αν ο f(D) είναι ορισμένος , υπάρχουν πολυώνυμα s(D) και t(D) βαθμών $r_s \geq 1$ και $r_t \geq 1$ όπως αυτό f(D) =s(D)t(D), όπου $r=r_s+r_t$ . Τότε μετά από την εκτέλεση μερικής επέκτασης κλάσματος , λαμβάνουμε

$$G(D) = \frac{1}{f(D)} = \frac{a(D)}{s(D)} + \frac{\beta(D)}{t(D)}$$

με

$$\text{περίοδο} \left[\frac{a(D)}{s(D)}\right] \leq 2^{r_s} - 1 \text{ , περίοδος} \left[\frac{\beta(D)}{t(D)}\right] \leq 2^{r_t} - 1$$

Έτσι

$$\text{Περίοδο}[G(D)] \leq \text{περίοδος} \left[\frac{a(D)}{s(D)}\right] \text{περίοδος} \left[\frac{\beta(D)}{t(D)}\right]$$

$$\leq (2^{r_s} - 1)(2^{r_t} - 1) = 2^r - 2^{r_s} - 2^{r_t} + 1 \leq 2^r - 3 ,$$

Το οποίο είναι μια αντίφαση . Έτσι το f(D) πρέπει να είναι αμείωτο .

Δυστυχώς , το αν η P-3 είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση , δεν είναι σαφές. Για ένα αντιπαράδειγμα , πάρτε r=4 με επιθυμητό $P=2^4 -1 =15$. Θεωρείστε $f(D)=1 +D +D^2 +D^3 +D^4$ , που είναι αμείωτο . Ωστόσο , f(D) διαιρεί $1 - D^5$ και έτσι έχει περίοδο 5 αντί για 15. Για να πάρουμε περίοδο 15 , το πρώτο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντί το τέταρτης τάξης αμείωτο πολυώνυμο $f(D) =1 +D +D^4$, το οποίο διαιρεί $1- D^{15}$ αλλά κανένα πολυώνυμο $1- D^{\kappa}$ για κ<15 .

Τέτοια αμείωτα πολυώνυμα βαθμού r που παράγουν μια MLSR ακολουθία περιόδου $P= 2^r -1$ ονομάζονται θεμελιακά . Ευτυχώς τα θεμελιακά πολυώνυμα υπάρχουν για όλους τους βαθμούς r >1 . Στην πραγματικότητα με χρήση της αλγεβρικής θεωρίας πολύ πιο πέρα από το πεδίο των αναγκών μας εδώ , υπάρχει μια πολύ χρήσιμη σχέση για τον αριθμό των θεμελιωδών πολυωνύμων του βαθμού r :

$$N_P(r) = \frac{2^r - 1}{r} \prod_{i=1}^{1} \frac{P_i - 1}{P_i}$$

$\{P_i$ , i= 1,2, . . . , J} είναι ο ίδιος αρχικός αποσυνθετής του $2^r -1$, i.e. ,

$$2^r - 1 = \prod_{i=1}^{J} P_i^{e_i},$$

Όπου $e_i$ είναι ο ακέραιος.

Έτσι ,για παράδειγμα , για r =2 μέσω 6 έχουμε , αντίστοιχα ,

r =2, $2^r - 1 = 3$, $N_P(2) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$;

r = 3, $2^r - 1 = 7$, $N_P(3) = \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{7} = 2$;

r = 4, $2^r - 1 = 15 = 5 \cdot 3$ $N_P(4) = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = 2$;

r = 5, $2^r - 1 = 31$, $N_P(5) = \frac{31}{5} \cdot \frac{30}{31} = 6$;

r = 6, $2^r - 1 = 63 = 7 \cdot 3^2$, $N_P(6) = \frac{63}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} = 6$.

Βρίσκοντας θεμελιώδη πολυώνυμα γίνεται πιο δύσκολο καθώς το r γίνεται μεγαλύτερο , αλλά οι πίνακες υπάρχουν μέχρι πολύ μεγάλες τιμές του r . Τυπικά οι ενδιαφερόμενες τιμές για το r είναι μεταξύ του 10 και του 50 .

## 2.2.2 Ιδιότητες τυχαιότητας των MLSR ακολουθιών

Τώρα προχωράμε να αποδείξουμε ότι οι MLSR ακολουθίες σχεδόν ικανοποιούν τις ιδιότητες τυχαιότητας των ακολουθιών ρίψης νομίσματος όπως απαριθμούνται στην αρχή του κεφαλαίου 2.2 . Πρέπει να αναγνωρίσουμε από την αρχή ότι οι παράμετροι της διαδικασίας παραγωγής είναι ντετερμινιστικές. Οι μόνες τυχαίες παράμετροι είναι οι όροι του r του αρχικού διανύσματος ή ισοδύναμα η αλλαγή της ώρας .

### R.1 Ιδιότητα ισορροπίας

Υποθέτουμε ότι εξετάζουμε το πρώτο στάδιο του μητρώου της εικόνας 2.1 καθώς όλη η ακολουθία αλλάζει μέσα από αυτό. Μπορούμε να το δούμε αυτό σαν το τελευταίο ψηφίο των τρισδιάστατων περιεχομένων του παράγοντα r σε κάθε κύκλο ρολογιού. Απαριθμώντας τα περιεχόμενα παράγοντες της αλλαγής μητρώου καθώς παράγεται μια

ακολουθία MLSR ισοδυναμεί να απαριθμήσει όλους τους δυνατούς $2^r$ -1 δυαδικούς παράγοντες του μήκους r , εξαιρουμένων των μηδενικών . Αλλά αν συμπεριλάβουμε όλους τους μηδενικούς , θα είχαμε μια ακριβώς ισορροπημένη ακολουθία : Μεταξύ όλων των $2^r$ δυαδικών παραγόντων ,ακριβώς οι μισοί είναι άρτιοι και οι άλλοι μισοί περιττοί . Επειδή εξαιρούμε όλους τους μηδενικούς , η ισορροπία αντισταθμίζεται από 1 στους $2^r$ . Έτσι από τους $2^r$ -1 όρους της MLSR ακολουθίας , οι $2^r$ -1 είναι άσσοι και οι $2^{r-1}$ -1 είναι μηδενικά . Αν χρησιμοποιήσουμε τον αρχικό παράγοντα ως τυχαίο ή να αναλάβουμε ισοδύναμα ένα τυχαία επιλεγμένο σμείο εκκίνησης , οι πιθανότητες που σε ένα συγκεκριμένο κύκλο ρολογιού η παραγωγή καταλόγων μετατόπισης είναι μηδέν ή ένα αντίστοιχα , είναι

$$\Pr(0) = \frac{2^{r-1}-1}{2^r-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{P}\right)$$

$$\Pr(1) = \frac{2^{r-1}}{2^r-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{P}\right)$$

Έτσι η ανισορροπία είναι 1/P. Για r= 10,30, και 50 , 1/P είναι περίπου $10^{-3}$ , $10^{-9}$, και $10^{-15}$ , αντίστοιχα .

## R.2: Η ιδιότητα του τρέχοντος μήκους

Συνεχίζουμε όπως για την R.1 , αλλά τώρα εξετάζουμε n+2 αποτελεσματικά στάδια του μητρώου , όπου $n \leq r - 2$. Θεωρούμε όλα τα περιεχόμενα των απόλυτων μορφών

$0x_1x_2 \ldots x_n0$ και $1x_1x_2 \ldots x_n1$

Από τις $2^n$ πιθανότητες σε κάθε περίπτωση , θα υπάρχει μια που θα έχει τρέχον μήκος ακριβώς n : όλοι οι άσοι του μήκους n στην πρώτη περίπτωση , και όλα τα μηδενικά του μήκους n στη δεύτερη . Έτσι από όλες τις $2^{n+1}$ πιθανότητες για τις δυο περιπτώσεις , ακριβώς δυο έχουν τρέχον μήκος n . Κατά συνέπεια , ένα κλάσμα $2^{-n}$ έχει τρέχον μήκος n για $1 \leq n \leq r - 2$ . Τώρα θεωρούμε μήκοι r -1 . Για να συμβεί αυτό , ολόκληρα τα περιεχόμενα του μητρώου πρέπει να είναι σε κάποιο σημείο είτε

$$\frac{\overset{\mathbf{00\ldots0}}{\longleftrightarrow}}{\underset{\mathbf{r-1}}{\longleftrightarrow}}\ \mathbf{1} \qquad \text{ή} \qquad \frac{\overset{\mathbf{11\ldots1}}{\longleftrightarrow}}{\underset{\mathbf{r-1}}{\longleftrightarrow}}\ \mathbf{0}$$

Και στις δυο περιπτώσεις , αφού όλα τα περιέχοντα στάδια r είναι συγκεκριμένα , μπορεί να υπάρξει μόνο μια πιθανή παραγωγή . Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να είναι ένας άσσος. Διαφορετικά , θα εισαγάγαμε το στάδιο όλων των μηδενικών , το οποίο αποκλείεται . Στην δεύτερη περίπτωση , πρέπει επίσης να είναι ένας άσσος . Αυτός είναι ο μόνος τρόπος που ο παράγοντας όλων των άσσων μπορεί να λειτουργήσει , ο οποίος είναι ένας από τους $2^r$ -1 προάγοντες κατάστασης που πρέπει να λειτουργήσουν στην ακολουθία . (Σημειώστε ότι για αυτήν τη δεύτερη περίπτωση , η επόμενη πρέπει να ακολουθείται από μηδέν , διαφορετικά , το στάδιο όλων των άσσων θα επαναληφθεί επ' αόριστον .) Έτσι , υπάρχει μόνο ένα δυνατό τρέχον μήκος r -1 και ένα πιθανό τρέχον μήκος r , το καθένα λειτουργώντας με σχετική συχνότητα $1/2^{(r-1)}$ .

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η σχετική συχνότητα του τρέχοντος μήκους n (μηδενικά ή άσσοι ) είναι $1/2^n$ για όλα τα $n \leq r - 1$ και $1/2^{(r-1)}$ για n>r. Σημειώστε ως έλεγχο , ότι το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων είναι η ενότητα.

## R.3 : Ιδιότητα καθυστέρησης και πρόσθεσης

Θεωρήστε οποιεσδήποτε δυο αλλαγές κύκλων ρολογιού μιας MLSR ακολουθίας . Αν πάρουμε ολόκληρη την ακολουθία με μήκος P= $2^r$ -1 και την αλλάξουμε με έναν αυθαίρετο αριθμό κύκλων τ< P , λαμβάνουμε μια νέα ακολουθία που είναι η ίδια η MLSR με ακόμα έναν άλλο παράγοντα εκκίνησης και ως εκ τούτου ένα άλλο αρχικό σημείο . Συμβολικά χρησιμοποιώντας τα σύμβολα του πολυώνυμου της (2.2) , υποδηλώνουμε την αρχική ακολουθία κατά $G_0(D)$ , την αλλαγμένη ακολουθία κατά $G_\tau(D)$ , και οι δυο μήκους $2^r$ -1 , και τις αρχικές τους καταστάσεις $g_0(D)$ και $g_\tau(D)$ , όπως ορίστηκε από την (2.5) . Τώρα από τη στιγμή που οι $G_0(D)$ και $G_\tau(D)$ παράγονται γραμμικά από τον $g_0(D)$ και τον $g_\tau(D)$ ,σύμφωνα με την (2.3) ,

$$G_0(D) = \frac{g_0(D)}{f(D)'} \qquad G_\tau(D) = \frac{g_\tau(D)}{f(D)'}$$

όπου f(D) είναι η χαρακτηριστική πολιωνιμική της MLSR . Επιπλέον , αφού οι πολυωνυμικές λειτουργίες είναι γραμμικές , έπεται από το διανεμητικό νόμο ότι το μόντουλο -2 του αθροίσματος των δυο MLSR ακολουθιών έχει πολυώνυμο

$$G_0(D) + G_\tau(D) = \frac{g_0(D)+g_\tau(D)}{f(D)}$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να παραχθεί από την κατάσταση του αρχικού πολυώνυμου $g_0(D)$ + $g_\tau(D)$ ( που τα συστατικά του είναι το μόντουλο-2 άθροισμα των δυο αντίστοιχων συστατικών ) , αλλά αυτό είναι το ίδιο άλλος ένας έγκυρος παράγοντας. Ως εκ τούτου , η ακολουθία που παράγεται έτσι , της οποίας το παραγόμενο πολυώνυμο είναι $G_0(D)$ + $G_\tau(D)$ είναι το ίδιο μια αλλαγή χρόνου της ίδιας της MLSR ακολουθίας . Αυτή είναι η ιδιότητα της καθυστέρησης και πρόσθεσης .

Χρησιμοποιώντας αυτή και την ιδιότητα R.1 , έπεται ότι οι δυο ακολουθίες $G_0(D)$ και $G_\tau(D)$ , κάθε μήκους $2^r$ -1 , διαφέρει στις $2^{r-1}$ θέσεις και συμφωνεί στις $2^{r-1}$ -1. Αυτό επειδή το μόντουλο -2 άθροισμά τους έχει ένα άσσο για κάθε διαφωνία και ένα μηδενικό για κάθε συμφωνία και είναι το ίδιο μια MLSR ακολουθία , η οποία πρέπει επομένως να έχει την σχεδόν ισορροπημένη ιδιότητα R.1 .

Οι R.1 και R.3 μπορούν επίσης να δηλωθούν σε όρους χρονικών μέσων όρων και συσχετισμών βασισμένοι στη χαρτογράφηση κάθε μηδενικού σε a+1 πραγματικής αριθμητικής αξίας και κάθε άσσο σε a-1 πραγματικής αριθμητικής αξίας . Με αυτούς τους όρους έχουμε ιδιότητες

$$(R.1)': \frac{1}{P}\sum_{n=1}^{P} a_n = -\frac{1}{P'} \qquad (2.9)$$

όπου $a_n$ είναι η πραγματική ισοδύναμη αξία του n- οστού όρου της MLSR ακολουθίας , $a_n$ . (2.9)ακολουθεί από τη σχεδόν ισορροπημένη ακολουθία , θα ήταν μηδέν για τέλεια ισορροπία .

Παρόμοια για τ # 0,

$$(R.3)': \frac{1}{P}\sum_{n=1}^{P} a_n \cdot a_{n+r} = -\frac{1}{P'} \qquad (2.10)$$

Εδώ όπως προηγουμένως σημειώθηκε , ο πραγματικός πολλαπλασιασμός παίρνει τη θέση του μόντουλο-2 επιπλέον με τους ίδιους κανόνες (+ . - = - . + = - ; + . + + - . - = + ) .

(2.9) είναι ο χρονικός μέσος όρος και (2.10) είναι η χρονική συσχέτιση . Ωστόσο οι ιδιότητες (R.1)' και ( R.3)' ως σύνολα μέσων όρων αντί για χρονικά σύνολα . Σημειώστε ότι η (ντετερμινιστική ) MLSR ακολουθία μετατρέπεται σε μια στατική εργοδική ακολουθία αν χρησιμοποιήσουμε τον αρχικό παράγοντα ( ή το χρόνο της παρατήρησης ) σαν ένα ομοιόμορφα τυχαία κατανεμημένο παράγοντα ( ή μεταβλητό χρόνο ).

### 2.2.3 Συμπέρασμα

Βασιζόμενοι στην αρχική έκθεση του Golomb , έχουμε έτσι δείξει ότι με την μικρή ανισορροπία της 1/P ( λιγότερο από ένα μέρος στο εκατομμύριο για r>20 ) , μια MLSR ακολουθία ταυτίζεται από μια Bernoulli ή ρίψης νομίσματος δυαδική ακολουθία του , τουλάχιστον όσον αναφορά τις ιδιότητες τυχαιότητας (R.1) μέσω ( R.3) , όσο ο αρχικός παράγοντας ή ο αρχικός χρόνος επιλέγονται τυχαία.

## 2.3 Παραγωγή ψευδοτυχαίων σημάτων από ψευδοτυχαίες ακολουθίες.

Στο τέλος του τελευταίου κεφαλαίου , προτείναμε τη χαρτογράφηση από δυαδικά λογικά σύμβολα , 0 και 1 , σε πραγματικές αξίες +1 και -1 . Τώρα συνδυάζουμε αυτές τις φυσικές κυματομορφές , δημιουργώντας το υποτυπώδες φασματικό ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα που φαίνεται στην εικόνα 2.2. Οι τυχαίοι δυαδικοί αριθμοί μετατρέπονται

σε μια κυματομορφή θορύβου με την αυξομείωση ενός περιοδικού ρεύματος ώθησης με περίοδο $T_c$ , που είναι η περίοδος ενός κύκλου ρολογιού μιας ψευδοτυχαίας ακολουθίας που λειτουργεί ως παράγωγος. $T_c$ ονομάζεται επίσης το τσιπ διάρκειας , όπου το τσιπ αναφέρεται στο σήμα ανταπόκρισης σε έναν ανεξάρτητο όρο της τυχαίας ακολουθίας. Αυτό το ενεργειακό σήμα για κάθε τσιπ έχει οριστεί ως $E_c$ . Το τσιπ έχει συσταθεί από τον δυαδική τυχαία τιμή ακολουθίας (+ 1 ή -1 ) πολλαπλασιασμένη από την τιμή των δυαδικών δεδομένων κατά την περίοδο $T_c$ ( με 0 ή 1 επίσης χαρτογραφημένο σε +1 ή -1 ) . Η διάρκεια της ακολουθίας δεδομένων είναι τυπικά ένας πολλαπλασιασμός της διάρκειας του τσιπ , έτσι η τιμή της ακολουθίας τσιπ $x_n(k)$ τυπικά θα παραμείνει συνεχής κατά τη διάρκεια μερικών τσιπς (τιμές του n). Για τώρα θα πάρουμε την ακολουθία δεδομένων για να αποκωδικοποιηθεί . Ωστόσο αυτό το μοντέλο εφαρμόζεται σε ένα σύστημα που χρησιμοποιεί τη διόρθωση σφαλμάτων κωδικοποίησης πλεονασμού όπου σε αυτήν την περίπτωση $x_n(k)$ είναι η τιμή (+ - 1) κατά τη διάρκεια ενός τσιπ $T_c$ ( το οποίο παραμένει συνεχές πάνω από όλα τα τσιπς κατά τη διάρκεια του συμβολικού κώδικα ). Ο δείκτης k χρησιμοποιείται για να δείξει ότι η γεννήτρια διαμόρφωσης και παραγωγής σήματος ανήκουν στον kνιοστό χρήστη του συστήματος πολλαπλής πρόσβασης.

Ο διαμορφωτής ώθησης είναι φυσικά μια εικονική κατασκευή . Παρέχει ένα βολικό γραμμικό μοντέλο της διαδικασίας παραγωγής κυματομορφής . Στη εικόνα 2.3 , εξετάζουμε τη δεύτερη σειρά στατιστικών του τραίνου ώθησης τυχαία διαμορφωμένο κατά +1 και -1 τιμών του προϊόντος των δεδομένων και της τυχαίας ακολουθίας. Οι ωθήσεις (Ντιρακ δέλτα λειτουργίες) είναι μη φυσικές και αντιπροσωπεύουν το όριο ενός πολύ στενού , πολύ ψηλού παλμού , καθώς το πλάτος του παλμού Δ πλησιάζει το μηδέν και το εύρος του $\sqrt{E_c}/\Delta$ πλησιάζει το άπειρο . Δείχνουμε τη μη μηδενική Δ περίπτωση στην εικόνα 2.3b . Από αυτό και τις ιδιότητες R-1 R-3 του τελευταίου τομέα , λαμβάνουμε το παράγοντα συσχέτισης R(τ) για τη μη μηδενική Δ περίπτωση στην εικόνα 2.3c. Τελικά αφήνοντας Δ→ 0, λαμβάνουμε το παράγοντα συσχέτισης του τραίνου ώθησης στην εικόνα 2.3d. Αυτό

είναι από μόνο του μια ενιαία ώθηση ή Ντιρακ δέλτα λειτουργία της περιοχής $E_c/T_c$ για τ=0 , το οποίο είναι ισοδύναμο στο λευκό θόρυβο

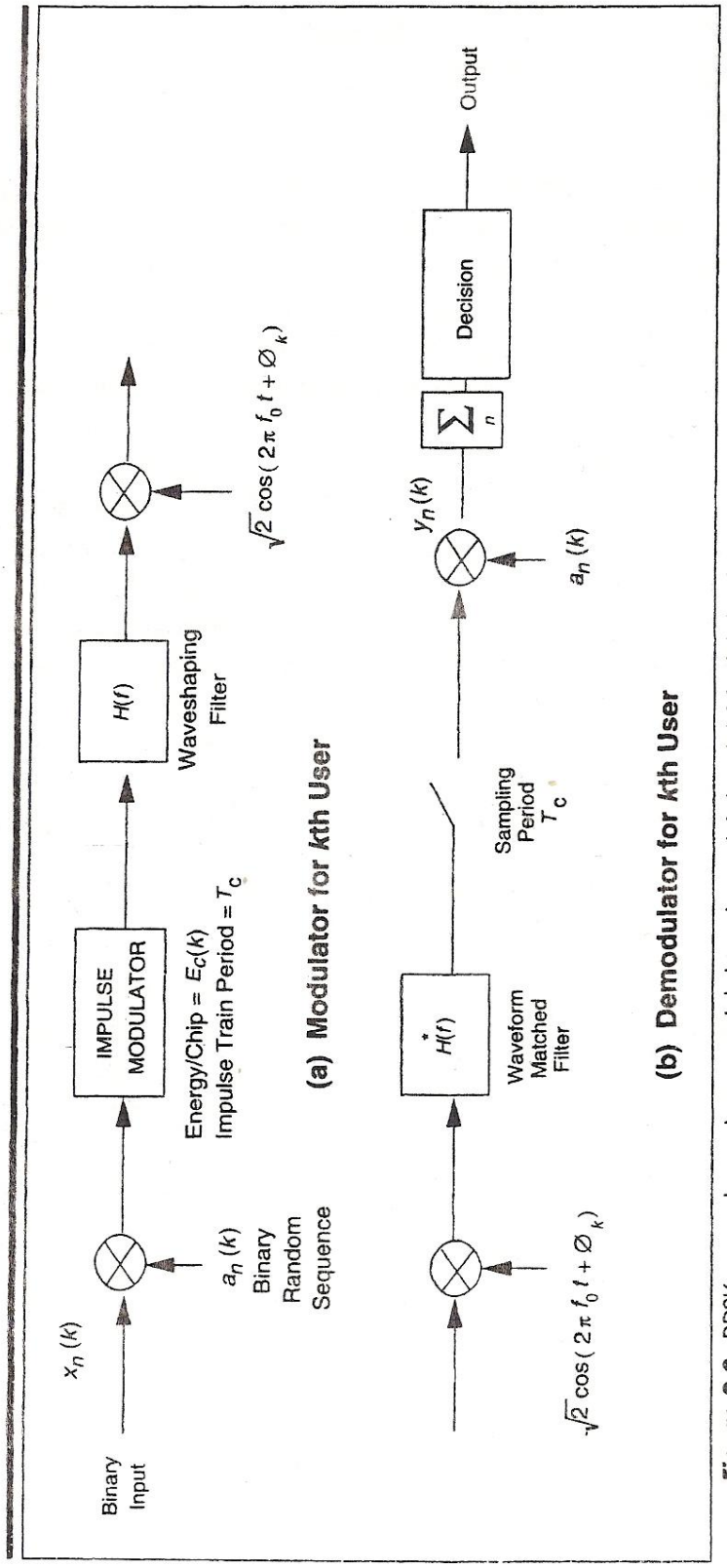



**Figure 2.2** BPSK spread spectrum modulator–demodulator. (a) Modulator for $k$th user. (b) Demodulator for $k$th user.

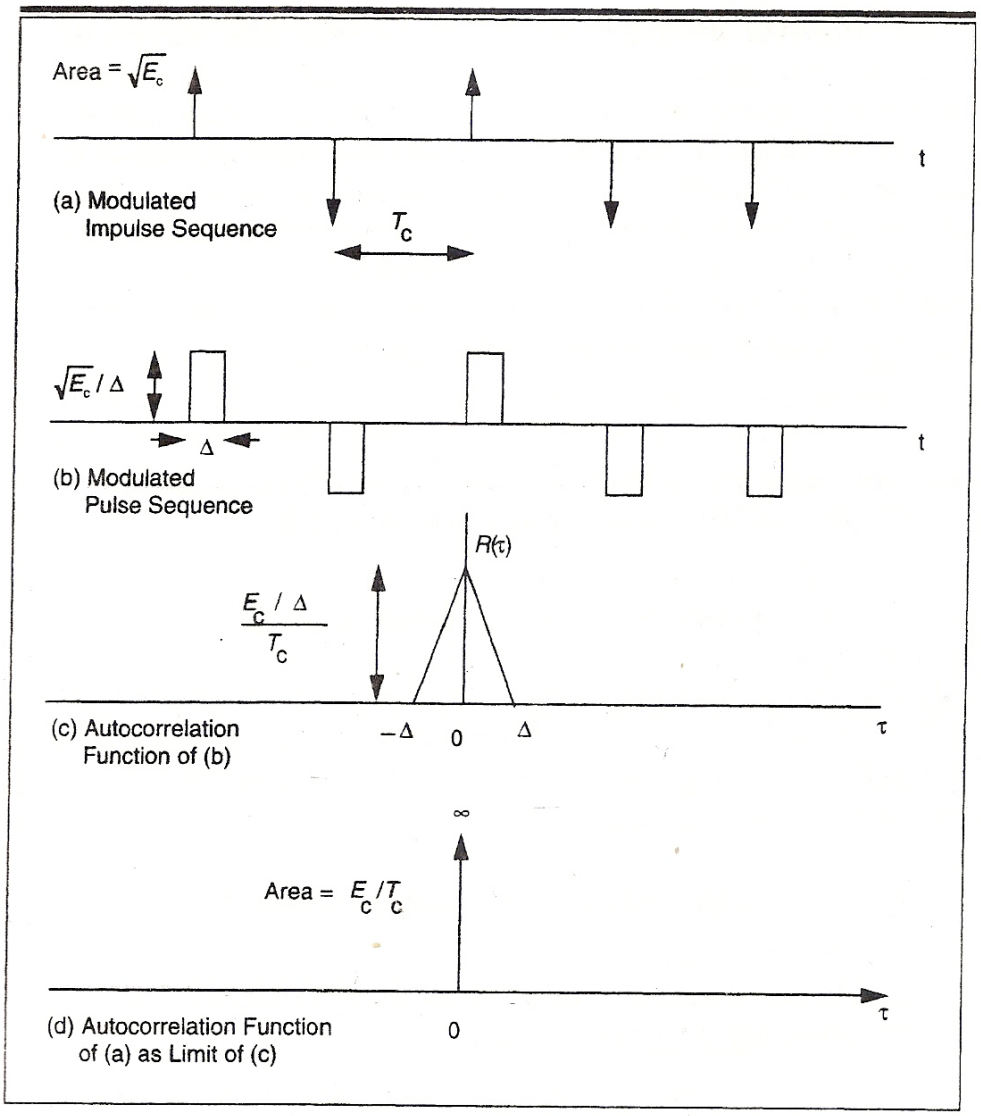



**Figure 2.3** Correlation function computation for randomly modulated pulse and

μιας δυο πλευρών πυκνότητας $E_c/T_c$ watts/Hz$^2$ . Ως εκ τούτου ο όρος ψευδοθόρυβος χρησιμοποιείται για την περιγραφή ενός παραγόμενου σήματος όπως είναι στην εικόνα 2.2. Το γραμμικό φίλτρο με τον παράγοντα μετάδοσης H(f) και την κρουστική απόκριση h(f) λειτουργεί για να περιέχει το σήμα στην επιθυμητή φασματική κατανομή . Ο τελευταίος τομέας είναι στον πομπό είναι αναμεταροπή στην επιθυμητή κεντρική συχνότητα.

Στην παρουσία του πρόσθετου γκαουσιανού θορύβου ο λήπτης λειτουργεί τις αντιστοιχισμένες εργασίες που δείχνονται στην εικόνα 2.2b . Αυτές περιλαμβάνουν αντιστοιχισμένο φιλτράρισμα κάτω μετατροπής με τη σύνθετη κλίση του φίλτρου μετάδοσης H*(f) , και

δειγματοληψίας στα χρονικά διαστήματα του τσιπ. Το αντιστοιχισμένο φίλτρο μεγιστοποιεί το σήμα εξόδου σε θόρυβο μόνο όταν η παρεμβολή είναι πρόσθετος λευκός γκαουσιανός θόρυβος . Ο περιβαλλοντικός θόρυβος μπορεί να ληφθεί για να γίνει λευκός γκαουσιανός. Ωστόσο η παρεμβολή που προκαλείται από άλλους χρήστες που μοιράζονται το συγκρότημα του χρήστη k δεν είναι λευκός , αφού όλοι υποτίθεται χρησιμοποιούν την ίδια φασματική διαμόρφωση φίλτρου . Από την άλλη θα υπάρχουν ακόμα άλλοι χρήστες σε συνεχόμενα συγκροτήματα , έτσι η σύνθεση των σημάτων όλων των άλλων χρηστών σε όλες τις μπάντες μπορούν επίσης να λειφθούν για να είναι κατ' ουσία γκαουσιανός θόρυβος με ομοιόμορφη φασματική πυκνότητα , δικαιολογώντας έτσι την αντιστοιχουμένη προσέγγιση φίλτρου. Επιπλέον , όπως φαίνεται στο παράρτημα 2Α , όταν η διαμόρφωση φίλτρου H(f) είναι αυστηρά περιορισμένου εύρους ζώνης , το βέλτιστο φίλτρο δέκτη αποτελεί το ίδιο περιορισμός εύρους ζώνης, αντιστοιχούμενο στο H(f) , και τα δυο είναι συνεχή πέραν του περιορισμένου φασματικού εύρους.

### 2.3.1 Πρώτης και δεύτερης τάξης στατιστικές αποδιαμόρφωσης εξόδου στην παρεμβολή πολλαπλής πρόσβασης

Αναφερόμενοι στην εικόνα 2.2 , τώρα εξετάζουμε την αποδιαμόρφωση εξόδου ανά τσιπ , $i_n(k)$ , του k-ιοστού χρήστη στο n-ιοστό τσιπ χρόνου δειγματοληψίας , δεδομένου ότι η εισαγωγή δυαδικών δεδομένων για αυτό το τσιπ είναι $x_n(k)$ το οποίο είναι +1 ή -1 . Υποθέτουμε αρχικά , ότι η ψευδοτυχαία ακολουθία παραγωγής στον δέκτη είναι τέλεια συγχρονισμένη με το σήμα του δέκτη . Όπως με κάθε ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας , διάδοση φάσματος ή όχι , υπάρχουν τέσσερα εξαρτήματα της εξόδου αποδιαμόρφωσης :

α) η επιθυμητή έξοδος , η οποία εξαρτάται μόνο από το $x_n(k)$

b) τα πρακτικά τμήματα παρεμβολής , τα οποία εξαρτώνται από

$x_{n+m}(k)$ , m # 0 ( συνήθως ονομάζεται διασυμβολική παρεμβολή [ISI] για μη εξαπλωμένη ψηφιακή αποδιαμόρφωση )

c) το στοιχείο σύμφωνα με τον περιβαλλοντικό θόρυβο , το οποίο υποτίθεται είναι άσπρο μιας πλαισιωμένης πυκνότητας $N_0$ watts/ Hz

d) οι παρεμβολές των στοιχείων του άλλου χρήστη , που βασίζεται $x_{n+m}(j)$ για όλα τα j # k και όλα τα m .

Όλα αλλά το (c) εξαρτάται επίσης από τα χαρακτηριστικά διάδοσης της μετάδοσης σήματος . Για αυτή την εισαγωγική επεξεργασία , θα υποθέσουμε ότι όλες οι ισχύεις του σήματος είναι σταθερές και γνωστές , γενικεύοντας αργότερα στο κεφάλαιο 4 στα πολλαπλών δρόμων και εξασθένισης κανάλια .

Αφού όλα τα παρεμβατικά στοιχεία έχουν μηδενική σημασία , η σημασία του $y_n(k)$ είναι ένας παράγοντας του $x_n(k)$ . Έτσι χρησιμοποιώντας τη θεωρία του Parseval και το γεγονός ότι $a^2_n(k) = 1$ , έχουμε

$$E[y_n(k) \mid x_n(k)] = \sqrt{E_c(k)}x_n(k) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \, df \qquad (2.11)$$

$E_c(k)$ είναι το τσιπ ενέργειας για τον κ-σιοστό χρήστη , που απαιτεί το κέρδος του φίλτρου να εξομαλυνθεί, έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \, df \qquad (2.12)$$

Τα πρακτικά στοιχεία εξαρτώνται από $a_{n+m}(k)$ , m # 0 , τα οποία είναι επίσης δυαδικές τυχαίες μεταβλητές , ανεξάρτητες από τον $x_n(k)$ εξαιτίας των ιδιοτήτων τυχαιότητας καθιερωμένες στο κεφάλαιο 2.2 . Αν τις μεταχειριστούμε σαν ντετερμινιστικές τιμές , η επιρροή τους στον n-ιοστό παράδειγμα στην αποδιαμόρφωση θα είναι

$$\sqrt{E_c(k)}a_n(k) \sum_{m\neq 0} a_{n+m}(k)x_{n+m}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi mfT_c) \mid H(f)|^2 \, df$$

Αυτό επέρχεται από το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier κάθε ώθησης καθυστερημένη από m τσιπς , φιλτραρισμένη από H(f) και H*(f) , είναι exp(- 2πimf$T_c$) |H(f) |$^2$ , και ο |H(f) |$^2$ είναι ένας άρτιος παράγοντας . Ωστόσο αφού οι $a_{n+m}$(k) είναι όλοι ανεξάρτητες δυαδικές τυχαίες μεταβλητές με μηδενική σημασία και διακυμάνσεις μονάδας , ακολουθεί ότι τα εξαρτήματα παρεμβολής του interchip δεν συμβάλλουν τίποτα στο μέσο όρο της παραγωγής, αλλά προσθέτουν στη διακύμανση της ποσότητας

$$V_{\mathrm{I}} = V_{ar_{\mathrm{I}}}[y_n(k) \mid x_n(k)]$$

$$= E_c(k) \sum_{m\neq 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(2\pi m f T_c\right)|H(f)|^2 df\right]^2 \qquad (2.13)$$

όπου ο δείκτης I αναφέρεται στην παρεμβολή του interchip.

Παρατηρούμε περαιτέρω ότι τα άλλα δυο εξαρτήματα , ο περιβαντολλογικός λευκός θόρυβος και η παρεμβολή από έναν άλλο χρήστη , είναι ανεξάρτητα $x_n$(k) για όλα τα n . Έτσι , η διακύμανση σύμφωνα με τον περιβαλλοντικό θόρυβο είναι απλά το αποτέλεσμα του λευκού θορύβου της μονόπλευρης πυκνότητας $N_0$ στο λαμβανόμενο φίλτρο όπου ο παράγοντας μεταφοράς είναι H*(f) , ο οποίος πρέπει να συμβάλει

$$V_N = V_{ar_N}[y_n(k) \mid x_n(k)] = (N_0/2) \int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df = N_0/2 \qquad (2.14)$$

Ο δείκτης N αναφέρεται στον περιβαντολλογικό θόρυβο .

Τελικά , οποιοσδήποτε άλλος χρήστης j έχει συνεχή ενέργεια τσιπ $E_c$(j) διαμορφωμένη από δυαδικές μεταβλητές $a_n$(j) $x_n$(j) οι οποίες είναι ανεξάρτητες και γενικά ασύγχρονες με αυτές του χρήστη k[3] . Σε αντίθεση η φέρουσα φάση του j –οστού διαμορφωτή του χρήστη $\phi_j$ θα διαφέρει από αυτή του k-οστού χρήστη . Έτσι το αποτέλεσμα του σήματος του j-οστού χρήστη στον αποδιαμόρφωση του k-ιοστού χρήστη θα είναι αυτό του λευκού θορύβου με την δυο όψεων πυκνότητας $E_c$(j)/$T_c$ που διέρχεται από τον παράλληλο συνδυασμό δυο φίλτρων με συνδυασμένο παράγοντα μετάδοσης | H(f) |$^2$ . Λαμβάνοντας υπόψη τις σχετικές φάσεις του j- οστού και του k-οστού χρήστη τις οποίες

στιγμιαία παίρνουμε ως σταθερές και δοσμένες , η διακύμανση της παραγωγής του k-ιοστού αποδιαμορφωτή σύμφωνα με το σήμα του j-ιοστού χρήστη είναι

$$V_j = Var_j[y_n(k)|x_n(k), \phi_j, \phi_k]$$

$$= [E_c(j)/T_c]\cos^2(\phi_j - \phi_k) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^4 \, df \qquad (2.15)$$

Εδώ όπως είναι κανονικά , οι όροι που αφορούν το διπλάσιο της συχνότητας του μεταφορέα υποτίθεται ότι είναι εντελώς φιλτραρισμένοι. Τώρα επειδή οι σχετικές φάσεις όλων των χρηστών είναι τυχαίες μεταβλητές που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μεταξύ του 0 και 2π , και όλα τα σήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους , υπολογισμένα κατά μέσο όρο σε όλες τις φάσεις , η διακύμανση του n-ιοστού τσιπ του k-ιοστού χρήστη σύμφωνα με όλα τα σήματα του άλλου χρήστη είναι

$$V_O = \sum_{j\neq k} E_{\phi j}(V_j) = \sum_{j\neq k} E_c(j) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^4 df/(2T_c) \qquad (2.16)$$

Κατά συνέπεια , δεδομένου ότι όλα τα τυχαία αποτελέσματα που συμβάλλουν για τη διακύμανση είναι ανεξάρτητα , οι πρώτες και δεύτερες στατιστικές διαταγής της παραγωγής του n-ιοστού τσιπ του k-ιοστού χρήστη όπως λήφθηκαν από τις (2.11) , (2.12) , (2.13) , (2.14) και (2.16) είναι

$$E[y_n(k) \mid x_n(k)] = \sqrt{E_c(k)}x_n(k)$$

$$Var[y_n(k) \mid x_n(k)] = V_1 + V_N + V_{O'} \qquad (2.17)$$

Όπου

$$V_1 = E_c(k) \sum_{m\neq 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(2\pi m f T_c\right)|H(f)|^2 df\right]^2 ,$$

$$V_N = N_0/2 \qquad (2.18)$$

$$V_O = \sum_{j\neq k} E_c(j) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^4 df/(2T_c) .$$

Μια κράτηση για το σύνολο αυτών των μέσων όρων : αν ο αριθμός των χρηστών είναι μικρός , οι φάσεις θα μπορούσαν να ευθυγραμμιστούν μεταξύ τους έτσι ώστε ο υπολογισμός μέσου όρου στη φάση δεν είναι κατάλληλος. Τώρα δείχνουμε ότι η (2.18) στέκει χωρίς , κατά μέσο όρο σε φάση, αν τα φέροντα είναι quadriphase (QPSK) διαμορφωμένα από δυο ψευδοτυχαίες ακολουθίες.

## 2.3.2 Στατιστικές για (QPSK) διαμόρφωση από ψευδοτυχαίες ακολουθίες

Για αποφυγή κάθε εξάρτησης στη φάση μεταφορέα , θεωρούμε τον (QPSK) διαμορφωτή εξάπλωσης και τον ανταποκρινόμενο αποδιαμορφωτή , που φαίνεται στην εικόνα 2.4 Σημειώστε ότι τα δεδομένα εισόδου $x_n(k)$ είναι ακόμα διφασικά διαμορφωμένα . Υποθέτουμε ότι ο λήπτης εντοπίζει το λαμβανόμενο φέρον τέλεια και η ενδιάμεση φάση (I) και ο τετραγωνισμός (Q) ψευδοτυχαίων ακολουθιών είναι ανεξάρτητα ( ή τα παράγωγα τους είναι τα ίδια , αλλά οι αρχικοί παράγοντες είναι διαχωρισμένοι από ένα τυχαία επιλεγμένο offset ). Τα μέσα και οι διαφορές των εσωτερικών φάσεων και των τμημάτων τετραγωνισμού λαμβάνονται όπως ακολουθεί :

$$E\left[y_n^{(1)}(k)\middle| x_n(k)\right] = E[y_n^{(Q)}(k)|\, x_n(k)\sqrt{E_c(k)}/2,$$

$$Var_I\left[y_n^{(I)}(k)\right] = Var_I\left[y_n^{(Q)}(k)\right] = \frac{V_I}{4},$$

$$Var_N\left[y_n^{(I)}(k)\right] = Var_N\left[y_n^{(Q)}(k)\right] = \frac{N_0}{4} = \frac{V_N}{2},$$

$$V_O[y_n^{(I)}(k) \,/\, \phi_j\,,\, \phi_k] = \sum_{j\neq k}[E_c\,(j)/(4T_c)][\cos(\phi_j - \phi_k) + \sin(\phi_j - \phi_k)]^2 \times \int |H(f)|^4\, df\,,$$

$$V_O[y_n^{(Q)}(k) \,/\, \phi_j\,,\, \phi_k] = \sum_{j\neq k}[E_c\,(j)/(4T_c)][\cos(\phi_j - \phi_k) + \sin(\phi_j - \phi_k)]^2 \times \int |H(f)|^4\, df\,,$$

Τελικά , αφού τα $a_n^{(I)}(k)$ και $a_n^{(Q)}(k)$ είναι ανεξάρτητα, $y_n^{(I)}(k)$ και $y_n^{(Q)}(k)$ είναι ασυσχέτιστα . Τότε παίρνοντας τον επεξεργαστή σήματος

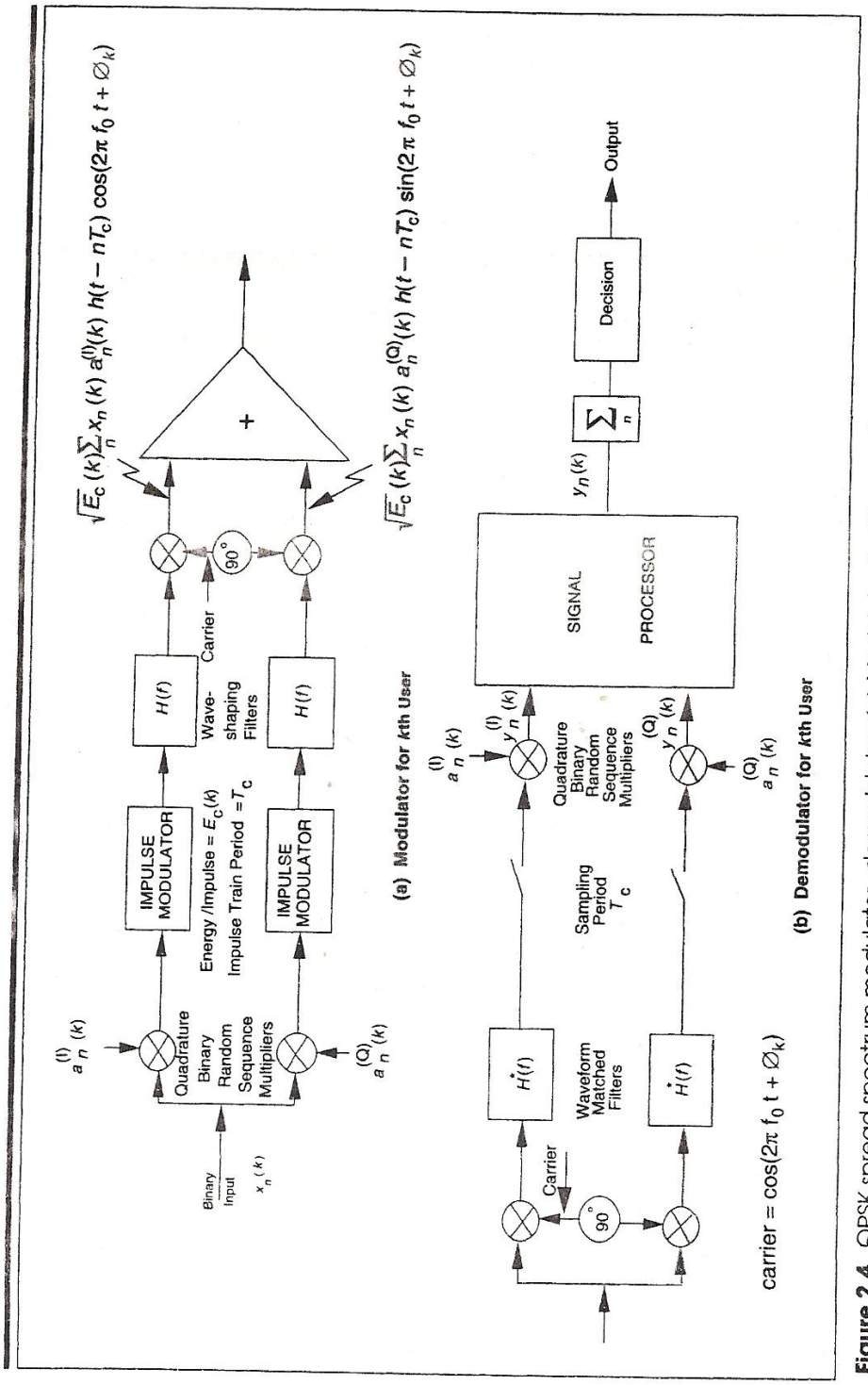



**Figure 2.4** QPSK spread spectrum modulator–demodulator. (a) Modulator for *k*th user. (b) Demodulator for *k*th user.

στην εικόνα 2.4b να εκτελέσει μια άθροιση των τμημάτων εσωτερικής φάσης και των στοιχείων τετραγωνισμού , λαμβάνουμε

$$y_n(k) = y_n^{(I)}(k) + y_n^{(Q)}k$$

Η μέση τιμή και η διασπορά του $y_n(k)$ είναι τα αθροίσματα των διασπορών , όπως ακολουθεί

$$E[y_n(k) \,|x_n(k)] = \sqrt{E_c(k)}x_n(k)$$

(2.19)

$$\mathrm{Var}[[y_n(k) \mid x_n(k)] = (\tfrac{1}{2})V_1 + V_N + V_{O'}$$

όπου $V_I$ , $V_N$ και $V_O$ δίνονται από τη ( 2.18)

Καταλήγουμε τότε ότι οι στατιστικές πρώτης και δεύτερης τάξης για τη QPSK διαμόρφωση από ψευδοτυχαίες ακολουθίες είναι ακριβώς οι ίδιες όπως αυτές για την BPSK διαμόρφωση , εκτός του ότι η παρεμβολή του interchip $V_I$ μειώνεται στο μισό ( μέσω της χρήσης των ανεξάρτητων ακολουθιών διάδοσης στα κανάλια I και Q ) . Από την άλλη , $V_O$ , η διακύμανση του θορύβου του άλλου χρήστη , είναι ανεξάρτητη της σχετικής φάσης , έτσι ώστε δεν είναι απαραίτητο να παρθεί το σύνολο του μέσου όρου όπως ήταν στην (2.16) για να πάρουμε το αποτέλεσμα της (2.18) .

Επίσης αν η φάση του k-ιοστού αποδιαμορφωτή του χρήστη $\phi_k'$ δεν είναι ίση με αυτή του διαμορφωτή $\phi_k$ , τα μέσα και τις δυο περιπτώσεις την BPSK και την QPSK όπως καθορίστηκαν από τις εικόνες 2.2 και 2.4 μειώνονται σε

$$E[y_n(k) \mid x_n(k)] = \sqrt{E_c(k)}x_n(k) \cos(\phi_k - \phi_k') \qquad (2.20)$$

Η διακύμανση του περιβαλλοντικού θορύβου $V_N$ και η διακύμανση της παρεμβολής του άλλου χρήστη , $V_O$ είναι φανερά ανεπηρέαστα από οποιαδήποτε ανακριβή φάση στον αποδιαμορφωτή .

## 2.3.3 Παραδείγματα

Είναι εμφανές από την (2.18) ότι η διακύμανση εξαρτάται αυστηρά από τη μορφή του σχήματος του γραμμικού κύματος της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου. Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε την κρουστική απόκριση ως σταθερά τετραγωνικών παλμών διάρκειας $T_c$ . Έτσι η κυματομορφή αποτελείται από μια διαδοχή παλμών , καθένας με διάρκεια $T_c$ και με ένδειξη που καθορίζεται από τη ψευδοτυχαία ακολουθία $x_n(k)$ .

Έτσι απλοποιώντας σύμφωνα με τη συνθήκη (2.12) , έχουμε

$$h(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{T_c}}\right)[u(t) - u(t - T_c)],$$

Όπου u( ) είναι η λειτουργία βημάτων μονάδων . Ως εκ τούτου η συνεχής φορά περιορισμένης λειτουργίας μεταφοράς είναι

$$H(f) = \int_0^{T_c} h(t)\exp(-2\pi i f t)\,dt$$

$$= \sqrt{T_c}\,exp(-i\pi f T_c)\,sin(\pi f T_c) \,/\, (\pi f T_c) \qquad (2.22)$$

Στο άλλο άκρο , έχουμε μια συνεχή περιορισμένου εύρους συνάρτηση μεταφοράς

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{W}}\left[u\left(f + \frac{W}{2}\right) - u\left(f - \frac{W}{2}\right)\right], \qquad (2.23)$$

Για το οποίο

$$h(t) = \int_{-W/2}^{W/2} H(f)\exp(2\pi i f t)\,df = \sqrt{W}\ \sin(\pi W t) \,/\, (\pi W t),$$

όπου $W \triangleq 1/T_c$ (2.24)

Και στις δυο περιπτώσεις , η παρεμβολή του interchip είναι ακριβώς 0, από τη στιγμή που $h(nT_c) = 0$ για $n \# 0$ .

Για τη συνεχή h(t) χρονικά περιορισμένη περίπτωση παλμού , το ολοκλήρωμα θορύβου του άλλου χρήστη μπορεί να λειφθεί από το θεώρημα του Perceval ως

$$\int |\,H(f)\,|^4\,df = \int |\,R(t)\,|^2\,dt,$$

όπου R(t) είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του | H(f) |$^2$ . Έτσι

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T_c\left(\frac{\sin \pi f T_c}{\pi f T_c}\right)^2 \exp(2\pi i f t)\, dt$$

$$= \begin{cases} 1 - |t|/T_{c'} & |t| < T_{c'} \\ 0 & diaforetika \end{cases}$$

από το οποίο ακολουθεί ότι

$$\frac{1}{T_c}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^4\ df = \frac{2}{T_c}\int_0^{T_c}(1 - t/T_c)^2\, dt = \frac{2}{3}$$

( περιορισμός χρόνου).(2.26)

Αυτό το αποτέλεσμα λείφθηκε αρχικά από μια εναλλακτική παραγωγή

Για τη συνεχή H(f) περιορισμένου εύρους περίπτωση , έχουμε κοινότοπα ,

$$\frac{1}{T_c}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^4\, df = \frac{2}{T_c}\int_{-W/2}^{W/2} df = 1 \qquad \textit{(περιορισμένο εύρος)} \quad \textit{(2.26)}$$

Σημειώστε ότι σε αυτήν την περίπτωση , | H(f) |$^2$ = H(f)/$\sqrt{W}$, R(t) = h(t)/$\sqrt{W}$, όπως δίνεται από την (2.24) . Έτσι και στις δυο περιπτώσεις , R(n$T_c$) =0 για όλα τα n ≠ 0 .Έτσι , οι επιτυχείς έξοδοι των τσιπς είναι ασυσχέτιστοι .

## 2.3.4 Δέσμευση για την περιορισμένου εύρους φάσμα

Υποθέτουμε ότι το φάσμα είναι αυστηρά περιορισμένο σε ( - W/2 , W/2) , αλλά δεν είναι απαραίτητα συνεχές . Όπως πάντα απλοποιούμε το κέρδος της συνάρτησης μεταφοράς σύμφωνα με (2.12) . Είναι αξιόλογο να καθορίσουμε την ελάχιστη αξία της διακύμανσης . Το άλλο συστατικό χρήσης της διακύμανσης μπορεί να είναι κατώτερη οριοθέτηση μέσω της χρήσης της ανισότητας Schwarz :

$$\int_{-W/2}^{W/2} A^2(f)df \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} B^2\,(f)df \ \geq \left[\int_{-W/2}^{W/2} A(f)B(f)df\right]^2$$

Αφήνοντας A(f) = $|H(f)|^2$ και $B^2(f)$ =1, ακολουθεί ότι

$$\int_{-W/2}^{W/2} |H(f)|^4 \, df \cdot W \geq \left[\int_{-W/2}^{W/2} |H(f)|^2 \, df\right]^2 = 1$$

Έτσι ,

$$\int_{-W/2}^{W/2} |H(f)|^4 \, df \geq \frac{1}{W}, \qquad (2.28)$$

Με ισότητα αν και μόνο αν

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{W}, \quad \frac{-W}{2} \leq f \leq \frac{1}{W} \qquad (2.28a)$$

Αλλά τότε, για συνεχές |H(f)| , έχουμε από την (2.24) ότι W =1/$T_c$. Έτσι ,

$$\int |H(f)|^4 df / T_c = 1$$

Επιπλέον για σταθερό περιορισμό εύρους ζώνης H(f) , ακολουθεί από την (2.24) ότι h($nT_c$ ) =0 για όλα τα n # 0 , έτσι ώστε η διακύμανση των παρεμβολών του interchip $V_I$ =0 και έτσι ελαχιστοποιείται .
Καταλήγουμε ότι για ένα περιορισμένου εύρους φάσμα , το κατώτερο όριο για τη διακύμανση είναι

$$\mathrm{Var}[y_n(k)] \geq \left[N_0 + \sum_{j \neq k} E_c(j)\right] / 2, \qquad (2.29)$$

και για αυτό , αυτό είναι το κατώτερο όριο που επιτυγχάνεται από τη συνεχή μεταφορά φάσματος του περιορισμένου εύρους του φίλτρου της (2.23) . Το παράρτημα 2A δείχνει άλλη μια παραγωγή της βελτιστοποίησης του συνεχούς περιορισμένου εύρους H(f) χωρίς την προηγούμενη υπόθεση που το λαμβανόμενο φίλτρο ταιριάζει στο H(f)

## 2.4 Πιθανότητα σφάλματος για το BPSK ή το QPSK με συνεχή σήματα στον πρόσθετο Γκαουσιανό θόρυβο ή παρεμβολή

Μέσω αυτού του κεφαλαίου έχουμε υποθέσει ότι όλα τα σήματα ήταν σε συνεχή ισχύ μέσω της περιόδου μετάδοσης . Θα επανεξετάσουμε αυτή την υπόθεση στο κεφάλαιο 4 όταν οι επιρροές από τα πολλαπλά

μονοπάτια και την εξασθένηση θα ληφθούν υπόψη . Υπολογίσαμε στατιστικές δεύτερης τάξης , αλλά δεν εξετάσαμε τις διανομές τους . Όταν η περίοδος του τσιπ είναι $T_c$ και ο ρυθμός του bit είναι R , ο αριθμός των τσιπς ανά bit είναι $1/(RT_c)^4$ . Τότε ο τελικός επεξεργαστής στον αποδιαμορφωτή πρέπει να συσσωρεύει όσα περισσότερα τσιπς όσα και στην σταθερή εισαγωγή δεδομένων $x_n$ (k) , έτσι σχηματίζεται

$$\Upsilon = \sum_{n=1}^{1/(RT_c)} y_n(k)$$

Σε ένα μη κωδικοποιημένο BPSK σύστημα , η ένδειξη αυτής της μέτρησης χρησιμοποιείται για να αποφασιστεί εάν το το ψηφίο ήταν 0 ή 1 (1 +1 ή – 1)

Τότε

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{1/(RT_c)} E[y_n(k) \mid x_n(k)]$$

$$= \sqrt{E_c(k)} \sum_{n=1}^{1/(RT_c)} x_n(k) = \pm[1/(RT_c)]\sqrt{E_c(k)}$$

(2.30)

Εδώ , η ένδειξη εξαρτάται από την ένδειξη του $x_n$ (k) , η οποία είναι σταθερή για όλα τα τσιπς n εντός της περιόδου του ψηφίου , 1/R

Από τη στιγμή που τα στοιχεία του θορύβου του ανεξάρτητου τσιπ εξόδου είναι ουσιαστικά ασυσχέτιστα ,

$$Var(Y) = \sum_{n=1}^{1/(RT_c)} E[y_n(k) \mid x_n(k)]$$

$$= [1/(RT_c)](V_1 + V_N + V_O) \qquad (2.31)$$

Τώρα αν ο αριθμός των τσιπς ανά ψηφίο είναι μεγάλος έτσι ώστε $1/(RT_c) >> 1$ , σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα , η μεταβλητή Y θα είναι σχεδόν γκαουσιανή . Τότε η πιθανότητα σφάλματος ψηφίου δίνεται από

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{[E(Y)]^2}{VarY}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{E_c(k)/(RT_c)}{V_1 + V_N + V_O}}\right) \qquad (2.32)$$

Όπου

$$Q(z) \triangleq \int_z^{\infty} e^{-x^2/2} dx/\sqrt{2\pi}$$

Παίρνοντας την παρεμβολή του interchip ως αμελητέα ή μηδενική , έχουμε χρησιμοποιήσει (2.18)

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_c(k)/(RT_c)}{N_0 + \sum_{j\neq k} E_c(j) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^4 df/T_c}}\right) \qquad (2.33)$$

Ο αριθμητής είναι μόλις δυο φορές η ενέργεια του ψηφίου , $E_b$ , ο παρανομαστής είναι η πραγματική παρεμβαλλόμενη πυκνότητα .

Έτσι,

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{I_0}}\right), \qquad (2.34)$$

Όπου

$$\frac{E_b}{I_0} = \frac{E_c(k)/(RT_c)}{N_0 + \sum_{j\neq k} E_c(j) \int |H(f)|^4 df/T_c} \qquad (2.35)$$

(2.34) είναι φυσικά η κλασσική έκφραση για την πιθανότητα λάθους ψηφίου για μια συνεκτική ένδειξη BPSK ή QPSK αποδιαμορφωτή στον πρόσθετο λευκό θόρυβο της πυκνότητας $I_0$

Υποθέτουμε ότι αγνοούμε τον περιβαλλοντικό θόρυβο ($N_0 = 0$) , όπως κάναμε στο κεφάλαιο 1.3, και θεωρώντας ότι εξαιτίας της ισχύς ελέγχου, όλοι οι χρήστες λαμβάνουν από τον λήπτη σταθμό βάσης την ίδια ισχύ ή το ίδιο επίπεδο ενέργειας $E_c$ . Τότε για ένα δεδομένο $E_b$ / $I_0$ επίπεδο , προσδιοριζόμενο από (2.34) για το την απαιτούμενη πιθανότητα σφάλματος , ο συνολικός αριθμός χρηστών , $k_u$ , λαμβάνεται από την (2.35) για να γίνει

$$k_u - 1 = \frac{1/(RT_c)}{\int |H(f)|^4 df/T_c} \cdot \frac{1}{E_b/I_0} \qquad (2.36)$$

Για ένα περιορισμένου εύρους φάσμα , W = 1/$T_c$ και το ολοκλήρωμα στον παρανομαστή είναι χαμηλότερα οριοθετημένο από την ενότητα. Αυτό μας αφήνει με

$$k_u - 1 \leq \frac{W/R}{E_b/I_0}, \qquad (2.37)$$

την ισότητα για μια συνεχή συνάρτηση μεταφοράς περιορισμένου εύρους διαμόρφωσης φίλτρου. Αυτή ακριβώς είναι η εξίσωση (1.4) του κεφαλαίου 1.3 και επικυρώνει το διαισθητικό αποτέλεσμα λαμβανόμενο μέσω διαστατικής ανάλυσης .

# Βέλτιστο φίλτρο δέκτης για περιορισμένου εύρους φάσμα

Δείξαμε ότι με αυτήν την περιορισμένου εύρους κατάσταση

$$|H(f)| = 0 \quad \text{για} \quad |f| > W/2 \qquad (2A.1)$$

Το συνεχές περιορισμένου εύρους φίλτρο της (2.28a ) μεγιστοποιεί το σήμα εξόδου σε σχέση με την παρεμβολή χωρίς την προηγούμενη υπόθεση που το λαμβανόμενο φίλτρο ταιριάζει στη συσκευή αποστολής σημάτων που διαμορφώνει το φίλτρο .

$$\int_{-W/2}^{W/2} |H(f)|^2 \, df = 1, \qquad (2A.2)$$

Θεωρούμε ως μια κανονικοποιημένη διαμόρφωση φίλτρου

και ορίζουμε την αυθαίρετη λαμβάνουσα λειτουργία μεταφοράς φίλτρων G(f) . Υπό την προϋπόθεση ομαλοποίησης ,

$$\left|\int_{-W/2}^{W/2} H(f)G(f)df\right|^2 = k_0(\text{συνεχές}), \quad (2A.3)$$

Επιδιώκουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη μεταβλητή

Var($y_n$) = (1/2)

$$\{\sum_{j\neq k}[E_c\,(j)/T_c] \int_{-W/2}^{W/2} |H(f)G(f)|^2 df$$

$$+N_0 \int_{-W/2}^{W/2} |G(f)|^2 \, df \, \} \quad (2A.4)$$

Αυτή η διακύμανση περιλαμβάνει την παρεμβολή άλλου χρήστη και τον περιβαλλοντικό θόρυβο , μα όχι παρεμβολή από το interchip . Η τελευταία είναι γενικά αμελητέα και θα μετατραπεί σε μηδέν για την βέλτιστη επιλογή .

Χρησιμοποιώντας την Schwarz ανισότητα με δυο διαφορετικούς τρόπους και απλοποιώντας τις συνθήκες (2A.2) και ( 2A.3) , τα δυο στοιχεία του (2A.4) μπορούν να οριοθετηθούν όπως ακολουθεί :

$$k_0 = \left| \int_{-W/2}^{W/2} H(f)G(f) \cdot 1 \, df \right|^2 \leq \int_{-W/2}^{W/2} |H(f)G(f)|^2 \, df \cdot \, W, (2A.5)$$

και

$$k_0 = \left| \int_{-W/2}^{W/2} H(f)G(f) \cdot 1 \, df \right|^2$$

$$\leq \int_{-W/2}^{W/2} |H(f)|^2 \, df \int_{-W/2}^{W/2} |G(f)|^2 \, df \qquad (2A.6)$$

$$= \int_{-W/2}^{W/2} |G(f)|^2 \, df$$

Ακολουθεί από την (2A.5) και την (2A.6), αφήνοντας W + 1/$T_c$ , όπου η διακύμανση της (2A.4) είναι χαμηλότερα οριοθετημένη από

$$Var(y_n) \geq (k_0/2) \left\{ \sum_{j \neq k} E_c(j) + N_0 \right\} \qquad (2A.7)$$

Χωρίς απώλεια της γενικότητας , εκτός από την κλιμάκωση του κέρδους φίλτρου δέκτη , μπορούμε να αφήσουμε $k_0$ =1 , το οποίο κάνει την (2A.7) το ίδιο με την ( 2.29) σαν ισότητες . Η δεύτερη κατάσταση απαιτεί

$$G(f) = k' \, H^*(f), \qquad |f| \leq W/2, \qquad (2A.8)$$

όπου k΄ είναι συνεχές . Αυτό σημαίνει ότι το λαμβανόμενο φίλτρο πρέπει να είναι ίδιο με το φίλτρο πομπού . Η πρώτη κατάσταση απαιτεί

$$H(f)G(f) = k'', \qquad |f| \leq W/2, \qquad (2A.9)$$

όπου k′′ είναι μια σταθερά . Ο λόγος σήματος προς θόρυβο είναι απλά ο λόγος του (2A.3) προς το (2A.4) . Τότε ακολουθείται από τον (2A.8) ,(2A.9) και την (2A.2) ότι ο λόγος σήματος προς θόρυβο μεγιστοποιείται από την επιλογή

$$|H(f)|^2 = 1/W. \qquad (2A.10)$$

Έτσι , τόσο ο πομπός διαμόρφωσης φίλτρου H(f) όσο και το φίλτρο δέκτης G(f) είναι σταθερά σε όλο το φάσμα περιορισμένου εύρους

(- W/2 , W/2) . Αυτό είναι το ίδιο όπως στην (2.28a) , αλλά λαμβανόμενο χωρίς την υπόθεση των προτέρων ότι G(f) είναι ίδιο με το H(f) .

# Κεφάλαιο 3

## Συγχρονισμός ψευδοτυχαίων σημάτων

### 3.1 Σκοπός

Η απόδοση της ανάλυσης του συστήματος διαμόρφωσης διάδοσης φάσματος που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο απαιτεί τη φάση και τη συχνότητα του φέροντος του λήπτη και το χρονισμό του τσιπ για να είναι τέλεια συγχρονισμένα σε αυτά του μεταδιδόμενου σήματος όπως λαμβάνεται με την προκαθορισμένη καθυστέρηση μετάδοσης . Το παρόν κεφάλαιο εξετάζει μεθόδους για την επίτευξη αυτού του συγχρονισμού , συγκεκριμένα του χρονισμού των ψευδοτυχαίων σημάτων. Επίσης καλύπτει την αξιολόγηση της απώλειας απόδοσης ως παράγοντα ως ανακρίβειες στη λειτουργία του χρονισμού του δέκτη , όπως επίσης τη φάση και τη συχνότητα .

Παρέχοντας την αρχική συχνότητα σφάλματος είναι σχετικά μικρή , ένας αριθμός πρακτικών εκτιμήσεων δικαιολογούν την απόκτηση χρονοδιαγράμματος πριν από την απόκτηση ακριβής φάσης και συχνότητας . Τα συστήματα χρονικών αποκτήσεων και επεξεργασίας εξετάζονται μετά . Η παρακολούθηση του χρόνου αντιμετωπίζεται σε επόμενα κεφάλαια . Αφού ο χρονισμός έχει καθιερωθεί , η απόκτηση και η παρακολούθηση της φάσης και συχνότητας εκτελούνται με τον ίδιο τρόπο όπως και ψηφιακά επικοινωνιακά συστήματα . Αυτό συζητιέται εν συντομία στο τελευταίο κεφάλαιο .

### 3.2 Απόκτηση ψευδοτυχαίου σήματος χρονισμού

Οποιαδήποτε διαδικασία απόκτησης περιλαμβάνει τον έλεγχο όλων των πιθανών υποθέσεων για τη σωστή τιμή της παραμέτρου. Εξαιτίας του περιορισμού των πόρων αυτή η εξέταση πραγματοποιείται γενικά σειριακά και κάθε λάθος υπόθεση

εξαλείφεται προτού η επόμενη εξεταστεί . Για ένα μικρό αριθμό υποθέσεων ο έλεγχος μπορεί να επιτευχθεί παράλληλα . Γενικά ένας συνδυασμός των δυο μπορεί να εφαρμοστεί , χρησιμοποιώντας όλες τις διαθέσιμες παράλληλες συσκευές και αναθέτοντας κάθε ένα κλάσμα των τελικών υποθέσεων . Μια άλλη στρατηγική εξετάζει επίσης την εκτέλεση δυο φάσεων μέσω των υποθέσεων εξαλείφοντας τις λιγότερες πιθανότητες από το πρώτο πέρασμα και εξετάζοντας κάθε εναπομένουσα υπόθεση για περισσότερο χρόνο στο δεύτερο πέρασμα . Αυτό μπορεί να γενικευτεί για περισσότερα περάσματα , καθώς θα το αναλύουμε . Ανάλογα με το ποια στρατηγική αναζητάτε , η βασική υπόθεση συσκευής εξέτασης είναι η ίδια . Στην επόμενη υποδιαίρεση , αυτό θα θεωρηθεί για μια διαδιδόμενη κυματομορφή BPSK και στην ακόλουθη υποδιαίρεση για μια διαδιδόμενη κυματομορφή QPSK .

### 3.2.1 Εξέταση υπόθεσης για τη διάδοση BPSK

Η εξαγορά του χρόνου είναι η διαδικασία καθορισμού του χρόνου του αντιστοιχισμένου φίλτρου της κορυφής εξόδου για το τσιπ που αντιστοιχεί στην πρώτη έξοδο (παραγόμενο από τον αρχικό παράγοντα) της ψευδοτυχαίας γραμμικής γεννήτριας ακολουθίας . Αυτό απαιτείται για να συγχρονίσει την τοπικά παραγόμενη διαδιδόμενη ακολουθία σε αυτήν του επιθυμητού λαμβανόμενου σήματος. Μιλώντας αυστηρά , καθορίζεται ότι ο ακριβής χρόνος δειγματοληψίας είναι το πρόβλημα της εκτίμησης . Ωστόσο για να μειωθεί το πρόβλημα σε μια πεπερασμένη διαστατικότητα , εξετάζουμε μόνο την υπόθεση ότι ένα συγκεκριμένο τσιπ είναι το πρώτο στην ακολουθία απλοποιώντας το αντιστοιχιζόμενο φίλτρο μια φορά, ή το πολύ μερικές ανά τσιπ. Όπως θα παρουσιαστεί προς το παρόν , αυτό οδηγεί σε υποβάθμιση των επιδόσεων που αυξάνεται μονοτονικά με τη διαφορά μεταξύ της κοντινότερης εξεταστικής δειγματοληψίας χρόνου και το σημείο του ακριβή συγχρονισμού .

Αυτός ο προσεγγιστικός συγχρονισμός έχει επιτευχθεί , από τη διαδικασία έρευνας που περιγράφτηκε στο κεφάλαιο 3.4 , η εκτίμησης

είναι καθορισμένη με την απαιτούμενη ακρίβεια από την κλειστού βρόχου τεχνική εντοπισμού για να περιγραφεί στο κεφάλαιο 3.5 .

Η βασική συσκευή εξέτασης υπόθεσης φαίνεται στην εικόνα 3.1a . Το εμπρόσθιο άκρο για μια διαδιδόμενη BPSK είναι το ίδιο με αυτό ενός αποδιαμορφωτή QPSK ( εικόνα 2.4b) . Θα πρέπει να αιτιολογήσουμε τις υπόλοιπες λειτουργίες , του επεξεργαστή σήματος και τις γραμμικές και τις τετραγωνικές στο κεφάλαιο 3.3 και στο συμπληρωματικό παράρτημα 3A . Αρκεί σε αυτό το σημείο να τονίσουμε ότι επιχειρείται η ακολουθία εξάπλωσης χρονοδιαγράμματος που καθορίζεται πριν από οποιαδήποτε μέτρηση ή εντοπισμό φάσης . Έτσι η συσκευή εξέτασης υπόθεσης πρέπει να είναι μη συνεκτική , μετρώντας αποτελεσματικά την ενέργεια όπως δείχνεται στο σχήμα 3.1a . Ακόμα και έτσι αν η συχνότητα σφάλματος είναι μεγαλύτερη από την αντιστροφή της εξέτασης χρόνου της κάθε υπόθεσης , $NT_C$ , θα δειχθεί στο κεφάλαιο 3.2.3 ότι η μέτρηση ενέργειας είναι σοβαρά υποβαθμισμένη . Κατά συνέπεια , η εξέταση υπόθεσης γίνεται αναξιόπιστη . Για να αποτραπεί αυτό μπορεί να είναι απαραίτητο να εκτελεστεί μεταολοκηρωτική ανίχνευση συσσωρεύοντας $L > 1$ αποτελεσματικές μετρήσεις ενέργειας πραγματοποιημένες στον ίδιο χρόνο υπόθεσης , προτού παρθεί η απόφαση όπως δείχνεται από το τελευταίο κομμάτι στην εικόνα 3.1a . Αυτές οι ποιοτικές παρατηρήσεις θα υποστηριχτούν από τα ποσοτικά αποτελέσματα του κεφαλαίου 3.3 .

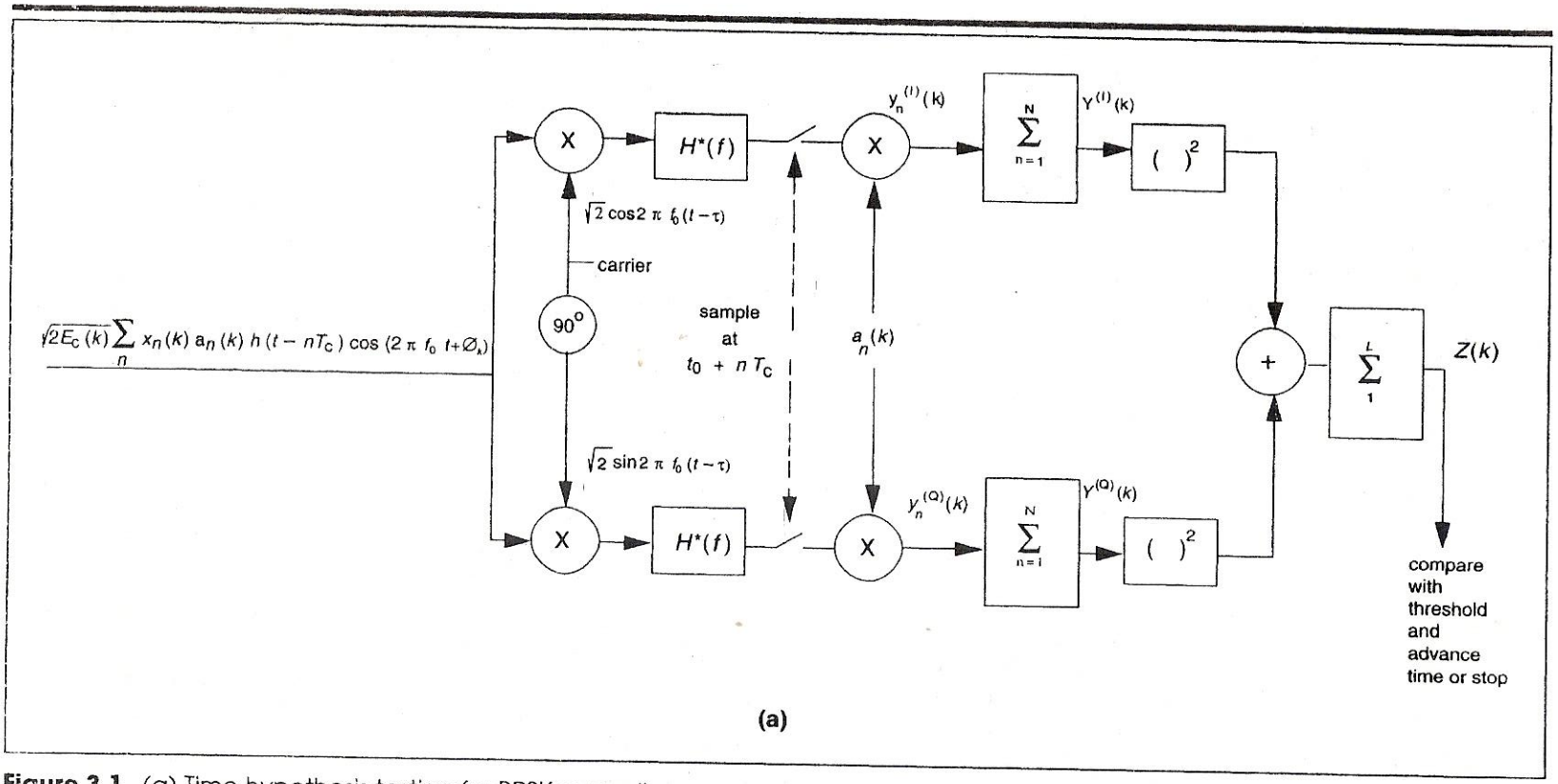



**Figure 3.1** (a) Time hypothesis testing for BPSK spreading.

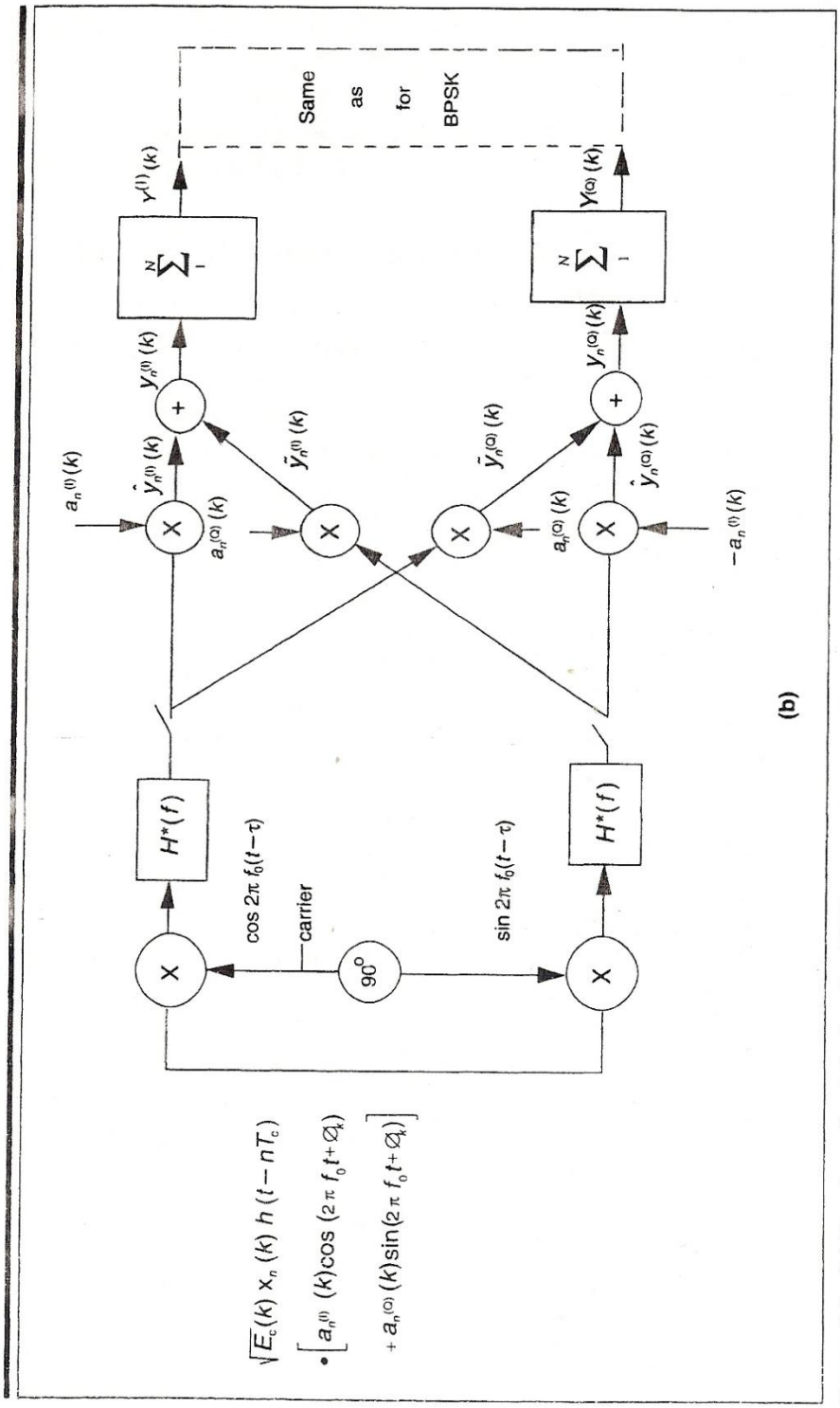



**Figure 3.1** (b) Time hypothesis testing for QPSK spreading.

Αλλά πρώτα σε αυτό το κεφάλαιο , έχουμε καθιερώσει τις στατιστικές πρώτης τάξης της συσκευής εξέτασης υποθέσεων των εξαρτημάτων εξόδου και για τα δυο είδη διαμορφώσεων BPSK και QPSK σε πρόσθετη γκαουσιανή παρεμβολή.

Μπορούμε να πάρουμε το σήμα χωρίς διαμόρφωση από τα δεδομένα όπως θα ήταν στην περίπτωση για μια ακολουθία συγχρονισμού ή πλοήγησης . Ωστόσο αν το σήμα είναι με διαφοροποιημένα δεδομένα , αλλά η ακολουθία δεδομένων είναι συγχρονισμένη στην ψευδοτυχαία ακολουθία , ο ρυθμός μετάδοσης είναι το (1/N) νιοστό του ρυθμού μετάδοσης του τσιπ (N = 1/ $RT_c$ έτσι ώστε η ακολουθία δεδομένων παραμένει συνεχής για όλα τα N τσιπς ) . Τότε χωρίς απώλεια της γενικότητας , χωρίς τη λειτουργία τετραγωνισμού , μπορούμε να αφήσουμε

$$x_n(k) = +1 \quad \text{για όλα τα n = 1,2,. . . ., N} \qquad (3.1)$$

Ακλουθώντας τα ίδια βήματα όπως στα κεφάλαια 2.3 και 2.4 , καθιερώνεται εύκολα ότι με το σφάλμα χρονισμού , τ , οι σημασίες του $Y^{(I)}(k)$ και $Y^{(Q)}(k)$ είναι

$$E\left[Y^{(I)}(k)\right] = N\sqrt{E_c(k)}(cos\Phi_k)R(\tau),$$

$$(3.2)$$

$$E\left[Y^{(Q)}(k)\right] = N\sqrt{E_c(k)}(cos\Phi_k)R(\tau),$$

Όπου

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \cos(2\pi f\tau)\, df$$

Όπως φαίνεται στο κεφάλαιο 2.3.3 για τις περιπτώσεις των φίλτρων αυστηρού περιορισμού χρόνου και εύρους ,

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T_{c'} & |\tau| \leq T_{c'} \\ 0 & \end{cases} \qquad \textit{(περιορισμός χρόνου),} \quad \textit{(3.3α)}$$

*διαφορετικά,*

$$R(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau/T_c)}{(\pi\tau/T_c)} \qquad \textit{(περιορισμένο εύρος).} \quad \textit{(3.3b)}$$

Σημειώστε επίσης ότι η φάση $\phi_k$ είναι άυλη επειδή οι όροι της (3.2) είναι τετραγωνισμένοι και τοποθετημένοι από τη συσκευή της εικόνας 3.1.a .

Η διακύμανση , επίσης που προέρχεται από το κεφάλαιο 2.3 , είναι το άθροισμα της συνεισφοράς της παρεμβολής του άλλου χρήστη , του εξωτερικού θορύβου και της παρεμβολής του interchip . Αγνοούμε το τελευταίο ως αμελητέα σύγκριση με τις άλλες δυο . Ακολουθείται τότε από την (2.31) και την (2.18) ότι

$$Var\left(Y^{(I)}\right) = Var\left(Y^{(Q)}\right) = NI_0/2, \qquad (3.4)$$

Όπου

$$I_0 = N_0 + \sum_{j\neq k} E_c(j) \int |H(f)|^4 \, df/T_c \qquad (3.5)$$

Το ολοκλήρωμα στην (3.5) είναι ίσο με τα 2/3 για μια κυματομορφή περιορισμένου και ίσο με 1 για μια ιδανική κυματομορφή περιορισμού εύρους , σύμφωνα με την (2.26) και την (2.27) , αντίστοιχα .

Βασικά οι σημασίες και οι διακυμάνσεις , όπως δίνονται από την (3.2) μέσω της (3.5) βασίζονται σε σιωπηρές παραδοχές :

(a) Η φάση $\phi_k$ παραμένει συνεχής σε όλα τα συσσωρευμένα N τσιπς , που συνεπάγεται ότι η συχνότητα σφάλματος είναι αμελητέα

(b) Να ανταποκρίνεται σε μια ή περισσότερες περιόδους των ψευδοτυχαίων ακολουθιών

Θα ερευνήσουμε και τα δυο αυτά θέματα και θα προσδιορίσουμε πως οι σημασίες και οι διακυμάνσεις επηρεάζονται όταν οι παραδοχές δεν στέκουν. Πρώτον , ωστόσο , θεωρούμε τη βασική συσκευή υποθέσεων τη διάδοση της QPSK .

### 3.2.2 Εξέταση υπόθεσης για τη διάδοση QPSK

Για να φιλοξενήσει το αποτέλεσμα της διάδοσης QPSK η συσκευή ανίχνευσης της εικόνας 3.1a πρέπει να τροποποιηθεί για να

συμπεριλάβει τους σταυρούς των βραχιόνων που δείχνονται στην εικόνα 3.1b . Ορίζουμε τους άμεσους όρους βραχιόνων με ^ και τους όρους των σταυρών των βραχιόνων με ~ , όπως φαίνεται στην εικόνα , και ρίξτε το δείκτη k χρηστών για σημειωτική απλότητα. Τότε έχουμε για κάθε τσιπ για τις δυο σειρές όρων ,

$$\widehat{y_n^{(I)}} = \sqrt{E_c}\,[R(\tau)/2](\cos\Phi + a_n^{(Q)}\,a_n^{(I)}\sin\Phi) + \widehat{v_n^{(I)}},$$

$$\widetilde{y_n^{(I)}} = \sqrt{E_c}\,[R(\tau)/2](\cos\Phi - a_n^{(I)}\,a_n^{(Q)}\sin\Phi) + \widetilde{v_n^{(I)}},$$

$$\widehat{y_n^{(Q)}} = \sqrt{E_c}\,[R(\tau)/2](\sin\Phi - a_n^{(Q)}\,a_n^{(I)}\cos\Phi) + \widehat{v_n^{(Q)}},$$

$$\widetilde{y_n^{(Q)}} = \sqrt{E_c}\,[R(\tau)/2](\sin\Phi + a_n^{(I)}\,a_n^{(Q)}\cos\Phi) + \widetilde{v_n^{(Q)}},$$

όπου οι v όροι αντιπροσωπεύουν το φαινόμενο του θορύβου και της παρεμβολής . Τα ζεύγη του I και του Q συνοψίζονται για την απόκτηση

$$y_n^{(I)} = \widehat{y_n^{(I)}} + \widetilde{y_n^{(I)}} = \sqrt{E_c}\mathrm{R}(\tau)\cos\Phi + v_n^{(I)}$$

$$y_n^{(Q)} = \widehat{y_n^{(Q)}} + \widetilde{y_n^{(Q)}} = \sqrt{E_c}\mathrm{R}(\tau)\sin\Phi + v_n^{(Q)}$$

Μετά τη σύνοψη όλων των N τσιπς , με τις δυο ίδιες παραδοχές [(a) και (b)] που έχουν γίνει για τη διάδοση BPSK έχουμε

$$E\left[Y^{(I)}\right] = N\sqrt{E_c}\,R(\tau)\cos\Phi\,,$$

$$E\left[Y^{(Q)}\right] = N\sqrt{E_c}\,R(\tau)\sin\Phi\,,$$

*όπου*

$$R(\tau) = \int |H(f)|^2\cos(2\pi f\tau)\,df.$$

Οι διακυμάνσεις είναι επίσης οι ίδιες όπως για μια BPSK , από τη στιγμή που η σύνοψη του σταυρού του βραχίονα αντικαθιστά τον πολλαπλασιασμό κατά $\sqrt{2}$ στην εικόνα 3.1a (διπλασιασμός ισχύος)

Έτσι ,

$$Var\left(Y^{(I)}\right) = Var\left(Y^{(Q)}\right) = NI_0/2$$

όπου

$$I_0 = N_0 + \sum_{j\neq k} E_c(j) \int |H(f)|^4 df/T_c$$

Όλες αυτές είναι οι ίδιες όπως οι εξισώσεις (3.2) , (3.4) και (3.5) για BPSK .

## 3.2.3 Το αποτέλεσμα της συχνότητας σφάλματος

Υποθέτουμε ότι η φάση δεν είναι συνεχής επειδή υπάρχει ένα σφάλμα Δf στη φέρουσα συχνότητα μεταξύ του πομπού και του δέκτη . Τότε υποθέτοντας ότι χωρίς χρονικό σφάλμα , τ=0 , οι εξισώσεις (3.2) αντικαθίστανται από

$$E\left[Y^{(I)}\right] = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{E_c}\ \Phi\{\cos[2\pi(\Delta f)t + \Phi]\}|_{t=nT_c},$$

$$E\left[Y^{(Q)}\right] = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{E_c}\ \Phi\{\sin[2\pi(\Delta f)t + \Phi]\}|_{t=nT_c},$$

Όπου Φ{ }είναι η λειτουργία της φίλτρανσης από το αντιστοιχισμένο φίλτρο H*(f) . Είναι ευκρινές ότι από τη στιγμή που οι διακυμάνσεις είναι ανεξάρτητες από το σήμα του κ-σιοστού χρήστη , είναι ανεπηρέαστες από τη συχνότητα σφάλματος .

Για ευκολία, εξετάζουμε τις δυο περιπτώσεις φίλτρων του περιορισμού του χρόνου και περιορισμού του εύρους και δείχνουμε ότι για μεγάλο N , οι δυο υποβαθμίσεις είναι περίπου οι ίδιες . Υποθέτουμε από αυτό ότι το αποτέλεσμα θα είναι περίπου το ίδιο για όλα τα πρακτικά φίλτρα . Για μια περιορισμένου χρόνου

κυματομορφή , το φίλτρο εκτελεί μια υποβάθμιση σε όλο το τσιπ. Έτσι ,

$$E\left[Y^{(I)}\right] = \sqrt{E_c}\ \sum_{n=1}^{N} \int_{(n-1)T_c}^{nT_c} \cos[2\pi(Df)t + \phi]\, dt/T_c$$

$$= \sqrt{E_c} \int_0^{NT_c} \cos[2\pi(\Delta f)t + \phi]\, dt/T_c$$

$$= \sqrt{E_c}\ \left[\frac{\sin\,[2\pi N(\Delta f)T_c]}{2\pi\Delta f T_c} cos\phi - \frac{1-\cos\,[2\pi N(\Delta f)T_c}{2\pi\Delta f T_c} sin\phi\right]$$

*Παρόμοια*

$$E\left[Y^{(Q)}\right] = \sqrt{E_c} \int_0^{NT_c} \sin[2\pi(\Delta f)t + \phi]\, dt/T_c$$

$$= \sqrt{E_c}\ \left[\frac{\cos\,[2\pi N(\Delta f)T_c]}{2\pi\Delta f T_c} cos\phi - \frac{1-\sin\,[2\pi N(\Delta f)T_c}{2\pi\Delta f T_c} sin\phi\right]$$

*Δεδομένου ότι , όπως θα συζητηθεί στο επόμενο κεφάλαιο , η απόδοση εξαρτάται μόνο από το άθροισμα*

$$Z = [Y^{(I)}]^2 + [Y^{(Q)}]^2\ ,$$

*αν ακολουθεί ότι οι μοναδικοί όροι του θορυβώδους σήματος του Z είναι*

$$\{E\left[Y^{(I)}\right]\}^2 + \{E\left[Y^{(Q)}\right]\}^2 = N^2 E_c \left\{\left[\frac{\sin\,(2\pi N\Delta f T_c)}{2\pi N\Delta f T_c}\right]^2 + \left[\frac{1-\cos\,(2\pi N\Delta f T_c)}{2\pi N\Delta f T_c}\right]^2\right\}$$

$$= N^2 E_c \left[\frac{2-2\cos\,(2\pi N\Delta f T_c)}{2\pi N\Delta f T_c}\right]$$

$$= N^2 E_c \left[\frac{\sin\,(2\pi N\Delta f T_c)}{2\pi N\Delta f T_c}\right]^2.$$

*Έτσι , η υποβάθμιση του σήματος που οφείλεται σε συχνότητα σφάλματος Δf hertz είναι*

$$D(\Delta f) = \left[\frac{\sin\,(\pi N\Delta f T_c)}{\pi N\Delta f T_c}\right]^2 \quad \textit{(περιορισμένου χρόνου)} \quad (3.6)$$

Θεωρούμε τώρα την ιδανική περιορισμένου εύρους περίπτωση ( πιο συγκεκριμένα , μια φυσικά εφικτή προσέγγιση αυτής) .

Αν | Δf |<< W/2 ή ισοδύναμα | $\Delta f T_c$ | << ½ , η έξοδος του φίλτρου μπορεί να προσεγγιστεί από μια καθυστερημένη έκδοση της εξόδου . Έτσι

$$E[Y^{(I)}] \approx \sqrt{E_c} \sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi n \Delta f T_c + \phi)$$

$$= \sqrt{E_c} \sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi n \Delta f T_c) cos\phi - \sum_{n=1}^{N} \sin(2\pi n \Delta f T_c)\, sin\phi$$

*και*

$$E[Y^{(Q)}] \approx \sqrt{E_c} \sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi n \Delta f T_c) cos\phi - \sum_{n=1}^{N} \sin(2\pi n \Delta f T_c)\, sin\phi$$

*από όπου*

$$E[Y^{(I)}]\}^2 + E[Y^{(Q)}]\}^2$$
$$\approx E_c\{[\sum_{n=1}^{N} \sin(2\pi n \Delta f T_c)]^2 + [\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi n \Delta f T_c)]^2\} =$$
$$E_c \left[\frac{\sin(\pi N \Delta f T_c)}{\sin(\pi \Delta f T_c)}\right]^2, \qquad |\Delta f T_c| < \frac{1}{2}.$$

Αλλά για $N \gg 1$ και $\pi(\Delta f)T_c \ll 1$ , η υποβάθμιση σύμφωνα με τη συχνότητα λάθους είναι

$$D(\Delta f) \approx \frac{1}{N^2}\left[\frac{\sin(\pi N \Delta f T_c)}{\sin(\pi \Delta f T_c)}\right]^2 \approx \left[\frac{\sin(\pi N \Delta f T_c)}{\pi N \Delta f T_c}\right]^2$$ (περιορισμένο εύρος) (3.7)

Η προσέγγιση είναι η ίδια με την ακριβή έκφραση για την περίπτωση περιορισμού χρόνου .

Σε οποιαδήποτε περίπτωση , όσο το $N\Delta f T_c$ είναι σχετικά μικρό , η υποβάθμιση θα είναι μικρή . Για παράδειγμα υποθέτουμε ότι ο χρόνος του τσιπ είναι $T_c$ = 1 μικροδευτερόλεπτο ( το διαδιδόμενο φάσμα = 1 MHz ) και η συχνότητα σφάλματος Δf =1 kHz . Τότε για N= 100 , η υποβάθμιση είναι μόνο 97 (-0.14 dB ). Για N =250 , γίνεται 81 (-0.19 dB ) .

## 3.2.4 Επιπλέον υποβάθμιση όταν N είναι πολύ λιγότερο από μια περίοδο

Τώρα εξετάζουμε το αποτέλεσμα της εγκατάλειψης υπόθεσης (b) του κεφαλαίου 3.2.1 . Όταν οι ληφθείσες και εκπεμπόμενες ακολουθίες είναι τέλεια συγχρονισμένες, η επιθυμητή ακολουθία του χρήστη συμβάλλει μόνο στο μέσο όρο . Όταν δεν είναι συγχρονισμένοι σημαίνει ότι το ρολόι του δέκτη (δείκτης n) είναι κλειστό από περισσότερα από ένα τσιπ, αλλά N είναι μια ή περισσότερες περίοδοι της ψευδοτυχαίας ακολουθίας - η συμβολή του επιθυμητού χρήστη είναι κοντά στο μηδέν , σύμφωνα με την ιδιότητα της καθυστέρησης και πρόσθεσης [(2.10 ) του κεφαλαίου 2.2 ] . Ωστόσο είναι ξεκάθαρο από την προηγούμενη ότι το N γενικά πρέπει να είναι πολύ λιγότερο από μια περίοδο . Είναι σημαντικό τόσο για τη διατήρηση ανεκτής υποβάθμισης σύμφωνα με την συχνότητα σφάλματος και την ικανοποίηση της κατάστασης (3.1) που τα δεδομένα $x_n(k)$ είναι συνεχή σε όλα τα N τσιπς της σύναψης .

Στο γεγονός όπου το N είναι πολύ μικρότερο από την περίοδο της ψευδοτυχαίας ακολουθίας , όταν $a_n(k)$ είναι εκτός συγχρονισμού θα εμφανιστεί σαν μια τυχαία ακολουθία ρίψης νομίσματος . Η μέση τιμή της θα είναι μηδέν , αλλά το άθροισμα θα συμβάλει στη διακύμανση ένα ποσό ανάλογο στο $NE_c(k)$ . Έτσι οι εξισώσεις διακύμανσης (3.4) και (3.5) πρέπει να αυξηθούν από τον όρο που είχε αποκλισθεί προηγουμένως στην άθροιση της (3.5) .

Αυτό είναι ,

$$Var\left(Y^{(I)}\right) = Var\left(Y^{(Q)}\right) = NI_0/2,$$

*όπου τώρα*

$$I_0 = N_0 + \sum_{j=1}^{k_u} E_c(j) \int |H(f)|^4 \, df/T_c . \quad (3.8)$$

Καθώς η (3.8) εφαρμόζεται μόνο στην μη συγχρονισμένη περίπτωση , για απλότητα θα την εφαρμόσουμε παντού ( ως ανώτατο όριο στην

συγχρονισμένη περίπτωση ) . Όταν ο αριθμός των χρηστών $k_u$ είναι μεγάλος , ο πρόσθετος όρος έχει μικρό αποτέλεσμα .

## 3.3 Πιθανότητες συναγερμού εύρεσης σφάλματος

Μέχρι στιγμής έχουμε θεωρήσει μόνο τις στατιστικές πρώτης και δεύτερης τάξης των συσκευών εξέτασης υπόθεσης . Τώρα δείχνουμε πως αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διάκριση μεταξύ των δυο περιπτώσεων : όταν ο χρόνος σφάλματος είναι μικρότερος από το χρόνο του ενός τσιπ , έτσι ώστε οι μεταβλητές Y έχουν μια θετική σημασία και όταν το σφάλμα είναι μεγαλύτερο από το χρόνο ενός τσιπ , έτσι ώστε οι μεταβλητές Y έχουν αμελητέες ή μηδενικές σημασίες . Στο προσάρτημα 3A , έχουμε επίσης να δικαιολογήσουμε τις διαδικασίες επεξεργασίας και να δείξουμε κάτω από τι συνθήκες είναι βέλτιστες ή μη ικανοποιητικές .

### 3.3.1 Σταθερά σήματα σε γκαουσιανό θόρυβο ( L=1)

Τώρα κατανοούμε τις πλήρεις πρώτης τάξης στατιστικές της μεταβλητής ανίχνευσης $Z = [Y^{(l)}]^2$ όπως δείχνει η εικόνα 3.1. Με L =1

Και πιο συγκεκριμένα με γνωστή κεντρική συχνότητα , $f_0$ , και χρόνο τσιπ , δείχνετε στο παράρτημα 3A ότι η συσκευή εξέτασης είναι βέλτιστη με άγνωστη φάση στον γκαουσιανό θόρυβο , είτε σύμφωνα με τα κριτήρια βελτιστοποίησης του Bayes είτε με του Neyman Pearson .

Στην τελευταία περίπτωση , το κατώτατο όριο θ έχει επιλεχτεί για να καθιερώσει τη διευκρινισμένη πιθανότητα ψεύτικων συναγερμών , $P_F$. Αυτό τότε εγγυάται ότι η πιθανότητα εντοπισμού , $P_D$ είναι αυξημένη για αυτό το $P_F$ επίπεδο . Δείχνεται επίσης στο παράρτημα 3A.3 ότι για L =1 στην εικόνα 3.1 ο συναγερμός σφάλματος και οι πιθανότητες εντοπισμού λαμβάνονται σαν ολοκληρώματα από δυο λειτουργίες πιθανοτήτων : $p_0(Z)$ , με την παραδοχή ότι η υπόθεση

είναι λανθασμένη και $p_1(Z)$, με την παραδοχή ότι είναι σωστή . Για τις διαδόσεις των BPSK και QPSK , αυτά δίνονται από

$$p_0(Z) = \frac{e^{-Z/V}}{V},$$

$$p_1(Z) = \frac{\exp[-Z+M_D^2)/V]}{V}\ \varphi_0\left(\frac{2\sqrt{M_D^2 Z}}{V}\right). \qquad (3.9)$$

Εδώ , V είναι δυο φορές η διακύμανση κάθε εξαρτήματος και $\varphi_0$ ( ) είναι η μηδενικής τάξης τροποποιημένος παράγοντας -- μην μπερδευτείτε με την αξία της πυκνότητα παρεμβολής $I_0$ . $M_D^2$ η μέση τετραγωνική, η οποία λαμβάνεται ως το άθροισμα των τετραγώνων των εξαρτημάτων I και Q της (3.2)

Έτσι , από την (3.2) και την (3.8) έχουμε

$$M_D^2 = N^2 E_c(k) R^2(\tau), \qquad \tau < 1, \qquad (3.10α)$$

$$V = NI_0 = N\left(N_0 + \sum_{j=1}^{k_u} E_c(j) \int |H(f)|^4 df/T_c\right). \quad (3.10b)$$

Από τις λειτουργίες πιθανοτήτων της (3.9) , ο συναγερμός σφάλματος και ανίχνευσης πιθανοτήτων λαμβάνονται ως

$$P_F = \int_\theta^\infty p_0(Z)dZ = e^{-\theta/V}, \qquad (3.11)$$

$$P_D = \int_\theta^\infty p_1(Z)dZ = \int_{\theta/V}^\infty e^{-(\chi+\mu)\oint_0(2\sqrt{\mu\chi})dx} \qquad (3.12)$$

Η τελευταία αναπόσπαστη λειτουργία είναι η Marcum Q και έχουμε ορίσει τη SNR

$$\mu = \frac{M_D^2}{V} = \frac{NE_c(k)R^2(\tau)}{N_0 + \sum_{j=1}^{k_u} E_c(j) \int |H(f)|^4 df/T_c} \qquad (3.10c)$$

Η εικόνα 3.2a δείχνει την πιθανότητα ανίχνευσης ως λειτουργία συναγερμού πιθανότητας σφάλματος για έναν αριθμό τιμών του SNR, μ . Στην θεωρία ανίχνευσης literature , αυτά είναι γνωστά ως χαρακτηριστικά λειτουργίας του δέκτη .

### 3.3.2 Σταθερά σήματα σε Γκαουσιανό θόρυβο με ολοκλήρωση ανίχνευσης ( L >1 )

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3.2 η τιμή του N είναι περιορισμένη από δυο προϋποθέσεις : ότι η συχνότητα σφάλματος , Δf , να είναι επαρκώς μικρή έτσι ώστε $N(\Delta f)T_c < 1$, και ότι η διαμόρφωση δεδομένων $x_n(k)$ παραμένει στο ίδιο σημείο μέσω των N τσιπς. Έτσι για να σταθεί περισσότερο από N τσιπς σε μια δοσμένη υπόθεση , η ενέργεια πρέπει να συσσωρευτεί κατά τη διάρκεια διαδοχικών N-τσιπς διαστημάτων και μετά να κατοχυρωθεί όπως φαίνεται στις εικόνες 3.1a και 3.1b . Σε αυτήν την περίπτωση , για L>1 , ο ψευδής συναγερμός και ανίχνευση γενικοποιούνται σε (βλέπε παράρτημα 3A.4)

$$P_F = \int_{\theta}^{\infty} p_0\,(Z)dZ = \int_{\theta/V}^{\infty} \frac{\chi^{L-1}e^{-x}}{(L-1)!}dx = e^{-\theta/V} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{(\theta/V)^k}{k!} \qquad (3.13)$$

$$P_D = \int_{\theta}^{\infty} p_1\,(Z)dZ = \int_{\theta/V}^{\infty} \left(\frac{x}{L\mu}\right)^{(L-1)/2} e^{-(x+L\mu)} \oint_{L-1}\left(2\sqrt{L\mu x}\right)dx$$

(3.14)

Εδώ , η $\oint_{L-1}(\quad)$ είναι η (L-1) τάξης τροποποιημένη συνάρτηση Bessel και μ είναι το SNR ανά N-chip διάστημα (3.10c). Ο τελευταίος αναπόσπαστος είναι η συνάρτηση Marcum Q Lth τάξης [Marcum, 1950; helstrom, 1968]. Η περίπτωση για L=2 φαίνεται στην εικόνα 3.2a

### 3.3.3 Εξασθενημένα Rayleigh σήματα (L ≥ 1)

Συχνά σε επίγεια μετάδοση , με πολλαπλές ανακλάσεις που φτάνουν στον δέκτη με ελάχιστες σχετικές καθυστερήσεις και τυχαίες φάσεις ( όπως θα περιγραφεί στο κεφάλαιο 4.3 ), το σήμα είναι εξασθένιση Rayleigh . Σε αυτή την περίπτωση τα στοιχεία του I και Q είναι Γκαουσιανά , όπως και ο θόρυβος .

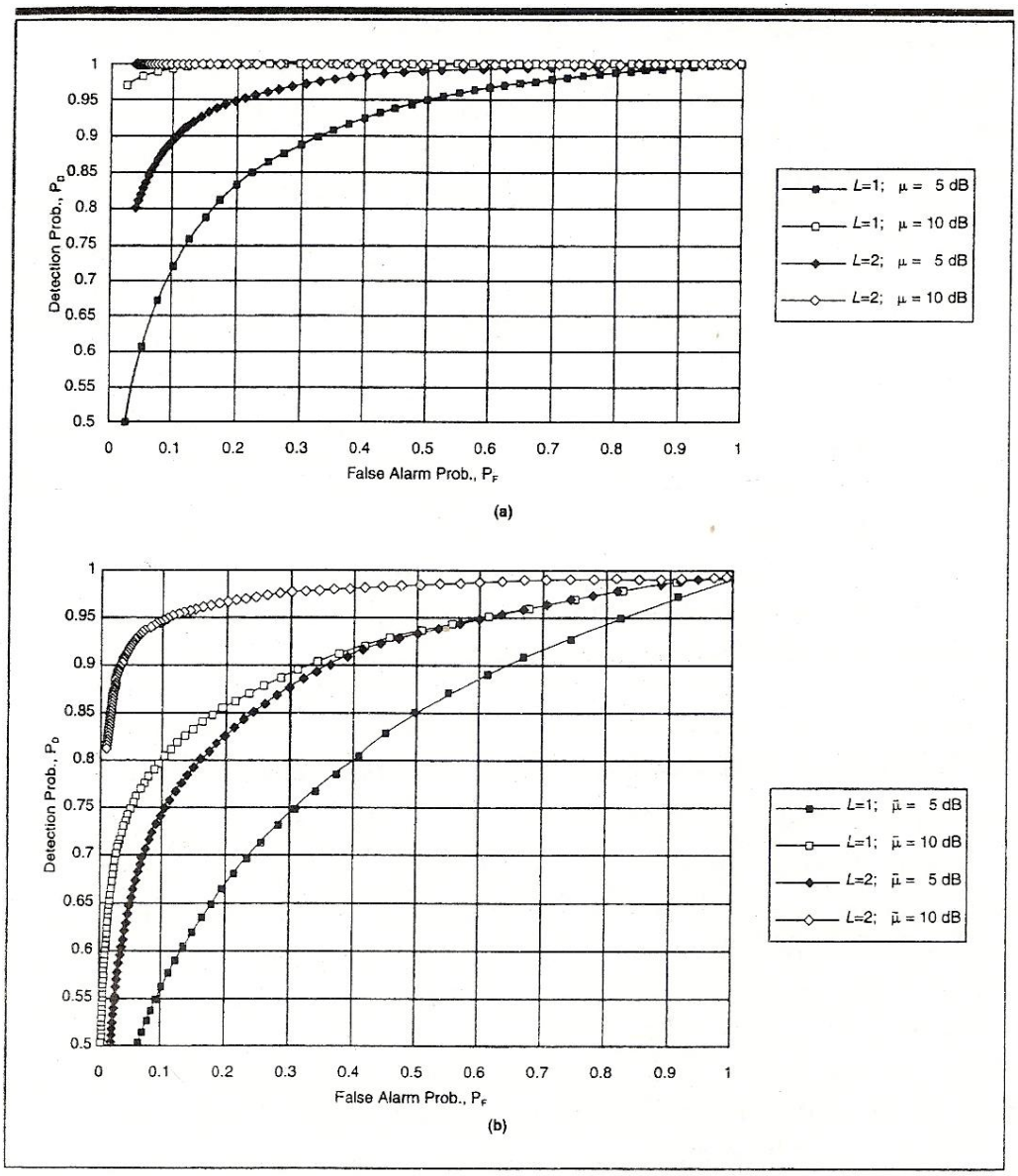



**Figure 3.2** (a) Detection and false alarm probabilities for unfaded channel, $L = 1$ and 2. (b) Detection and false alarm probabilities for Rayleigh fading, $L = 1$ and 2.

Υποθέτουμε ότι η εξασθένιση Rayleigh είναι αρκετά αργή όπου το πλάτος όπως και η φάση ( και ως εκ τούτου τα εξαρτήματα I και Q ) παραμένουν σταθερά κατά N τσιπς χρόνους αλλά αρκετά γρήγορα ώστε αποτελεσματικά N τσιπς τμήματα είναι κατ' ουσία ανεξάρτητα. Καθώς η πιθανότητα συναγερμού σφάλματος δεν αλλάζει , η συνάρτηση πιθανότητας για τη σωστή υπόθεση δείχνεται στο παράρτημα 3A.5 να είναι η ίδια όπως $p_0(Z)$ , αλλά με το V αντικαθιστάμενο από

$$V_F = N\left[I_0 + N\overline{E_c(k)}R^2(\tau)\right] = V(1+\bar{\mu}), \qquad (3.15)$$

όπου $\overline{E}_C$ είναι η μέση ενέργεια ανά τσιπ για το εξασθενημένο σήμα Rayleigh , από τη στιγμή που τώρα το σήμα όπως και τα στοιχεία του θορύβου είναι γκαουσιανά . V και το μ ορίζονται από την (3.10b) και την (3.10c) αντίστοιχα . Σε αυτήν την περίπτωση η έκφραση ανίχνευσης πιθανότητας γίνεται η ίδια όπως οι πιθανότητες συναγερμού σφάλματος στην (3.11) και στην (3.13) , αλλά με το V αντικαθιστάμενο από το μεγαλύτερο $V_F$ (παράρτημα 3A.5) .

Έτσι

$$P_D = e^{-\theta/V_F} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{(\theta/V_F)^k}{K!} \qquad (3.16)$$

Τα χαρακτηριστικά λειτουργίας του δέκτη για τα εξασθενημένα σήματα Rayleigh δείχνονται στην εικόνα 3.2b για L = 1 και 2 . Σημειώστε ότι η απόδοση για μ΄ = 5dB με L =1 . Αυτό συνεπάγεται ότι η διπλή ποικιλία κερδίζει περίπου 2 dB για αυτό το παράδειγμα εξασθένισης . Θα αντιμετωπίσουμε περεταίρω περιπτώσεις ποικίλων βελτιώσεων στην εξασθένιση στα επόμενα κεφάλαια .

## 3.4 Η διαδικασία έρευνας και απόκτησης χρόνου

Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει μόνο στατιστικές εξετάσεις για όλο το χρονοδιάγραμμα της ψευδοτυχαίας ακολουθίας . Καθαρά , χωρίς προηγούμενη ενημέρωση , όλες οι P αρχικές διανυσματικές υποθέσεις πρέπει να εξεταστούν , όπου P είναι η περίοδος της MLSR-παραγόμενης ακολουθίας . Ακόμα αυτό μπορεί να μην είναι σαφές : Αν η ακολουθία εξεταστεί μια φορά για το χρόνο κάθε τσιπ , η σωστή υπόθεση μπορεί να εξεταστεί με το σφάλμα μισού χρόνου ενός τσιπ . Σε αυτήν την περίπτωση $R^2(\tau)$ μπορεί να είναι χαμηλό από ένα σημαντικό παράγοντα και ως εκ τούτου επειδή μια μερικών decibel απώλεια πραγματοποιείται [6 dB για περιορισμένου χρόνου κυματομορφές (3.3b)]. Έτσι κάθε τσιπ υπόθεσης μπορεί να απλοποιηθεί μερικές φορές ανά τσιπ . Με μια περιορισμένου εύρους

ή σχεδόν έτσι κυματομορφή , με $\ell$ υποθέσεις ανά τσιπ η περιορισμένου εύρους απώλεια της κυματομορφής μειώνεται σε

$\sin^2[\pi/(2\ \ell\ )/[\pi/(2\ \ell)^2$ (0.9 dB απώλεια για $\ell$= 2, 0.2 db για $\ell$=4 ). Για να εξετάσουμε όλες τις υποθέσεις για όλη την περίοδο τότε θα χρειαστεί μια έρευνα για v = $\ell$P πιθανές υποθέσεις . Σημειώστε ότι για να εξασφαλιστούν σαφείς υψηλές πιθανότητες εντοπισμού για αποδεκτές πιθανότητες εσφαλμένου συναγερμού όπως προσδιορίστηκε στο τελευταίο κεφάλαιο , κάθε εξέταση απαιτεί άθροιση πάνω από NL τσιπς . Έτσι ο τελικός χρόνος θα είναι αναλογικός με vNL χρόνους τσιπ . Φυσικά αν η έρευνα χωριστεί εξίσου μεταξύ k παράλληλων επεξεργαστών , τότε ο αριθμός των επιπέδων που μπορεί να χρειαστεί να εξεταστεί από κάθε επεξεργαστή είναι v/k .

Στα περισσότερα πρακτικά συστήματα , ολόκληρη η ψευδοτυχαία ακολουθία δεν χρειάζεται να εξεταστεί . Ο δέκτης θα έχει μια λογική εκτίμηση του σωστού χρόνου και των αρχικών χρόνων όλων των ακολουθιών των χρηστών που είναι γνωστές . Το άτομο που καλεί μπορεί επίσης να πληροφορηθεί της πρόθεσης του να μεταδώσει , στέλνοντας παράλληλα το αρχικό της διάνυσμα εντοπισμού και το πολυώνυμο γεννήτρια χρησιμοποιώντας ένα βοηθητικό κανάλι , πιθανότατα διαδιδόμενο από μια συντομότερη ακολουθία . Σε αυτές τις περιπτώσεις η παράμετρος P θα αναφέρεται σε έναν αριθμό τσιπ υποθέσεων για να εξεταστούν αντί της περιόδου της ψευδοτυχαίας ακολουθίας .

### 3.4.1 Σειριακή αναζήτηση μονού περάσματος (Απλοποιημένη)

Η παράμετρος απόκτησης του μέγιστου ενδιαφέροντος είναι , φυσικά , ο τελικός χρόνος αναζήτησης που απαιτείται για την εύρεση της σωστής έννοιας υπόθεσης χρόνου μέσα σε λιγότερο από $T_c$ . Σημειώστε ότι αν η αναζήτηση έχει προχωρήσει μέσω όλων των πιθανοτήτων χωρίς την αποδοχή της σωστής υπόθεσης , η διαδικασία θα επαναληφθεί . Έτσι μια σειριακή αναζήτηση μπορεί να περιγραφεί από ένα κυκλικό διάγραμμα , όπως δείχνει η εικόνα 3.3 .

Εδώ κάθε κόμβος αντιπροσωπεύει μια υπόθεση . Οι ετικέτες πάνω στους κλάδους μεταξύ των κόμβων υποδεικνύουν την πιθανότητα της συγκεκριμένης αλλαγής , πολλαπλασιασμένης από μια δύναμη της μεταβλητής z . Η δύναμη χρησιμοποιείται για να δείξει τις εξεταστικές χρονικές περιόδους υπόθεσης που απαιτούνται για να γίνει η δοσμένη μετάβαση . (Κάθε περίοδος εξέτασης υπόθεσης ανταποκρίνεται σε NL χρόνους τσιπ ).

Θεωρούμε πρώτα μια εξιδανικευμένη μεγαλοφυή κατάσταση , όπου το δείγμα τσιπ εμφανίζεται στην κορυφή [R(τ) =1 ], και έτσι μόνο ένα παράδειγμα ανά τσιπ αρκεί (v = P) . Ο κόμβος στη κορυφή του διαγράμματος κατάστασης της εικόνας 3.3a αντιπροσωπεύει τη σωστή κατάσταση με τον τέλειο χρόνο . Όλα τα άλλα σημεία στον εξωτερικό κύκλο αντιπροσωπεύουν τις P – 1 λανθασμένες υποθέσεις . Οι καταστάσεις στον εσωτερικό διακεκομμένο κύκλο αντιπροσωπεύουν εισερχόμενες καταστάσεις λανθασμένου συναγερμού ως συνέπεια αποδοχής μιας εσφαλμένης υπόθεσης . Θεωρούμε ότι μια τόσο λανθασμένη επιλεγμένη υπόθεση χρόνου τελικά θα εξαιρεθεί , αλλά μόνο μετά από K εξεταστικές περιόδους , κατά τη διάρκεια των οποίων μια βοηθητική συσκευή αναγνωρίζει ότι το χρονοδιάγραμμα του συστήματος εξακολουθεί να μην είναι καθορισμένο . Σημειώστε ότι η κατάσταση στην οποία η έρευνα ξεκινά , μπορεί να είναι οποιαδήποτε των v κόμβων στον εξωτερικό κύκλο , παρόλο που για μετέπειτα ευκολία εξαιρούμε την αρχή στη σωστή χρονική κατάσταση .

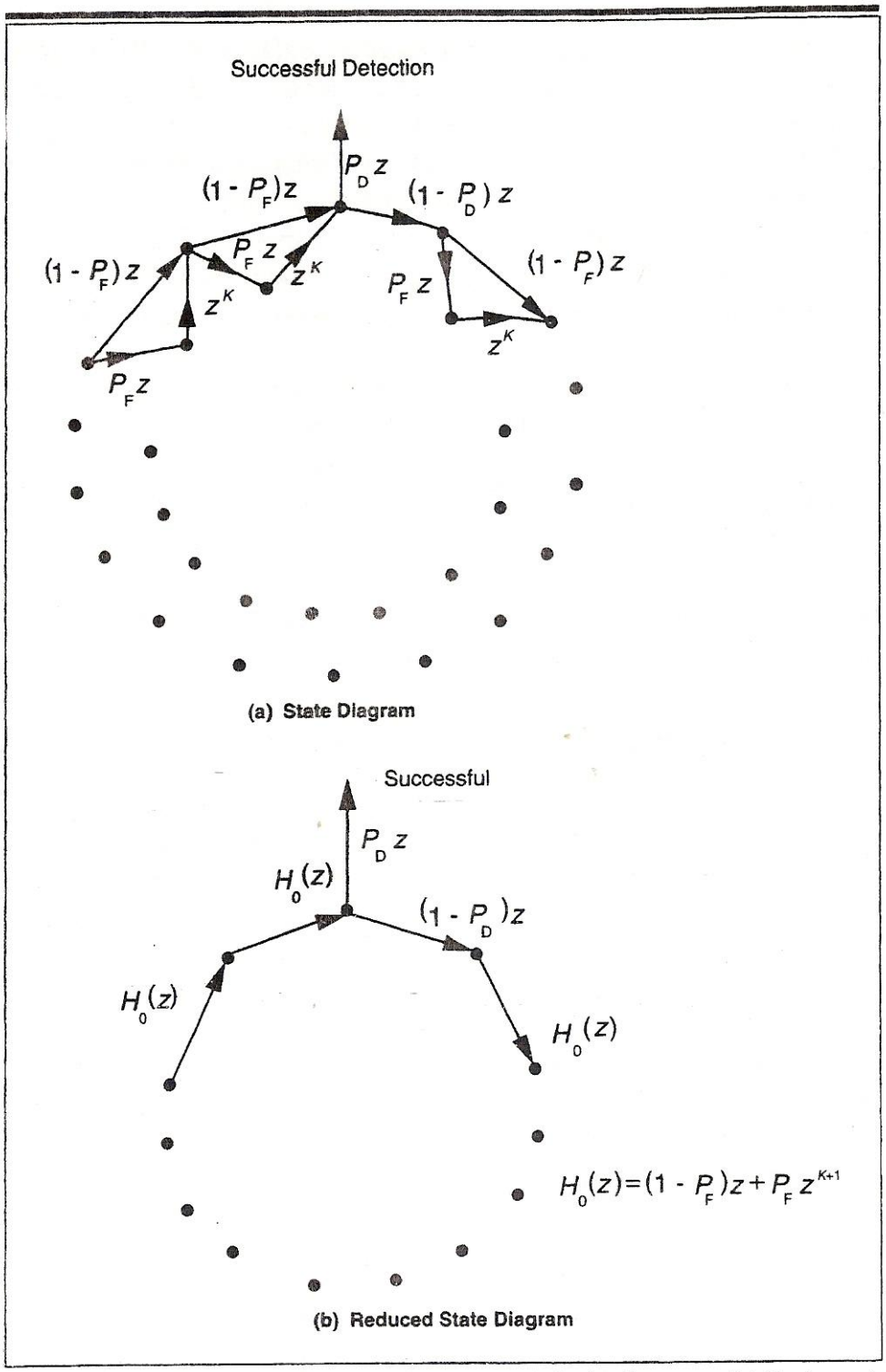



**Figure 3.3** Simplified search state diagrams. (a) State diagram. (b) Reduced state diagram.

Ο χρόνος έναρξης είναι μια τυχαία μεταβλητή ίση με το άθροισμα των χρόνων μετάβασης όλων των κλαδών για το επιλεγμένο

μονοπάτι στο διάγραμμα κατάστασης , από οποιαδήποτε από τις όμοιες αρχικές καταστάσεις μέχρι την τελική σωστή κατάσταση ανίχνευσης στην κορυφή του διαγράμματος . Είναι σχετικά απλό να λειφθεί μια παραγωγική λειτουργία για τη διανομή και τη συνάρτηση μεταφοράς από κάθε ενδεχόμενο κόμβο εκκίνησης ( στον εξωτερικό κύκλο ) στον τελικό κόμβο προορισμού . Αυτό απλοποιείται περισσότερο επισημαίνοντας ότι μια εξόρμηση στον εσωτερικό κύκλο κόμβων τελικά επιστρέφει στον επόμενο εξωτερικό κυκλικό κόμβο με μια καθυστέρηση K + 1. Έτσι για το λόγο του υπολογισμού του παράγοντα μετάδοσης , μόνο οι κόμβοι του εξωτερικού κύκλου πρέπει να θεωρηθούν , συνδεδεμένοι από κλάδους παραγόντων μετάδοσης .

$$H_0(z) = (1 - P_F)z + P_F z^{K+1} \qquad (3.17)$$

Αυτό εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από τους κλάδους που προέρχονται από τον κόμβο στην κορυφή του κύκλου ( που ενώνεται επίσης στον τελικό κόμβο ), ο οποίος παραμένει αμετάβλητος ( εικόνα 3.3b) . Τότε ο παράγοντας μετάδοσης από έναν αρχικό κόμβο που είναι οι κλάδοι i αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού από την κορυφή μέχρι τον τελικό κόμβο προορισμού ( σωστός ) είναι

$$U_i(z) = \frac{H_0^i(z) P_D z}{1-(1-P_D) z H_0^{v-1}(z)}$$

Τώρα , από τη στιγμή που όλοι οι κόμβοι είναι αρχικά όμοιοι , ο τελικός παράγοντας μετάδοσης κατά μέσο όρο όλων των v-1 αρχικών κόμβων ( υποθέτοντας ότι αρχίζουμε οπουδήποτε ) αλλά η σωστή κατάσταση είναι

$$U(z) = \frac{1}{v-1} \sum_{i=1}^{v-1} U_i(z) = \frac{1}{v-1} \frac{P_D z \sum_{i=1}^{v-1} H_0^i(z)}{1-(1-P_D) z H_0^{v-1}(z)} \qquad (3.18)$$

$$= \frac{P_D z H_0(z)[1-H_0^{v-1}(z)]}{(v-1)[1-H_0(z)][1-(1-P_D) z H_0^{v-1}(z)]}$$

$H_0$ (z) δίνεται από την ( 3.17). Η παραγωγική λειτουργία λαμβάνεται από την επέκταση της (3.18) μέσω πολυωνυμικής διασποράς . Δείχνεται αυτό

$$U(z) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \, z^k$$

Τότε ο μέσος χρόνος για την απόκτηση , συμβολίζεται $\bar{T}_{ACQ'}$ δίνεται από

$$\bar{T}_{ACQ} = \sum_{k=1}^{\infty} kU_k = \left.\frac{dU(z)}{dz}\right|_{z=1}$$

εξεταστικές περιόδους . Σημειώστε ότι παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο αποδίδεται η διαφορά μεταξύ της δεύτερης και της πρώτης στιγμής , από

$$\left.\frac{dU(z)}{dz}\right|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)U_k = \overline{T^2}_{ACQ} - \bar{T}_{ACQ}$$

Έτσι , ακολουθείται ότι η διακύμανση του χρόνου για την απόκτηση του είναι

$$\mathrm{Var}(\bar{T}_{ACQ}) = \overline{T^2}_{ACQ} - (\bar{T}_{ACQ})^2$$

$$= \left.\left\{\frac{d^2U(z)}{dz^2} + \frac{dU(z)}{dz}\left[1 - \frac{dU(z)}{dz}\right]\right\}\right|_{z=1} \qquad (3.20)$$

Σημειώστε ότι κάθε εξέταση παίρνει $NLT_c$ δευτερόλεπτα . $\bar{T}_{ACQ}$ πρέπει να πολλαπλασιαστεί από αυτή την ποσότητα για να ληφθεί ο μέσος χρόνος σε δευτερόλεπτα , και η διακύμανση πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το τετράγωνο της . Οι ιδιότητες της ανίχνευσης και του συναγερμού σφάλματος που απαιτούνται στην (3.17) και στην (3.18) , όπως επίσης και σε ότι ακολουθεί , υπολογίζονται από τις εκφράσεις που δίνονται στο κεφάλαιο 3.3 ( ή λαμβάνονται από την εικόνα 3.2a ή b ).

### 3.4.2 Σειριακή μονοφασική αναζήτηση (ολοκληρωμένη)

Θεωρήστε τώρα την πραγματική κατάσταση κατά την οποία κατά τη διάρκεια κάθε χρόνου τσιπ $T_c$ , πολλαπλάσιες χρονικά υποθέσεις εξετάζονται σειριακά για χρονικούς διαχωρισμούς $T_c / \ell$ και οι κόμβοι αυξάνονται $\ell$- φορές έτσι τώρα v - $\ell$P . Όλες οι v - $2\ell$ καταστάσεις

που μπορούν να οδηγήσουν σε λανθασμένους συναγερμούς αντιμετωπίζονται ακριβώς όπως πριν . Ωστώσο , οι $2\ell$ καταστάσεις εντός του ενός τσιπ του σωστού χρόνου εμφανίζονται στο διάγραμμα κατάστασης όπως δείχνεται στην εικόνα 3.4a , όπου $P_{Dj}$ είναι η έκφραση της ιδιότητας ανίχνευσης με παράμετρο $M_D^2$ της (3.10a) αξιολογούμενη σε τ= $\tau_j$ ] και όπου

$$\left|\tau_{j+1} - \tau_j\right| = T_c/\ell \,, \qquad \text{j οποιοσδήποτε ακέραιος}$$

Η χειρότερη περίπτωση ανταποκρίνεται σε χρόνους δειγματοληψίας που διαφέρουν από το σωστό (κορυφή) χρόνο από

$$\frac{j-(\ell+1/2)}{\ell} T_c, \qquad j=1,2,\ldots\ldots,2\ell$$

Συνδυάζοντας όλες τις $2\ell$ καταστάσεις σε μια οδηγεί στο απλοποιημένο διάγραμμα της εικόνας 3.4b με συναρτήσεις μεταφοράς των κλάδων που προέρχονται από αυτόν τον κόμβο,

$$H_D(z) = \sum_{j=1}^{2\ell} P_{Dj} z \prod_{j=1}^{j-1} [(1-P_D)z] \,, \qquad (3.21)$$

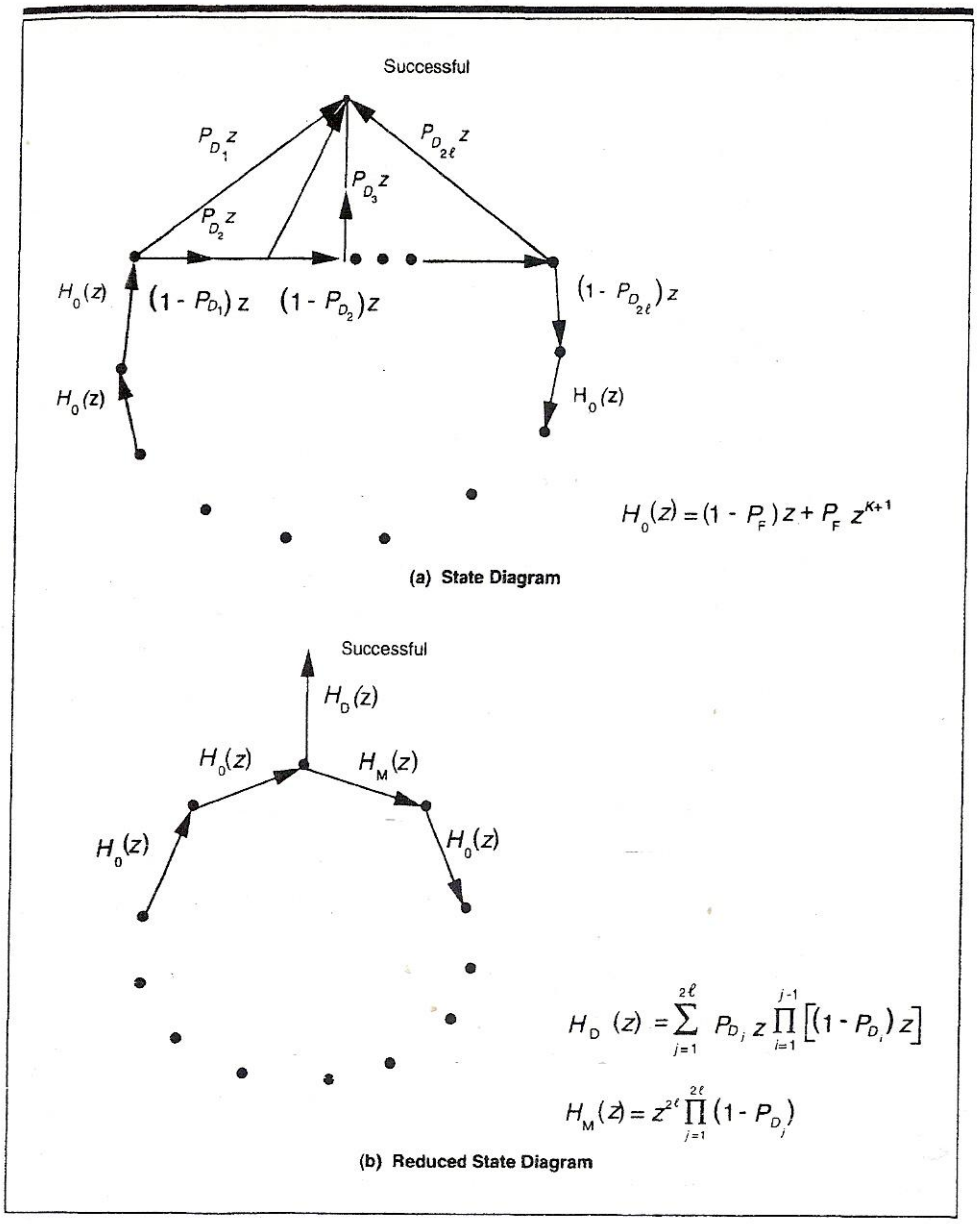



**Figure 3.4** Complete state diagram. (a) State diagram. (b) Reduced state diagram.

Και

$$H_M(z) = z^{2\ell} \prod_{j=1}^{2\ell} (1 - P_{D_j}) \qquad (3.22)$$

Έτσι υποθέτουμε ότι ξεκινάμε από οπουδήποτε εξωτερικά της περιόδου του σωστού τσιπ , η συνάρτηση μεταφοράς για αυτή τη γενική σειριακή αναζήτηση είναι

$$U(z) = \frac{H_0(z) H_D(z)[1 - H_0^{v-2\ell}(z)]}{(v-2\ell)[1 - H_0(z)][1 - H_M(z) H_0^{v-2\ell}(z)]} \qquad (2.23)$$

Αυτό εξειδικεύεται στην (3.18) για $H_D(z) = P_D z$ και $H_M(z) = (1- P_D)z$ , με $2\ell$ αντικαθιστούμενο από 1 . ( Σημειώστε ότι η προηγούμενη περίπτωση εφαρμόζεται για τη δειγματοληψία ακριβώς στην κορυφή όταν υπάρχει ένα δειγματοληπτικό λάθος , θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο δείγματα εντός του ενός τσιπ ). $\bar{T}_{ACQ}$ και $Var(\bar{T}_{ACQ})$ λαμβάνονται όπως πριν από την (3.19) και την (3.20) . Είναι σαφές ότι ο μέσος χρόνος για την απόκτηση της παραμέτρου μπορεί να ελαχιστοποιηθεί από την κατάλληλη επιλογή του θ (κατόπιν του οποίου το $P_D$ και το $P_F$ εξαρτώνται ) και των παραμέτρων N και L , αφού ο μέσος χρόνος σε δευτερόλεπτα είναι $(NLT_c)\bar{T}_{ACQ}$ .

### 3.4.3 Σειριακή αναζήτηση πολλαπλής διάρκειας

Εκτός από την επιλογή των παραμέτρων , μια άλλη προσέγγιση για την ελαχιστοποίηση της σειριακής αναζήτησης είναι η εκτέλεση επιτυχών εξετάσεων με μετρήσεις πολλαπλής διάρκειας . Το διάγραμμα ροής της εικόνας 3.5 απεικονίζει αυτή την έννοια . Αν αποτύχει το σύστημα προχωρά να ελέγξει την επόμενη υπόθεση . Αν επιτύχει , μια μεγαλύτερη διάρκεια $L_2NT_c$ ελέγχεται κατά κατώτατο όριο $\theta_2$ , όπου $m = L_2/L_1 > 1$ και $\theta_2 > \theta_1$ . Αν αυτό επιτύχει η υπόθεση θεωρείται σωστή (παρόλο που μπορεί να είναι ένας λανθασμένος συναγερμός όπως προσδιορίστηκε για K επόμενες χρονικές περιόδους ) . Αν αποτύχει το δεύτερο όριο , απορρίπτεται και η επόμενη υπόθεση ελέγχεται. Αμέσως εξαφανίζουμε απίθανες υποθέσεις μειώνοντας σημαντικά την συνολική εξαγορά , με μόνο μια περιστασιακή αύξηση επειδή μια σωστή υπόθεση εξαλείφεται γρήγορα στο πρώτο πέρασμα.

Το διάγραμμα κατάστασης είναι το ίδιο όπως για ένα χρόνο παραμονής εικόνα 3.4b , αλλά με τον κλάδο οι συναρτήσεις μεταφοράς ορίζονται όπως ακολουθεί , με τους εκθέτες (1) και (2) να δείχνουν την πρώτη και τη δεύτερη παραμονή.

Για τη λανθασμένη υπόθεση διαστημάτων,

$$\widetilde{H}_0(z) = z\left(1 - P_F^{(1)}\right) + z^{1+m}P_F^{(1)}\left(1 - P_F^{(2)}\right) + z^{1+m+k}p_F^{(1)}p_F^{(2)}$$
(3.24)

Για τη σωστή υπόθεση χαμένου διαστήματος

$$\widetilde{H}_M(z) \leq H_M^{(1)}(z) + H_D^{(1)}(z)H_M^{(2)}(z^m)\ , \qquad (3.25)$$

και για τη σωστή υπόθεση ανιχνεύσιμου κλάδου ,

$$\widetilde{H}_D(z) = H_D^{(1)}(z)H_M^{(2)}(z^m) \qquad (3.26)$$

Εδώ το άνω όριο αντιπροσωπεύει μια πιθανή υπερεκτίμηση του χρόνου , βασισμένη στην επανεξέταση όλων των $2\ell$ σωστών υποθέσεων στο δεύτερο πέρασμα , παρόλο που το πρώτο όριο περνά μόνο ένα από αυτά .

Διαφορετικά , η διαδικασία για τον υπολογισμό απόκτησης στατιστικών χρόνων είναι η ίδια όπως για την περίπτωση της μονής παραμονής.

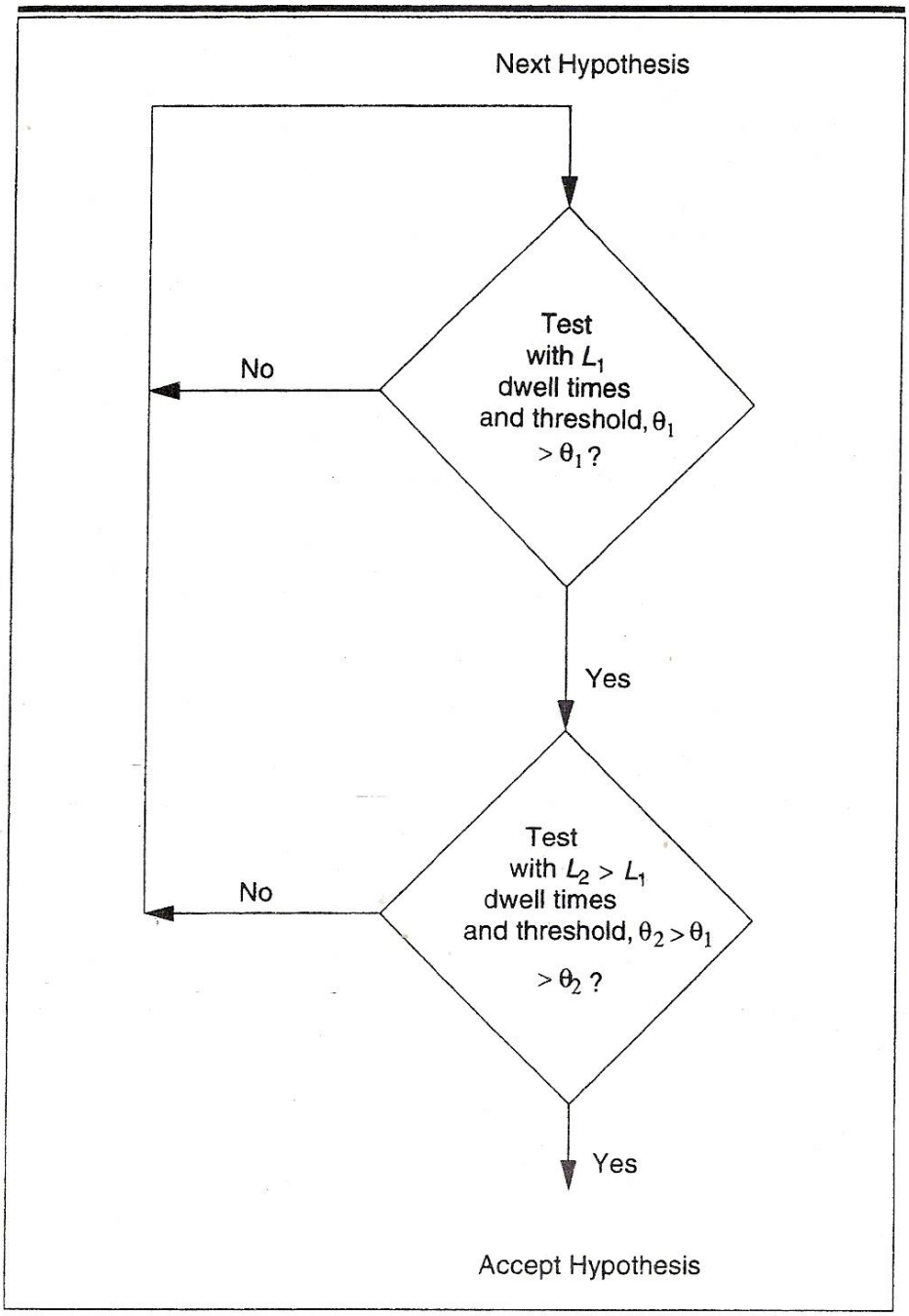



**Figure 3.5** Two-dwell serial search.

Αυτό είναι, για τη δεύτερη περίπτωση παραμονής , τα άνω όρια για τη μέση τιμή και τη διασπορά του χρόνου απόκτησης λαμβάνονται αντικαθιστώντας τους όρους H(z) από $\overline{H}$(z) όρους στην (3.23). Το υπέρτατο πλεονέκτημα της αναζήτησης διπλής παραμονής ( η οποία μπορεί να γενικευτεί σε πολλαπλές παραμονές ) εξαρτάται από την εφαρμογή και την βελτιστοποίηση των παραμέτρων . [Πολύδωρος και Σίμον, 1984; Σίμον 1985]

## 3.5 Ανίχνευση χρόνου ψευδοτυχαίων σημάτων

Μόλις ο χρόνος του δέκτη έχει συγχρονιστεί με ακρίβεια ένα κλάσμα του χρόνου του τσιπ , η εκτίμηση θα πρέπει να βελτιωθεί περεταίρω για να φτάσει το μηδέν . Επιπλέον, εξαιτίας της σχετικής κίνησης του πομπού και του δέκτη και την αστάθεια των ρολογιών , οι διορθώσεις πρέπει να είναι συνεχείς . Αυτή η διαδικασία η οποία λέγεται εντοπισμός , εκτελείται από την λεγόμενη νωρίς- αργή συσκευή πύλη της εικόνας 3.6 . Πρόκειται για μια επεξεργασία της βασικής συσκευής αποδιαμόρφωσης και απόκτησης της εικόνας 3.1a και b . Επαναφερόμενη από την (3.10a) όπου η συνιστώσα του σήματος της ενέργειας Z είναι ανάλογη με $R^2(\tau)$ όπου τ είναι το σφάλμα χρόνου . Μπορούμε να εκτελέσουμε την ίδια διαδικασία προβαλλόμενη από Δ δευτερόλεπτα και καθυστερημένη από Δ δευτερόλεπτα , όπου $\Delta < T_c$ είναι ένα κλάσμα του χρόνου του τσιπ . Τότε ο χρόνος εντοπισμού μετρήσεων ενέργειας , $Z_-$ και $Z_+$ , έχει τμήματα σημάτων $M_D^2$ που είναι ανάλογα σε $R^2(\tau - \Delta)$ και $R^2(\tau + \Delta)$ , αντίστοιχα . Αφού R(τ), όπως ορίζεται στην (3.2) , είναι μια άρτια συνάρτηση η οποία μειώνεται μονοτονικά σε τ εντός του κυρίου λοβού , οι διαφορές των μετρήσεων $Z_- - Z_+$ θα έχουν μια μέση αναλογία σε $R^2(\tau - \Delta)$ και $R^2(\tau + \Delta)$ . Αυτό θα είναι θετικό για $\tau > 0$ (αργή εκτίμηση) και αρνητικό για $\tau < 0$ ( γρήγορη εκτίμηση) . Η μέτρηση $Z_- - Z_+$ θα χρησιμοποιηθεί για τη διόρθωση του χρόνου μέσω της τεχνικής του εντοπισμού βρόχου . Θα αναβάλουμε την εξέταση της απόδοσης βρόχου για την επόμενη υποενότητα . Πρώτα κατανοούμε τις στατιστικές των πρόωρων προσφάτων μετρήσεων πύλης . Κατά τη διάρκεια θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό

$$R_+ = R(\tau + \Delta) ,$$

$$R_+ = R(\tau - \Delta) \qquad (3.27)$$

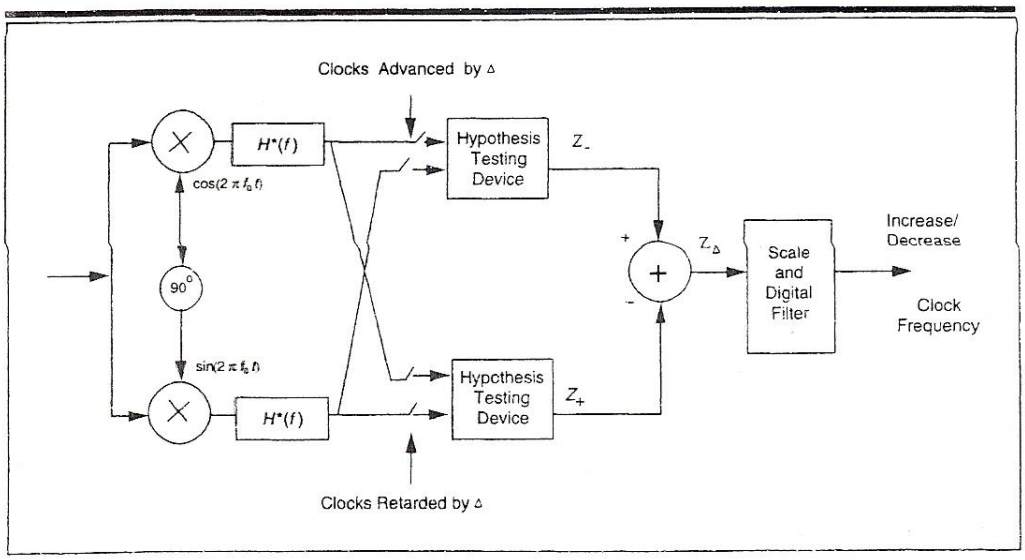



**Figure 3.6** Early–late gate.

## 3.5.1 Στατιστικές μέτρησης της νωρίς- αργά πύλης

Θεωρούμε πρώτα $Z_+$. Οι στατιστικές του Z- θα είναι οι ίδιες , αλλά με το R+ αντικαθιστάμενο από το R- . Υποθέτουμε όπως πριν ότι ο αριθμός των χρηστών $k_u$ όπως και ο αριθμός των συσσωρευμένων τσιπς N είναι αρκετά μεγάλος ώστε μπορούμε να πάρουμε την $Y_+^{(I)}$ και την $Y_+^{(Q)}$ ως Γκαουσιανές μεταβλητές σύμφωνα με τη προσέγγιση του κεντρικού θεωρήματος ορίου . Μετά μπορούμε να εκφράσουμε το καθένα ως

$$\Upsilon_+^{(I)} = \sum_{n=1}^{N} \left[\sqrt{E_c} R_+ cos\phi + v_n^{(I)}\right],$$

$$\Upsilon_+^{(Q)} = \sum_{n=1}^{N} \left[\sqrt{E_c} R_+ sin\phi + v_n^{(Q)}\right] \qquad (3.28)$$

$v_n^{(I)}$ και $v_n^{(Q)}$ είναι ανεξάρτητες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μηδενικές σημασίες και

$$Var\left[v_n^{(I)}\right] = Var\left[v_n^{(Q)}\right] = I_0/2 \qquad (3.29)$$

Μπορούμε να πάρουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά των τελευταίων μετρήσεων $Z_+$ από έναν άμεσο αλλά κουραστικό υπολογισμό, όπως ακολουθεί :

$$E(Z_+) = E\left\{\left[\Upsilon_+^{(I)}\right]^2\right\} + E\left\{\left[\Upsilon_+^{(Q)}\right]^2\right\}$$

$$= N^2 E_c R_+^2 cos^2\phi + E\{[\textstyle\sum_{n=1}^{N} v_n^{(I)}]^2\} \qquad (3.30)$$

$$+N^2 E_c R_+^2 sin^2\phi + E\{[\textstyle\sum_{n=1}^{N} v_n^{(Q)}]^2\}$$

$$= N^2 E_c R_+^2 + \ 2N(I_0/2) = N(NE_c R_+^2 + I_0),$$

$$E(Z_+^2) = E(\left\{\left[\Upsilon_+^{(I)}\right]^2 + \left[\Upsilon_+^{(Q)}\right]^2\right\}^2)$$

$$= E\left\{\left[\Upsilon_+^{(I)}\right]^4\right\} + E\left\{\left[\Upsilon_+^{(Q)}\right]^4\right\} + 2E\left\{\left[\Upsilon_+^{(I)}\right]^2\right\} E\left\{\left[\Upsilon_+^{(Q)}\right]^2\right\}$$

(3.31)

Αυτό ακολουθεί από το γεγονός ότι όλες οι $v^{(I)}$ και οι $v^{(Q)}$ μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους . Οι τετραγωνικοί όροι στην (3.31) είναι όπως απάνω

$$E\left\{\left[\Upsilon_+^{(I)}\right]^2\right\} = N^2 E_c R_+^2 cos^2\phi + N\, I_0/2 \qquad (3.32)$$

$$E\left\{\left[\Upsilon_+^{(Q)}\right]^2\right\} = N^2 E_c R_+^2 sin^2\phi + N\, I_0/2$$

Για τους όρους τέταρτης δύναμης , από τη στιγμή που οι περιττές στιγμές του v είναι μηδενικές ,

$$E\left\{\left[\Upsilon_+^{(I)}\right]^4\right\} = N^4 E_c^2 R_+^4 cos^4\phi$$

$$+6N^3(I_0/2)E_c R_+^2 cos^2\phi + E\left\{\left[\textstyle\sum_{n=1}^{N} v_n^{(I)}\right]^4\right\}$$

$$E\left\{\left[\Upsilon_+^{(Q)}\right]^4\right\} = N^4 E_c^2 R_+^4 cos^4\phi \qquad (3.33)$$

$$+6N^3(I_0/2)E_cR_+^2 sin^2\phi + E\left\{\left[\sum_{n=1}^{N} v_n^{(Q)}\right]^4\right\}$$

Αλλά αφού όλες οι ν μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και Γκαουσιανές με μηδενικές σημασίες

$$E\left\{\left[\sum_{n=1}^{N} v_n^{(I)}\right]^4\right\} = 3\left\{E\sum_{n=1}^{N}\left[v_n^{(I)}\right]^2\right\}^2 = 3(N\,I_0/2)^2 \quad (3.34)$$

Έτσι , συνδυάζοντας την (3.31) μέσω της (3.34), έχουμε

$$E(Z_+^2) = N^4E_c^2R_+^4(cos^4\phi + sin^4\phi) + 3N^3I_0E_cR_+^2 + 3\,3(NI_0)^2/2$$

$$+2N^4E_c^2R_+^4 cos^2\phi + sin^2\phi + (NI_0)^2/2 + N^3I_0E_cR_+^2 \quad (3.35)$$

$$= N^4E_c^2R_+^4 + 2[N^2I_0^2 + 2N^3I_0E_cR_+^2]$$

Τελικά , αφαιρώντας τα τετράγωνα της (3.30) από την (3.34) παίρνουμε

$$Var(Z_+) = E(Z_+^2) - [E(Z_+)]^2$$

$$= N^4E_c^2R_+^4 + 2[N^2I_0^2 + N^3I_0E_cR_+^2] \quad (3.36)$$

$$-[N^4E_c^2R_+^4 + N^2I_0^2 + 2N^3I_0E_cR_+^2]$$

$$= (NI_0)^2[1 + 2N(E_c/I_0)R_+^2]$$

Ο ίδιος υπολογισμός για το Z_ αποδίδει τα ίδια αποτελέσματα όπως στην (3.30) και την (3.36), αλλά με R+ αντικαθιστάμενο από R_ στο προηγούμενο , και τα δυο οριοθετημένα από την ενότητα .

Έτσι , οι πρώτες και οι δεύτερες εντολές στατιστικής της μέτρησης καθυστέρησης $Z_\Delta = Z_- - Z_+$ είναι

$$E[Z_\Delta(\tau)] = E(Z_-)\text{-}E(Z_+) = N^2E_c(R_-^2 - R_+^2)$$

$$= N^2E_c[R^2(\tau - \Delta) - R^2(\tau + \Delta)] \quad (3.37)$$

$$\mathrm{Var}[Z_\Delta(\tau)] \le Var(Z_-) + Var(Z_+) \le 2(NI_0)^2(1 + 2N\,E_c/I_0) \quad (3.38)$$

Ο λόγος για την τελευταία ανισότητα είναι ότι και στις πρώτες και στις τελευταίες μετρήσεις παρατηρούνται τα ίδια λαμβανόμενα

σήματα για τα μη χωρισμένα διαστήματα . Έτσι , η συσχέτιση ή συνδιακύμανση του $Z_+$ και του Z- θα είναι θετική . Από τη στιγμή που η διακύμανση της διαφοράς ισοδυναμεί με το άθροισμα των διακυμάνσεων μείον δυο φορές η συνδιακύμανση, μια θετική συνδιακύμανση μειώνει το άθροισμα στην (3.38) .

### 3.5.2 Χρόνος ανίχνευσης βρόχου

Έχοντας δώσει τις στατιστικές της μέσης τιμής και της διασποράς της μέτρησης του χρόνου σφάλματος μπορούμε να αναπαραστήσουμε το αποτέλεσμα της εφαρμογής της μέτρησης σαν μια διόρθωση της ψευδοτυχαίας ακολουθίας της γεννήτριας ρολογιού στην εικόνα 3.6 . Ορίζουμε το κέρδος ως μια κανονικοποιημένη λειτουργία του σχετικού σφάλματος χρονισμού $\tau/T_c$ στους όρους της (3.37)

$$E[Z_\Delta(\tau)] = N^2 E_c G(\tau/T_c)$$

Όπου

$$G(\tau/T_c) = R^2\left(\frac{\tau-\Delta}{T_c}\right) - R^2\left(\frac{\tau+\Delta}{T_c}\right) \quad (3.39)$$

Ορίζουμε επίσης τη διακύμανση παρεμβολής ως

$$V_0 \leq 2N^2 I_0^2 (1 + 2N\, E_c/I_0) \qquad (3.40)$$

Οι λειτουργίες κέρδους G( ) για τις περιπτώσεις περιορισμού χρόνου και για τον ιδανικό περιορισμό εύρους (3.3a και 3.3b ) απεικονίζονται στην εικόνα 3.7

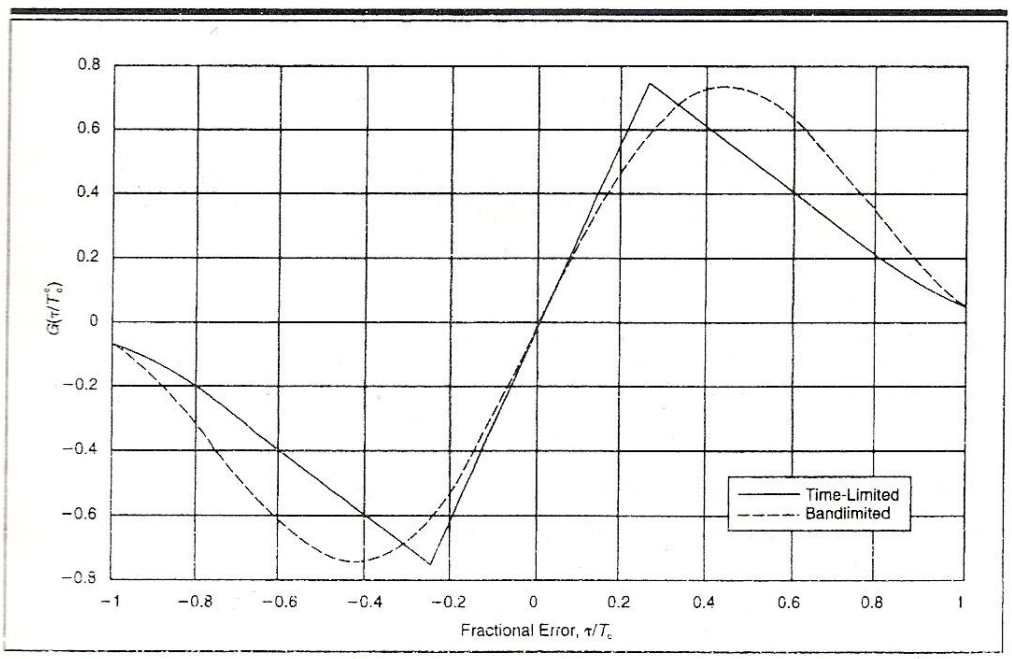



**Figure 3.7** Tracking error function for $\Delta/T_c = 0.25$.

σαν λειτουργίες του σχετικού σφάλματος χρονισμού $\tau/T_c$ για την περίπτωση $\Delta/T_c$ = ¼ Ο χρονισμός του ρολογιού διατηρείται από έναν ταλαντωτή ελέγχου τάσης (VCO) . Η συχνότητα του ρολογιού του VCO ελέγχεται από τη μέτρηση του σφάλματος χρόνου σαν κλιμακωμένη και φιλτραρισμένη από το ψηφιακό φίλτρο . Ο απόλυτος χρονισμός σε κάθε τσιπ είναι έτσι τροποποιημένος σύμφωνα με το άθροισμα όλων των αλλαγμένων συχνοτήτων που προκλήθηκαν προηγουμένως από τα σφάλματα χρονισμού . Έτσι ο χρονισμός του VCO (φάση) είναι μοντελοποιημένος από έναν συσσωρευτή για όλες τις προηγούμενες συνδέσεις όπως δείχνει η εικόνα 3.8a . Ο συντελεστής κλίμακας α αντιπροσωπεύει το κέρδος που εισήχθη στην μετατροπή τάσης σε συχνότητα .

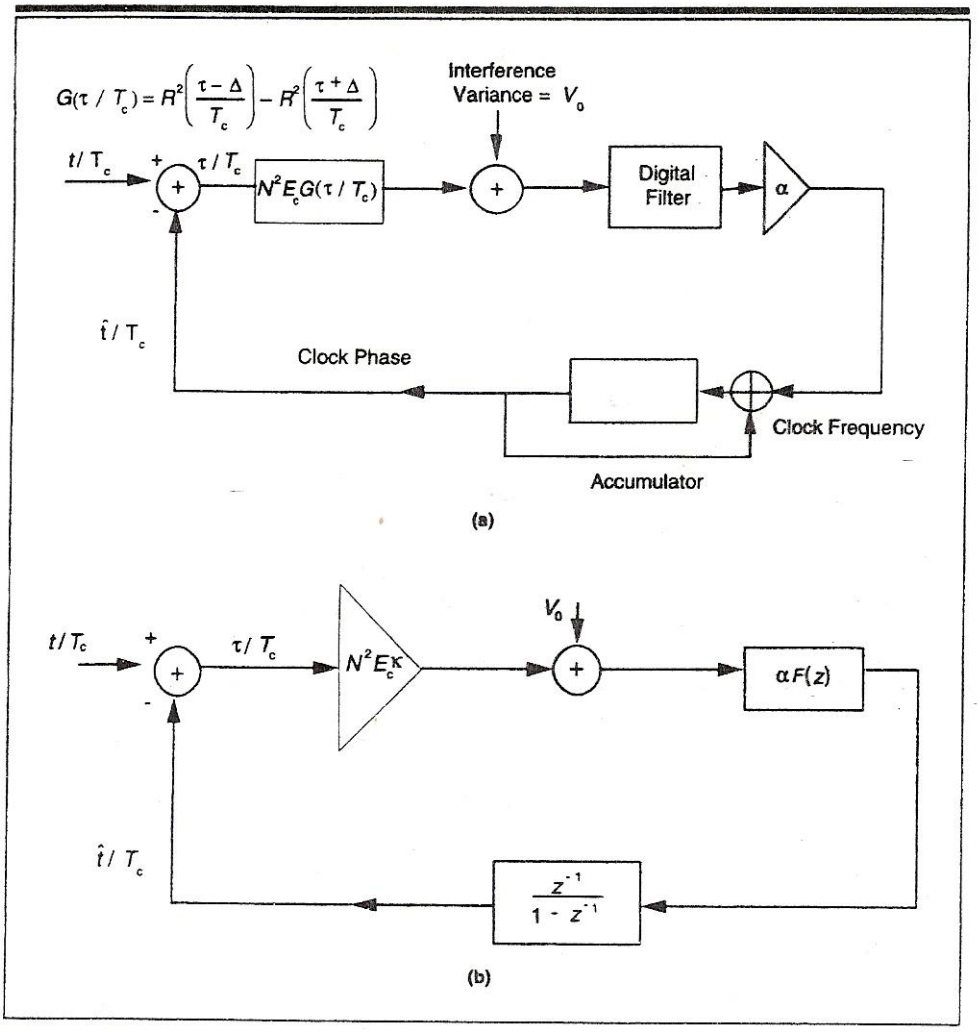



**Figure 3.8** (a) Time-tracking loop model. (b) Linear model of time-tracking loop.

Μόλις ο αρχικός συγχρονισμός έχει αποκτηθεί , το σχετικό σφάλμα χρονισμού κανονικά θα γίνει μικρό (|τ| << Δ ). Επίσης σημειώστε από την εικόνα 3.7 ότι το σφάλμα ανίχνευσης θα είναι κανονικά αρκετά μικρό ώστε το σφάλμα μέτρησης μπορεί να ληφθεί σαν γραμμικός παράγοντας του σχετικού σφάλματος χρονισμού $\tau/T_c$, με συντελεστή κλίσης ίσο με την κλίση του G(τ) για τ=0. Αυτό οδηγεί στο γραμμικό μοντέλο της εικόνας 3.8b , με συντελεστή κλίμακας κέρδους $N^2E_c\kappa$ , όπου

$$\kappa = \left.\frac{dG(\tau/T_C)}{d(\tau/T_C)}\right|_{\tau=0}$$

Για τις δυο ειδικές περιπτώσεις της εικόνα 3.7 αυτές είναι

$$\kappa = \frac{d}{d(\tau/T_c)}\left[\left(1-\left|\frac{\tau-\Delta}{T_c}\right|\right)^2-\left(1-\left|\frac{\tau+\Delta}{T_c}\right|\right)^2\right]^2\Bigg|_{\tau=0} \quad (3.41)$$

$$= 4(1-\Delta/T_c) \qquad \text{(time-limited)}$$

Και

$$\kappa = \frac{d}{d(\tau/T_c)}\left\{\left[\frac{\sin\left[\pi\left(\tau-\Delta\right)/T_c\right.}{\pi\left(\tau-\Delta\right)/T_c}\right]^2-\left[\frac{\sin\left[\pi\left(\tau+\Delta\right)/T_c\right.}{\pi\left(\tau+\Delta\right)/T_c}\right]^2\right\}\Bigg|_{\tau=0}$$

$$= \frac{4\sin\left(\pi\Delta/T_c\right)}{\pi(\Delta/T_c)^2} \quad (3.42)$$

$$\times\left[\frac{\sin\left(\pi\Delta/T_c\right)}{\pi\Delta/T_c}-\cos\left(\pi\Delta/T_c\right)\right] \quad \text{(περιορισμένο εύρος).}$$

Αν πάρουμε Δ= $T_c$ /4

κ=3 (περιορισμός χρόνου)

$$\kappa = \frac{32}{\pi}\left(\frac{4}{\pi}-1\right) = 2.78 \text{ (περιορισμός εύρους)}$$

Εντός του γραμμικού μοντέλου , ο ( μια μέτρηση χρονισμού ) χειριστής καθυστέρησης συμβολίζεται ως $z^{-1}$ , όπως είναι συνηθισμένος για διακριτή γραμμική ανάλυση συστήματος . Μπορούμε να λάβουμε την παραγωγική λειτουργία για το χρονισμό σφάλματος σύμφωνα με ένα αρχικό σχετικό σφάλμα ($\tau_0/T_c$ ) , το οποίο αντιπροσωπεύεται από μια συνάρτηση βήματος της οποίας η παραγωγική λειτουργία είναι $(\tau_0/T_c)/(1 - z^{-1})$ , όπως

$$\frac{\tilde{\tau}(z)}{T_c} = \frac{\tau_0}{T_c}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)\frac{1}{1+H(z)'}$$

Όπου

$$H(z) = \frac{N^2E_c\kappa\alpha F(z)z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (3.43)$$

Η διακύμανση του σχετικού χρονισμού σφάλματος λαμβάνεται από το γραμμικό μοντέλο ως

$$Var(\tau/T_c) = \frac{V_0}{(N^2E_c)^2\kappa^2}\oint\frac{H(z)H(z^{-1})}{[1+H(z)][1+H(z^{-1})]}\frac{dz}{2\pi iz} \quad (3.44)$$

Η ολοκλήρωση είναι γύρω από το μοναδιαίο κύκλο .

Αν το ψηφιακό φίλτρο παραλείπεται ( με εξαίρεση το κέρδος α) ο βρόχος ανίχνευσης είναι πρώτης τάξης , έτσι ώστε (3.43) γίνεται

$$\frac{\tilde{\tau}(z)}{T_c} = \frac{\tau_0}{T_c}\frac{1}{1-z^{-1}(1-N^2E_c\kappa\alpha)} \qquad (3.45)$$

Αυτό σημαίνει ότι μετά από L μετρήσεις χρόνων , $\tau/T_c = (\tau_0/T_c)(1 - N^2E_C\kappa\alpha)^L$ , το οποίο απαιτεί $\alpha<1/(\kappa N^2E_c)$ για σταθερότητα . Φυσικά , όσο μικρότερη η αξία του α, τόσο πιο αργά το σφάλμα διασπάται . Η έκφραση διακύμανσης της (3.44) γίνεται , σε αυτήν την περίπτωση ,

$$Var(\tau/T_c) = \oint \frac{V_0 a^2 z^{-1} dz}{2\pi i[1-z^{-1}(1-N^2E_c\kappa\alpha)][1-z(1-N^2E_c\kappa\alpha)]}$$

$$\frac{V_0 a^2}{1-(1-N^2E_c\kappa\alpha)^2} = \frac{V_0 a}{N^2E_c\kappa(2-N^2E_c\kappa\alpha)'}$$

όπου $V_0$ οριοθετείται από την (3.40) και $\alpha < 1/(N^2E_c\kappa)$

Επομένως

$$Var(\tau/T_c) < \frac{2I_0^2(1+2NE_c/I_0)a}{E_c\kappa} \qquad (3.46)$$

Αυτό μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό διαλέγοντας ένα αρκετά μικρό, με μια ανταποκρινόμενα μικρή μείωση σε αρχικό σφάλμα , η επίπτωση από ένα πολύ στενό εύρος ζώνης βρόχου .

Μπορούμε να πετύχουμε μια βελτιωμένη κλειστή συμπεριφορά , με την ίδια διακύμανση χρησιμοποιώντας ένα βρόχο δεύτερης τάξης με ένα ψηφιακό φίλτρο του οποίου η λειτουργία μετάδοσης απασχολεί ανάλογο επιπλέον ποσοστό αποζημίωσης .

$$F(z) = 1 + \frac{az^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad (3.47)$$

Το ανταποκρινόμενο αποτέλεσμα στο αρχικό σφάλμα και τη διακύμανση δίνονται από την (3.43) και την (3.44) .

## 3.6 Συγχρονισμός φέροντος

Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με τον συγχρονισμό των δυαδικών σημάτων διαδιδόμενων από ψευδοτυχαίες ακολουθίες . Έχουμε δείξει ότι ο χρονισμός της ακολουθίας μπορεί να αποκτηθεί και να εντοπιστεί με ακρίβεια και έτσι η εξάπλωση μπορεί να αφαιρεθεί , χωρίς καμία γνώση της φέρουσας φάσης και μόνο με μια πρόχειρη εκτίμηση της φέρουσας συχνότητας . Μόλις ο χρονισμός έχει αποκτηθεί , η φάση και η συχνότητα μπορούν με ακρίβεια να εκτιμηθούν από συμβατικές τεχνικές φάσης κλειδώματος βρόχου . Η ανάλυσή τους , παρόμοια με αυτήν που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3.5 καλύπτεται σε πολλά κείμενα . Ακόμα και στην εξασθένηση Rayleigh η μέση φάση και συχνότητα μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια , παρέχοντας την παρακολούθηση του εύρους ζώνης του βρόχου είναι στενή σε σχέση με το εξασθενημένο εύρος ζώνης .

# Λειτουργίες πιθανότητας και εκφράσεις πιθανότητας

## 3.A.1 Bayes και Neyman – Pearson Εξέταση υπόθεσης

Η απόκτηση συγχρονισμού και ψηφιακής επικοινωνίας περιλαμβάνουν και τα δυο εξέταση δυαδικών υποθέσεων : αν ένα σήμα παρουσιάζεται ή είναι απών στην πρώτη περίπτωση , ή αν ένα μηδέν ή ένας άσσος μεταδόθηκε στην δεύτερη περίπτωση . Το μοντέλο υποθέτει ότι ο αριθμός N των παρατηρήσεων ή των μετρήσεων έχει σημειωθεί με βάση το σήμα , ορισμένο ως τον παράγοντα $y = y_1, y_2 \ldots, y_N$ . Προϋποθέτει επίσης ότι πιθανότητες υπό όρους είναι γνωστές για τις παρατηρήσεις κάτω από τις δυο υποθέσεις, τις οποίες ορίζουμε ‘’0’’ και ‘’1’’ . Τα δυαδικά σύμβολα αναφέρονται στην παρουσία και απουσία σήματος στην περίπτωση συγχρονισμού και στη μετάδοση του ‘’0’’ ή του ‘’1’’ στην περίπτωση δυαδικής επικοινωνίας . Ορίζουμε αυτές τις υπό όρους πιθανότητες

κατά $p_0(y)$ και $p_1(y)$ , που συνήθως ονομάζονται συναρτήσεις πιθανότητας.

y είναι γενικά ένα διάνυσμα πραγματικών αριθμών , παρόλο που μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την υπόθεση όπου τα τμήματα είναι από μια πεπερασμένη μη αριθμητική σειρά .

Το κριτήριο Bayes [Helstrom, 1968] επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει το κόστος ενός λάθους . Ωστόσο , απαιτεί να ξέρουμε τις πιθανότητες των προτέρων του ''0'' και του ''1'' , όπως επίσης το σύνολο των κοστών της επιλογής του ''I'' όταν το ''j'' είναι αληθές , όπου το ''i'' και το ''j'' μπορούν να είναι είτε ''0'' ή ''1'' . Το κριτήριο Neyman – Pearson [Helstrom, 1968; Neyman και Pearson, 1933] δεν απαιτεί κανένα από τα παραπάνω . Επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει την πιθανότητα επιλογής του ''0'' όταν το ''1'' είναι αληθές για μια δοσμένη αποδεκτή πιθανότητα επιλογής ενός ''1'' όταν ένα ''0'' είναι αληθές (ένας λανθασμένος συναγερμός).

Εφαρμόζοντας οποιοδήποτε κριτήριο δίνεται αφορμή για τον έλεγχο του λόγου πιθανοφάνειας :

$$\Lambda(y) \triangleq \frac{p_a(y)}{p_b(y)} \gtrless \psi \qquad (3A.1)$$

Εδώ α=0 ή 1 και το b = $\overline{a}$, και το ψ είναι ένα αριθμητικό όριο το οποίο εξαρτάται από τις βελτιστοποιημένες παραμέτρους της οποιαδήποτε εξέτασης . Αν ο δείκτης κάλυψης υπερβαίνει το ψ η υπόθεση ''a'' επιλέγεται , ενώ αν δεν το κάνει , η υπόθεση ''b'' επιλέγεται . Για δυαδική επικοινωνία ο κανόνας του Bayes , με ίσες πιθανότητες των προτέρων και ίσα κόστη της σύγχυσης ''a'' για ''b'' ή αντίστροφα απαιτεί ψ = 1 . Για το συγχρονισμό το ψ επιλέγεται να ικανοποιήσει την απαίτηση ότι η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού δεν πρέπει να υπερβαίνει μια δεδομένη τιμή .

Όταν οι παρατηρήσεις $y_1$ , $y_2$ , . . . . , $y_N$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους χωρίς μνήμη καναλιού , ο λόγος πιθανότητας μπορεί να γραφτεί ως προϊόν και ο λογάριθμος του σαν άθροισμα . Τότε η εξέταση μειώνεται σε

$$\ln \Lambda(y) = \sum_{j=1}^{N} \ln[p_a(y_i)/p_b(y_i)] \lessgtr \theta \qquad (3A.2)$$

Εδώ , θ = ln Ψ , το οποίο είναι ίσο με μηδέν για το ίσον πιθανοτήτων , ίσου κόστους , περίπτωση δυαδικής επικοινωνίας .

## 3.A.2 Συνεκτική υποδοχή σε πρόσθετο λευκό θόρυβο

Η απλούστερη εφαρμογή της καταγραφής της εξέτασης πιθανότητας , (3A.2) , μεταξύ άλλων είναι μια συνεκτική λήψη από ένα σταθερό πλάτος , σήματος γνωστής φάσης σε πρόσθετο γκαουσιανό θόρυβο μιας μονόπλευρης πυκνότητας , $I_0$ . Θεωρούμε ότι α = ''0'' αντιπροσωπεύεται (πριν από τη διάδοση από PN πολλαπλασιασμό) ως N τσιπς του πλάτους $+\sqrt{E}_c$ και το b =''1'' αντιπροσωπεύεται σαν N τσιπς του πλάτους $-\sqrt{E}_c$ . Τότε αν το y είναι το διάνυσμα των αποτελεσμάτων ( αφού έχει αποδιαδοθεί από πολλαπλασιασμό από την ίδια PN ακολουθία )

$$p_0(y) = \prod_{n=1}^{N} e^{-\left(y_a-\sqrt{E_c}\right)^2/I_0/\sqrt{\pi I_0}} \qquad (3A.3)$$

$$p_1(y) = \prod_{n=1}^{N} e^{-\left(y_a-\sqrt{E_c}\right)^2/I_0/\sqrt{\pi I_0}}$$

Εφαρμόζοντας την (3A.2), λαμβάνουμε

$$\ln \Lambda(y) = \frac{4\sqrt{E_c}}{I_0} \sum_{n=1}^{N} y_n \lessgtr \theta \qquad (3A.4)$$

Για δυαδική επικοινωνία με ίσες εκ των προτέρων πιθανότητες και κόστη, θ =0 . Έτσι μπορούμε να αγνοήσουμε το συντελεστή κλίμακας στην (3A.4) και να διαλέξουμε ένα ''0'' αν το άθροισμα είναι θετικό και ένα ΄΄1΄΄ αν είναι αρνητικό . Τότε δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την αναλογία ενέργειας προς θόρυβο .

## 3.A.3 Μη συνεκτική λήψη στο AWGN για μη εξασθενημένα σήματα

Υποθέτουμε τώρα ότι το πλάτος είναι σταθερό , αλλά η φάση είναι άγνωστη και λήφθηκε να είναι μια ομοιόμορφα κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή . Για την περίπτωση συγχρονισμού με ‘’1’’ και ‘’0’’ που δηλώνει παρόν μήνυμα και απών , αντίστοιχα , τα διανύσματα παρατήρησης για τη φάση και τον τετραγωνισμό σαν αποτελέσματα μπορούν ληφθούν ως

$$y^{(I)} = (y_1^{(I)}, y_2^{(I)}, \ldots\ldots, y_N^{(I)}) \text{ και } y^{(Q)} = (y_1^{(Q)}, y_2^{(Q)}, \ldots\ldots, y_N^{(Q)})$$

Τότε , για την υποδοχή με τυχαία φάση , ϕ στο AWGN με διακύμανση $I_0/2$ , παίρνουμε τις λειτουργίες πιθανότητας σε όρους και των δυο ομάδων από τις παρατηρήσεις και τις ρυθμίσεις στο ϕ . Όταν το σήμα είναι παρόν ,

$$p_1\left(y^{(I)}, y^{(Q)} \,|\Phi\,\right) = \prod_{n=1}^{N} exp\left[-\left(y_n^{(I)} - \sqrt{E_c}cos\Phi^2\right)/I_0\right]$$

$$exp\left[-\left(y_n^{(Q)} - \sqrt{E_c}cos\Phi^2\right)/I_0\right]/\pi I_0$$

Όταν το σήμα δεν είναι παρόν

$$p_0\left(y^{(I)}, y^{(Q)}\right) = \prod_{n=1}^{N} exp\left[-\left(y_n^{(I)}\right)^2/I_0\right] exp\left[-\left(y_n^{(Q)}\right)^2/I_0\right]/I_0\pi \qquad (3A.5)$$

Από τη στιγμή που η αναλογία των δυο λειτουργιών εξαρτάται μόνο από τα αθροίσματα

$$\Upsilon^{(I)} = \sum_{n=1}^{N} y_n^{(I)}, \qquad \Upsilon^{(Q)} = \sum_{n=1}^{N} y_n^{(Q)}, \quad (3A.6)$$

μπορούμε να πάρουμε τα ποσά που είναι παρατηρήσιμα . Οι διακυμάνσεις του $\Upsilon^{(I)}$ και του $\Upsilon^{(Q)}$ είναι V/2 , όπου

$$V \triangleq NI_0, \qquad (3A.7)$$

όσο οι σημασίες τους είναι $N\sqrt{E_c}\cos\phi$ και $N\sqrt{E_c}\sin\phi$ , αντίστοιχα .Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τις λειτουργίες πιθανότητας του $\Upsilon^{(I)}$ και του $\Upsilon^{(Q)}$ ως

$$p_1\left(Y^{(I)}, Y^{(Q)}\middle|\Phi\right) = \exp\left\{\left[Y^{(I)} - N\sqrt{E_c}\cos\Phi\right]^2/V\right\}$$

$$\times\, exp\left\{\left[Y^{(I)} - N\sqrt{E_c}\cos\Phi\right]^2/V\right\}/\pi V \quad (3A.8)$$

$$p_0\left(Y^{(I)}, Y^{(Q)}\right) = exp\left\{\left[\left(Y^{(I)}\right)^2 + \left(Y^{(Q)}\right)^2\right]^2/V\right\}/\pi V \qquad (3A.9)$$

Από τη στιγμή που η φάση φ είναι μια ομοιόμορφα τυχαία μεταβλητή , μπορούμε να λάβουμε τις άνευ όρων λειτουργία πιθανότητας ,όταν το σήμα είναι παρών από το μέσο όρο (3A.8) πάνω από το φ για να λάβουμε

$$p_1\left(Y^{(I)}, Y^{(Q)}\right) = \int_0^{2\pi} p\left(\left(Y^{(I)}, Y^{(Q)}\middle|\Phi\right)\right) d\Phi/2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi} exp\left\{-\left[\left(Y^{(I)}\right)^2 + \left(Y^{(Q)}\right)^2 + N^2E_c\right]/V\right\}$$

$$\times \frac{exp\left\{2N\sqrt{E_c}\left[Y^{(I)}\cos\Phi + Y^{(Q)}\sin\Phi\right]/V\right\}}{\pi V}\frac{d\Phi}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi V} exp\left(\frac{\left[\left(Y^{(I)}\right)^2 + \left(Y^{(Q)}\right)^2\right]}{V}\right)$$

$$\times \oint_0\left(\frac{2\sqrt{N^2E_c\left[\left(Y^{(I)}\right)^2 + \left(Y^{(Q)}\right)^2\right]}}{V}\right) exp(-N^2E_c/V)$$

όπου ,

$$\oint_0(x) \triangleq \int_0^{2\pi} \exp(x\, cos\Phi)\, d\Phi/2\pi$$

είναι η τροποποιημένη μηδενικής τάξης λειτουργία Bessel .

Τέλος , ορίζοντας τη μεταβλητή εξόδου

$$Z \triangleq \Upsilon^{(I)^2} + \Upsilon^{(Q)^2} \qquad (3A.11)$$

Και την τετραγωνική σημασία

$$M^2 = N^2 E_{c'} \qquad (3A.12)$$

λαμβάνουμε με κατάλληλο μετασχηματισμό της (3A.9) και της (3A.10) ,

$$p_0(Z) = \frac{\exp\,(-Z/V)}{V} \qquad (3A.13)$$

$$p_1(Z) = \frac{exp[-(Z+M^2)/V]}{V} \oint_0 \left(\frac{2\sqrt{M^2 Z}}{V}\right) \qquad (3A.14)$$

Σημειώνουμε επίσης ότι αν απλοποιήσουμε το Z από το V , αφήνοντας z=Z/V και το μ =$M^2$/ V, έχουμε τις λειτουργίες πιθανοτήτων των απλοποιημένων μεταβλητών ,

$$p_0(Z) = e^{-z}, \qquad (3A.13a)$$

$$p_1(Z) = e^{-(z+\mu)} \oint_0 (2\sqrt{\mu z}) \qquad (3A.14a)$$

Ο λογάριθμος της λειτουργίας αναλογίας εξέτασης γίνεται

$$\ln \Lambda(Z) = \ln[p_1(Z)/p_0(Z)] = \ln \oint_0 \left(2\sqrt{M^2 Z}/V\right) - M^2/V \lessgtr \theta$$

(3A.15)

Ωστόσο , αφού το $\phi_0(c\sqrt{Z})$ είναι μονοτονικό στα Z για όλα τα θετικά Z, η εξέταση μπορεί να απλοποιηθεί σε

$$Z/V = z \lessgtr \hat{\theta} \qquad (3A.16)$$

Το $\hat{\theta}$ λαμβάνεται από το Neyman –Pearson περιορισμό όπου η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού μένει στην τιμή α . Μετά χρησιμοποιώντας την (3A.13a) , έχουμε

$$a = Pr\left(z > \hat{\theta} \mid \kappa\alpha\nu\acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \sigma\acute{\eta}\mu\alpha\right) = \int_{\hat{\theta}}^{\infty} p_0(z)dz$$

$$= e^{-\hat{\theta}},$$

Έτσι ώστε

$$\hat{\Theta} = -\ln \alpha \qquad (3A.17)$$

## 3.A.4 Μη συνεκτική λήψη πολλών ανεξάρτητων παρατηρήσεων μη εξασθενημένων σημάτων στο AWGN

Υποθέτουμε ότι όπως στην εικόνα 3.1a κάνουμε L ανεξάρτητες παρατηρήσεις ( επιτυχώς ή σε διαφορετικά πολλών μονοπατιών στοιχεία , όπως στο κεφάλαιο 4) των οποίων οι άγνωστες φάσεις είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές . Από την (3A.15) , ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανότητας των L παρατηρήσεων γίνεται

$$\ln \Lambda(Z_1 , Z_2 , \ldots\ldots , Z_L) = \sum_{l=1}^{L} \ln[p_1(Z_l)/p_0(Z_l)]$$

$$= \sum_{l=1}^{L}\left[\ln \oint_0 \left(2\sqrt{M^2 Z_l}/V\right) - M^2/V\right] \lessgtr \theta \qquad (3A.18)$$

Αυτό απαιτεί γνώση και των δυο $E_c$ και V , τα οποία μπορεί να μην είναι διαθέσιμα ή εύκολα μετρήσιμα . Από την άλλη , για μικρές διαφωνίες , $\ln \phi_0(x) \sim x^2/4$ , έτσι ώστε μια λογική προσέγγιση της εξέτασης για την απλοποίηση του αθροίσματος είναι να απλοποιήσεις το άθροισμα τις Z μεταβλητές με αποτέλεσμα τη μη ιδανική δοκιμή

$$Z \triangleq \sum_{l=1}^{L} Z_l \lessgtr \hat{\theta} \qquad (3A.19)$$

Από τη στιγμή που το Z τότε είναι η μεταβλητή απόφασης , απαιτούμε την πιθανότητα λειτουργίας του κάτω και από τις δυο υποθέσεις . Από τη στιγμή που είναι το άθροισμα των L ανεξάρτητων μεταβλητών κάθε μια από τις οποίες έχει μια λειτουργία πιθανότητας δοσμένη από την (3A.13) ή την (3A.14) , καθορίζουμε τη χαρακτηριστική λειτουργία (μετασχηματισμό Laplace ) του καθενός ,

παίρνοντας καθενός την L – ιοστή δύναμη και αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό για να λάβουμε την επιθυμητή λειτουργία πυκνότητας πιθανότητας . Για ''0'' υποθέσεις , έχουμε από την (3A.13)

$$M_0(s) = \int_0^\infty p_0(Z)e^{-sZ}dZ = \frac{1}{1+V_s} \qquad (3A.20)$$

Τότε , για το άθροισμα των L μεταβλητών ,

$$p_0(Z) = \oint M_0^L(s)e^{sZ}ds/(2\pi i)$$

$$= \oint \frac{e^{sZ}}{(1+Vs)^L}\frac{ds}{2\pi i} \qquad (3A.21)$$

$$= \frac{Z^{L-1}e^{-Z/V}}{(L-1)!V^L}$$

Παρόμοια , από την (3A.14) , παίρνουμε

$$M_1(s) = \int_0^\infty p_1(Z)e^{-sZ}dZ$$

$$= \frac{exp\left[-M^2s/(1+Vs)\right]}{1+Vs} \qquad (3A.22)$$

Κατά συνέπεια , για το άθροισμα των L μεταβλητών

$$p_1(Z) = \oint M_0^L(s)e^{sZ}ds/(2\pi i)$$

$$= \oint \frac{exp\{s[Z-LM^2/(1+V_s)]\}}{(1+V_s)^L}\frac{ds}{2\pi i} \qquad (3A.23)$$

$$= \frac{1}{V}\left(\frac{Z}{LM^2}\right)^{(L-1)/2} exp\left(\frac{-Z-LM^2}{V}\right)\varphi_{L-1}\left(\frac{2\sqrt{LM^2Z}}{V}\right)$$

Για την κοινωνικοποιημένη μεταβλητή z = Z/V με μ = $M^2$/V , έχουμε τις λειτουργίες πιθανότατες

$$p_0(z) = \frac{Z^{L-1}e^{-z}}{(L-1)!'} \qquad (3A.21a)$$

$$p_1(z) = \left(\frac{z}{L\mu}\right)^{(L-1)/2} e^{-(z+L\mu)} \varphi_{L-1}\left(2\sqrt{L\mu z}\right) \qquad (3A.23a)$$

## 3.A.5 Μη συνεκτική λήψη εξασθενημένων σημάτων Rayleigh σε AWGN

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το πλάτος είναι κατανεμημένο κατά Rayleigh . Τότε η ενέργεια του τσιπ $E_c$ πολλαπλασιάζεται κατά $\alpha^2$ όπου α είναι η κατανομή Rayleigh.

Έτσι

$$p(a) = \frac{2a}{\sigma^2} e^{-a^2/\sigma^2} \qquad (3A.24)$$

Γράφοντας $\beta = \alpha^2$

$$p(\beta) = \frac{e^{-\beta/\sigma^2}}{\sigma^2} \qquad (3A.25)$$

και ο μέσος όρος της ενέργειας του τσιπ γίνεται

$$\bar{E}_c = \overline{a^2} E_c = \bar{\beta} E_c = \sigma^2 E_c \qquad (3A.26)$$

Τότε , για L = 1, $p_0(Z)$ ακόμα δίνεται από την (3A.13) αφού δεν βασίζεται στη (εξασθενημένη ) ισχύς του σήματος . Ωστόσο η $p_1(Z)$ της (3A.14) τροποποιείται από τη ζύγιση της ισχύς του σήματος, ή ισοδύναμα $M^2$ , από το β και το μέσο όρο . Τότε

$$p_1(Z) = \int_0^\infty \frac{e^{-\beta/\sigma^2}}{\sigma^2} \frac{exp\left[\left(-Z+\beta M^2\right)/V\right]}{V} \varphi_0\left(\frac{2\sqrt{\beta M^2 Z}}{V}\right) d\beta$$

$$= \frac{exp\left[-Z/\left(V+M^2\sigma^2\right)\right]}{V+M^2\sigma^2} \qquad (3A.27)$$

$$\triangleq \frac{exp\left[-Z/\left(V+\bar{M}^2\right)\right]}{V+\bar{M}^2}$$

Όπου $\bar{M}^2 \triangleq M^2\sigma^2 = N^2\bar{E}_c$

Έτσι ορίζουμε

$$V_F = V + \bar{M}^2 = N(I_0 + N\bar{E}_c)\,, \qquad (3A.28)$$

$$p_0(Z) = \frac{1}{V} e^{-Z/V} \ , \qquad (3A.29)$$

$$p_1(Z) = \frac{1}{V_F} e^{-Z/V_F} \qquad (3A.29)$$

Παρόμοια , για L >1 , Z είναι το άθροισμα των τετραγώνων των L ανεξάρτητων Rayleigh παρατηρήσεων . Έτσι ακολουθείται από την (3A.13) ότι

$$p_0(z) = \frac{Z^{L-1} e^{-z/V}}{(L-1)! V^L} \qquad (3A.30)$$

Και

$$p_1(z) = \frac{Z^{L-1} e^{-z/V_F}}{(L-1)! V_F^{L\prime}} \qquad (3A.31)$$

$$\text{όπου } V_F = V + \bar{M}^2 \qquad (3A.32)$$

Για την κοινωνικοποιημένη μεταβλητή z = Z/V , με $\bar{\mu}$ = $\bar{M}^2$/V και $V_F$ = V(1 +$\bar{\mu}$ ) , οι λειτουργίες πιθανότητας γίνονται

$$p_0(z) = \frac{Z^{L-1} e^{-z}}{(L-1)!\prime} \qquad (3A.30a)$$

$$p_1(Z) = \frac{Z^{L-1} e^{-z/(1-\bar{\mu})}}{(L-1)!(1-\bar{\mu})^L} \qquad (3A.31a)$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση σημάτων διάδοσης φάσματος σε πολλαπλού μονοπατιού και πολλαπλής πρόσβασης παρεμβολή

## 4 .1 Σκοπός

Μέσω των τελευταίων δυο κεφαλαίων έχουμε προσεγγίσει την παρεμβολή στο δοθέντα χρήστη από όλους τους χρήστες πολλαπλής πρόσβασης με Γκαουσιανή μέθοδο . Έχουμε επίσης ορίσει ότι στις περισσότερες περιπτώσεις το σήμα του επιθυμητού χρήστη ήταν σταθερό σε πλάτος , γεγονός που δεν υπόκεινται σε ξεθώριασμα σύμφωνα με την πολλαπλή διάδοση ή έμφραξη . Τώρα εξετάζουμε και τους δυο περιορισμούς . Στο επόμενο κεφάλαιο δείχνουμε ότι το συμπέρασμα της Γκαοσιανής παρεμβολής είναι συχνά μη απαραίτητο αν η απόδοση αξιολογηθεί χρησιμοποιώντας σχετική στενότητα άνω ορίων .Το υπόλοιπο κεφάλαιο ασχολείται με διαμόρφωση κυματομορφής και εναλλακτικές αποδιαμόρφωσης και την αποτελεσματική τους απόδοση με διάδοση πολλαπλών μονοπατιών και χρήστες πολλαπλής πρόσβασης . Ο στόχος είναι η επίτευξη αποδεκτής απόδοσης με τη χαμηλότερη δυνατή αναλογία ενέργειας bit προς παρεμβολή , $E_b$ / $I_0$ , έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε τη χωρητικότητα σύμφωνα με την (1.5) .

## 4.2 Όρια του Chernoff και του Bhattacharyya

Ξεκινάμε αξιολογώντας κάποιες πολύ γνωστές τεχνικές οριοθέτησης για συνεχές πλάτος και σήματα φάσης , συνεκτικά αποδιαμορφωμένα σε πρόσθετο Γκαουσιανό θόρυβο . Προχωράμε μετά να δείξουμε ότι τα ίδια όρια κρατούνται σε κάποιες περιπτώσεις όταν οι πραγματικές πολλαπλής πρόσβασης κατανομές παρεμβολής χρησιμοποιούνται στη θέση της Γκαουσιανής προσέγγισης . Αυτές οι τεχνικές οριοθέτησης θα χρησιμοποιηθούν για μια ποικιλία σκοπών μέσω του υπόλοιπου αυτού του κεφαλαίου.

Το όριο Chernoff [ Gallager, 1968] σε μια κατανομή είναι μια επέκταση του παλαιότερου chebyshev ορίου . Λαμβάνεται από την άνω έμφυτη λειτουργία βημάτων μονάδων οριοθετώντας την στο ακολουθούμενο υπολογισμό

$$\Pr(x > X) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x - X) dF(x) = E[u(x - X)],$$

Όπου u( ) είναι η λειτουργία μονάδας βήματος,

$$u(\xi) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ \xi \geq 0 \\ 0 & \acute{\alpha}\lambda\lambda o \end{cases} \qquad (4.1)$$

Και F(x) είναι η συνάρτηση κατανομής

Τότε αφού

$$u(\xi) \leq \exp(\rho\xi), \qquad \rho > 0 \qquad (4.2)$$

Με ισότητα αν και μόνο αν ξ = 0, ακολουθεί ότι

$$\Pr(x > X) < E\{\exp[\rho(x - X)]\} \qquad (4.3)$$

$$= e^{-\rho X} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho x}\, dF(x), \quad \rho > 0$$

Ελαχιστοποιώντας σε σχέση με το ρ, παίρνουμε

$$\Pr(x > X) < \underset{\rho > 0}{Min}\, e^{-\rho X} E(e^{\rho x}), \qquad (4.4)$$

Το οποίο είναι το όριο Chernoff . Στις περισσότερες περιπτώσεις αυτό το όριο μπορεί να μειωθεί από έναν παράγονται του 2 , όπως θα φανεί στο κεφάλαιο 4.2.4

Όταν η τυχαία μεταβλητή αντιπροσωπεύει μια συνάρτηση πιθανότητας και το X=0 , έτσι ώστε η πιθανότητα (4.3) γίνεται μια πιθανότητα σφάλματος , εφαρμόζοντας το όριο Chernoff δίνει αύξηση σε ένα άλλο πολύ γνωστό όριο . Ας αφήσουμε το y να είναι η μεταβλητή απόφασης , και αφήστε $p_0(y)$ και $p_1(y)$ να είναι οι αντίστοιχες λειτουργίες πυκνότητας πιθανότητας κάτω από τις υποθέσεις ότι τα ''0'' ή ''1'' στάλθηκαν . Τότε δεδομένου ότι το ''0'' στάλθηκε ,

$$P_{E_0} = Pr\left(\ln\frac{P_1(y)}{P_0(y)} > 0 \,\middle|\, ''0''\ \sigma\tau\acute{\alpha}\lambda\theta\eta\kappa\varepsilon\right)$$

$$< E[exp\{\rho \ln[p_1(y)/p_0(y)]\}]\ \ ''0''\sigma\tau\acute{\alpha}\lambda\theta\eta\kappa\varepsilon]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{p_1(y)}{p_0(y)}\right]^{\rho} p_0(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} p_0^{1-\rho}(y) p_1^{\rho}(y) dy, \qquad \rho>0$$

Το ίδιο ισχύει για $P_E$ με $p_0(y)$ και με $p_1(y)$ εναλλασσόμενα. Διαλέγοντας ρ = ½ οδηγεί στην συγκεκριμένη απλή έκφραση

$$P_E \leq \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{p_0(y)p_1(y)}\ dy \qquad (4.5)$$

γνωστό ως το Bhattacharyya όριο .

## 4.2.1 Όρια για το κανάλι Γκαουσιανού θορύβου

Σαν παράδειγμα εφαρμογής και των δυο του ορίου του Chernoff (4.4) και του ορίου του Bhattacharyya (4.5) και για μετέπειτα σύγκριση , θεωρείστε συνεκτική αποδοχή στο Γκαουσιανό θόρυβο με αναλογία ενέργειας προς πυκνότητα θορύβου E / $I_0$ . Τότε η κανονικοποιημένη αποδιαμορφωμένη μεταβλητή εξόδου y είναι Γκαουσιανή , με διακύμανση $I_0/2$ και μέση τιμή $\pm\sqrt{E}$ . Το πρόσημο εξαρτάται στο αν το μεταδιδόμενο σύμβολο έχει ένα αρνητικό ή θετικό πρόσημο ανταποκρινόμενο στο ''0'' ή το ''1'' αντίστοιχα

Τότε , από συμμετρία $P_{E_0} = P_{E_1} = P_{E'}$

$$P_E = \Pr(y > 0 \mid -) = \int_0^{\infty} exp\left[-(y+\sqrt{E})^2/I_0\right]dy/\sqrt{\pi I_0}$$

$$\int_{\sqrt{2E/I_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx/\sqrt{2\pi} = Q(\sqrt{2E/I_0}) \qquad (4.6)$$

Το όριο Chernoff σε αυτήν την πιθανότητα λαμβάνεται χρησιμοποιώντας την (4.4) , όπου x έχει σημασία $-\sqrt{E}$ και διακύμανση $I_0/2$ και X = 0. Έτσι

$$E(e^{\rho x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho x}\, e^{-(x+\sqrt{E})^2/I_0} dx/\sqrt{\pi I_0}$$

$$exp\left[(\rho I_0 - 2\sqrt{E})^2/4I_0\right] e^{-E/I_0}, \quad \rho>0 \qquad (4.7)$$

Και

$$P_E < \underset{\rho>0}{Min} E(e^{\rho x}) \qquad (4.8)$$

Αυτή η έκφραση ελαχιστοποιείται από την επιλογή ρ = $2\sqrt{E}$ / $I_0$ , για την οποία

$$P_E < e^{-E/I_0} \qquad (4.9)$$

Το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνεται από το όριο Bhattacharyya , όπως μπορεί να φανεί εφαρμόζοντας την (4.5) με

$$p_0(y) = exp\,[-(y-\sqrt{E})^2/I_0]/\sqrt{\pi I_0}$$

$$p_1(y) = exp\,[-(y-\sqrt{E})^2/I_0]/\sqrt{\pi I_0} \qquad (4.10)$$

Έτσι

$$P_E < \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p_0(y)p_1(y)}\; dy = e^{-E/I_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/I_0}\, dy/\sqrt{\pi I_0} = e^{-E/I_0}$$

(4.11)

Τώρα δείχνουμε ότι για χρονικά συγχρονισμένες πολλαπλής πρόσβασης παρεμβολή , πιθανότατα εκτός από τον εξωτερικό Γκαουσιανό θόρυβο , το όριο Chernoff αποδίδει το ίδιο αποτέλεσμα .

### 4.2.2 Όριο Chernoff για χρονικά συγχρονισμένη πολλαπλής πρόσβασης παρεμβολή με διάδοση BPSK

Θεωρείστε πρώτα τη BPSK διάδοση φάσματος CDMA , με τυχαία φάση φ αλλά όπου όλοι οι $k_u$ χρήστες λαμβάνονται με πανομοιότυπο χρόνο τσιπ . Τότε η έξοδος της συσκευής άθροισης της εικόνας 2.2 είναι

$$y = \sum_{n=1}^{N} y_n$$

Εδώ αγνοείστε την παρεμβολή του ίντερτσιπ

$$y_n = \sqrt{E_c(k)}x_n(k) + \sum_{j\neq k}\sqrt{E_c(j)}\, z_n(j) + v_{n'} \qquad (4.12)$$

Και $z_n(j)$ είναι οι έξοδοι του άλλου χρήστη ( συμπεριλαμβανομένου του προϊόντος των διαφορετικών διαδιδόμενων ακολουθιών ) . $v_n$ είναι το αποτέλεσμα του εξωτερικού Γκαουσιανού θορύβου στην έξοδο . Σημειώστε ότι εξαιτίας του συνγχρονισμού του χρόνου οι άλλοι χρήστες δεν μπορούν πια να αντιμετωπιστούν ως τυχαίες διαδικασίες αλλά σαν δυαδικές τυχαίες μεταβλητές με τυχαίες μετατοπίσεις φάσεων . Έτσθ $x_n(k)$ = -1 για όλα τα n

$$P_E = \Pr(Y > 0 \mid -) < E\{exp[\rho \sum_{n=1}^{N} y_n]\}$$

$$< \exp\,[-\rho N\sqrt{E(k)}] \prod_{n=1}^{N}\Big[E[\exp\,(\rho v_n) \prod_{j=1}^{k_u} E\{exp[\rho\sqrt{E_c(j)}z_n(j)]\}\Big]$$

ρ>0 (4.13)

Το τελευταίο βήμα ακολουθεί από όλους τους παρεμβένοντες χρήστες και από αποτελεσματικά τσιπς από κάθε χρήστη .

Αφού το $v_n$ είναι Γκαουσιανό με μηδενική μέση τιμή και διασπορά $N_0/2$ και αφήνοντας το E=0 και το $I_0 = N_0$ στην (4.7) , έχουμε

$$E[e^{\rho v_a}] = \exp\,(N_0\rho^2/4) \qquad (4.14)$$

Βλέπουμε από την εικόνα 2.2 ότι κάθε παρεμβαλόμενος χρήστης έχει πλάτος $\pm\sqrt{E_c}(j)$ και φάση

$$\Phi_j' \triangleq \Phi_j - \Phi_k\,, \quad j \neq k$$

Και οι δυο είναι τυχαίες μεταβλητές ,η πρώτη διωνυμική και η δεύτερη ομοιόμορφη

Έτσι

$$E\left[e^{\rho\sqrt{E_c(j)z_n(j)}}\middle|\Phi_j'\right] = \frac{1}{2}\left\{exp\left[\sqrt{E_c(j)}(cos\Phi_j')\rho\right] + exp\left[-\sqrt{E_c(j)}\left(cos\Phi_j'\right)\rho\right]\right\}$$

Αλλά από τη στιγμή που το $\Phi_j'$ είναι μια ομοιόμορφα κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή στο (0, 2π),

$$E\left[e^{\rho\sqrt{E_c(j)z_n(j)}}\right] = \varphi_0\left(\sqrt{E_c(j)}\rho\right) < \exp\left[\rho^2 E_c(j)/4\right] \qquad (4.15)$$

Από την μηδενικής τάξης λειτουργία Bessel $\varphi_0(x) < e^{x^2/4}$ έτσι συνδιάζοντας την (4.13) μέσω της (4.15), λαμβάνουμε

$$P_E < \underset{\rho>0}{Min} exp\left\{-N\left[\rho\sqrt{E_c(k)} - \rho^2 I_0/4\right]\right\}, \qquad (4.16)$$

Όπου

$$I_0 = N_0 + \sum_{j=1}^{k_u} E_c(j)$$

Έτσι με την ελαχιστοποιημένη τιμή του ρ = $2\sqrt{E_c\,(k)}$ / $I_0$

$$P_E < \exp\left[-NE_c(k)/I_0\right] \qquad (4.17)$$

Ακριβώς όπως για μια Γκαουσιανή προσέγγιση (4.9) . Ωστόσο υπάρχει ένα πρόβλημα με το αποτέλεσμα . Όταν ο αριθμός των χρηστών $k_u$ είναι μεγάλος είναι λογικό να παρθεί η προσδοκία όσο αναφορά της διαφοράς φάσης $\Phi_j'$ . Αλλά για μικρά $k_u$ (ένας απλός παρεμβαίνοντας χρήστης ή σταθμός βάσης ) αυτό δεν μπορεί να δικαιολογηθεί . Διορθώνουμε αυτό όπως πριν , χρησιμοποιώντας διάδοση QPSK .

### 4.2.3 Όριο Chernoff για χρονικά συνγχρονισμένη πολλαπλής πρόσβασης παρεμβολή με διάδοση QPSK

Προχωράμε όπως για BPSK διάδοση , αλλά στη θέση της (4.12) έχουμε από την εικόνα 2.4 ,

$$y_n = \sqrt{E_c(k)}x_n(k) + \sum_{j\neq k}[z_n^{(I)}(j) + z_n^{(Q)}(j)] + v_n \qquad (4.18)$$

Εδώ , η τυχαία μεταβλητή $z_n^{(\mathrm{I})}$(j) παίρνει την την τιμή $\sqrt{E_c(j)/2}\,\hat{z}_n^{(\mathrm{I})}$(j) cos$\phi_j'$ και η τυχαία μεταβλητή $z_n^{Q}$(j) παίρνει την τμή $\sqrt{E_c(j)/2}\,\hat{z}_n^{Q}$(j) sin$\phi_j'$ όπου η $z_n^{(\mathrm{I})}$(j) και η $z_n^{Q}$(j) είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και $\phi_j'$ =$\phi_{\mathrm{j}} - \phi_{\mathrm{k}} - \pi/4$ . Έτσι έχουμε στη θέση της (4.13)

$$P_E < exp[-\rho N\sqrt{E_c(k)}$$

$$\prod_{n=1}^{N}[E[\exp(\rho v_n)]\prod_{j=1}^{k_u} E\{\exp\,[\rho\sqrt{E_c(j)/2}\,\hat{z}_n^{(I)}(j)cos\Phi_j']$$

$$\exp\,[\rho\sqrt{E_c(j)/2}\,\hat{z}_n^{(Q)}(j)\sin\Phi_j']\}] \qquad (4.19)$$

Η προσδοκία των όρων στις παρενθέσεις που τώρα αντικαθιστούνται η (4.15) γίνεται

$$E\{\exp\left[\rho\sqrt{E_c(j)/2}\,\hat{z}_n^{(I)}(j)cos\Phi_j'\right]\exp\left[\rho\sqrt{E_c(j)/2}\,\hat{z}_n^{(I)}(j)cos\Phi_j'\right]\}$$

$$= \frac{1}{2}[\exp\left(\rho\sqrt{E_c(j)/2}\,\hat{z}_n^{(I)}(j)cos\Phi_j'\right) +$$

$$+\exp\left(-\rho\sqrt{E_c(j)/2}\,\hat{z}_n^{(I)}(j)cos\Phi_j'\right)]$$

$$\times\frac{1}{2}[\exp\left(\rho\sqrt{E_c(j)/2}\,\hat{z}_n^{(I)}(j)sin\Phi_j'\right) +$$

$$+\exp\left(-\rho\sqrt{E_c(j)/2}\,\hat{z}_n^{(I)}(j)cos\Phi_j'\right)] \qquad (4.20)$$

$$= cosh\left(\rho\sqrt{E_c(j)/2}\,cos\Phi_j'\right)cosh\left(\rho\sqrt{E_c(j)/2}\,cos\Phi_j'\right)$$

$$< \exp\,[\rho^2E_c(j)\left(cos^2\Phi_j'\right)/4]\exp\,[\rho^2E_c(j)\left(sin^2\Phi_j'\right)/4]$$

$$= exp[\rho^2E_c(j)/4]$$

Η οποία ακολουθεί από την ανισότητα

$$\cosh(x) = (e^{x} + e^{-x})/2 = \sum_{k\ \iota\sigma o} x^{k}/k! < e^{x^{2}/2} \qquad (4.21)$$

Έτσι , η (4.20) είναι το ίδιο όριο όπως το (4.15) για την BPSK περίπτωση . Χρησιμοποιώντας την (4.20) και την (4.14) στην (4.19) οδηγεί στην (4.16) , όπως ακριβώς για την BPSK υπόθεση , η οποία αποδίδει το ίδιο τελικό αποτέλεσμα (4.17).

Η διαφορά είναι ότι στην (4.20) , για την QPSK περίπτωση , $\phi_j'$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή και δεν χρειάζεται να θεωρηθεί σαν τυχαία μεταβλητή. Για την ακρίβεια μπορούμε ακόμη να πάρουμε $\phi_j'$= 0 επιτρέποντας για παράδειγμα όλους του χρήστες ( από ένα κοινό σταθμό βάσης ) να απασχολήσει την ίδια φάση . Το σημαντικό αποτέλεσμα είναι το όριο Chernoff (4.17) κατέχει εξίσου για χρονικά συνγχρονισμένη πολλαπλής πρόσβασης παρεμβολή και για Γκαουσιανό θόρυβο . Έτσι , η κεντρική προσσέγγιση ορίου δεν είναι πια χρειαζούμενη. Για χρονικά ασύνγχρονες υποδοχές ( συνήθως η περίτωση για τον αντίστροφο σύνδεσμο) , αυτό το θέμα δεν εφαρμόζεται . Ωστόσο ,ο τυχαίος χρονισμός του τσιπ μπορεί μόνο να κάνει την κεντρική προσσέγγιση ορίου πιο κατάλληλη . Επιπλέον αν το όριο Chernoff είναι το ίδιο όπως για την Γκαουσιανή παρεμβολή ακόμα και χωρίς την τυχαιότητα του συνγχρονισμού του τσιπ στέκεται στο λόγο ότι η τυχαιότητα δεν μπορεί να μεταβάλλει σημαντικά αυτή την κατάσταση .

## 4.2.4 Βελτιώνοντας το όριο Chernoff από ένα παράγοντα του 2

Στις περισσότερες περιπτώσεις ενδιαφέροντος , η πιθανότητα της οποίας αναζητάμε το όριο είναι το ολοκλήρωμα από την ουρά μιας λειτουργίας πυκνότητας πιθανότητας f(x) . Έτσι ,όπως είναι στην (4.6) μπορεί να εκφραστεί σαν

$$\Pr(Y > 0) = \int_{0}^{\infty} f(y)dy$$

Όπυ E(Y) < 0

Συχνά σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να σας δείξουμε ότι

$$f(y) \leq f(-y) \qquad \text{για όλα τα } y > 0 \qquad (4.22)$$

Αυτή είναι πάντα η περίπτωση αν f(y) είναι συμμετρικό ως προς τη μέση τιμή του και μονοτονικά μειωμένο σε σχέση με |y – E(Y) | . Τότε αυτή τη στιγμή η παραγόμενη λειτουργία

$$E(e^{\rho Y}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho Y} f(y)dy = \int_{-\infty}^{0} e^{\rho Y} f(y)dy + \int_{0}^{\infty} e^{\rho Y} f(y)dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho Y} f(-y)dy + \int_{0}^{\infty} e^{\rho Y} f(y)dy =$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\rho Y} + e^{-\rho Y}) f(y)dy = 2\int_{0}^{\infty} \cosh(\rho y)\, f(y)dy$$

$$\geq \int_{0}^{\infty} f(y)dy = 2\Pr\,(Y > 0)$$

Έτσι

$$\Pr\,(Y > 0) \leq \frac{1}{2} E(e^{\rho Y}) \quad \text{για όλα τα } \rho \qquad (4.23)$$

Η παρεχόμενη κατάσταση (4.22) είναι ικανοποιημένη . Σε περιπτώσεις όπου το Y είναι το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων μεταβλητών , αυτή είναι συχνά η περίπτωση .

## 4.3 Διάδοση πολλαπλών μονοπατιών : δομή και εκμετάλευση του σήματος

Στη χερσαία επικοινωνία και σε μικρότερο βαθμό επικοινωνίας με δορυφόρους και σε χαμηλά γωνιακά υψόμετρα , το εκπεμπόμενο σήμα ανακλάται και διαθλάται από μια ποικιλία εξομαλυμένων και σκληρών εδαφών , έτσι ώστε είναι επαναλαμβανόμενο στο δέκτη με μερικές χρονικές καθυστερήσεις . Αυτό ονομάζεται διάδοση πολλαπλών μονοπατιών . Κάθε ατομικό μονοπάτι επίσης φτάνει στο δικό του πλάτος και φέρουσα φάση . Τα χαρακτηριστικά διάδοσης είναι ποιοτικά τα ίδια για όλες τις μορφές της δομής του σήματος , αν και θα διαφέρουν ποιοτικά με τη φέρουσα συχνότητα και τα χαρακτηριστικά

του εδάφους . Οι δομές των ατομικών διαδιδόμενων μονοπατιών μπορούν να αναγνωριστούν και πιθανός να αξιοποιηθούν μόνο στο μέγεθος που μπορούν να διακριθούν το ένα από το άλλο . Όσο μεγαλύτερο είναι το στιγμιαίο εύρος ζώνης των σημάτων τόσο πιο διακριτά είναι , αφού το στενό φλτράρισμα ζώνης τείνει να καθιστά ασαφή τα στοιχεία των πολλαπλών μονοπατιών μαζί . Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι τα σήματα διάχυτου φάσματος χρησιμοποιούν ψευδοτυχαίες ακολουθίες με διάρκεια chip $T_C$ αντιστρόφως ανάλογη προς το εύρος ζώνης μετάδοσης. Σε αυτή την περίπτωση, οι μεμονωμένες διαδρομές μπορούν να διακριθούν αν αλληλοδιαχωριστούν με καθυστερήσεις μεγαλύτερες από $T_C$, διότι τότε οι διάφορες καθυστερημένες εκδοχές του σήματος θα είναι σχεδόν ασυσχέτιστες μεταξύ τους, σύμφωνα με την ιδιότητα καθυστέρησης και πρόσθεσης (2.10).

Το εκπεμπόμενο σήμα για τον k χρήστη για διάδοση σε ελεύθερο χώρο θα λαμβανόταν με πλάτος $\sqrt{E_C\ (k)}$ σε σταθερή φάση και με μια μοναδική καθυστέρηση. Για QPSK μετάδοση (Quadrature Phase Shift Keying, διαμόρφωση μετατόπισης φάσης με ορθογωνισμό), λαμβάνεται αντιθέτως ως πολυδιαδρομικό σήμα

$$X_k(t) = \sqrt{E_c(k)} \sum_n x_n(k) \sum_{l=1}^{L} a_l h(t - nT_c - \delta_l)$$
$$\times \{a_n^{(I)}(k)\cos\,[2\pi f_0(t - \delta_l) + \Phi_l] \qquad (4.24)$$
$$+a_n^{(Q)}(k)\sin[2\pi f_0(t - \delta_l) + \Phi_l]$$

Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Τα πλάτη διαδρομών $\alpha_l$ θα εξαρτώνται φυσικά από τις σχετικές αποστάσεις διάδοσης και από τις αντανακλαστικές και διαθλαστικές ιδιότητες του εδάφους και των κτηρίων. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις, κυρίως σε περιοχές περιορισμένου χώρου, καθεμία από τις διακριτές πολυδιαδρομικές συνιστώσες (δηλαδή εκείνες που διαχωρίζονται κατά περισσότερο από $T_C$ η μία από την άλλη) θα συνιστά η ίδια ένα γραμμικό συνδυασμό αρκετών μη διακριτών διαδρομών ποικίλων πλατών. Εφόσον αυτά θα προστεθούν ως τυχαία διανύσματα, το πλάτος κάθε όρου θα φαίνεται να έχει κατανομή Rayleigh και η φάση θα φαντάζει ομοιόμορφα

κατανεμημένη. Αυτό είναι το πιο συχνά αποδεκτό μοντέλο. Μερικές φορές, όμως, λόγω κατοπτρικής απεικόνισης ή διάδοσης μιας συνιστώσας σε ελεύθερο χώρο, μια διαδρομή θα φαίνεται σαν το άθροισμα μιας συνιστώσας σταθερού πλάτους και μιας συνιστώσας με πλάτος κατανομής Rayleigh (ο συνδυασμός αρκετών μικρότερων μη διακριτών συνιστωσών). Τότε αυτή η σύνθετη συνιστώσα έχει κατανομή Rician. Είναι πιο συχνή στην επίγεια διάδοση σε αστικές περιοχές με μια μοναδική ισχυρή ανάκλαση και στη δορυφορική λήψη μιας συνιστώσας ελεύθερου χώρου με αρκετές ανακλάσεις στα παρακείμενα εδάφη.

Για να εκμεταλλευτούμε την ενέργεια των πολλαπλών συνιστωσών πολυδιαδρομικής διάδοσης, αυτές πρέπει να αναγνωριστούν και να ανακτηθούν. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να καθορίσουμε τις σχετικές καθυστερήσεις και μετά, όταν αυτό είναι δυνατό, τα πλάτη και τις φάσεις τους.

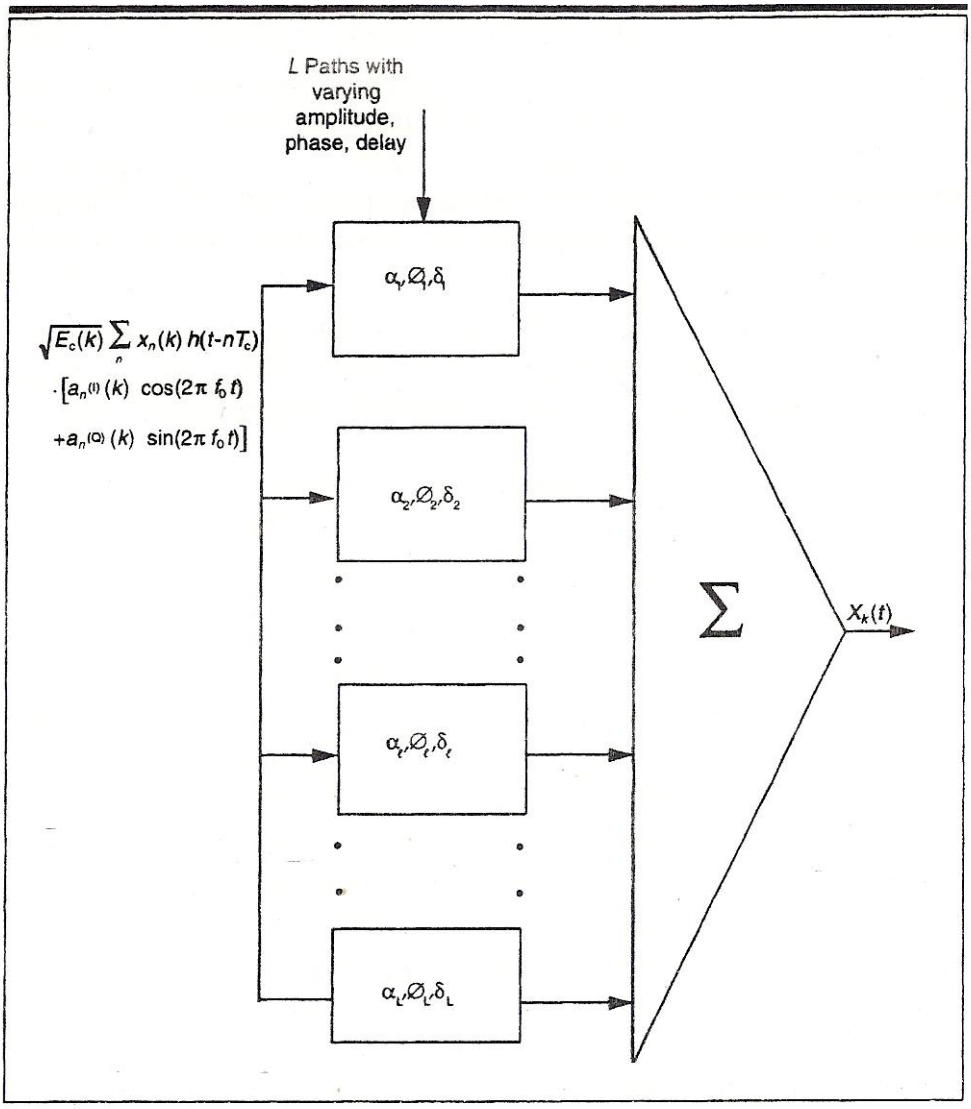



**Figure 4.1** Multipath propagation model.

Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί ακόμη και με πλήρως διαμορφωμένα σήματα, αλλά η εκτίμηση είναι πολύ πιο ακριβής και η ανακύπτουσα επίδοση είναι κατά πολύ βελτιωμένη αν η αναγνώριση της διαδρομής και η εκτίμηση των παραμέτρων πραγματοποιηθούν σε ένα αδιαμόρφωτο σήμα. Τα αδιαμόρφωτα τμήματα μπορούμε να τα εισάγουμε κάθε τόσο σε ένα διαμορφωμένο σήμα, ειδικά με πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου. Όμως, σε ένα σύστημα διάχυτου φάσματος είναι πιο αποτελεσματικό και πιο εύκολο να διαχωρίσουμε το αδιαμόρφωτο πιλοτικό σήμα από το διαμορφωμένο σήμα δεδομένων προσδίδοντάς του μια μεμονωμένη ψευδοτυχαία ακολουθία.

Μπορούμε να αναζητήσουμε την πιλοτική ακολουθία με βάση το μηχανισμό ελέγχου υποθέσεων του Σχήματος 3.1 με υποθέσεις χρονικής καθυστέρησης που διαχωρίζονται κατά ένα κλάσμα του chip $T_C$. Όμως, μόλις βρούμε την πρώτη ισχυρή συνιστώσα, ολόκληρο το παράθυρο αναζήτησης για όλες τις συνιστώσες μπορεί να περιοριστεί συνήθως σε μερικές δεκάδες χρόνους chip, που αναπαριστούν τη συνολική διασπορά καθυστέρησης της πολυδιαδρομικής διάδοσης. Η πιλοτική ψευδοτυχαία ακολουθία είναι αδιαμόρφωτη και η φέρουσα συχνότητα υποθέτουμε ότι παρακολουθείται με ακρίβεια. Έτσι, ο αριθμός των chip που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση μπορεί να γίνει όσο μεγάλος επιθυμούμε και περιορίζεται μόνο από το ρυθμό αλλαγής του πλάτους και της φάσης. Ακόμη, σε αντίθεση με το τελευταίο κεφάλαιο, όπου η αναζήτηση της αρχικής ανάκτησης τελείωσε όταν είχε βρεθεί η σωστή υπόθεση, εδώ η αναζήτηση δεν θα σταματήσει. Μόλις εντοπιστεί μια διαδρομή και επαληθευτεί, η αναζήτηση συνεχίζει επ' αόριστον, εφόσον νέες πολυδιαδρομικές συνιστώσες θα εμφανιστούν και παλαιότερες συχνά θα εξαφανιστούν, κυρίως για χρήστες εν κινήσει. Μόλις βρούμε τη συνιστώσα, ο χρονισμός της ακολουθίας της πρέπει να παρακολουθείται από μια πρώιμη-όψιμη θύρα, ώστε να επεξεργαστούμε την εκτίμηση του χρόνου και να την προσαρμόσουμε για απόσταση και ταχύτητα χρηστών εν κινήσει.

Θα διερευνήσουμε αυτό το μηχανισμό πληρέστερα. Όμως, καταρχάς σημειώνουμε ότι ενώ το μοντέλο της πολυδιαδρομικής διάδοσης του Σχήματος 4.1 γίνεται αποδεκτό εδώ και καιρό στη βιβλιογραφία της θεωρίας των επικοινωνιών, συνδέεται κατά βάση με ένα στατικό δέκτη, στον οποίο υποθέταμε ότι καθεμία από τις συνιστώσες (κι ακόμη κι ο αριθμός τους, L) παρέμενε σε σταθερή καθυστέρηση, παρότι τα πλάτη τους και οι φάσεις τους ίσως παρουσίαζαν διακύμανση. Η χρήση ενός δέκτη που παίρνει ένα στατικό αριθμό διαδρομών, αντί για τους κυμαινόμενους αριθμούς που υποθέτουμε εδώ, περιπλέκει τον τύπο του βέλτιστου δέκτη. Το L πρέπει γενικά να θεωρηθεί μεγαλύτερο απ' ό,τι στην περίπτωση που μόνο οι καθυστερήσεις ενεργών επί του παρόντος διαδρομών αποδιαμορφώνονται. Επίσης, με ένα στατικό

δέκτη, η κίνηση προκαλεί μετάβαση από τη μια διαδρομή καθυστέρησης στην άλλη με πιθανή ασυνέχεια πλάτους και φάσης.

Στην επόμενη ενότητα διερευνούμε τον βέλτιστο πιλοτικά υποβοηθούμενο αποδιαμορφωτή με βάση την παρακολούθηση κάθε πολυδιαδρομικής συνιστώσας. Στην ακόλουθη υποενότητα, εξετάζουμε την επίδοσή του.

## 4.4 Πιλοτικά υποβοηθούμενη σύγχρονη πολυδιαδρομική αποδιαμόρφωση

Μια πιλοτική ακολουθία για τον καθορισμό των χαρακτηριστικών πολυδιαδρομικών συνιστωσών δικαιολογείται για κανάλια εκπομπής τύπου ένα-προς-πολλά, όπως η εμπρόσθια (κάτω) ζεύξη από ένα σταθμό βάσης προς πολλαπλούς χρήστες. Αυτό συμβαίνει διότι την ίδια πιλοτική ακολουθία τη μοιράζονται οι $k_u$ χρήστες που ελέγχονται από αυτό το σταθμό βάσης. Για τον ίδιο λόγο, η ενέργεια που αφιερώνεται στον πιλότο μπορεί να είναι μεγαλύτερη από εκείνη που αφιερώνεται στους μεμονωμένους χρήστες. Έτσι, αν $X_k(t)$ που δίνεται στο (4.24) είναι το λαμβανόμενο σήμα για k χρήστες, έστω ότι $x_0(t)$ είναι το αδιαμόρφωτο πιλοτικό σήμα, ώστε $x_n(0)=1$ για κάθε n.

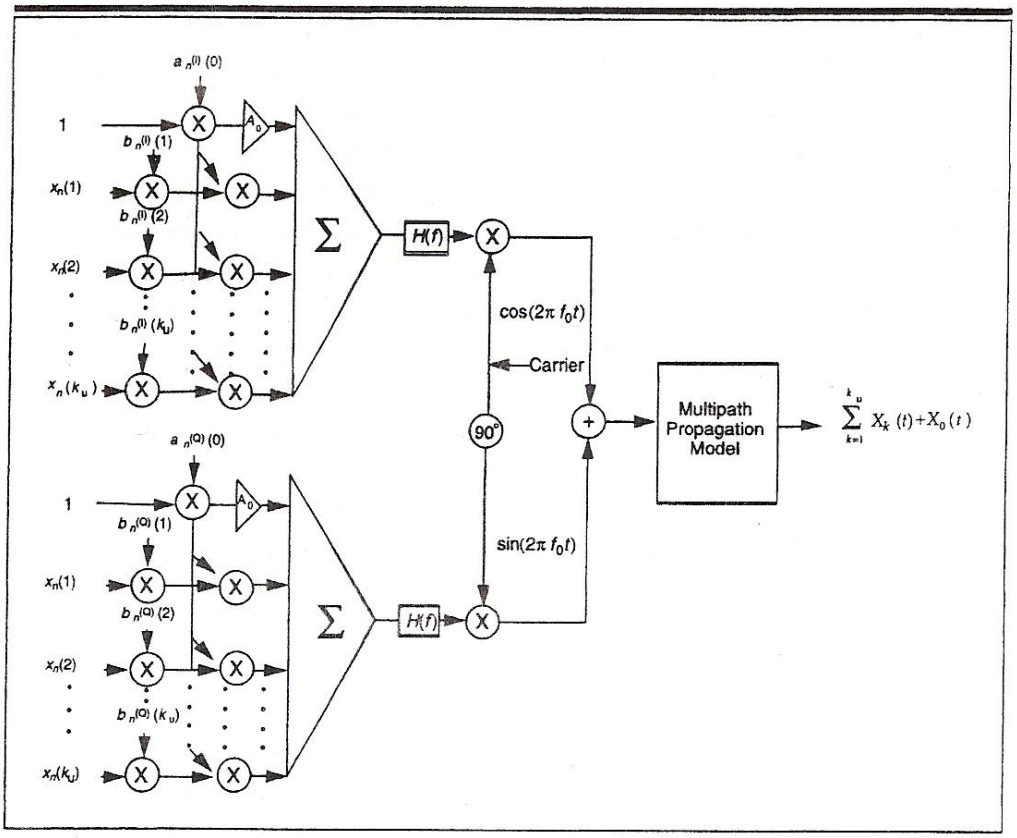



**Figure 4.2** Multiuser (base station) modulator and multipath channel.

Ακόμη, υποθέτουμε ότι την ψευδοτυχαία ακολουθία του πιλότου την μοιράζονται όλοι οι χρήστες πολλαπλασιάζοντας την πιλοτική ψευδοτυχαία (±1) ακολουθία με όλες τις ακολουθίες που είναι μοναδικές για κάθε χρήστη (Σχήμα 4.2). Επομένως, το λαμβανόμενο σήμα που περιέχει $k_u$ χρήστες και μια πιλοτική ακολουθία, που προέρχονται όλα από έναν κοινό σταθμό βάσης, θα είναι

$$X_0(t) + \sum_{k=1}^{k_u} X_k(t)$$

Εδώ, το $X_k(t)$ δίνεται από το (4.24) για k=1,2,…,$k_u$, αλλά το $X_0(t)$ κλιμακώνεται περαιτέρω από το $A_0$ , το επιπλέον κέρδος που καταμερίζεται στο πιλοτικό σήμα.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2, $a_n^I(0)$ και $a_n^{(Q)}(0)$ είναι ακολουθίες της QPSK μετάδοσης του πιλότου. Οι ακολουθίες των χρηστών είναι το γινόμενο των ακολουθιών του πιλότου και εκείνων που είναι μοναδικές για κάθε χρήστη $b_n^{(I)}$ k) και $b_n^{(Q)}$(k). Δηλαδή

$$a_n^{(I)}(k) = a_n^{(I)}(0)b_n^{(I)}(k) \qquad (4.25)$$

$$a_n^{(Q)}(k) = a_n^{(Q)}(0)b_n^{(Q)}(k) \qquad k= 1, 2, \ldots, k_u$$

Επιπλέον, ο χρονισμός όλων των μεμονωμένων χρηστών είναι κλειδωμένος σε εκείνον της πιλοτικής ακολουθίας, ώστε να χρειάζεται να ψάξουμε τις πολυδιαδρομικές καθυστερήσεις μόνο στην πιλοτική ακολουθία.

Η δομή του βέλτιστου αποδιαμορφωτή για L διαδρομές πολυδιαδρομικής διάδοσης (όπως υποθέσαμε στο Σχήμα 4.1) είναι γνωστή ως ένας δέκτης Rake(δηλαδή τσουγκράνα) [Price και Green, 1958]. Εφαρμόστηκε για πρώτη φορά σε στατική μορφή στα τέλη της δεκαετίας του 1950. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 4.3 για τον k χρήστη. Το Σχήμα 4.3a αποτελείται από τον παράλληλο συνδυασμό L στοιχείων, ένα από τα οποία φαίνεται στο Σχήμα 4.3b. Κάθε αποδιαμορφωτής πολυδιαδρομικών συνιστωσών ονομάζεται «δάχτυλο» της τσουγκράνας. Ο βρόχος παρακολούθησης πιλοτικών ακολουθιών ενός συγκεκριμένου αποδιαμορφωτή τίθεται σε λειτουργία με την εκτίμηση της καθυστέρησης χρονισμού μιας δεδομένης διαδρομής, όπως καθορίζεται από τον αναζητητή ψευδοτυχαίων ακολουθιών του πιλότου. Στη συνέχεια, αυτός ο βρόχος χρησιμοποιείται για να αφαιρέσουμε την πιλοτική QPSK μετάδοση, οδηγώντας σε δεδομένα εξόδου με ορθογωνισμό (Σχήμα 4.3):

$$\sqrt{E_c}\left[A_0 + x_n(k)b_n^{(I)}(k)\right]a_l cos\Phi_l + v_n^{(I)}$$

$$\sqrt{E_c}\left[A_0 + x_n(k)b_n^{(Q)}(k)\right]a_l sin\Phi_l + v_n^{(Q)}$$

$A_0$ είναι το πιλοτικό κέρδος, και $v_n^{(I)}$ και $v_n^{(Q)}$ είναι οι συμβολές όλων των άλλων (ασυσχέτιστων) πολυδιαδρομικών συνιστωσών, καθώς κι εκείνων όλων των άλλων χρηστών. Με βάση αυτό μπορούμε να εκτιμήσουμε τις σχετικές τιμές διαδρομών $\alpha_l$ cos $\phi_l$ και $\alpha_l$ sin $\phi_l$ απλώς υπολογίζοντας το μέσο όρο ενός αυθαίρετου αριθμού chip, $N_p$. Ο συγκεκριμένος αριθμός θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος χωρίς να υπερβαίνει την περίοδο κατά την οποία το $\alpha_l$ και το $\phi_l$ παραμένουν σχετικά σταθερά.

Ο βέλτιστος (μεγίστης πιθανοφάνειας) αποδιαμορφωτής διαμορφώνει το σταθμικό άθροισμα των L συνιστωσών, που είναι προσαρμοσμένο στη φάση και στην καθυστέρηση. Αυτό ισοδυναμεί με το να πάρει κανείς το εσωτερικό γινόμενο των λαμβανομένων διαμορφωμένων συνιστωσών I και Q και των εκτιμήσεων του μεγέθους των I και Q αδιαμόρφωτων συνιστωσών $\hat{\alpha}_l \cos \hat{\varphi}_l$ και $\hat{\alpha}_l \sin \hat{\varphi}_l$. Το αποτέλεσμα για το n chip της l διαδρομής, αφού πολλαπλασιαστεί με τις ψευδοτυχαίες ακολουθίες που είναι μοναδικές για κάθε χρήστη με ορθογωνισμό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3b, είναι

$$y_{ln}(k) = \sqrt{E_c} x_n(k) \hat{a}_l a_l \cos\left(\Phi_l - \hat{\Phi}_l\right)$$

$$+\hat{a}_l \left(v_n^{(I)} cos\Phi_l + v_n^{(Q)} sin\hat{\Phi}_l\right) \qquad (4.26)$$

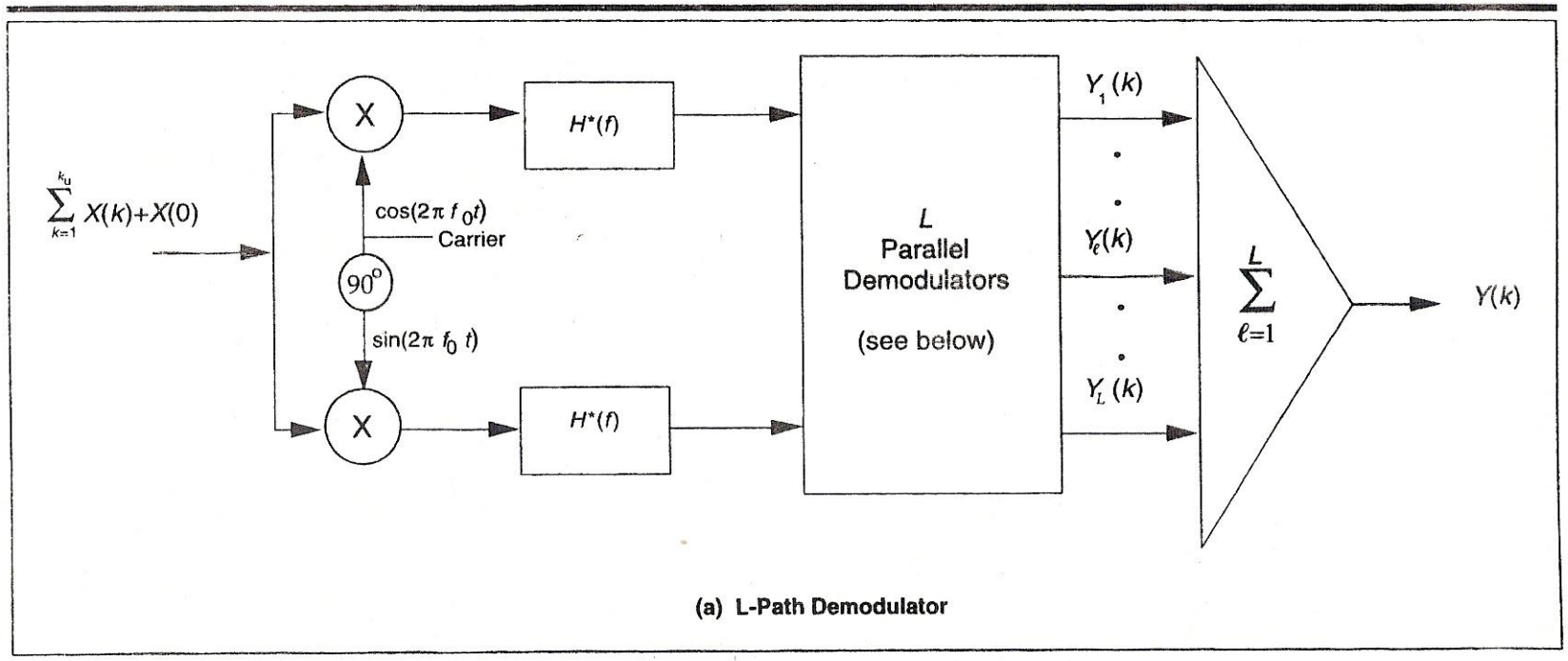
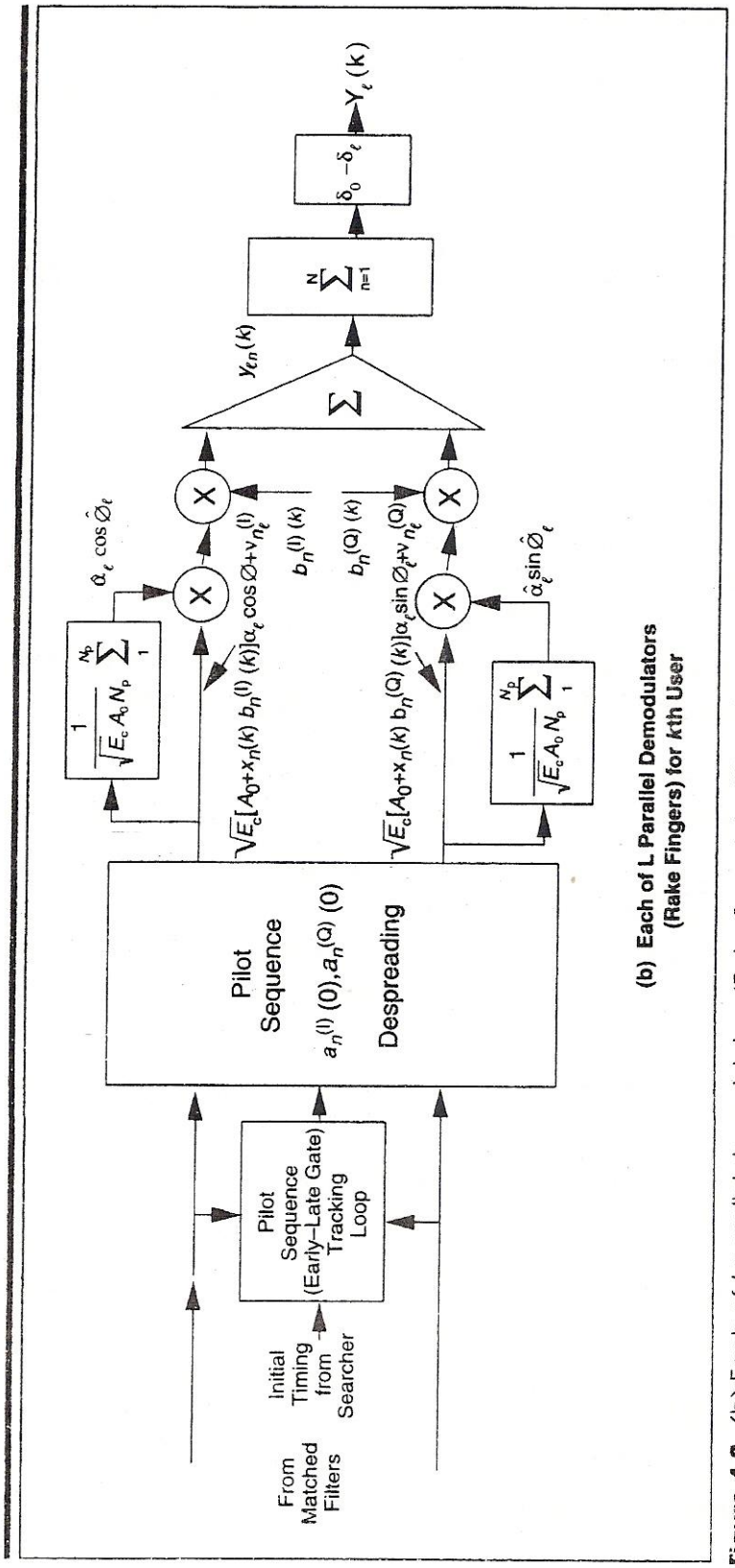



**Figure 4.3** Pilot-aided coherent Rake demodulator for multipath propagation. (a) $L$-path demodulator.




**(b) Each of L Parallel Demodulators (Rake Fingers) for *k*th User**

**Figure 4.3** (b) Each of *L* parallel demodulators (Rake fingers) for *k*th user.

Αθροίζοντας τα N chip στα οποία το $x_n(k)$ είναι σταθερό ($\pm 1$), έχουμε

$$y_{ln}(k) = \mp N\sqrt{E_c}\hat{a}_l a_l \cos(\Phi_l - \hat{\Phi}_l)$$

$$+\hat{a}_l[\cos\Phi_l \sum v_n^{(I)} + sin\Phi_l \sum v_n^{(Q)}] \qquad (4.27)$$

Επομένως,

$$E[Y_l(k)|x_n(k) = -1] = -N[\sqrt{E_c}\hat{a}_l a_l \cos(\Phi_l - \hat{\Phi}_l)]$$
(4.28a)

Με αλλαγή προσήμου αν $x_n(k) = \pm 1$, και

$$Var[Y_l(k)] = N\hat{a}_l^2 I_0/2 \qquad (4.28b)$$

όπου το $I_0$ δίνεται στο (4.16).

Προχωρούμε για να βρούμε τα φράγματα Chernoff στην πιθανότητα σφάλματος χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της Ενότητας 4.2.

## 4.4.1 Φράγματα Chernoff στην πιθανότητα σφάλματος για σύμφωνη αποδιαμόρφωση με γνωστές παραμέτρους διαδρομών

Αρχικά, προσαρμόζωντας στα γνωστά πλάτη $\alpha_l$ και φάσεις $\phi_l$, βρίσκουμε το φράγμα Chernoff,

$$P_E(a, \Phi; k) = Pr[\sum_{l=1}^{L} Y_l(k) > 0 \mid a, \Phi, x(k) = -1]$$

$$< \underset{\rho>0}{Min} E(\exp[\rho \sum_{l=1}^{L} Y_l(k)] \mid a, \Phi, x(k) = -1)$$

$$= \underset{\rho>0}{Min} exp[-\rho N\sqrt{E_c(k)} \sum_{l=1}^{L} \hat{a}_l a_l \cos(\Phi_l - \hat{\Phi}_l)$$

$$+\rho^2 N \sum_{l=1}^{L} \hat{a}_l^2 I_0/4]$$

$$exp\left\{-\frac{NE_c(k)\left[\sum_{l=1}^{L} \hat{a}_l a_l cos(\Phi_l - \hat{\Phi}_l)\right]^2}{\sum_{l=1}^{L} \hat{a}_l^2 I_0}\right\} \qquad (4.29)$$

Αν παραμελήσουμε την ανακρίβεια στις εκτιμήσεις πλατών και φάσεων, λαμβάνοντας $\hat{\varphi}_l = \phi_l$, $\hat{\alpha}_l = \alpha_l$, βρίσκουμε

$$P_E(k) < exp[-\sum_{l=1}^{L} a_l^2\, NE_c(k)/I_0]$$
$$= \prod_{l=1}^{L} exp[-a_l^2 NE_c(k)/I_0] \quad \text{(τέλειες εκτιμήσεις) (4.30)}$$

Ακόμη, φαίνεται στο Παράρτημα 4Α ότι αν δεν λάβουμε ακριβείς εκτιμήσεις φάσεων και πλατών, αλλά περισσότερο εκτιμήσεις βασισμένες σε $N_p$ αδιαμόρφωτα chip ενός πιλότου του οποίου η ενέργεια chip είναι $A_0^2 E_c$ (βλ. Σχήμα 4.3), η πιθανότητα σφάλματος έχει φράγμα

$$P_E(k) < \prod_{l=1}^{L} \frac{\exp\,[-a_l^2 NE_c(k)/I_0}{1-[N/A_0^2 N_p)]} \qquad (4.31)$$

Γενικά, αν οι διαδρομές είναι γνωστές και η συνολική λαμβανόμενη ενέργεια ανά chip είναι $E_c(k)$, τότε μπορούμε να κανονικοποιήσουμε τα σχετικά κέρδη διαδρομών ώστε

$$\sum_{l=1}^{L} a_l^2 = 1$$

Επομένως, για πολλαπλή διαδρομή καθορισμένου πλάτους και φάσης, η επίδοση φράγματος με τέλειες εκτιμήσεις, (4.30), είναι ίδια με εκείνη του σήματος μιας μοναδικής συνιστώσας, αν η ενέργεια θεωρηθεί ως το άθροισμα των ενεργειών των συνιστωσών. Η εξήγηση είναι απλή: όταν είναι γνωστά τα πολυδιαδρομικά πλάτη και οι φάσεις, ο βέλτιστος δέκτης λειτουργεί ως ένα φίλτρο προσαρμοσμένο στο συνδυασμό του φίλτρου εκπομπής και του (πολυδιαδρομικού) καναλιού.

### 4.4.2 Πολυδιαδρομικές συνιστώσες με απόσβεση Rayleigh και Rice

Τώρα πια δεν λαμβάνουμε σταθερό πλάτος. Αφήνουμε τα πλάτη των πολυδιαδρομικών συνιστωσών να είναι τυχαίες μεταβλητές, ανεξάρτητες η μία από την άλλη, γιατί υποθέτουμε ότι η απόσβεση

κάθε διαδρομής δεν σχετίζεται με εκείνη όλων των άλλων. Τότε η πιθανότητα λάθους για τέλειες εκτιμήσεις γίνεται

$$P_E = E[P_E(a_1 \ldots\ldots, a_L)] < E[\prod_{l=1}^{L} \exp\,(-a_l^2 N\, E_c/I_0)]$$

$$= \prod_{l=1}^{L} \mathrm{E}[\exp\,(-a_l^2\, E_s/I_0)] \triangleq \prod_{l=1}^{L} Z_l \triangleq Z \qquad (4.32)$$

Εδώ $E_S \overset{\Delta}{=} NE_C$ είναι η ενέργεια συμβόλου του N-chip, και οι προσδοκίες αντιστοιχούν στις τυχαίες μεταβλητές $a_l$. Αφαιρούμε τον δείκτη χρήστη k προς διευκόλυνσή μας. Ακόμη, υποθέτουμε ότι έχουμε τέλειες εκτιμήσεις, αν και κλιμακώνοντας όλα τα $Z_l$ με τον παρονομαστή του (4.31), μπορούμε επίσης να βρούμε ένα φράγμα για μη τέλειες εκτιμήσεις.

Αν κάθε συνιστώσα είναι ο συνδυασμός πολλών ανακλάσεων που φτάνουν σχεδόν με την ίδια καθυστέρηση αλλά με τυχαίες φάσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μεταβλητή $a_l$ έχει κατανομή Rayleigh. Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $a_l$ είναι

$$p(a) = \frac{2ae^{-a^2/\sigma_l^2}}{\sigma_l^2} \qquad \alpha > 0 \qquad (4.33a)$$

Ή, έστω $\beta_l = \alpha_l^2$, βρίσκουμε την χι-τετράγωνο πυκνότητα

$$p(\beta) = \frac{e^{-\beta^2/\sigma_l^2}}{\sigma_l^2}, \qquad \beta > 0 \qquad (3.33b)$$

Όπου $\sigma_l^2 = E[\beta_l] = E[\alpha_l^2]$

Έτσι, για αποσβέσεις κατανομής Rayleigh,

$$Z_l = E\left[e^{-\beta_l E_s/I_0}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_l^2} exp\left[\frac{\beta}{\sigma_l^2}\left(\frac{E_s}{I_0}\sigma_l^2 + 1\right)\right] d\beta$$

$$= \frac{1}{1+\sigma_l^2 E_s/I_0}$$

Έστω

$$\bar{E}_{s_l} = \bar{\beta}_l E_s = \sigma_l^2 E_{s'}$$

αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής

$Z_l = \frac{1}{1+\bar{E}_{s_l}/I_0}$ (συνιστώσα απόσβεσης Rayleigh) (4.35)

Αν η συνιστώσα είναι ο συνδυασμός μιας συνιστώσας κατοπτρικής ανάκλασης και μιας συνιστώσας Rayleigh, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $a_l$ γίνεται κατανομής Rice. Το τετράγωνο του $\beta_l$ γίνεται μη κεντρικό χ-τετράγωνο,

$$p(\beta_l) = \frac{e^{-(\beta_l+\gamma_l)/\sigma_l^2}}{\sigma_l^2}\varphi_0(2\sqrt{\gamma_l\beta_l}/\sigma_l^2) \qquad (4.36)$$

Τότε

$$Z_l = [e^{-\beta_l E_s/I_0}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[\frac{\beta_l+\gamma_l\left(1+\sigma_l^2 E_s/I_0\right)}{\sigma_l^2}\right]\varphi_0\left(\frac{\sqrt{\beta_l\gamma_l}}{\sigma_l^2}\right)d\,\beta_l/\sigma_l^2 \qquad (4.37)$$

$$= \frac{1}{1+\sigma_l^2 E_s/I_0}\,exp\left(\frac{\gamma_l E_s/I_0}{1-\sigma_l^2 E_s/I_0}\right)$$ (συνιστώσα απόσβεσης Rice)

Ας προσέξουμε ότι αυτό μειώνεται στο αποτέλεσμα απόσβεσης Rayleigh (4.34) όταν $\gamma_l$=0, και στο αποτέλεσμα γνωστού πλάτους και φάσης όταν $\sigma_l^2$= 0.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι οι L πολυδιαδρομικές συνιστώσες είναι όλες Rayleigh ίσης μέσης ισχύος, ώστε

$$\sigma_l^2 = \sigma^2 \text{ για κάθε l,}$$

και επομένως, για κάθε συνιστώσα,

$$\bar{E}_{s_l} = \sigma_l^2 E_s = \sigma^2 E_s = \sum_{l=1}^{L}\beta_l E_{s'}$$

Τότε, έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$$x = \sum_{l=1}^{L}\sigma_l^2 E_s = \sum_{l=1}^{L}\beta_l E_{s'}$$

φαίνεται εύκολα (βλ. Παράρτημα 3Α.5) ότι εφόσον οι μεμονωμένες μεταβλητές απόσβεσης είναι όλες ανεξάρτητες,

$$p(x) = \frac{x^{L-1} e^{-x/\bar{E}_S}}{(L-1)!(\bar{E}_S)^{L'}} \tag{4.38}$$

που ειναι χι τετράγωνο εις την L. Από το (4.34) προκύπτει, σε αυτή την περίπτωση, ότι

$$\overline{\mathrm{P_E}} < \mathrm{Z} \triangleq \prod_{\mathrm{l}=1}^{\mathrm{L}} \mathrm{Z_l} = \left[\frac{1}{1+\sigma_{\mathrm{l}}^2 \mathrm{E_s}/\mathrm{I_0}}\right]^{\mathrm{L}} = \left[\frac{1}{1+\overline{(\mathrm{E_s}}/\mathrm{I_0})}\right]^{\mathrm{L}} \tag{4.39}$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε το (4.39) ως εξής

$$\bar{P}_E < \exp\left[-\ln\left(1/Z\right)\right]$$

όπου

$$\ln\left(1/Z\right) = Lln[1 + (\bar{E}_s/I_0)] \tag{4.40}$$

Από το (4.40) βρίσκουμε το Σχήμα 4.4: ένα διάγραμμα του λόγου της συνολικής μέσης ενέργειας συμβόλου-προς-την πυκνότητα παρεμβολής $L\bar{E}_S$ / $I_0$ προς εκείνη που χρειάζεται ένα κανάλι κατανομής Gaussian χωρίς απόσβεση για να φτάσει σε μια δεδομένη τιμή εκθέτη, ln(1/Z). Προσέξτε στο (4.9) ή στο 4.32) ότι για το τελευταίο κανάλι, ln(1/Z) = $E_S$ / $I_0$. Έτσι, αυτή είναι η μέση περίσσια ενέργεια (σε decibel) που απαιτείται για να πετύχει αυτό το υποβαθμισμένο κανάλι την ίδια επίδοση, όπως για ένα σήμα χωρίς απόσβεση με προσθετικό Gaussian θόρυβο.

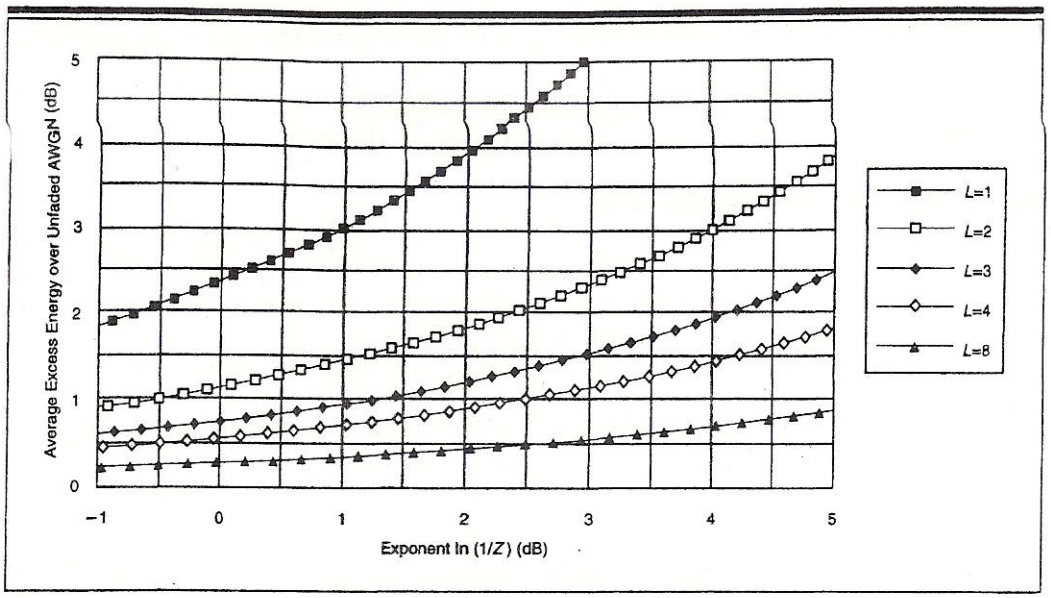



**Figure 4.4** Required excess energy (dB) for $L$ equal-strength multipath fading relative to unfaded coherent AWGN.

Προσέξτε ότι καθώς L→ ∞ (έτσι ώστε η μέση ενέγεια κάθε συνιστώσας $\bar{E}_S$→ 0, αλλά L$\bar{E}_S$ είναι πεπερασμένο), το φράγμα πλησιάζει

$$\overline{P_E} < e^{-L\overline{E_S}/I_0}$$

έτσι ώστε η περίσσια ενέργεια να προσεγγίζει το μηδέν. Αυτό δείχνει ότι με έναν ασυμπτωματικά μεγάλο αριθμό ανεξάρτητων συνιστωσών Rayleigh, η επίδοση προσεγγίζει εκείνη μιας διάδοσης χωρίς απόσβεση. Αυτό είναι ένα ακραίο και μη ρεαλιστικό παράδειγμα της ευεργετικής επίδρασης των ανεξάρτητων συνιστωσών διαφορισμού. Θα επιστρέψουμε σε αυτά τα αποτελέσματα στο Κεφάλαιο 5 όταν μελετήσουμε τη διεμπλοκή (interleaving), με καθυστέρηση, για να παράγουμε περισσότερες ανεξάρτητες συνιστώσες.

## 4.5 Ασύμφωνη λήψη

Η εκπομπή ενός πιλότου είναι πολύτιμη για την αρχική ανάκτηση και παρακολούθηση του χρόνου. Είναι, επίσης, πολύτιμη για να κάνουμε καλές εκτιμήσεις πλάτους και φάσης, καθιστώντας δυνατή την ημι-βέλτιστη σύμφωνη λήψη και τον σταθμικό συνδυασμό πολυδιαδρομικών συνιστωσών. Δυστυχώς, είναι μια πολυτέλεια που δεν είναι πάντοτε εφικτή, κυρίως στην πολλά-προς-ένα αντίστροφη

(άνω-) ζεύξη από καθένα από τους χρήστες πολλαπλής πρόσβασης προς το σταθμό βάσης. Γι' αυτό το λόγο, αν εισάγουμε ένα πιλότο, του οποίου η ισχύς είναι μεγαλύτερη από το τμήμα των διαμορφωμένων δεδομένων του σήματος, στο σήμα κάθε μεμονωμένου χρήστη μειώνεται η αποδοτικότητα σε λιγότερο από 50%. Από την άλλη πλευρά, χωρίς την εκτίμηση φάσης και πλάτους, απαιτείται η ασύμφωνη ή διαφορικά σύμφωνη λήψη. Ο χρονισμός των νέων διαδρομών πρέπει να ανακτηθεί και να παρακολουθηθεί-μια εργασία που είναι δυσκολότερη χωρίς πιλότο. Θα ασχοληθούμε με αυτό στην επόμενη ενότητα. Στην παρούσα ενότητα υποθέτουμε ότι αυτός ο χρονισμός είναι διαθέσιμος, αλλά οι εκτιμήσεις φάσης και πλάτους δεν είναι.

## 4.5.1 Ημι-βέλτιστη ασύμφωνη πολυδιαδρομική λήψη για Μ-αδική Διαμόρφωση ορθογωνισμού

Έστω ότι L ανεξάρτητες πολυδιαδρομικές συνιστώσες παρακολουθούνται σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Επίσης, έστω ότι δεν είναι διαθέσιμες ούτε οι εκτιμήσεις φάσης ούτε πλάτους, αλλά δεχόμαστε ότι είναι ίσες οι μέσες σχετικές δυνάμεις τους. Αυτές οι συνιστώσες μπορεί πράγματι να ληφθούν από ένα συνδυασμό δύο ή περισσότερων κεραιών, εφόσον οι κεραίες χωρικού διαφορισμού συνήθως χρησιμοποιούνται στο σταθμό βάσης. Όσον αφορά στη σύμφωνη περίπτωση, υποθέτουμε ότι ένα ξεχωριστός αποδιαμορφωτής παρέχεται για κάθε διαδρομή, αλλά τώρα τα δεδομένα εξόδου τους συνδυάζονται ασύμφωνα.

Για την ασύμφωνη αποδιαμόρφωση δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντίποδα σήματα, $x_n(k)$ ίσο με +1 ή -1, που παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια των N chip που συνιστούν ένα σύμβολο, γιατί οι λειτουργίες ορθογωνισμού που είναι εγγενείς στην ασύμφωνη αποδιαμόρφωση καταστρέφουν τα πρόσημα. Το καλύτερο που μπορούμε να πετύχουμε με ένα μοναδικό σύμβολο είναι να κάνουμε τις κυματομορφές των 0 και 1 ορθογωνικές. Διατηρώντας την ίδια δομή διαμορφωτή-αποδιαμορφωτή, όπως στο Σχήμα 2.4,

μπορούμε να το πετύχουμε αυτό χαρτογραφώντας ένα 0 σε ένα δυαδικό σήμα που αποτελείται από N chip με θετικό πρόσημο και χαρτογραφώντας ένα 1 σε ένα δυαδικό σήμα που αποτελείται από N/2 θετικά chip και N/2 αρνητικά chip, όπου το N είναι άρτιος αριθμός.

Δηλαδή,

$x_n(k) = +1$ n=1,2,. . . . , N , αν σταλεί 0,

και

$$x_n(k) = \begin{cases} +1, & n = 1,2,\ldots,N/2 \\ -1, & n = N/2+1,\ldots,N \end{cases}$$ αν σταλεί 1,

ώστε τα δύο σήματα να είναι ορθογωνικά προς τα N chip.

Υπάρχουν δύο εναλλακτικές στην απλή δυαδική διαμόρφωση ορθογωνισμού. Η πρώτη είναι να χρησιμοποιήσουμε διαφορική δυαδική διαμόρφωση (DPSK), όπου

$$x_n(k) = \begin{cases} x_{n-1}(k) \text{αν το παρόν σύμβολο δεδομένων είναι } 0 \\ -x_{n-1}(k) \text{αν το παρόν σύμβολο δεδομένων είναι } 1 \end{cases}$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε [Wozencraft και Jacobs, 1965; Viterbi, 1966] ότι η επίδοση είναι η ίδια με εκείνη για τη δυαδική διαμόρφωση ορθογωνισμού, αλλά με διπλάσια ενέργεια συμβόλου. Ενώ αυτό καθιστά τη διαφορική προσέγγιση ελκυστική, μπορούμε να έχουμε ακόμη καλύτερη ασύμφωνη επίδοση με M-αδική διαμόρφωση ορθογωνισμού, που ορίζεται ακολούθως.

Έστω ότι συλλέγουμε $J=\log_2 M$ σύμβολα δεδομένων προς εκπομπή, όπου το J είναι ακέραιος κι επομένως, το M είναι μια δύναμη του 2. Τότε, δεδομένου ότι N=M ή πολλαπλάσιο αυτού, προχωρούμε για να εκπέμψουμε μία από τις M δυαδικές ακολουθίες ορθογωνισμού, γνωστές ως Hadamard-Walsh συναρτήσεις. Οι ακολουθίες έχουν κατασκευαστεί σύμφωνα με τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο παράδειγμα του Σχήματος 4.5 και το γενικό τύπο που φαίνεται στο τέλος της διάταξης. Ο αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί από τη

συσκευή, της οποίας το σχηματικό διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 4.6. Επιβεβαιώνεται εύκολα ότι οποιαδήποτε δύο διανύσματα που προκύπτουν από αυτή την Hadamard-Walsh χαρτογράφηση έχουν εσωτερικά γινόμενα που είναι ακριβώς μηδέν κι επομένως, όλες οι M κυματομορφές είναι ορθογωνικές η μία προς την άλλη.

Γι' αυτόν τον κωδικοποιητή, συμβολίζουμε τα σύμβολα δυαδικών δεδομένων εισόδου με $\xi_1$, ...,$\xi_2$,...ξ, και τα δυαδικά σύμβολα εξόδου που θα εκπέμψουμε με $x_1$, …, $x_M$. Το N πρέπει να είναι ένα ακέραιο l πολλαπλάσιο του M. Τότε καθένα από τα M δυαδικά σύμβολα των Hadamard συναρτήσεων είναι διάρκειας T= l $T_C$ και περιλαμβάνει l διαδοχικά chip ενός σήματος ψευδοτυχαίας ακολουθίας.

Προσέξτε ότι αν κι αυτή η διαμόρφωση ορθογωνισμού είναι πιο λεπτομερής από τη δυαδική PSK διαμόρφωση που χρησιμοποιείται με τη σύμφωνη αποδιαμόρφωση (και η οποία μπορούμε να δείξουμε ότι είναι βέλτιστη σε εκείνη την περίπτωση), εφαρμόζεται ακριβώς η ίδια βασική κυματομορφή και διασπορά (Σχήμα 2.4a) . Αυτή είναι μια ένδειξη της ευελιξίας και γενικότητας των τεχνικών διάχυτου φάσματος άμεσης ακολουθίας.

Ο βέλτιστος ασύμφωνος αποδιαμορφωτής για Hadamard-Walsh διαμόρφωση ορθογωνισμού είναι μια βάση M ορθογωνικών ασύμφωνων συσχετιστών [Proakis, 1989], ένας από τους οποίους φαίνεται στο Σχήμα 4.7b.

| Symbol | Sequence | Hadamard Mapping | |
|---|---|---|---|
| $\xi_1$ | 000 | + + + + | + + + + |
| $\xi_2$ | 001 | + - + - | + - + - |
| $\xi_3$ | 010 | + + - - | + + - - |
| $\xi_4$ | 011 | + - - + | + - - + |
| $\xi_5$ | 100 | + + + + | - - - - |
| $\xi_6$ | 101 | + - + - | - + - + |
| $\xi_7$ | 110 | + + - - | - - + + |
| $\xi_8$ | 111 | + - - + | - + + - |

Note: To generalize for all $M = 2^J$

$$[H_M] = \begin{bmatrix} H_{M/2} & H_{M/2} \\ H_{M/2} & -H_{M/2} \end{bmatrix}$$

**Figure 4.5** Hadamard–Walsh orthogonal sequences for $M = 8$, $J = 3$.

Καθένας από τους M ασύμφωνους συσχετιστές αποτελείται από το γενικό αποδιαμορφωτή που φαίνεται στο Σχήμα 2.4b. Το σχήμα του επεξεργαστή σήματος αποτελείται από τετραγωνιστές για καθεμία από τις δύο συνιστώσες ορθογωνισμού, που ακολουθούνται από έναν αθροιστή. Για μια μοναδική διαδρομή ( L=1), αυτός ο αποδιαμορφωτής αποφασίζει επιλέγοντας το μεγαλύτερο από τα M μεγέθη εξόδου ως εκείνο που αντιστοιχεί στην ακολουθία που κατά πάσα πιθανότητα εκπέμφθηκε. Είναι γνωστό [Helstrom, 1968; Proakis, 1989] ότι για

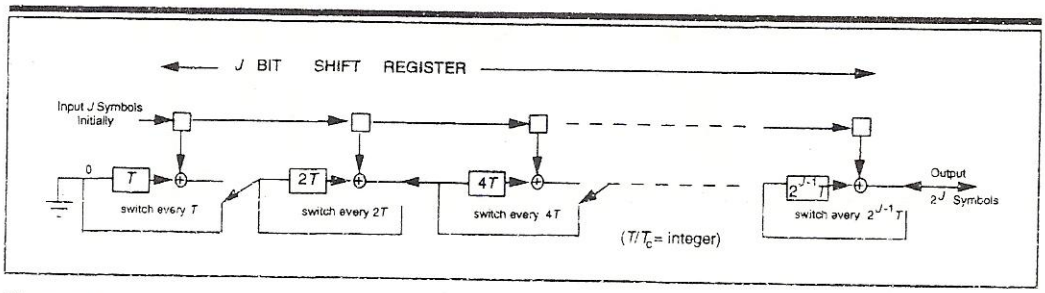
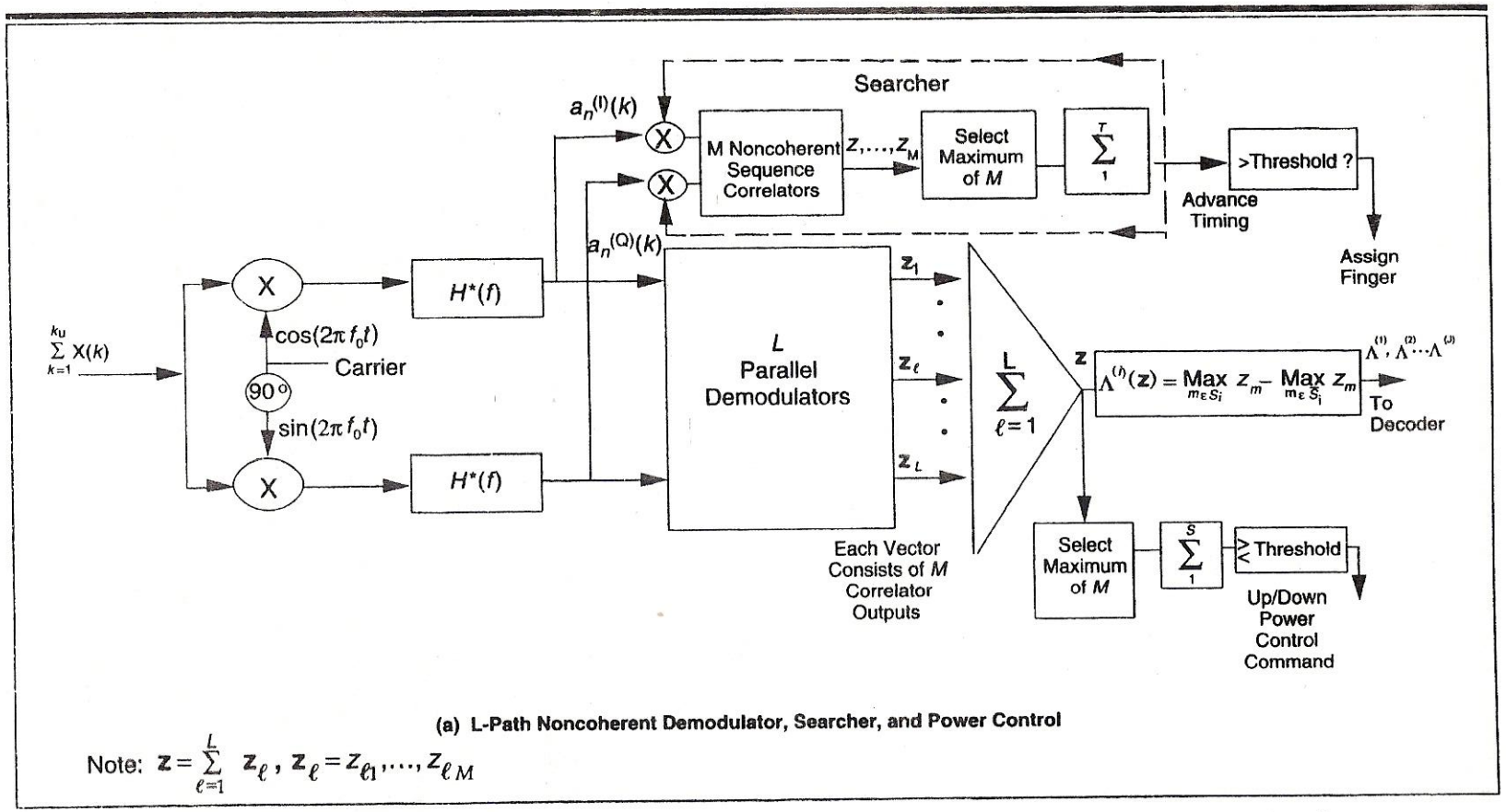



**Figure 4.6** Hadamard–Walsh orthogonal sequence generator.




**(a) L-Path Noncoherent Demodulator, Searcher, and Power Control**

Note: $\mathbf{z} = \sum_{\ell=1}^{L} \mathbf{z}_\ell$, $\mathbf{z}_\ell = z_{\ell 1}, \ldots, z_{\ell M}$

**Figure 4.7** Noncoherent Rake demodulator for $M$-ary orthogonal waveforms in $L$-component multipath. (a) $L$-path noncoherent demodulator, searcher, and power control.

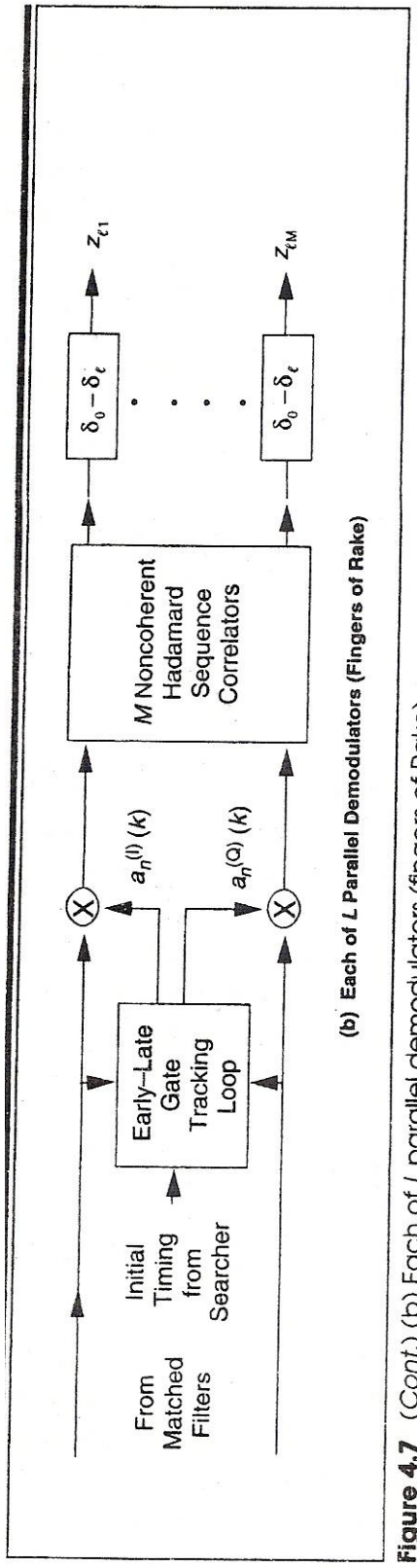



**Figure 4.7** (*Cont.*) (b) Each of *L* parallel demodulators (fingers of Rake).

L=1, έχουμε το βέλτιστο στον προσθετικό Gaussian θόρυβο για καθορισμένα σήματα χωρίς απόσβεση και για Rayleigh σήματα με απόσβεση. Στην Rayleigh περίπτωση με απόσβεση, αν οι L

πολυδιαδρομικές συνιστώσες έχουν ίση μέση ισχύ, για τη βέλτιστη απόφαση απαιτείται να προσθέσουμε τα μεμονωμένα δεδομένα εξόδου του ασύμφωνου συσχετιστή για καθεμία από τις L ανεξάρτητες διαδρομές πριν πάρουμε κάποια απόφαση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7a. Στην περίπτωση χωρίς απόσβεση, ένας μη-γραμμικός συνδυασμός είναι βέλτιστος [βλέπε(3A.18) στο Παράρτημα 3A.4], αλλά με χαμηλή $E_S/I_0$ ανά διαδρομή, ο γραμμικός συνδυασμός υποβαθμίζει μόνο ελαφρώς την επίδοση. Έτσι, θα δεχτούμε επίσης αυτόν τον ελαφρώς υποβέλτιστο δέκτη για την περίπτωση της L-διαδρομής χωρίς απόσβεση.

Ο χειρισμός του θέματος σε αυτή την ενότητα παρεκκλίνει από τον συνηθισμένο για να παρέχουμε ένα πιο γενικό πλαίσιο που ισχύει εξίσου σε κωδικοποιημένα συστήματα που θα εξεταστούν στο Κεφάλαιο 5. Για μη κωδικοποιημένα συστήματα, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, όπως αν χρησιμοποιούσαμε τη συμβατική προσέγγιση. Ας υποθέσουμε ότι αντί να αποφασίσουμε για όλα τα J σύμβολα κατευθείαν, μας ενδιέφερε μόνο το πρώτο σύμβολο. Τότε η (βέλτιστη) απόφαση για αυτό το πρώτο σύμβολο στηρίζεται στο κριτήριο log πιθανοφάνειας

$$\ln\,[p_0^{(I)}(z)/p_1^{(I)}(z)]$$

$z=(z_1, z_2,\ldots, z_M)$ είναι το διάνυσμα, του οποίου οι συνιστώσες είναι M δεδομένα εξόδου ασύμφωνου συσχετιστή (ορθογωνισμού). Ο δείκτης υποδεικνύει το πρώτο από τα J σύμβολα $\xi_1$ και οι εκθέτες των συναρτήσεων πιθανοφάνειας δείχνουν ότι ένα 0 ή ένα 1 στάλθηκε για $\xi_1$. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5, οι πρώτες M / 2 = $2^{J-1}$ ακολουθίες $\xi_m$ (m=1,…, M / 2) θα έχουν ένα 0 στην πρώτη θέση, ενώ οι τελευταίες M / 2 ακολουθίες $\xi_m$ θα έχουν ένα 1 στην πρώτη θέση. Επομένως, αν δοθούν ισοπίθανες ακολουθίες δεδομένων εισόδου,

$$p_0^{(I)}(z) = \frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M/2} p(z/\xi_m), \qquad (4.41)$$

$$p_0^{(I)}(z) = \frac{2}{M}\sum_{m=1+M/2}^{M} p(z/\xi_m) \qquad (4.42)$$

Εδώ, το $p(z / \xi_m)$ είναι η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των M δεδομένων εξόδου του συσχετιστή, δεδομένου ότι στάλθηκε το διάνυσμα δεδομένων $\xi_m$. Ο εκθέτης (1) δείχνει ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι για το πρώτο σύμβολο της ακολουθίας ξ. Λόγω της ορθογωνιότητας των ακολουθιών που αναπαριστούν αυτή του ξ, είναι δυνατόν να γράψουμε αυτές τις κοινές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των δεδομένων εξόδου του συσχετιστή ως εξής

$$p(z/\xi_m) = p_c(z_m) \prod_{m' \neq m} p_1(z_{m'}) \tag{4.43}$$

Το $p_c(z)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των δεδομένων εξόδου του συσχετιστή που αντιστοιχούν στο (σωστό) σταλθέν σήμα, ενώ το $p_l(z)$ αναφέρεται σε όλα τα M - 1 (εσφαλμένα). Έτσι, το $p_c(z)$ αναφέρεται στην παρουσία ενός (σωστού) σήματος στο συγκεκριμένο συσχετιστή, ενώ το $p_l(z)$ αναφέρεται στην απουσία του. Επομένως, αυτά είναι ίδια με τα $p_1(z)$και $p_0(z)$ του τελευταίου κεφαλαίου (Παράρτημα 3Α). Εδώ το L αναφέρεται στον αριθμό των ανεξάρτητων διαδρομών, αντί για τον αριθμό των ανεξάρτητων παρατηρήσεων.

Τότε, για L Rayleigh συνιστώσες πολλαπλής διαδρομής με απόσβεση και λευκό προσθετικό Gaussian θόρυβο, το άθροισμα των L συνιστωσών θα έχει συναρτήσεις πυκνότητας (βλέπε Παράρτημα 3Α.5 με $\bar{\mu}$=J$\bar{E}$/ $I_0$)

$$p_1(z) = \frac{z^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-z), \tag{4.44}$$

$$p_c(z) = \frac{z^{L-1}}{(L-1)!} \frac{\exp[-z/(1+J\overline{E_s}/I_0)}{[1+J\overline{E_s}/I_0]^L} \tag{4.45}$$

$\bar{E}_s$ = N$\bar{E}_C$ είναι η μέση ενέργεια συμβόλου ανά διαδρομή, και τα δεδομένα εξόδου του συσχετιστή κανονικοποιούνται, ώστε όλα τα εσφαλμένα να έχουν μοναδιαία διακύμανση. Για L ίσες διαδρομές χωρίς απόσβεση, (βλέπε Παράρτημα 3Α.4 με μ = $JE_S$/ $I_0$),

$$p_c(z) = \left(\frac{z}{LJE_s/I_0}\right)^{(L-1)/2} exp(-z - LJE_s/I_0)\varphi_{L-1}\left(2\sqrt{zLJE_s/I_0}\right) \tag{4.46}$$

$E_S$ είναι η ενέργεια συμβόλου ανά διαδρομή και φυσικά, το $p_l(z)$ δίνεται πάλι από το (4.44).

Τώρα από τα (4.41), (4.42) και (4.43), αν διαιρέσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με $\Pi_{m'}p_l(z_m)$, προκύπτει ότι το κριτήριο log πιθανοφάνειας για το πρώτο σύμβολο είναι

$$\ln\left[\frac{p_0^{(I)}(z)}{p_1^{(I)}(z)}\right] = \ln\left[\frac{\sum_{m=1}^{M/2} p_c(z_m)/p_1(z_m)}{\sum_{m=1+M/2}^{M} p_c(z_m)/p_1(z_m)}\right] \qquad (4.47)$$

Προχωρούμε για να εξετάσουμε μόνο την Rayleigh απόσβεση της L διαδρομής, εφόσον αυτή αντιπροσωπεύει τη χειρότερη περίπτωση. Ακόμη, όπως σημειώθηκε, το άθροισμα των ενεργειών των διαδρομών αναπαριστά τη βέλτιστη συνάρτηση συνδυασμού μόνο στην περίπτωση της Rayleigh απόσβεσης με ανεξάρτητες διαδρομές ενέργειας ίσου μέσου όρου. Έτσι, από τα (4.44), (4.45) και (4.47), βρίσκουμε

$$\ln\left[\frac{p_0^{(I)}(z)}{p_1^{(I)}(z)}\right] = ln\frac{\sum_{m=1}^{M/2} \exp\left[\frac{z_m J\overline{E_S}/I_0}{1+J\overline{E_S}/I_0}\right]}{\sum_{m=1+M/2}^{M} \exp\left[\frac{z_m J\overline{E_S}/I_0}{1+J\overline{E_S}/I_0}\right]} \qquad (4.48)$$

Σε αυτήν την περίπτωση και σχεδόν για οποιαδήποτε στατιστικά χαρακτηριστικά καναλιού, το κριτήριο log πιθανοφάνειας είναι πολύ περίπλοκο για να υπολογιστεί για μεγάλο M και απαιτεί γνώση του $\bar{E}_s/I_0$. Από την άλλη πλευρά, εφόσον η εκθετική συνάρτηση είναι μια ταχέως αύξουσα συνάρτηση της παραμέτρου, οι αντίστοιχες μέγιστες τιμές των M/2 όρων κυριαρχούν στα αθροίσματα τόσο του αριθμητή όσο και του παρονομαστή του κριτηρίου πιθανοφάνειας. Έτσι, για την περίπτωση της Rayleigh L διαδρομής με απόσβεση, έστω

$$K_f = \left(J\overline{E_s}/I_0\right)/\left(1 + J\overline{E_s}/I_0\right)$$

$$\ln\left[\frac{p_0^{(I)}(z)}{p_1^{(I)}(z)}\right] \approx ln\left[\frac{\underset{m=1}{\overset{M/2}{Max}} \exp\left(K_f z_m\right)}{\underset{m=1+M/2}{\overset{M/2}{Max}} \exp\left(K_f z_m\right)}\right]$$

$$= K_f\left[\underset{m=1}{\overset{M/2}{Max}\, z_m} - \underset{m=1+M/2}{\overset{M}{Max}\, z_m}\right]$$

Έτσι, χρησιμοποιούμε τη μη παραμετρική μετρική αποφάσης,

$$\Lambda^{(\mathrm{I})}(\mathrm{z}) = \underset{\mathrm{m}=1}{\overset{\mathrm{M}/2}{\mathrm{Max}}}\, \mathrm{z_m} - \underset{\mathrm{m}=1+\mathrm{M}/2}{\overset{\mathrm{M}}{\mathrm{Max}}}\, \mathrm{z_m}$$

Προχωρούμε με τον ίδιο τρόπο για τα άλλα σύμβολα της ακολουθίας

$$\xi = \xi_1,\ \xi_2, \ldots,\ \xi_J$$

Γενικά, έστω

$S_i$ ={όλα τα m: ith τμήμα του $\xi_m$ είναι ‘’0’’} (4.49)

Και συνεπώς,

$\bar{S}\imath$ ={όλα τα m: ith τμήμα του $\xi_m$ είναι ‘’1’’} (4.50)

Για παράδειγμα, για το δεύτερο σύμβολο δεδομένων, $S_2$={1,2,…, m/4, 1 + M/2, …, 3M/4}, ενώ για το τελευταίο σύμβολο δεδομένων, $S_J$=(όλοι οι περιττοί ακέραιοι < M). Μετά προχωρούμε, όπως προηγουμένως,

$$\Lambda^{(i)}(z) = \underset{m \in S_i}{Max\ z_m} - \underset{m \in \bar{S}_i}{Max\ z_m} \qquad (4.51)$$

Τότε αποφασίζουμε για ένα 0 αν $\Lambda^{(i)}(z) \geq 0$ και για ένα 1 σε διαφορετική περίπτωση.

Πριν αναλύσουμε την επίδοση αυτής της προσέγγισης στη βέλτιστη μετρική απόφασης συμβόλου, σημειώνουμε ότι η συμβατική μέθοδος επιλέγει αμέσως τα J σύμβολα από την ομάδα των M= $2^J$ δεδομένων εξόδου $z_1$,…,$z_M$ ως εκείνα που αναφέρονται στο μοναδικό μέγιστο δεδομένο εξόδου του συσχετιστή. Αυτό παράγει την πιο πιθανή ακολουθία συμβόλου, $\xi_1$, ..., $\xi_J$, και δεν απαιτούνται προσεγγίσεις. Είναι εμφανές ότι η συμβατική προσέγγιση οδηγεί ακριβώς στις ίδιες αποφάσεις, όπως το (4.51). Όμως, αυτή η εναλλακτική σύμβολο-προς-σύμβολο προσέγγιση απόφασης θα παρέχει τη βάση για καλύτερη επίδοση με κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων, χρησιμοποιώντας ελαφριές αποφάσεις, όπως θα δείξουμε στο Κεφάλαιο 5.

## 4.5.2 Φράγματα επίδοσης

Υπό τη βάση σύμβολο-προς-σύμβολο, το φράγμα Chernoff στην πιθανότητα σφάλματος το βρίσκουμε όπως και για τη σύμφωνη περιπτωση: θέτοντας φράγμα στην πιθανότητα η συνάρτηση log πιθανοφάνειας (ή η προσέγγισή της που θα χρησιμοποιηθεί ως μετρική) να είναι αρνητική αν σταλεί ένα 0 ή θετική αν σταλεί ένα 1. Έτσι, από το (4.51) έχουμε ότι, για ισοπίθανες υποθέσεις, για όλα τα i, i= 1, …, J,

$$P_E^{(i)} = \Pr\left[\Lambda^{(i)}(z) > 0 \,\middle|\, ''1''\right] = \Pr\left[\Lambda^{(i)}(z) < 0 \,\middle|\, ''0''\right]$$

$$= \Pr\left[\begin{matrix} Max\ z_m - & Max\ z_m \\ m\ \in S_i & m \in \bar{S}_i \end{matrix} > 0 \mid ''1''\right]$$

$$= \Pr\left[\begin{matrix} Max\ z_m - & Max\ z_m \\ m\ \in S_i & m \in \bar{S}_i \end{matrix} > 0 \mid ''0''\right] \qquad (4.52)$$

Σε κάθε περίπτωση η κατανομή του πρώτου μεγίστου σε κάθε παρένθεση είναι η κατανομή του μεγίστου των M / 2 εσφαλμένων δεδομένων εξόδου του συσχετιστή. Η κατανομή του δεύτερου μεγίστου σε κάθε παρένθεση είναι η κατανομή του μεγίστου των (M / 2) - 1 εσφαλμένων δεδομένων εξόδου του συσχετιστή και του σωστού δεδομένου εξόδου του συσχετιστή. Ακόμη, προσέξτε ότι τα δύο μέγιστα είναι ανεξάρτητα, γιατί είναι μέγιστα ξένων συνόλων αμοιβαία ανεξάρτητων μεταβλητών. Έτσι, ορίζουμε

$$\mathrm{F_I(x)} \triangleq \Pr\left[\begin{matrix} \mathrm{Max} \\ \mathrm{m}\ \in\ \mathrm{S_i} \end{matrix} \mathrm{z_m} < x \mid ''1''\right] = \Pr\left[\begin{matrix} \mathrm{Max} \\ \mathrm{m}\ \in\ \bar{\mathrm{S}}_\mathrm{i} \end{matrix} \mathrm{z_m} < x \mid ''0''\right] \quad (4.53)$$

$$= \left[\int_0^x p_I(z)dz\right]^{M/2} = P_I^{M/2}(x)$$

$$F_C(y) \triangleq Pr\left[\begin{matrix} Max \\ m\ \in\ \bar{S}_i \end{matrix} z_m < y \mid ''1''\right] = Pr\left[\begin{matrix} Max \\ m\ \in\ S_i \end{matrix} z_m < y \mid ''0''\right]$$

$$= \int_0^y \mathrm{p_C(z)dz}\ \left[\int_0^y \mathrm{p_I(z)dz}\right]^{\mathrm{M}/2-1} = \mathrm{p_C(y)p_I(y)}^{\mathrm{M}/2-1} \quad (4.54)$$

όπου $p_C(z)$ και $p_I(z)$ είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των σωστών και εσφαλμένων δεδομένων εξόδου του συσχετιστή, αντίστοιχα. (Παραδείγματα αυτών δίνονται από το (4.44) έως το (4.46).) Τα $P_C(z)$ και $P_I(z)$ είναι τα ολοκληρώματά τους, οι αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής.

Τώρα εφαρμόζοντας το φράγμα Chernoff στο (4.52), χρησιμοποιώντας το (4.53) και το (4.54), έχουμε ότι για κάθε i,

$$
\begin{aligned}
P_E &< E\exp\left\{\rho\left[\underset{m\in S_i}{\mathrm{Max}} z_m - \underset{m\in \bar{S}_i}{\mathrm{Max}} z_m \mid ''1''\right]\right\} \\
&= E\exp\left\{\rho\left[\underset{m\in \bar{S}_i}{\mathrm{Max}} z_m - \underset{m\in S_i}{\mathrm{Max}} z_m \mid ''1''\right]\right\} \\
&= E\exp\left[\rho(x-y)\right] \\
&= \int_0^\infty \exp(\rho x)\, dF_I(x) \int_0^\infty \exp(-\rho y)\, dF_C(y) \qquad (4.55) \\
&= \int_0^\infty \exp(\rho x)\left[\frac{M}{2} P_I^{M/2-1}(x) p_I(x)\right] dx \\
&\quad \times \int_0^\infty \exp(-\rho y)\left[M/2-1)P_C(y)\, P_I(y)^{M/2-2} P_I(y)\right. \\
&\qquad \left. + p_C(y) P_I(y)^{M/2-1}\right] dy
\end{aligned}
$$

όπου ρ > 0 και

$$P_I(x) = \int_0^x p_I(z)dz \qquad \kappa\alpha\iota \quad P_C(x) = \int_0^x p_C(z)dz \qquad (4.56)$$

Σε μερικές περιπτώσεις, τα ολοκληρώματα στο (4.55) μπορούν να εκφραστούν ως πεπερασμένα αθροίσματα των M όρων. Στις περισσότερες περιπτώσεις, όμως, η αριθμητική ολοκλήρωση είτε απαιτείται είτε είναι πιο εύκολο να υπολογιστεί απ' ό,τι τα αθροίσματα. Εκφράζουμε το ελαχιστοποιημένο φράγμα, όπως στην Ενότητα 4.4,

$$P_E < \exp\left[-\ln\left(1/Z\right)\right] \qquad (4.57)$$

όπου το Z δίνεται από το (4.55) που ελαχιστοποιείται για ρ > 0. Χρησιμοποιώντας τα (4.44) έως (4.46) στο (4.55), αξιολογούμε το Z ως μια συνάρτηση του $LJE_S/I_0$ (ή $LJ\bar{E}_S/I_0$ στην περίπτωση με απόσβεση).

Στη συνέχεια προχωρούμε, όπως για τη σύμφωνη περίπτωση (Σχήμα 4.4). Για κάθε τιμή στο Σχήμα 4.8 του $LJE_S/I_0$ και την αντίστοιχη τιμή του Z, σχεδιάζουμε ($LJE_S/I_0$ / In(1 / Z) σε decibel, που είναι η περίσσια ενέργεια που απαιτείται σε σύγκριση με ένα BPSK (Binary Phase-Shift Keying, Δυαδική Διαμόρφωση Μετατόπισης Φάσης) σήμα χωρίς απόσβεση σύμφωνα αποδιαμορφωμένο σε AWGN (Additive White Gausssian Noise, Λευκό Προσθετικό Gaussian θόρυβο) (για το οποίο In(1 / Z) = $LJE_S/I_0$). Το κάνουμε αυτό για M=64 ορθογωνικές ακολουθίες (J = 6) και για τις L = 1 και L=2 συνιστώσες πολλαπλής διαδρομής. Μπορούμε να οδηγηθούμε σε μια σειρά ενδιαφερόντων συμπερασμάτων από αυτό το σχήμα. Καταρχάς, δύο καθορισμένες διαδρομές, μόνο σε AWGN, έχουν χειρότερη επίδοση από μια καθορισμένη διαδρομή με την ίδια συνολική ενέργεια λόγω της ασύμφωνης συνδυαστικής απώλειας. Όμως, δύο διαδρομές με Rayleigh απόσβεση έχουν καλύτερη επίδοση (σε όλα, αλλά πολύ χαμηλή ενέργεια-προς-θόρυβο) από μια διαδρομή με την ίδια συνολική ενέργεια. Αυτό συμβαίνει διότι το κέρδος διαφορισμού είναι μεγαλύτερο από την ασύμφωνη συνδυαστική απώλεια. Ο AWGN με ασύμφωνη αποδιαμόρφωση M-αδικής διαμόρφωσης ορθογωνισμού έχει καλύτερη επίδοση από τη σύμφωνα αποδιαμορφωμένη BPSK σε υψηλότερα επίπεδα ενέργειας-προς-παρεμβολή (η τιμή των decibel του λόγου γίνεται αρνητική) γιατί το M-αδικό σύστημα συνδυάζει

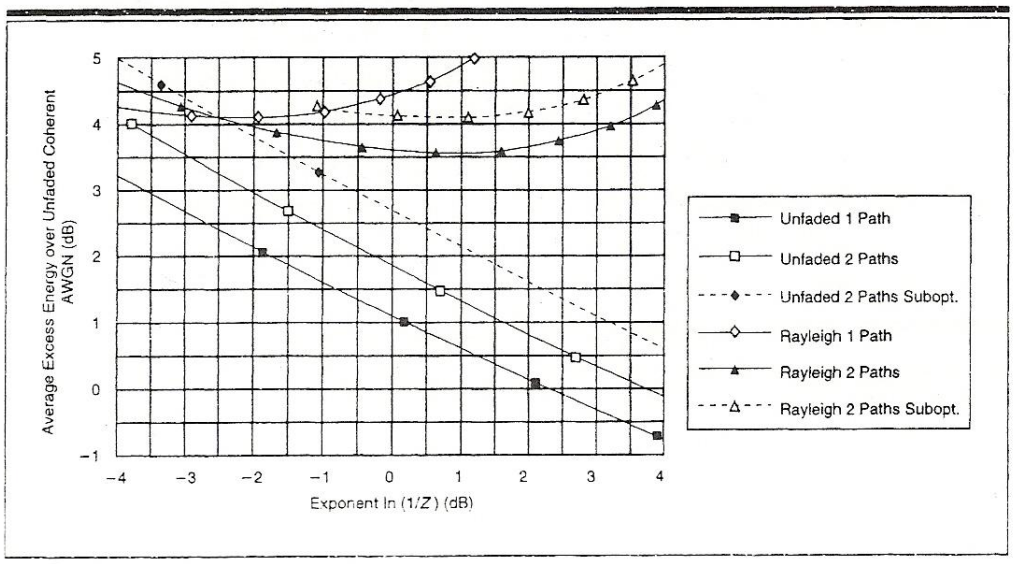



**Figure 4.8** Required excess $E_b/i_0$ (dB) for noncoherent demodulation of orthogonal signals ($M$ = 64).

την (ορθογωνική ) κωδικοποίηση μπλοκ με τη διαμόρφωση. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5, όμως, για παρόμοιες περιπλοκές κωδικοποίησης, η σύμφωνα αποδιαμορφωμένη BPSK πάντα έχει καλύτερη επίδοση από την ασύμφωνη αποδιαμόρφωση οποιασδήποτε μορφής διαμόρφωσης. Αυτό σχετίζεται με το γεγονός ότι , με την κωδικοποίηση, απαιτούνται οι μικρότερες τιμές του In(1 / Z), πράγμα που γίνεται ιδιαίτερα φανερό με χαμηλότερους ρυθμούς κωδίκων.

Πρέπει να εξετάσουμε άλλη μια εναλλακτική. Στην ασύμφωνη περίπτωση σε κάθε συσχετιστή, έχουμε αθροίσει τις ενέργειες από τις L διαδρομές πριν διαμορφώσουμε τη μεταβλητή απόφασης $\Lambda^{(i)}(z)$ σύμφωνα με το (4.51). Δηλαδή, καθεμία από τις μεταβλητές $z_m$ αποτελείται από το άθροισμα των L ασύμφωνων δεδομένων εξόδου του συσχετιστή, μία για κάθε πολυδιαδρομική συνιστώσα (Σχήμα 4.7). Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να διαμορφώσουμε τη μεταβλητή απόφασης $\Lambda^{(i)}(z)$ για κάθε διαδρομή ξεχωριστά και μετά να αθροίσουμε τις L μεταβλητές, αποφασίζοντας με βάση αυτό το άθροισμα των L μεταβλητών απόφασης μεμονωμένων διαδρομών. Σε αυτή την περίπτωση, το φράγμα πιθανότητας σφάλματος αντί για (4.55) γίνεται

$$P_E < E\ exp\left\{\rho \sum_{l=1}^{L}\left[\underset{\mathrm{m}\ \in\ \mathrm{S_i}}{\mathrm{Max}}\, z_m^{(l)} - \underset{\mathrm{m}\ \in\ \bar{\mathrm{S}}_\mathrm{i}}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{z}_m^{(l)} \mid ''1''\right]\right\} \quad \rho > 0,$$

όπου $z_m^{(l)}$ είναι τα m δεδομένα εξόδου του συσχετιστή για την l διαδρομή. Τότε, εφόσον όλες οι διαδρομές είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, για ίσες ενέργειες διαδρομών,

$P_E < Z_1^L = \exp\left[-L \ln\left(1/Z_1\right)\right] \triangleq Z$ (υποβέλτιστος συνδυασμός), (4.58)

όπου το $Z_1$ είναι το ίδιο όπως δίνεται στο (4.55), αλλά για την περίπτωση της L=1 διαδρομής. Σε αυτή την περίπτωση, βρίσκουμε το λόγο του $LJE_S/I_0$ προς In(1 / Z), ως μια συνάρτηση του In(1 / Z), παίρνοντας τα αποτελέσματα της L=1 διαδρομής που βρήκαμε προηγουμένως και πολλαπλασιάζοντας και τις δύο συντεταγμένες με το L (στην ουσία προσθέτοντας $10\log_{10}L$ στις τιμές των decibel). Καταδεικνύουμε αυτή την προσέγγιση και τις αντίστοιχες καμπύλες (που φαίνονται με διακεκομένες γραμμές στο Σχήμα 4.8) ως

υποβέλτιστο συνδυασμό. Η υποβάθμιση λόγω αυτού του υποβέλτιστου συνδυασμού για L = 2 είναι περίπου 0.8 dB για AWGN και περίπου 0.5 dB για Rayleigh πολλαπλή διαδρομή με απόσβεση.

## 4.6 Επίδοση αναζήτησης για Ασύμφωνους M-αδικούς Αποδιαμορφωτές με ορθογωνισμό

Στον ασύμφωνο αποδιαμορφωτή του Σχήματος 4.7 που μόλις εξετάσαμε, καθεμία από τις συνιστώσες πολλαπλών διαδρομών πρέπει να αναζητηθεί χωρίς τη βοήθεια της αδιαμόρφωτης πιλοτικής ακολουθίας. Έτσι, η αναζήτηση πρέπει να πραγματοποιηθεί στα διαμορφωμένα σήματα, όπως φαίνεται στο άνω τμήμα του Σχήματος 4.7a. Η εκπεμπόμενη Hadamard ακολουθία είναι πιο πιθανό να αντιστοιχεί στο συσχετιστή με τα περισσότερα δεδομένα εξόδου, οπότε ο αναζητητής βασίζει την απόφαση χρονισμού στο άθροισμα των T διαδοχικών μεγίστων. Αν ο χρονισμός είναι σωστός, σε διάρκεια μικρότερη του ενός chip, η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας κάθε μεγίστου των M συσχετιστών είναι

$$F_s(z) = P_C(z)P_I(z)^{M-1} \qquad (4.59)$$

Τα $P_C(z)$ και $P_I(z)$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής των σωστών και των εσφαλμένων δεδομένων εισόδου του συσχετιστή, αντίστοιχα (με την L = 1 συνιστώσα διότι η αναζήτηση διεξάγεται σε κάθε πολυδιαδρομική συνιστώσα ξεχωριστά). Αν το σφάλμα χρονισμού είναι διάρκειας μεγαλύτερης από ένα chip, με βάση την ιδιότητα καθυστέρησης-προς-προσθήκη (2.10), όλοι οι συσχετιστές θα παρατηρήσουν κατά βάση δεδομένα εισόδου μόνο τυχαίας ακολουθίας. Επομένως, η συνάρτηση κατανομής του μεγίστου σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\mathrm{F}_0(\mathrm{z}) = \mathrm{P}_1^{\mathrm{M}}(\mathrm{z}) \qquad (4.60)$$

Με βάση την παρατηρήση του αθροίσματος των T ανεξάρτητων διαδοχικών μεγίστων, η βέλτιστη απόφαση, σύμφωνα με τα κριτήρια των Bayes και Neyman – Pearson (Παράρτημα 3A), στηρίζεται στο κριτήριο log πιθανοφάνειας,

$$\Lambda(z) = \sum_{t=1}^{T} \ln \frac{dF_s(z_t)/dz_t}{dF_0(z_t)/dz_t}$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \ln \frac{(M-1)P_C(z_t)P_I(z_t)^{M-2}P_I(z_t)+P_C(z_t)P_I(z_t)^{M-1}}{MP_I^{M-1}(z_t)P_I(z_t)} \qquad (4.61)$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \left[\left(\frac{M-1}{M}\right)\frac{P_C(z_t)}{P_I(z_t)} + \left(\frac{1}{M}\right)\frac{P_C(z_t)}{P_I(z_t)}\right]$$

Εδώ, z είναι το διάνυσμα που αποτελείται από T διαδοχικές μέγιστες τιμές, οι οποίες έχουν κανονικοποιηθεί από τον αυτόματο έλεγχο απολαβής (Automatic Gain Control, ACG), ώστε τα εσφαλμένα δεδομένα εξόδου του συσχετιστή να έχουν μοναδιαία διακύμανση. Κάθε όρος της μετρικής του κριτηρίου log πιθανοφάνειας έχει σχεδιαστεί στα Σχήματα 4.9a και 4.9b ως μια συνάρτηση του μεγίστου δεδομένου εξόδου του συσχετιστή z. Αυτά αναπαριστούν την επίδοση για σήματα χωρίς απόσβεση και για Rayleigh σήματα με απόσβεση , αντίστοιχα, για M = 64 και ενέργεια ορθογωνικού σήματος-προς-παρεμβολή, $E / I_0$=6 dB και 9 dB, συμπεριλαμβανομένης οποιασδήποτε υποβάθμισης λόγω σφάλματος χρονισμού διάρκειας μικρότερης του ενός chip.

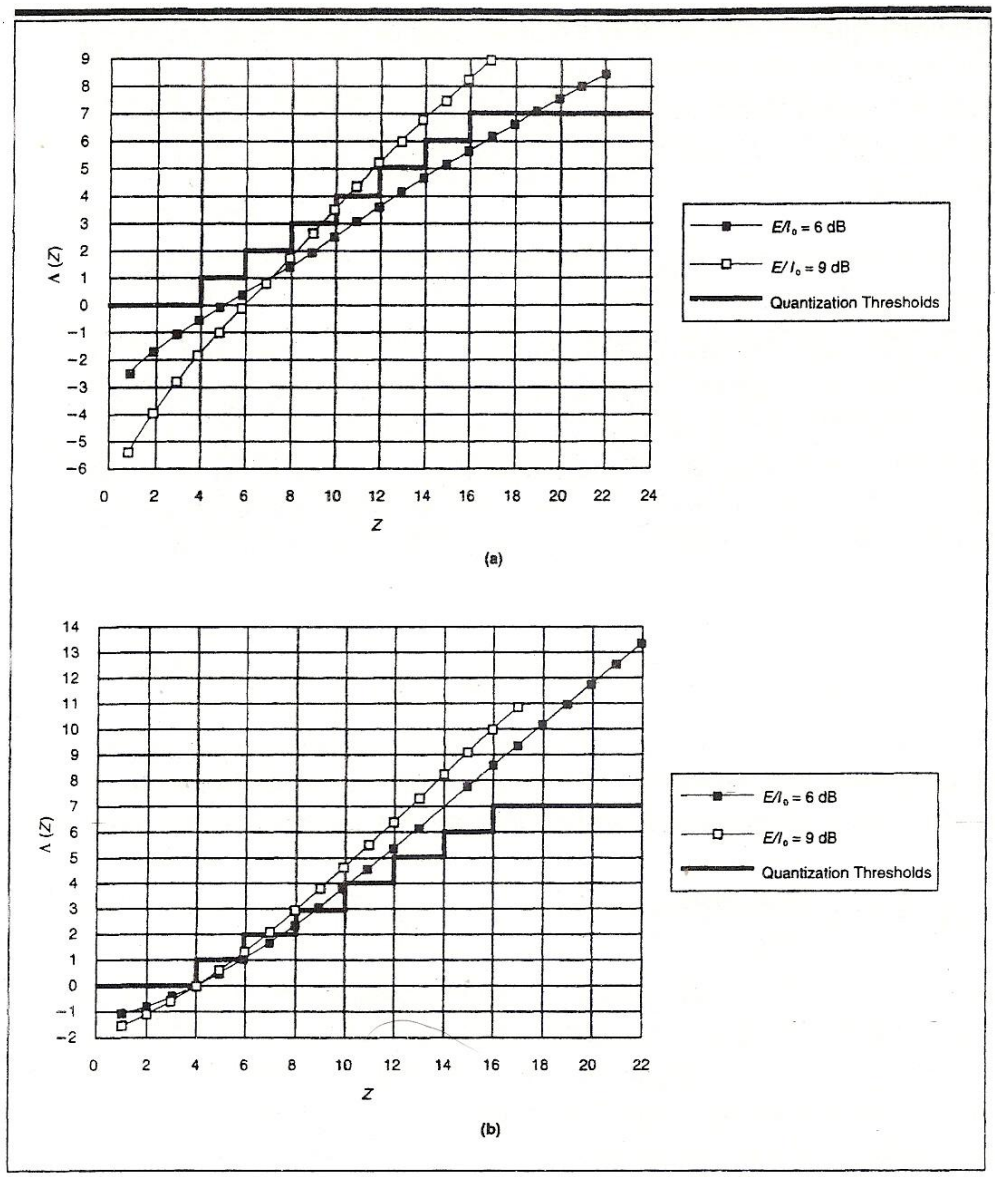



**Figure 4.9** (a) Unfaded energy signal log-likelihood function ($M = 64$). (b) Rayleigh fading signal log-likelihood function ($M = 64$).

Οι πιθανότητες εσφαλμένου συναγερμού και οι πιθανότητες ανίχνευσης είναι οι πιθανότητες το Λ(z) του (4.61) να υπερβαίνει ένα δεδομένο κατώφλι ψ υπό τις υποθέσεις, αντίστοιχα, το σήμα να απουσιάζει (δηλαδή διάρκεια σφάλματος περισσότερη του ενός chip) και να είναι παρόν (κανένα σφάλμα χρονισμού).

Έτσι,

$$P_F = P_r(\Lambda(z) > \psi \mid \text{απουσία σήματος} \qquad (4.62)$$

$$P_D = P_r(\Lambda(z) > \psi \mid \pi\alpha\rho o\upsilon\sigma\acute{\iota}\alpha\ \ \sigma\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma$$

Θα μπορούσαμε να παράγουμε ένα φράγμα Chernoff για αυτές τις εκφράσεις. Όμως, είναι πιο χρήσιμο να βρούμε τις ακριβείς εκφράσεις για την περίπτωση που το κριτήριο πιθανοφάνειας κβαντοποιηθεί, σύμφωνα με τις απαιτήσεις ενός πρακτικού επεξεργαστή ψηφιακού σήματος. Τα Σχήματα 4.9a και b δείχνουν ότι ο ομοιόμορφος κβαντιστής με τα 8 επίπεδα είναι μια λογική προσέγγιση για τη σχεδόν γραμμική περιοχή της μετρικής του κριτηρίου log πιθανοφάνειας για την περίπτωση με και χωρίς απόσβεση. Προσέξτε, επίσης, ότι ο κβαντιστής επιλέχτηκε να είναι μη-παραμετρικός, ενώ το κριτήριο πιθανοφάνειας απαιτεί γνώση του $E / I_0$.

Έτσι, με τα μέγιστα κβαντοποιημένα, βρίσκουμε τη μετρική

$$\hat{\Lambda}(z) = \sum_{t=1}^{T} \Lambda_Q(z_t) \tag{4.63}$$

το $\Lambda_Q(z_t)$ είναι η κβαντοποιημένη τιμή της τιμής log-πιθανοφάνειας κάθε συμβόλου και είναι ένας ακέραιος που ορίζεται ως εξής (βλ. Σχήμε 4.9a και b)

$$\Lambda_Q(z) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu\ z < 4 \\ \lceil (z-4)/2 \rceil & \alpha\nu\ 4 \le z\ \le 16 \\ 7 & \alpha\nu\ z > 16 \end{cases} \tag{4.64}$$

το [x]δείχνει τον μικρότερο ακέραιο, όχι μικρότερο από το x. Αυτό, φυσικά, αντιστοιχεί στα κατώφλια $\theta_k = 4 + 2(k - 1)$, k = 1,2, …, 7. Επομένως, το $\Lambda_Q(z)$ λαμβάνει ακέραιες τιμές 0 έως 7 με πιθανότητες, στην απουσία και παρουσία του σήματος, αντίστοιχα,

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{k}}^{(0)} = \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \mathrm{dF}_0(\mathrm{z}) = \mathrm{P}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{z})\Big|_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \qquad \mathrm{k=0,1,2,\ldots,7,}$$

(4.65)

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{k}}^{(0)} = \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \mathrm{dF}_{\mathrm{S}}(\mathrm{z}) = P_C(z)\mathrm{P}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{M}-1}(\mathrm{z})\Big|_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \quad \mathrm{k=0,1,2,\ldots,7}$$

Με $\theta_0 = 0$, $\theta_8 = \infty$.

Τότε με μετρικές κβαντοποιημένες με αυτόν τον τρόπο,

$$P_F = P_r(\sum_{t=1}^{T} \Lambda_Q(z_t) > \psi \mid \alpha\pi o\upsilon\sigma\acute{\iota}\alpha\ \sigma\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma)$$

και

$$P_D = P_r(\sum_{t=1}^{T} \Lambda_Q(z_t) > \psi \mid \pi\alpha\rho o\upsilon\sigma\acute{\iota}\alpha\ \sigma\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma) \qquad (4.66)$$

Αν δεχτούμε ότι τα διαδοχικά σύμβολα είναι ανεξάρτητα (ισχύει πάντα σε περιβάλλοντα χωρίς απόσβεση), μπορούμε να βρούμε τη διακριτή κατανομή του αθροίσματος των κβαντοποιημένων τιμών από τη (διακριτή) συνέλιξη των μεμονωμένων κβαντοποιημένων τιμών. Ακόμη καλύτερα, μπορούμε να τη βρούμε από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος, που είναι το γινόμενο των γεννήτριων συναρτήσεων των μεμονωμένων όρων. Έτσι, ορίζουμε

$$\pi_0(\mathrm{w}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{7} \mathrm{Q}_{\mathrm{k}}^{(0)} \mathrm{w}^{\mathrm{k}}$$

(4.67)

$$\pi_{\mathrm{S}}(\mathrm{w}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{7} \mathrm{Q}_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{S})} \mathrm{w}^{\mathrm{k}}$$

Αν το αναγάγουμε στη δύναμη του T, γίνεται

$$[\pi(w)]^T = Q_0^T + TQ_0^{T-1}\, Q_1 w + \ldots + Q_7^T w^{7T} \qquad (4.68)$$

με τους κατάλληλους δείκτες και εκθέτες (0 ή S). Οι πιθανότητες εσφαλμένου συναγερμού και οι πιθανότητες ανίχνευσης είναι απλώς το άθροισμα των συντελεστών των πολυωνύμων του (4.68), των οποίων οι δυνάμεις υπερβαίνουν το κατώφλι ψ.

Έτσι,

$$P_F = \{[\pi_0(w)]^T\}_{\psi^+}$$

(4.69)

$$P_D = \{[\pi_S(w)]^T\}_{\psi^+}$$

όπου $\{\}_{\psi+}$ είναι το άθροισμα των συντελεστών όλων των όρων, των οποίων οι (ακέραιες) δυνάμεις (του ω) ξεπερνούν το ψ. Το Σχήμα 4.10 δείχνει το $P_D$ ως συνάρτηση του $P_F$ (λειτουργικό χαρακτηριστικό λήψης) για διάφορες τιμές του $E / I_0 = JNE_C/I_0$ με T = 2, 3 και 6. Για σύγκριση,

δείχνουμε επίσης την περίπτωση της αδιαμόρφωτης πιλοτικής ανίχνευσης, με T = 1.

Προσέχουμε, τέλος, ότι το εύρος αναζήτησης ή παράθυρο, σε πολυδιαδρομικές συνιστώσες θα πρέπει να είναι σχετικά μικρό μόλις εντοπιστεί η πρώτη συνιστώσα. Ακόμη, προσέχουμε ότι η πρώτη συνιστώσα γενικά ανιχνεύεται από μια (πιθανόν αδιαμόρφωτη) μετάδοση αίτησης πρόσβασης (βλ. Κεφάλαιο 6). Αυτό υπονοεί ότι ο αριθμός των υποθέσεων προς έλεγχο είναι μικρός, αφήνοντας περιθώριο για γρήγορη επιστροφή στη σωστή υπόθεση αν απορριφτεί εσφαλμένα. Όμως, για χρήστες εν κινήσει, επιπλέον πολυδιαδρομικές συνιστώσες εμφανίζονται και εξαφανίζονται αρκετά συχνά, ώστε οι παράλληλοι αναζητητές μπορεί να χρειαστεί να βρουν γρήγορα νέες πολυδιαδρομικές συνιστώσες και να αναθέσουν δάχτυλα αποδιαμορφωτή όταν εμφανίζονται.

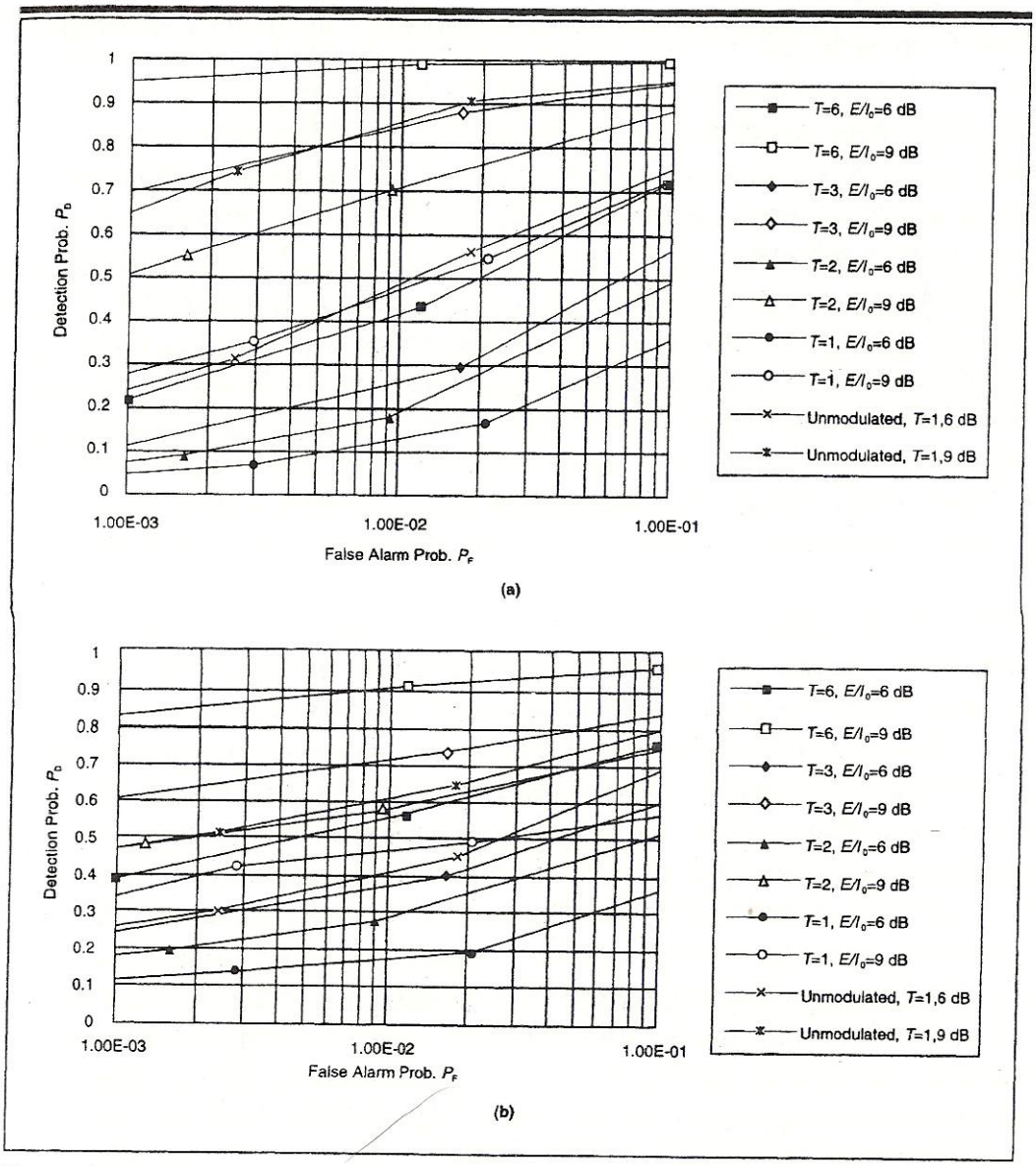



**Figure 4.10** (a) False alarm and detection probabilities for search of unfaded components. (b) False alarm and detection probabilities for search of Rayleigh fading components.

## 4.7 Επίδοση αναζήτησης για Ασύμφωνους Μ-αδικούς Αποδιαμορφωτές με ορθογωνισμό

Ο έλεγχος ισχύος είναι ένα πολύτιμο πλεονέκτημα σε οποιοδήποτε σύστημα αμφίδρομης επικοινωνίας. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε ένα επίγειο σύστημα πολλαπλής πρόσβασης, όπου η απώλεια διάδοσης των χρηστών μπορεί να ποικίλει κατά πολλές δεκάδες decibel. Όπως αρχικά συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 1, η ισχύς στον κυψελοειδή σταθμό βάσης, η

οποία λαμβάνεται από κάθε χρήστη μέσω ανάστροφης ζεύξης, πρέπει να γίνει σχεδόν ίση με εκείνη όλων των άλλων, ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική χωρητικότητα χρηστών του συστήματος. Πολύ μεγάλες ανομοιότητες προκαλούνται κυρίως από πολύ διαφορετικές αποστάσεις από το σταθμό βάσης και σε μικρότερο βαθμό, από την επισκίαση των επιδράσεων κτηρίων κι άλλων αντικειμένων. Κάθε μονάδα κινητού συνδρομητή μπορεί να προσαρμοστεί ξεχωριστά σε τέτοιες ανομοιότητες, απλώς ελέγχοντας την εκπεμπόμενη ισχύ σύμφωνα με τη μέτρηση του αυτόματου ελέγχου απολαβής (AGC) της ισχύος εμπρόσθιας ζεύξης που λαμβάνεται από τον κινητό δέκτη. Γενικά, όμως, αυτό δεν είναι αρκετά αποτελεσματικό: οι απώλειες διάδοσης της εμπρόσθιας και ανάστροφης ζεύξης δεν είναι συμμετρικές, ιδιαίτερα όταν οι κεντρικές συχνότητές τους απέχουν πολύ η μία από την άλλη. Έτσι, ακόμη και μετά από προσαρμογή χρησιμοποιώντας έλεγχο ισχύος ανοιχτού βρόχου που βασίζεται σε AGC, η εκπεμπόμενη ισχύς ανάστροφης ζεύξης μπορεί να διαφέρει κατά αρκετά decibel από τον ένα συνδρομητή στον άλλο.

Η λύση είναι ο έλεγχος ισχύος κλειστού βρόχου. Αυτό σημαίνει ότι όταν ο σταθμός βάσης καθορίζει ότι το λαμβανόμενο σήμα οποιουδήποτε χρήστη στην ανάστροφη ζεύξη έχει υπερβολικά υψηλό ή χαμηλό επίπεδο ισχύος ( ή πιο συγκεκριμένα επίπεδο $E_S / I_0$), μια εντολή ενός bit αποστέλλεται από το σταθμό βάσης στο χρήστη μέσω της εμπρόσθιας ζεύξης για να τον διατάξει να μειώσει ή να αυξήσει τη σχετική ισχύ του κατά ένα συγκεκριμένο ποσό, Δ dB. Αυτό προκαλεί τον επονομαζόμενο βρόχο ελέγχου με κοφτά χτυπήματα (bang-bang), του οποίου η καθυστέρηση είναι ο χρόνος που απαιτείται για να σταλεί η εντολή και να εκτελεστεί η αλλαγή στον πομπό του χρήστη. Πριν εξετάσουμε την επίδοση του βρόχου ελέγχου, πρέπει να τεκμηριώσουμε πώς λαμβάνεται η απόφαση να αυξηθεί ή να μειωθεί η ισχύς. Όπως φαίνεται στο χαμηλότερο τμήμα του Σχήματος 4.7a, το άθροισμα των S διαδοχικών μεγίστων των M δεδομένων εξόδου του συσχετιστή συγκρίνεται με ένα προκαθορισμένο κατώφλι με τον ίδιο γενικό τρόπο, όπως και στην αναζήτηση για νέα δάχτυλα, που περιγράφηκε στην Ενότητα 4.6 και φαίνεται στο άνω τμήμα του Σχήματος 4.7a. Διαφέρει, όμως, με δύο τρόπους:

α) Τα μέγιστα καθορίζονται με βάση το άθροισμα των L δαχτύλων που παρακολουθούνται, αντί με βάση το μοναδικό δάχτυλο του οποίου η ύπαρξη και η καθυστέρηση χρόνου αναζητήθηκε στην προηγούμενη περίπτωση.

β) Η μέτρηση συνήθως περιέχει μια συνιστώσα σήματος (δεδομένου ότι χρησιμοποιείται το σωστό μέγιστο συσχετιστή). Το ζήτημα, επομένως, είναι αν το μέσο επίπεδο του σήματος είναι υπερβολικά υψηλό ή χαμηλό, παρά αν το σήμα είναι παρόν.

Προχωρώντας, στη συνέχεια, όπως στην Ενότητα 4.6, δηλαδή κβαντοποιώντας το μέγιστο άθροισμα των δεδομένων εξόδου του συσχετιστή, βρίσκουμε τις πιθανότητες να δοθεί μια προς τα κάτω ή προς τα πάνω εντολή $P_d$ και $P_u$ ως συνάρτηση του $E_S / I_0$, αντίστοιχα, ως εξής

$$\mathrm{P_d(E_s/I_0)} = \mathrm{Pr}\left[\sum_{\mathrm{r=1}}^{\mathrm{S}} \mathrm{Q}(\hat{\mathrm{z}}_\mathrm{r}) > \Phi \mid \mathrm{E_s/I_0}\right],$$

$$\mathrm{P_u(E_s/I_0)} = 1 - \mathrm{P_d(E_s/I_0)} \tag{4.70}$$

Εδώ, το $\hat{z}_r$ είναι το μέγιστο των M αθροισμάτων των L δεδομένων εξόδου του συσχετιστή για καθεμία από τις M Hadamard ακολουθίες για την r περίοδο διαδοχικής ακολουθίας (που έχει μήκος J σύμβολα ή JN chip) και το φ είναι το επίπεδο του κατωφλιού. Το αποτέλεσμα παράγεται τότε με τον ίδιο τρόπο, όπως και οι εκφράσεις πιθανότητας ανίχνευσης των (4.66) έως (4.69),

$$\mathrm{P_d(E_s/I_0)} = \left\{\left[\hat{\pi}_{E_s/I_0}(w)\right]^S\right\}_{\Phi^+}, \tag{4.71}$$

όπου

$$\hat{\pi}_{E_s/I_0}(w) = \sum_{k=0}^{7} \hat{Q}_k(\mathrm{E_s/I_0})\, w^k \tag{4.72}$$

και

$$\hat{Q}_k(\mathrm{E_s/I_0}) = \int_{\hat{\theta}_k}^{\hat{\theta}_{k+1}} \mathrm{d}\hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{E_s/I_0}}(\mathrm{z})\mathrm{dz} = \hat{P}_C(\mathrm{z;\, E_s/I_0})\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{M}-1}(\mathrm{z})\Big|_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}$$

(4.73)

k= 0, 1, 2, . . . .

τα (4.71) έως (4.73) διαφέρουν από τα ισοδύναμά τους στην προηγούμενη ενότητα με τους εξής τρόπους:

1. Οι συναρτήσεις κατανομής $\hat{P}_{\mathrm{C}}$ και $\hat{P}_{\mathrm{I}}$ αναφέρονται στο άθροισμα των L δεδομένων εξόδου του συσχετιστή. Αυτές τις βρίσκουμε από τα (4.44) έως (4.46) να είναι

$$\hat{P}_I(z) = \int_0^z \frac{y^{L-1}\exp(-y)}{(L-1)!}dy = 1 - e^{-z}\sum_{k=0}^{L-1} z^k/k! \quad (4.74)$$

$$\hat{P}_C(\mathrm{z;\, E_s/I_0}) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-z/(1+\bar{\mu})\right] \\ \times \sum_{k=0}^{L-1}\left[z/(1+\bar{\mu})\right]^k/k! \\ \int_0^z \left(\frac{y}{L\mu}\right)^{(L-1)/2} \end{cases}$$

Εξασθένηση Raleigh (4.75)

$$\times\, e^{-(y+L\mu)}\varphi_{L-1}\left(2\sqrt{L\mu y}\right)dy$$ (χωρίς απόσβεση )

Όπου $\bar{\mu} = J\overline{E_s}/I_0\,, \mu = JE_s/I_0$

2. Μπορούμε να επιλέξουμε τα κατώφλια κβαντοποίησης, $\hat{\theta}_k$, να διαφέρουν από το $\theta_k$, τα κατώφλια κβαντοποίησης της αναζήτησης.

Τώρα ας στρέψουμε την προσοχή μας στην επίδοση του βρόχου ελέγχου.

## 4.7.1 Επίδοση βρόχου ελέγχου ισχύος

Καταρχάς, παρότι ο σταθμός βάσης αποφασίζει να αυξήσει ή να μειώσει τη λαμβανόμενη ισχύ, η εντολή προς τα πάνω ή προς τα

κάτω πρέπει ακόμη να εκπέμπεται μέσω εμπρόσθιας ζεύξης στην κινητή μονάδα, ώστε να μπορεί να αυξήσει ή να μειώσει το επίπεδο της εκπεμπόμενης ισχύος κατά Δ dB. Αν αυτή η εντολή ληφθεί εσφαλμένα, η αντίθετη ενέργεια θα πραγματοποιηθεί. Επομένως, δεδομένου ότι ένα σφάλμα εντολής εμπρόσθιας ζεύξης λαμβάνει χώρα με πιθανότητα π, η πραγματική πιθανότητα να μειωθεί η ισχύς για ένα λόγο λαμβανόμενης ενέργειας-προς-παρέμβαση, $E_S$ / $I_0$, είναι

$$\begin{aligned} P'_d(E_s/I_0) &= (1-\pi)P_d(E_s/I_0) + \pi P_u(E_s/I_0) \\ &= (1-\pi)P_d(E_s/I_0) + \pi \end{aligned}$$

και η πιθανότητα να αυξηθεί είναι

$$P'_u(E_s/I_0) = 1 - P'_d(E_s/I_0) = (1-\pi) - (1-2\pi)P_d(E_s/I_0) \quad (4.76)$$

όπου $P_d(E_S / I_0)$ δίνεται από τα (4.71) έως (4.75).

Ο στόχος του βρόχου ελέγχου είναι να διατηρήσει ένα επιθυμητό $E_S$ / $I_0$ επίπεδο σε ένα περιβάλλον, όπου η απώλεια διάδοσης ποικίλει σημαντικά, αλλά αρκετά αργά, ώστε ο μηχανισμός ελέγχου, συμπεριλαμβανομένων των εγγενών καθυστερήσεων, να μπορεί να παρακολουθήσει τις αλλαγές. Έστω ότι η συνολική εκπεμπόμενη ενέργεια για την j περίοδο μέτρησης του ελέγχου ισχύος, διάρκειας $SJNT_C$ chip, είναι T(j) dB, κι έστω ότι η απώλεια διάδοσης γι' αυτή την περίοδο είναι L(j) dB. Τότε, η λαμβανόμενη ενέργεια κατά τη συγκεκριμένη περίοδο μέτρησης είναι

$$E(j) = T(j) - L(j)dB \quad (4.77)$$

Ο βρόχος εντολής, έχοντας καθυστέρηση μιας περιόδου μέτρησης (οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός περιόδων μέτρησης θα μπορούσε εξίσου να ληφθεί), κάνει την εκπεμπόμενη ισχύ κατά το (j + 1) διάστημα μέτρησης να αυξάνει ή να μειώνεται κατά Δ dB. Έτσι,

$$T(j+1) = T(j) + \Delta \cdot C[\big(E(j-1)\big)], \quad (4.78)$$

όπου

$$C(E) = \begin{cases} -1 \ \mu\varepsilon \ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ \ P'_d(E_s/I_0) \\ +1 \ \mu\varepsilon \ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ 1 - \ P'_d(E_s/I_0) \end{cases} \quad (4.79)$$

Συνδυάζοντας το (4.77) και το (4.78), βρίσκουμε

$$E(j+1) = E(j) + \Delta \cdot C[E(j-1)] - [L(j+1) - L(j)]\, dB \quad (4.80)$$

Αυτή είναι η εξίσωση ελέγχου ενός πρώτης τάξης βρόχου διακριτού χρόνου με καθυστέρηση ενός διαστήματος και με τη συνάρτηση οδήγησης (ή ελέγχου) [L (j + 1) – L(j)].

Η απώλεια διάδοσης προφανώς εξαρτάται πολύ από την απόσταση της μονάδος συνδρομητή από το σταθμό βάσης. Όμως, εξαρτάται ακόμη κι από την επισκίαση ή παρεμπόδιση από κτήρια κι άλλα αντικείμενα. Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, η περισσότερη μακροπρόθεσμη απώλεια διάδοσης εξαιτίας της απόστασης προσαρμόζεται από μια διόρθωση ανοιχτού βρόχου, που βασίζεται στο AGC της μονάδος συνδρομητή. Πολύ γρήγορες διακυμάνσεις, μικρότερες του ενός χιλιοστού του δευτερολέπτου, οφείλονται κυρίως σε φαινόμενα Rayleigh με απόσβεση που δεν μπορούν λογικά να αμβλυνθούν από τον έλεγχο ισχύος. Έτσι, μένει η επισκίαση από αντικείμενα και η μακροχρόνια απόσβεση, όπως μπορεί να συμβεί σε σταθερούς συνδρομητές. Αυτά είναι αρκετά μακριάς διάρκειας, ώστε να αμβλυνθούν από το βρόχο ελέγχου ισχύος. Οι μετρήσεις διάδοσης έχουν γενικά οδηγήσει στη μοντελοποίηση αυτών των επιδράσεων από κανονικές log κατανομές, πράγμα που είναι ισοδύναμο με μια Gaussian κατανομή των τιμών decibel της απώλειας. Όμως, η εξίσωση βρόχου (4.80) απαιτεί ένα μοντέλο για την πρώτη διαφορά της απώλειας διάδοσης, [L (j + 1) – L(j)]. Εμφανώς, αν η απώλεια σε decibel έχει μια Gaussian κατανομή, το ίδιο θα ισχύει και για τη διαφορά.

Μένει μόνο να προσδιορίσουμε τις στατιστικές δεύτερης τάξης. Μπορούμε να δεχτούμε ότι η πρώτη διαφορά έχει μηδενικό μέσο όρο (εφόσον μια αύξηση στην απώλεια είναι τόσο πιθανή όσο και μια μείωση) και μια αυθαίρετη διακύμανση V. Για να είναι πιο απλό, υποθέτουμε ότι οι διαδοχικές πρώτες διαφορές είναι ασυσχέτιστες – δηλαδή ότι η απώλεια είναι μια διαδικασία ανεξάτητης προσαύξησης. Αυτή η υπόθεση φαντάζει απαισιόδοξη, διότι μια τέτοια διαδικασία απαιτεί ένα ευρύτερο εύρος ζώνης

παρακολούθησης (μεγαλύτερο κέρδος, Δ) απ' ό,τι μια διαδικασία με συσχετισμένες προσαυξήσεις. Η εξίσωση (4.80) δεν λύνεται εύκολα στην παρούσα μορφή της. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε απλοποιημένες προσεγγίσεις (είτε κάνοντας τις τιμές προσαύξησης διακριτές και χρησιμοποιώντας μεθόδους κατάστασης Markov είτε εξετάζοντας το όριο διαρκούς χρόνου και χρησιμοποιώντας Fokker-Planck τεχνικές). Αλλά είναι πιο χρήσιμο να προσομοιώσουμε το (4.80) και από αυτό να δημιουργήσουμε τα ιστογράμματα του E, κατάλληλα κανονικοποιημένα ώστε να παράγουν $E_S$ / $I_0$. Αυτά τα ιστογράμματα φαίνονται στο σχήμα 4.11 για το μέγεθος του βήματος διόρθωσης της ισχύος που είναι ίσο με 0.5 dB, την τυπική απόκλιση απώλειας προσαύξησης $\sqrt{V}$ = 0.5 dB, π = 0.05, J = 6, και μια περίοδο μέτρησης που περιλαμβάνει S = 6 Hadamard περιόδους ακολουθίας.

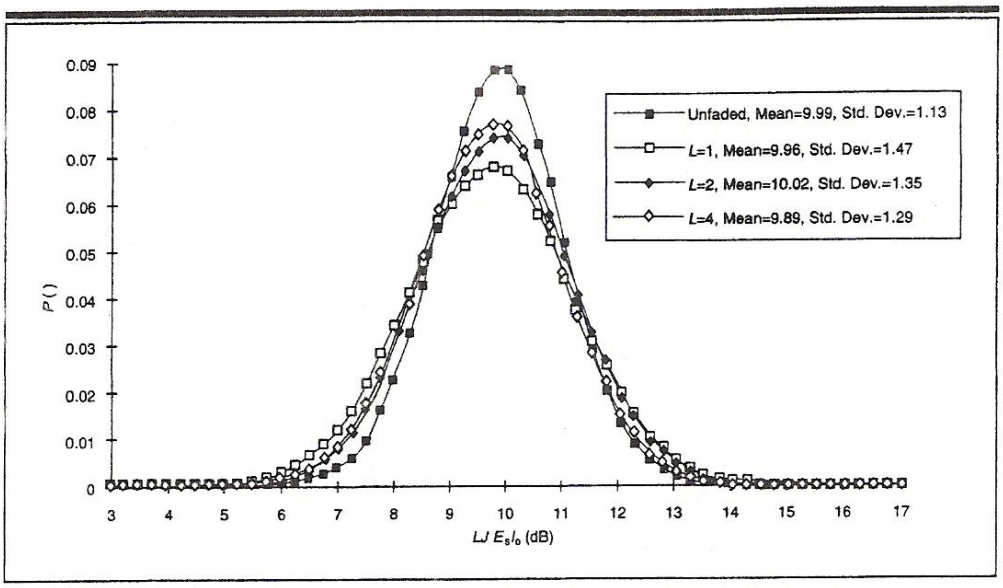



**Figure 4.11** Steady-state energy probabilities from simulation. © 1993 IEEE. "Performance of Power-Controlled Wideband Terrestrial Digital Communication" by A. J. Viterbi, A. M. Viterbi, E. Zehavi in *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 41, No. 4, pp. 559–569, April 1993.

Προσομοιώσαμε περιπτώσεις εκπομπής χωρίς απόσβεση, με L = 1 και με πολλαπλή διαδρομή ίσης μέσης συνιστώσας με Rayleigh απόσβεση, με L = 1,2 και 4. Βρήκαμε το C[E(j)] για κάθε τιμή του $E_S/N_0$, σε χρόνο j, από το (4.79) και τα (4.71) έως (4.76). Το κατώφλι φ επιλέχθηκε σε κάθε περίπτωση, ώστε το μέσο E / $I_0$ ≈ 10 dB (όπου

E = LJ$E_S$). Τα ιστογράμματα φαίνονται να είναι σχεδόν Gaussian με τυπική απόκλιση μικρότερη του 1.5 dB.

## 4.7.2 Συμπεράσματα για τον ελέγχο ισχύος

Το ιστόγραμμα του Σχήματος 4.11 αναπαριστά το σφάλμα ανάμεσα στο επιθυμητό LJ$\bar{E}_S$ / $I_0$ κι εκείνο που επιτυγχάνεται με τον έλεγχο ισχύος. Όμως, στην πραγματικότητα, το απαιτούμενο LJ$\bar{E}_S$ / $I_0$ μπορεί να κυμαίνεται από 2 έως 3 dB, εφόσον ιδιαίτερα για έναν κινητό χρήστη ο αριθμός των διαδρομών με απόσβεση, και πιθανόν επίσης και των διαδρομών χωρίς απόσβεση, μπορεί να ποικίλει. Αυτό γίνεται φανερό από το Σχήμα 4.8. Με ένα σύστημα αμφίδρομης επικοινωνίας ο σταθμός βάσης μπορεί να ελέγχει την κατάσταση του καναλιού από οποιονδήποτε συνδρομητή, συνήθως μετρώντας το ρυθμό σφάλματος. Ο σταθμός βάσης στη συνέχεια μπορεί να ποικίλει το κατώφλι ελέγχου ισχύος κλειστού βρόχου, φ για εκείνο το συνδρομητή. Αυτό επιβάλλει ένα υψηλότερο ή χαμηλότερο μέσο $\bar{E}_S$ / $I_0$ στην ανάστροφη ζεύξη εκείνου του συνδρομητή, που αντιστοιχεί στην παρούσα κατάσταση του καναλιού. Ο σφιχτότερος έλεγχος που προκύπτει μπορεί να πετύχει το επιθυμητό επίπεδο επίδοσης σφάλματος, αλλά με μεγαλύτερη διακύμανση στο συνολικό $\bar{E}_S$ / $I_0$. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6, αυτή η μεταβλητότητα θα επηρεάσει τη συνολική Erlang χωρητικότητα της ανάστροφης ζεύξης, η οποία ευθύνεται για το μέσο αριθμό ενεργών χρηστών που μπορεί να υποστηρίξει η ανάστροφη ζεύξη οποιουδήποτε σταθμού βάσης.

Τελειώνουμε σημειώνοντας ότι έχουμε εστιάσει στον έλεγχο ισχύος για την ανάστροφη ζεύξη, αντί για την εμπρόσθια ζεύξη, για δύο λόγους. Πρώτον, η μέτρηση της ισχύος είναι πιο περίπλοκη, εφόσον για την εμπρόσθια ζεύξη, η ισχύς μετριέται διαρκώς στο αδιαμόρφωτο πιλοτικό σήμα (βλ. Σχήμα 4.3b και Παράρτημα 4A). Πιο σημαντικό είναι ότι ο έλεγχος ισχύος είναι πολύ σημαντικός για την επίτευξη μεγίστης χωρητικότητας ανάστροφης ζεύξης και πολύ

λιγότερο για την εμπρόσθια ζεύξη. Αυτά τα θέματα θα εξεταστούν με περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 6.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4Α

## Φράγμα Chernoff με μη τέλειες εκτιμήσεις παραμέτρων

Σχετικά με την Εξίσωση (4.29) και το Σχήμα 4.3, μειώνοντας το δείκτη k, έχουμε

$$P_E < \exp\{-\rho N\,[\sqrt{E_c}\sum_{l=1}^{L} a_l \hat{a}_l \cos\left(\Phi - \hat{\Phi}_l\right) - \rho \sum_{l=1}^{L} \hat{a}_l^2\, I_0/4]\}$$

$$= \exp\{-\,\rho N\left[\sqrt{E_c}\sum_{l=1}^{L}(\zeta_l\,\hat{\zeta}_l + \eta_l\hat{\eta}_l\right) - \rho(I_0/4)\sum_{l=1}^{L}(\hat{\zeta}_l^2 + \hat{\eta}_l^2]\}$$

$$\rho > 0 \qquad (4A.1)$$

όπου

$$\zeta_l = a_l \cos\Phi_l, \qquad \eta_l = a_l\, sin\Phi_l$$

$$\hat{\zeta}_l = \hat{a}_l \cos\hat{\Phi}_l \;\triangleq\; \zeta_l + \delta_l \qquad \hat{\eta}_l = \hat{a}_l \sin\hat{\Phi}_l \;\triangleq\; \eta_l + \varepsilon_l \quad (4A.2)$$

$$\zeta_l^2 + \eta_l^2 = \alpha_l^2 \qquad \hat{\zeta}_l^2 + \hat{\eta}_l^2 = \hat{a}_l^2$$

Το (4Α.2) είναι απλώς ένας μετασχηματισμός από πολικό σε ορθογώνιο, που δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι ορθογώνιες συντεταγμένες είναι στην ουσία οι παράμετροι που μετριούνται. Με βάση το μεγάλο αριθμό των chip που προστίθενται για να διαμορφωθούν εκτιμήσεις, δεχόμαστε ότι τα $\hat{\zeta}_l$ και $\hat{\eta}_l$ είναι Gaussian και αμερόληπτα με αυθαίρετη διακύμανση $\sigma^2$. (Θα ορίσουμε $\sigma^2$ για έναν πιλοτικά υποβοηθούμενο εκτιμητή πιο κάτω.)

Τότε

$$E\left(\delta_l^2\right) = E\left(\varepsilon_l^2\right) = \sigma^2 \qquad (4A.3)$$

κι έτσι

$P_E < \prod_{l=1}^{L} \bar{Z}_l$ όπου

$$\bar{Z}_l = \exp\{-\rho N\left[\sqrt{E_c}\left(\alpha_l^2 + \zeta_l\delta_l + \eta_l\varepsilon_l\right)\right] \tag{4A.4}$$

$$+\rho^2 N[(I_0/4)\left(\alpha_l^2 + 2\zeta_l\delta_l + 2\eta_l\varepsilon_l + \delta_l^2 + \varepsilon_l^2\right)]\} \quad \rho > 0$$

Επιλέγουμε, όπως πριν

$$\rho = 2\sqrt{E_c}/I_0 \tag{4A.5}$$

(Αυτό είναι βέλτιστο μόνο στην περίπτωση τέλειων εκτιμήσεων, αλλά απλοποιεί σημαντικά το αποτέλεσμα εδώ χωρίς να αυξάνει σημαντικά το φράγμα.) Με το μέσο όρο των $\delta_l$ και $\varepsilon_l$, βρίσκουμε

$$\bar{Z}_l = \exp\left[-N(E_c/I_0)a_l^2\right]$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-(\delta_l^2+\varepsilon_l^2)[1/(2\sigma^2)-N(E_c/I_0)]\}}{2\pi\sigma^2}\, d\delta_l\, d\varepsilon_l \tag{4A.6}$$

$$= \frac{\exp\left[-N(E_c/I_0)a_l^2\right]}{1-2\sigma^2 N E_c/I_0}$$

Τώρα αν βρούμε τις εκτιμήσεις των $\hat{\zeta}_l = \hat{a}_l \cos\hat{\varphi}_l$ και $\hat{\eta}_l = \hat{a}_l \sin\hat{\varphi}_l$ με το μέσο όρο των $N_P$ chip του αδιαμόρφωτου πιλότου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3,

$$\sigma^2 = \frac{I_0/2}{N_p A_0^2 E_c} \tag{4A.7}$$

Το $A_0^2 E_C$ είναι η ενέργεια ανά chip του πιλότου (που είναι $A_0^2$ φορές όση εκείνη του κάθε χρήστη). Τότε από το (4A.6) βρίσκουμε

$$\bar{Z}_l = \frac{\exp\left[-N\left(a_l^2 E_c/I_0\right)\right]}{1-N/(N_p A_0^2)} \quad N < N_p A_0^2 \tag{4A.8}$$

Ακόμη, εφόσον το $NE_C$ είναι η συνολική ενέργεια συμβόλου, το $E_S$ (υποθέτοντας ότι $\Sigma_{l=1}^{L} a_l^2 = 1$) και το $A_0^2 N_P E_C$ είναι η συνολική πιλοτική ενέργεια, μπορούμε επίσης να το εκφράσουμε αυτό ως εξής

$$\bar{Z}_l = \frac{\exp\left(-a_l^2 E_s/I_0\right)}{1-(\textit{σύμβολο ενέργειας}/\textit{πιλοτική ενέργεια})} \tag{4A.9}$$

# Κεφάλαιο 5

## Κωδικοποίηση και διεμπλοκή

## 5.1 Στόχος

Από τη φύση του, το διάχυτο φάσμα άμεσης ακολουθίας CDMA (Code Division Multiple Access, Διαίρεση Κώδικα Πολλαπλής Πρόσβασης) παρέχει μια σημαντικά υψηλότερη διαστατικότητα από εκείνη που χρειάζεται για να εκπέμψουμε πληροφορίες από οποιονδήποτε μοναδικό χρήστη. Αυτό φαίνεται από το υψηλό κέρδος επεξεργασίας, ή εύρος ζώνης-προς-ρυθμό δεδομένων, W / R. Σε αυτό το κεφάλαιο, δείχνουμε πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε αυτή την περίσσια διαστατικότητα ή πλεόνασμα για να βελτιώσουμε την επίδοση, χωρίς να ρισκάρουμε να χάσουμε τα άλλα πλεονεκτήματα του υψηλού κέρδους επεξεργασίας. Δύο τεχνικές επεξεργασίας φαίνεται να οδηγούν σε βελτιώσεις: η διεμπλοκή και η κωδικοποίηση εμπρόσθιας διόρθωσης σφαλμάτων.

## 5.2 Διεμπλοκή για επίτευξη διαφορισμού

Το άμεσο πλεονέκτημα του περίσσιου πλεονάσματος είναι ότι παρέχει επιπλέον ανεξάρτητα δεδομένα εξόδου του καναλιού. Στην Ενότητα 4.4.2 βρήκαμε ότι, με τη σύμφωνη αποδιαμόρφωση, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών διαδρομής που είναι διαθέσιμες με απόσβεση Rayleigh, τόσο καλύτερη είναι η επίδοση. Αυτό τονίζεται στο Σχήμα 4.4, που δείχνει τη συνολική λαμβανόμενη ενέργεια (συνδυασμένη από όλες τις διαδρομές) που απαιτείται για να πετύχουμε ένα δεδομένο επίπεδο επίδοσης, όπως αποδείχτηκε από τον εκθέτη του φράγματος Chernoff (4.40). Το σχήμα δείχνει ότι με περισσότερες ανεξάρτητες

διαδρομές, L,  απαιτείται λιγότερη περίσσια συνολική ενέργεια για να πετύχουμε ένα δεδομένο εκθέτη σφάλματος για το κανάλι με απόσβεση. Από την άλλη πλευρά, η επίδοση χωρίς απόσβεση είναι ανεξάρτητη του L.

Όπως σημειώσαμε, εκτός από L διαδρομές, έχουμε επίσης N chip ανά σύμβολο [βλ. (4.24)]. Το πρόβλημα είναι ότι τα διαδοχικά chip δεν μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα. Στην ουσία, στο Κεφάλαιο 4 πάντα υποθέταμε ότι το πλάτος και η φάση ήταν σταθερά για τους χρόνους των N chip. Είναι πιθανό, όμως, να επανατακτοποιήσουμε τα chip πριν την εκπομπή, ώστε τα N chip που ανήκουν στο ίδιο σύμβολο να μην εκπέμπονται πλέον διαδοχικά. Αντί αυτού, να εκπέμπονται ανά αρκετά μεγάλα διαστήματα ώστε η μεταβλητότητα χρόνου της διαδικασίας απόσβεσης να οδηγήσει σε ανεξάρτητο πλάτος και φάση για καθένα από τα N chip. Αυτή η διαδικασία της επανατακτοποίησης για να πετύχουμε διαφορισμό χρόνου ονομάζεται διεμπλοκή και μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς τρόπους. Δύο από αυτούς, που ονομάζονται μπλοκ (block, πλοκάδες) και συνελικτική διεμπλοκή, φαίνονται στα Σχήματα 5.1 και 5.2, αντίστοιχα. Μετά τη λήψη, τα αποδιαμορφωμένα δεδομένα εξόδου chip επανατακτοποιούνται πάλι για να ξαναμπούν στην αρχική σειρά από την ανάστροφη διαδικασία που λέγεται απεμπλοκή. Οι αποπλέκτες για τους μπλοκ και συνελικτικούς αναδιατάκτες φαίνονται στα Σχήματα 5.1 και 5.2. Αυτή η διαδικασία προφανώς εισάγει καθυστέρηση ανάμεσα στην παραγωγή των ψηφιακών δεδομένων και στην παράδοσή τους στον λαμβάνοντα χρήστη. Όπως μπορούμε να δούμε στα σχήματα, η συνολική καθυστέρηση που παράγεται από τον συνελικτικό  αναδιατάκτη-αποπλέκτη είναι περίπου η μισή της καθυστέρησης του μπλοκ αναδιατάκτη-αποπλέκτη.

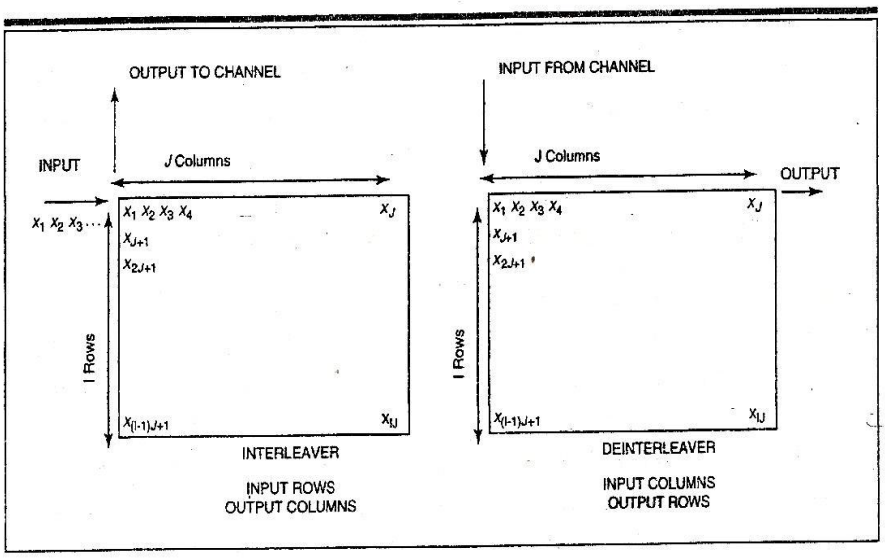



**Figure 5.1** Block interleaver–deinterleaver. Interleaved sequence: $x_1, x_{J+1}, x_{2J+1}, \ldots, x_{(I-1)J+1}, x_2, x_{J+2}$. Any two symbols within less than $J$ of each other are at least $I$ apart.

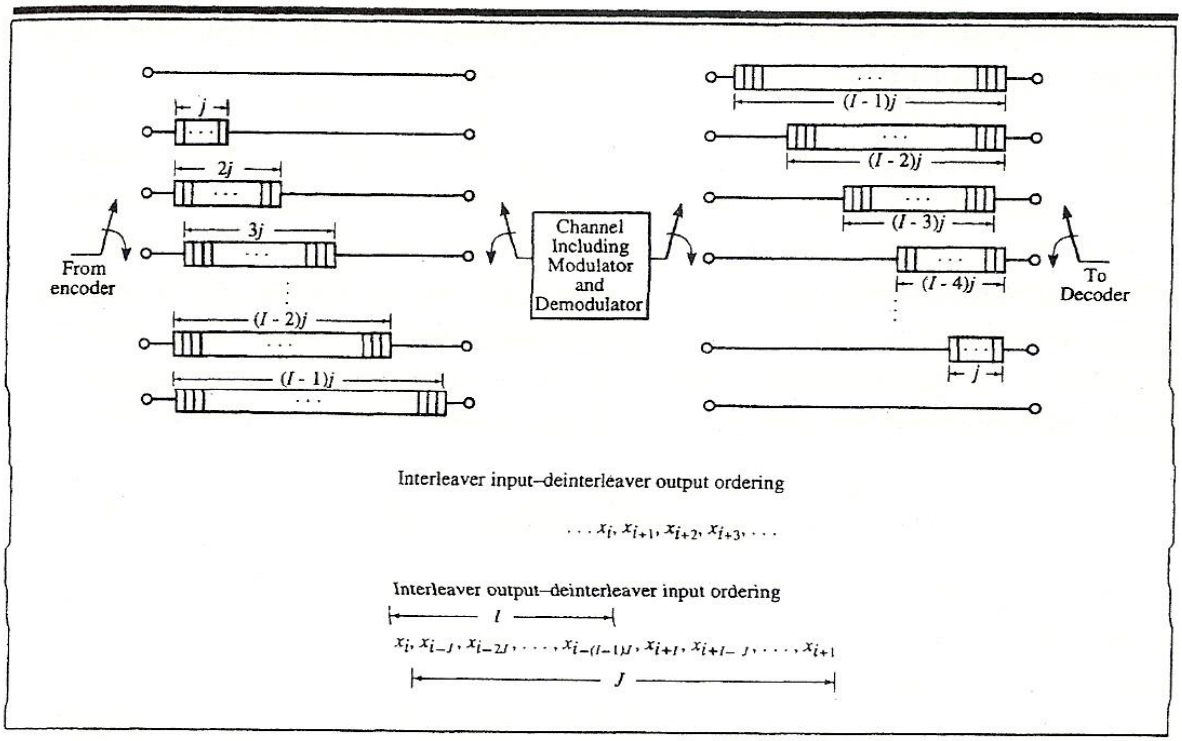



**Figure 5.2** Convolutional interleaver–deinterleaver.

Έστω ότι τα διαδοχικά chip διεμπλέκονται αρκετά μακριά το ένα από το άλλο, ώστε να έρχονται αντιμέτωπα με ανεξάρτητες επιδράσεις

απόσβεσης. Τότε η επίδραση στην επίδοση του σύμφωνου αποδιαμορφωτή μπορεί εύκολα να καθοριστεί μεταβάλλοντας τις Εξισώσεις (4.27) έως (4.30). Πιο συγκεκριμένα, το (4.28) γίνεται

$$E[Y_l(k)|x_n(k) = -1] = -\sum_{n=1}^{N} \sqrt{E_c} a_{ln} \hat{a}_{ln} \cos\left(\Phi_{ln} - \hat{\Phi}_{ln}\right), \quad (5.1a)$$

$$Var[Y_l(k)] = \sum_{n=1}^{N} a_{ln}^2 \, I_0/4, \quad (5.1b)$$

όπου $\alpha_{ln}$ και $\phi_{ln}$ είναι το πλάτος και η φάση του n chip για την l διαδρομή, και $\hat{\alpha}_{ln}$ και $\hat{\varphi}_{ln}$ είναι εκτιμήσεις εκείνων των τιμών όπως τις βρήκαμε από τον πιλότο. Προχωρώντας όπως στο (4.29) και στο (4.30), βρίσκουμε το φράγμα Chernoff για τέλειες εκτιμήσεις πλάτους και φάσης,

$$P_E(k) < \exp\left[-\sum_{l=1}^{L} \sum_{n=1}^{N} a_{ln}^2 \, E_c(k)/I_0\right] \quad (5.2)$$

$$= \prod_{l=1}^{L} \prod_{n=1}^{N} \exp\left[-a_{ln}^2 E_c(k)/I_0\right] \triangleq \prod_{l=1}^{L} \prod_{n=1}^{N} Z_{ln}$$

με παράσταση όμοια με το (4.31) για μη τέλειες εκτιμήσεις.

Η διεμπλοκή δεν έχει καμία επίδραση στα πλάτη και στις φάσεις της διαδρομής χωρίς απόσβεση ή της καθορισμένης διαδρομής, γιατί αν κανονικοποιήσουμε τα πλάτη έτσι ώστε

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{n=1}^{N} a_{ln}^2 = 1,$$

τότε η πρώτη παράσταση στο (5.2) είναι ακριβώς το κλασικό φράγμα Chernoff για την πιθανότητα σφάλματος σε προσθετικό Gaussian θόρυβο. Από την άλλη πλευρά, με Rayleigh απόσβεση, η ανεξαρτησία των N chip σε ένα δεδομένο σύμβολο που επιτυγχάνεται με διεμπλοκή μεταβάλλει το (4.39), ώστε αυτό γίνεται

$$\bar{P}_E < \left[\frac{1}{1+(\bar{E}_c/I_0)}\right]^{LN} = \exp\left[-\ln\left(1/Z\right)\right]$$

όπου

$$\ln(1/Z) = LN \ln\left[1 + (\bar{E}_c/I_0)\right] \quad (5.3)$$

Αν σχεδιάσουμε το λόγο της περίσσιας συνολικής ενέγειας-προς-την παρεμβολή, $LNE_C / I_0$ / In(1 / Z) (σε όλες τις L διαδρομές και όλα τα N chip) ως μια συνάρτηση του εκθέτη In(1 / Z), βρίσκουμε ακριβώς τις

ίδιες καμπύλες όπως στο Σχήμα 4.4, με τη διαφορά ότι τώρα η παράμετρος των καμπύλων είναι LN αντί για απλώς L. Εφόσον για ένα δεδομένο αριθμό ανεξάρτητων διαδρομών, L, η παράμετρος τώρα αυξάνει κατά τον παράγοντα N> 1, η καμπύλη θα βρίσκεται πιο κοντά στην περίπτωση χωρίς απόσβεση. Η απαιτούμενη ενέργεια-προς-παρεμβολή για μια δεδομένη επίδοση σφάλματος μειώνεται έτσι (δραματικά για L = 1 και σημαντικά ακόμη και για L = 3).

Αυτό είναι απλώς άλλο ένα παράδειγμα του γνωστού γεγονότος ότι, σε κανάλια διαφορετικού χρόνου με απόσβεση, ο διαφορισμός μπορεί να βελτιώσει σημαντικά την επίδοση. Τέτοιος διαφορισμός μπορεί να αποκτηθεί από τον χωρικό διαχωρισμό, όπως με πολλαπλές κεραίες ή με πολλαπλές διαδρομές που παρέχει η φύση, ή από τον χρονικό διαχωρισμό μέσω της διαδικασίας διεμπλοκής που μόλις περιγράφτηκε. Όμως, το τελευταίο κοστίζει από την άποψη της καθυστέρησης. Όσο πιο αργή είναι η διαδικασία απόσβεσης, τόσο μεγαλύτερο είναι το απαιτούμενο διάστημα διεμπλοκής και συνεπώς, η καθυστέρηση που απαιτείται για να επιτευχθεί ανεξαρτησία μέσω διαφορισμού χρόνου.

## 5.3 Κωδικοποίηση εμπρόσθιου ελέγχου σφάλματος- Ένας άλλος τρόπος να εκμεταλλευτούμε το πλεόνασμα

Στρεφόμαστε τώρα σε μια παγκοσμίως αποτελεσματική μέθοδο εκμετάλλευσης του πλεονάσματος, την κωδικοποίηση εμπρόσθιας διόρθωσης σφάλματος (ή ελέγχου σφάλματος) (FEC). Σε αντίθεση με τη διεμπλοκή από μόνη της, η FEC βελτιώνει την επίδοση των καναλιών καθορισμένου πλάτους και φάσης, καθώς και των καναλιών με απόσβεση. Ξεκινάμε εφαρμόζοντας την FEC σε καθορισμένα σύμφωνα αποδιαμορφωμένα σήματα με προσθετικό Γκαουσιανό θόρυβο και παρεμβολή. Έπειτα, προχωρούμε για να συνδυάσουμε την FEC και τη διεμπλοκή για τυχαία σήματα με απόσβεση διαφορετικού χρόνου και σύμφωνη αποδιαμόρφωση.

Τέλος, εξετάζουμε το πιο δύσκολο πρόβλημα των ασύμφωνα αποδιαμορφωμένων σημάτων για την καθορισμένη περίπτωση και για εκείνη με απόσβεση. Η καθυστέρηση που εισάγεται με την FEC είναι ελάχιστη σε σύγκριση με την καθυστέρηση της διεμπλοκής που περιγράφτηκε στην τελευταία ενότητα.

Θα εξετάσουμε μόνο τους συνελικτικούς κώδικες, σύμφωνα με την κοινή πρακτική. Για μια δικαιολόγηση με βάση τη σύγκριση επίδοσης με τους κώδικες μπλοκ, δείτε τον Viterbi [1971] και τους Viterbi και Omura [1979], Κεφάλαια 4 και 5.

## 5.3.1 Συνελικτική δομή κώδικα

Ένας FEC συνελικτικός κωδικοποιητής μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επιπρόσθετο επίπεδο ψηφιακού γραμμικού φιλτραρίσματος (στο δυαδικό πεδίο) που εισάγει πλεόνασμα στην αρχική ακολουθία των ψηφιακών δεδομένων. Τέτοιου είδους πλεόνασμα υπάρχει ήδη σε ένα σύστημα διάχυτου φάσματος και είναι διαθέσιμο προς εκμετάλλευση. Το Σχήμα 5.3 δείχνει έναν από τους πιο απλούς, όχι ασήμαντους συνελικτικούς κωδικοποιητές. Εφαρμόζεται από έναν ολισθητή που είναι συναφής με τη γεννήτρια του ολισθητή των ψευδοτυχαίων ακολουθιών που περιγράφτηκαν στην Ενότητα 2.2. Όμως, υπάρχουν δύο θεμελιώδεις διαφορές. Πρώτον, νέα δεδομένα εισόδου παρέχονται σε κάθε κύκλο ρολογιού του ολισθητή (σε σύγκριση με τη γεννήτρια της ακολουθίας μεγίστου μήκους, στην οποία ένα διάνυσμα αρχικών δεδομένων εισόδου πεπερασμένου μήκους παράγει μια περιοδική ακολουθία μήκους εκθετικά συναφούς με το μήκος της γεννήτριας). Δεύτερον, υπάρχουν περισσότερα σύμβολα εξόδου απ’ ότι σύμβολα εισόδου. Αυτός ο FEC κωδικοποιητής είναι μια μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που μπορεί εύκολα να περιγραφεί μέσω διαγράμματος κατάστασης.

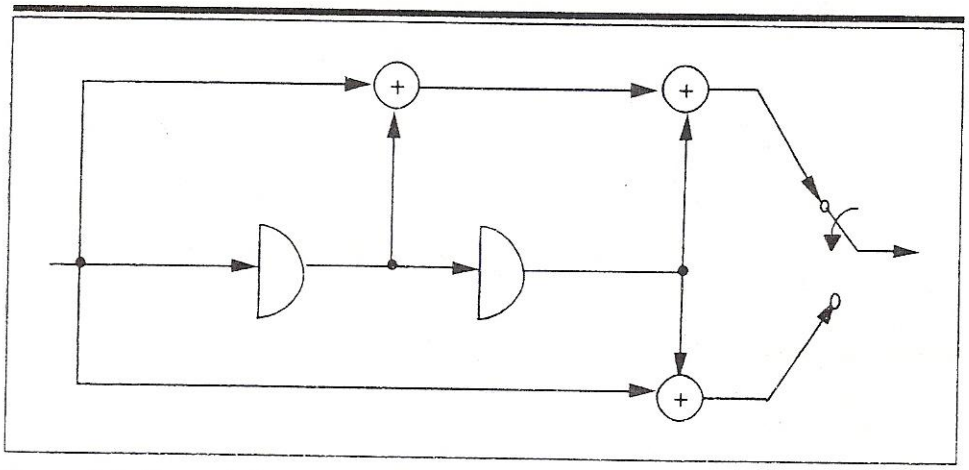


**Figure 5.3** Convolutional encoder with $K = 3$, $r = \frac{1}{2}$.

Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 5.4, όπου οι κόμβοι ή καταστάσεις αναφέρονται στα περιεχόμενα του καταχωρητή (δεδομένα εξόδου καθυστέρησης στοιχείων) ακριβώς πριν τα επόμενα bit δεδομένων εισόδου φτάσουν και ονομαστούν. Το bit 0 ή 1 των δεδομένων εισόδου φαίνεται στις διακλαδώσεις, που διαμορφώνουν μεταβάσεις ανάμεσα στους κόμβους: κάθε διακλάδωση είναι μια συνεχόμενη γραμμή για ένα δεδομένο εισόδου 0 και μια διακεκομμένη γραμμή για ένα 1. Τα δεδομένα εξόδου του κωδικοποιητή (που αποτελούνται από δύο σύμβολα ανά bit δεδομένων εισόδου για τον FEC κωδικοποιητή του Σχήματος 5.3) φαίνονται ως ετικέτες στις διακλαδώσεις μετάβασης. Έτσι, για μια αρχική κατάσταση 00, η ακολουθία εισόδου 11010 παράγει μια ακολουθία εξόδου 1101010010. Αυτό φαίνεται είτε από τον κωδικοποιητή του ολισθητή του Σχήματος 5.3 είτε από τη διαγραμματική αναπαράσταση της κατάστασής του, Σχήμα 5.4.

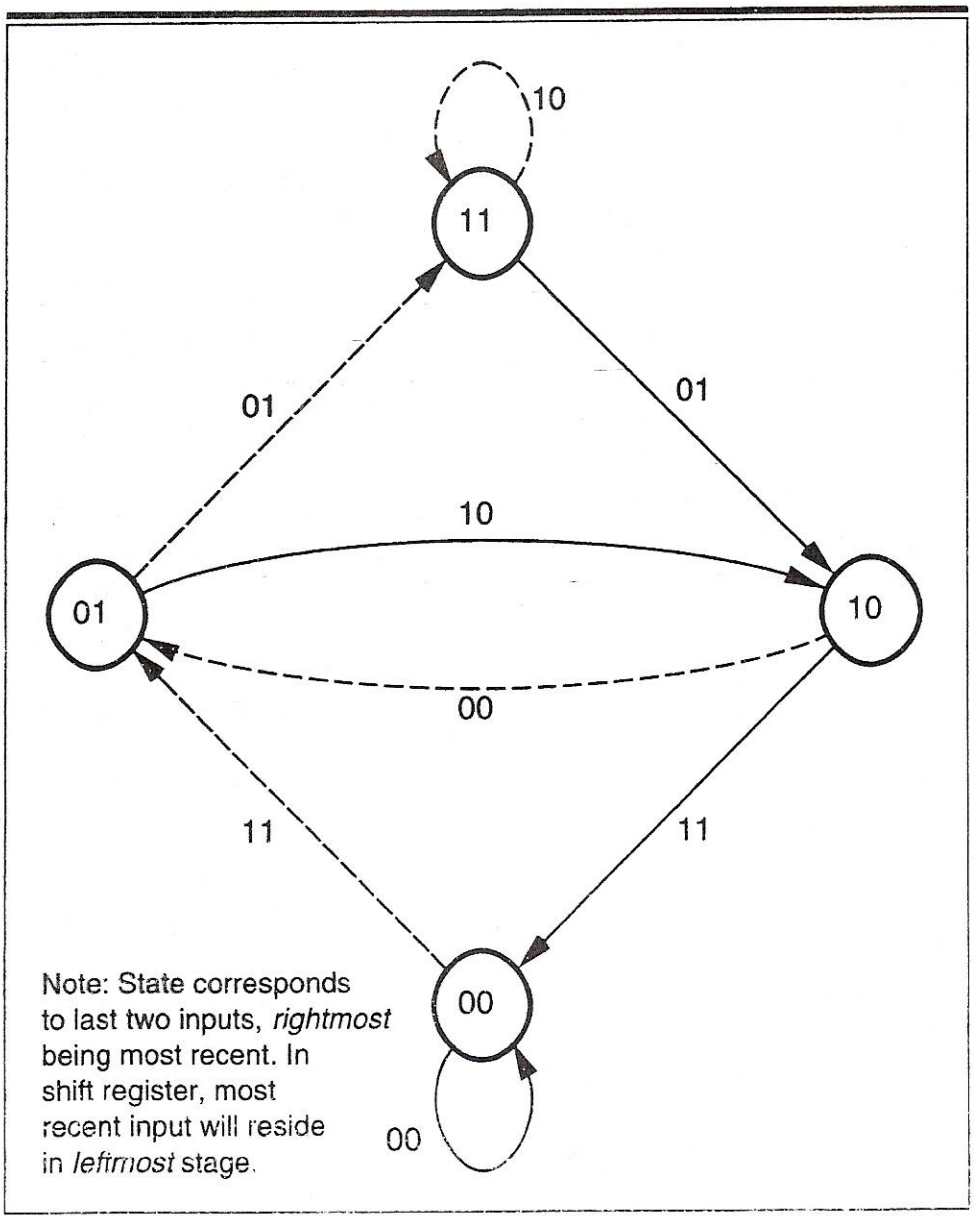



**Figure 5.4** State diagram for encoder of Figure 5.3.

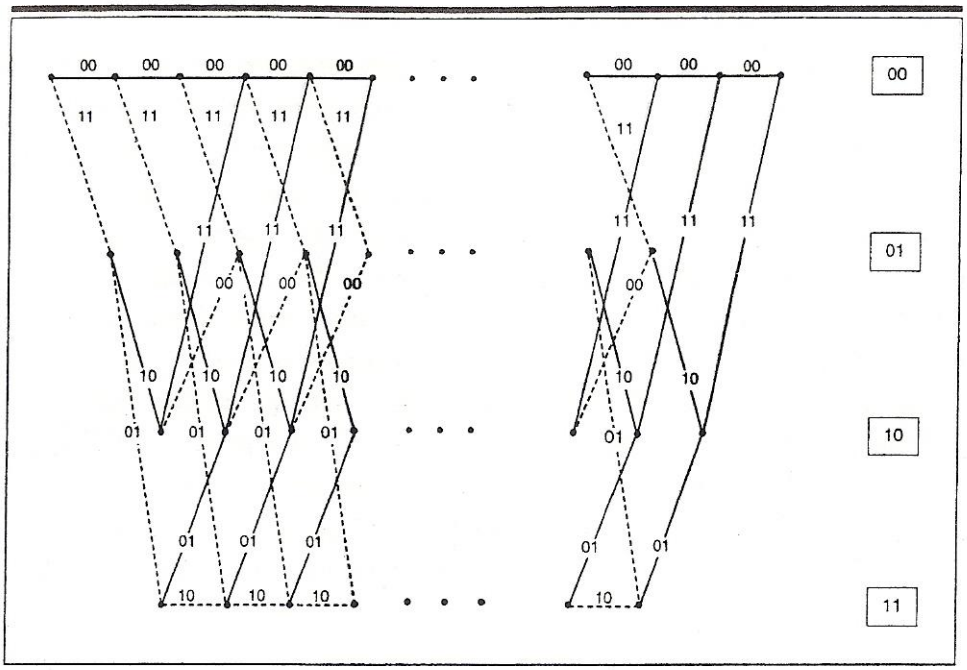



**Figure 5.5** Trellis-code representation for encoder of Figure 5.3.

Αν και δεν είναι πραγματικά απαραίτητο για την ανάλυση είτε των χαρακτηριστικών του κώδικα είτε της επίδοσης του βέλτιστου αποκωδικοποιητή, είναι χρήσιμο για την κατανόηση και των δύο να αναπαραστήσουμε τον κώδικα σε ένα διάγραμμα δικτύωσης (Σχήμα 5.5). Ένα διάγραμμα δικτύωσης είναι ένα μη πεπερασμένο αντίγραφο του διαγράμματος κατάστασης. Τους κόμβους (καταστάσεις) σε ένα επίπεδο στο διάγραμμα δικτύωσης τους φτάνουν οι κόμβοι (καταστάσεις) του προηγούμενου επιπέδου με τη μετάβαση μέσω μιας διακλάδωσης, που αντιστοιχεί σε ένα bit δεδομένων εισόδου, όπως καθορίζεται από το διάγραμμα κατάστασης. Οποιαδήποτε κωδική λέξη ενός συνελικτικού κώδικα αντιστοιχεί στα σύμβολα κατά μήκος μιας διαδρομής (που αποτελείται από διαδοχικές διακλαδώσεις) στο διάγραμμα δικτύωσης. Η επίδοση του κωδικοποιημένου συστήματος εξαρτάται από τη σχετική απόσταση Hamming ανάμεσα στις κωδικές λέξεις: ο αριθμός των συμβόλων κατά τα οποία διαφέρουν. Η ελεύθερη απόσταση ορίζεται ως η ελάχιστη απόσταση Hamming ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο διαδρομές στο ασυγχώνευτο διάστημά τους. Θα δείξουμε ότι είναι ο κυρίαρχος παράγοντας στην αξιολόγηση της

επίδοσης, με πιθανότητα σφάλματος να μειώνεται εκθετικά με την αύξηση της ελεύθερης απόστασης.

Όπως θα δείξουμε, είναι απλό να καθορίσουμε την απόσταση όλων των διαδρομών από τη διαδρομή με τα μηδενικά (εισόδου και εξόδου) σε ένα διάστημα, στο οποίο αυτές είναι ασυγχώνευτες με την τελευταία. Ευτυχώς, αυτό το σύνολο όλων των αποστάσεων των διαδρομών που σχετίζονται με εκείνη με τα μηδενικά είναι επίσης το σύνολο όλων των αποστάσεων από οποιαδήποτε μοναδική διαδρομή προς όλες τις άλλες διαδρομές στα ασυγχώνευτα διαστήματά τους. Αυτή η ιδιότητα συμμετρίας προκύπτει από το γεγονός ότι ένας γραμμικός (modulo-2)κωδικοποιητής χαρτογραφεί το σύνολο όλων των πιθανών ακολουθιών δυαδικών δεδομένων εισόδου σε ένα κλειστό σύνολο κωδικών λέξεων με την προσθήκη του modulo-2. Δηλαδή αν ο κωδικοποιητής χαρτογραφεί την ακολουθία bit δεδομένων εισόδου $u_i$ στην ακολουθία $x_i$ και την $u_j$ στην $x_j$, τότε η ακολουθία $x_i \oplus x_j$, που αποτελείται από τα ζεύγη αθροισμάτων του modulo-2 όλων των αντίστοιχων συνιστωσών, είναι επίσης μια έγκυρη κωδική λέξη, που παράγεται από μια ακολουθία δεδομένων εισόδου bit $u_i \oplus u_j$. (Προσέξτε ότι τα αθροίσματα οποιωνδήποτε δύο ακολουθιών εισόδου είναι και τα ίδια έγκυρες ακολουθίες εισόδου, εφόσον οποιαδήποτε δυαδική ακολουθία μπορεί να είναι μια ακολουθία εισόδου.) Είναι εξίσου φανερό ότι η απόσταση ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο ακολουθίες κωδικών λέξεων $x_i$ και $x_j$ είναι απλώς το βάρος (εννοούμε τον αριθμό των 1) του αθροίσματος των modulo -2, $w(x_i \oplus x_j)$ .

Τώρα ας εξετάσουμε το σύνολο όλων των αποστάσεων από την ακολουθία με τα μηδενικά. Αυτό είναι προφανώς

$$\{w(0 \oplus x_i)\ \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ i\} = \{w(x_i)\ \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ i\} \qquad (5.4)$$

εφόσον οποιαδήποτε ακολουθία προστεθεί σε εκείνη με τα μηδενικά παραμένει απαράλλακτη. Ομοίως, το σύνολο όλων των αποστάσεων από οποιαδήποτε άλλη ακολουθία συγκεκριμένων δεδομένων εξόδου $x_m$ είναι

$$\{w(x_m \oplus x_j) \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ j\} = \{w(x_i)\ \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ i\} \qquad (5.5)$$

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το άθροισμα του modulo-2 οποιωνδήποτε δύο κωδικών λέξεων είναι μια άλλη κωδική λέξη (κλειστό σύνολο), και ότι $x_m \oplus x_j$ # $x_m \oplus x_k$ εκτός κι αν $x_j = x_k$, κι επομένως, η πληθυκότητα του συνόλου είναι ίδια με την πληθυκότητα του αρχικού συνόλου κωδικών λέξεων. Έτσι, συμπεραίνουμε από τα (5.4) και (5.5) ότι το σύνολο των αποστάσεων από 0 είναι ίδιο με το σύνολο των αποστάσεων από οποιαδήποτε άλλη κωδική λέξη.

Τώρα από το Σχήμα 5.5 εύκολα αποδεικνύουμε με την παρακολούθηση διαδρομών κατά μήκος της δικτύωσης ότι, από τις διαδρομές που αποκλίνουν από εκείνη με τα μηδενικά (διαδρομή κορυφής) στον πρώτο (ή οποιονδήποτε) κόμβο, ακριβώς μία, εκείνη που παράγεται από τα δεδομένα εισόδου 100, επανασυγχωνεύεται σε εκείνη με τα μηδενικά μετά από 3 διακλαδώσεις, με μια συσσωρευμένη Hamming απόσταση 5. Δύο επανασυγχωνεύονται με συσσωρευμένη απόσταση 6, μία μετά από 4 διακλαδώσεις (εκείνη που παρήγαγαν τα δεδομένα εισόδου 1100) και μία μετά από 5 διακλαδώσεις (εκείνη που παρήγαγαν τα δεδομένα εισόδου 10100) κτλ. Το ίδιο συμπέρασμα εξάγεται με την παρακολούθηση των διαδρομών κατά μήκος του διαγράμματος κατάστασης του Σχήματος 5.4. Στην πραγματικότητα, το διάγραμμα κατάστασης είναι ακόμη πιο βολικό για τον καθορισμό του συνόλου όλων των αποστάσεων, καθώς κι άλλων χρήσιμων πληροφοριών. Το Σχήμα 5.6 δείχνει το επισημασμένο διάγραμμα κατάστασης με διάφορα μονώνυμα στα γράμματα δ, β και λ. Στο σχήμα, ο κόμβος 00 διαχωρίζεται στα δύο και φαίνεται ως αρχικός και ως τελικός κόμβος. Αυτό δείχνει ότι εξετάζουμε όλες τις διαδρομές που αποκλίνουν από εκείνη με τα μηδενικά και επανασυγχωνεύονται σε αυτήν μετά από έναν αριθμό μεταβάσεων.

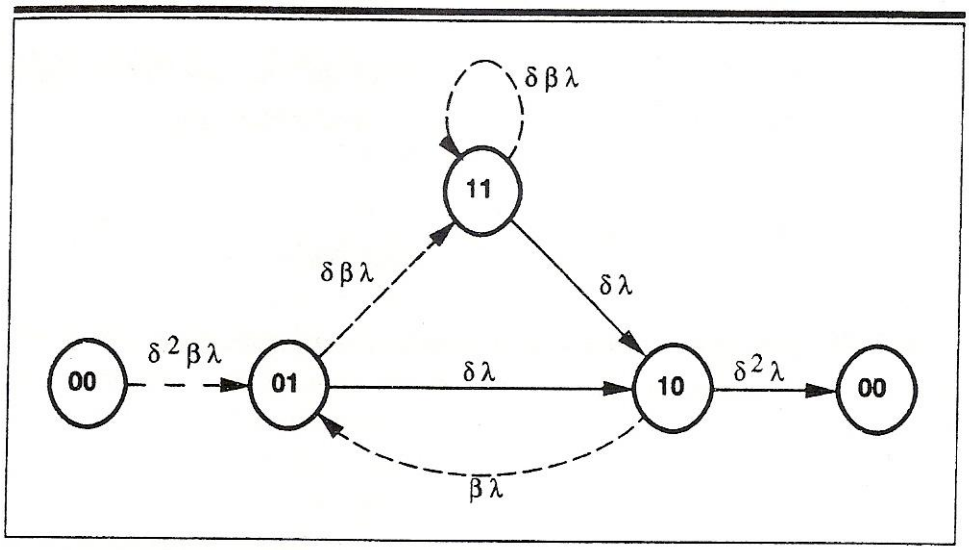



**Figure 5.6** State diagram labeled with distance, length, and number of input ones.

Τα μονώνυμα που βρίσκονται στις ετικέτες των διακλαδώσεων δείχνουν το βάρος της διακλάδωσης (τον αριθμό των συμβόλων εξόδου που είναι ένα) ως εκθέτη του δ, το βάρος του bit εισόδου (1 για το «1» και 0 για το «0»)ως εκθέτη του β, και τη διάρκεια σε bit εισόδου της διακλάδωσης ως εκθέτη του λ (ενότητα σε όλες τις περιπτώσεις). Πολλαπλασιάζοντας τα μονώνυμα των διακλαδώσεων σε οποιαδήποτε διανυμένη διαδρομή από τον αρχικό στον τελικό κόμβο παράγεται ένα μονώνυμο με εκθέτες δ, β και λ. Αυτοί είναι, αντίστοιχα, η συνολική απόσταση της ακολουθίας της κωδικής λέξης από εκείνη με τα μηδενικά σε ασυγχώνευτο διάστημα, ο αριθμός των δεδομένων εισόδου κατά τον οποίο διαφέρει από εκείνη με τα μηδενικά δεδομένα εισόδου και το μήκος του ασυγχώνευτου διαστήματος. Έτσι, για παράδειγμα, τα γινόμενα των μονωνύμων για τις τρεις διαδρομές που παρακολουθήσαμε παραπάνω είναι

$$\delta^5\beta\lambda^3, \delta^6\beta^2\lambda^4, \ \textit{και}\ \delta^6\beta^2\lambda^5$$

Μπορούμε να βρούμε μια γεννήτρια συνάρτηση για όλες τις διαδρομές που αποκλίνουν από την κατάσταση 0 σε οποιονδήποτε κόμβο και επανασυγχωνεύονται σε κάποια μελλοντική στιγμή (ή με συμμετρία, επανασυγχωνεύονται με το 0 σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο κόμβο και αποκλίνουν οποιαδήποτε στιγμή

προηγουμένως-επιτρέποντας στη διαδικασία να ξεκινήσει σε αρνητικά μη πεπερασμένο χρόνο). Αυτή είναι η συνάρτηση μεταφοράς του γραφήματος ροής του Σχήματος 5.6, που εύκολα υπολογίζεται ότι είναι

$$T(\delta,\beta,\lambda) = \frac{\delta^5\beta\lambda^3}{1-\delta\beta\lambda(1+\lambda)} \qquad (5.6)$$

Σε περίπτωση που μας ενδιαφέρουν μόνο οι αποστάσεις των κωδικών λέξεων  και ο αριθμός των 1 εισόδου, μπορούμε να αγνοήσουμε το μήκος της διαδρομής ορίζοντας λ = 1 και να βρούμε

$$T(\delta,\beta) = T(\delta,\beta,\lambda)|_{\lambda=1} = \frac{\delta^5\beta}{1-2\delta\beta} \qquad (5.7)$$

Σε περίπτωση που μας ενδιαφέρουν μόνο οι αποστάσεις των κωδικών λέξεων, μπορούμε επίσης να ορίσουμε I = 1 για να βρούμε

$$T(\delta,\beta) = T(\delta,\beta,\lambda)|_{\lambda=1} = \frac{\delta^5}{1-2\delta} \qquad (5.8)$$

Διευρύνοντας αυτή την τελευταία γεννήτρια συνάρτηση (με διαίρεση πολυωνύμων), βρίσκουμε

$$T(\delta) = \delta^5 + 2\delta^6 + 4\delta^7 + \ldots\ldots + 2^k\delta^{5+k} + \ldots. \qquad (5.9)$$

Αυτό σημαίνει ότι μια διαδρομή επανασυγχωνεύεται έχοντας συσσωρεύσει απόσταση 5 (που διαφέρει από εκείνη με τα μηδενικά σε 5 σύμβολα), δύο διαδρομές με απόσταση 6 και γενικά $2^k$ διαδρομές με αποστάσεις 5 + k. Ομοίως, διαιρώντας τα πολυώνυμα στο (5.7), βρίσκουμε

$$T(\delta,\beta) = \delta^5\beta + 2\delta^6\beta^2 + 4\delta^7\beta^3 + \ldots\ldots + 2^k\delta^{5+k}\beta^{1+k} + \ldots. \qquad (5.10)$$

Αυτό σημαίνει ότι γενικά $2^k$ διαδρομές επανασυγχωνεύονται με συσσωρευμένη απόσταση 5 + k, που αντιστοιχεί σε μια ακολουθία εισόδου που περιέχει 1 + k «ένα». Αυτή η τελευταία γεννήτρια συνάρτηση θα αποδειχτεί χρήσιμη στον καθορισμό των πιθανοτήτων σφαλμάτων bit. Επίσης, προκύπτει ότι ο εκθέτης του δ στον πρώτο όρο της επέκτασης είναι η ελεύθερη απόσταση του κώδικα, 5 σε αυτή την περίπτωση.

## 5.3.2 Αποκωδικοποιητής μεγίστης πιθανοφάνειας- Αλγόριθμοι Viterbi

Έχουμε καθορίσει τη δομή των κωδικών λέξεων των συνελικτικών κωδίκων μέσω του διαγράμματος κατάστασης και του διαγράμματος δικτύωσης. Τώρα θα δείξουμε πόσο εύκολα οι ίδιες ιδέες μπορούν να οδηγήσουν στο βέλτιστο αποκωδικοποιητή για ένα συνελικτικό κώδικα σε ένα κανάλι χωρίς μνήμη- ένα κανάλι όπου η τυχαία επίδραση του καναλιού στα κώδικα σύμβολα είναι ανεξάρτητη από σύμβολο σε σύμβολο, και πιθανόν επιτυγχάνεται μέσω διεμπλοκής. Έστω ότι η ακολουθία εισόδου του συμβόλου προς το κανάλι συμβολίζεται με το x και η αντίστοιχη ακολουθία εξόδου του καναλιού με το y.Τότε εφόσον το κανάλι δεν έχει μνήμη, η υπό συνθήκη (ή δεσμευμένη) πιθανότητα ή συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από

$$p(y|x) = \prod_{all\ k} p(y_k|x_k) \qquad (5.11)$$

Ο δείκτης k κυμαίνεται σε όλα τα διαδοχικά σύμβολα που μελετάμε και καθεμία από τις περιπτώσεις θα εξεταστεί αργότερα. Όμως, εφόσον ο χρόνος έχει πάντα φράγματα, το εύρος του δείκτη μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πεπερασμένο σύνολο ακεραίων. Αν αναζητήσουμε την πιο πιθανή διαδρομή κι έτσι, προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα σφάλματος της ακολουθίας σε όλες τις δυνατές ακολουθίες (ή διαδρομές μέσω της δικτύωσης) όταν όλες είναι ίσα πιθανές εκ των προτέρων , τότε πρέπει να μεγιστοποιήσουμε το (5.11) σε όλες τις ακολουθίες εισόδου x. Τότε το μέγιστο που αντιστοιχεί στην πιο πιθανή ακολουθία κώδικα εισόδου του καναλιού, και η αντίστοιχη ακολουθία εισόδου του κωδικοποιητή είναι η πιο πιθανή ακολουθία πληροφορίας. Ισοδύναμα, μπορούμε να αναζητήσουμε το μέγιστο του λογαρίθμου του (5.11), που είναι μια προσθετική συνάρτηση του κριτηρίου log πιθανοφάνειας των συμβόλων

$$\Lambda(x, y) = \ln p(y|x) = \sum_{all\ k} ln\ \ p(y_k|x_k) \qquad (5.12)$$

Για λόγους που θα γίνουν φανεροί σύντομα, είναι πιο βολικό να οργανώσουμε το (5.12) ως το άθροισμα μερικών αθροισμάτων στις διακλαδώσεις. Ορίζουμε τη μετρική της j διακλάδωσης ως

$$\mu_j \triangleq \mu(x_j, y_j) \triangleq \ln p(y_j \,|x_j) \tag{5.13}$$

όπου τα διανύσματα είναι n διαστάσεων με n τον αριθμό των συμβόλων ανά διακλάδωση. Έτσι,

$$\mu_j = \ln p(y_j \,|x_j) = \sum_{k=1}^{n} \ln p(y_{jk} \,|x_{jk}) \tag{5.14}$$

(Στο παρόν παράδειγμα, Σχήματα 5.3 έως 5.6, ν = 2, αλλά θα γενικεύσουμε σύντομα τις αυθαίρετες ακέραιες τιμές.) Έπειτα, για τη διαδρομή ακολουθίας εισόδου του καναλιού x και την αντίστοιχη εξόδου y, το log κριτήριο πιθανοφάνειας (5.12) μπορεί να γραφεί

$$\Lambda(x, y) = \sum_{j=all\ branches} \mu(x_j\,, y_j) \tag{5.15}$$

Ο αποκωδικοποιητής μεγίστης πιθανοφάνειας τότε αναζητά τη διαδρομή, για την οποία το άθροισμα των μετρικών κλάδου, όπως ορίζεται από τα (5.13) και (5.14), μεγιστοποιείται. Τα Σχήματα 5.7.a και b δείχνουν δύο παραδείγματα καναλιών και τον αντίστοιχο αποκωδικοποιητή των Σχημάτων 5.3 που μελετάμε.

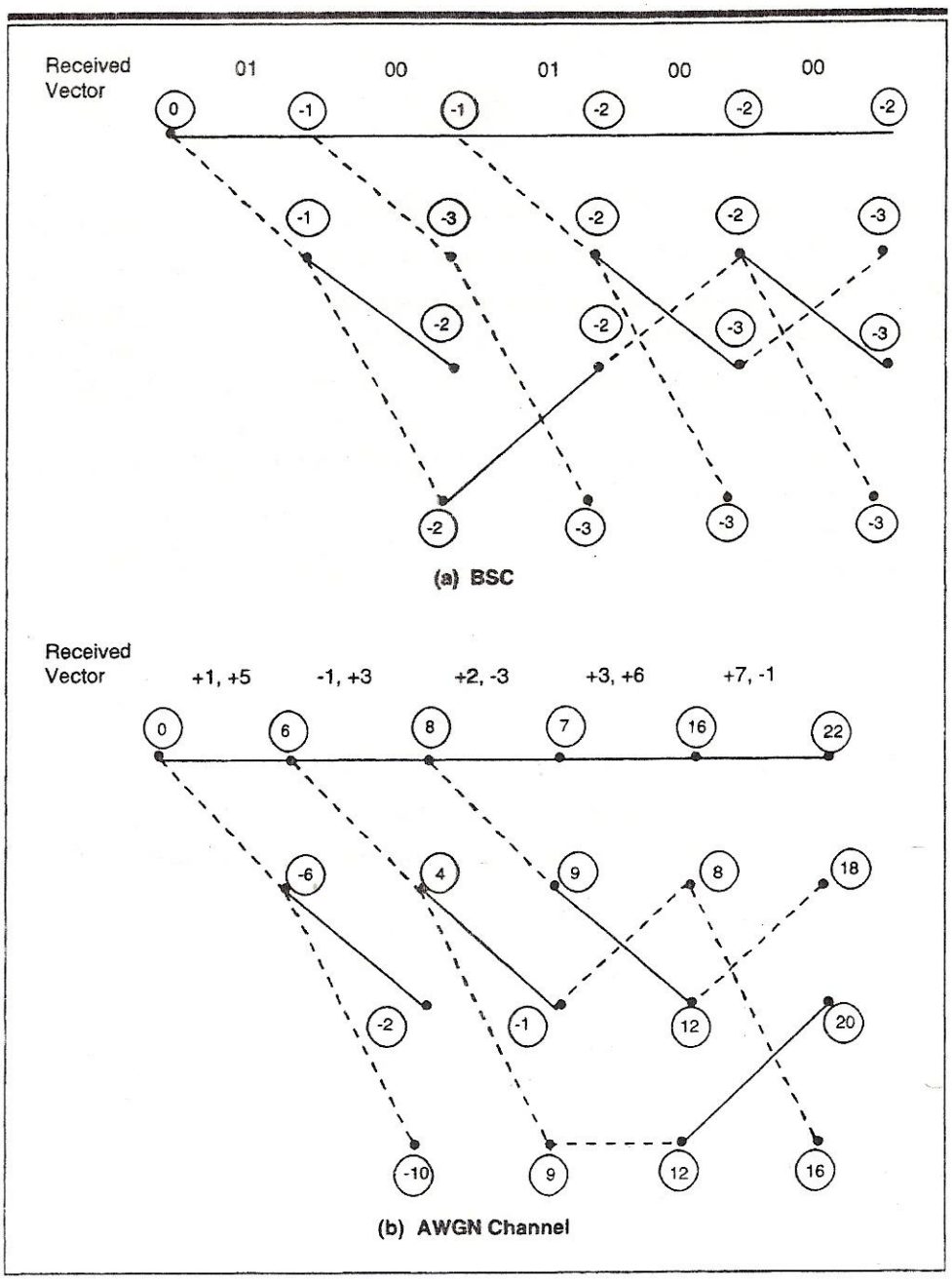



**Figure 5.7** Examples of decoding for encoder of Figure 5.3 (decoder state metrics are encirled). (a) BSC. (b) AWGN channel.

Σε κάθε περίπτωση, η ακολουθία εξόδου y φαίνεται στην κορυφή του σχήματος. Στο (a) το κανάλι είναι ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC), όπου το y είναι μια δυαδική ακολουθία που διαφέρει από την ακολουθία του κώδικα εισόδου του καναλιού x κατά τις θέσεις του συμβόλου, όπου λαμβάνουν χώρα σφάλματα. Σε αυτή την περίπτωση, λαμβάνοντας την πιθανότητα σφάλματος συμβόλου ως $p > \frac{1}{2}$, η μετρική κλάδου

$$\mu_j = \mu(x_j, y_j)$$

$$= \ln\,[p^{d_j}(1-p)^{n-d} = d_j\; ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + n\ln\,(1-p),$$

(5.16)

όπου $d_j = d(x_j,y_j)$ είναι η απόσταση Hamming ανάμεσα στο $x_j$ και στο $y_j$ στην j διακλάδωση. Αλλά ο στόχος είναι να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα των μετρικών κλάδου σε ολόκληρη τη διαδρομή. Έτσι, μπορούμε να προσθέσουμε μια αυθαίρετη σταθερά σε κάθε διακλάδωση και να κλιμακώσουμε το αποτέλεσμα με έναν αυθαίρετο θετικό αριθμό, χωρίς να αλλάξουμε τις σχετικές ταξινομήσεις. Προσέχοντας ότι ln[p / (1-p)] < 0 για p < $\frac{1}{2}$, μπορουμε να αντικαταστήσουμε την μετρική με την κλιμακούμενη μετρική

$$\hat{\mu}_j = -d_j = -d(x_j, y_j) \qquad \text{(BSC)} \qquad (5.17)$$

χωρίς να αλλάξουμε τις σχετικές ταξινομήσεις όλων των διαδρομών. Στο παράδειγμα του Σχήματος 5.7a, κάθε διακλάδωση έχει τη μετρική 0, -1 ή -2, ανάλογα αν τα κώδικα της σύμβολα διαφέρουν από τα λαμβανόμενα κώδικα σύμβολα σε 0, 1 ή 2 θέσεις. Για το παράδειγμα του Σχήματος 5.7b, η ακολουθία εξόδου συμβόλου y είναι τα δεδομένα εξόδου ενός καναλιού με λευκό προσθετικό Gaussian θόρυβο (AWGN), για τα οποία η κανονικοποιημένη εκπεμπόμενη ακολουθία x είναι +1 ή -1, ανάλογα αν το κωδικό σύμβολο ήταν 0 ή 1, αντίστοιχα. Επομένως, εφόσον $x_{jk}^2$ = 1,

$$\mu_j = \ln p\left(x_j \mid y_j\right) = ln\{exp[-\textstyle\sum_{k=1}^{n}(y_{jk} - \sqrt{E_s}x_{jk})^2/I_0]/(\pi I_0)^{n/2}\}$$

$$= \frac{1}{I_0}(-\textstyle\sum_{k=1}^{n} y_{jk}^2 - nE_s + 2\sqrt{E_s}\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_{jk}\, y_{jk}) \quad (5.18)$$

όπου $E_S$ είναι η ενέργεια ανά κωδικό σύμβολο. Το πρώτο άθροισμα είναι προφανώς το ίδιο για την j διακλάδωση σε όλες τις διαδρομές. Έπειτα, αφαιρώντας πάλι κοινούς όρους και κλιμακώνοντας το αποτέλεσμα με το $I_0$, η μετρική κλάδου μπορεί να αντικατασταθεί από

$$\hat{\mu}_j = \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_{jk}\, y_{jk} \qquad \text{(AWGN)} \qquad (5.19)$$

Κάθε διακλάδωση για το παράδειγμα του Σχήματος 5.7b είναι τότε το εσωτερικό γινόμενο των κωδικών συμβόλων (που θεωρούνται ως +1 ή -1) με τα λαμβανόμενα δεδομένα εξόδου του καναλιού (που φαίνονται στην κορυφή του σχήματος). Αυτά τα παραδείγματα προφανώς γενικεύονται σε οποιοδήποτε κανάλι χωρίς μνήμη, όπως ορίζεται από τα (5.11) έως (5.15).

Έτσι, η εύρεση της διαδρομής μεγίστης πιθανοφάνειας συνίσταται στην εύρεση της διαδρομής για την οποία το άθροισμα των μετρικών κλάδου (ή των μεταβολών τους) είναι το μεγαλύτερο από όλες τις διαδρομές. Για L διαδοχικά bit εισόδου, υπάρχουν L κόμβοι με δύο διακλαδώσεις να απορρέουν από τον καθένα, οπότε με μια τόσο ισχυρής δύναμης τεχνική θα χρειαζόταν να εξετάσουμε $2^L$ διαδρομές- μια απελπιστική εργασία ακόμη και για bit ακολουθίες εισόδου μετρίου μήκους. Τώρα θα δείξουμε μέσω των προηγούμενων παραδειγμάτων μια απλή, αλλά και βέλτιστη, μέθοδο με την οποία η προσπάθεια υπολογισμού μπορεί να αναπτυχθεί μόνο γραμμικά με το L. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι για οποιεσδήποτε δύο διαδρομές που επανασυγχωνεύονται σε ένα δεδομένο κόμβο, μπορούμε να αποκλείσουμε εκείνη με το μικρότερο μετρικό άθροισμα: από εκεί και πέρα θα παραμείνει για πάντα μικρότερο από εκείνο της άλλης διαδρομής με την οποία συγχωνεύεται. Αυτό μας οδηγεί να ορίσουμε τη μετρική κατάστασης σε οποιοδήποτε κόμβο i σε χρόνο k, $M_i(k)$ ως το άθροισμα των μετρικών κλάδου μέχρι εκείνη την κατάσταση (κόμβο) που είναι η μεγαλύτερη ανάμεσα στα μετρικά αθροίσματα των διακλαδώσεων όλων των διαδρομών σε αυτό τον κόμβο. Έτσι, έχουμε την αναδρομική σχέση

$$M_i(k+1) = Max[M_{i'}(k) + m_{i'i}, M_{i''}(k) + m_{i''i}] \qquad (5.20)$$

Τα i’ και i’’ είναι οι κόμβοι που έχουν επιτρεπτές μεταβάσεις προς τον κόμβο i σε μια διακλάδωση (χρόνος bit), και τα $mi_{'i}$ και $mi_{''i}$ είναι οι μετρικές κλάδου μ στις διακλαδώσεις μετάβασης που μελετάμε.

Η λειτουργία του (5.20) φαίνεται στα παραδείγματα των Σχημάτων 5.7a και 5.7b, με το $M_i(k)$ να φαίνεται ως κυκλωμένες τιμές σε κάθε

κόμβο και κάθε επίπεδο της δικτύωσης. Αυτή είναι η θεμελιώδης λειτουργία που μειώνει την αναζήτηση για τη διαδρομή μεγίστης πιθανοφάνειας από $2^L$ υπολογισμούς για μια διαδρομή L διακλάδωσης σε μόνο 4L, σε αυτή την περίπτωση. Σε κάθε κατάσταση και σε κάθε επίπεδο στη δικτύωση περιλαμβάνει μια λειτουργία προσθήκης-σύγκρισης-επιλογής (ACS), όπου

Η «προσθήκη» αναφέρεται στην προσθήκη κάθε μετρικής κατάστασης στο προηγούμενο επίπεδο με τις δύο μετρικές κλάδου των διακλαδώσεων για τις επιτρεπτές μεταβάσεις.

Η «σύγκριση» ανάφερεται στη σύγκριση του ζεύγους τέτοιων μετρικών αθροισμάτων για διαδρομές που εισέρχονται σε μια κατάσταση (κόμβο) σε δεδομένο επίπεδο.

Η «επιλογή» αναφέρεται στην επιλογή του μεγαλύτερου εκ των δύο και στην απόρριψη του άλλου. Έτσι, μόνο η νικήτρια διακλάδωση διατηρείται σε κάθε κόμβο, μαζί με τη μετρική κατάστασης του κόμβου. Αν οι δύο ποσότητες που συγκρίνονται είναι ίσες, οποιαδήποτε από τις δύο διακλαδώσεις μπορεί να επιλεγεί, γιατί η πιθανότητα εσφαλμένης επιλογής θα είναι ίδια σε κάθε περίπτωση.

Η Εξίσωση (5.20), απλή όπως είναι, είναι γνωστή ως αλγόριθμος Viterbi [1967a]. Για να εφαρμόσουμε τον αποκωδικοποιητή που αντιστοιχεί σε αυτό τον αλγόριθμο απαιτείται επίσης αποθήκευση δύο συνόλων δεδομένων. Το πρώτο είναι, φυσικά, η διαδρομή κατάστασης $M_i(k)$ που ενημερώνεται για κάθε διαδοχικό επίπεδο k, αλλά απαιτούνται μόνο 4 καταχωρητές για το τρέχων παράδειγμα που επιδιώκεται εδώ. Αυτό ονομάζεται μετρική μνήμη. Είναι περιττό να πούμε ότι αν αυτή η μετρική είναι πραγματικός αριθμός, όπως στην AWGN περίπτωση, πρέπει να κβαντοποιηθεί με λογική ακρίβεια. Θα βρούμε, όμως, ότι σε σχεδόν όλες τις πρακτικές περιπτώσεις τα παρατηρήσιμα κβαντοποιούνται πριν τη παραγωγή της μετρικής, καθιστώντας τόσο τα παρατηρήσιμα όσο και τις μετρικές διακριτές μεταβλητές.

Το δεύτερο σύνολο δεδομένων που θα αποθηκευτεί είναι οι επιλογές σε κάθε κόμβο ή κατάσταση. Ονομάζεται μνήμη

διαδρομής, που πάλι απαιτεί 4 καταχωρητές αυθαίρετου μήκους, αποθηκεύει τις επιλογές σε κάθε επίπεδο μέχρι να πάρουμε την τελική απόφαση. Ο τρόπος απόκτησης αυτής της τελικής απόφασης σε όλα τα bit είναι σχεδόν εμφανής αν αναγκάσουμε τον κωδικοποιητή να επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση με τα μηδενικά. Αυτό γίνεται απλώς εισάγοντας δύο μηδενικά (στο παράδειγμά μας) στο τέλος της ροής bit αυθαίρετης διάρκειας, B. Αυτή η διαδικασία, που ονομάζεται «tailing off» (μείωση), μετατρέπει αποτελεσματικά τον συνελικτικό κώδικα σε μπλοκ κώδικα μήκους B bit με B + 2 διακλαδώσεις και 2(B + 2) σύμβολα. Η τελική απόφαση λαμβάνεται τότε με μια διαδικασία που ονομάζεται «chaining back» (αλυσίδα εκτέλεσης προς τα πίσω»): ξεκινώντας με τον τελευταίο κόμβο, παρακολουθούμε τη διαδρομή της απόφασης προς τα πίσω από την τελευταία απόφαση προς την πρώτη.

Όμως, δεν είναι απαραίτητο να μειώσουμε το συνελικτικό κώδικα σε ένα μπλοκ κώδικα (εισάγωντας ανόητα μηδενικά) για να λάβουμε μια απόφαση. Με πολύ μικρή υποβάθμιση της επίδοσης λόγω υποβελτιστότητας, μετά από κάθε σύνολο επιλογών κόμβου, μπορούμε να πάμε προς τα πίσω από την κατάσταση με την υψηλότερη μετρική (ανάμεσα στις 4 στο επίπεδο κόμβου) για ένα επαρκές μήκος (ας πούμε 10 διακλαδώσεις). Παίρνουμε την τελική απόφαση σε αυτό το bit που αντιστοιχεί στην πιο πιθανή από τις δύο διακλαδώσεις (bit ) που απορρέουν από τον κόμβο, στον οποίο έχουμε κάνει εκτέλεση προς τα πίσω. Έπειτα, στέλνουμε το bit, στο οποίο έχουμε φτάσει και το διαγράφουμε από τη μνήμη διαδρομής. Αυτή η διαδικασία, που λέγεται περικοπή μνήμης, οδηγεί σχεδόν στην ίδια επίδοση με το μειωμένο κώδικα, αν η αλυσίδα εκτέλεσης προς τα πίσω είναι αρκετά επιμήκης. Αυτό συμβαίνει διότι είναι πολύ μικρή η πιθανότητα μια εσφαλμένη διαδρομή, ασυγχώνευτη με τη σωστή διαδρομή για μεγάλο χρονικό διάστημα, να διατηρεί μια μετρική υψηλότερη από εκείνη της σωστής διαδρομής. Στην πραγματικότητα, αυτή η πιθανότητα μειώνεται εκθετικά με το μήκος της διαδρομής, όπως θα ανακαλύψουμε στην Ενότητα 5.4.

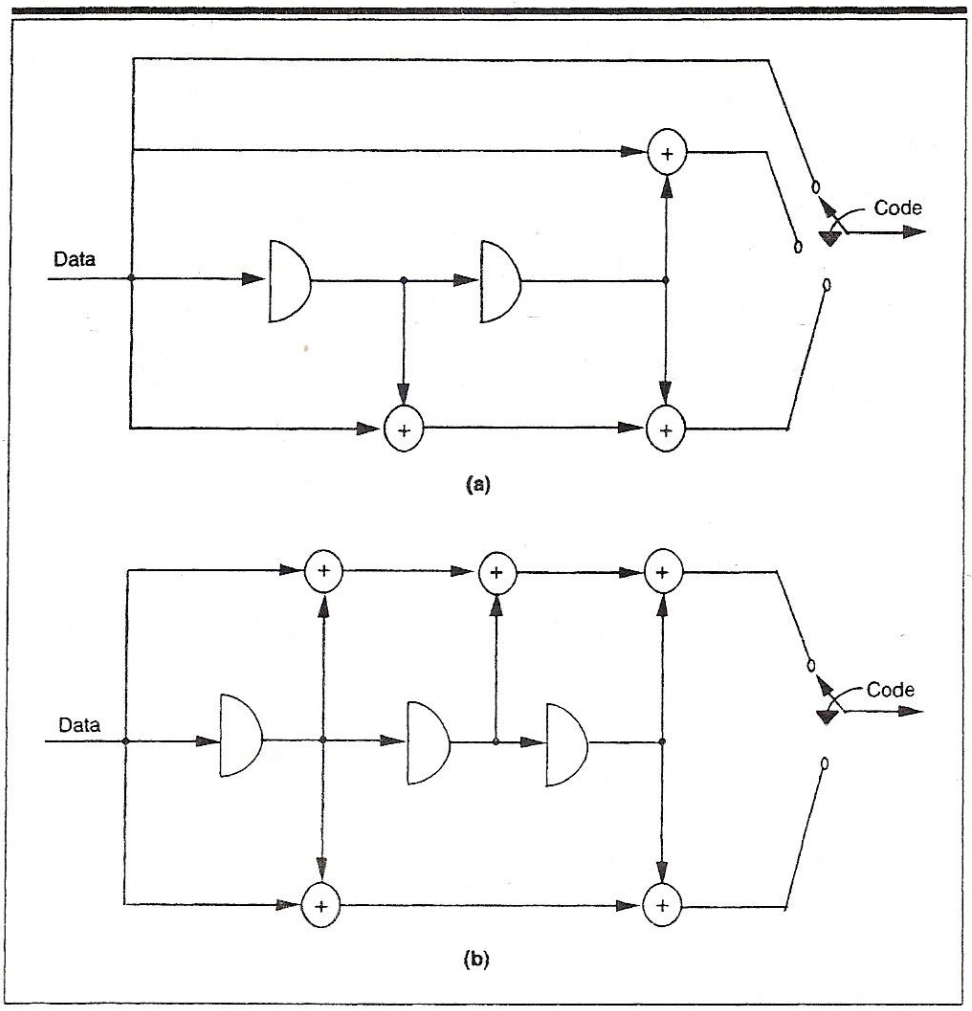



**Figure 5.8** (a) Convolutional code for $K = 3$, $r = \frac{1}{2}$. (b) Convolutional code for $K = 4$, $r = \frac{1}{2}$.

## 5.3.3 Γενίκευση του προηγούμενου παραδείγματος

Δύο γενικεύσεις του παραδείγματος του συνελικτικού κώδικα που εξετάσαμε μέχρι στιγμής θα πρέπει να είναι εμφανείς: το μήκος του ολισθητή του κωδικοποιητή και ο αριθμός των χτυπημάτων εξόδου. Ο αριθμός των σταδίων στον κωδικοποιητή, που είναι ίσος με ένα παραπάνω από τον αριθμό των στοιχείων καθυστέρησης, ονομάζεται μήκος περιορισμού, K. Έτσι, το τρέχον παράδειγμα του Σχήματος 5.3 έχει K = 3, ενώ τα παραδείγματα των σχημάτων 5.8a και b έχουν K = 3 και K = 4, αντίστοιχα. Ακόμη, το τρέχον παράδειγμα έχει δύο χτυπήματα εξόδου, ενώ εκείνο του Σχήματος 5.8 a έχει τρία.

Ο αριθμός των χτυπημάτων καθορίζει το ρυθμό του συνελικτικού κώδικα, που ορίζεται ως ο αριθμός των bit εισόδου ανά σύμβολο εξόδου. Έτσι, ο ρυθμός κώδικα στο τρέχον παράδειγμα είναι r = $\frac{1}{2}$, ενώ εκείνος του παραδείγματος του Σχήματος 5.8a είναι r = $\frac{1}{3}$. Θα πρέπει τότε να είναι εμφανές ότι όλοι οι αλγόριθμοι και οι διαδικασίες που περιγράφηκαν μέχρι στιγμής μπορούν τώρα να εφαρμοστούν πιο γενικά. Οι μόνες τροποποιήσεις είναι ότι το διάγραμμα κατάστασης και δικτύωσης έχουν $2^{K-1}$ καταστάσεις ή κόμβους (που ισούται με 4 για K = 3 και 8 για K =4), και οι διακλαδώσεις τώρα περιέχουν 1/r σύμβολα (2 για r = $\frac{1}{2}$, 3 για r = $\frac{1}{3}$).

Μια λίγο λιγότερο εμφανής γενίκευση είναι σε ένα κώδικα ρυθμού υψηλότερου του $\frac{1}{2}$. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε με δύο τρόπους. Ο πιο άμεσος είναι μέσω μιας διαδικασίας που ονομάζεται διάτρηση. Για παράδειγμα, με ένα ρυθμό κώδικα $\frac{1}{2}$, εναλλασσώμενα δεδομένα εξόδου του δεύτερου (χαμηλότερου) χτυπήματος μπορούν να διαγραφούν (ή να διατηρηθούν) – βλέπε Σχήμα 5.9a. Έτσι, ο ίδιος αριθμός δεδομένων εξόδου λαμβάνεται από το άνω χτύπημα, αλλά μόνο τα μισά δεδομένα λαμβάνονται από το χαμηλότερο χτύπημα. Το αποτέλεσμα είναι ένας ρυθμός κώδικα r = $\frac{2}{3}$, γιατί για κάθε 2 bit, παράγουμε μόνο 3 σύμβολα εξόδου. Αυτή η διαδικασία μπορεί έτσι να γενικευτεί για να διαγραφούν n − 1 από κάθε 2n σύμβολα εξόδου από έναν κωδικοποιητή ρυθμού $\frac{1}{2}$ για να παράγουμε ένα κώδικα με ρυθμό r= n / (n + 1), n ≥ 2. Ο αποκωδικοποιητής για ένα διατρημένο συνελικτικό κώδικα είναι ο ίδιος όπως και για τον αρχικό, εκτός από το γεγονός ότι σε εκείνες τις θέσεις όπου το σύμβολο έχει διατηρηθεί, κι έτσι δεν εκπέμπεται, καμία μετρική μ δεν υπολογίζεται. Επομένως, κάποιες διακλαδώσεις έχουν μια μετρική που βασίζεται σε δύο σύμβολα και άλλες (με διατηρημένα σύμβολα) έχουν μια μετρική που βασίζεται σε ένα μόνο σύμβολο.

Η πιο γενική τάξη ανελικτικών κωδίκων με αυθαίρετο λογικό ρυθμό b /n μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας b παράλληλους

καταχωρητές, που ο καθένας τους είναι δυνατόν να τροφοδοτεί ένα από τα n χτυπήματα εξόδου σε κάθε στάδιο. Ένα παράδειγμα με b = 2 και n = 3 φαίνεται στο Σχήμα 5.9b. Το διάγραμμα κατάστασης για ένα μήκος περιορισμού (ολισθητή) K θα έχει $2^{b(K-1)}$ καταστάσεις, και κάθε κόμβος τώρα έχει $2^b$ διακλαδώσεις να εξέρχονται από αυτόν και να εισέρχονται σε αυτόν. Ο αποκωδικοποιητής λειτουργεί όπως πριν, εκτός από το γεγονός ότι η επιλεγμένη διαδρομή έχει τη μεγαλύτερη μετρική ανάμεσα στις $2^b$ εισερχόμενες διαδρομές σε ένα κόμβο, αντί για απλώς τις δύο για κώδικες ρυθμού 1 / n. Θα επιστρέψουμε σε κώδικες υψηλότερου ρυθμού όταν εξετάσουμε την επίδοση.

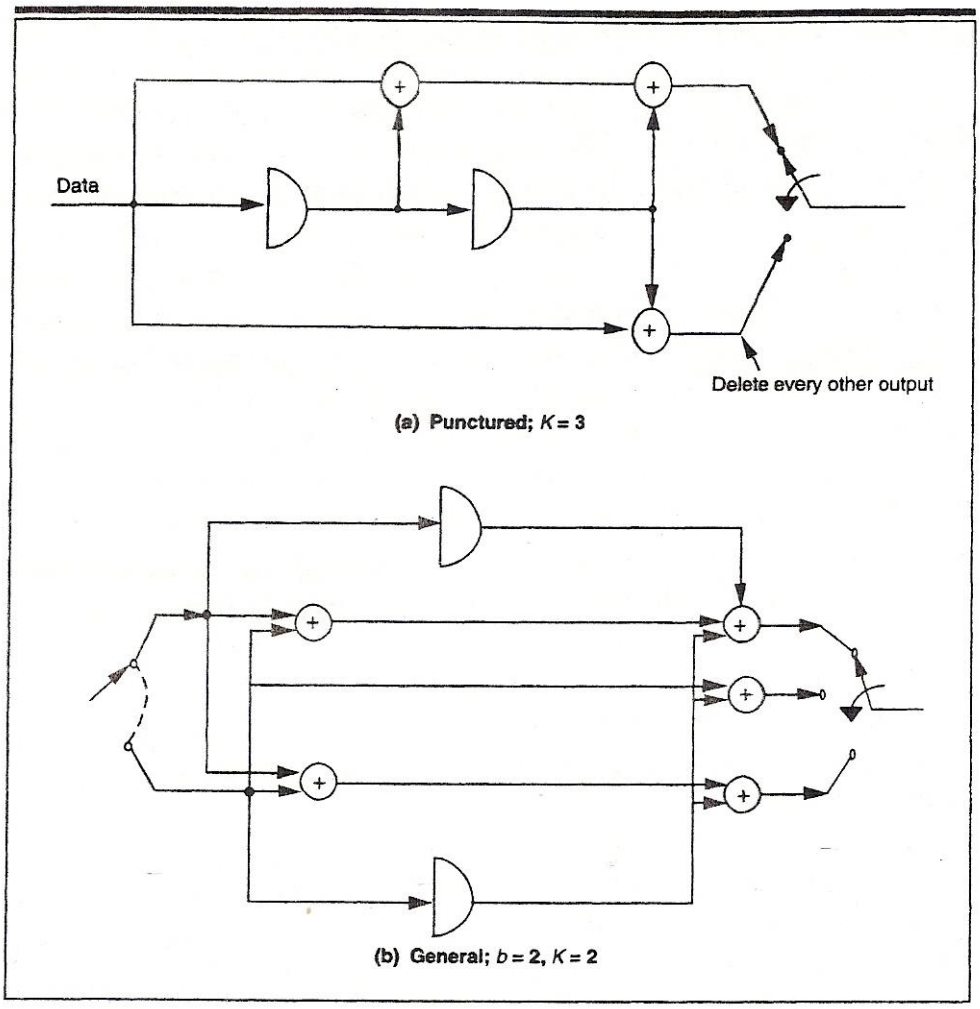



**Figure 5.9** Four-state convolutional codes, $r = \frac{2}{3}$. (a) Punctured; $K = 3$. (b) General; $b = 2$, $K = 2$.

## 5.4 Αξιολόγηση της επίδοσης του συνελικτικού κώδικα

### 5.4.1 Πιθανότητα σφάλματος για μειωμένο μπλοκ

Η αξιολόγηση της πιθανότητας σφάλματος ενός συνελικτικά κωδικοποιημένου συστήματος που λειτουργεί σε ένα κανάλι χωρίς μνήμη προχωρά άμεσα από τη γεννήτρια συνάρτηση που βρήκαμε στην Ενότητα 5.3 για να καθορίσει την απόσταση του κώδικα κι άλλες ιδιότητες του κώδικα. Συνεχίζουμε με το τρέχον παράδειγμα του Σχήματος 5.3, σημειώνοντας ότι ακολουθεί άμεσα η γενίκευση στους κώδικες με K εκτός του 3 και ρυθμούς εκτός του $\frac{1}{2}$. Η γεννήτρια συνάρτηση των ιδιοτήτων της απόστασης του κώδικα δίνεται από το T (δ) της Εξίσωσης (5.8), όπως περιγράφεται στην Ενότητα 5.3.1. Αυτή απαριθμεί την απόσταση που συσσωρεύεται από όλες τις (εσφαλμένες) διαδρομές που δεν έχουν συγχωνευτεί σε μια δεδομένη (σωστή) διαδρομή σε ένα αυθαίρετο χρονικό διάστημα. Με συμμετρία, αυτό ισχύει για το σύνολο όλων των δυνατών διαδρομών που αποκλίνουν από τη σωστή διαδρομή σε ένα δεδομένο κόμβο και για το σύνολο όλων των πιθανών διαδρομών που επανασυγχωνεύονται στη σωστή διαδρομή σε ένα δεδομένο κόμβο. Λαμβάνοντας την τελευταία άποψη, μπορούμε να θέσουμε άνω φράγμα στην πιθανότητα σφάλματος στο βήμα της επιλογής σε οποιοδήποτε δεδομένο επίπεδο κόμβου με το φράγμα ένωσης. Το φράγμα ένωσης είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων σφάλματος λόγω της επιλογής της καθεμιάς από τις δυνατές εσφαλμένες επανασυγχωνευθείσες διαδρομές. Έτσι, από την επέκταση του T(δ) του (5.9), βρίσκουμε ότι η πιθανότητα σφάλματος επιλογής στον j κόμβο έχει άνω φράγμα

$$P_e(j) < P_5 + 2P_6 + 4P_7 + \ldots\ldots + 2^k P_{k+5} + \ldots.. \qquad (5.21)$$

Εδώ, $P_k = P_r$ (σφάλμα ζεύγους υπέρ μιας εσφαλμένης διαδρομής που διαφέρει κατά k σύμβολα από τη σωστή διαδρομή σε ασυγχώνευτο διάστημα).

Αλλά στην Ενότητα 4.2 δείξαμε ότι για έναν αποκωδικοποιητή μεγίστης πιθανοφάνειας σε ένα κανάλι χωρίς μνήμη, το φράγμα Chernoff (ή Bhattacharyya) στο $P_1$ θα μπορούσε να γραφεί με τη μορφή

$$P_1 < Z, \text{ όπου } Z=\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p_0(y)p_1(y)}\ dy \qquad (5.22)$$

Τα $p_0(y)$ και $p_1(y)$ είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας της εξόδου του καναλιού υπό τη συνθήκη ότι το σύμβολο εισόδου είναι 0 και 1, αντίστοιχα, και το ολοκλήρωμα αντικαθίσταται από ένα άθροισμα των τιμών του y αν το τελευταίο είναι μια διακριτή αντί για συνεχή μεταβλητή. Για το AWGN κανάλι, όπως φαίνεται στην Ενότητα 4.2.1, $Z = e^{-E/I_0}$.

Στο Κεφάλαιο 4, ασχοληθήκαμε αρχικά με μοναδικά σύμβολα, εκτός από όταν το λαμβανόμενο σήμα έφτανε μέσω L πολλαπλών διαδρομών. Σε εκείνη την περίπτωση [π.χ. (4.32)], αν οι διαδρομές ήταν ανεξάρτητες, η πιθανότητα σφάλματος ήταν το γινόμενο των όρων της μορφής του (5.22). Εδώ, για ένα κανάλι χωρίς μνήμη (με ομοιογενείς στατιστικές), έχουμε d σύμβολα που διαφέρουν κι επομένως, το φράγμα Chernoff γίνεται

$$P_d < Z^d \qquad (5.23)$$

Χρησιμοποιώντας τα (5.22) και (5.23) στο (5.21) και συγκρίνοντας με τα(5.8) και (5.9) βρίσκουμε

$$P_e(j) < Z^5 + 2Z^6 + 4Z^7 + \ldots\ldots + 2^k Z^{5+k} + \ldots..$$

$$= \frac{Z^5}{1-2Z} = T(Z) \qquad (5.24)$$

Έστω τώρα ότι έχουμε να κάνουμε με ένα μειωμένο συνελικτικό κώδικα που αποτελείται από ένα μπλοκ κώδικα με B-bit, 2(B + 2)σύμβολα, όπως περιγράφεται στην τελευταία ενότητα. Σε αυτή την περίπτωση, εφόσον υπάρχουν B κόμβοι στους οποίους γίνεται μια επιλογή, το φράγμα ένωσης στην πιθανότητα σφάλματος του μπλοκ κώδικα των B bit είναι

$$P_E < \sum_{j=1}^{B} P_E\,(j) < BT(Z) \qquad (5.25)$$

## 5.4.2 Πιθανότητα σφάλματος bit

Σε αντίθεση με την πιθανότητα σφάλματος μπλοκ που μόλις υπολογίσαμε, μπορούμε ακόμη να εξετάσουμε την πιθανότητα σφάλματος bit ενός συνελικτικού κώδικα που δεν έχει αναγκαστικά μειωθεί σε ένα μπλοκ. Ας εξετάσουμε την επιλογή σε οποιοδήποτε δεδομένο επίπεδο (χρόνου) του κόμβου j, στην κατάσταση της σωστής διαδρομής. Αν η εσφαλμένη διαδρομή επιλεγεί αυτή τη φορά, θα αντικαταστήσει τη σωστή διαδρομή (π.χ. όλα μηδέν) με μια εσφαλμένη διαδρομή για την οποία τα bit εισόδου διαφέρουν από εκείνη κατά έναν αριθμό bit. Η γεννήτρια συνάρτηση Τ(δ,β) εξηγεί την Hamming απόσταση και τον αριθμό των bit εισόδου που διαφέρουν ανάμεσα στις σωστές κι εσφαλμένες διαδρομές. Προκύπτει από το (5.10) ότι για το τρέχον παράδειγμά μας, ο αναμενόμενος αριθμός σφαλμάτων bit που προκαλείται από ένα σφάλμα επιλογής σε επίπεδο κόμβου j είναι

$$E[n_b(j)] \leq P_5 + 2(2)P_6 + 4(3)\, P_7 + \ldots.. \; 2^k(k+1)P_{5+k} + \ldots.. \tag{5.26}$$

Αυτό συμβαίνει επειδή, από τις εσφαλμένες διαδρομές που είναι δυνατόν να επανασυγχωνευτούν στη σωστή διαδρομή σε οποιονδήποτε κόμβο j, σύμφωνα με το (5.10), μία επανασυγχωνεύεται σε απόσταση 5 από τη σωστή διαδρομή με ένα bit εισόδου να διαφέρει, δύο επανασυγχωνεύονται σε απόσταση 6 με δύο bit εισόδου να διαφέρουν, και γενικά $2^k$ συγχωνεύονται σε απόσταση 5 + k με k + 1 bit να διαφέρουν. Τα αποτελέσματα του άνω φράγματος λόγω των γεγονότων σφάλματος επιλογής δεν αλληλοαποκλείονται. Τώρα χρησιμοποιώντας το (5.23) στο (5.26) και αναγνωρίζοντας από το (5.10) ότι οι προκύπτουσες σειρές είναι απλώς παράγωγες του Τ(δ,β) σε σχέση με το β, με το σύνολο β να είναι ίσο με το 1, βρίσκουμε

$$E[n_b(j)] < Z^5 + 2(2)Z^6 + \ldots\ldots + 2^k(k+1)Z^{5+K} + \ldots..$$

$$= \frac{dT(Z,\beta)}{d\beta}\bigg|_{\beta=1} = \frac{d}{d\beta}\left(\frac{Z^5\beta}{1-2Z\beta}\right)\bigg|_{\beta=1} \tag{5.27}$$

$$= \frac{Z^5}{(1-2Z)^2}$$

Για να πάμε από αυτό το φράγμα του αναμενόμενου αριθμού σφαλμάτων bit ανά διακλάδωση στην πιθανότητα σφάλματος bit, αρκεί να προσέξουμε ότι το φράγμα του αναμενόμενου αριθμού σφαλμάτων bit σε προχωρημένες B διακλαδώσεις κι επομένως, για B bit εισόδου, έχει φράγμα

$$\sum_{j=1}^{B} E[n_b(j)] < B\,\frac{dT(Z,\beta)}{d\beta}\bigg|_{\beta=1} \tag{5.28}$$

Ας προσέξουμε ότι μερικά σφάλματα bit θα εξαλείψουν προηγούμενα σφάλματα , γιατί νέες (μακρύτερες) επιλογές εσφαλμένων διαδρομών μπορεί να διαδεχτούν επιλογές εσφαλμένων διαδρομών σε προηγούμενους κόμβους. Όμως, το άνω φράγμα ακόμη ισχύει, διότι όλες οι επιλογές εσφαλμένης διαδρομής σε κάθε κόμβο μετριούνται είτε αυτή η διαδρομή εν τέλει επιβιώσει είτε όχι.

Για το αυθαίρετο B, ο ρυθμός της πιθανότητας σφάλματος bit είναι απλώς ο λόγος του αναμενόμενου αριθμού σφαλμάτων bit προς τα αποκωδικοποιημένα bit (προχωρημένες διακλαδώσεις). Έτσι, η πιθανότητα σφάλματος bit είναι απλώς το (5.28) κανονικοποιημένο με το B, ώστε

$$P_b < \frac{dT(Z,\beta)}{d\beta}\bigg|_{\beta=1} \tag{5.29}$$

Αυτή η παράσταση προφανώς γενικεύεται για οποιοδήποτε συνελικτικό κώδικα μήκους αυθαίρετου περιορισμού K και ρυθμό 1 / n. Ας προσέξουμε, όμως, ότι για ρυθμούς b/n, όπου b > 1, οι προχωρημένες B διακλαδώσεις σημαίνουν αποκωδικοποίηση των bB bit. Σε εκείνη την περίπτωση,

$$P_b < \frac{1}{b}\frac{dT(Z,\beta)}{d\beta}\bigg|_{\beta=1} \qquad r=b/n \tag{5.30}$$

Το Σχήμα 5.10 δείχνει τα φράγματα ένωσης Chernoff στην πιθανότητα σφάλματος μειωμένου μπλοκ (με B = 100 bit) και στην πιθανότητα σφάλματος bit για το τρέχον παράδειγμα του Σχήματος 5.3 όπως την βρήκαμε από τα (5.24) και (5.25) και (5.27) και (5.29), αντίστοιχα. Η πιθανότητα λάθους χαρτογραφείται ως μια συνάρτηση του ln(1 / Z)/r διότι για το σύμφωνο Gaussian κανάλι (AWGN),

$$\ln\ (1/Z)/r = (E_s/r)/I_0 = E_b/I_0 \tag{5.31}$$

που είναι η πρωτίστου ενδιαφέροντος παράμετρος του συστήματος επικοινωνίας.

## 5.4.3 Γενικεύσεις του υπολογισμού της πιθανότητας σφάλματος

Η γενίκευση του τρέχοντος παραδείγματος του Σχήματος 5.3 είναι εντελώς ξεκάθαρη. Ο υπολογισμός της γεννήτριας συνάρτησης T(δ,β) για διαγράμματα κατάστασης που περιλαμβάνουν $2^{K-1}$ καταστάσεις για K > 5 είναι περίπλοκος, αποκλείοντας άμεση αλγεβρική επεξεργασία.

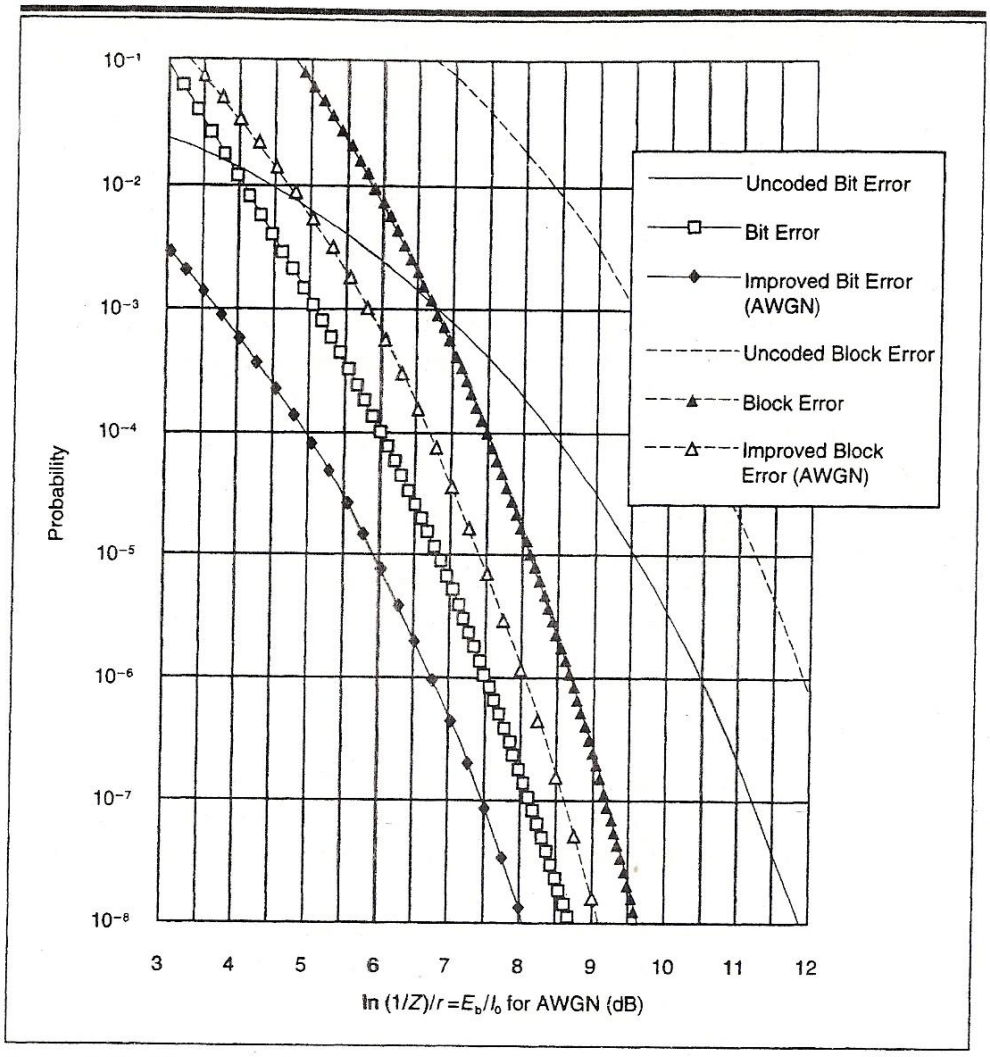



**Figure 5.10** Bit error and 100-bit block error probability bounds for $K = 3$, $r = \frac{1}{2}$ convolutional code.

Υπάρχουν αρκετά προγράμματα αλγεβρικού υπολογισμού, αλλά όλα απαιτούν πάρα πολύ χρόνο σε πάνω από K = 7, τουλάχιστον σε μηχανήματα μετρίου μεγέθους. Ευτυχώς, για μια δεδομένη τιμή Z, ο υπολογισμός του T(Z) μπορεί να βρεθεί λύνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} x_{00.....01} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{11....1} \end{bmatrix} = [A(Z)] \begin{bmatrix} x_{00.....01} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{11....1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{00.....01}(Z) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{11....1}(Z) \end{bmatrix}$$

(5.32)

$$T(Z)=[c_{00.....01}\ (Z)\ldots\ldots\ldots c_{11.....1}(Z)]\begin{bmatrix} x_{00.....01} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{11....1} \end{bmatrix}$$

Το x είναι το διάνυσμα των $2^{K-1}$ (ενδιάμεσων) μεταβλητών κατάστασης, αποκλείοντας τον αρχικό και τελικό κόμβο με τα μηδενικά. A(Z) είναι το πλέγμα των κωδίκων των διακλαδώσεων μετάβασης του διαγράμματος κατάστασης, όπου κάθε όρος είναι μονώνυμο στο Z. Το b(Z) είναι το διάνυσμα των κωδίκων εκείνων των διακλαδώσεων που συνδέουν τον αρχικό κόμβο με κάθε κόμβο ενδιάμεσης κατάστασης. Το c (Z) είναι το διάνυσμα των κωδίκων των διακλαδώσεων που συνδέουν κάθε κόμβο ενδιάμεσης κατάστασης με τον τελικό κόμβο. Για το παράδειγμα του Σχήματος 5.3 έως 5.6, $2^{K-1} - 1 = 3$, και

$$A(Z)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ Z & 0 & Z \\ Z & 0 & Z \end{bmatrix}, \quad b(Z) = \begin{bmatrix} Z^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T(Z) = \begin{bmatrix} 0 \\ Z^2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5.33)$$

Ας προσέξουμε ότι για οποιοδήποτε κώδικα r = 1 / n, το πλέγμα A είναι αραιό με μόνο δύο δεδομένα εισόδου ανά σειρά (εκτός από την πρώτη σειρά, που έχει μια μοναδική καταχώρηση). Ακόμη, ας προσέξουμε ότι τα διανύσματα b και $c^T$ έχουν μόνο μία καταχώρηση, το b στην πρώτη σειρά και το $c^T$ στη σειρά που αντιστοιχεί σε $x_{10...0}$. Για r = b / n (b > 1), το πλέγμα και τα διανύσμα είναι λιγότερο αραιά. Ακόμη προκύπτει από το (5.32) ότι η λύση των μεταβλητών κατάστασης μπορεί να γραφεί

$$\begin{bmatrix} x_{00.....01} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{11....1} \end{bmatrix} = [\mathrm{I} - \mathrm{A(Z)}]^{-1} \begin{bmatrix} b_{00.....01}(Z) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{11....1}(Z) \end{bmatrix} \qquad (5.34)$$

όπου I είναι το πλέγμα ταυτότητας. Αν και η αναστροφή του πλέγματος μπορεί να γίνει αριθμητικά για μια δεδομένη τιμή του Z, για το μεγάλο K είναι πιο εύκολο να κάνουμε επέκταση

$$[\mathrm{I} - \mathrm{A(Z)}]^{-1} = \mathrm{I} + \mathrm{A(Z)} + A^2(Z) + \ldots\ldots + A^k(Z) + \ldots,$$

περικόπτοντας μετά από έναν κατάλληλο αριθμό όρων. Μπορούμε να δείξουμε ότι η σύγκλιση επιβεβαιώνεται διότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου του φράγματος Chernoff $Z < 1$, όλες οι ιδιοτιμές του $A(Z)$ είναι λιγότερο απ' ό,τι η ενότητα για μη καταστροφικούς κώδικες, όπως ορίζεται αργότερα.

Όταν το φράγμα πιθανότητας σφάλματος bit (5.29) ή (5.30) υπολογιστεί γενικά, το παράγωγό του δεν μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά μόνο. Μια αυθαίρετα κοντινή προσέγγιση μπορεί να βρεθεί, όμως, μέσω της αξιολόγησης του $T(Z, 1 + \varepsilon)$ και του $T(Z, 1 - \varepsilon)$ λύνοντας πάλι το (5.32). Όμως, σε αυτή την περίπτωση το πλέγμα A και τα διανύσματα b και c έχουν συνιστώσες που είναι αριθμητικές τιμές των μονωνύμων διακλαδώσεων σε δ και β που εκτιμώνται σε αριθμητικές τιμές του Z και $\beta = 1 \pm \varepsilon$, αντίστοιχα. Τότε το φράγμα πιθανότητας σφάλματος bit του (5.30) προσεγγίζεται από

$$P_b \leq \frac{1}{b} \frac{T(Z,1+\epsilon)-T(Z,1-\epsilon)}{2\epsilon} \qquad (5.35)$$

Για $r = b / n$, $b \geq 1$.

Θα φαινόταν ότι όσο μικρότερο είναι το $\in$, τόσο καλύτερη η προσέγγιση, αν και οι πολύ μικρές τιμές του $\in$ θα οδηγήσουν σε υπορροή.

Αυτές οι τεχνικές εφαρμόζονται στα Σχήματα 5.11 και 5.12 για τον υπολογισμό της πιθανότητα σφάλματος μπλοκ 100- bit και της πιθανότητας σφάλματος bit, αντίστοιχα, για 4 μέτρια μακρείς κώδικες με μήκος περιορισμού $K = 7$ και $K=9$, για $r = \frac{1}{2}$ και $r = \frac{1}{3}$.

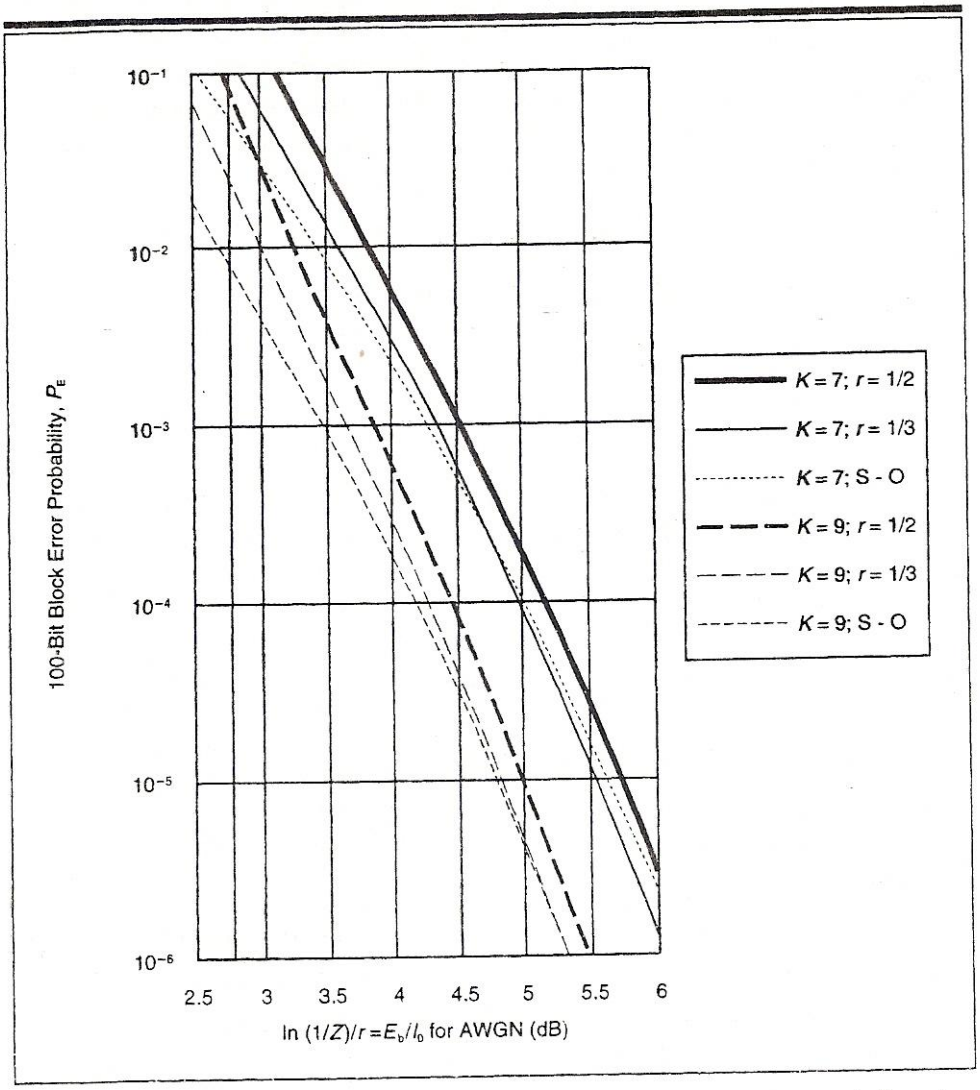



**Figure 5.11** 100-bit block error probability bounds for various convolutional codes ($K = 7$ and 9).

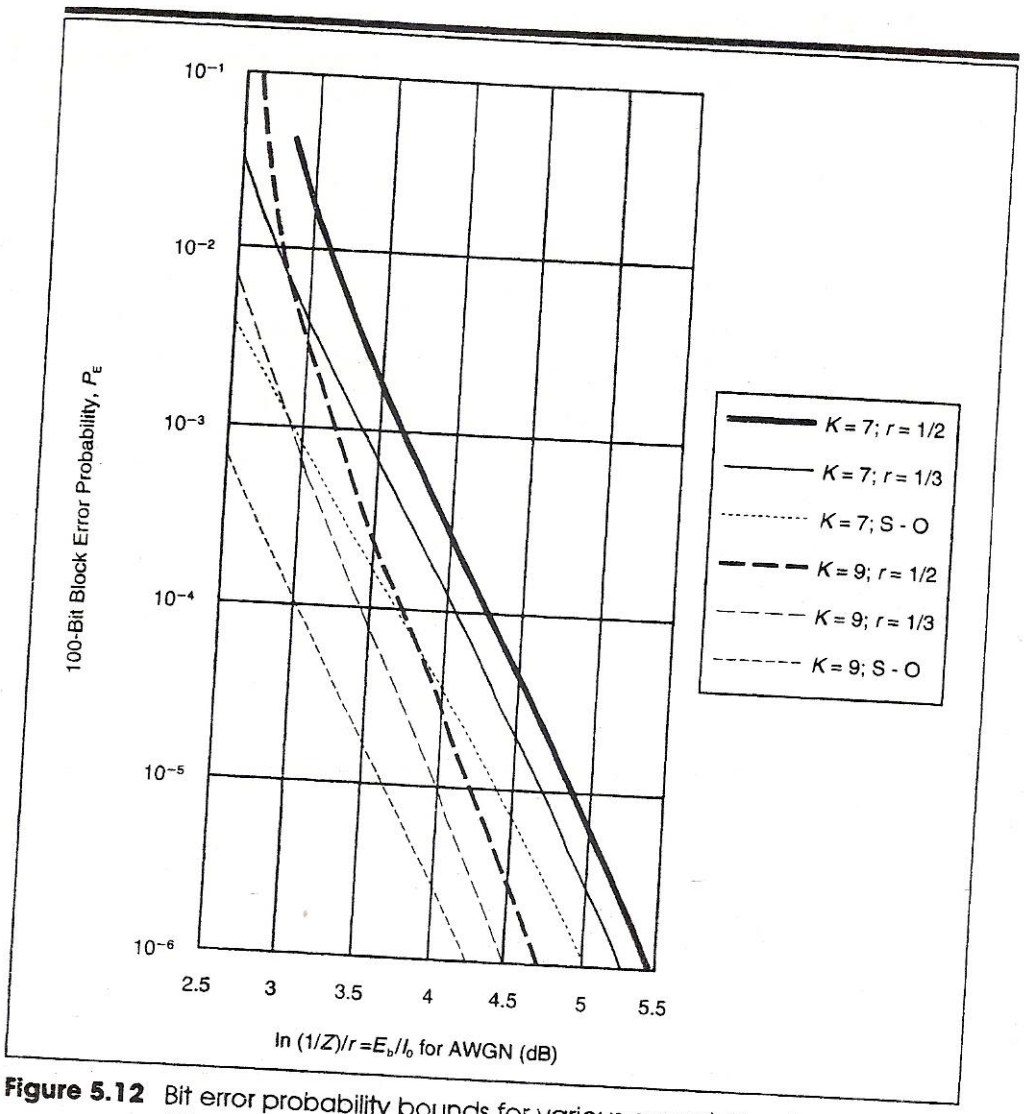



**Figure 5.12** Bit error probability bounds for various convolutional codes ($K = 7$ and 9).

Όσο για τον K = 3 κώδικα (Σχήμα 5.10), οι πιθανότητες σφάλματος φαίνονται ως συναρτήσεις του In(1 / Z)/ r σε κάθε περίπτωση, που για το σύμφωνο Gaussian κανάλι ισούται με $E_b / I_0$, όπως φαίνεται από το (5.31). Ο Πίνακας 5.1 συνοψίζει τους καλύτερους κώδικες, για r = $\frac{1}{2}$ και r = $\frac{1}{3}$ για K = 3 έως 10, υπό την έννοια της ελάχιστης πιθανότητας σφάλματος για υψηλό $E_b / I_0$. Τα πολυώνυμα της γεννήτριας χτυπημάτων και η ελεύθερη απόσταση δείχνονται σε κάθε περίπτωση. Οι κώδικες K = 7 και 9 είναι εκείνοι, των οποίων η επίδοση φαίνεται στα Σχήματα 5.11 και 5.12.

**Table 5.1** Minimum Free Distance Convolutional Codes for $K = 3-10$, $r = \frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$

(A) Rate $\frac{1}{2}$ Codes

| Constraint Length $K$ | Tap Generators in Octal Notation[a] | | $d_{free}$ | $d_{free}$ Bound from (5.55) |
|---|---|---|---|---|
| | $G_1$ | $G_2$ | | |
| 3 | 7 | 5 | 5 | 5 |
| 4 | 17 | 15 | 6 | 6 |
| 5 | 35 | 23 | 7 | 8 |
| 6 | 75 | 53 | 8 | 8 |
| 7 | 171 | 133 | 10 | 10 |
| 8 | 371 | 247 | 10 | 11 |
| 9 | 753 | 561 | 12 | 12 |
| 10 | 1545 | 1167 | 12 | 13 |

(B) Rate $\frac{1}{3}$ Codes

| Constraint Length $K$ | Tap Generators in Octal Notation | | | $d_{free}$ | $d_{free}$ Bound from (5.55) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | | |
| 3 | 7 | 7 | 5 | 8 | 8 |
| 4 | 17 | 15 | 13 | 10 | 10 |
| 5 | 37 | 33 | 25 | 12 | 12 |
| 6 | 75 | 53 | 47 | 13 | 13 |
| 7 | 171 | 165 | 133 | 15 | 15 |
| 8 | 367 | 331 | 225 | 16 | 16 |
| 9 | 711 | 663 | 557 | 18 | 18 |
| 10 | 1633 | 1365 | 1117 | 20 | 20 |

[a] E.g., for $K = 3$ and delay operator, $D$.

$$G_1(D) = 1 \oplus D \oplus D^2,$$

$$G_2(D) = 1 \oplus D^2$$

## 5.4.4 Καταστροφικοί κώδικες

Πριν εγκαταλείψουμε το θέμα της επιλογής καλών συνελικτικών κωδίκων, πρέπει ακόμη να αναγνωρίσουμε και να αποκλείσουμε επιλογές που οδηγούν σε πολύ κακή επίδοση κώδικα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο κώδικας K = 3, r = $\frac{1}{2}$ που φαίνεται στο Σχήμα 5.13. Όπως φαίνεται από τον κωδικοποιητή στο (a) και το διάγραμμα κατάστασής του στο (b), η ακολουθία δεδομένων εισόδου που ξεκινά στην 00 κατάσταση και αποτελείται μόνο από «ένα» αυθαίρετου μήκους που ακολουθούνται από δύο μηδενικά, 1111 ... 100, παράγει την ακολουθία του κώδικα 11010000 ... 001101. Εφόσον η ακολουθία δεδομένων με τα μηδενικά παράγει την ακολουθία του κώδικα με τα μηδενικά, η απόσταση ανάμεσα σε εκείνη με τα μηδενικά και τη μειωμένη διαδρομή δεδομένων με τα «ένα» είναι μόνο 6, όσο μακριά κι αν είναι η ακολουθία του κώδικα. Έτσι, σε ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (Binary Symmetric Channel, BSC), μόνο 4 σφάλματα καναλιού θα προκαλέσουν μια αυθαίρετα μακριά ακολουθία σφάλματος στα bit εξόδου. Σε ένα AWGN κανάλι, μια ακολουθία διαστρεβλωμένου ήχου σε μόνο 6 χρόνους συμβόλου θα προκαλέσει ομοίως μια αυθαίρετα μακριά ακολουθία εξόδου σφάλματος. Ένας τέτοιος κώδικας ονομάζεται καταστροφικός.

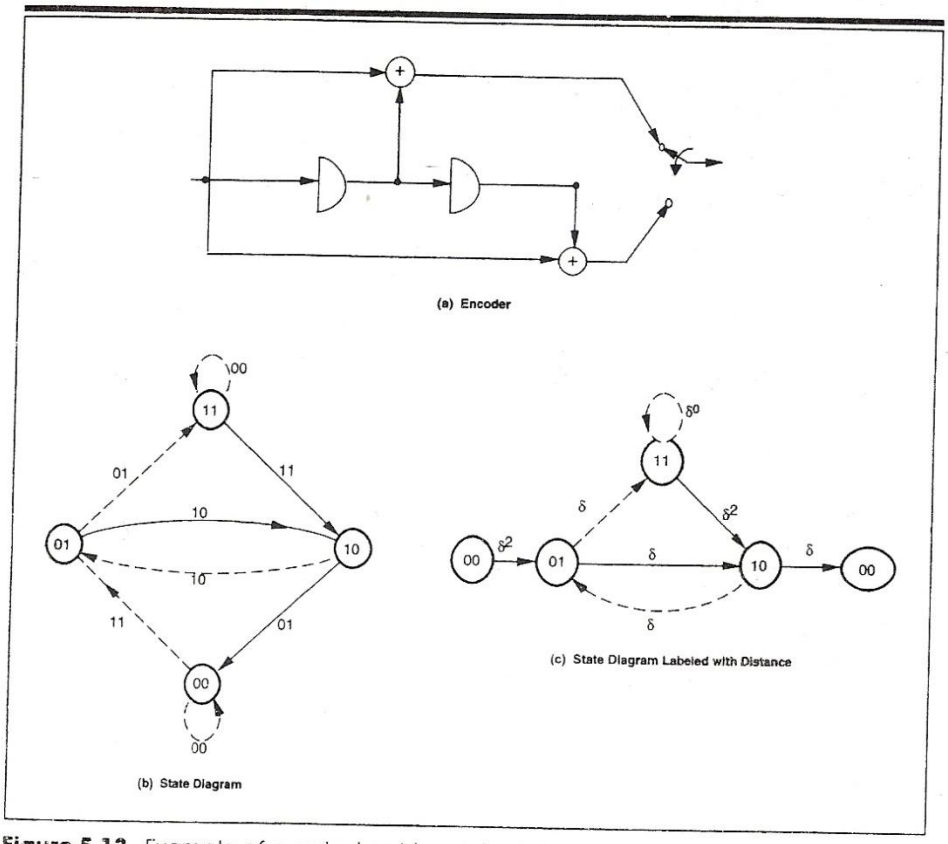



**Figure 5.13** Example of a catastrophic code. (a) Encoder. (b) State diagram. (c) State diagram labeled with distance.

Μια απαραίτητη και επαρκής συνθήκη για ένα καταστροφικό κώδικα είναι ένας κλειστός βρόχος στο διάγραμμα κατάστασης να περιέχει μόνο μηδενικά, ή στο επισημασμένο διάγραμμα κατάστασης να συσσωρεύεται μηδενικό βάρος. Έτσι, στο απλό παράδειγμα του Σχήματος 5.13, ο ίδιος βρόχος (κατάσταση 11 προς κατάσταση 11) τα έχει όλα μηδέν στο (b) και μηδενικό βάρος στο (c). Οι Massey και Sain [1968] επινόησαν ένα πολύ απλό τεστ για το αν οποιοσδήποτε κώδικας ρυθμού 1 / n είναι καταστροφικός. Μια απαραίτητη και επαρκής συνθήκη για να είναι καταστροφικός ένας κώδικας ρυθμού 1 / n είναι τα n πολυώνυμα γεννήτορα (ακολουθίες χτυπήματος που γράφονται ως πολυώνυμα στον χειριστή καθυστέρησης D χρησιμοποιώντας την modulo-2 προσθήκη όρων) να έχουν ένα κοινό παράγοντα (modulo-2). Έτσι, για το παρόν παράδειγμα, τα δύο πολυώνυμα γεννήτορα είναι $G_1(D) = 1 \oplus D$, $G_2(D) = 1 \oplus D^2$ , που με την προθήκη του modulo-2 έχουν κοινό παράγοντα $1 \oplus D$. Για να δούμε γιατί αυτή η συνθήκη είναι επαρκής για να δημιουργηθεί ο

καταστροφικός κώδικας, ας εξετάσουμε την μη πεπερασμένη ακολουθία που βρήκαμε από τον ολισθητή ανάδρασης, του οποίου τα χτυπήματα δόθηκαν από το πολυώνυμο κοινού παράγοντα με ένα διάνυσμα αρχικής συνθήκης 00 ... 1 (βλ. Κεφάλαιο 2). Έτσι, αν η ακολουθία που παράγεται από αυτόν τον κοινό παράγοντα [σε αυτή την περίπτωση, 1 / (1 ⊕ D) = 1111 ... 1 ....]χρησιμοποιείται ως δεδομένο εισόδου στο συνελικτικό κώδικοποιητή, θα εξάγει δύο ακολουθίες πεπερασμένου μήκους από τα δύο χτυπήματα. Επομένως, όλα τα ακόλουθα δεδομένα είναι μηδενικά. Σε αυτή την περίπτωση, οι ακολουθίες εξόδου για τα δύο χτυπήματα παράγουν συναρτήσεις

$$\frac{G_1(D)}{1 \oplus D} = 1 \qquad (100 \ldots 0 \ldots),$$

$$\frac{G_2(D)}{1 \oplus D} = 1 \qquad (1100 \ldots 0 \ldots).$$

Έτσι, η συνολική ακολουθία εξόδου (που εναλλάσσεται ανάμεσα στα πρώτα και στα δεύτερα χτυπήματα) σε σχέση με την ακολουθία εισόδου με όλα τα «ένα» είναι 110100 ... όπως σημειώθηκε και νωρίτερα. Αυτό διαφέρει μόνο σε 3 θέσεις από εκείνη με τα μηδενικά. (Τα επιπρόσθετα τρία «ένα» που αναφέρθηκαν νωρίτερα ήταν το αποτέλεσμα της μείωσης με δύο μηδενικά εισόδου.)

Η γενίκευση σε οποιοδήποτε αριθμό χτυπημάτων, με οποιοδήποτε κοινό παράγοντα πολυωνύμων, είναι πλήρως ξεκάθαρη. Τέλος, ο Forney [1970b] έχει δείξει ότι για ρυθμό 1 / n, όλων των πιθανών επιλογών ακολουθίας χτυπήματος για ένα δεδομένο μήκος περιορισμού, μόνο το τμήμα 1 / ($2^n$ – 1) είναι καταστροφικό. Για παράδειγμα, για r = $\frac{1}{2}$, μόνο το ένα τρίτο των κωδίκων είναι καταστροφικό και αυτοί εύκολα αποκλείονται χρησιμοποιώντας τη συνθήκη Massey-Sain.

## 5.4.5 Γενίκευση σε αυθαίρετα κανάλια χωρίς μνήμη-σύμφωνα και ασύμφωνα

Για οποιοδήποτε συνελικτικό κώδικα μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα σφάλματος bit ή μπλοκ για ένα κανάλι χωρίς μνήμη ως μια συνάρτηση του Z, ή της μονότονης συνάρτησης, In(1 / Z). Αυτό έγινε στην Ενότητα 5.4.3 για τους 4 κώδικες με K = 7 και 9 και r = $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$, που φαίνονται στα Σχήματα 5.11 και 5.12. Για το AWGN κανάλι, η τετμημένη ισούται με $E_b$ / $I_0$ . Για οποιοδήποτε άλλο κανάλι χωρίς μνήμη (για το οποίο οι διαδοχικές μετρικές συμβόλου είναι αμοιβαία ανεξάρτητες), το Z πρέπει να υπολογιστεί ως μια συνάρτηση του καναλιού $E_S$ / $I_0$. Στο Κεφάλαιο 4, αυτό έγινε για κανάλια με Rayleigh (και Rice) απόσβεση με σύμφωνη αποδιαμόρφωση και για κανάλια χωρίς και με απόσβεση με ασύμφωνη αποδιαμόρφωση. Στην πραγματικότητα, το Σχήμα 4.4 (για σύμφωνη αποδιαμόρφωση) και το Σχήμα 4.8 (για ασύμφωνη αποδιαμόρφωση) είναι διαγράμματα της συνολικής περίσσιας ενέργειας συμβόλου που απαιτείται σε όλες τις διαδρομές για να πετύχουμε το ίδιο φράγμα επίδοσης όπως για ένα σύμφωνο AWGN κανάλι. Αυτό ισούται με ($E_b$ / $I_0$ )/ In(1/Z)/r σε decibel, όπου $E_b$ είναι η συνολική ενέργεια bit για όλες τις διαδρομές. Εφόσον όλες οι παράμετροι φαίνονται σε decibel, οι τεταγμένες των Σχημάτων 4.4 και 4.8 είναι η διαφορά σε decibel ανάμεσα στην απαιτούμενη $E_b$ / $I_0$ (σε decibel) και στο In(1 / Z) / r. Επομένως, μπορούμε να βρούμε το επαυξητικό ποσό από τα Σχήματα 4.4 και 4.8 για ένα δεδομένο ρυθμό κώδικα και την κατάλληλη τιμή του In(1 / Z) για οποιοδήποτε από τα κανάλια που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 4. Αυτό το ποσό πρέπει να προστεθεί στην τετμημένη των Σχημάτων 5.10, 5.11 και 5.12 για να βρούμε τα διαγράμματα της πιθανότητας σφάλματος ως μια συνάρτηση του $E_b$ / $I_0$. Για παράδειγμα, ένας συνελικτικός κώδικας με K = 9, r = $\frac{1}{2}$ απαιτεί λιγότερο από $E_b$ / $I_0$ = In(1 / Z) / r = 3.2 dB ή In(1/Z) =0.2 dB για να πετύχουμε μια πιθανότητα σφάλματος μπλοκ 100-bit (φράγμα) $10^{-2}$ για το σύμφωνο AWGN κανάλι. Από το Σχήμα 4.4 βρίσκουμε ότι με σύμφωνη αποδιαμόρφωση L = 3 διαδρομών ίσης δύναμης με Rayleigh απόσβεση, η απαιτούμενη προσαύξηση είναι 0.8 dB. Επομένως, χρειαζόμαστε λιγότερο από $E_b$ / $I_0$ = 4.0 dB για αυτό το κανάλι. Ως ένα άλλο παράδειγμα, ας

εξετάσουμε την ασύμφωνη αποδιαμόρφωση με M = 64 ορθογωνικά σήματα, L = 2 Rayleigh διαδρομές ίσης δύναμης, και κώδικα με K = 9, r = $\frac{1}{3}$ . Για να πετύχουμε μια πιθανότητα σφάλματος μπλοκ 100-bit (φράγμα) $10^{-2}$ , βρίσκουμε από το Σχήμα 5.11 ότι ο κώδικας απαιτεί λιγότερο από $E_b / I_0$ = In(1 / Z)/ r = 3.0 dB ή In(1 / Z) = -1.8 dB σε ένα σύμφωνο AWGN κανάλι. Τότε από το Σχήμα 4.8 προκύπτει ότι η απαιτούμενη προσαύξηση για το ασύμφωνο Rayleigh κανάλι για L =2 διαδρομές είναι 3.9 dB, που σημαίνει ότι συνολικά χρειαζόμαστε λιγότερο από $E_b / I_0$ =6.9 dB.

Όπως ήδη σημειώσαμε παντού, όλες οι πιθανότητες σφαλμάτων είναι φράγματα, που χρησιμοποιούν δύο ανισότητες, το φράγμα ένωσης και το φράγμα Chernoff (ή Bhattacharrya). Το τελευταίο είναι το πιο χαλαρό από τα δύο στην $E_b / I_0$ περιοχή ενδιαφέροντος. Το Παράρτημα 5A δείχνει ότι, για το AWGN κανάλι, η αντικατάσταση των φραγμάτων Chernoff με ακριβείς παραστάσεις (για ζεύγη πιθανοτήτων σφάλματος) μειώνει τα φράγματα σχεδόν κατά μια τάξη μεγέθους. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 5.10 για τον κώδικα K = 3, r = $\frac{1}{2}$. Τα Σχήματα 5.11 και 5.12 δείχνουν ότι η μείωση μιας τάξης μεγέθους στην τεταγμένη αντιστοιχεί σε μια μείωση της τετμημένης περίπου 0.5 dB. Η μείωση όλων των προηγούμενων $E_b / I_0$ τιμών κατά αυτό το ποσό γενικά δίνει ακριβή αποτελέσματα για κωδικοποιημένα συστήματα σε κανάλια χωρίς μνήμη. Αυτό συμβαίνει επειδή σε ένα κωδικοποιημένο σύστημα κάθε απόφαση περιλαμβάνει το άθροισμα τουλάχιστον K / r μετρικών ανεξάρτητων συμβόλων, που είναι αρκετό για να δικαιολογήσει μια προσέγγιση του θεωρήματος του κεντρικού ορίου.

## 5.4.6 Τα φράγματα σφάλματος για δυαδικά δεδομένα εισόδου, συμμετρικά κανάλια εξόδου με ακέραιες μετρικές

Έτσι, όλα τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4 που έχουν χρησιμοποιηθεί υποθέτουν ότι το σύμβολο και οι μετρικές κλάδου είναι πραγματικοί αριθμοί. Στην πράξη, όπως σημειώθηκε στην

Ενότητα 5.3.2, αυτές οι μετρήσεις πραγματικών αριθμών πρέπει να κβαντοποιηθούν για πολυπλοκότητες υπολογιστικής επεξεργασίας και για το μέγεθος μνήμης αποθήκευσης. Συχνά η μεταβλητή μετρικής μ κβαντοποιείται σε Q επίπεδα και αναπαριστάται με ακέραιες τιμές $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \ldots \pm\alpha_{Q/2}$ , όταν το Q είναι άρτιος και από ακέραιες τιμές $0, \pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \ldots \pm\alpha_{(Q-1)/2}$ , όταν το Q είναι περιττός αριθμός. Υπό τις εναλλασσόμενες υποθέσεις ότι ένα 0 ή 1 (+ ή -) στάλθηκε, η πιθανότητα η κβαντοποιημένη μετρική να λαμβάνει ακέραιες τιμές q είναι η πιθανότητα η μη κβαντοποιημένη μετρική να βρίσκεται στο μεσοδιάστημα $(A_{q-1}, A_q)$. Για άρτιο Q, αυτές οι πιθανότητες υπό συνθήκη δίνονται από

$$P_+(q) = \Pr\left(A_{q-1} \leq \mu < A_q \,\middle|\, +\right),$$

$$P_-(q) = \Pr\left(A_{q-1} \leq \mu < A_q \,\middle|\, -\right), \tag{5.36}$$

για $q = \pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \ldots \pm\alpha_{Q/2}$ και $A_{-(Q/2+1)} = -\infty$, $A0 = 0$, $AQ/2 + 1 = +\infty$. Για Q περιττό, τα επίπεδα καθορίζονται με παρόμοιο τρόπο, αλλά τότε το μεσοδιάστημα κβαντοποίησης για q = 0 διασκελίζει την προέλευση. Για δυαδικά δεδομένα εισόδου, το κανάλι μπορεί γενικά να γίνει συμμετρικό εξόδου επιλέγοντας τα κατάλληλα επίπεδα κβαντοποίησης. Ο ορισμός της συμμετρίας εξόδου (με ακέραιες μετρικές) είναι

$$P_+(q) = P_-(-q) \begin{cases} q = \pm\, a_1,\ \pm a_2, \ldots, \pm a_{Q/2} & \textit{για άρτια } Q \\ q = 0 \pm\ a_1,\ \pm a_2, \ldots, \pm a_{(Q-1)/2} & \textit{για μονά } Q \end{cases} \tag{5.37}$$

Για δυαδικά κανάλια εισόδου, συμμετρικά κανάλια εξόδου, το φράγμα Chernoff για την πιθανότητα ζεύγους σφάλματος μπορεί εύκολα να βρεθεί για οποιεσδήποτε δύο κώδικες λέξεις, των οποίων τα πρόσημα διαφέρουν κατά d σύμβολα. Έστω ότι υπάρχουν d σύμβολα, στα οποία τα (κωδικά) σύμβολα εισόδου του καναλιού διαφέρουν. Στο $d_1$ από τα σύμβολα η πρώτη κωδική λέξη έχει ένα + και η δεύτερη ένα -, ενώ στο $d_2 = d - d_1$ από τα σύμβολα η πρώτη κωδική λέξη έχει ένα -, ενώ η δεύτερη έχει ένα +. Τότε αν υποθέσουμε ότι η πρώτη κωδική λέξη $x_1$ εστάλη και έστω ότι $\hat{\mu}$ είναι

οι κβαντοποιημένες ακέραιες τιμές, το φράγμα Chernoff στην πιθανότητα ζεύγους σφάλματος είναι

$$P_d(x_1) = \Pr\left(\sum_{n:x_{ln}=+}^{d_1} \hat{\mu}_n - \sum_{n:x_{ln}=-}^{d_1} \hat{\mu}_n < 0 \,\middle|\, x_1\right)$$

(5.38)

$$< \left[\sum_{q\epsilon I_q} P_+(q) e^{-pq}\right]^{d_1} \left[\sum_{q\epsilon I_q} P_-(q) e^{+pq}\right]^{d_2}, \quad \rho > 0$$

Το άθροισμα είναι πάνω από το ακέραιο σύνολο $I_q = \{ \pm\alpha_1, ..., \pm\alpha_{Q/2}$ για άρτιο Q και $I_q = \{0, \pm\alpha_1, ..., \pm\alpha_{(Q-1)/2}\}$ για περιττό Q. Τώρα χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συμμετρίας του καναλιού εξόδου (5.37), καθώς και τη συμμετρία στο σύνολο $I_q$, έστω ότι $w = e^{-\rho}$, και σημειώνοντας ότι $d_1 + d_2 = d$, μπορούμε να ξαναγράψουμε το (5.38) ως εξής

$$(P_d(x_1) < \left[\sum_{q\epsilon I_q} P_+(q) w^q\right]^{d_1} \left[\sum_{q\epsilon I_q} P_-(q) w^{-q}\right]^{d_2}$$

$$= \left[\sum_{q\epsilon I_q} P_+(q) w^q\right]^{d_1} \left[\sum_{q\epsilon I_q} P_+(-q) w^{-q}\right]^{d_2} \quad (5.39)$$

$$= \left[\sum_{q\epsilon I_q} P_+(q) w^q\right]^{d_1}, \qquad w<1$$

Προσέξτε ότι η ίδια παράσταση θα προέκυπτε αν είχαμε υποθέσει ότι το $x_2$ έχει σταλεί. Έτσι, $P_d(x_1) = P_d(x_2) = P_d$. Τέλος, πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την παράσταση σε σχέση με $w < 1$, οδηγώντας σε

$$P_d < Z^d,$$

όπου

$$Z = \underset{w<1}{Min}\left[\sum_{q\epsilon I_q} P_+(q) w^q\right] \qquad (5.40)$$

Έτσι, το (5.40) καθιερώνει την παράμετρο που καθορίζει την επίδοση για ένα δυαδικό ακέραιο μετρικό κανάλι εισόδου, συμμετρικό ακέραιο μετρικό κανάλι εξόδου. Η υποβάθμιση λόγω αυτής της κβαντοποίησης μπορεί συχνά να καταστεί μικρή επιλέγοντας το Q να

είναι μόνο μετρίως μεγάλο. Το AWGN κανάλι, με έναν άρτιο αριθμό επιπέδων κβαντοποίησης ίσης απόστασης ($\alpha_1 = \Delta / 2$, $\alpha_2 = 3\Delta / 2$, $\alpha_3 = 5\Delta / 2$, ...) είναι ένα παράδειγμα αυτού, εφόσον

$$P_+(q) = \int_{(q-1)\Delta/2}^{(q+1)\Delta/2} \exp\left[-z - (\sqrt{2E_s/I_0})/2\right] dz/\sqrt{2\pi}, \tag{5.41}$$

$$P_+(q) = \int_{(q-1)\Delta/2}^{(q+1)\Delta/2} \exp\left[-z - (\sqrt{2E_s/I_0})^2/2\right] dz/\sqrt{2\pi} = P_+(-q)$$

q = ±1, ±3, … , ±(Q - 3), με τις πιθανότητες για q = +Q – 1 να έχουν ανώτατο όριο +∞ και εκείνες για q = -Q +1 να έχουν κατώτατο όριο -∞. Το Σχήμα 5.14 δείχνει το λόγο ($E_S$ / $I_0$)/ln(1/Z) σε decibel για αυτό το κβαντοποιημένο AWGN κανάλι για Q = 2 επίπεδα (δύσκολη κβαντοποίηση), Q = 4 επίπεδα και Q = 8 επίπεδα, όπως υπολογίζεται από τα (5.40) και (5.41) που έχουν βελτιστοποιηθεί σε σχέση με το Δ. Όπως πριν, αυτό αναπαριστά την περίσσια ενέργεια σε decibel που απαιτείται για να έχει επίδοση αυτό το υποβαθμισμένο κανάλι τόσο καλή όσο το μη κβαντοποιημένο σύμφωνο AWGN κανάλι.

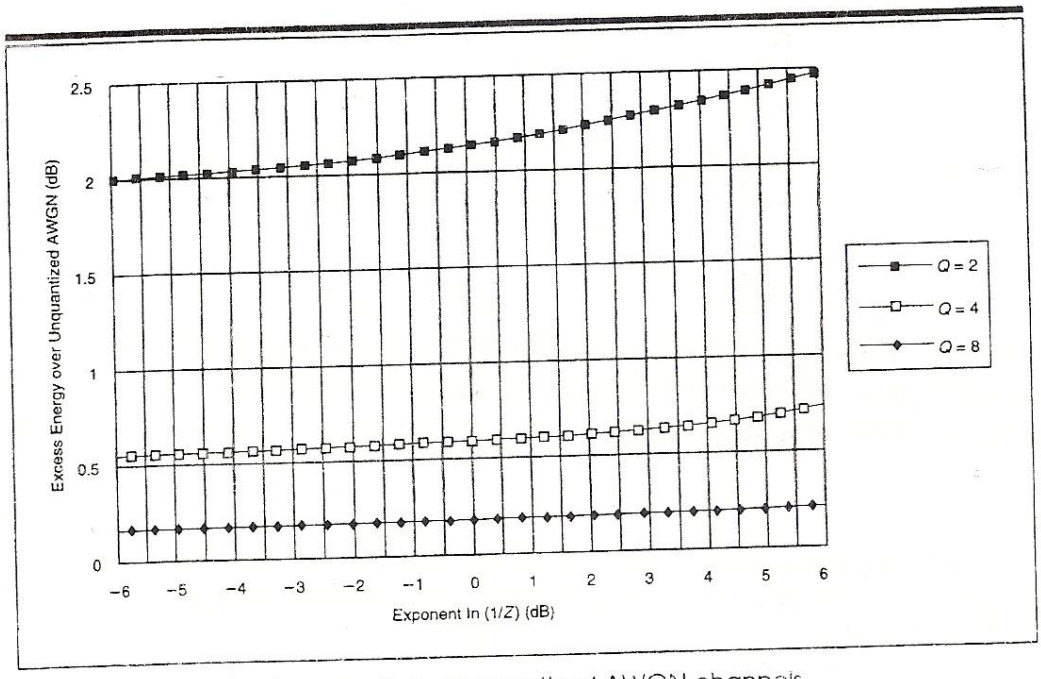



**Figure 5.14** Required excess $E_b/I_0$ for quantized AWGN channels.

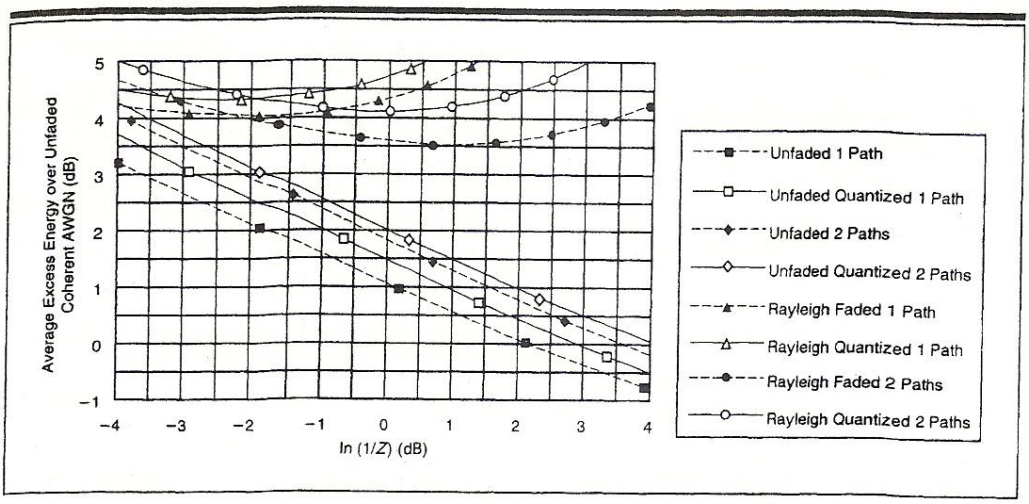



**Figure 5.15** Required excess $E_b/I_0$ (dB) for noncoherent demodulation of orthogonal signals ($M = 64$) with and without quantization.

Προσέξτε ότι η υποβάθμιση μειώνεται από 2 dB για Q = 2 σε 0.2 dB για Q = 8. Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν για ασύμφωνα κανάλια με απόσβεση. Ως ένα παράδειγμα, η μετρική του (4.51), συμμετρικά κβαντοποιημένη σε 8 επίπεδα, απαιτεί περίσσια $E_b$ / $I_0$ σε decibel που φαίνεται στο Σχήμα 5.15. Οι αντίστοιχες μη κβαντοποιημένες καμπύλες του Σχήματος 4.8 φαίνονται επίσης ώστε να γίνει σύγκριση.

## 5.5 Μια σχεδόν βέλτιστη κατηγορία κωδίκων για πολλαπλή πρόσβαση σύμφωνου διάχυτου φάσματος

### 5.5.1 Εφαρμογή

Τώρα θα δείξουμε ότι το απλό παράδειγμα του Σχήματος 5.3, που το χρησιμοποιήσαμε σε όλο το κεφάλαιο, μπορεί να γενικευτεί σε μια δυνατή κατηγορία κωδίκων αυθαίρετου μήκους περιορισμού K και πολύ χαμηλού ρυθμού, που δίνει σχεδόν βέλτιστη επίδοση για σύμφωνα αποδιαμορφωμένα κανάλια, με μεγάλους συντελεστές διασποράς, W / R. Από τα 3 στάδια του κώδικα με K = 3, r = $\frac{1}{2}$ του Σχήματος 5.3, το πρώτο και το τελευταίο έχουν χτυπήματα που

πηγαίνουν και στις 2 εξόδους, ενώ το μεσαίο στάδιο έχει μόνο ένα χτύπημα προς μία έξοδο. Αν απομονώσουμε το μεσαίο στάδιο, βλέπουμε ότι ένα δεδομένο εισόδου 0 σε αυτό παράγει 2 σύμβολα εξόδου 00, ενώ ένα δεδομένο εισόδου 1 παράγει 10. Αυτά τα δύο ζεύγη συμβόλων εξόδου διαμορφώνουν ένα μπλοκ ορθογωνικό Hadamard-Walsh σύνολο με M = 2 κωδικές λέξεις.

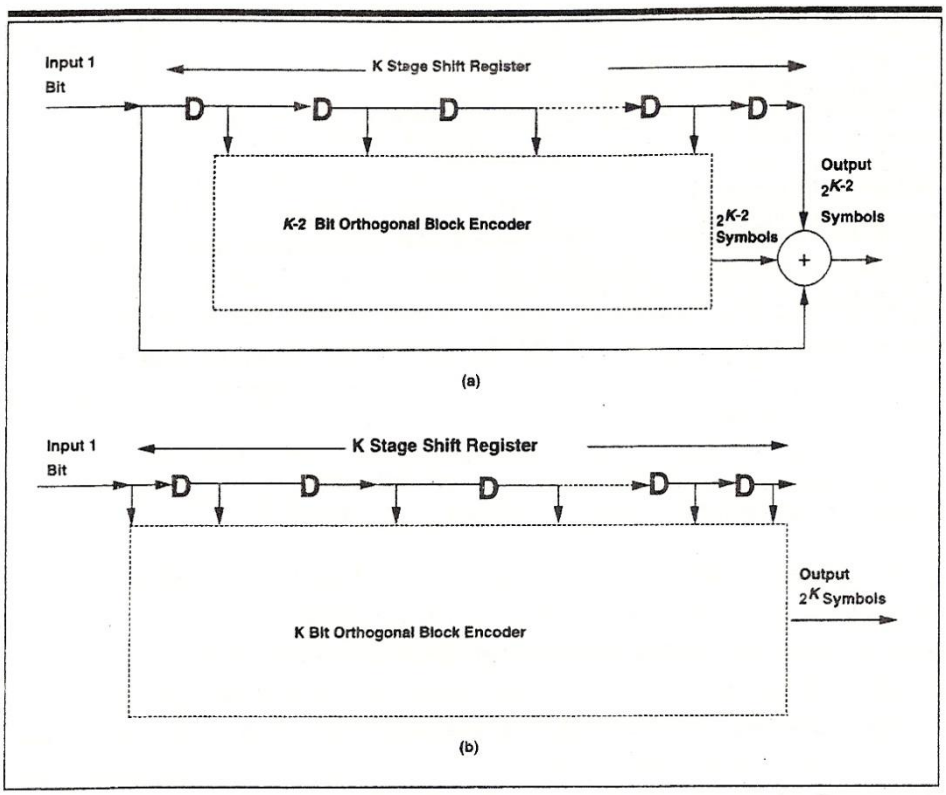



**Figure 5.16** (a) Superorthogonal convolutional encoder. (b) Orthogonal convolutional encoder.

Τώρα γενικεύουμε σε αυθαίρετο μήκος περιορισμού K, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.16a. Αποκλείουμε πάλι το πρώτο και το τελευταίο στάδιο και κάνουμε τα K – 2 εσωτερικά στάδια να οδηγήσουν ένα μπλοκ ορθογωνικό κωδικοποιητή K – 2 bit, του οποίου το εσωτερικό ρολόι λειτουργεί $2^{K-2}$ φορές πιο γρήγορα από το ρυθμός bit εισόδου (και το ρυθμό προσαρμογής) του συνελικτικού κωδικοποιητή. Έτσι, σε χρόνο ενός bit εισόδου ο μπλοκ ορθογωνικός (Hadamard-Walsh) κωδικοποιητής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.6 με J = K – 2, εξάγει μία από τις $2^{K-2}$ ορθογωνικές ακολουθίες με μήκος $2^{K-2}$. Για παράδειγμα, για K = 5, το Σχήμα 4.5

δείχνει $2^3 = 8$ ακολουθίες όρων πριν την επίδραση του πρώτου και τελευταίου σταδίου του συνελικτικού κωδικοποιητή. Τέλος, τα περιεχόμενα του πρώτου και τελευταίου σταδίου του συνελικτικού αποκωδικοποιητή είναι και τα δύο προστιθέμενα modulo-2 σε καθένα από τα $2^{K-2}$ σύμβολα της Hadamard-Walsh ακολουθίας. Ο προκύπτων συνελικτικός κώδικας ονομάζεται υπέρ-ορθογωνικός κώδικας [Zehavi και Viterbi, 1990; Viterbi, 1993a], σε αντίθεση με τον προηγούμενο [Viterbi, 1967b] πιο συμβατικό ορθογωνικό συνελικτικό κώδικα, στον οποίο το πρώτο και τελευταίο στάδιο επίσης οδηγούν τον μπλοκ ορθογωνικό κωδικοποιητή (Σχήμα 5.16b). Προσέξτε ότι ο ρυθμός κώδικα για την υπέρ-ορθογωνική κατηγορία είναι $r = 1 / 2^{K-2}$, ενώ για την ορθογωνική κατηγορία είναι $r = 1/2^K$. Προφανώς τέτοιοι κώδικες μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο με ένα σύστημα διάχυτου φάσματος, όπου ο ρυθμός κώδικα r μπορεί να είναι τόσο μικρός όσο το αντίστροφο του συντελεστή διασποράς. Για υπέρ-ορθογωνικούς κώδικες, το $2^{K-2}$ μπορεί να είναι τόσο μεγάλο όσο ο συντελεστής διασποράς. Μπορεί επίσης να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος διαιρέτης j αυτού, στην οποία περίπτωση κάθε κωδικό σύμβολο θα αποτελείται από j chip της ψευδοτυχαίας ακολουθίας. Για παράδειγμα, αν ο συντελεστής διασποράς είναι 128, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν K = 9 κώδικα από αυτήν την κατηγορία, αναθέτοντας ένα chip ανά σύμβολο, ή έναν K = 8 κώδικα, αναθέτοντας δύο chip ανά σύμβολο, ή έναν K = 7 κώδικα, αναθέτοντας 4 chip ανά σύμβολο κτλ. Για ορθογωνικούς συνελικτικούς κώδικες, ο συντελεστής διασποράς πρέπει να είναι τουλάχιστον $2^K$. Έτσι, σε αυτό το παράδειγμα μπορούμε να υποστηρίξουμε το πολύ K = 7, χρησιμοποιώντας ένα chip ανά σύμβολο.

## 5.5.2 Εφαρμογή του Αποκωδικοποιητή

Η εφαρμογή ενός αποδοτικού αποκωδικοποιητή μεγίστης πιθανοφάνειας για τον κωδικοποιητή του Σχήματος 5.16 φαίνεται στο Σχήμα 5.18.

| | | | |
|---|---|---|---|
| + + | + + | + + | + + |
| + − | + − | + − | + − |
| + + | − − | + + | − − |
| + − | − + | + − | − + |
| + + | + + | − − | − − |
| + − | + − | − + | − + |
| + + | − − | − − | + + |
| + − | − + | − + | + − |

**(a) Hadamard Code for $2^{K-2} = 8$**

| Input | Step 1 | Step 2 | Step 3 and Output |
|---|---|---|---|
| $y^1$ | $y^1 + y^2$ | $(y^1 + y^2) + (y^3 + y^4)$ | $[(y^1 + y^2) + (y^3 + y^4)] + [(y^5 + y^6) + (y^7 + y^8)]$ |
| $y^2$ | $y^1 - y^2$ | $(y^1 + y^2) - (y^3 + y^4)$ | $[(y^1 + y^2) + (y^3 + y^4)] - [(y^5 + y^6) + (y^7 + y^8)]$ |
| $y^3$ | $y^3 + y^4$ | $(y^1 - y^2) + (y^3 - y^4)$ | $[(y^1 + y^2) - (y^3 + y^4)] + [(y^5 + y^6) - (y^7 + y^8)]$ |
| $y^4$ | $y^3 - y^4$ | $(y^1 - y^2) - (y^3 - y^4)$ | $[(y^1 + y^2) - (y^3 + y^4)] - [(y^5 + y^6) - (y^7 + y^8)]$ |
| $y^5$ | $y^5 + y^6$ | $(y^5 + y^6) + (y^7 + y^8)$ | $[(y^1 - y^2) + (y^3 - y^4)] + [(y^5 - y^6) + (y^7 - y^8)]$ |
| $y^6$ | $y^5 - y^6$ | $(y^5 + y^6) - (y^7 + y^8)$ | $[(y^1 - y^2) + (y^3 - y^4)] - [(y^5 - y^6) + (y^7 - y^8)]$ |
| $y^7$ | $y^7 + y^8$ | $(y^5 - y^6) + (y^7 - y^8)$ | $[(y^1 - y^2) - (y^3 - y^4)] + [(y^5 - y^6) - (y^7 - y^8)]$ |
| $y^8$ | $y^7 - y^8$ | $(y^5 - y^6) - (y^7 - y^8)$ | $[(y^1 - y^2) - (y^3 - y^4)] - [(y^5 - y^6) - (y^7 - y^8)]$ |

**(b) Hadamard Code Metric Generator**

**Figure 5.17** Example of decoder metric implementation for $K = 5$. (a) Hadamard code for $2^{K-2} = 8$. (b) Hadamard code metric generator.

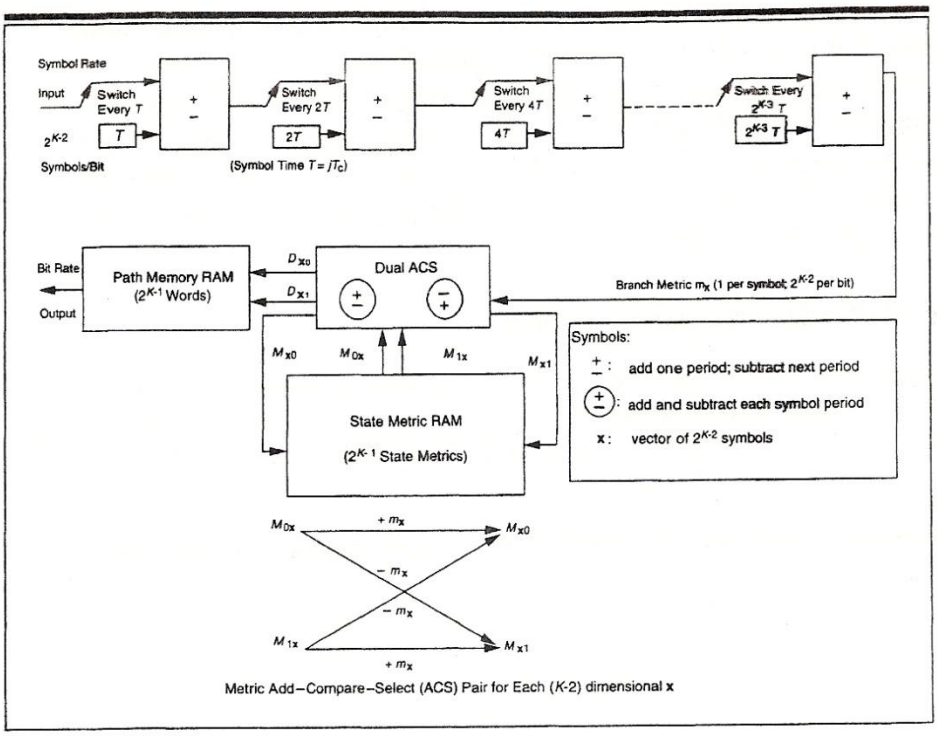



**Figure 5.18** Superorthogonal decoder implementation.

Γίνεται καλύτερα κατανοητό εξετάζοντας τις μετρικές που θα παραχθούν στην περίπτωση K= 5($2^{K-2}$ = 8) ορθογωνικών σημάτων για τον Hadamard-Walsh ορθογωνικό κώδικα που φαίνεται στο Σχήμα 5.17a. Δεδομένου ότι τα 8 δεδομένα εξόδου του σειριακού BPSK μόντεμ είναι $y_1$, …, $y_8$, ο αποκωδικοποιητής μεγίστης πιθανοφάνειας πρέπει να παράγει τις 8 μετρικές που φαίνονται στην τρίτη (τελευταία) στήλη του Σχήματος 5.17b. Όπως φαίνεται στο σχήμα, αυτές μπορούν να παραχθούν σε K – 2 = 3 βήματα, τα οποία μπορούν να εφαρμοστούν από τον K – 2 επεξεργαστή σταδίων στην κορυφή του Σχήματος 5.18. Προσέξτε ότι αυτό το τμήμα του αποκωδικοποιητή μοιάζει με το κεντρικό (K - 2) τμήμα του κωδικοποιητή με mod-2 αθροιστές που αντικαθίστανται από (πραγματικούς) αθροιστές και αφαιρέτες, αλλά με τον ίδιο συνολικό αριθμό λειτουργιών. Αν αυτός ήταν ένας ορθογωνικός μπλοκ κώδικας, οι $2^{K-2}$ μετρικές τότε θα συγκρίνονταν για να επιλεγεί η μεγαλύτερη. Αλλά για τον συνελικτικό αποκωδικοποιητή του Σχήματος 5.18, κάθε μετρική που παράγεται έτσι αναπαριστά τη μετρική κλάδου που θα προστεθεί και θα αφαιρεθεί από μία από τις

$2^{K-1}$ μετρικές κατάστασης του συνελικτικού κώδικα. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση (K – 2 = 3), η μετρική $m_x$, που αντιστοιχεί στο δεδομένο εισόδου x με 3-bit, πρέπει να προστεθεί και να αφαιρεθεί από τις μετρικές κατάστασης $M_{ox}$ και $M_{1X}$. Τα αποτελέσματα πρέπει να συγκριθούν για να επιλέξουμε την εναπομένουσα διαδρομή σε κάθε διακλάδωση (βλέπε Ενότητα 5.3.2). Οι λειτουργίες προθήκη-σύγκριση-επιλογή (ACS) φαίνονται στο διάγραμμα στο κάτω μέρος του Σχήματος 5.18, που αναπαριστά τη λειτουργία που απαιτείται για καθένα από τα $2^{K-2}$ = 8 ACS ζεύγη. Το υπόλοιπο του Σχήματος 5.18 δείχνει την εφαρμογή του συνελικτικού (Viterbi) αποκωδικοποιητή ως μια σειριακή λειτουργία που επαναλαμβάνεται $2^{K-2}$ φορές για κάθε ACS ζεύγος. Σε κάθε βήμα, οι δύο ενημερωμένες μετρικές κατάστασης τοποθετούνται πίσω στους κατάλληλους καταχωρητές της μετρικής μνήμης $2^{K-1}$ καταχωρητών κατάστασης. Οι αποφάσεις τρέφονται στη μνήμη διαδρομής, η οποία επίσης περιλαμβάνει $2^{K-1}$ καταχωρητές, έναν για καθεμία από τις καταστάσεις, κάθε μήκος βρίσκεται στην τάξη του 5K. Η τελική απόφαση λαμβάνεται με έναν τυπικό αλγόριθμο (chain-back)αλυσίδας εκτέλεσης προς τα πίσω που περιγράφεται στην Ενότητα 5.3.2. Η μεγαλύτερη εφαρμογή του ACS και των αποφάσεων αλυσίδας εκτέλεσης προς τα πίσω είναι τυπική σε όλους τους δυαδικούς συνελικτικούς Viterbi αποκωδικοποιητές, αλλά η φύση του κώδικα του δίνει μεγαλύτερη κανονικότητα στην παραγωγή μετρικών κλάδου.

Είναι σημαντικό όλες οι λειτουργίες να γίνονται στην ταχύτητα του ρολογιού του συμβόλου και μετρώντας τη διπλή ACS σαν 4 αθροιστές και αφαιρέτες, υπάρχουν ακριβώς K + 2 προσθήκες ή αφαιρέσεις ανά χρόνο συμβόλου. Έτσι, η πολυπλοκότητα του επεξεργαστή (ή απαίτηση ταχύτητας) του αποκωδικοποιητή αυξάνει μόνο γραμμικά με το K, αν και η μετρική και οι μνήμες διαδρομής αυξάνουν εκθετικά. Δεδομένου ότι ο κωδικοποιητής πρέπει επίσης να έχει επίδοση μέχρι K modulo-2 προσθήκες ανά σύμβολο, η πολυπλοκότητα του επεξεργαστή του αποκωδικοποιητή είναι μεγαλύτερη από εκείνη του κωδικοποιητή μόνο από την άποψη ότι η προσθήκη πραγματικού αριθμού (ή αφαίρεση) αντικαθιστά την

modulo-2 προσθήκη. Για πολλαπλή πρόσβαση διάχυτου φάσματος (ή διαίρεσης κώδικα), ο ρυθμός συμβόλου θα μπορούσε να μην είναι μεγαλύτερος του ρυθμού του chip, αλλά θα μπορούσε να είναι ακέραιος διαιρέτης j αυτού. Έτσι, κάθε σύμβολο περιέχει j chip ($j \geq 1$) και ο ρυθμός ρολογιού του αποκωδικοποιητή για όλες τις λειτουργίες που φαίνονται είναι 1 / j του ρυθμού ρολογιού του ολισθητή ψευδοτυχαίας ακολουθίας.

## 5.5.3 Δημιουργία Συνάρτησης και Επίδοση

Ένα εκπληκτικό χαρακτηριστικό αυτής της κατηγορίας κωδίκων είναι ότι χαρίζει ανώτερη επίδοση και κάνει την ανάλυσή τους ιδιαίτερα απλή: Κάθε εσωτερική διακλάδωση του επισημασμένου διαγράμματος κατάστασης (γενίκευση του Σχήματος 5.6) έχει το ίδιο βάρος (απόσταση από την αντίστοιχη διακλάδωση στη διαδρομή με τα μηδενικά ή γενικά ανάμεσα στις αντίστοιχες διακλαδώσεις των ασυγχώνευτων διαδρομών στη δικτύωση). Για K = 3 και $r = \frac{1}{2}$, αυτό το βάρος w = 1, και γενικά $w = 2^{K-3} = 1 / (2r)$, εφόσον δύο ορθογωνικές ακολουθίες διαφέρουν κατά ακριβώς μισά από τα σύμβολά τους.

Αντί να χρησιμοποιήσουμε τη συμβατική προσέγγιση της Ενότητας 5.3, βρίσκουμε τη γεννήτρια συνάρτηση με μια απλούστερη μέθοδο χάρη στον Mc Eliece et al. [1989]. Εξετάζουμε το σύνολο όλων των διαδρομών που αποκλίνουν από τα μηδενικά σε κάποιο σημείο κι επιστρέφουμε εκεί σε οποιοδήποτε μετέπειτα χρόνο, τουλάχιστον K διακλαδώσεις μετά. Η συσσωρευμένη απόσταση είναι ακριβώς $w = 2^{K-3} = 1 / (2r)$ για κάθε διανυμένη διακλάδωση. Τρεις εξαιρέσεις μπορούν εύκολα να παρατηρηθούν από το Σχήμα 5.16a και να φανούν στο Σχήμα 5.19a:

(α) Η πρώτη διακλάδωση μόλις αποκλίνει από όλα τα μηδενικά. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένα μοναδικό 1 στο πρώτο στάδιο, ο μπλοκ κώδικας παράγει μόνο μηδενικά, κι έτσι τα δεδομένα εξόδου μετά την mod-2 προσθήκη είναι όλα «ένα». Έτσι, η πρώτη διακλάδωση έχει βάρος $2w = 2^{K-2} = 1 / r$.

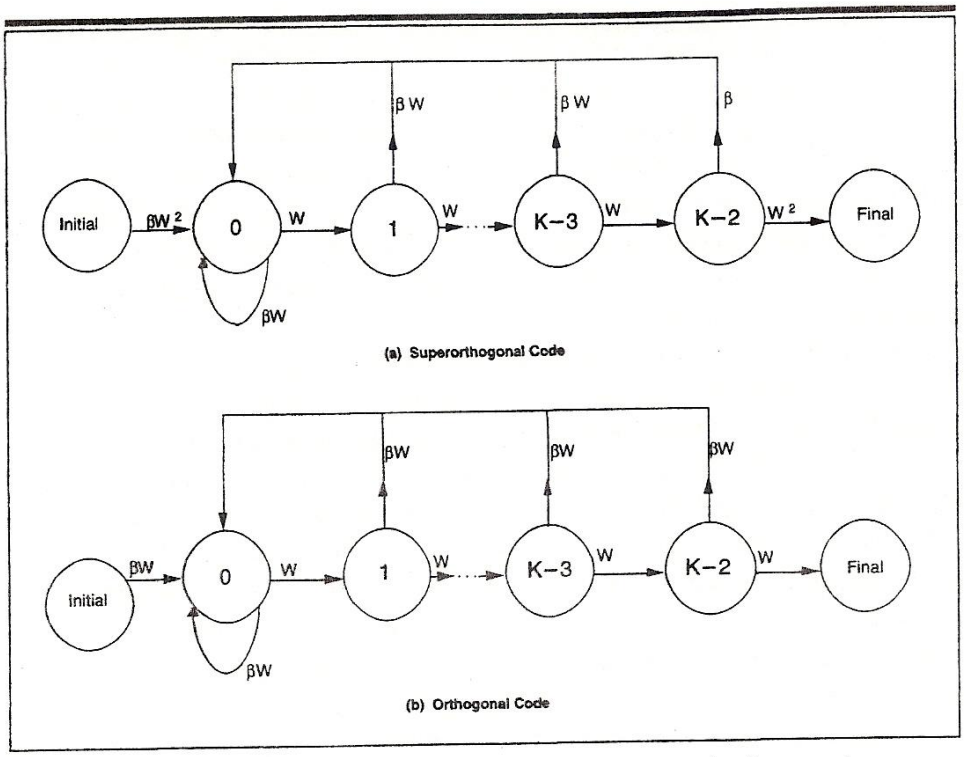



**Figure 5.19** Reduced state diagrams for superorthogonal and orthogonal convolutional codes. (a) Superorthogonal code. (b) Orthogonal code.

(β) Η τελευταία διακλάδωση ακριβώς πριν επανασυγχωνευτεί σε εκείνη με τα μηδενικά. Το μόνο 1 βρίσκεται στο τελευταίο στάδιο και τα δεδομένα εξόδου του mod-2 αθροιστή είναι πάλι όλα «ένα» για ένα βάρος $2w = 2^{K-2} = 1 / r$.

(γ) Η διακλάδωση που οδηγεί από την κατάσταση 100 ... 0 (τελευταία πριν την πιθανή επανασυγχώνευση) προς την κατάσταση 00 ... 01 (ίδια όπως η πρώτη μετά την απόκλιση). Εδώ, το πρώτο και τελευταίο στάδιο έχουν «ένα» και όλα τα κεντρικά στάδια έχουν μηδενικά. Σε αυτή την περίπτωση, τα δεδομένα εξόδου του μπλοκ ορθογωνικού κωδικοποιητή είναι μηδενικά και παραμένουν έτσι αφού κάθε σύμβολο προστεθεί στο mod-2 διαδοχικά σε δύο «ένα». Το προκύπτον βάρος είναι μηδέν. (βλ. επίσης Σχήμα 5.4 για K = 3)

Τώρα αντί να δείξουμε τις προηγούμενες πληροφορίες σε ένα συμβατικό διάγραμμα $2^{K-1}$ κατάστασης, μπορούμε να το δείξουμε στο απλό K + 1 διάγραμμα μειωμένης κατάστασης του Σχήματος 5.19. Εδώ παρακολουθούμε τον αριθμό των διαδοχικών μηδενικών

στη ροή bit δεδομένων εισόδου, τα οποία ακολουθούν το 1 που προκάλεσε την απόκλιση από τα μηδενικά. Έτσι, μαζί με τον αρχικό (αποκλίνων) κόμβο και τον τελικό (επανασυγχωνευόμενο) κόμβο, έχουμε εσωτερικούς κόμβους επισημασμένους με ακέραια 0 προς K – 2, που αντιστοιχούν στον αριθμό των διαδοχικών μηδενικών που ακολουθούν το 1. Χρειάζονται K – 1 τέτοια μηδενικά για να επανασυγχωνευτεί επιστρέφοντας στην κατάσταση με τα μηδενικά. Έτσι, η μικρότερη ασυγχώνευτη διαδρομή είναι πάντα μήκους K, που αντιστοιχεί σε ένα 1 που ακολουθείται από K – 1 μηδενικά, πράγμα που φαίνεται να είναι η άμεση διαδρομή από τον αρχικό στον τελικό κόμβο. Οι διακλαδώσεις σε αυτή τη διαδρομή είναι όλες βάρους w εκτός από την πρώτη και την τελευταία, που όπως σημειώθηκε νωρίτερα έχουν βάρος 2w. Μόνο η πρώτη έχει ένα δεδομένο εισόδου 1. Για διευκόλυνση συμβολισμού συμβολίζουμε

$$W \triangleq \delta^{w} = \delta^{2^{\kappa-3}} = \delta^{1/(2r)} \tag{5.42}$$

Έτσι, η πρώτη διακλάδωση σε αυτή την άμεση διαδρομή έχει ετικέτα $\beta W^2$, η τελευταία $W^2$ και όλες οι ενδιάμεσες W. Για οποιονδήποτε εσωτερικό κόμβο, αν ένα 1 είναι δεδομένο εισόδου προς τον αποκωδικοποιητή, πρέπει να επιστρέψουμε στον πρώτο εσωτερικό κόμβο με ετικέτα 0, που δεν δείχνει κανένα μηδενικό να έχει ακόμη ακολουθήσει ένα 1. Μια τέτοια διακλάδωση σε κάθε περίπτωση έχει ετικέτα βW, εκτός από την τελευταία διακλάδωση: κατ' εξαίρεση το (γ) παραπάνω έχει μηδενικό βάρος κι έτσι, έχει ετικέτα απλώς β. Η γεννήτρια συνάρτηση μεταφοράς αυτού του γραφήματος βρίσκουμε εύκολα ότι είναι

$$\begin{aligned} T_{SO}(W,\beta) &= \frac{\beta W^{K+2}}{1-\beta(W+W^2+\ldots..+W^{K-3}+2W^{K-2})} \\ &= \frac{\beta W^{K+2}}{1-\frac{\beta W(1-W^{K-2})}{1-W}-\beta W^{K-2}} \\ &= \frac{\beta W^{K+2}(1-W)}{1-W[1+\beta(1+W^{K-3}-2W^{K-2}} \end{aligned} \tag{5.43}$$

Αυτή η παράσταση φαντάζει άβολη, αλλά οι παραστάσεις για την πιθανότητα σφάλματος είναι κάπως απλοποιημένες επειδή το β ορίζεται στην ενότητα σε T(W, β) και dT(W, β)/dβ. Τα προκύπτοντα φράγματα για πιθανότητα σφάλματος t μπλοκ B-bit και για πιθανότητα σφάλματος bit βρίσκονται ορίζοντας β = 1 και δ = Z, στις δύο παραστάσεις. Αυτό δείχνει μέσω του (5.42) ότι

$$W = Z^{1/2r} = \exp\left[-\ln(1/Z)/(2r)\right]$$

(5.44)

Έτσι, για W που δίνεται από το (5.44),

$$\mathrm{P_E} < \mathrm{BT_{SO}(W)}$$

$$= \frac{\mathrm{BW^{K+2}}}{1-2\mathrm{W}}\left(\frac{1-\mathrm{W}}{1-\mathrm{W^{K-2}}}\right) \qquad (5.45)$$

και

$$P_b < \left.\frac{dT_{SO}(W,\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=1} \qquad (5.46)$$

$$= \frac{\mathrm{W^{K+2}}}{(1-2W)^2}\left(\frac{1-W}{1-\mathrm{W^{K-2}}}\right)^2$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε περαιτέρω αυτά τα φράγματα παραλείποντας τον δεύτερο παράγοντα σε κάθε περίπτωση, σημειώνοντας ότι εφόσον W < 1 και K≥3, (1 - W) / (1 – $W^{K-2}$) ≤ 1. [Προφανώς, για K =3 ο λόγος είναι ενότητα και οι παραστάσεις μειώνονται σε (5.24), (5.25) και (5.27)].

Τα Σχήματα 5.20 και 5.21 είναι διαγράμματα της πιθανότητας σφάλματος του μειωμένου 100-bit μπλοκ και της πιθανότητας σφάλματος bit, που βρήκαμε αντίστοιχα από το (5.45) και το (5.46), για K = 3 έως 10, ως μια συνάρτηση του ln(1 / Z)/ r, που ισούται με $E_b$ / $I_0$ για ένα σύμφωνο Gaussian κανάλι.

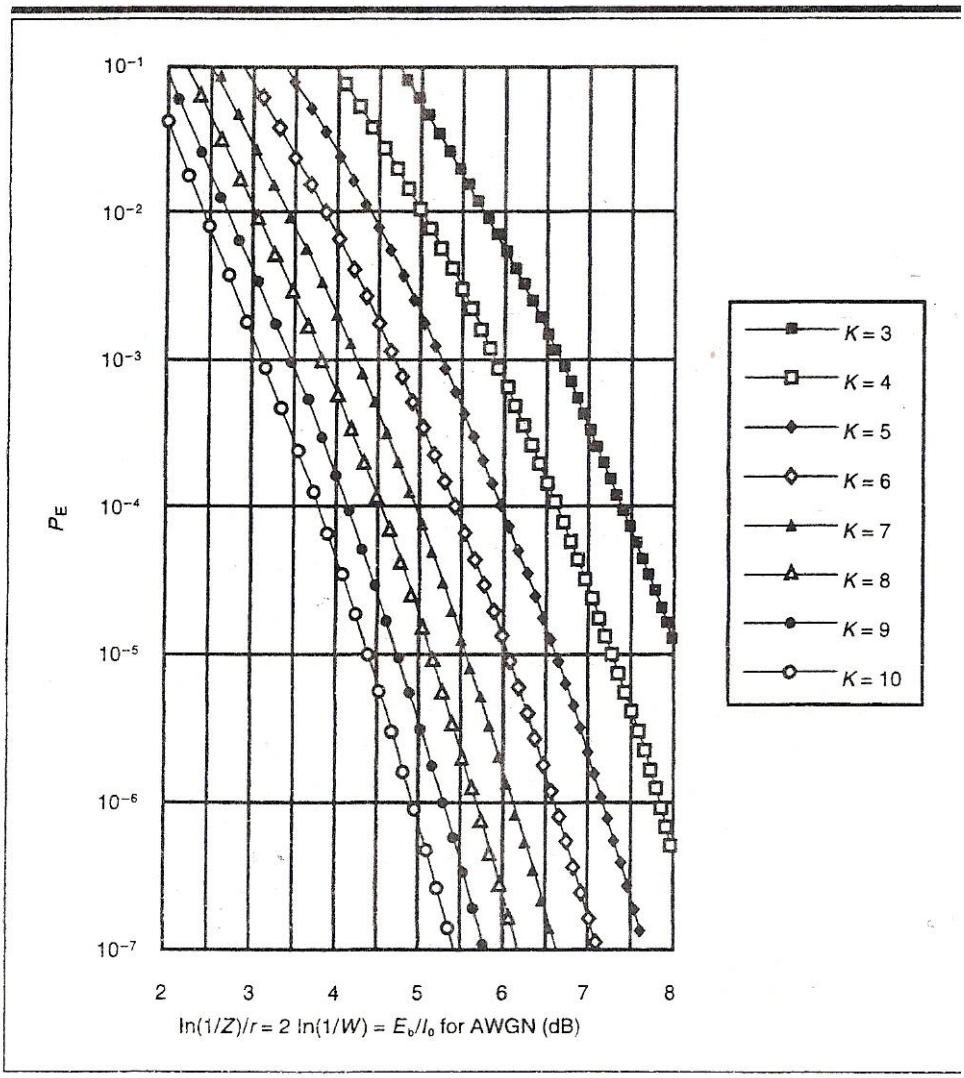



**Figure 5.20** 100-bit block error probability bounds for superorthogonal codes ($K$ = 3 to 10).

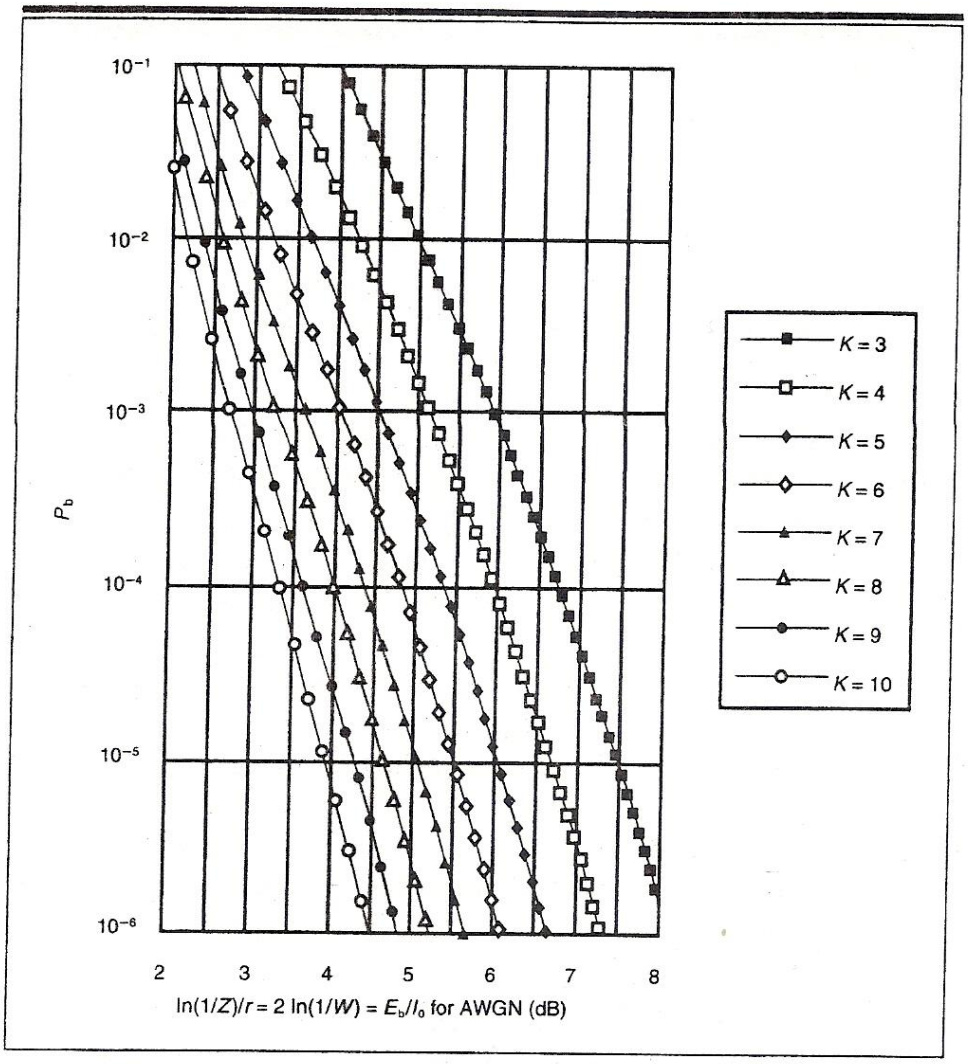



**Figure 5.21** Bit error probability bounds for superorthogonal codes ($K$ = 3 to 10).

Όλη αυτή η ανάπτυξη ισχύει ακόμη σε ορθογωνικούς συνελικτικούς κώδικες (Σχήμα 5.16b). Για αυτή την κατηγορία χαμηλότερου ρυθμού ($r= 2^{-K}$), δεν ισχύει καμία από τις τρεις εξαιρέσεις. Επομένως, όλες οι διακλαδώσεις του διαγράμματος μειωμένης κατάστασης (Σχήμα 5.19b) έχουν ίσο βάρος $w = 2^{K-1} = 1 / (2r)$. Έστω πάλι ότι $W = \delta^W$, βρίσκουμε από το τελευταίο διάγραμμα τη γεννήτρια συνάρτηση για έναν ορθογωνικό συνελικτικό κώδικα μήκους περιορισμού K,

$$T_O(W, \beta) = \frac{\beta W^K (1-W)}{1-W[1+\beta(1-W^{K-1})]} \qquad (5.47)$$

Έστω ότι β = 1 για T και dT/dβ, βρίσκουμε πιθανότητα σφάλματος μπλοκ B-bit και φράγματα πιθανότητας σφάλματος bit για ορθογωνικούς συνελικτικούς κώδικες, με W να δίνεται πάλι από το (5.44), αλλά με r = 1 / $2^K$:

$$\mathrm{P_E} < B\mathrm{T_O}(\mathrm{W}) = \frac{\mathrm{BW^K}(1-\mathrm{W})}{1-2\mathrm{W}+\mathrm{W^K}} < \frac{\mathrm{BW^K}(1-\mathrm{W})}{1-2\mathrm{W}} \tag{5.48}$$

$$\mathrm{P_b} < \left.\frac{\mathrm{dT_O}(\mathrm{W},\beta)}{\mathrm{d}\beta}\right|_{\beta=1} = \frac{\mathrm{W^K}(1-\mathrm{W})^2}{(1-2\mathrm{W}+\mathrm{W^K})^2} < \frac{\mathrm{W^K}(1-\mathrm{W})^2}{(1-2\mathrm{W})^2} \tag{5.49}$$

Είναι εμφανές από τη σύγκριση των (5.48)και (5.49) με το (5.45) και (5.46) ότι τα υπέρ-ορθογωνικά φράγματα ακόμη ισχύουν (με λίγο περαιτέρω περιορισμό) για ορθογωνικούς συνελικτικούς κώδικες, αλλά με μήκος περιορισμού μειωμένο από K σε K – 2. Για παράδειγμα, οι καμπύλες στα Σχήματα 5.20 και 5.21 για K = 7 ισχύουν επίσης ως φράγματα για ορθογωνικούς συνελικτικούς κώδικες για K = 9.

Για τα σύμφωνα κανάλια με απόσβεση που μελετήθηκαν στην Ενότητα 4.4, όλα τα φράγματα ισχύουν, αλλά πρέπει να αυξήσουμε το $E_b$ / $I_0$ για το AWGN κανάλι κατά το ποσό που φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Προσέξτε συγκεκριμένα ότι για μέτρια μεγάλο K,το r είναι μικρό. Έτσι, για λογικές τιμές του $E_b$ / $I_0$, το ίδιο ισχύει και για το In(1 / Z). Σε εκείνη την περίπτωση η τετμημένη του Σχήματος 4.4 γίνεται αρνητική σε decibel και το περίσσιο $E_b$ / $I_0$ γίνεται μικρό. Αυτό δεν θα συμβεί για ασύμφωνα κανάλια (Ενότητα 4.5). Αν καταστήσουμε το In(1 / Z) πολύ μικρό, που αντιστοιχεί σε πολύ μικρό r, αυτό οδηγεί σε μια αύξηση της περίσσιας ενέργειας που απαιτείται, κυρίως λόγω της ασύμφωνης συνδυαστικής απώλειας. Στην Ενότητα 5.6 , θα εξετάσουμε τις διακυμάνσεις αυτής της προσέγγισης χρησιμοποιώντας ορθογωνικούς συνελικτικούς κώδικες που μπορούν να εφαρμοστούν σε ασύμφωνα κανάλια. Πρώτα, όμως, συγκρίνουμε την επίδοση υπέρ-ορθογωνικών κωδίκων με συγκεκριμένα όρια.

## 5.5.4 Σύγκριση επίδοσης και εφαρμογής

Τα Σχήματα 5.11 και 5.12 δείχνουν ότι οι υπέρ-ορθογωνικοί κώδικες ξεπερνούν σε επίδοση τους καλύτερους συνελικτικούς κώδικες υψηλότερου ρυθμού ( $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ ) σε χαμηλές $E_b$ / $I_0$ τιμές, αλλά με ένα φθίνον μικρότερο περιθώριο για αυξανόμενα υψηλότερες τιμές. Σε χαμηλότερες τιμές φαίνεται ότι είναι συμπτωματικά βέλτιστοι για το σύμφωνο Γκαουσιανό κανάλι, καθώς το μήκος περιορισμού K → ∞. Στην πραγματικότητα, όπως με τη λιγότερο σχεδόν βέλτιστη κατηγορία ορθογωνικών συνελικτικών κωδίκων, η πιθανότητα σφάλματός τους προσεγγίζει το μηδέν εκθετικά με K, τόσο μακρύ όσο το $E_b$ / $I_0$ > In 2(-1.6 dB). Αυτό είναι το όριο Shannon [Shannon, 1949] για μη πεπερασμένο εύρος ζώνης καναλιών.

Σε υψηλό $E_b$ / $I_0$, όμως, η πιθανότητα σφάλματος κυριαρχείται από τον πρώτο όρο του φράγματος ενότητας Chernoff που εκφράζεται με τη μορφή της γεννήτριας συνάρτησης, T(W, β) ή παράγωγού της. Τώρα εξετάζουμε πόσο κοντά προσεγγίζουμε τη βέλτιστη επίδοση σε υψηλό $E_b$ / $I_0$, ή γενικά, μεγάλο In(1 / Z)/r. Εξετάζουμε πρώτα το προσθετικό Gaussian κανάλι χωρίς κωδικοποίηση, για το οποίο

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\,E_b/I_0}\right) \sim e^{-E_b/I_0} \tag{5.50}$$

Με έναν υπέρ-ορθογωνικό κώδικα μήκους περιορισμού K, ο οδηγός όρος του φράγματος πιθανότητας σφάλματος bit είναι, από το (5.46):

$$P_b \sim W^{K+2} = e^{-(K+2)\ln\,(1/W)} \tag{5.51}$$

Για το Gaussian κανάλι,

$$\ln(1/W) = \ln\,(1/Z)/(2r) = (E_s/I_0)/2r = \tag{5.52}$$

$$= (E_b/I_0)/2$$

Έτσι, για μεγάλο $E_b$ / $I_0$, όπου ο οδηγός όρος κυριαρχεί, ορίζουμε το λόγο των εκθετών των κωδικοποιημένων και μη κωδικοποιημένων πιθανοτήτων (5.51) και (5.52) ως το ασυμπτωματικό κέρδος

κωδικοποίησης (ACG). Έτσι, για υπέρ-ορθογωνικούς συνελικτικούς κώδικες,

$$ACG = \frac{(K+2)\ln(1/W)}{E_b/I_0} = \frac{K+2}{2} \tag{5.53}$$

ενώ για ορθογωνικούς κώδικες είναι μόνο K / 2.

Για οποιοδήποτε συνελικτικό κώδικα ρυθμού r και ελεύθερη απόσταση (ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε ασυγχώνευτες κωδικές λέξεις) $d_f$, ο οδηγός όρος της γεννήτριας συνάρτησης πιθανότητας σφάλματος bit είναι

$$P_b \sim AZ^{d_f} = Ae^{-d_f \ln(1/Z)}$$

Εδώ, A είναι ο αριθμός των διαδρομών που επανασυγχωνεύονται με ελεύθερη απόσταση από τη σωστή διαδρομή σε οποιοδήποτε κόμβο, καθεμία σταθμισμένη με τον αριθμό των bit, κατά τα οποία διαφέρει από τη σωστή διαδρομή. Έτσι, για το Gaussian κανάλι, παραμελώντας την πολλαπλασιαστική σταθερά A, καθώς το K και συνεπώς, το $d_f$ γίνονται μεγάλα,

$$\mathrm{ACG} = \frac{\mathrm{d_f E_s/I_0}}{\mathrm{E_b/I_0}} = \mathrm{d_f r} \tag{5.54}$$

[Πιο γενικά, θα είχαμε το In(1 / Z) να αντικαθιστά το $E_s$ / $I_0$ και το In(1 / Z)/r να αντικαθιστά το $E_b$ / $I_0$.]

Το Παράρτημα 5B δείχνει ότι, για οποιοδήποτε ρυθμό 1 / n συνελικτικού κώδικα, το ACG έχει ανώτερο φράγμα που ορίζεται από την παράσταση

$$AGC = \mathrm{d_f r} \leq \underset{k}{Min} \frac{(K+k-1)2^{k-1}}{2^k-1} \tag{5.55}$$

Προσέξτε, για παράδειγμα, ότι για K = 7, r = $\frac{1}{2}$, ACG $\leq$ 5.14. Όμως, για ένα κώδικα ρυθμού $\frac{1}{2}$, το ACG μπορεί να είναι μόνο ένας ακέραιος ή ένας ακέραιος συν ένα-δεύτερο, κι έτσι σε αυτή την περίπτωση ACG $\leq$ 5 (7 dB). (Το άνω φράγμα επιτυγχάνεται από τον κώδικα του Πίνακα 5.1 που χρησιμοποιείται στα Σχήματα 5.11 και 5.12.) Από την

άλλη πλευρά, ο υπέρ-ορθογωνικός κώδικας για K = 7 πετυχαίνει μόνο ACG = 4.5 (6.5 dB). Προσέξτε στο Σχήμα 5.11 ότι για πολύ μεγάλες τιμές τετμημένης, το φράγμα πιθανότητας σφάλματος του υπέρ-ορθογωνικού κώδικα ξεπερνά εκείνο του κώδικα ρυθμού $\frac{1}{3}$ για K = 7 και 9. Σε χαμηλότερες τιμές, όμως, ο μικρός συντελεστής του οδηγού όρου και των ακόλουθων όρων για τον υπέρ-ορθογωνικό κώδικα κάνει το φράγμα του σημαντικά χαμηλότερο. Αν k = 3 στο (5.55), κι έτσι, χαλαρώνοντας το άνω φράγμα, φαίνεται εύκολα ότι για οποιοδήποτε K,

$$\frac{\text{AGC( σούπερ ορθογωνικό)}}{\text{Μέγιστο AGC}} \geq \frac{7}{8} \qquad (5.56)$$

Έτσι, το υπέρ-ορθογωνικό ασυμπτωματικό κέρδος κωδικοποίησης είναι πάντα εντός 0.6 dB από το μέγιστο δυνατό.

Τέλος, όπως ήδη σημειώσαμε, οι υπέρ-ορθογωνικοί κώδικες απαιτούν πολύ χαμηλούς ρυθμούς κώδικα ακόμη και για μέτριες τιμές του K. Έτσι, για λογικές τιμές του $E_b / I_0$= In(1 / Z) / r, το In(1 / Z) είναι πολύ μικρό ή αρνητικό σε decibel. Για σύμφωνα κανάλια, ακόμη και με απόσβεση (Σχήμα 4.4), το απαιτούμενο επαυξητικό $E_b / I_0$ μειώνεται καθώς μειώνεται το In(1 / Z), αρκεί η διεμπλοκή του συμβόλου να είναι επαρκής. Για ασύμφωνη αποδιαμόρφωση (Σχήμα 4.8), το $E_b / I_0$ αυξάνει καθώς το In(1 / Z) γίνεται αρνητικό σε decibel λόγω της ασύμφωνης συνδυαστικής απώλειας. Έτσι, σε τέτοια κανάλια, η επίδοση αυτής της κατηγορίας κωδίκων στην πραγματικότητα υποβαθμίζεται με αυξανόμενο K. Στην επόμενη Ενότητα, δείχνουμε ότι με την κατάλληλη διαμόρφωση, οι ορθογωνικοί συνελικτικοί κώδικες θα παρέχουν βελτιωμένη επίδοση με αυξανόμενο K ακόμη και με σύμφωνη αποδιαμόρφωση.

## 5.6 Ορθογωνικοί συνελικτικοί κώδικες για ασύμφωνη αποδιαμόρφωση Rayleigh σημάτων με απόσβεση

### 5.6.1 Εφαρμογή

Όπως μόλις σημειώσαμε, με την ασύμφωνη αποδιαμόρφωση ένας κώδικας πολύ μικρού ρυθμού υποβαθμίζεται υπερβολικά από την απώλεια σε ασύμφωνο συνδυασμό, ακυρώνοντας τμήμα ή όλο το κέρδος κωδικοποίησής του. Για να διατηρήσουμε μικρή έως μέτρια αυτή τη συνδυαστική απώλεια, η ενέργεια σε κάθε σύμβολο πρέπει να είναι στην τάξη του $E_b$. Όπως στο Κεφάλαιο 4, μπορούμε να το πετύχουμε αυτό επιλέγοντας ένα από τα M ορθογωνικά σήματα, αφού αθροίσουμε $\log_2 M$ αρχικά δυαδικά σύμβολα και διατηρήσουμε τη συμφωνία σε αυτόν τον M-αδικό χρόνο συμβόλου. Τώρα θα δείξουμε πώς αυτή η διαδικασία διαμόρφωσης μπορεί να συνδυαστεί με τον ορθογωνικό συνελικτικό κώδικα της τελευταίας ενότητας.

Ο ορθογωνικός συνελικτικός κωδικοποιητής του Σχήματος 5.16b παράγει για κάθε χρόνο bit μία από τις $M = 2^K$ Hadamard-Walsh ακολουθίες συμβόλων μήκους $2^K$, $x_1, x_2, \ldots, x_M$. Το Σχήμα 5.22 δείχνει ένα παράδειγμα δύο διαδρομών του διαγράμματος δικτύωσης του κώδικα στο ασυγχώνευτο διάστημά τους, για K = 6, M = 64, επισημασμένο σύμφωνα με την Hadamard-Walsh ακολουθία που παράχθηκε για κάθε διακλάδωση. Επειδή τα περιεχόμενα του καταχωρητή του συνελικτικού κωδικοποιητή πρέπει να είναι διαφορετικά για τις διακλαδώσεις των δύο διαδρομών σε αντίστοιχους χρόνους στο ασυγχώνευτο διάστημα, οι αντίστοιχες ακολουθίες εξόδου πρέπει να είναι διαφορετικές κι επομένως, ορθογωνικές. Η διεμπλοκή λαμβάνει χώρα στα K-bit μπλοκ που επιλέγουν τις Hadamard ακολουθίες για να διασφαλίσουν την ανεξαρτησία σε εκπομπές διαδοχικών ορθογωνικών σημάτων.

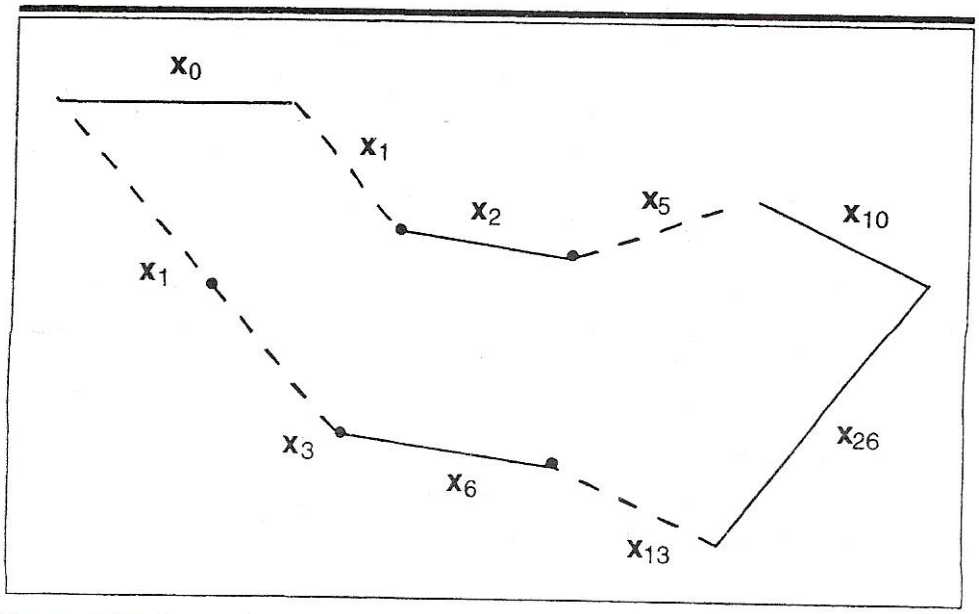



**Figure 5.22** Example of two unmerged paths of orthogonal convolutional code.

## 5.6.2 Επίδοση για Rayleigh απόσβεση σε L-διαδρομή

Ο ασύμφωνος αποκωδικοποιητής συσχετίζει σε κάθε ακολουθία για κάθε διακλάδωση για τις φάσεις I και Q. Έπειτα, διαμορφώνει το άθροισμα των τετραγώνων. Αν L ίσες Rayleigh διαδρομές με απόσβεση παρακολουθούνται, οι ενέργειές τους αθροίζονται για να διαμορφώσουν μια μετρική κλάδου z ανάλογη προς τη συνάρτηση log πιθανοφάνειας. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αν η ακολουθία του κώδικα στην j διακλάδωση είναι $x_n$, η πιθανοφάνεια των M δεδομένων εξόδου του ασύμφωνου αποδιαμορφωτή ορθογωνικού σήματος (αθροισμένο στις L διαδρομές) είναι

$$p_n(z_1, \ldots\ldots, z_M) = p(z_n) \prod_{m \neq n}^{M} p(z_m)$$

(5.57)

$$= p_C(z_n) \prod_{m \neq n}^{M} p_1(z_m)$$

όπου $p_c(z)$ και $p_l(z)$ δίνονται από τα (4.45) και (4.44), αντίστοιχα. Αν πάρουμε το λογάριθμο αυτού του γινομένου προκύπτει

$$lnp_n(z_1, \ldots\ldots, z_M) = z_n\, U/(1+U)$$

(5.58)

$$+\sum_{m=1}^{M}[-z_m + (L-1)lnz_m] + f(U, L)$$

Εδώ,

$$U = (\bar{E}_b/I_0)/L \qquad (5.59)$$

είναι η μέση ενέργεια bit-προς-την πυκνότητα παρεμβολής ανά διαδρομή (προσέχοντας ότι η ενέργεια bit ισούται με την Hadamard-Walsh ενέργεια συμβόλου σε αυτή την περίπτωση) και f(U, L) είναι μια συνάρτηση μόνο του U και του L. Αλλά ο δεύτερος και τρίτος όρος του (5.58) είναι ανεξάρτητοι από το n. Επομένως, για να μεγιστοποιήσουμε το (5.58) χρειάζεται μόνο να διατηρήσουμε την μετρική $z_n$ για τη διακλάδωση , στην οποία η ακολουθία του ορθογωνικού κώδικα ήταν $x_n$. Έστω ότι μια εσφαλμένη διαδρομή είναι ασυγχώνευτη από τη σωστή διαδρομή για d διακλαδώσεις, στην οποία περίπτωση όλα τα αντίστοιχα ζεύγη κλάδου είναι ορθογωνικά. Τώρα ας συμβολίσουμε τις μετρικές κλάδου στις σωστές κι εσφαλμένες διαδρομές $y_1, y_2, \ldots, y_d$ και $y'_1, y'_2, \ldots, y'_d$, αντίστοιχα. Φυσικά, όπως περιγράψαμε νωρίτερα, αν η εκπεμπόμενη Hadamard-Walsh ακολουθία για την j διακλάδωση (οποιασδήποτε διαδρομής) είναι $x_n$, τότε $y_i = z_n$ για εκείνη τη διακλάδωση. Η πιθανότητα ζεύγους σφάλματος κατά την επανασυγχώνευση είναι απλώς

$$P_d = P_r(\sum_{i=1}^{d} y_i' > \sum_{i=1}^{d} y_i) \qquad (5.60)$$

Η ανεξαρτησία στις διαδοχικές μετρικές κλάδου διασφαλίζεται με τη διεμπλοκή, όπως σημειώθηκε στην Ενότητα 5.6.1. Η ανεξαρτησία ανάμεσα σε μετρικές αντίστοιχων διακλαδώσεων της σωστής και εσφαλμένης διαδρομής οφείλεται στην ορθογωνικότητα. Τότε έχουμε το φράγμα Chernoff,

$$P_d < [e^{\rho} \sum_{i=1}^{d}(y_i' - y_i)] = \{E[e^{\rho(y'-y)}]\}^d$$

με

$$E\left[e^{\rho(y'-y)}\right] = \int_0^\infty e^{\rho y'} p_I(y')dy' \int_0^\infty e^{\rho y} p_I(y)dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{y'^{L-1}}{(L-1)!} e^{(\rho-1)y'} dy \int_0^\infty \frac{y^{L-1}}{(L-1)!} \frac{e^{-y[\rho+1/(1+U)]}}{(1+U)^L} dy$$

$$= \frac{1}{(L-1)^L} \frac{1}{[1+\rho(1+U)]^{L'}} \qquad \rho > 0 \qquad (5.61)$$

Το ελάχιστο σε σχέση με το ρ λαμβάνει χώρα σε ρ = (U / 2) / (1 + U), ώστε να βρούμε το φράγμα Chernoff

$$P_d < W_O^d, \qquad (5.62)$$

όπου

$$W_O = \left[\frac{1+U}{(1+U/2)^2}\right]^L \qquad (5.63)$$

με U να ορίζεται από το (5.59).

Οι συνολικές πιθανότητες σφάλματος B-bit μπλοκ και bit του ορθογωνικού συνελικτικού κώδικα μήκους περιορισμού K είναι τότε, σύμφωνα με το (5.25) και το (5.29)

$$P_E < BT_O(W_O), \qquad (5.64)$$

$$P_b < BT_O(W_O, \beta)/d\beta|_{\beta=1} \qquad (5.65)$$

Το $T_O(W, \beta)$ για έναν ορθογωνικό συνελικτικό κώδικα δίνεται από το (5.47) και τα $P_E$ και $P_b$ από τα (5.48) και (5.49), αντίστοιχα.

Όπως τονίσαμε στην προηγούμενη ενότητα, για μια δεδομένη τιμή του W, τα φράγματα πιθανότητας σφάλματος για έναν ορθογωνικό συνελικτικό κώδικα μήκους περιορισμού K είναι ίδια (με ένα μικρό περιορισμό) με εκείνα ενός υπέρ-ορθογωνικού κώδικα μήκους περιορισμού K – 2. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες τις καμπύλες των Σχημάτων 5.20 και 5.21 ως καμπύλες επίδοσης για ορθογωνικούς κώδικες για K = 5 έως 11 με τετμημένη $2\ln(1 / W_O)$. Παραμένει, όμως, η περίσσεια του $E_b / I_0$ στο $2\ln(1 / W_O)$ για αυτό το σύμφωνο Rayleigh κανάλι L διαδρομής. Χρησιμοποιώντας τα (5.59) και (5.63), έχουμε τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\frac{\bar{E}_b/I_0}{2\ln(1/W_O)} = \frac{UL}{2L\ln[(1+U/2)^2/(1+U)]} = \frac{U/2}{\ln[(1+U/2)^2/(1+U)]},$$

$$\frac{2\ln(1/W_O)}{L} = 2\ln[(1+U/2)^2/(1+U)] \qquad (5.66)$$

Αυτή η περίσσεια του $\bar{E}_b$ / $I_0$ στο 2ln(1 / $W_O$) σε decibel χαρτογραφείται ως μια συνάρτηση του 2ln(1 / $W_O$)/L σε decibel στο Σχήμα 5.23. Σε συνδυασμό με το Σχήμα 5.20 ή 5.21, αυτό καθιερώνει την επίδοση για το ασύμφωνο Rayleigh κανάλι με απόσβεση. Φαίνεται από το τελευταίο ότι 2ln(1 / $W_O$) = 2 (ή 3 dB) είναι επαρκές για καλή επίδοση με έναν ορθογωνικό κώδικα μήκους περιορισμού 9. Αλλά το ελάχιστο του Σχήματος 5.23 λαμβάνει χώρα σε περίπου 2ln(1 / $W_O$) / L = 1 (ή 0 dB), και η προσαύξηση ισούται με 5.3 dB. Αυτό απαιτεί L = 2 διαδρομές και πετυχαίνει $\bar{E}_b$ / $I_0$ = 8.3 dB, που υποστηρίζει τη χρήση διπλού (χωρικού) διαφορισμού με Rayleigh απόσβεση. Προσέξτε, όμως, ότι ακόμη κι αν L = 1 ώστε 2ln(1 / $W_O$)/ L = 2 (ή 3 dB), το $\bar{E}_b$ / $I_0$ αυξάνει μόνο κατά 0.6 Db έως 8.9 dB. Ο λόγος είναι ότι με ανεξάρτητες διαδοχικές διακλαδώσεις, που πετύχαμε μέσω διεμπλοκής, ο (χρονικός) διαφορισμός K πτυχών ήδη υπάρχει και με L = 2, απλώς διπλασιάζεται.

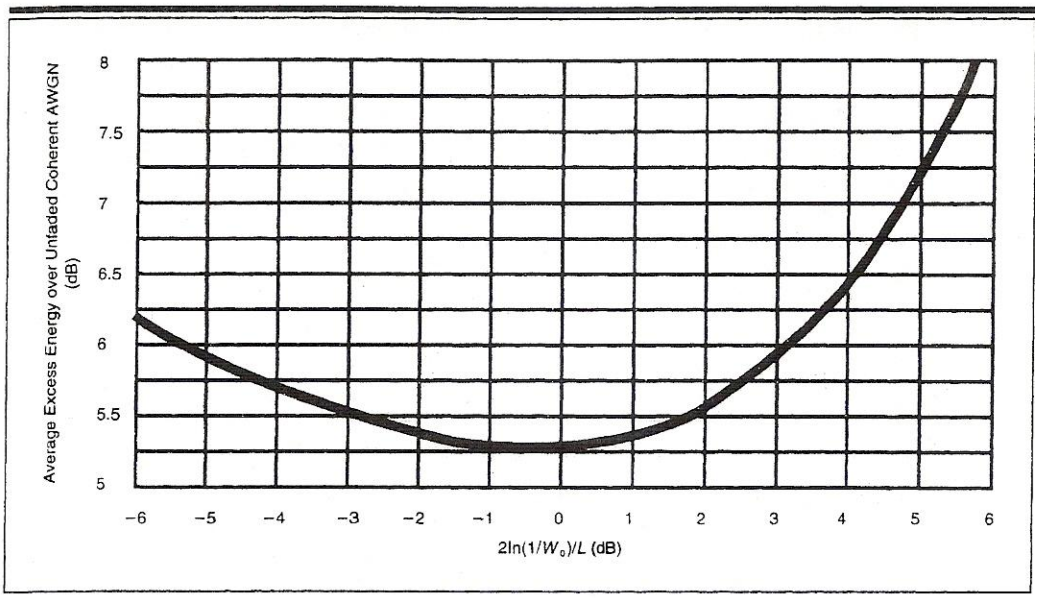



**Figure 5.23** Required excess $E_b/I_0$ for noncoherent Rayleigh fading with orthogonal convolutional codes.

Προσέξτε ακόμη ότι αν ο υπερβολικός διαφορισμός είναι διαθέσιμος (L=4), η συνολική ενέργεια bit που απαιτείται (το άθροισμα όλων των διαδρομών) αυξάνει μόνο οριακά κατά περίπου 0.2 dB. Το πλεονέκτημα του διαφορισμού μειώνεται με την απώλεια λόγω του ασύμφωνου συνδυασμού διαδρομών χαμηλότερης ενέργειας. Δεν μας εκπλήσσει ότι ο υπερβολικά μεγάλος διαφορισμός είναι λιγότερο καταστρεπτικός από τον υπερβολικά μικρό.

Τέλος, αξίζει να συγκρίνουμε αυτά τα αποτελέσματα με εκείνα της Ενότητας 5.4.5. Εκεί δείξαμε ότι με έναν κώδικα K = 9, r= $\frac{1}{3}$, που απαιτεί την ίδια τιμή 2ln(1 / W) = 3.0 dB, το πλεόνασμα ήταν μόνο 3.9 dB για ένα συνολικό $\bar{E}_b$ / $I_0$ = 6.9 dB. Ο λόγος για τη διαφορά των 1.4 dB είναι η επίδραση του αναδιαταχτή στις δύο περιπτώσεις. Αυτό θα συζητηθεί στην επόμενη ενότητα.

Σημειώνουμε κλείνοντας ότι, για ένα καθορισμένο AWGN κανάλι, ο διαφορισμός δεν βελτιώνει την επίδοση, αλλά ο ασύμφωνος συνδυασμός ακόμη την υποβαθμίζει. Επομένως, σε αυτή την ιδανική περίπτωση, η διεμπλοκή ορθογωνικού συμβόλου θα είναι μεγαλύτερη από τη διεμπλοκή δυαδικού συμβόλου. Για προφανείς λόγους, έχουμε εστιάσει εδώ στην πιο δύσκολη και συνήθως πιο πρακτική περίπτωση της πολυδιαδρομικής Rayleigh απόσβεσης, όπου οι προηγηθείσες συγκρίσεις έχουν περισσότερο νόημα.

## 5.6.3 Συμπεράσματα και περιορισμοί

Ξεκινήσαμε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιώντας διεμπλοκή χρόνου, πιθανόν σε επίπεδο chip, για να παρέχουμε προσθετικό διαφορισμό ώστε κανάλια με απόσβεση να έχουν εξίσου καλή επίδοση με κανάλια χωρίς απόσβεση όταν είναι εφικτή η σύμφωνη αποδιαμόρφωση. Έπειτα, δείξαμε ότι η κωδικοποίηση εκμεταλλεύεται το πλεόνασμα ακόμη και για κανάλια χωρίς απόσβεση, αλλά ο συνδυασμός κωδικοποίησης και διεμπλοκής είναι πιο αποτελεσματικός για κανάλια με απόσβεση που είναι σύμφωνα αποδιαμορφωμένα. Σημειώσαμε, όμως, ότι σε ένα κωδικοποιημένο

σύστημα, η διεμπλοκή στο επίπεδο του κωδικού συμβόλου είναι συνήθως επαρκής, με τα κωδικά σύμβολα να αποτελούνται από ένα έως πολλά chip. Στην τελευταία περίπτωση, η μνήμη διεμπλοκής είναι πολύ μειωμένη, αλλά η καθυστέρηση της διεμπλοκής παραμένει ίδια.

Με ασύμφωνη αποδιαμόρφωση, η διεμπλοκή πρέπει να γίνεται σε ένα ακόμη πιο τραχύ επίπεδο, συνήθως στα Μ-αδικά κωδικά σύμβολα με ορθογωνισμό, που περιέχουν αρκετά bit κι επομένως, πολλά chip. Διαφορετικά, η προσθετική ασύμφωνη συνδυαστική απώλεια θα αντικρουόταν με οποιαδήποτε κωδικοποίηση και κέρδος διαφορισμού. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 5.6.2 και 5.4.5 βρήκαμε ότι, στην καθαρή Rayleigh απόσβεση με αρκετή διεμπλοκή και στις δύο περιπτώσεις για να καταστήσουμε τα διαδοχικά ορθογωνικά σύμβολα ανεξάρτητα, η διεμπλοκή των δυαδικών κωδικών συμβόλων πριν την επιλογή ορθογωνικού συμβόλου οδήγησε σε καλύτερη επίδοση απ' ότι η διεμπλοκή αργότερα, χρησιμοποιώντας τον καλύτερο διαθέσιμο συνελικτικό κώδικα για ένα δεδομένο Κ σε κάθε περίπτωση. Ο λόγος είναι ότι η πρώτη περίπτωση δίνει διαφορισμό στο επίπεδο δυαδικού κωδικού συμβόλου, που είναι μεγαλύτερος απ' ότι στο επίπεδο ορθογωνικού συμβόλου που χρησιμοποιήθηκε στην τελευταία περίπτωση. (Για παράδειγμα, για Κ = 9 συνελικτικούς κώδικες με ρυθμό $\frac{1}{3}$ στην πρώτη περίπτωση, η ελεύθερη απόσταση είναι 18 δυαδικά σύμβολα, ενώ με ένα συνελικτικό ορθογωνικό κώδικα Κ = 9, η ελεύθερη απόσταση είναι 9 ορθογωνικά σύμβολα.) Πρέπει , όμως, κανείς να προσέχει όταν σχεδιάζει συγκρίσεις πολυπλοκότητας επειδή οι αποκωδικοποιητές είναι αρκετά διαφορετικοί στις δύο περιπτώσεις και οι απαιτήσεις της μνήμης του αποπλέκτη ακόμη διαφέρουν κατά μία τάξη μεγέθους, ευνοώντας την περίπτωση του δυαδικού συμβόλου.

Όλες αυτές οι συγκρίσεις, επίσης, έχουν αρκετή καθυστέρηση διεμπλοκής για να διασφαλιστεί η ανεξαρτησία των κωδικών συμβόλων (δυαδικών στη μία περίπτωση, Μ-αδικών στην άλλη) σε κοντινή απόσταση (εντός μερικών μηκών περιορισμού το ένα από το

άλλο). Η διεμπλοκή απαιτεί σχετικά μικρή μνήμη, ανάλογα με το ρυθμό απόσβεσης, αλλά μπορεί να προκαλέσει μη ανεκτή καθυστέρηση, κυρίως όταν εκπέμπεται αμφίδρομος λόγος. Αν οι περιορισμοί καθυστέρησης περιορίζουν το μέγεθος του αναδιαταχτή ώστε διαδοχικά ή κοντινά σύμβολα να μην είναι πλέον ανεξάρτητα, η επίδοση υποφέρει και οι σχετικές συγκρίσεις μπορεί να μην ισχύουν πλέον. Ο έλεγχος της ισχύος προσθέτει στην περιπλοκότητα του μοντέλου του καναλιού. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η απλή και ελκυστική προσέγγιση που δείξαμε σε αυτό το κεφάλαιο , η οποία επιτρέπει την ουσιωδώς ανεξάρτητη ανάλυση της επίδοσης του κώδικα και της απαίτησης του καναλιού για περίσσια $E_b$ / $I_0$ στο AWGN κανάλι, δεν ισχύει πλέον. Ενώ η θεωρητική έρευνα στο θέμα της κωδικοποίησης μη-ανεξάρτητου καναλιού συνεχίζεται εδώ και αρκετές δεκαετίες [Gallager, 1968; Viterbi και Omura, 1979], καμία γενική προσέγγιση που να μπορεί να ελεγχθεί δεν έχει προκύψει σε αυτό το δύσκολο πρόβλημα. Για να αξιολογήσουμε και να συγκρίνουμε τις τεχνικές διαμόρφωσης, κωδικοποίησης και διεμπλοκής για κανάλια χωρίς μνήμη, όπου οι διαδοχικές εκπομπές δεν είναι ανεξάρτητες, πρέπει να στηριζόμαστε κυρίως σε προσομοιώσεις συγκεκριμένων περιπτώσεων.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5Α

## Βελτιωμένα φράγματα για συμμετρικά κανάλια χωρίς μνήμη και για το AWGN κανάλι

Στις Ενότητες 5.4.1 και 5.4.2, δείξαμε ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις T(δ) και T(δ, β), η πιθανότητα σφάλματος μπλοκ B-bit και οι πιθανότητες σφάλματος bit μπορούν να έχουν άνω φράγμα, αντίστοιχα

$$P_E < BT(Z) = B\sum_{k=d_t}^{\infty} a_k Z^k, \qquad (5A.1)$$

$$P_b < \frac{dT(Z,\beta)}{d\beta}\Big|_{\beta=1} = \sum_{k=d_t}^{\infty} b_k Z^k \qquad (5A.2)$$

$\alpha_k$ και $b_k$ είναι οι συντελεστές των μη-πεπερασμένων πολυωνύμων που βρήκαμε διαιρώντας το λόγο των πολυωνύμων που συνιστούν τις γεννήτριες συναρτήσεις. Προσέξτε, όμως, ότι αυτά τα φράγματα είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής του φράγματος ένωσης στα ζεύγη γεγονότων σφάλματος, τα οποία ακολούθησε ένα φράγμα Chernoff στις πιθανότητες σφάλματος μεμονωμένων γεγονότων. Αν μπορούμε να βρούμε ακριβείς παραστάσεις για το τελευταίο, μπορούμε να στενέψουμε τα φράγματα εφαρμόζοντας μόνο το φράγμα ένωσης. Έτσι,

$$P_E < B \sum_{k=d_t}^{\infty} a_k P_k$$

(5A.3)

$$P_b < B \sum_{k=d_t}^{\infty} b_k P_k \qquad (5A.4)$$

Όπως στα (5A.1) και (5A.2), τα $\alpha_k$ και $b_k$ είναι οι συντελεστές του μη πεπερασμένου πολυωνύμου που παράγεται από τις ρητές συναρτήσεις T(δ) και dT (δ, β) / $d\beta|_{\beta = 1}$. Το $P_k$ είναι η πιθανότητα ζεύγους σφάλματος ανάμεσα σε δύο κωδικές λέξεις σε Hamming απόσταση k η μία από την άλλη.

Για τα περισσότερα δυαδικά κανάλια εισόδου, συμμετρικά κανάλια εξόδου, μπορούμε να βρούμε ακριβείς παραστάσεις για το $P_k$. Δυστυχώς, δεν μπορούμε να βρούμε μια παράσταση κλειστής μορφής, όπως όταν τα φράγματα Chernoff χρησιμοποιούνται αντί γι' αυτά. Μια προσέγγιση που χρησιμοποιείται μερικές φορές για να βρούμε αριθμητικά αποτελέσματα είναι να υποκαταστήσουμε στα (5A.3) και (5A.4) ακριβείς παραστάσεις για το $P_k$ στους πρώτους όρους, αλλά έπειτα να προχωρήσουμε με φράγματα Chernoff για την υπόλοιπη (ουρά) της ακολουθίας των $P_k$. Έτσι, βρίσκουμε ένα πεπερασμένο άθροισμα όρων που ακολουθούνται από τον όρο ουράς σε κλειστή μορφή. Η τιμή αυτού του φράγματος βρίσκεται ανάμεσα στο προηγούμενο φράγμα ένωσης Chernoff και σε ένα φάσμα ένωσης πιθανοτήτων ακριβούς ζεύγους σφάλματος.

Για το AWGN κανάλι, όμως, μπορούμε να βρούμε μια παράσταση κλειστής μορφής μοναδικού όρου που είναι σχεδόν όσο στενό είναι και το φράγμα ένωσης. Σε αυτή την περίπτωση, με ενέργεια συμβόλου-προς-πυκνότητα θορύβου $E_S$ / $I_0$, το σφάλμα ζεύγους για Hamming απόσταση k-συμβόλου είναι

$$\mathrm{P_k} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2\mathrm{kE_s}/\mathrm{I_0}}\right) < \mathrm{e}^{-\mathrm{KE_s}/\mathrm{I_0}} \qquad (5A.5)$$

όπου

$$Q(z) = \int_z^\infty e^{-a^2/2} da/\sqrt{2\pi}$$

Τώρα έστω k = $d_f$ + j, j ≥ 0, μπορούμε να εκφράσουμε τα (5A.3) και (5A.4) ως εξής

$$\mathrm{P_E} < B \sum_{\mathrm{j=0}}^{\infty} \mathrm{a_{d_{j+j}}}\ \mathrm{P_{d_f+j'}} \qquad (5A.6)$$

$$\mathrm{P_E} < B \sum_{\mathrm{j=0}}^{\infty} \mathrm{b_{d_{j+j}}}\ \mathrm{P_{d_f+j'}}$$

(5A.7)

Τότε από το (5A.5) έχουμε

$$P_{d_f+j} = Q(\sqrt{2(E_s/I_0)(d_f + j)}) \qquad (5A.8)$$

Προχωρούμε για να δείξουμε ότι για x > 0, y >0

$$Q\left(\sqrt{x+y}\right) < Q(\sqrt{x})e^{-y/2} \qquad (5A.9)$$

Αυτό προκύπτει από τον ακόλουθο χειρισμό. Αναγνωρίζοντας ότι για όλα τα θετικά x και y

$$\sqrt{x+y} - \sqrt{x} \geq 0,$$

$$\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Q}\left(\sqrt{\mathrm{x+y}}\right) = \int_{\sqrt{\mathrm{x+y}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{a}^2/2}\mathrm{da} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\mathrm{y}+\sqrt{\mathrm{x+y}})^2/\mathrm{dy}}$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1/2)\left(\gamma^2+\mathrm{x}+2\gamma\sqrt{\mathrm{x}}\right)-(\mathrm{y}/2)-\gamma\left(\sqrt{\mathrm{x+y}}-\sqrt{\mathrm{x}}\right)\mathrm{d}\gamma}$$

$$< \left[\int_0^\infty e^{-(\gamma+\sqrt{x})^2/2} d\gamma\right] e^{-y/2} = \sqrt{2\pi} Q(\sqrt{x}) e^{-y/2}$$

που αποδεικνύει το (5A.9).

Έπειτα υποκαθιστώντας το (5A.9) στο (5A.8), το (5A.6) γίνεται

$$P_E < BQ\sqrt{2(E_s/I_0)d_f}\sum_{j=0}^{\infty} a_{d_f+j}e^{-j(E_s/I_0)}$$

$$= \mathrm{BQ}\sqrt{2(\mathrm{E_s}/\mathrm{I_0})\mathrm{d_f}}\sum_{\mathrm{k}=d_f}^{\infty}\mathrm{a_k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{k}(\mathrm{E_s}/\mathrm{I_0})}\mathrm{e}^{+\mathrm{d_f}(\mathrm{E_s}/\mathrm{I_0})}$$

(5A.10)

$$= e^{\mathrm{d_f}(\mathrm{E_s}/\mathrm{I_0})}Q(\sqrt{2(E_s/I_0)d_f})BT(Z)|_{Z=e^{-E_s/I_0}}$$

Ομοίως, το (5A.7) γίνεται

$$P_b = Q(\sqrt{2(E_s/I_0)d_f})\sum_{\mathrm{k}=d_f}^{\infty}\mathrm{b_k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{k}(\mathrm{E_s}/\mathrm{I_0})}\mathrm{e}^{+\mathrm{d_f}(\mathrm{E_s}/\mathrm{I_0})}$$

(5A.11)

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{d_f}(\mathrm{E_s}/\mathrm{I_0})}Q(\sqrt{2(E_s/I_0)d_f})\frac{dT(Z,\beta)}{d\beta}\Big|_{\beta=1,Z=e^{-E_s/I_0}}$$

Έτσι, για το AWGN κανάλι, τα (5A.10) και (5A.11) απαιτούν απλώς μια κλιμάκωση των φραγμάτων ένωσης Chernoff (5.25) και (5.29)από τον όρο $e^{d_f(E_s/I_0)}$ ...

Η επίδραση φαίνεται στο Σχήμα 5.10 για έναν κώδικα με K = 3, ρυθμό $\frac{1}{2}$. Αυτό ισχύει εξίσου για το AWGN κανάλι για όλα τα φράγματα που βρήκαμε σε αυτό το κεφάλαιο.

# Παράρτημα 5B

## Άνω φράγμα σε ελεύθερη απόσταση συνελικτικών κωδίκων ρυθμού 1 / n

Ξεκινάμε παράγοντας ένα άνω φράγμα λόγω του Plotkin [1960]στην ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε κωδικές λέξεις ενός γραμμικού

μπλοκ κώδικα. Έπειτα δείχνουμε ότι οδηγεί εύκολα στο φράγμα για ελεύθερη απόσταση όταν πρόκειται για συνελικτικούς κώδικες.

Η ιδιότητα της κλειστότητας ενός γραμμικού κώδικα διασφαλίζει ότι οποιοδήποτε γραμμικό (modulo-2) άθροισμα οποιωνδήποτε δύο κωδικών λέξεων είναι το ίδιο μια κωδική λέξη. Τώρα οποιοσδήποτε μη εκφυλισμένος δυαδικός μπλοκ κώδικας k bit και $m \geq k$ σύμβολα μπορούν να τακτοποιηθούν σε ένα πλέγμα $2^k$ σειρών, μία για κάθε κωδική λέξη, και m στηλών, χωρίς να υπάρχουν ούτε δύο ίσες σειρές. Πρώτα, δείχνουμε ότι οποιαδήποτε στήλη αποτελείται είτε από μηδενικά είτε από $2^{k-1}$ μηδενικά και $2^{k-1}$ «ένα». Το αποδεικνύουμε μέσω αντίφασης. Έστω ότι τουλάχιστον μία κωδική λέξη έχει ένα άσσο στην j στήλη, αλλά ότι ο συνολικός αριθμός των άσσων είναι μεγαλύτερος του $2^{k-1}$ κι έτσι, ο αριθμός των μηδενικών είναι μικρότερος του $2^{k-1}$. Τώρα αν πάρουμε μια κωδική λέξη με έναν άσσο στην j στήλη και την αθροίσουμε με όλες τις άλλες κωδικές λέξεις με έναν άσσο σε εκείνη τη στήλη (συμπεριλαμβανομένης της ίδιας), παράγουμε περισσότερες από $2^{k-1}$ ξεχωριστές κωδικές λέξεις με ένα μηδενικό στην j στήλη κι επομένως, μια αντίφαση στην υπόθεση. Ομοίως, αν υπήρχε τουλάχιστον μία κωδική λέξη αλλά λιγότερες από $2^{k-1}$ κωδικές λέξεις με ένα «ένα» στην j στήλη, αθροίζοντας μια τέτοια κωδική λέξη με όλες τις κωδικές λέξεις που έχουν ένα μηδενικό στην j στήλη θα οδηγούμασταν σε περισσότερες από $2^{k-1}$ ξεχωριστές κωδικές λέξεις με έναν άσσο στην j στήλη –και αυτό είναι επίσης μια αντίφαση. Προσέξτε, όμως, ότι μια στήλη με μηδενικά είναι μπορεί να εισαχθεί. Στην πραγματικότητα, προέρχεται από ένα γραμμικό κώδικα, του οποίου η γεννήτρια (ακολουθία χτυπήματος) είναι εκείνη με τα μηδενικά για τα σύμβολα σε εκείνη τη θέση. Αυτό αποδεικνύει την πρόταση.

Έστω τότε ότι καμία στήλη δεν έχει μόνο μηδενικά. Εφόσον όλες οι στήλες τότε πρέπει να έχουν τα μισά μηδενικά και τα μισά «ένα», το μέσο βάρος μιας κωδικής λέξης που δεν είναι μηδέν είναι

$$w_{av} = m2^{k-1}/(2^k - 1)$$

Όμως, αν μία ή περισσότερες στήλες αποτελούνται από μηδενικά μόνο, το μέσο βάρος θα μειωθεί σύμφωνα με το τμήμα των στηλών με τα μηδενικά ώστε για το μέσο βάρος να ορίζεται μόνο το άνω φράγμα από αυτή την παράσταση.

Έπειτα η ελάχιστη Hamming απόσταση οποιουδήποτε γραμμικού μπλοκ κώδικα, που ισούται με το ελάχιστο διάφορο του μηδενός βάρος, πρέπει να είναι λιγότερο από το μέσο βάρος των κωδικών λέξεων που δεν είναι μηδέν. Έτσι,

$$d_{min} \leq w_{av} \leq m2^{k-1}/(2^k - 1) \qquad (5B.1)$$

που είναι γνωστό ως φράγμα Plotkin για γραμμικούς μπλοκ κώδικες [Plotkin, 1960].

Τώρα για ένα συνελικτικό κώδικα με δυαδικό ρυθμό 1 / n, μήκους περιορισμού K, ας εξετάσουμε όλες τις κωδικές λέξεις που αποκλίνουν από τα μηδενικά κι επανασυγχωνεύονται στις k + (K – 1) διακλαδώσεις αργότερα, όπου k ≥ 1. Υπάρχουν ακριβώς $2^k - 1$ τέτοιες διαδρομές, που καθεμία περιέχει k bit τα οποία ακολουθούνται από K – 1 μηδενικά bit. (Αν μια διαδρομή επανασυγχωνεύεται νωρίτερα, διατηρείται συγχωνευμένη με τη σωστή διαδρομή διά μέσου των υπολοίπων διακλαδώσεων.) Το σύνολο όλων των τέτοιων κωδικών λέξεων συν εκείνων με τα μηδενικά συνιστά ένα γραμμικό μπλοκ κώδικα $2^k$ κωδικών λέξεων μήκους m = n(k + K -1) συμβόλων. Εφαρμόζοντας το (5B.1), έχουμε ότι το ελάχιστο βάρος (απόσταση από τα μηδέν) αυτού του συνόλου είναι

$$\mathrm{d_{min}} \leq \mathrm{n(K - 1 + k)}\, 2^{\mathrm{k-1}}/(2^{\mathrm{k}} - 1) \qquad (5B.2)$$

Τώρα, εξετάζοντας όλα τα πιθανά συγχωνευμένα μήκη, βρίσκουμε ένα φράγμα στην ελεύθερη απόσταση $d_f$, ως το ελάχιστο σε k από όλα τα πιθανά ασυγχώνευτα διαστήματα ελαχίστου βάρους. Επομένως, για κάθε κώδικα ρυθμού 1 / n, μήκους περιορισμού K, συνελικτικού κώδικα,

$$\mathrm{d_f} \leq \mathrm{n} \underset{\mathrm{k} \geq 1}{\mathrm{Min}} \left[\frac{(\mathrm{K-1+k})2^{\mathrm{k-1}}}{2^{\mathrm{k}}-1}\right] \qquad (5B.3)$$

Εδώ, φυσικά, το $d_f$ είναι το πολύ ίσο με τον μέγιστο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος με το φράγμα. Αυτό το φράγμα το παρήγαγε πρώτος ο Heller [1968].

# Κεφάλαιο 6

## Χωρητικότητα, κάλυψη και έλεγχος δικτύων πολλαπλής πρόσβασης διάχυτου φάσματος

### 6.1 Γενικά

Ο χειρισμός των CDMA δικτύων έχει, λοιπόν, εστιάσει σχεδόν ολοκληρωτικά στο φυσικό στρώμα: παραγωγή, συγχρονισμός, διαμόρφωση και κωδικοποίηση στον πομπό (και στις ανάστροφες συναρτήσεις στο δέκτη) των σημάτων διάχυτου φάσματος χρηστών πολλαπλής πρόσβασης. Οι περισσότερες πλευρές αυτών των συναρτήσεων είναι κοινές σε όλα τα ασύρματα ψηφιακά συστήματα επικοινωνίας ασχέτως της τεχνικής πολλαπλής πρόσβασης. Έτσι, τα στοιχειώδη των Κεφαλαίων 2 έως 5 ισχύουν γενικά, αν και έχουμε τονίσει και χρησιμοποιήσει τον ευρυζωνικό χαρακτήρα των σημάτων διάχυτου φάσματος για να δείξουμε βελτιωμένη επίδοση όταν υπάρχει παρεμβολή και πολυδιαδρομική διάδοση. Έχουμε στηριχθεί πολύ σε αυτές τις δομικές μονάδες του φυσικού στρώματος. Όμως, τα πραγματικά πλεονεκτήματα ενός CDMA δικτύου προέρχονται από την κατάλληλη κατανόηση και εκμετάλλευση των ιδεών και χαρακτηριστικών του δικτύου υψηλού επιπέδου που υπάρχουν σε ένα πολλών κυψελών σύστημα πολλαπλής πρόσβασης, του οποίου οι χρήστες μοιράζονται όλοι πλήρως κοινές κατανομές συχνότητας και χρόνου.

Κάποια από τα πλεονεκτήματα ίσως φανούν να είναι τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά, αν και θα επικεντρωθούμε στην ποσοτική τους αξιολόγηση. Πιο σημαντικό είναι ότι διαπλέκονται σημαντικά και αλληλοϋποστηρίζονται, όπως θα δείξουμε σε όλο αυτό το κεφάλαιο. Μπορούν σύντομα να συνοψιστούν από τις ακόλουθες ιδιότητες και τεχνικές, που καταγράφονται χοντρικά από τις πιο σημαντικές προς τις λιγότερο σημαντικές:

(α) Καθολική επαναχρησιμοποίηση των συχνοτήτων: Αυτό αποτελεί τη βάση για όλες τις άλλες ιδιότητες. Ο στόχος οποιουδήποτε

ασύρματου συστήματος επικοινωνίας είναι να παραδώσουμε την επιθυμητή ενέργεια (του σήματος) στον προοριζόμενο δέκτη και να ελαχιστοποιήσουμε την ανεπιθύμητη ενέργεια (παρεμβολής) που λαμβάνει. Αυτός ο στόχος μπορεί να επιτευχθεί παρέχοντας μη-συνδεδεμένες θυρίδες (συχνότητας ή χρόνου) σε κάθε χρήστη κυψέλης, ή τομέα μιας πολλών τομέων κυψέλης. Αλλά μόλις αυτά ανατεθούν πλήρως, ο μόνος τρόπος να παρέχουμε περισσότερη χωρητικότητα χρήστη είναι δημιουργώντας περισσότερες κυψέλες. Τότε οι χρήστες κοντινών κυψελών πρέπει επίσης να έχουν μη-συνδεδεμένες θυρίδες, διαφορετικά, η αμοιβαία παρεμβολή τους θα γίνει ανυπόφορη για εκπομπή στενού (μη διάχυτου) φάσματος. Αυτό οδηγεί σε περιορισμένη επαναχρησιμοποίηση των συχνοτήτων (όπου κανονικά μια θυρίδα επαναχρησιμοποιείται μόνο μια φορά ανά επτά κυψέλες, βλ. Σχήμα 1.1). Ακόμη απαιτείται αναθεώρηση του σχεδίου συχνότητας και ανακατανομή του καναλιού χρήστη κάθε φορά που εισάγεται μια νέα κυψέλη.

Με το διάχυτο φάσμα, η καθολική επαναχρησιμοποίηση συχνοτήτων δεν ισχύει μόνο για όλους τους χρήστες της ίδιας κυψέλης, αλλά ακόμη κι για εκείνους άλλων κυψελών. Η εισαγωγή νέων κυψελών, καθώς αυξάνει η ένταση του φορτίου, δεν απαιτεί μια αναθεώρηση των σχεδίων συχνότητας των υπαρχόντων κυψελών. Εξίσου σημαντικό είναι ότι, καθώς περισσότερες κυψέλες προστίθενται, η ικανότητα του δικτύου να εισάγει και να αφαιρέσει ενέργεια σε μια δεδομένη τοποθεσία βελτιώνεται. Επομένως, τα επίπεδα της εκπεμπόμενης ισχύος του κινητού χρήστη και του σταθμού βάσης μπορούν να μειωθούν πραγματικά με το να εκμεταλλευτούμε τις ικανότητες ελέγχου ισχύος και των δύο κυψελών, πράγμα που θα συζητηθεί στη συνέχεια. Εν συντομία, εφόσον ο κατανεμημένος πόρος του καναλιού κάθε χρήστη, προς και τις δύο κατευθύνσεις, είναι ενέργεια παρά χρόνος ή συχνότητα, ο έλεγχος παρεμβολής και οι κατανομές καναλιού συγχωνεύονται σε μια μοναδική προσέγγιση.

(β) Έλεγχος ισχύος: Όπως μόλις αναφέρθηκε, η καθολική επαναχρησιμοποίηση συχνότητας απαιτεί αποτελεσματικό έλεγχο ισχύος κάθε χρήστη, προς και τις δύο κατευθύνσεις. Το Κεφάλαιο 4

αναλύει τις τεχνικές φυσικού στρώματος για έλεγχο ισχύος σε ανάστροφη κατεύθυνση (χρήστης-προς-σταθμόό βάσης), το οποίο είναι το πιο κρίσιμο από όλα. Στην επόμενη ενότητα ασχολούμαστε πάλι με την εφαρμογή του ελέγχου ισχύος από μια πιο γενική οπτική. Περιγράφουμε περαιτέρω τους διάφορους αλγορίθμους που βοηθούν να κρατήσουμε την εκπεμπόμενη ισχύ από τους κινητούς χρήστες πολύ κοντά στο επιθυμητό επίπεδο. Στην Ενότητα 6.6, αξιολογούμε την επίδραση στη χωρητικότητα της ακρίβειας του ελέγχου ισχύος. Το ίδιο γίνεται για την εμπρόσθια (σταθμός βάσης-προς-χρήστη) κατεύθυνση στην Ενότητα 6.7. Ο έλεγχος ισχύος διασφαλίζει ότι κάθε χρήστης λαμβάνει κι εκπέμπει αρκετή ενέργεια για να εκφράσει κατάλληλα πληροφορίες, ενώ παρεμβαίνει σε άλλους χρήστες όχι περισσότερο απ' ότι είναι απαραίτητο. Ένα δευτερεύον πλεονέκτημα είναι ότι ελαχιστοποιώντας την εκπεμπόμενη ισχύ για μια μονάδα κινητού χρήστη μεγιστοποιείται το διάστημα ανάμεσα στις φορτίσεις μπαταρίας.

(γ) Ήπια μεταπομπή: Η καθολική επαναχρησιμοποίηση συχνοτήτων καθιστά δυνατό ένας κινητός χρήστης να λαμβάνει και να στέλνει την ίδια κλήση ταυτόχρονα από και προς δύο διαφορετικούς σταθμούς βάσης. Στην περίπτωση λήψης (εμπρόσθιας ζεύξης) από το χρήστη, τα δύο σήματα των σταθμών βάσης μπορούν να συνδυαστούν για να βελτιωθεί η επίδοση, όπως στον πολυδιαδρομικό συνδυασμό. Στην πραγματικότητα, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το δεύτερο σήμα του σταθμού βάσης ως μια καθυστερημένη εκδοχή του πρώτου, που παράχθηκε ενεργά και σκόπιμα αντί να το θεωρήσουμε ως μια καθυστερημένη ανάκλαση του πρώτου που προκλήθηκε από το περιβάλλον. Για την ανάστροφη ζεύξη, οι δύο διαφορετικοί σταθμοί βάσης κανονικά θα αποκωδικοποιήσουν ανεξάρτητα τα σήματα. Αν αποκωδικοποιήσουν ένα δεδομένο πλαίσιο ή μήνυμα διαφορετικά, τότε θα εξαρτάται από το κέντρο μεταγωγής (που λαμβάνει τα δεδομένα εισόδου από όλους τους σταθμούς βάσης και συνδέει το κυψελικό δίκτυο με το επίγειο δίκτυο μεταγωγής) να το διευθετήσει. Αυτό το ζήτημα θα καλυφθεί στην Ενότητα 6.3. Είναι αρκετό να αναφέρουμε ότι ο πιο αξιόπιστος από τους δύο σταθμούς βάσης γενικά θα κυριαρχήσει.

Ποιοτικά, αυτό το χαρακτηριστικό παρέχει πιο αξιόπιστη μεταπομπή ανάμεσα στους σταθμούς βάσης καθώς ένας χρήστης κινείται από τη μία κυψέλη σε μια διπλανή. Ποσοτικά, μέσω κατάλληλου ελέγχου ισχύος, η ήπια μεταπομπή περισσότερο από διπλασιάζει τη χωρητικότητα ενός βαριά φορτωμένου συστήματος. Όταν το δίκτυο είναι ελαφρώς φορτωμένο, περισσότερο από διπλασιάζει επίσης την περιοχή κάλυψης κάθε κυψέλης. Αυτές τις μετρήσεις θα τις χειριστούμε ποσοτικά και με περισσότερες λεπτομέρειες στις Ενότητες 6.5 και 6.6.

(δ)Διαφορισμός σε χώρο και χρόνο: Αυτά τα ζητήματα καλύφθηκαν με κάποιες λεπτομέρειες στα Κεφάλαια 4 και 5, συμπεριλαμβανομένου του εποικοδομητικού συνδυασμού των πολυδιαδρομικών συνιστωσών. Η Ενότητα 6.3 δείχνει ότι η ήπια μεταπομπή είναι μια άλλη μορφή χωρικού διαφορισμού, που χρησιμοποιεί την ίδια εφαρμογή συστήματος. Αυτό το χαρακτηριστικό μπορεί ακόμη να συνδυαστεί με κατανεμημένες κεραίες για να βελτιωθεί η επίδοση, κυρίως σε εσωτερικό χώρο, όπως συζητήθηκε στην Ενότητα 6.8.

(ε)Μεταβλητότητα πηγής: Αυτό περιλαμβάνει όχι μόνο τη δραστηριότητα της φωνής που αναφέρθηκε για πρώτη φορά στο Κεφάλαιο 1, αλλά και τη μεταβλητότητα φορτίου μηνυμάτων ή δεδομένων. Η επίδρασή του θα εξεταστεί στις Ενότητες 6.6 και 6.7.

(στ)Κέρδος κεραίας: Αυτο ισχύει τόσο για σταθερές τομεακές κεραίες όσο και για μεταβλητή κατεύθυνση φασικών διατάξεων. Η εφαρμογή και οι περιορισμοί συζητώνται στην Ενότητα 6.8.

(ζ) FEC (Forward Error Correction, εμπρόσθια διόρθωση σφαλμάτων) κωδικοποίηση χωρίς εναέρια ποινή: Όπως δείξαμε στο Κεφάλαιο 5, το εγγενές περίσσιο πλεόνασμα λόγω διάχυσης φάσματος μπορούμε να το εκμεταλλευτούμε με την FEC κωδικοποίηση χαμηλού ρυθμού (υψηλού πλεονάσματος), χωρίς το ταυτόχρονο κόστος στο ρυθμό δεδομένων που συμβαίνει σε κανάλια στενά περιορισμένης ζώνης που κατανέμουν θυρίδες συχνότητας ή χρόνου.

Στις επόμενες δύο ενότητες, περιγράφουμε τις εφαρμογές του συστήματος ελέγχου ισχύος και ήπιας μεταπομπής, καθώς και την παρακολούθηση του πιλοτικου σήματος που απαιτείται για την τελευταία. Με τις ποσοτικές μετρήσεις επίδοσης ασχολούμαστε στο υπόλοιπο του κεφαλαίου.

## 6.2 Έλεγχος ισχύος ανάστροφης ζεύξης

Ξεκινάμε εξετάζοντας τον έλεγχο ισχύος του πομπού ενός κινητού χρήστη σε μια μοναδική απομονωμένη κυψέλη. Υποθέτουμε ότι ο χρήστης ήδη παρακολουθεί ένα πιλοτικό σήμα και λαμβάνει και εκπέμπει φορτίο. Οι τρόποι για έναρξη κλήσης από το χρήστη εξετάζονται στην Ενότητα 6.6. Αν το φυσικό κανάλι ήταν εντελώς συμμετρικό, η μέτρηση του επιπέδου ισχύος του ληφθέντος σήματος από το σταθμό βάσης θα καθόριζε το επίπεδο ισχύος του πομπού που απαιτείται ώστε εκείνος ο χρήστης να ληφθεί από το σταθμό βάσης στο ίδιο επίπεδο με όλους τους άλλους χρήστες. Η ιδανική κατάσταση δεν ισχύει σχεδόν ποτέ, εφόσον γενικά, οι κεντρικές συχνότητες εμπρόσθιας κι ανάστροφης ζεύξης είναι αρκετά απομακρυσμένες μεταξύ τους. Όμως, έστω ότι ξεκινάμε μετρώντας τη συνολική ισχύ που λήφθηκε από το κινητό, μια ενέργεια που κανονικά πραγματοποιείται στους δέκτες με το κύκλωμα αυτόματου ελέγχου απολαβής (AGC). Αυτή η ισχύς σήματος που έρχεται από το σταθμό βάσης είναι μια σύνθεση εκείνου που προοριζόταν για όλους τους χρήστες της κυψέλης ή του τομέα. Όμως, παρέχει μια κατά προσέγγιση μέτρηση της απώλειας διάδοσης σε κάθε χρήστη, συμπεριλαμβανομένης της απώλειας λόγω εύρους και επισκίασης. Όσο πιο υψηλή είναι η ισχύς του λαμβανόμενου από το χρήστη σήματος, τόσο χαμηλότερη ορίζεται η εκπεμπόμενη ισχύς κι αντιστρόφως. Στην πραγματικότητα, το άθροισμα των ισχύων εμπρόσθιας και ανάστροφης ζεύξης (σε decibel) διατηρείται σταθερό με την επιλογή της εκπεμπόμενης ισχύος του τερματικού του χρήστη. Αυτό ονομάζεται έλεγχος ισχύος ανοικτού βρόχου.

Όπως ήδη σημειώσαμε, η απώλεια διάδοσης δεν είναι συμμετρική. Αυτό ισχύει κυρίως επειδή η Rayleigh απόσβεση που προκάλεσε η ακύρωση συνιστώσας κοντά στο πεδίο εξαρτάται πολύ από τη φέρουσα συχνοτητητα, η οποία μπορεί να διαφέρει σημαντικά στις δύο κατευθύνσεις. Έτσι, ένας μηχανισμός ελέγχου ισχύος κλειστού βρόχου που μεταβάλλει την εκπεμπόμενη από το κινητό ισχύ πρέπει να συμπεριληφθεί, με βάση τις μετρήσεις που έγιναν στο σταθμό βάσης. Στο Κεφάλαιο 4, περιγράψαμε μια προσέγγιση μέτρησης όχι της ισχύος, αλλά του μέσου $E_b$ / $I_0$, που είναι η παράμετρος που επηρεάζει περισσότερο την επίδοση σφάλματος. Οι εντολές στη συνέχεια εκπέμπονται μέσω εμπρόσθιας ζεύξης στο κινητό για να αυξήσουμε ή να μειώσουμε την εκπεμπόμενη ισχύ του (κατά Δ dB) ανάλογα αν το $E_b$ / $I_0$ που μετρήθηκε στο σταθμό βάσης ήταν χαμηλότερο ή υψηλότερο από το επιθυμητό. Το επιθυμητό $E_b$ / $I_0$ προς λήψη στο σταθμό βάσης μπορεί να εκτιμηθεί εκ των προτέρων ότι βρίσκεται ανάμεσα στα 3 και 7 dB, σύμφωνα με τις αναλύσεις στα Κεφάλαια 4 και 5. Όμως, οι συνθήκες θα μεταβάλλονται ανάλογα με το περιβάλλον πολυδιαδρομικής απόσβεσης, ειδικά αν περιλαμβάνονται πολλές διαδρομές. Έτσι, όπως σημειώθηκε στην Ενότητα 4.7, είναι χρήσιμο να προσθέσουμε ένα μηχανισμό ελέγχου ισχύος, που ονομάζεται εξωτερικός βρόχος, ο οποίος προσαρμόζει το επιθυμητό επίπεδο $E_b$ / $I_0$ ανάλογα με το ρυθμό σφάλματος του μεμονωμένου χρήστη που μετρήθηκε στο σταθμό βάσης. Αυτό, στη συνέχεια, εγγυάται ένα δεδομένο ρυθμό σφάλματος ανά πλαίσιο κωδικοποιημένης φωνής ή πακέτο μηνύματος (συνήθως ορίζεται στο 1%ή λιγότερο από αυτό). Όμως, η προκύπτουσα παράμετρος $E_b$ / $I_0$, η οποία είναι ήδη μια κανονική τυχαία log μεταβλητή – ή κανονική σε decibel- εξαιτίας της ανακρίβειας του ελέγχου ισχύος, θα έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα, που θα εκδηλώνεται ως μεγαλύτερη τυπική απόκλιση της κανονικά κατανεμημένης μέτρησης των decibel. Επομένως, ενώ στην Ενότητα 4.7 φτάνει σε μια συνήθη τυπική απόκλιση για το σύστημα κλειστού βρόχου ανάμεσα σε 1.1 και 1.5 dB, η τυπική απόκλιση που προκλήθηκε από τις διακυμάνσεις του εξωτερικού βρόχου είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Συνεπώς, ο συνδυασμός αυτών των δύο ανεξάρτητων συνιστωσών οδηγεί σε μια

εκτίμηση της συνολικής τυπικής απόκλισης της τάξεως του 1.5 και 2.1 dB. Έχει μετρηθεί πειραματικά [Viterbi και Padovani, 1992; Padovani, 1994] ότι είναι ανάμεσα σε 1.5 και 2.5 dB. Θα αξιολογήσουμε την επίδραση της μεταβλητότητας στην χωρητικότητα στην Ενότητα 6.6.

## 6.3 Πιλοτική παρακολούθηση πολλαπλών κυψελών και ήπια μεταπομπή

Η εμπρόσθια ζεύξη για κάθε κυψέλη ή τομέα γενικά χρησιμοποιεί έναν πιλότο διαμορφωμένο μόνο από την ψευδοτυχαία ακολουθία της συγκεκριμένης κυψέλης, ή του συγκεκριμένου τομέα, που προστίθεται ή πολυπλέκεται με τη φωνή ή το φορτίο δεδομένων. Αυτό περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4 και φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Ο πιλότος παρέχει την αναφορά χρόνου και την παρακολούθηση φάσης και πλάτους. Μπορεί ακόμη να χρησιμοποιηθεί για να αναγνωρίσουμε πρόσφατα διαθέσιμους πιλότους σε διπλανές κυψέλες ή τομείς. Συγκεκριμένα, ενώ ένας χρήστης παρακολουθεί τον πιλότο μιας συγκεκριμένης κυψέλης, μπορεί να αναζητά πιλότους διπλανών κυψελών (χρησιμοποιώντας το μηχανισμό αναζήτησης του πολυδιαδρομικού rake δέκτη). Για να καταστεί πιο απλό και πρακτικό, όλες οι ψευδοτυχαίες ακολουθίες του πιλότου μπορούν να χρησιμοποιήσουν την ίδια γεννήτρια ακολουθίας μεγίστου μήκους, με διαφορετικά αρχικά διανύσματα κι επομένως, χρονικές μετατοπίσεις. Οι σχετικές χρονικές μετατοπίσεις των πιλότων σε γειτονικές κυψέλες και τομείς είτε είναι γνωστές εκ των προτέρων είτε εκπέμπουν σε όλους τους χρήστες της δεδομένης κυψέλης ή τομέα σε διαφορετικό CDMA κανάλι, χρησιμοποιώντας τη δική του ψευδοτυχαία ακολουθία ή χρονική μετατόπιση.

Μόλις ο αναζητητής εντοπίσει ένα νέο πιλότο και βρει ότι έχει επαρκή ισχύ σήματος (συνήθως σε σχέση με τον πρώτο πιλότο που ήδη παρακολουθείται), το κινητό θα σηματοδοτήσει αυτό το γεγονός στον αρχικό σταθμό βάσης. Αυτός με τη σειρά του θα ειδοποιήσει το κέντρο μεταγωγής, που καθιστά δυνατό ο δεύτερος σταθμός βάσης

κινητού να στείλει και να λάβει το ίδιο φορτίο προς κι από το δεδομένο κινητό. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ήπια μεταπομπή. Για την εκπομπή εμπρόσθιας ζεύξης στο κινητό, ο αποκωδικοποιητής Rake (Σχήμα 4.3) αποκωδικοποιεί την εκπομπή και των δύο κυψελών σε δύο δάχτυλα της τσουγκράνας και τα συνδυάζει σύμφωνα, με κατάλληλες προσαρμογές καθυστέρησης, ακριβώς όπως γίνεται για πολυδιαδρομικές συνιστώσες ξεχωριστού χρόνου. Για την ανάστροφη ζεύξη, κανονικά κάθε σταθμός βάσης αποδιαμορφώνει και αποκωδικοποιεί κάθε πλαίσιο ή πακέτο ανεξάρτητα. Έτσι, εξαρτάται από το κέντρο μεταγωγής να διευθετήσει αποκωδικοποιημένα πλαίσια ανάμεσα στους δύο σταθμούς βάσης. Η λειτουργία ήπιας μεταπομπής έχει πολλά πλεονεκτήματα. Ποιοτικά, η μετάβαση ενός κινητού ανάμεσα σε κυψέλες είναι πιο ομαλή: Η δεύτερη κυψέλη μπορεί να χρησιμοποιηθεί σταδιακά, ξεκινώντας νωρίς τη μετάβαση ενός κινητού από τη μία κυψέλη στη γειτονική της κυψέλη. Ομοίως, όταν το σήμα της πρώτης κυψέλης είναι τόσο ασθενές σε σχέση με της δεύτερης που δεν μπορεί να αποδιαμορφωθεί και να αποκωδικοποιηθεί κατάλληλα, θα μειωθεί είτε σε σχέση με τη μέτρηση ισχύος του πιλότου του κινητού είτε σε σχέση με την ενέργεια της πρώτης κυψέλης. Επιπλέον, για οποιοδήποτε δεδομένο πλαίσιο, η απόφαση της καλύτερης κυψέλης γενικά θα χρησιμοποιηθεί, χωρίς να χρειάζεται να ενεργοποιήσουμε μια νέα κυψέλη ή να απενεργοποιήσουμε την παλιά όπως σε μια κλασική σκληρή μεταπομπή. Στην πραγματικότητα, για να αποφύγουμε συχνές μεταπομπές στα όρια ανάμεσα σε κυψέλες (που απαιτούν υπερβολική σηματοδοσία ελέγχου), τα συστήματα με σκληρή μεταπομπή ενεργοποιούν μια δεύτερη κυψέλη μόνο όταν η ισχύς του σήματος είναι σημαντικά μεγαλύτερη (π.χ. 6 dB) από εκείνη της πρώτης κυψέλης. Αυτό υποβαθμίζει περαιτέρω την επίδοση στα όρια.

Πιο σημαντικό, όμως, είναι ότι η ήπια μεταπομπή αυξάνει σημαντικά τη χωρητικότητα ενός πολύ φορτωμένου πολυκυψελικού συστήματος και την κάλυψη (μέγεθος περιοχής) κάθε μεμονωμένης κυψέλης σε ένα ελαφρώς φορτωμένο σύστημα. Θα το δείξουμε αυτό ποσοτικά, ακολουθώντας τους Viterbi, Viterbi, Gilhousen και Zehavi

[1994]. Είναι πρώτα απαραίτητο να καθορίσουμε την αμοιβαία παρεμβολή ανάμεσα σε κυψέλες ενός πολυκυψελικού συστήματος.

## 6.4 Παρεμβολή άλλων κινητών

### 6.4.1 Μοντέλο διάδοσης

Ο έλεγχος ισχύος επιχειρεί να εξισώσει την ισχύ του λαμβανόμενου σήματος των χρηστών σε ένα δεδομένο σταθμό βάσης κυψέλης για όλους τους χρήστες που ελέγχονται από το σταθμό βάσης. Όμως, η παρεμβολή επίσης καταφτάνει από χρήστες που ελέγχονται από σταθμούς βάσης άλλων κυψελών. Καταφτάνει στο δεδομένο σταθμό βάσης με χαμηλότερα επίπεδα ισχύος, εφόσον η ήπια μεταπομπή εγγυάται ότι ο χρήστης είναι συνδεδεμένος διαρκώς μέσω του καλύτερου σταθμού βάσης-εκείνου με τη μικρότερη απόσβεση λόγω των απωλειών διάδοσης.

Η απώλεια διάδοσης γενικά μοντελοποιείται ως το γινόμενο της m ισχύος απόστασης και της log κανονικής συνιστώσας που αντιπροσωπεύει τις απώλειες επισκίασης. Αυτό το μοντέλο αναπαριστά αργά μεταβαλλόμενες απώλειες, ακόμη και για χρήστες εν κινήσει, και ισχύει για ανάστροφες και εμπρόσθιες ζεύξεις. Οι πιο γρήγορα μεταβαλλόμενες απώλειες με Rayleigh απόσβεση δεν περιλαμβάνονται εδώ. Αυτές ενσωματώνονται ήδη στο πολυδιαδρομικό μοντέλο που χρησιμοποιείται στην ανάλυση του αποκωδικοποιητή (Κεφάλαιο 4). Έτσι, για ένα χρήστη σε απόσταση r από το σταθμό βάσης, η απόσβεση είναι ανάλογη με

$$a(r,\zeta) = r^m 10^{\zeta/10} \tag{6.1}$$

όπου ζ είναι η απόσβεση decibel λόγω επισκίασης, με μηδενική μέση και τυπική απόκλιση σ. Διαφορετικά, οι απώλειες σε decibel είναι

$$10\log a\ \ (r,\zeta) = 10m\log r + \zeta \tag{6.2}$$

Τα πειραματικά δεδομένα [Jakes, 1974; Lee, 1989] προτείνουν τις επιλογές του m = 4 για το νόμο δύναμης και σ = 8 dB για την τυπική απόκλιση του ζ, της κανονικής log επισκίασης.

Οποιαδήποτε ανάλυση της παρεμβολής άλλης κυψέλης περιλαμβάνει σύγκριση των απωλειών διάδοσης ανάμεσα σε δύο ή περισσότερους σταθμούς βάσης. Έτσι, το μοντέλο πρέπει να εξετάσει την εξάρτηση των απωλειών διάδοσης από ένα κινητό χρήστη σε δύο διαφορετικούς σταθμούς βάσης. Εφόσον η κανονική log επισκίαση σημαίνει ότι οι απώλειες διάδοσης σε decibel είναι Gaussian, λαμβάνουμε μια κοινή Gaussian πυκνότητα πιθανότητας για απώλειες decibel σε δύο ή περισσότερους σταθμούς βάσης. Ομοίως, μπορούμε να εκφράσουμε την τυχαία συνιστώσα της απώλειας decibel ως το άθροισμα δύο συνιστωσών: μία στο κοντινό πεδίο του χρήστη που είναι κοινή σε όλους τους σταθμούς βάσης και μία που αφορά μόνο στο σταθμό βάσης που λαμβάνει και είναι ανεξάρτητη από τον ένα σταθμό βάσης στον άλλο. Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε την τυχαία συνιστώσα απώλειας decibel για τον i σταθμό βάσης (I = 0, 1, 2, …) ως

$$\zeta_i = a\xi + b\xi_\iota \,, \quad \text{όπου } a^2 + b^2 = 1 \,, \qquad a \leq 1 \,, \tag{6.3}$$

με

$$\mathrm{E}(\zeta_\iota) = E(\xi) = E(\xi_\iota) = 0$$

$$Var(\zeta_i) = Var(\xi) = Var(\xi_\iota) = \sigma^2 \qquad \text{για κάθε i}$$

$$E(\xi\ \xi_\iota) = 0 \quad \text{για κάθε i}$$

και

$$E(\xi_i\ \xi_j) = 0 \quad \text{για κάθε i \# j.}$$

Έτσι, η κανονικοποιημένη διασυσχέτιση (συντελεστής συσχέτισης) των απωλειών προς τους δύο σταθμούς βάσης, i και j, είναι

$$E(\zeta_i\ \ \zeta_j)/\sigma^2 = \alpha^2 = 1 - b^2 \ (\text{i} \neq j) \tag{6.4}$$

Μπορούμε λογικά να υποθέσουμε ότι οι αβεβαιότητες διάδοσης κοντινού πεδίου και συγκεκριμένου σταθμού βάσης έχουν ίσες τυπικές αποκλίσεις. Σε εκείνη την περίπτωση, $\alpha^2 = b^2 = \frac{1}{2}$ και η κανονικοποιημένη διασυσχέτιση είναι $\frac{1}{2}$ για όλα τα ζεύγη των σταθμών βάσης. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές παντού σε όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα, αν και όλες οι παραστάσεις θα παραχθούν για αυθάιρετη τιμή διασυσχέτισης, (6.4).

## 6.4.2 Λήψη μεμονωμένης κυψέλης-Σκληρή μεταπομπή

Ας υποθέσουμε, πρώτον, ότι μόνο ένας πιλότος μοναδικής κυψέλης παρακολουθείται σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο χρόνο και ότι η μεταπομπή ανάμεσα σε κυψέλες πραγματοποιείται σε όριο εξαγωνικής κυψέλης (Σχήμα 6.1). Αυτό ιδανικοποιείται επειδή, όπως σημειώσαμε προηγουμένως, ακόμη κι αν τα όρια ήταν γνωστά, μια τέτοια διαδικασία θα οδηγούσε σε πολλαπλές γρήγορες μεταπομπές για χρήστες στο όριο ή κοντά σε αυτό. Αυτή η κατάσταση μπορεί να βελτιωθεί  απαιτώντας να γίνονται οι μεταπομπές μόνο όταν η ισχύς του πιλότου της δεύτερης κυψέλης είναι επαρκώς πάνω από εκείνη της πρώτης. Όμως, θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το ιδανικοποιημένο μοντέλο σκληρής μεταπομπής για σύγκριση με τα αποτελέσματα ήπιας μεταπομπής.

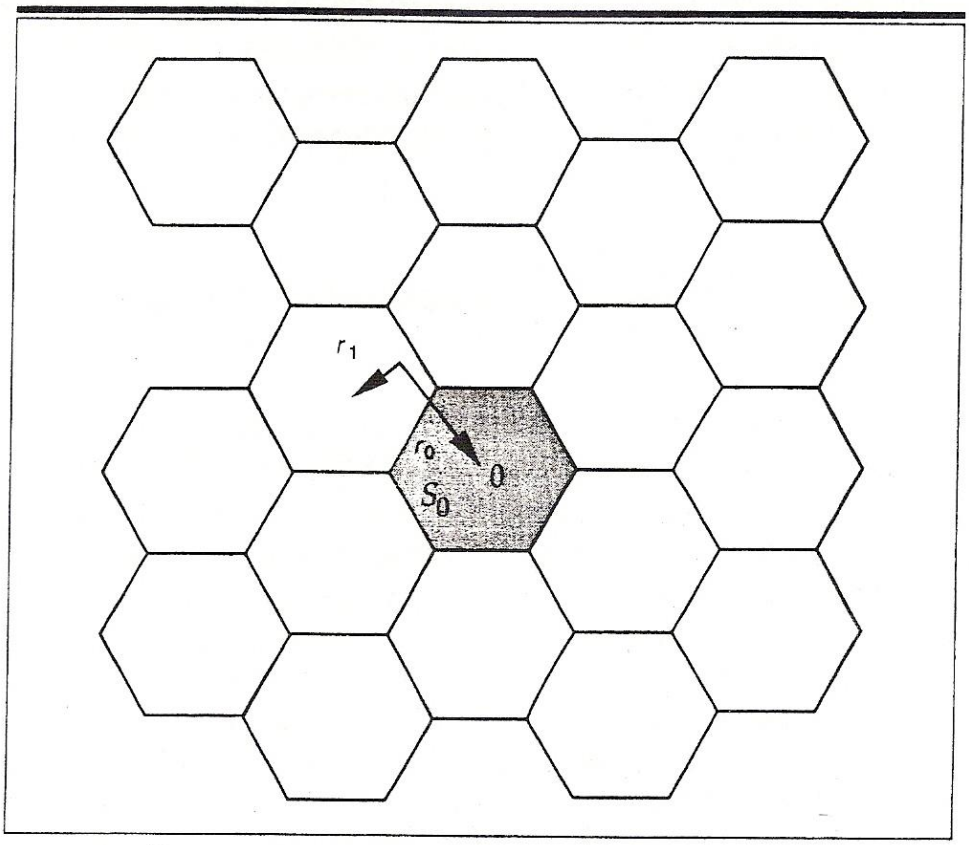



**Figure 6.1** $S_0$ region and relative distances. © 1994 IEEE. ``Soft Handoff Extends CDMA Cell Coverage and Increases Reverse Link Capacity'' by A. J. Viterbi, A. M. Viterbi, K. S. Gilhousen, E. Zehavi, in *IEEE Journal on Selected Areas in Communications,* Vol. 12, No. 8, October, 1994.

Κανονικοποιούμε στην ενότητα κάθε ακτίνα κυψέλης, που ορίζεται ως η μέγιστη απόσταση από οποιοδήποτε σημείο της κυψέλης προς το σταθμό βάσης στο κέντρο του. Ακόμη υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ομοιογενής πυκνότητα χρηστών σε όλες τις κυψέλες. Έστω ότι το $k_u$ είναι ο μέσος αριθμός χρηστών ανά κυψέλη, τότε εξαιτίας του εξαγωνικού σχήματος της κανονικοποιημένης κυψέλης, αυτή η πυκνότητα είναι

$$\kappa = \frac{2k_u}{3\sqrt{3}} \frac{\chi\rho\acute{\eta}\sigma\tau\varepsilon\varsigma}{\pi\varepsilon\rho\iota o\chi\acute{\eta}\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\alpha\varsigma} \tag{6.5}$$

Τότε, έστω ότι η απόσταση από το χρήστη σε συντεταγμένες (x, y) προς το σταθμό βάσης της δεδομένης κυψέλης είναι $r_0(x,y)$ και ότι σε οποιοδήποτε άλλο σταθμό βάσης άλλης κυψέλης είναι $r_1(x,y)$ (Σχήμα 6.1). Εφόσον ο χρήστης στο (x,y) επικοινωνεί μέσω του

πλησιέστερου σταθμού βάσης, θα ελέγχεται επίσης η ισχύς από εκείνο το σταθμό βάσης. Το κέρδος ισχύος του πομπού του χρήστη, έτσι, εξισώνει την απώλεια διάδοσης (6.1) για εκείνη την κυψέλη. Επομένως, η σχετική μέση παρεμβολή στο σταθμό βάσης της δεδομένης κυψέλης λόγω όλων των χρηστών σε όλες τις άλλες κυψέλες, που συμβολίζεται ως η περιοχή $\bar{S}_0$, είναι

$$I_{S_o} = E \int_{S_o} \int \left[\frac{r_1^m(x,y)10^{\zeta_1/10}}{r_0^m(x,y)10^{\zeta_0/10}}\right] \kappa dA(x,y) \qquad (6.6)$$

Ο δείκτης 0 αναφέρεται στη δεδομένη κυψέλη, ώστε $r_0(x,y)$ να είναι η απόσταση από το χρήστη στο σταθμό βάσης της συγκεκριμένης κυψέλης. Ο δείκτης 1 αναφέρεται στην χωρητικότητα της κυψέλης, ώστε $r_1(x,y)$ να είναι η απόσταση από το χρήστη στον πλησιέστερο σταθμό βάσης σε (x, y). Τα $\zeta_0$ και $\zeta_1$ αναφέρονται στις αντίστοιχες συνιστώσες τυχαίας διάδοσης σε decibel, όπως ορίζονται στα (6.1) και (6.2). Έτσι, ο παρονομαστής του όρου της παρένθεσης στην ολοκληρωτέα συνάρτηση του (6.6) είναι η απώλεια διάδοσης προς το δεδομένο σταθμό βάσης, ενώ ο αριθμητής είναι η προσαρμογή κέρδους μέσω ελέγχου ισχύος από τον πλησιέστερο σταθμό βάσης. Το $\bar{S}_0$ είναι ολόκληρη η περιοχή έξω από τη δεδομένη (μηδενική) κυψέλη, που αποτελείται από όλες τις άλλες κυψέλες. Προσέξτε ακόμη ότι για κάθε κυψέλη στο $\bar{S}_0$, το $r_1(x,y)$ αναφέρεται στην απόσταση προς ένα διαφορετικό (πλησιέστερο) σταθμό βάσης. Προσέξτε, τέλος, ότι όλες οι παράμετροι στην (6.6) εξαρτώνται και προσδιορίζονται από τη θέση εκτός από τα $\zeta_0$ και $\zeta_1$, που είναι τυχαία, αλλά δεν εξαρτώνται από τη θέση. Τότε, ορίζοντας

$$R_1(x,y) = r_1(x,y)/r_0\,(x,y) \quad \text{και } \beta = \ln(10)/10 \qquad (6.7)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε το (6.6) ως εξής

$$I_{\bar{S}_0} = e^{\beta(\zeta_i - \zeta_j)} \int_{\bar{S}_0} \int R_1^m(x,y)\,\kappa\, dA(x,y) \qquad (6.8)$$

Όμως, από το (6.3) έχουμε

$$\zeta_1 - \zeta_0 = b(\xi_1\, \xi_0),$$

που είναι μια Gaussian τυχαία μεταβλητή με μηδενικό μέσο όρο και εφόσον $\xi_1$ και $\xi_0$ είναι ανεξάρτητα, Var $(\xi_1 - \xi_0) = 2\sigma^2$

Έστω

$$\mathrm{E}e^{\beta b(\xi_1\ \xi_0)} = \mathrm{E}e^{\beta bx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta bx} e^{-x^2/4\sigma^2}}{\sqrt{4\pi}\sigma} dx = e^{b^2(\beta\sigma)^2} \qquad (6.9)$$

Επομένως, από τα (6.8) και (6.9) χρησιμοποιώντας το (6.5), βρίσκουμε για τη μέση παρεμβολή άλλων κυψελών που κανονικοποιήθηκε από τον αριθμό των χρηστών ανά κυψέλη

$$f \triangleq \frac{I_{\bar{S}_0}}{k_u} = e^{b^2(\beta\sigma)^2} \left[\frac{2}{3\sqrt{3}} \int_{\bar{S}_0} \int R_1^m(x,y)\ \kappa\ dA(x,y)\right] \qquad (6.10)$$

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης για m = 3, 4 και 5 με α = b = 1 / $\sqrt{2}$ δίνονται στον Πίνακα 6.1.

**Table 6.1** Relative Other-Cell Interference Factor, $f$, for $m = 3, 4$, and 5 and $a^2 = \frac{1}{2}$ with Hard Handoff

| Total Standard Deviation, $\sigma$ | $m = 3$ | $m = 4$ | $m = 5$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.77 | 0.44 | 0.30 |
| 2 | 0.86 | 0.48 | 0.33 |
| 4 | 1.18 | 0.67 | 0.46 |
| 6 | 2.01 | 1.13 | 0.78 |
| 8 | 4.21 | 2.38 | 1.64 |
| 10 | 10.9 | 6.17 | 4.27 |
| 12 | 35.1 | 19.8 | 13.7 |

## 6.4.3 Λήψη ήπιας μεταπομπής από την καλύτερη από τις δύο πλησιέστερες κυψέλες

Για να προσεγγίσουμε την επίδοση ενός συστήματος ήπιας μεταπομπής, στη συνέχεια θα εξετάσουμε την παρεμβολή άλλων κυψελών όταν ο χρήστης επιτρέπεται να είναι σε ήπια μεταπομπή μόνο προς τις δύο πλησιέστερες κυψέλες. Στην ήπια μεταπομπή ο

χρήστης είναι συνδεδεμένος με δύο ή περισσότερους σταθμούς βάσης κυψελών και στιγμιαία, σε μια βάση πλαίσιο-προς-πλαίσιο, το καλύτερο πλαίσιο που λαμβάνεται από οποιονδήποτε από τους δύο σταθμούς βάσης γίνεται αποδεκτό από το δίκτυο.

Πάλι θα εξετάσουμε τη μηδενική κυψέλη. Η περιοχή, για την οποία ο σταθμός βάσης αυτής της κυψέλης μπορεί να είναι σε ήπια μεταπομπή με το χρήστη, που πάλι συμβολίζεται $S_0$, είναι το εξάγωνο αστέρι που περιέχει την κυψέλη (φαίνεται με διακεκομμένο περίγραμμα στο Σχήμα 6.2). Με $S_0$, οποιοσδήποτε χρήστης που επικοινωνεί με έναν από τους 6 πλησιέστερους γείτονες θα εισάγει παρεμβολή στο μηδενικό σταθμό βάσης. Όμως, αυτό συμβαίνει μόνο αν η απώλεια διάδοσης προς εκείνο το γείτονα είναι μικρότερη από εκείνη προς το μηδενικό σταθμό βάσης, στην οποία περίπτωση ο πρώτος ελέγχει την ισχύ.

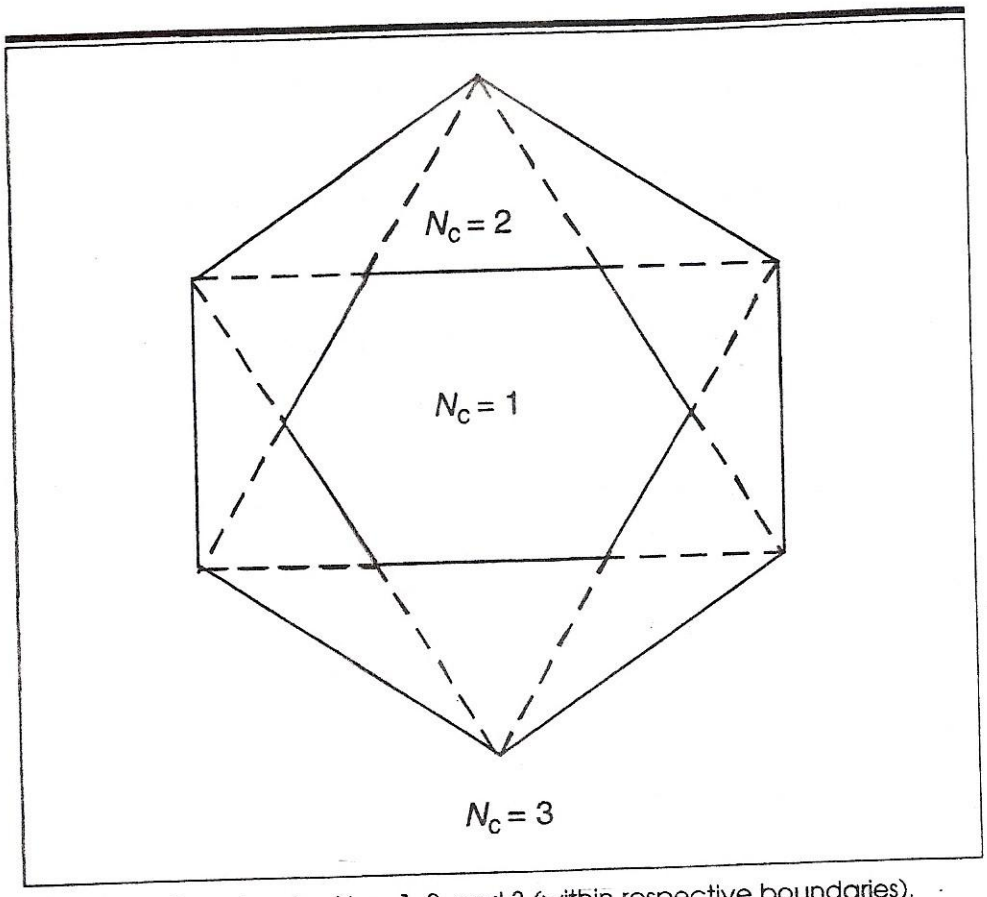



**Figure 6.2** $S_0$ regions for $N_C = 1, 2,$ and 3 (within respective boundaries).

Έτσι, η μέση συνολική παρεμβολή στο μηδενικό σταθμό βάσης από εντός της $S_0$ περιοχής είναι

$$\mathrm{I}_{\mathrm{S_o}} = \int_{\bar{\mathrm{S}}_0} \int \mathrm{R}_1^{\mathrm{m}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \mathrm{E}\left[10^{\zeta_1-\zeta_0/10};\ \mathrm{r}_1^{\mathrm{m}}(\mathrm{x},\mathrm{y})10^{\zeta_1/10} < \mathrm{r}_0^{\mathrm{m}}(\mathrm{x},\mathrm{y})10^{\zeta_0/10}\right] \kappa \mathrm{dA}(\mathrm{x},\mathrm{y}),$$

όπου η προσδοκία είναι πάνω από το δείγμα χώρου για το οποίο επιτυγχάνεται ανισότητα.

Ορίζουμε

$$M_i(x,y) = 10m\ log_{10} r_i(x,y) \tag{6.11}$$

και χρησιμοποιούμε τους ορισμούς των (6.7) και (8.8). Μειώνοντας προς διευκόλυνση το συμβολισμό της εξάρτησης από τα x και y, βρίσκουμε

$$\mathrm{I}_{\mathrm{S_o}} = \int_{\mathrm{S_0}} \int \mathrm{R}_1^{\mathrm{m}}\ \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\beta \mathrm{b}(\xi_1-\xi_0)};\ \xi_1 - \xi_0 < (\mathrm{M}_0 - \mathrm{M}_1)/\mathrm{b}]\ \kappa \mathrm{dA}$$

$$= \int_{\mathrm{S_0}} \int \mathrm{R}_1^{\mathrm{m}} \left[\int_{-\infty}^{(\mathrm{M}_0-\mathrm{M}_1)/\mathrm{b}} e^{\beta bx} \frac{e^{-x^2/4\sigma^2}}{\sqrt{2\pi(2\sigma^2)}} dx\right] \kappa dA$$

(6.12)

$$= e^{b^2(\beta\sigma)^2} \int_{S_0} \int R_1^m \left[\int_{-\infty}^{(M_0-M_1)/b} \frac{e^{-(x-2b\beta\sigma^2)/4\sigma^2}}{\sqrt{2\pi(2\sigma^2)}} dx\right]$$

$$= e^{b^2(\beta\sigma)^2} \int_{S_0} \int R_1^m\, Q\left[\sqrt{2}b\beta\sigma + \frac{M_1-M_0}{\sqrt{2}b\sigma}\right] \kappa\ dA$$

Εδώ

$$Q(y) = \int_y^{\infty} e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{-y} e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$$

και $R_1(x, y)$ και $M_1(x, y)$, όπως ορίζονται στα (6.7) και (6.11), αναφέρονται στον πλησιέστερο σταθμό βάσης εκτός από τον μηδενικό.

Τώρα για την επιπλέον περιοχή $\bar{S}_0$ (έξω από το εξάγωνο αστέρι), οι δύο πλησιέστεροι σταθμοί βάσης που συμπεριλαμβάνονται σε μια πιθανή ήπια μεταπομπή δεν περιλαμβάνουν τον μηδενικό. Έστω ότι οι εκθέτες 1 και 2 συμβολίζουν τους δύο πλησιέστερους σταθμούς βάσης, που περιλαμβάνουν όλα τα παρακείμενα ζεύγη κυψελών σε ολόκληρη την επιφάνεια. Τότε, η συνολική μέση παρεμβολή προς το μηδενικό σταθμό από την περιοχή $\bar{S}_0$ είναι

$$I_{\bar{S}_0} = \int_{S_0} \int R_1^m\,(x,y) E[10^{\zeta_1-\zeta_0/10};\ r_1^m(x,y)10^{\zeta_1/10} < r_2^m(x,y)10^{\zeta_2/10}]\kappa\, dA\,(x,y)$$

$$\int_{S_0} \int R_2^m\,(x,y) E[10^{\zeta_2-\zeta_0/10};\ r_2^m(x,y)10^{\zeta_2/10} < r_1^m(x,y)10^{\zeta_1/10}]\kappa\, dA\,(x,y) \qquad (6.13)$$

$$\triangleq\ I_1 + I_2.$$

Και πάλι μειώνοντας το χωρικό συμβολισμό, αξιολογούμε το πρώτο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας το (6.3) και την ανεξαρτησία των $\xi_i$ μεταβλητών ως εξής:

$$I_1 = \int_{S_0} \int R_1^m\, E[e^{\beta b(\xi_1-\xi_0)};\ b\xi_1 + M_1 < b\xi_2 + M_2]\,\kappa dA$$

$$= \int_{S_0} \int R_1^m\, E(e^{-\beta b\xi_0});\ \{\int_{-\infty}^{\infty}[\,e^{\beta b\xi_1} e^{-\xi_1^2/2\sigma^2}/(2\sqrt{2\pi}\sigma)]$$

$$\times \Pr(b\xi_2 > b\xi_1 + M_1 - M_2)\, d\xi_1\}\kappa dA$$

$$= e^{2b^2(\beta\sigma)^2/2} \int_{S_0} \int R_1^m\, [\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi_1-b\beta\sigma^2)^2/2\sigma^2}\, d\xi_1$$

$$\times \int_{\xi_1+(M_1-M_2)/b}^{\infty} e^{\xi_2^2/2\sigma^2}\, d\xi_2/(2\,\pi\sigma^2)]\kappa dA$$

$$= e^{b^2(\beta\sigma)^2} \int_{S_0} \int R_1^m\, [\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2/2\sigma^2} dx_1$$

$$\times \int_{x_1+b^2\beta\sigma^2+(M_1-M_2)/b}^{\infty} e^{x_2^2/2\sigma^2}\, dx_2/(2\,\pi\sigma^2)]\kappa dA$$

$$= e^{b^2(\beta\sigma)^2} \int_{S_0} \int R_1^m\, Q\left(\frac{b\beta\sigma}{\sqrt{2}} + \frac{M_1-M_2}{\sqrt{2}b\sigma}\right)\kappa dA$$

Τώρα το δεύτερο ολοκλήρωμα $I_2$ είναι το ίδιο με το $I_1$, με $M_1$ και $M_2$ να έχουν αντιμετατεθεί. Όμως, εφόσον οι δείκτες 1 και 2 αναπαριστούν τις δύο πλησιέστερες κυψέλες, είναι εναλλάξιμοι κι έτσι $I_1 = I_2$. Έτσι, συνδυάζοντας τα (6.12), (6.13) και (6.14) και χρησιμοποιώντας το (6.5) και $b = 1 / \sqrt{2}$, βρίσκουμε τη σχετική παρεμβολή στο σταθμό βάσης μηδενικής κυψέλης από όλους τους χρήστες που δεν ελέγχονται από το σταθμό βάσης:

$$f = \frac{I_{S_0} + I_{\bar{S}_0}}{k_u} = \frac{2e^{(\beta\sigma)^2/2}}{3\sqrt{3}} \left[ \int_{S_0} \int \mathrm{R}_1^{\mathrm{m}}\, Q\left(\beta\sigma + \frac{M_1 - M_0}{\sigma}\right) \mathrm{dA} \right] \tag{6.15}$$

$$+2 \int_{S_0} \int \mathrm{R}_1^{\mathrm{m}}\, Q\left(\frac{\beta\sigma}{2} + \frac{M_1 - M_0}{\sigma}\right) \mathrm{dA}]$$

Πάλι, στα χωρικά ολοκληρώματα στο $S_0$ και $\bar{S}_0$, τα $R_1$, $R_2$ και $M_1$, $M_2$ αναφέρονται στους δύο σταθμούς βάσης που είναι πιο κοντά στο χρήστη σε (x,y).

Η τιμή της σχετικής παρεμβολής, f, αξιολογείται αριθμητικά και φαίνεται στον Πίνακα 6.2. Για όλα τα m και σ, η τιμή μειώνεται σημαντικά από την περίπτωση μοναδικής κυψέλης (σκληρή μεταπομπή).

## 6.4.4 Λήψη ήπιας μεταπομπής από την καλύτερη από πολλαπλές κυψέλες

Αν και η ήπια μεταπομπή πραγματοποιείται γενικά ανάμεσα σε δύο κυψέλες, μπορεί να είναι αναμεσα σε τρεις ή περισσότερες, και σε κάθε περίπτωση, θα πρέπει πάντα να είναι δυνατό να αλλάξουμε το σύνολο. Μπορούμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα της τελευταίας ενότητας αυξάνοντας το υποψήφιο σύνολο για μεταπομπή προς τους σταθμούς βάσης σε $N_C - 1$ κυψέλες που είναι πιο κοντά στη μηδενική κυψέλη. Έτσι, η περιοχή $S_0$ διευρύνεται. Για παράδειγμα, το Σχήμα 6.2 δείχνει ότι το $S_0$ για $N_C = 3$ είναι ένα

μεγάλο εξάγωνο που περιβάλλει το εξάγωνο αστέρι, δηλαδή είναι $S_0$ για $N_C = 2$.

Γενικεύοντας την ανάλυση της τελευταίας ενότητας, βρίσκουμε ότι η μέση συνολική παρεμβολή προς το μηδενικό σταθμό βάσης από εντός της περιοχής $S_0$ είναι

$$I_{S_0} = \int_{S_0} \int \sum_{j=1}^{N_c-1} R_j^m E\left[10^{(\zeta_j-\zeta_0)/10};\right]$$

$$Min_{i=1}^{N_c-1} r_i^m 10^{\zeta_i/10} = r_j^m 10^{\zeta_j/10} < r_0^m 10^{\zeta_0/10}]\kappa dA$$

$$= \int_{S_0} \int \sum_{j=1}^{N_c-1} R_j^m E\left[e^{\beta(\zeta_j-\zeta_0)}; \zeta_0 + M_0 > \zeta_j + M_j = \mathrm{Min}_{i=1}^{N_c-1}(\zeta_i + M_i\right] \kappa dA$$

$$= \int_{S_0} \int \sum_{j=1}^{N_c-1} R_j^m E[e^{\beta b(\xi_1-\xi_0)};\ \xi_i > \xi_j + (M_j - M_i)/b$$

$$\text{για όλα τα } i \neq j; j \neq 0]$$

$$= e^{b^2(\beta\sigma)^2} \int_{S_0} \int \sum_{j=1}^{N_c-1} R_j^m [\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\xi_j-b\beta\sigma^2)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} d\xi_j$$

$$\times \int_{\xi_j+(M_j-M_0)/b}^{\infty} \frac{e^{-(\xi_0-b\beta\sigma^2)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} d\xi_0$$

$$\times \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N_c-1} \int_{\xi_j+(M_j-M_0)/b}^{\infty} \frac{e^{-\xi_i^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} d\xi_i]\kappa dA$$

$$= e^{b^2(\beta\sigma)^2} \int_{S_0} \int \sum_{j=1}^{N_c-1} R_j^m [\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} Q\ \left(z + \frac{M_j-M_0}{b\sigma} + 2b\beta\sigma\right)$$

$$\times \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N_c-1} Q(z + \frac{M_j-M_0}{b\sigma} + b\beta\sigma)dz]\kappa dA \qquad (6.16)$$

Ομοίως, για τη μέση συνολική παρεμβολή προς το μηδενικό σταθμό βάσης από όλους τους χρήστες στην περιοχή $\bar{S}_0$, έχουμε

$$I_{\bar{S}_0} = \int_{\bar{S}_0} \int \sum_{j=1}^{N_c} R_j^m E[\, 10^{(\zeta_j-\zeta_0)/10}; r_j^m 10^{\zeta_j/10} < r_i^m 10^{\zeta_i/10}$$

$$\text{για όλα τα } i \neq j, j > 0]\kappa dA$$

$$= \int_{\bar{S}_0} \int \sum_{j=1}^{N_c} R_j^m E[\, e^{\beta(\zeta_j-\zeta_0)}; \zeta_j + M_j < \zeta_i + M_i$$

$$\text{για όλα τα } i \neq j, i > 0]\kappa dA$$

$$= \int_{\bar{S}_0} \int \sum_{j=1}^{N_c} R_j^m E[\, e^{\beta b(\xi_j-\xi_0)};\ \xi_i + (M_j - M_i)/b$$

$$\text{για όλα τα } i \neq j, i > 0]\kappa dA$$

$$= e^{b^2(\beta\sigma)^2} \int_{\bar{S}_0} \int \sum_{j=1}^{N_c} R_j^m [\frac{e^{-(\xi_j - b\beta\sigma^2)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} d\xi_j \qquad (6.17)$$

$$\times \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N_c-1} \int_{\xi_j+(M_j-M_0)/b}^{\infty} \frac{e^{-\xi_i^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} d\xi_i]\kappa dA$$

$$= N_c e^{b^2(\beta\sigma)^2} \int_{\bar{S}_0} \int R_1^m \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i=2}^{N_c} Q\left(z + b\beta\sigma + \frac{M_1 - M_i}{b\sigma}\right) dz\right] \kappa dA$$

Προσέξτε ότι, στο (6.17) το τελευταίο βήμα προκύπτει από το γεγονός ότι οι εκθέτες 1 έως $N_C$ εκπροσωπούν τις $N_C$ πλησιέστερες κυψέλες κι επομένως, είναι εναλλάξιμοι. Έτσι, οι πρώτοι εκθέτες μπορούν να είναι ίσοι με το 1 σε κάθε περίπτωση χωρίς να μεταβάλλεται το αποτέλεσμα.

Από αυτά βρίσκουμε τη σχετική παρεμβολή στη μηδενική κυψέλη από όλους τους χρήστες που δεν ελέγχονται από το σταθμό βάσης

$$f = \frac{I_{S_0} + I_{\bar{S}_0}}{k_u} \qquad (6.18)$$

Τα $I_{S0}$ και $I_{\bar{S}0}$ δίνονται από το (6.16) αντίστοιχα, με κ = $2k_U/(3\sqrt{3})$. Ακόμη, όπως πριν, μπορούμε να λάβουμε b = $1/\sqrt{2}$. Αυτό το γενικό αποτέλεσμα εξειδικεύεται στις προηγούμενες παραστάσεις (6.15) για $N_C$ = 2 και (6.10) για $N_C$ = 1. Ο Πίνακας 6.3 περιέχει τα αποτελέσματα των αριθμητικών ολοκληρώσεων των (6.16) και (6.17) για $N_C$ =3 και 4. Επίσης, περιλαμβάνει τις αριθμητικές ολοκληρώσεις για $N_C$ = 2 και $N_C$ = 1 των Πινάκων 6.2 και 6.1 αντίστοιχα, για m = 4 και αρκετές τιμές του σ. Προφανώς, για σ $\leq$ 6 dB, η χρήση των δύο πλησιέστερων γειτόνων είναι αρκετή για να έχουμε τα περισσότερα πλεονεκτήματα της ήπιας μεταπομπής. Για σ =8 dB, η χρήση τριών γειτόνων (για να χειριστούμε καλύτερα τις γωνίες της κυψέλης) παρέχει ένα σημαντικό επιπρόσθετο πλεονέκτημα.

Προσέξτε, τέλος, ότι αν και έχουμε ανεπιφύλακτα χρησιμοποιείσει μια πολυκατευθυντική κεραία σταθμού βάσης λόγω της υπόθεσης ενεργοποίησης ομοιόμορφου χρήστη που υπονοεί κυκλική συμμετρία, όλα τα αποτελέσματα ισχύουν ακόμη για ένα μοναδικό τομέα μιας πολυτομεακής κεραίας κυψέλης.

**Table 6.3** Relative Other-Cell Interference Factor, $f$, for $N_c$ = 1, 2, 3, and 4 ($m$ = 4; $\sigma^2 = \frac{1}{2}$)

| Total Standard Deviation | $N_c = 1$ | $N_c = 2$ | $N_c = 3$ | $N_c = 4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.44 | 0.44 | 0.44 | 0.44 |
| 2 | 0.48 | 0.43 | 0.43 | 0.43 |
| 4 | 0.67 | 0.47 | 0.45 | 0.45 |
| 6 | 1.13 | 0.56 | 0.49 | 0.49 |
| 8 | 2.38 | 0.77 | 0.57 | 0.55 |
| 10 | 6.17 | 1.28 | 0.75 | 0.66 |
| 12 | 19.8 | 2.62 | 1.17 | 0.91 |

## 6.5 Ζητήματα κάλυψης κυψέλης με σκληρή και ήπια μεταπομπή

Πριν ασχοληθούμε με τα ζητήματα χωρητικότητας στην επόμενη ενότητα, θα ερευνήσουμε την επίδραση της ήπιας μεταπομπής στη κάλυψη κυψέλης. Καθορίζουμε την κάλυψη κυψέλης για ένα σχεδόν ανενεργό σύστημα, λαμβάνοντας ένα μοναδικό χρήστη που εκπέμπει σε οποιονδήποτε από τους δύο παρακείμενους σταθμούς βάσης μόνο όταν έχουν θόρυβο υποβάθρου, χωρίς να είναι παρόν κανένας άλλος χρήστης. Υποθέτουμε, όπως συνήθως, ότι έχουμε κανονική log επισκίαση και κανονικοποιούμε την ακτίνα της κυψέλης προς ενότητα.

### 6.5.1 Σκληρή μεταπομπή

Ας εξετάσουμε μια σκληρή μεταπομπή που συμβαίνει ακριβώς στο όριο ανάμεσα σε κυψέλες (υποθέτοντας μια ιδανική κατάσταση που καθιερώνεται από έναν εξωτερικό παρατηρητή). Τότε η σχετική απόσβεση από τον κινητό χρήστη στο όριο προς οποιοδήποτε από τους δύο σταθμούς βάσης σε απόσταση $r_i$ δίνεται από το (6.2),

$$10 \log a(r_i,\ \zeta_i) \triangleq 10m \log r_i + \zeta_i\ ,\ i = 1,2 \qquad (6.19)$$

Εδώ τα $r_i$ είναι οι κανονικοποιημένες αποστάσεις προς τους σταθμούς βάσης και $\zeta_i$ είναι οι αντίστοιχες κανονικές log τιμές επισκίασης με μηδενικό μέσο όρο και τυπική απόκλιση σ.

Χωρίς επισκίαση, η ελάχιστη ισχύς (μετριέται σε decibel) που απαιτείται από τον πομπό του κινητού μόνο για να ξεπεραστεί ο θόρυβος του υποβάθρου είναι, φυσικά, ανάλογη με το 10m log r. Κανονικοποιώντας την ακτίνα της κυψέλης σε r = 1, εξαλείφουμε αυτόν τον (κοινό) όρο στο όριο. Από την άλλη πλευρά, η τυχαία συνιστώσα λόγω της επισκίασης, ζ, απαιτεί αυξημένη ελάχιστη ισχύ για να εγγυηθούμε την ίδια επίδοση την περισσότερη ώρα. Ας υποθέσουμε ότι η ζεύξη χρειάζεται να πετύχει τουλάχιστον την επίδοση μιας μη σκιασμένης διάδοσης διαρκώς εκτός από ένα τμήμα

$P_{out}$ του χρόνου, που θα συμβολιστεί με πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας. Ένα όριο γ dB πρέπει τότε να προστεθεί στην εκπεμπόμενη ισχύ. Η επιθυμητή επίδοση θα επιτευχθεί όταν η απόσβεση της επισκίασης ζ < γ. Έτσι, η πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας (ή τμήμα του χρόνου που δεν επιτυγχάνεται η επίδοση) είναι

$$P_{out} = \Pr(\zeta > \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\gamma}^{\infty} e^{-\xi^2/2\sigma^2}\, d\zeta = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) \qquad (6.20)$$

Αν χρειάζεται τα σημεία πάνω στο όριο να καλύπτονται επαρκώς κατά το 90% του χρόνου, τότε $P_{out}$ = 0.1. Για σ = 8 dB προκύπτει ότι το όριο γ = 10.3 dB.

Από την άλλη πλευρά, για σκληρή μεταπομπή, η ιδανική κατάσταση μεταπομπής στο όριο κυψέλης είναι και μη ρεαλιστική και ανεπιθύμηστη. Αυτό συμβαίνει διότι μπορεί να οδηγήσει σε «πινγκ-πονγκ» φαινόμενο, όπου ένας χρήστης κοντά στο όριο πηγαίνει πίσω και μπροστά αρκετές φορές από τον ένα σταθμό βάσης στον άλλο. Σε πρακτικά συστήματα σκληρής μεταπομπής, η μεταπομπή συμβαίνει μόνο αφού η ισχύς του σταθμού βάσης της πρώτης κυψέλης μειωθεί αρκετά κάτω από την τιμή της στο όριο. Ας υποθέσουμε ότι αυτό συμβαίνει, με την απαιτούμενη πιθανότητα, όταν ο χρήστης έχει κινηθεί κατά μια λογική απόσταση πέρα από το όριο. Έστω ότι ο λόγος αυτής της απόστασης προς την ακτίνα της κυψέλης είναι r’ > 1. Σε αυτή την απόσταση από το σταθμό βάσης της πρώτης κυψέλης, η πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας, για ένα όριο γ, γίνεται

$$P_{out} = \Pr\left(10m\log r' + \zeta > \gamma\right) = Q\left(\frac{\gamma - 10m\log r'}{\sigma}\right) \qquad (6.21)$$

Επομένως, για μια πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας $P_{out}$ = .1 και σ = 8 dB, το απαιτούμενο όριο είναι

$$\gamma = 10\mathrm{m}\log \mathrm{r}' + 10.3\mathrm{dB} \qquad (6.22)$$

Οι δύο πρώτες στήλες του Πίνακα 6.4 δείχνουν το όριο που απαιτείται για ένα νόμο διάδοσης m = 4 ως μια συνάρτηση του r’ ,

της σχετικής απόστασης πέρα από το όριο της κυψέλης όπου συμβαίνει η σκληρή μεταπομπή. Έτσι, για ένα σχετικά μικρό εύρος επιπρόσθετης απόστασης πέρα από το όριο της κυψέλης για τη σκληρή μεταπομπή, το όριο πρέπει να αυξηθεί κατά 2 έως 4 dB.

**Table 6.4** Relative Margin and Coverage ($m = 4$; $\sigma^2 = \frac{1}{2}$)

| Relative Distance beyond Cell Boundary r′ | Hard Handoff Required Margin $\gamma_{Hard}$ (dB) | Relative Margin $\gamma_{Hard} - \gamma_{Soft}$ (dB) | Relative Coverage Area |
|---|---|---|---|
| 1 | 10.3 | 4.1 | 1.6 |
| 1.05 | 11.1 | 4.9 | 1.8 |
| 1.1 | 12.0 | 5.8 | 2.0 |
| 1.15 | 12.7 | 6.5 | 2.1 |
| 1.2 | 13.5 | 7.3 | 2.3 |
| 1.25 | 14.2 | 8.0 | 2.5 |

## 6.5.2 Ήπια μεταπομπή

Για ήπια μεταπομπή, τώρα δείχνουμε ότι το απαιτούμενο όριο είναι πολύ μειωμένο. Η ήπια μεταπομπή θα συμβεί σε ένα εύρος αποστάσεων από τους δύο σταθμούς βάσης. Σε οποιοδήποτε δεδομένο χρόνο, ή για οποιοδήποτε δεδομένο πλαίσιο ή πακέτο, η καλύτερη από τις λήψεις των δύο σταθμών βάσης θα χρησιμοποιηθεί στο κέντρο μεταγωγής. Υποθέτουμε προς διευκόλυνσή μας(και λίγο πεσιμιστικά) ότι αυτό εξαρτάται μόνο από την απόσβεση. Τότε οι μικρότερες αποσβέσεις του (6.19) θα ισχύουν. Έτσι, το όριο γ χρειάζεται μόνο για να ικανοποιηθεί η απαίτηση της πιθανότητας διακοπής της επικοινωνίας,

$$P_{out} = \Pr\{Min[M_1 + \zeta_1, M_2 + \zeta_2] > \gamma\}$$

(6.23)

όπου το $M_i$ ορίζεται στο (6.11).

Όμως, εφόσον τα $\zeta_1$ και $\zeta_2$ συσχετίζονται σύμφωνα με τον ορισμό τους (6.3), μπορούμε να τα εκφράσουμε σε σχέση με τις ανεξάρτητες μεταβλητές ξ, $\xi_1$ ξαι $\xi_2$, βρίσκοντας έτσι

$$P_{out} = \Pr\{Min[M_1 + b\xi_1, M_2 + b\xi_2] > \gamma - \alpha\xi\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2\sigma^2} d\xi \int_{(\gamma-\alpha\xi-M_1)/b}^{\infty} e^{-\xi_1^2/2\sigma^2} d\xi_1$$

$$\times \int_{(\gamma-\alpha\xi-M_2)/b}^{\infty} e^{-\xi_2^2/2\sigma^2} d\xi_2 \qquad (6.24)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} Q\left(\frac{\gamma-M_1-\alpha\sigma x}{b\sigma}\right) Q\left(\frac{\gamma-M_2-\alpha\sigma x}{b\sigma}\right) dx$$

Τώρα εφόσον το κινητό θεωρούμε ότι βρίσκεται είτε στην κυψέλη 1 είτε στην κυψέλη 2, τότε είτε $r_1 \leq 1$, $r_2 \geq 1$ είτε $r_1 \geq$, 1 $r_2 \leq 1$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $r_1 = r_2 = 1$ (όπου το κινητό βρίσκεται ακριβώς στο όριο) εκπροσωπεί τη χειρότερη περίπτωση, ώστε $M_1 = M_2 = 0$ και

$$P_{out} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \left[Q\left(\frac{\gamma - \alpha\sigma x}{b\sigma}\right)\right]^2 dx \qquad (6.25)$$

Για α = b = $1/\sqrt{2}$ και σ = 8 dB, βρίσκουμε ότι για πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας Pout = 0.1, το όριο $\gamma_{soft}$ = 6.2 dB.

Έτσι, όπως σημειώσαμε στην τρίτη στήλη του Πίνακα 6.4, το απαιτούμενο όριο για ήπια μεταπομπή είναι (συντηρητικά) περίπου 6 dB έως 8 dB λιγότερο απ' ό,τι στη σκληρή μεταπομπή. Η περιοχή κυψέλης είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της ακτίνας, ενώ η απώλεια διάδοσης είναι ανάλογη προς την τέταρτη δύναμη. Προκύπτει ότι αυτή η οριακή μείωση εκπροσωπεί μια περιοχή κυψέλης για ήπια μεταπομπή 3 έως 4 dB, ή μια μείωση στον αριθμό των κυψελών κι επομένως, των σταθμών βάσης με τον παράγοντα 2 έως 2.4, όπως φαίνεται στην τελευταία στήλη του Πίνακα 6.4. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να διευρυνθεί στην περίπτωση που οι κυψέλες είναι επίσης ενεργές [Vijayan et al., 1994]. Σε αυτή την περίπτωση, η κάλυψη θα εξαρτάται επίσης από τον αριθμό των χρηστών ανά τομέα και τέλος, το μέγεθος κυψέλης θα εξαρτάται κυρίως από τον

αριθμό των χρηστών και την κατανομή τους σε μια συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή. Στην επόμενη ενότητα, εξετάζουμε την έσχατη χωρητικότητα κυψέλης ανεξαρτήτως του μεγέθους. Εκεί πάλι βρίσκουμε ότι η ήπια μεταπομπή, που μειώνει την παρεμβολή άλλων κυψελών, όπως φαίνεται στην Ενότητα 6.4, στηρίζει επίσης σημαντικά μεγαλύτερη χωρητικότητα απ' ό,τι η σκληρή μεταπομπή.

## 6.6 Erlang χωρητικότητα των ανάστροφων ζευγών

### 6.6.1 Erlang χωρητικότητα για πολλαπλή πρόσβαση συμβατικά ανατιθέμενης θυρίδας

Η χωρητικότητα ενός δικτύου πολλαπλής πρόσβασης μετριέται από το μέσο αριθμό χρηστών που λαμβάνουν υπηρεσία σε ένα δεδομένο χρόνο με ένα δεδομένο επίπεδο ποιότητας, που περιλαμβάνει απαιτήσεις τόσο για την ακρίβεια όσο και για τη διαθέσιμη υπηρεσία. Για συμβατική πολλαπλή πρόσβαση διαίρεσης συχνότητας και διαίρεσης χρόνου (που θα ονομάσουμε δίκτυα ανατιθέμενης θυρίδας γιατί μια θυρίδα σε χρόνο ή συχνότητα ή και τα δύο ανατίθεται σε κάθε κλήση), η ανάλυση της ουράς πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά σχεδόν πριν έναν αιώνα για ενσύρματο φορτίο τηλεφώνου από τον Erlang [Bertsekas και Gallager, 1987[. Αυτό καθιέρωσε τη χωρητικότητα ως μια συνάρτηση διαθεσιμότητας. Η διαθεσιμότητα ορίζεται ως το συμπλήρωμα της πιθανότητας ένας χρήστης να μη λάβει την υπηρεσία σε κάποιο δεδομένο χρόνο επειδή όλες οι θυρίδες έχουν επί του παρόντος ανατεθεί σε κλήσεις-μια κατάσταση που προκαλεί ένα σήμα απασχολημένου. Σε ένα ασύρματο σύστημα, ο συνολικός αριθμός των διαθέσιμων θυρίδων εξαρτάται από το συνολικό εύρος ζώνης, το ρυθμό δεδομένων ανά χρήστη και το συντελεστή επαναχρησιμοποίησης της συχνότητας, όλα από τα οποία καθορίζουν την ποιότητα του τηλεφωνήματος από την άποψη της διαθεσιμότητας ή της ακρίβειας ή και τα δύο. Μεταθέτουμε αυτά τα ζητήματα στο τέλος αυτής της ενότητας. Για συστήματα χωρίς

θυρίδες χρησιμοποιώντας πολλαπλή πρόσβαση διάχυτου φάσματος υπάρχουν άλλες μεταβλητές πέραν της έντασης του φορτίου και θα τις εξετάσουμε στο 6.6.2.

Κανονικά, για μεγάλο πληθυσμό χρηστών, ο ρυθμός άφιξης της κλήσης ανά χρήστη είναι σχετικά μικρός, αλλά ο συνολικός μέσος ρυθμός άφιξης από όλο τον πληθυσμό, λ κλήσεις/s μπορεί να είναι μεγάλος. Οι αφίξεις λαμβάνουν χώρα τυχαία σε διαστήματα κατανομής Poisson. Αυτό είναι ισοδύναμο της μοντελοποίησης της διαδικασίας άφιξης [Betsekas και Gallager, 1987] ως μια ακολουθία ανεξάρτητων δυαδικών μεταβλητών, σε διαδοχικά απειροστά χρονικά διαστήματα Δt, με μια μοναδική άφιξη ανά διάστημα να λαμβάνει χώρα με πιθανότητα λ (Δt). Ο χρόνος υπηρεσίας της κλήσης ανά χρήστη θεωρείται ότι είναι εκθετικά κατανεμημένος, ώστε η πιθανότητα ο χρόνος υπηρεσίας τ να ξεπεράσει το Τ δίνεται από

$$\Pr(\tau > T) = e^{-\mu T}, \quad T>0 \qquad (6.26)$$

Από αυτό προκύπτει ότι η μέση διάρκεια κλήσης είναι 1/μ s. Συνεχίζοντας με το απειροστικό ανεξάρτητο επαυξητικό μοντέλο, αυτό σημαίνει ότι για έναν μοναδικο σέρβερ (θυρίδα), η πιθανότητα να τερματιστεί η κλήση κατά τη διάρκεια ενός διαστήματος διάρκειας Δt δευτερολέπτων είναι

$$\Pr(T < \tau < T + \Delta t | \tau > T) = \left[e^{-\mu T} - e^{-\mu(T+\Delta t)}\right]/e^{-\mu T}$$

$$= 1 - e^{-\mu \Delta t} \sim \mu(\Delta T) + o(\Delta t) \quad (6.27)$$

όπου o(Δt) → 0 αφού Δt → 0. Ο αριθμός των θυρίδων χρόνου ή συχνότητας $K_0$ ισούται με το μέγιστο αριθμό χρηστών που μπορούν να εξυπηρετούνται ταυτόχρονα. Έτσι, εφόσον ο αριθμός των ενεργών κλήσεων k ≤ $K_0$, όλα τα k θα εξυπηρετηθούν. Στη συνέχεια, η πιθανότητα τουλάχιστον μία να τερματιστεί σε Δt είναι της τάξεως του kμ(Δt). Προσέξτε ότι η πιθανότητα περισσότερες από μία να τερματιστούν είναι o(Δt), που γίνεται αμελητέο ως Δt → 0.

Υπάρχουν δύο κοινώς χρησιμοποιημένα μοντέλα για τον καθορισμό της κατανομής χωρητικότητας και την πιθανότητα των χαμένων κλήσεων. Αυτά φαίνονται από τις αλυσίδες του Markov στα Σχήματα 6.3a και 6.3b, όπου οι καταστάσεις εκπροσωπούν τον αριθμό χρηστών στο σύστημα. Ονομάζονται μοντέλα όπου οι χαμένες κλήσεις εκκαθαρίζονται (Lost Call Cleared, LCC) και όπου οι χαμένες κλήσεις παραμένουν (Local Call Held, LCH). Στην πρώτη περίπτωση (LCC) υποθέτουμε ότι ένας νέος χρήστης επιχειρεί να εισέλθει στο δίκτυο όταν όλες οι θυρίδες (σέρβερ) είναι απασχολημένες, φεύγει κι επανέρχεται αργότερα μετά από ένα τυχαίο διάστημα. Σε εκείνη την περίπτωση θεωρείται νέος χρήστης κι έτσι αυξάνεται ελαφρώς το λ. Ο συνολικός αριθμός καταστάσεων είναι επομένως 1 +$K_0$. Στη δεύτερη περίπτωση (LCH), θεωρούμε ότι οι μη εξυπηρετημένοι χρήστες επαναλαμβάνουν τις προσπάθειές τους να κάνουν μια κλήση αμέσως κι έτσι, παραμένουν στο σύστημα, αν και δεν εξυπηρετούνται.

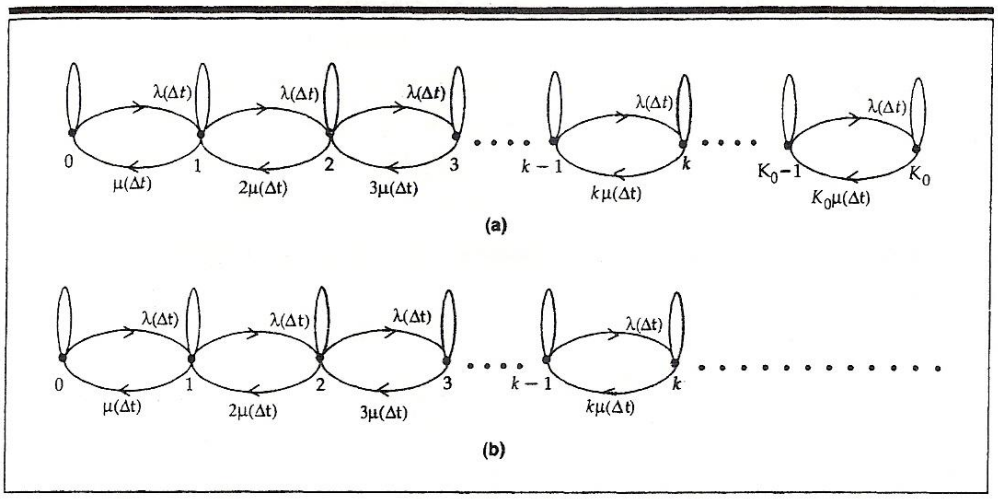



**Figure 6.3** Markov state diagrams for Erlang traffic models. (a) LCC model. (b) LCH model. All self loop probabilities are such as to make outgoing branch probabilities sum to unity.

Το αποτέλεσμα είναι ότι ο αριθμός των καταστάσεων είναι μη πεπερασμένος και ο μέσος χρόνος ανά κλήση (1 / μ) αυξάνει ελαφρώς ώστε το μ να μειώνεται ελαφρώς. Η καθαρή συνέπεια και των δύο μοντέλων είναι η ελαφρά αύξηση του λ / μ.

Οι εξισώσεις κατάστασης του Markov για το μοντέλο LCC του Σχήματος 6.3a, από την άποψη των πιθανοτήτων χωρητικότητας σταθερής κατάστασης $P_0$, $P_1$, …, $P_{K0}$, είναι τότε

$$P_0 = [1 - \lambda(\Delta t)]P_0 + \mu(\Delta t)P_1, \tag{6.28}$$

$$P_k = \lambda(\Delta t)P_{k-1} + [1 - (\lambda + k\mu)\Delta t]P_k + (k+1)\mu(\Delta t)P_{k+1}$$

$$k=1,2,\ldots\ldots, K_0 - 1 \tag{6.29}$$

$$P_{K_0} = \lambda(\Delta t)P_{K_0-1} + [1 - K_0\mu(\Delta t)]P_{K_0} \tag{6.30}$$

Προκύπτει με επαγωγή στο (6.29) και από τα (6.28) και (6.30) ότι

$$P_k = \frac{(\lambda/\mu)}{k}P_{k-1}, \qquad k = 1,2,\ldots\ldots,K_0 \tag{6.31}$$

Επομένως,

$$P_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}P_0, \qquad k = 1,2,\ldots\ldots,K_0 \tag{6.32}$$

και

$$1 = \sum_{k=0}^{K_0} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{K_0} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \tag{6.33}$$

Ο συνδυασμός του (6.32) και του (6.33) μας δίνει την κατανομή χωρητικότητας

$$P_K = \frac{(\lambda/\mu)^k/k!}{\sum_{j=0}^{K_0}(\lambda/\mu)^j/j!} \qquad k=0,1,\ldots\ldots,K_0 \tag{6.34}$$

καθώς και την πιθανότητα ένας νέος χρήστης να εισέλθει στο σύστημα και να βρει απασχολημένους όλους τους σέρβερ, η οποία είναι

$$P_B = \frac{(\lambda/\mu)^{K_0}/K_0!}{\sum_{j=0}^{K_0}(\lambda/\mu)^j/j!} \quad \text{(LCC)}. \tag{6.35}$$

Αυτή η τελευταία παράσταση, που ονομάζεται Erlang-B τύπος, είναι η πιθανότητα των χαμένων κλήσεων ή πιθανότητα μπλοκαρίσματος στο LCC μοντέλο.

Για το LCH μοντέλο του Σχήματος 6.3b, το (6.28) ισχύει ακόμη, αλλά τώρα το (6.29) ισχύει για όλα τα ακέραια k και το (6.30) δεν ισχύει πλέον (ομοίως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $K_0 \to \infty$). Έτσι, τα (6.31) και (6.32) τώρα ισχύουν για όλα τα k κι επομένως,

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} = P_0 e^{\lambda/\mu}$$

Έτσι, για το LCH μοντέλο,

$$P_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} e^{-\lambda/\mu}, k = 0,1,2, \ldots. \text{ (LCH)}, \qquad (6.36)$$

που είναι ο τύπος Poisson. Η πιθανότητα μπλοκαρίσματος εδώ είναι η πιθανότητα όταν ένας νέος χρήστης φτάσει να υπάρχουν $K_0$ ή περισσότεροι χρήστες στο σύστημα, είτε που εξυπηρετούνται είτε που ζητούν εξυπηρέτηση. Επομένως, η πιθανότητα μπλοκαρίσματος για το LCH μοντέλο είναι

$$P_B = \sum_{k=K_0}^{\infty} P_k = e^{-\lambda/\mu} \sum_{k=K_0}^{\infty} (\lambda/\mu)^k / k! \quad \text{(LCH)} \qquad (6.37)$$

που είναι ακριβώς το άθροισμα της ουράς της κατανομής Poisson.

Θα ευνοήσουμε το τελευταίο (LCH) μοντέλο και επειδή είναι πιο ρεαλιστικό για κινητούς χρήστες κι επειδή μοιάζει περισσότερο στην περίπτωση της πολλαπλής πρόσβασης χωρίς θυρίδες. Όπως σημειώθηκε ήδη, για μεγάλο $K_0$ τα αποτελέσματα που βρίσκουμε για τα δύο μοντέλα μοιάζουν πολύ. Και στις δύο περιπτώσεις το λ / μ αυξάνει ελαφρώς με την επανείσοδο χαμένων κλήσεων, με το λ να αυξάνει στο LCC μοντέλο και το μ να μειώνεται στο LCH μοντέλο.

Το μόνο που απομένει είναι να συσχετίσουμε τον αριθμό των θυρίδων $K_0$ με το W,R και το συντελεστή επαναχρησιμοποίησης συχνότητας, Φ. Αυτό, φυσικά, εξαρτάται από την επίδοση της διαμόρφωσης (και της κωδικοποίησης). Αν χρησιμοποιείται μια διαμόρφωση που μπορεί να υποστηρίξει n bit / s /Hz (που αναφέρεται σε bit πριν τη διεύρυνση της κωδικοποίησης), τότε για μια τομεακή κυψέλη, ο αριθός των θυρίδων ανά τομέα είναι

$$K_0 = (W/R)n\Phi \ \ \theta\upsilon\rho\acute{\iota}\delta\varepsilon\varsigma/\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha\varsigma \qquad (6.38)$$

Όμως, το n εξαρτάται από το Φ διότι όσο πιο μεγάλος είναι ο συντελεστής επαναχρησιμοποίησης, τόσο μεγαλύτερη παρέμβαση φτάνει από άλλες κυψέλες κι επομένως, τόσο χαμηλότερη είναι η επίδοση διαμόρφωσης n. Για δυο συμβατικά συστήματα, χρησιμοποιώντας στανταρ πολυπλεξίας χρόνου πρόσβασης (Time Division Multiple Access, TDMA) που έχουν υιοθετηθεί στην Ευρώπη και στη Βόρεια Αμερική [Steele, 1992], οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται σε μια κυψέλη τριών τομέων είναι n ≈ 0.5, Φ = 1/12 και n ≈ 1.0, Φ =1/21, αντίστοιχα. Έτσι, για αυτά τα δύο TDMA συστήματα $K_0$ ≈ (W / R)/ 24 θυρίδες/τομέα και $K_0$ ≈ (W / R)/21 θυρίδες/τομέα αντίστοιχα.

## 6.6.2 Διακοπή επικοινωνίας διάχυτου φάσματος πολλαπλής πρόσβασης-Μοναδική κυψέλη και τέλειος έλεγχος ισχύος

Σε συστήματα διάχυτου φάσματος, εφόσον όλοι οι χρήστες καταλαμβάνουν το ίδιο φάσμα συχνότητας και κατανομή χρόνου, δεν υπάρχουν θυρίδες. ΄Οπως σημειώσαμε προηγουμένως, το σύστημα είναι αυστηρά περιορισμένης παρεμβολής. Ακολουθώντας την ανάπτυξη του Viterbi και Viterbi (1993), σε όλη την υπόλοιπη Ενότητα 6.6, δεχόμαστε αρχικά μια μοναδική κυψέλη που καταλάμβανεται από $k_u$ χρήστες με τέλεια ελεγχόμενη ισχύ, ώστε ο καθένας τους να λαμβάνεται από το σταθμό βάσης στο ίδιο επίπεδο ισχύος. Όμως, τα ψηφιακά δεδομένα εισόδου κάθε χρήστη μπορεί να είναι διακεκομμένα: μια φωνητική κλήση με ρυθμό μεταβλητής που στηρίζεται στον εντοπισμό της φωνητικής δραστηριότητας, ή ένα διαδραστικό μήνυμα που απαιτεί μια απάντηση πριν σταλούν νέα δεδομένα. Κατά τη διάρκεια των ανενεργών περιόδων, η ισχύς σήματος του χρήστη καταπιέζεται. Τότε για μια συνολική χωρητικότητα εύρους ζώνης W Hz για όλους τους χρήστες με ίσους ρυθμούς δεδομένων R bit / s, θόρυβο υποβάθρου $N_0$ watt/Hz και

ίσες , τέλεια ελεγχόμενες ενέργειες bit $E_b$, η συνολική μέση ισχύς που λαμβάνεται από την κυψέλη, υποθέτοντας στάσιμες αφίξεις και δραστηριότητα χρήστη, είναι

$$\textit{Συνολική ισχύς} = \sum_{i=1}^{k_u} v_i E_b R + N_0 W \qquad (6.39)$$

Εδώ, το $v_i$ είναι μια δυαδική τυχαία μεταβλητή που δείχνει αν ο i χρήστης είναι ενεργός σε οποιαδήποτε στιγμή και

$$\rho \triangleq \Pr(v_i = 1) = 1 - \Pr(v_i = 0) \qquad (6.40)$$

είναι ο παράγοντας δραστηριότητας ή τμήμα του χρόνου κατά τη διάρκεια του οποίου το σήμα του χρήστη είναι παρόν. Εφόσον η συνολική λαμβανόμενη ισχύς είναι το άθροισμα του θορύβου, της ισχύος της παρεμβολής και της επιθυμητής ισχύος χρήστη (που το συμβολίζουμε με τον εκθέτη 1), έχουμε από το (6.39) ότι η μέση ισχύς θορύβου-συν-η παρεμβολή, που συμβολίζεται $I_0W$, είναι

$$\mathrm{I_0W} = \sum_{\mathrm{i=2}}^{\mathrm{k_u}} \mathrm{v_i E_b R} + \mathrm{N_0 W} \qquad (6.41)$$

Για δυναμικά όρια εύρους στο δέκτη πολλαπλής πρόσβασης του εύρους ζώνης W (καθώς και για να εγγυηθούμε τη σταθερότητα του συστήματος, όπως θα γίνει ξεκάθαρο αργότερα), είναι επιθυμητό να περιορίσουμε το συνολικό λαμβανόμενο θόρυβο-συν-ισχύ παρεμβολής-προς-θόρυβο υποβάθρου, ή ομοίως, το λόγο $I_0W$ / $N_0W$. Έτσι, χρειαζόμαστε

$$\frac{\mathrm{I_0}}{\mathrm{N_0}} < \frac{1}{\mathrm{n}}, \text{όπου } \mathrm{n} < 1 \qquad (6.42)$$

και συνήθως η = .25 προς .1, που αντιστοιχεί σε λόγους ισχύος $I_0$ / $N_0$ = 6 dB έως 10 dB. Συνδυάζοντας αυτή τη συνθήκη με το (6.41) βρίσκουμε την απαίτηση

$$\sum_{\mathrm{i=2}}^{\mathrm{k_u}} \mathrm{v_i E_b R} = (I_0 - N_0)W < I_0 W(1 - n)$$

ή

$$\sum_{\mathrm{i=2}}^{\mathrm{k_u}} \mathrm{v_i} < \frac{(W/R)(1-n)}{E_b/I_0} \triangleq K_o(1 - n) \triangleq K_o', \qquad (6.43)$$

όπου και το $v_i$ και το $k_u$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Όταν η συνθήκη (6.43) δεν ικανοποιείται, το σύστημα θεωρείται ότι είναι σε κατάσταση διακοπής επικοινωνίας. Αυτή η κατάσταση είναι μόνο προσωρινή και διορθώνεται χωρίς παρέμβαση της τυχαίας διακύμανσης των μεταβλητών. Ο μηχανισμός ελέγχου ισχύος μπορεί να επιταχύνει τη διαδικασία και να εγγυηθεί τη σταθερότητα μειώνοντας την απαίτηση $E_b$ / $I_0$ για όλους τους χρήστες. Σε οποιαδήποτε από τις δύο περιπτώσεις, η πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας, $P_{out}$ (που μοιάζει με την πιθανότητα μπλοκαρίσματος για τα συστήματα με θυρίδα που χειριστήκαμε στην προηγούμενη υποενότητα αλλά είναι πιο ευμενής), ορίζει το άνω φράγμα ελαφρώς περικλείοντας την επιθυμητή μεταβλητή σήματος, $v_1$ στην άθροιση. Επομένως,

$$\mathrm{P_{out}} = \mathrm{P_r}(\textstyle\sum_{\mathrm{i=2}}^{\mathrm{k_u}} \mathrm{v_i} > \mathrm{K'_o}) < Pr(\textstyle\sum_{\mathrm{i=2}}^{\mathrm{k_u}} \mathrm{v_i} > \mathrm{K'_o}) \quad (6.44)$$

Έτσι, η πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας καθορίζεται από την κατανομή του αθροίσματος των $k_u$ ανεξάρτητων δυαδικών μεταβλητών, καθεμία με πιθανότητα που δίνεται από το (6.40). Αλλά το $k_u$, ο αριθμός των χρηστών στο δίκτυο, είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή. Στην πραγματικότητα, το μοντέλο άφιξης του χρήστη και εξυπηρέτησής του που περιγράφεται στην Ενότητα 6.6.1 για συστήματα με θυρίδες ισχύει εξίσου κι εδώ. Εφόσον οι χρήστες παραμένουν στο σύστημα μέσω διακοπής της επικοινωνίας, το μοντέλο για LCH (Σχήμα 6.3b) ισχύει. Έτσι, η κατανομή του $k_u$ δίνεται από το (6.36) και η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής ενδιαφέροντος,

$$\mathrm{Z} \triangleq \textstyle\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k_u}} \mathrm{v_{i'}} \quad (6.45)$$

Μπορεί να καθοριστεί καλύτερα από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{e^{sZ}}) &= \mathrm{E_{k_u}} \textstyle\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k_u}} \mathrm{E_{v_i}}(\mathrm{e^{sv_i}}) \\ &= \mathrm{E_{k_u}}[\rho e^{s} + (1+\rho)]^{k_u} \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k_u!} e^{-\lambda/\mu} [\rho(e^s - 1) + 1]^{k_u} =$$

$$\exp\left[\frac{\lambda\rho}{\mu}(e^s - 1)\right]$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τα (6.40) και (6.36). Αυτή είναι η γεννήτρια συνάρτηση μιας κατανομής Poisson. Μπορούμε να το δούμε καλύτερα αυτό προσέχοντας ότι αν ρ = 1, σύμφωνα με το (6.45), $Z = k_u$, που είναι Poisson. Έτσι, οι δυαδικές τυχαίες μεταβλητές δεν αυξάνουν το τυχαίο της διαδικασίας Poisson, απλώς μειώνουν το ρυθμό χωρητικότητας (λ / μ) κατά τον παράγοντα ρ. Έτσι, η πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας του (6.44) είναι μόλις το άθροισμα της ουράς Poisson,

$$P_{out} < e^{-\rho\lambda/\mu} \sum_{\kappa=\lfloor K'_o \rfloor}^{\infty} (\rho\lambda/\mu)^k / K!. \qquad (6.47)$$

Η διαφορά ανάμεσα σε αυτό και στο (6.37) είναι ότι, όπως μόλις σημειώσαμε, η παράμετρος λ / μ μειώνεται κατά ρ < 1. Ακόμη, ενώ στην περίπτωση με τις θυρίδες το $K_0$ήταν ο αποτελεσματικός αριθμός θυρίδων ανά κυψέλη (μειωμένος κατά το συντελεστή επαναχρησιμοποίησης), εδώ $K_0 = (W / R) / (E_b / I_0)$ και το $K'_0$ μειώνεται περαιτέρω από το συντελεστή υποχώρησης (1 - η), όπως δίνεται στα (6.42) και (6.43).

Αν και η ουρά της κατανομής Poisson μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά, από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση μπορούμε εύκολα να βρούμε το φράγμα Chernoff

$$P_{out} < \mathrm{Min}_{s>0}\, E\{\exp[s(Z - K'_o)]\}$$

$$= \mathrm{Min}_{s>0}\, exp\left[\frac{\lambda\rho}{\mu}(e^s - 1) - sK'_o\right] \qquad (6.48)$$

$$= exp\left\{-K'_o\left[ln\left(\frac{K'_o}{\lambda\rho/\mu}\right) - 1 + \frac{\lambda\rho/\mu}{K'_o}\right]\right\}$$

Μια άλλη προσέγγιση, ακριβής για μεγάλο $K'_0$ [Feller, 1957], τη βρίσκουμε μέσω προσέγγισης του Poisson από μια Gaussian

μεταβλητή με τον ίδιο μέσο όρο και διακύμανση, που είναι και τα δύο ρλ / μ. Αυτό μας δίνει

$$P_{out} \approx Q\left(\frac{K'_o - \lambda\rho/\mu}{\sqrt{\lambda\rho/\mu}}\right) \qquad (6.49)$$

Το (6.48) και το (6.49) φαίνονται στο Σχήμα 6.4 ως μια συνάρτηση του ρλ / μ για $K_o = 256$ και η = .1 ($K'_o = 230.4$). Προσέξτε ότι αυτά ισχύουν εξίσου στην περίπτωση με τις θυρίδες αν ορίσουμε ρ = 1 και $K'_o = K_o$, τον αποτελεσματικό αριθμό θυρίδων ανά κυψέλη, όπως δίνεται από το (6.38).

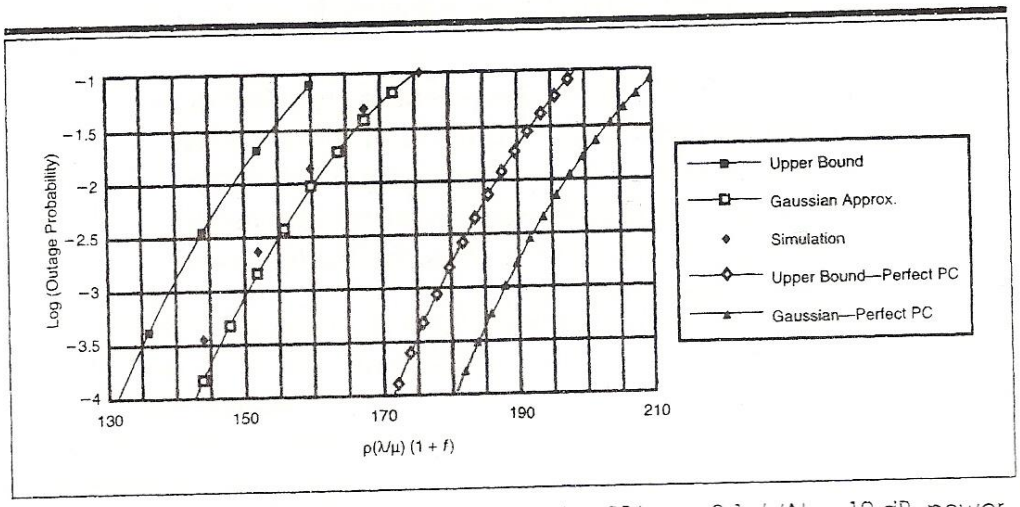



**Figure 6.4** Reverse link outage probabilities. $K_0 = 256$, $\eta = 0.1$, $I_0/N_0 = 10$ dB, power control $\sigma_C = 2.5$ dB ($f = 0$ for single cell).

## 6.6.3 Διακοπή επικοινωνίας με παρεμβολή πολλαπλών κυψελών

Καθορίσαμε στην Ενότητα 6.4 ότι, υποθέτοντας ομοιόμοφη φόρτωση όλων των κυψελών, οι χρήστες που ελέγχονται από σταθμούς βάσης άλλων κυψελών εισάγουν την ισχύ παρεμβολής σε ένα δεδομένο σταθμό βάσης, του οποίου ο μέσος όρος είναι fku, όπου $k_u$ είναι ο μέσος αριθμός ενεργών χρηστών ανά κυψέλη. Με ήπια μεταπομπή, το f βρίσκεται ανάμεσα στο 0.5 και 0.6 για ένα νόμο δύναμης διάδοσης m = 4 και μια στάνταρ απόκλιση κανονικής

log επισκίασης σ ≈ 8 dB. Ακόμη, λόγω της φύσεως της ήπιας μεταπομπής, κανένας χρήστης άλλης κυψέλης δεν μπορεί να φτάσει στο δεδομένο σταθμό βάσης με ισχύ υψηλότερη από εκείνη των χρηστών της ίδιας κυψέλης, γιατί διαφορετικά θα μεταπεμπόταν. Συνεχίζοντας με την υπόθεση τέλειου ελέγχου ισχύος, που θα εγκαταλείψουμε στην επόμενη υποενότητα, αυτό σημαίνει ότι όλοι οι χρήστες άλλων κυψελών μπορούν να συμπεριληφθούν στην παράσταση πιθανότητας διακοπής της επικοινωνίας (6.44) από επιπρόσθετους όρους που έχουν $v_i \leq 1$, όταν είναι ενεργοί.

Εφόσον η συνολική συνεισφορά από αυτούς τους επιπλέον όρους έχει μια μέση τιμή $fk_u$, αντί για τον καθορισμό της πλήρους κατανομής κάθε όρου, μοντελοποιούμε την επίδρασή τους ως εκείνη τόσων επιπρόσθετων χρηστών (όσοι και οι όροι) με μέγιστη κανονικοποιημένη τιμή ισχύος, ενότητα. Έτσι, το (6.44) γίνεται

$$P_{out} = P_r \left[ \sum_{i=1}^{k_u(1+f)} v_i > \mathrm{K}'_{\mathrm{o}} \right] \tag{6.50}$$

Αυτό το μοντέλο φαίνεται απαισιόδοξο διότι δημιουργεί μια περισσότερο κατά προσέγγιση κβαντοποιημένη κατανομή, ενώ στην πραγματικότητα το άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών στο (6.50) είναι μια διαρκής μεταβλητή. Προσέξτε ότι αυτοί οι επιπρόσθετοι χρήστες επίσης εκπέμπουν διακεκομμένα με Pr (v = 1) = ρ και όλες οι κυψέλες έχουν την ίδια Poisson κατανομή χωρητικότητας όπως εκείνες σε μια δεδομένη κυψέλη. Έτσι, $k'_u \triangleq k_u (1 + f)$ είναι επίσης μια μεταβλητή Poisson με παράμετρο ρ(λ/μ) (1 + f). Με αυτό το μοντέλο, τότε, το φράγμα Chernoff της πιθανότητας διακοπής της επικοινωνίας του (6.48) και η κανονική προσέγγισή του (6.49) ισχύουν όπως πριν, με ρλ / μ αυξημένο κατά το συντελεστή (1 + f), όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.4.

## 6.6.4 Διακοπή επικοινωνίας με μη τέλειο έλεγχο ισχύος

Τέλος, ερχόμαστε στο πιο σημαντικό απ'όλα τα ζητήματα, την επίπτωση του μη τέλειου ελέγχου ισχύος στη χωρητικότητα. Με βάση τον αναλυτικό χειρισμό στην Ενότητα 4.7 και τη συζήτηση στην Ενότητα 6.2, καθώς και τις πειραματικές μετρήσεις [Padovani, 1994; Viterbi και Padovani, 1992], ένας χρήστης που ελέγχεται σε ένα επιθυμητό επίπεδο $E_b$ / $I_0$ (το οποίο επίπεδο μπορεί να ποικίλει ανάλογα με τις συνθήκες της πολυδιαδρομικής διάδοσης) θα επιδείξει ένα λαμβανόμενο επίπεδο $E_b$ / $I_0$ στον επιθυμητό σταθμό βάσης της κυψέλης που ποικίλει σύμφωνα με την κανονική log κατανομή με μια τυπική απόκλιση της τάξεως των 1.5 έως 2.5 dB. Με αυτή τη συνθήκη, η παραγωγή της πιθανότητας διακοπής της επικοινωνίας του (6.39) έως (6.49) χρειάζεται να μεταβληθεί ώστε η διαρκής τιμή του $E_b$ για όλους τους χρήστες να αντικατασταθεί από μια μεταβλητή $E_{bi} \triangleq \epsilon_i E_{b0}$, που έχει κανονική log κατανομή. (Θα καθορίσουμε την κατάλληλη τιμή του συντελεστή κλιμάκωσης $E_{b0}$ ακολούθως.) Κάνοντας αυτό και εξηγώντας επίσης την παρεμβολή των άλλων κυψελών, βρίσκουμε αντί για (6.44) και (6.45)

$$P_{out} < P_r\left[Z' = \sum_{i=1}^{k_u} \epsilon_i v_i > K'_o\right] \qquad (6.51)$$

$k'_u = k_u (1 + f)$ είναι μια μεταβλητή Poisson με παράμετρο $(\lambda / \mu)(1 + f)$, ενώ $E_{b0}\,\epsilon_i$ έχει κανονική log κατανομή. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε

$$x_i = 10\log_{10}(\epsilon_i E_{b_0}/I_0) \qquad (6.52)$$

ότι είναι μια τυχαία μεταβλητή κανονικής κατανομής με μέσο όρο $m_c$ και τυπική απόκλιση $\sigma_c$. Επομένως, αντιστρέφοντας το (6.52), έχουμε

$$(E_{b_0}/I_0)\,\epsilon_i = 10^{x_i/10} = e^{\beta x_i}, \quad \text{όπου } \beta = \ln\,(10)/10$$
(6.53)

Πριν προσπαθήσουμε να βρούμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση, αξιολογούμε τη n ροπή του $\epsilon_i$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $x_i$ είναι Gaussian με μέσο όρο $m_c$ και τυπική απόκλιση $\sigma_c$:

$$E(\epsilon_i^n) = (E_{b_0}/I_0)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{n\beta x_i} \frac{e^{-(x_i-m_c)^2/2\sigma_c^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} dx_i \qquad (6.54)$$

$$= \frac{(e^{\beta m_c})^n}{(E_{b_0}/I_0)^n} e^{n^2(\beta\sigma_c)^2/2}$$

Εφόσον το $E_{b0}$ ορίστηκε ως μια αυθαίρετη μεταβλητή, είναι λογικό να το επιλέξουμε ώστε

$$E_{b_0}/I_0 = e^{\beta m_c} = 10^{m_c/10} \qquad (6.55)$$

που ισούται με το αριθμητικό ισοδύναμο του μέσου decibel. Πιο σημαντικό είναι ότι μπορούμε να δούμε πως εφόσον $x_i < m_c$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, $(E_b / I_0)_i = (E_{b0} / I_0)\ \epsilon_i < e^{\beta m}{}_c$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, που σημαίνει ότι

$$E_b / I_0 = \text{μέσο } [(E_b / I_0)_i] \text{ για κάθε i} \qquad (6.56)$$

Χρησιμοποιώντας το (6.55) στο (6.54), η n ορμή του $\epsilon_i$ γίνεται

$$E(\epsilon_i^n) = e^{n^2(\beta\sigma_c)^2/2} \qquad (6.57)$$

Δυστυχώς, η ροπογεννήτρια συνάρτηση του $\epsilon$ δεν υπάρχει, διότι η επέκταση της σειράς της ορμής δεν αποκλίνει. Όμως, ένα μεταβληθέν φράγμα Chernoff για πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας μπορεί ακόμη να βρεθεί χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση ροπογεννήτριας περικομμένης συνάρτησης. Έστω ότι κόβουμε την παράσταση πιθανότητας διακοπής της επικοινωνίας (6.51) σε δύο μέρη, όπου το πρώτο έχει συνθήκη $v_i\ \epsilon_i < T$ για κάθε i για κάποια επαρκώς μεγάλα T και το δεύτερο έχει συνθήκη το συμπληρωματικό γεγονός. Έτσι, θέτοντας άνω φράγμα στην παράσταση με την ενότητα για το δεύτερο τμήμα,

$$P_{out} < Pr\left[\sum_{i=1}^{k'_u} v_i\epsilon_i > K'_0; v_i\epsilon_i < T \text{για όλα τα i}\right]$$

$$+\Pr\left[v_i\epsilon_i > T \textit{για κάθε } i\right]$$

$$< E_{k'_u} \sum_{i=1}^{k'_u} E_{v_i}(e^{sv_i\epsilon_i};\ \epsilon_i < T)e^{-sK'_0}$$

$$+E_{k'_u}\left[\sum_{i=1}^{k'_u} \Pr(\epsilon_i > T)\Pr(v_i = 1)\right]$$

$$< \mathrm{Min}_{s>0,T>0}\{E_{k'_u}\{[\rho E_\epsilon e^{s\epsilon} + (1-\rho)]^{k'_u};\ \epsilon < T\}$$

$$\times e^{-sK'_o} + E_{k'_u}[k'_u \Pr(\epsilon > T)\rho]\}$$

$$= \underset{s>0,T>0}{\mathrm{Min}}\{\exp[\rho(\lambda/\mu)(1+f)E(e^{s\epsilon_T} - 1) -$$

$$sK'_o]$$

$$\rho(\lambda/\mu)(1+f)\Pr(\epsilon > T)\}$$

Εδώ

$$E(e^{(s\epsilon_T)} = E[\exp(se^{\beta\xi});\xi \le lnT/\beta]$$

και

$$\Pr(\epsilon > T) = \Pr(\xi > lnT/\beta)$$

και $\xi \triangleq (\ln \epsilon) / \beta = x - m_c$, σύμφωνα με το (6.53) έως (6.55). Έτσι, το ξ είναι Gaussian με μηδενικό μέσο όρο και διακύμανση $\sigma^2_c$ και ορίζοντας $\theta \triangleq (\ln T) / \beta$,

$$\Pr(\epsilon > T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_c}\int_{\ln T/\beta)}^{\infty} e^{-\xi^2/2\sigma_c^2} d\xi = Q\left(\frac{\ln T}{\beta\sigma_c}\right) = Q\left(\frac{\theta}{\sigma_c}\right), \quad (6.59)$$

ενώ

$$E(e^{s\epsilon_T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_c}\int_{-\infty}^{\theta} e^{se^{\beta\xi}}\, e^{-\xi^2/2\sigma_c^2}\, d\xi \qquad (6.60)$$

Η περικομμένη ροπογεννήτρια συνάρτηση (6.60) μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά ή από την επέκταση σειράς

$$E(e^{s\epsilon_T}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!\sqrt{2\pi}\sigma_c}\int_{-\infty}^{\theta} e^{n\beta\xi}\, e^{-\xi^2/2\sigma_c^2} d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2(\beta\sigma_c)^2/2}\, Q(n\beta\sigma_c - \theta/\sigma_c) \quad (6.61)$$

Αυτή η σειρά μπορεί εναλλακτικά να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της περικομμένης ροπογεννήτριας συνάρτησης, εφόσον $Q(x) < e^{-x2/2}$ για x>0, ώστε

$$e^{n^2(\beta\sigma_c)^2/2}Q(n\beta\sigma_c - \theta/\sigma_c) < e^{-\theta^2/2\sigma_c^2}e^{n\beta\theta} \text{ για } n>\theta/(\beta\sigma_c^2),$$

που εγγυάται τη σύγκλιση του (6.61).

Επομένως, το φράγμα της πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας με μη τέλειο έλεγχο δίνεται από το (6.58) και το (6.59) και είτε το (6.60) είτε το (6.61). Το φράγμα φαίνεται στο Σχήμα 6.4 ως μια συνάρτηση του ρ(λ / μ) (1 +f) για $K_o$ = 256, η = .1, και $\sigma_c$ = 2.5 dB.

Όπως κάναμε για τον τέλειο έλεγχο ισχύος στην Ενότητα 6.6.3, μπορούμε επίσης να βρούμε την Gaussian προσέγγιση. Γι'αυτό δεν χρειάζεται να περικόψουμε τις ορμές, εφόσον οι μη περικομμένες πρώτες και δεύτερες ορμές υπάρχουν, όπως δίνονται από το (6.54). Έτσι, προσεγγίζοντας την κατανομή του Z' στο (6.51), βρίσκουμε

$$P_{out} \approx Q\left[\frac{K_o' - E(Z')}{\sqrt{Var(Z')}}\right]$$

Αλλά

$$e(Z') = E\left(\sum_{i=1}^{k_u'} v_i\epsilon_i\right) = E(k_u')E(v)E(\epsilon) =$$

$$= (\lambda/\mu)(1+f)\rho e^{(\beta\sigma_c)^2/2}, \qquad (6.62)$$

ενώ [Feller, 1957]

$$Var(Z') = E\left(\sum_{i=1}^{k_u'} v_i\epsilon_i\right) = E(k_u')Var(v\,\epsilon) + Var(k_u')[E(v\,\epsilon)]^2$$

Αλλά εφόσον $k'_u$ είναι Poisson, ο μέσος όρος του και η διακύμανσή του ισούνται και τα δύο με (λ / μ) (1 + f), ώστε

$$\mathrm{Var}(Z') = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{k'_u} v_i \epsilon_i\right) = (\lambda/\mu)(1+f)E[(v\,\epsilon)^2]$$

$$= (\lambda/\mu)(1+f)\rho\, e^{(\beta\sigma_c)^2/2} \qquad (2.63)$$

Έτσι, η κανονική προσέγγιση μπορεί να γραφεί

$$P_{out} \approx Q\left[\frac{K'_o - \rho(\lambda/\mu)(1+f)e^{(\beta\sigma_c)^2/2}}{\sqrt{\rho(\lambda/\mu)(1+f)e^{(\beta\sigma_c)^2}}}\right] \qquad (6.64)$$

Αυτή η προσέγγιση φαίνεται επίσης στο Σχήμα 6.4. Ενώ το διακεκομμένο φράγμα Chernoff του (6.58) είναι πάντα έγκυρο, η προσέγγιση του θεωρήματος κεντρικού ορίου Gaussian δεν μπορεί να στηριχθεί τόσο όσο για μια περίπτωση σταθερής ίσης ισχύος. Φαίνεται λογικό, όμως, εφόσον τα φράγματα Chernoff συνήθως υπερεκτιμούν την πιθανότητα κατά μια τάξη μεγέθους. Όμως, για να τεκμηριώσουμε περαιτέρω την προσέγγιση, πραγματοποιήθηκε μια προσομοίωση χρησιμοποιώντας περίπου ένα εκατομμύριο γεγονότα για κάθε χρήστη. Αυτό το αποτέλεσμα εμφανίζεται επίσης στο Σχήμα 6.4. Συμφωνεί εντός περίπου 1% με την Gaussian προσέγγιση. Για αναλυτική διευκόλυνση θα χρησιμοποιήσουμε την τελευταία από δω και πέρα.

## 6.6.5 Ένας κατά προσέγγιση ρητός τύπος για τη χωρητικότητα με μη τέλειο έλεγχο ισχύος

Μπορούμε να αναστρέψουμε την κατά προσέγγιση παράσταση για την πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας (6.64) λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση για να βρούμε τον ρητό τύπο για την κανονικοποιημένη μέση χωρητικότητα χρήστη, λ / μ από την άποψη των erlang ανά τομέα:

$$(\lambda/\mu)(1+f) = K'_o F(B, \sigma_c), \qquad (6.65)$$

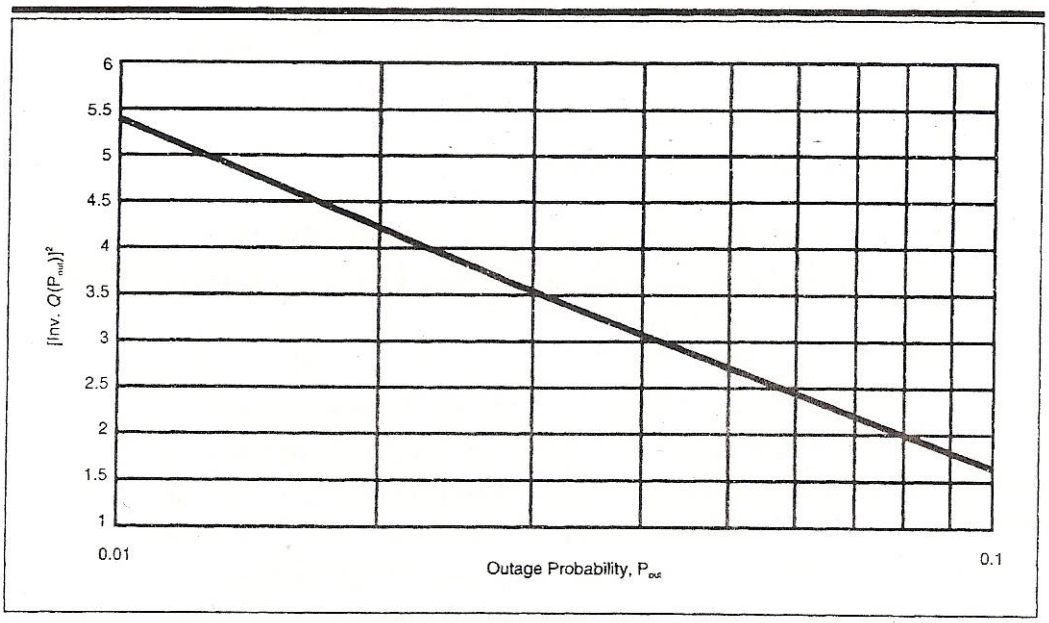
όπου

$$B = \frac{[Q^{-1}(P_{out})]^2}{K'_o}, \qquad K'_o = \frac{W/R}{E_{b_0}/I_0}(1-n) \qquad (6.66)$$

και

$$F(B, \sigma_c) = \frac{1}{a_c}\left[1 + \frac{a_c^3 B}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{B}{a_c^3 B}}\right)\right] \qquad (6.67)$$

Για διευκόλυνση, διαγράμματα του $(Q^{-1})^2$ και $F(B,\sigma_c)$ δίνονται στα Σχήματα 6.5 και 6.6. Το τελευταίο δείχνει την υποβάθμιση λόγω της διακύμανσης φορτίου (απόδοση συγκέντρωσης) και του ελέγχου ισχύος. Προσέξτε ότι ορίζοντας (1 - η) $F(B,\sigma_c) = 1$ στο (6.65), με κατάλληλη ταυτοποίηση παραμέτρων, βρίσκουμε τον αφελή τύπο του (1.5).




Από αυτόν ή, ακριβέστερα, από μια σύγκριση των δύο φραγμάτων και των δύο προσεγγίσεων για τέλειο και μη τέλειο έλεγχο ισχύος στο Σχήμα 6.4, φαίνεται ότι ο μη τέλειος έλεγχος ισχύος με τυπική

απόκλιση, $\sigma_c$, μεγέθους 2.5 dB οδηγεί σε μια μείωση χωρητικότητας όχι περισσότερη από 1.0 dB ή 20%.

Προσέχουμε ότι οι τύποι (6.65) έως (6.67) ισχύουν επίσης σε συστήματα με θυρίδες όπου το $K'_0$ αντικαθίσταται από το $K_0$ του (6.38) και με $\sigma_c = 0$, f = 0 και ρ = 1. Επομένως, ο λόγος των χωρητικοτήτων Erlang για διάχυτο φάσμα και συστήματα πολλαπλής πρόσβασης με θυρίδες, καθεμία από την άποψη των erlang/τομέα, είναι περίπου

$$\frac{(\lambda/\mu)_{\text{διάδοση}}}{(\lambda/\mu)_{\text{slotted}}} \approx \left\{\frac{F(B_{\text{διάδοση},}\ \sigma_c)(1-n)/[\rho(1+f)]}{F(B_{slotted},0)}\right\}\left\{\frac{1/(\mathrm{E_{b_0}}/\mathrm{I_0})}{\mathrm{n\Phi}}\right\}$$

Με τιμές παραμέτων ρ = 0.4, f = 0.6, η = .1 και $E_{b0} / I_0$ = 6 dB, μπορούμε να επαληθεύσουμε χρησιμοποιώντας τα (6.66) και (6.67) ή τα Σχήματα 6.5 και 6.6 ότι για ένα μεγάλο εύρος W/R, ο πρώτος όρος ξεπερνά την ενότητα. Ορίζοντάς το ίσο με το ένα για να βρούμε μια απλούστερη αν και πιο χοντρική προσέγγιση, συμπεραίνουμε ότι κατά προσέγγιση,

$$\frac{(\lambda/\mu)_{\text{διάδοση}}}{(\lambda/\mu)_{\text{slotted}}} \approx \frac{1/(\mathrm{E_{b_0}}/\mathrm{I_0})}{\mathrm{n\Phi}}$$

Για να συγκρίνουμε ένα διάχυτο CDMA σύστημα με τα δύο TDMA συστήματα με θυρίδες που αναφέρθηκαν στο τέλος της Ενότητας 6.6.1, λαμβάνουμε κεραίες σταθμού βάσης τριών τομέων σε κάθε περίπτωση. Τότε με παράμετρο $E_{b0} / I_0$ = 4 (6 dB) για το πρώτο και nΦ = 1/24 και 1/21 για το τελευταίο, όπως εξηγήσαμε στην Ενότητα 6.6.1, οι λόγοι της διάχυσης-προς-τη χωρητικότητα Erlang με θυρίδες είναι περίπου 6:1 και 5:1 αντίστοιχα.

## 6.6.6 Σχεδιασμός της Ελάχιστης Εκπεμπόμενης Ισχύος

Μέχρι στιγμής, έχουμε επιλέξει ο λόγος παρεμβολής-προς-πυκνότητα θορύβου $I_0/N_0 = 1/\eta$ να είναι όσο πιο μεγάλος λογικά θα ήταν , πράγμα σύμφωνο με τις μελέτες δυναμικού εύρους και σταθερότητας, ώστε να μεγιστοποιείται η χωρητικότητα. Όμως, όταν η χωρητικότητα του φορτίου είναι σχετικά χαμηλή, είναι δυνατό αντί γι' αυτό να επιλέξουμε μικρότερες τιμές του $I_0/N_0$, ή εξίσου μεγαλύτερες τιμές του $\eta < 1$, ώστε να μειώσουμε την εκπεμπόμενη ισχύ κάθε χρήστη. Έτσι, για κάθε $\eta < 1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα (6.65) έως (6.67) για να καθορίσουμε το $\lambda / \mu$ που απαιτείται για να καθιερώσουμε την επιθυμητή πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας $P_{out}$. Από αυτή την τιμή του $\eta = \eta^*$ και την αντίστοιχη τιμή του $\lambda / \mu = (\lambda / \mu)^*$, μπορούμε να βρούμε τον απαιτούμενο λόγο του μέσου σήματος χρήστη-προς-το θόρυβο του υποβάθρου στο σταθμό βάσης από την παράσταση για το συνολικό μέσο εκπεμπόμενο σήμα-προς-το θόρυβο στο σταθμό βάσης (για όλους τους χρήστες εκείνης της κυψέλης). Αυτή η παράσταση είναι

$$\rho\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^* \frac{P_s}{N_o W} = \frac{I_0^* - N_0}{N_0} = \frac{1}{\eta^*} - 1$$

Έτσι, η εκπεμπόμενη ισχύς ανά χρήστη (όταν ο χρήστης είναι ενεργός) είναι

$$\frac{P_s}{N_o W} = \frac{1}{\rho(\lambda/\mu)^*}\left(\frac{1}{\eta^*} - 1\right) \qquad (6.68)$$

Αυτή χαρτογραφείται στο Σχήμα 6.7 για $P_{out} = .01, K_o = 256, \sigma_c = 2.5$ dB και $f = 0.55$. Η χωρητικότητα κανονικοποιείται από εκείνη που φτάνουμε με $\eta^* = 0.1$. Προσέξτε ότι η απαιτούμενη μέση λαμβανόμενη ισχύς κι επομένως, επίσης η εκπεμπόμενη ισχύς, ανά χρήστη μειώνεται κατά περίπου 8 dB καθώς η φόρτωση του δικτύου $\lambda / \mu$ μειώνεται κατά μια τάξη μεγέθους. Με άλλα λόγια, όταν το δίκτυο είναι ελαφρώς φορτωμένο, ένας χρήστης σε μια δεδομένη τοποθεσία χρειάζεται να επεκτείνει μόνο περίπου κατά ένα έβδομο την εκπεμπόμενη ισχύ για να πετύχει την επιθυμητή επίδοση, όπως όταν το δίκτυο είναι φορτωμένο σε χωρητικότητα.

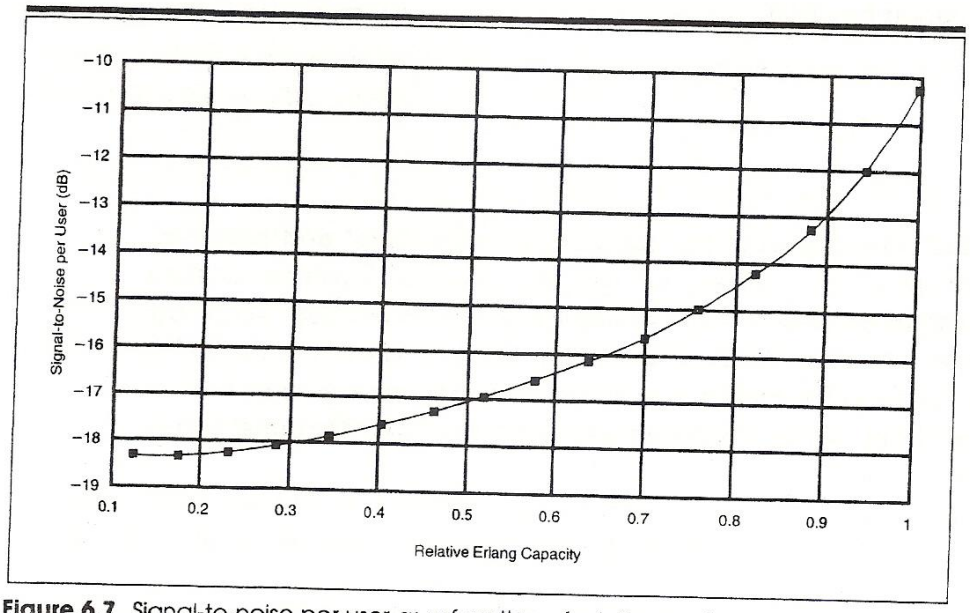



**Figure 6.7** Signal-to-noise per user as a function of relative sector capacity. ©1993 IEEE. "Erlang Capacity of a Power Controlled CDMA System" by A. M. Viterbi and A. J. Viterbi, in *IEEE Journal on Selected Areas in Communications,* Vol. 11, No. 6, pp. 892–900, August 1993.

## 6.6.7 Απαιτήσεις Χωρητικότητας για αρχικές προσβάσεις

Σε συμβατικά δίκτυα με θυρίδες, ορισμένες θυρίδες τοποθετούνται στην άκρη για να ζητήσουν οι χρήστες πολλαπλής πρόσβασης μια κλήση ή μια κατανομή καναλιού από το σταθμό βάσης. Ένα πρωτόκολλο παρέχεται για την ανάκαμψη από συγκρούσεις που συμβαίνουν όταν δύο ή περισσότεροι νέοι χρήστες στέλνουν αιτήσεις πρόσβασης ταυτόχρονα [Bertsekas και Gallager, 1987]. Με την πολλαπλή πρόσβαση διάχυτου φάσματος, το κατανεμημένο αγαθό είναι η ενέργεια, παρά ο χρόνος ή η συχνότητα. Έτσι, αιτήσεις πρόσβασεις μπορούν να μοιράζονται κοινό κανάλι με συνεχείς χρήστες. Ο ρυθμός άφιξης των αιτήσεων χρηστών ισούται με το ρυθμό άφιξης της κυψέλης, λ κλήσεις/δευτερόλεπτο, υποθέτοντας ότι όλες οι αιτήσεις θα εξυπηρετηθούν στο τέλος. Η ισχύς των νεοαφιχθέντων χρηστών δεν ελέγχεται μέχρι να αναγνωριστούν οι αιτήσεις τους, οπότε το αρχικό επίπεδο ισχύος είναι μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη από το 0 έως τη μέγιστη τιμή

που αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο λαμβανόμενης ενέργειας (ανά bit) του $E_M$. Έτσι, το αρχικό επίπεδο της ενέργειας πρόσβασης είναι $\gamma E_M$, όπου γ είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\mathrm{p}(\gamma) = \begin{cases} 1, & 0 < \gamma < 1 \\ 0 & \text{διάφορο} \end{cases}$$

και συνάρτηση κατανομής

$$\mathrm{p}(\gamma < x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases} \tag{6.69}$$

Αν το αρχικό επίπεδο ισχύος δεν είναι επαρκές για εντοπισμό κι επομένως, δεν λαμβάνεται αναγνώριση, ο χρήστης αυξάνει την ισχύ του κατά σταθερά βήματα decibel ανά πλαίσιο μέχρι να αναγνωριστεί η αίτηση. Έτσι, η ισχύς αρχικής πρόσβασης του χρήστη αυξάνει εκθετικά (δηλαδή γραμμικά σε decibel), με το χρόνο να θεωρείται διαρκής, εφόσον ο χρόνος πλαισίου είναι μόνο δεκάδες χιλιοστά του δευτερολέπτου σε διάρκεια. Επομένως, η ενέργεια ως μια συνάρτηση του χρόνου για τις αιτήσεις αρχικής πρόσβασης είναι

$$\mathrm{E(t)} = \gamma \mathrm{E}_{\mathrm{M}^{\mathrm{e}^{\delta \mathrm{t}}}}, \tag{6.70}$$

όπου το δ είναι καθορισμένο. Έστω ότι το $\tau_A$ συμβολίζει το χρόνο που απαιτείται για να εντοπιστεί ένας χρήστης αρχικής πρόσβασης, προκύπτει ότι

$$\Pr(\tau_A > T_A) = \Pr \gamma \mathrm{E}_{\mathrm{M}^{\mathrm{e}^{\delta T_A}}} < E_M) = \Pr\,(\gamma < e^{-\delta T_A})$$

$$= \mathrm{e}^{-\delta \mathrm{T_A}}, \qquad \mathrm{T_A} > 0 \tag{6.71}$$

όπου η τελευταία εξίσωση προκύπτει από το (6.69).

Έτσι, ο χρόνος εξυπηρέτησης (χρόνος που απαιτείται για αποδοχή) για τις αιτήσεις αρχικής πρόσβασης κάθε χρήστη είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο 1/ δ s/μήνυμα. Οι επιπτώσεις αυτής της

παρατήρησης είναι σημαντικές: Με αφίξεις κατανομής Poisson και εκθετικά κατανεμημένους χρόνους εξυπηρέτησης, σύμφωνα με το θεώρημα του Burke [Bertsekas και Gallager, 1987] η κατανομή εξόδου είναι επίσης Poisson. Αυτό εγγυάται ότι η κατανομή άφιξης για χρήστες που ξεκινούν την εξυπηρέτηση είναι ίδια όπως για χρήστες που μόλις ξεκινούν να ζητούν πρόσβαση. Επιπλέον, σε οποιοδήποτε δεδομένο χρόνο η κατανομή ισχύος για χρήστες που δεν έχουν ακόμη γίνει δεκτοί είναι επίσης ομοιόμορφη.

Έτσι, η συνολική παρεμβολή αυξάνει με την παρεμβολή από αρχικές προσβάσεις. Όταν κανονικοποιηθούν, αυτό εισάγει έναν επιπλέον όρο στον μέσο όρο και στη διακύμανση του Z', (6.62) και (6.63) αντίστοιχα. Έστω ότι η μεταβλητή αυξημένης παρεμβολής είναι Z'', αν υποθέσουμε ότι οι περιβάλλουσες κυψέλες έχουν τον ίδιο ρυθμό άφιξης, έχουμε

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}'') = \mathrm{E}(\mathrm{Z}') + (\lambda/\delta)(1+\mathrm{f})\mathrm{E}(\gamma \mathrm{E_M}/\mathrm{I_0})/\left(\mathrm{E_{b_0}}/\mathrm{I_0}\right), \quad (6.72)$$

$$Var(Z'') = Var(Z') + (\lambda/\delta)(1+\mathrm{f})\mathrm{E}[(\gamma \mathrm{E_M}/\mathrm{I_0})^2]/\left(\mathrm{E_{b_0}}/\mathrm{I_0}\right)^2 \quad (6.73)$$

όπου το γ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα της μονάδας και είναι ανεξάρτητο του $E_M/I_0$. Έτσι,

$$\mathrm{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \quad \text{και } \mathrm{E}(\gamma^2) = \frac{1}{3} \quad (6.74)$$

Ακόμη, αν υποθέσουμε για ένα καθορισμένο θ, $E_M/I_0 = \theta(E_b/I_0)$, όπου $E_b/I_0$ είναι η απαιτούμενη τιμή για το δεδομένο χρήστη αφού έχει παραχθεί η υπηρεσία,

$$\mathrm{E}(\mathrm{E_M}/\mathrm{I_0}) = \theta\left(\mathrm{E_{b_0}}/\mathrm{I_0}\right) E(\epsilon),$$
$$\mathrm{E}[(\mathrm{E_M}/\mathrm{I_0})^2] = \theta^2\left(\mathrm{E_{b_0}}/\mathrm{I_0}\right)^2 E(\epsilon^2) \quad (6.75)$$

Έτσι, από τα (6.62), (6.63) και (6.72) έως (6.75), βρίσκουμε

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}'') = \{(\lambda/\mu)\rho \exp[(\beta\sigma_c)^2/2] + (\lambda/\delta)(1/2)\theta \exp\,[(\beta\sigma_c)^2/2]$$

$$\times (1+f) \tag{6.76}$$

$$= (\lambda/\mu)\rho\left(1+\frac{\theta\mu}{2\rho\delta}\right) exp\ [(\beta\sigma_c)^2/2](1+f)$$

$$Var(Z'') =$$

$$= \{(\lambda/\mu)\rho \exp[2(\beta\sigma_c)^2] + (\lambda/\delta)(1/3)\theta^2 \exp\ [2(\beta\sigma_c)^2]$$

$$\times (1+f) \tag{6.77}$$

$$= (\lambda/\mu)\rho\left(1+\frac{\theta^2\mu}{3\rho\delta}\right) exp\ [2(\beta\sigma_c)^2](1+f)$$

Είναι λογικό να λάβουμε έναν αυθαίρετο συντελεστή κλιμάκωσης θ = $\frac{3}{2}$, γιατί αυτό τοποθετεί το επίπεδο ενέργειας ανίχνευσης bit 50% υψηλότερα από το επίπεδο ενέργειας bit εν λειτουργία. Βρίσκουμε ότι η επίπτωση είναι η αύξηση του επιπέδου Erlang (λ / μ) με το συντελεστή

$$1+\left(\frac{3}{4\rho}\right)\left(\frac{\mu}{\delta}\right) = 1 + 1.88(\mu/\delta) \quad \text{για } \rho = .4$$

Προσέξτε ότι μ / δ είναι ο λόγος του μέσου χρόνου ανίχνευσης προς τη μέση διάρκεια του μηνύματος, που πρέπει να είναι πολύ μικρός. Για παράδειγμα, αν μ / δ = .0055, που αντιστοιχεί σε ένα μέσο χρόνο πρόσβασης ενός δευτερολέπτου για μια τρίλεπτη μέση διάρκεια κλήσης, τότε οι αρχικές προσβάσεις μειώνουν το υποστηρίξιμο Erlang φορτίο κατά περίπου 1%. Αυτό το κόστος είναι αμελητέο, αν λάβουμε υπόψη το αξιοσημείωτο πλεονέκτημα του μοιράσματος του καναλιού για αρχική πρόσβαση και συνεχές φορτίο.

## 6.7 Erlang χωρητικότητα εμπρόσθιων ζεύξεων

### 6.7.1 Κατανομή ισχύος εμπρόσθιας ζεύξης

Όπως τονίσαμε από την αρχή, η εφαρμογή εμπρόσθιας ζεύξης και η επίδοση είναι πολύ διαφορετικά από εκείνα της ανάστροφης ζεύξης. Αυτό συμβαίνει κυρίως εξαιτίας τριών παραγόντων:

(α) η πρόσβαση είναι ένα-προς-πολλά αντί για πολλά-προς-ένα

(β)ο συγχρονισμός και ο σύμφωνος εντοπισμός διευκολύνονται με τη χρήση ενός κοινού πιλοτικού σήματος

(γ)η παρεμβολή λαμβάνεται από μερικές συγκεντρωμένες μεγάλες πηγές (σταθμούς βάσης) παρά από πολλές κατανεμημένες μικρές (κινητές).

Ταυτόχρονα, το δυναμικό εύρος του απαιτουμενου επιπέδου ισχύος θα είναι πολύ μικρότερο για την εμπρόσθια ζεύξη, εφόσον η παρεμβολή από χρήστες ίδιας κυψέλης δεν εξαρτάται από την απόσταση από το σταθμό βάσης. Η χειρότερη κατάσταση για ένα κινητό δέκτη θα συμβεί γενικά όταν το κινητό βρίσκεται σε μία από τις έξι γωνίες της εξαγωνικής κυψέλης, όπου ισαπέχει από τους τρεις σταθμούς βάσης.

Περισσότερη ισχύς εμπρόσθιας ζεύξης πρέπει τότε να παραχθεί στους χρήστες που λαμβάνουν την περισσότερη παρεμβολή από άλλους σταθμούς βάσης. Φυσικά, οι χρήστες στα όρια μπορεί να βρίσκονται σε ήπια μεταπομπή, στην οποία περίπτωση επίσης λαμβάνουν ισχύ σήματος από δύο ή περισσότερους σταθμούς βάσης. Μεταθέτουμε την εξέταση της ήπιας μεταπομπής μέχρι την επόμενη υποενότητα και εξετάζουμε εδώ μόνο τη λήψη του επιθυμητού σήματος χρήστη από ένα μοναδικό σταθμό βάσης. Υποθέτουμε ότι όλοι οι σταθμοί βάσης εκπέμπουν στο ίδιο επίπεδο συνολικής μέσης ισχύος, αλλά ότι σε διαφορετικούς χρήστες μιας δεδομένης κυψέλης κατανέμονται διαφορετικά επίπεδα ισχύος ανάλογα με τις σχετικές τους ανάγκες. Θα αναφερθούμε σε αυτή τη διαδικασία ως εμπρόσθια κατανομή ισχύος, παρά έλεγχο ισχύος: Η κατανομή είναι από μια πηγή που την μοιράζονται πολλοί χρήστες και κυμαίνεται αργά και πάνω από ένα πολύ μικρότερο δυναμικό εύρος. Ακολουθούμε κυρίως την ανάπτυξη του Gilhousen et al. [1991].

Ας υποθέσουμε ότι ο i χρήστης, που ελέγχεται από το σταθμό βάσης 1, λαμβάνει ισχύ παρεμβολής από τους J σταθμούς βάσης. Έστω ότι η συνολική ισχύς από το σταθμό βάσης j που λαμβάνει ο χρήστης i

είναι $S_{Rji}$ και έστω $S_{RJi} > S_{Rji}$ για κάθε j # 1, γιατί ο χρήστης πρέπει πάντα να επικοινωνέι (τουλάχιστον) με το σταθμό βάσης από τον οποίο λαμβάνει το ισχυρότερο σήμα. Τώρα ας υποθέσουμε ότι ένα τμήμα 1-β της συνολικής ισχύος που εκπέμπεται από οποιαδήποτε κυψέλη ή τομέα αφιερώνεται στο πιλοτικό σήμα, καθώς και σε οποιαδήποτε κοινή πληροφορία (όπως το αρχικό διάνυσμα του ψευδοτυχαίου κώδικα ή τα δεδομένα ειδοποίησης) που προορίζεται για όλους τους χρήστες. Το εναπομείνον τμήμα β τότε κατανέμεται σε όλους τους $k_u$ χρήστες του σταθμού βάσης της κυψέλης ή του τομέα αυτού. Έτσι, ο i χρήστης λαμβάνει ένα τμήμα $\beta\phi_i$ της εκπεμπόμενης ισχύος, υπό τις συνθήκες

$$\sum_{i=1}^{k_u} \Phi_i \leq 1 \tag{6.78}$$

Τότε, για πυκνότητα θορύβου υποβάθρου $N_0$, εύρος ζώνης W και ρυθμό κοινών δεδομένων χρήστη R, ο λόγος της ενέργειας bit προς την πυκνότητα παρεμβολής για τον i χρήστη θα είναι

$$\left(\frac{E_b}{I_0}\right)_i \gtrsim \frac{\beta\Phi_i S_{R_{1_i}}/R}{\left(\sum_{j=1}^{J} S_{R_{ji}} + N_0 W\right)/W} \tag{6.79}$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι σε όλους τους χρήστες της κυψέλης (ή του τομέα) κατανέμεται το ίδιο $E_b / I_0$. Όπως στην ανάστροφη ζεύξη, μπορεί να θέλουμε να διαφοροποιήσουμε αυτό το ποσό αν ένας χρήστης βιώνει υπερβολικές πολυδιαδρομικές καταστάσεις. Όμως, η διακύμανση θα είναι ελάχιστη και μπορεί να εξηγηθεί λαμβάνοντας μικρότερο $S_{Rji}$, για εκείνο το χρήστη. Τότε με $(E_b / I_0)_i = E_b / I_0$ για κάθε i, μπορούμε να αντιστρέψουμε το (6.79) ως μια ισότητα για να βρούμε τη σχετική κατανομή για κάθε i χρήστη,

$$\Phi_i = \frac{E_b/I_0}{\beta W/R}\left(1 + \sum_{j=2}^{J} S_{R_{ji}}/S_{R_{1i}} + N_0 W/S_{R_{1i}}\right) \tag{6.80}$$

Τώρα υποθέτουμε ότι χρειαζόμαστε μια δεδομένη τιμή του $E_b / I_0$ (που σύμφωνα με την Ενότητα 4.4, θα έπρεπε να βρίσκεται στην τάξη των 4 έως 5 dB για τη σύμφωνα διαμορφωμένη εμπρόσθια ζεύξη). Τότε αυτή η τιμή θα είναι βιώσιμη για όλους τους χρήστες δεδομένου ότι οι κατανομές τμηματικής ισχύος $\phi_i$ ικανοποιούν το

(6.78). Όποτε αυτή η κατάσταση κι επομένως, το επιθυμητό επίπεδο $E_b$ / $I_0$, δεν μπορεί να ικανοποιηθεί, το σύστημα θα θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε μια κατάσταση διακοπής της επικοινωνίας. Τώρα προχωρούμε για να αξιολογήσουμε και να θέσουμε φράγμα στην πιθανότητα διακοπής της επικοινωνίας. Ενθυμούμενοι ότι ο i χρήστης είναι ενεργός μόνο διακεκομμένα με πιθανότητα που δίνεται από το (6.40) και ότι ο αριθμός των $k_u$ χρηστών είναι μια Poisson τυχαία μεταβλητή, έχουμε

$$\mathrm{P_{out}} = \Pr\left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k_u}} \Phi_{\mathrm{i}} > 1\right)$$

$$= Pr\left[\sum_{i=1}^{k_u} v_i \left(1 + \sum_{\mathrm{j=2}}^{\mathrm{J}} \mathrm{S_{R_{ji}}}/\mathrm{S_{R_{1i}}} + \mathrm{N_0W}/\mathrm{S_{R_{1i}}}\right) > \frac{\beta \mathrm{W/R}}{\mathrm{E_b/I_0}}\right], \tag{6.81}$$

όπου $v_i$ είναι η δυαδική τυχαία μεταβλητή που ορίζεται από το (6.40).

Γενικά ο θόρυβος του υπόβαθρου (κυρίως θερμικής προέλευσης) θα είναι αμελητέος σε σύγκριση με τη συνολική ισχύ σήματος (συμπεριλαμβανομένων των σημάτων όλων των χρηστών) που λαμβάνεται από όλους τους σταθμούς βάσης. Έτσι, μπορούμε να μειώσουμε το $N_0W$ στο (6.81). Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί επειδή η ισχύς εκπομπής του σταθμού βάσης δεν είναι τόσο περιορισμένη όσο για κινητούς πομπούς. Τότε, ορίζοντας

$$\mathrm{y_i} = \sum_{\mathrm{j=2}}^{\mathrm{J}} \mathrm{S_{R_{ji}}}/\mathrm{S_{R_{1i}}} \tag{6.82}$$

και όπως πριν,

$$\mathrm{K_o} = \frac{\mathrm{W/R}}{\mathrm{E_b/I_0'}} \tag{6.83}$$

έχουμε το φράγμα Chernoff

$$\mathrm{P_{out}} = \Pr\left[\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k_u}} \mathrm{v_i}\,(1 + \mathrm{y_i}) > \beta \mathrm{K_o}\right]$$

$$< E\ exp\left[\sum_{i=1}^{k_u} v_i\left(1+y_i\right) - s\beta K_o\right], \qquad s>0 \qquad (6.84)$$

Λαμβάνοντας προσδοκίες σε σχέση με το $k_u$,$v_i$ και $y_i$, όπου τα τελευταία είναι όλα αμοιβαίως ανεξάρτητα, βρίσκουμε

$$P_{out} < \mathrm{Min}_{s>0}\, E_{k_u} \prod_{i=1}^{k_u} E_{v_i} E_{y_i} e^{sv_i(1+y_i)} e^{-s\beta K_o}$$

$$= \mathrm{Min}_{s>0}\, E_{k_u}\left[\rho E_y e^{s(1+y)} + 1 - \rho\right]^{k_u} e^{-s\beta K_o}$$

$$= \underset{s>0}{\mathrm{Min}} \sum_{k_u=0}^{\infty} \frac{1}{k_u!} (\lambda/\mu)^{k_u} \left\{\rho\left[E_y e^{s(1+y)} - 1\right] + 1\right\}^{k_u} e^{-\lambda/\mu} e^{-s\beta K_o}$$

$$= \underset{s>0}{\mathrm{Min}} \exp\left\{\rho(\lambda/\mu) E_y\left[e^{s(1+y)} - 1\right] - s\beta K_o\right\}.$$

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ίσες εκπεμπόμενες δυνάμεις από όλους τους σταθμούς βάσης, η ισχύς $S_{Rji}$, που λαμβάνεται από τον i χρήστη από τον j σταθμό βάσης είναι ανάλογη προς το αντίστροφο της κανονικά κατανεμημένης log απόσβεσης του (6.1). Έτσι,

$$\frac{S_{R_{ji}}}{S_{R_{1i}}} = \frac{r_{1i}^{m} 10^{\zeta_{1i}/10}}{r_{ji}^{m} 10^{\zeta_{ji}/10}} \qquad (6.86)$$

$r_{ji}$ είναι η απόσταση από τον j σταθμό βάσης στον i χρήστη και $\zeta_{ji}$ είναι η αντίστοιχη κανονική log συνιστώσα της απόσβεσης. Ακόμη, εξ ορισμού (6.3), εκφράζουμε επίσης το άθροισμα των λόγων ως

$$y_i = \sum_{j=2}^{J} \frac{S_{R_{ji}}}{S_{R_{1i}}} = r_{ji}^{m} 10^{b\xi_{ji}/10} \sum_{j=2}^{J} r_{ji}^{-m} 10^{-b\xi_{\xi i}/10} \qquad (6.87)$$

Εδώ το $\xi_{ji}$ είναι ανεξάρτητο από την κανονική log τυπική απόκλιση σ = 8 dB. Επίσης, λαμβάνουμε b=1$\sqrt{2}$ και m = 4 και θυμηθείτε ότι

$$r_{1i}^{m} 10^{b\xi_{1i}/10} = \underset{j}{\mathrm{Min}}\, r_{ji}^{m} 10^{b\xi_{ji}/10}$$

Η κατανομή του $y_i$, που εξαρτάται από τις σχετικές αποστάσεις και από τις κανονικά κατανεμημένες log μεταβλητές, δεν είναι αναλυτικά ελέγξιμη. Όμως, είναι ξεκάθαρη για να βρούμε την κατανομή της προσομοίωσης του Monte Carlo. Μπορεί να

υποθέτουμε ότι μόνο οι σταθμοί βάσης εντός δύο συγκεντρωτικών δακτυλίων γύρω από τη δεδομένη κυψέλη εκπέμπουν ισχύες που λαμβάνονται σε διακριτέο επίπεδο από το δεδομένο χρήστη. Έτσι, J = 19, συμπεριλαμβανομένου του δεδομένου σταθμού βάσης, έξι σταθμοί βάσης στον πρώτο δακτύλιο και 12 σταθμοί βάσης στον δεύτερο δακτύλιο. Η μεταβλητή $y_i$ εξαρτάται από τη θέση του i χρήστη, που θεωρείται ότι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στην κυψέλη. Έτσι, εξάγεται ο μέσος όρος της κατανομής σε όλες τις θέσεις της κυψέλης. Όμως, συμμετρικά είναι απαραίτητο να γίνονται προσομοιώσεις μόνο πάνω από το $30^o$ δεξί τρίγωνο που φαίνεται στο Σχήμα 6.8.

Γενικά, 100 δοκιμές πραγματοποιήθηκαν για καθεμία από τις 5.150 ισαπέχουσες αιχμές του τριγώνου. Το αποτέλεσμα είναι το ιστόγραμμα του Σχήματος 6.9. Χρησιμοποιώντας αυτό το ιστόγραμμα μπορούμε να βρούμε αριθμητικά την προσδοκία

$$\mathrm{E_y}(\mathrm{e^{sy}}) = \sum_{\{\mathrm{Y}\}} \mathrm{e^{sY}}\ \mathrm{Pr}\ (\mathrm{y} = \mathrm{Y})$$

(6.88)

Από αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε το φράγμα Chernoff του (6.85), που δίνει το αποτέλεσμα της πιο αριστερής καμπύλης στο Σχήμα 6.10 για $\beta K_0 = 256$.

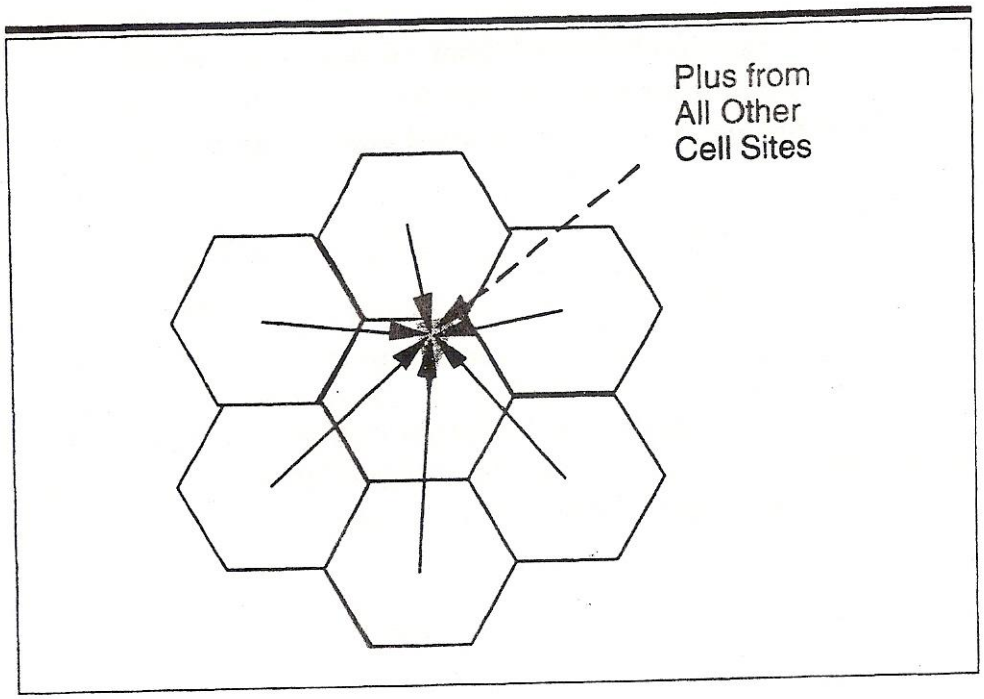



**Figure 6.8** Forward link allocation geometry. ©1991 IEEE. ``On the Capacity of a Cellular CDMA System'' by K. S. Gilhousen, I. M. Jacobs, R. Padovani, A. J. Viterbi, L. A. Weaver, Jr., and C. E. Wheatley III, in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. Vol. 40, No. 2, pp. 303–312, May 1991.

## 6.7.2 Επίδραση ήπιας μεταπομπής σε εμπρόσθια ζεύζη

Όπως σημειώσαμε στην αρχή αυτής της ενότητας, υπάρχει σημαντική ασυμμετρία ανάμεσα σε καταστάσεις εμπρόσθιας κι ανάστροφης ζεύξης. Η ήπια μεταπομπή, συγκεκριμένα, παρέχει ένα σημαντικό κέρδος στην επίδοση ανάστροφης ζεύξης με σχεδόν κανένα μειονέκτημα παρεμβολής, διότι η δεύτερη κυψέλη που ταυτόχρονα λαμβάνει χρήσιμα σήματα από τον χρήστη κινητού θα λάμβανε εκείνη την ενέργεια σε οποιαδήποτε περίπτωση, χωρίς πλεονέκτημα αν δεν ήταν ήπιας μεταπομπής. Ο καθορισμός ήπιας μεταπομπής για την εμπρόσθια ζεύξη είναι άλλο ζήτημα. Ο δεύτερος κυψελικός σταθμός βάσης πρέπει τώρα να εκπέμπει προς το δεδομένο χρήστη το ίδιο σήμα όπως η πρώτη κυψέλη. Έτσι, πρέπει τώρα να μεταφέρουμε την ενέργεια που συνεπώς δεν είναι πλέον

διαθέσιμη για κατανομές σε άλλους χρήστες εκείνης της δεύτερης κυψέλης.

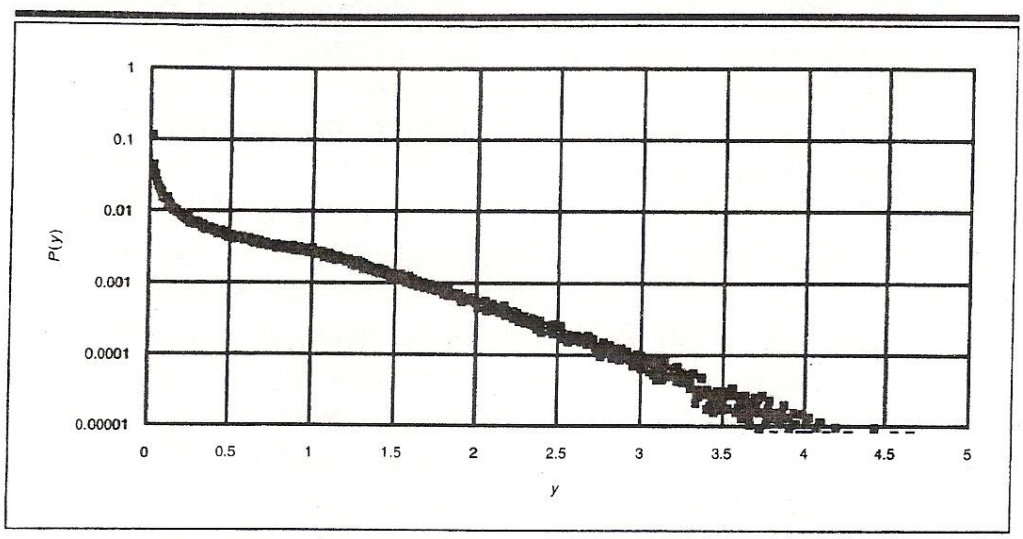



**Figure 6.9** Histogram of other-cell forward relative interference (mean = 0.51). ©1991 IEEE. ``On the Capacity of a Cellular CDMA System'' by K. S. Gilhousen, I. M. Jacobs, R. Padovani, A. J. Viterbi, L. A. Weaver, Jr., and C. E. Wheatley III, in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 40, No. 2, pp. 303–312, May 1991.

Ας εξετάσουμε τώρα ένα χρήστη σε ήπια μεταπομπή. Υπό τις καλύτερες συνθήκες, όπου οι απώλειες διάδοσης από κάθε σταθμό βάσης προς το χρήστη είναι ίδιες, τα επίπεδα της λαμβανόμενης ισχύος από τους δύο σταθμούς βάσης είναι σχεδόν ίσα. Τότε κάθε κυψέλη θα χρειαζόταν να εκπέμπει λιγότερη ισχύ απ' ό,τι πριν, εφόσον ο κινητός δέκτης συνδυάζει σύμφωνα αυτό που λαμβάνει από τους δύο πομπούς.

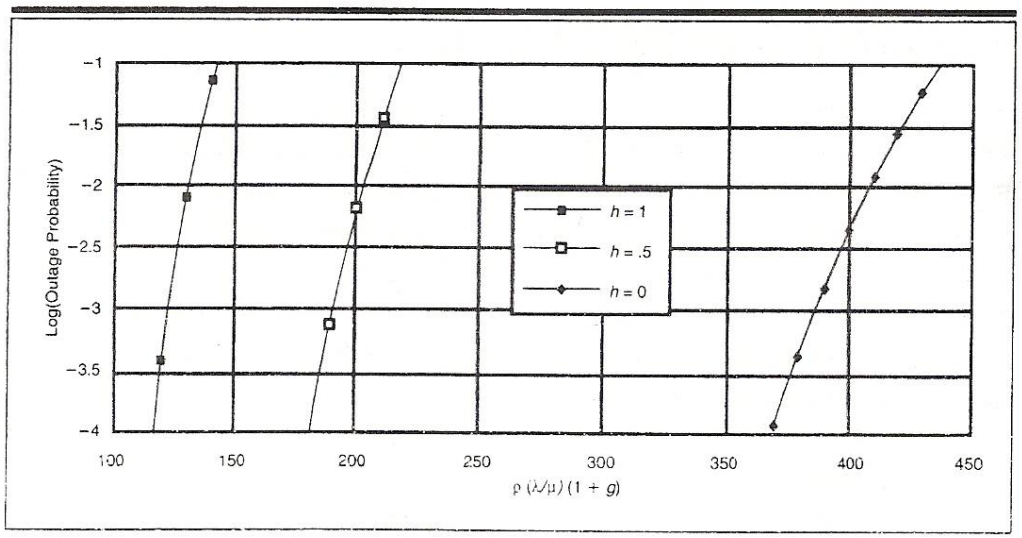



**Figure 6.10** Forward link outage probability upper bounds; $\beta K_0 = 256$.

Αυτό θα μπορούσε να είναι ιδανικά 3 dB λιγότερο για κάθε πομπό αν λάμβανε ακριβώς ίσα σήματα χωρίς απόσβεση και τα συνδύαζε σύμφωνα, ώστε η συνολική παρεμβολή ή οι απαιτήσεις κατανομής ισχύος να παρέμεναν αμετάβλητα. Έτσι, τα σήματα που θα προορίζονταν για τους χρήστες σε ήπια μεταπομπή θα είχαν την ίδια συνολική ενέργεια. Απλώς θα επνακατανέμονταν εξίσου στους δύο σταθμούς βάσης εκπέμποντας προς κάθε τέτοιο χρήστη.

Αυτή η ιδανική κατάσταση, όμως, δεν ισχύει σχεδόν ποτέ. Στην πραγματικότητα, ένα από τα μεγαλύτερα ποιοτικά πλεονεκτήματα της ήπιας μεταπομπής είναι ότι ο δεύτερος σταθμός βάσης μπορεί να ενεργοποιηθεί όταν η ισχύς του που λαμβάνεται από τον κινητό χρήστη είναι κατά πολύ χαμηλότερη από εκείνη του πρώτου (π.χ. 6 dB), και ο πρώτος σταθμός βάσης διατηρείται μέχρι η ισχύς του να μειωθεί από το ίδιο ποσό κάτω από την ισχύ του δεύτερου σταθμού βάσης. Σε συνδυασμό με πολύ πιο γρήγορα κυμαινόμενες συνθήκες απόσβεσης από την κάθε κυψέλη, είναι εμφανές ότι για αποτελεσματική ήπια μεταγωγή, και οι δύο σταθμοί βάσης κυψελών πρέπει να εκπέμπουν το ίδιο επίπεδο ισχύος όπως όταν ο καθένας μόνος του εκπέμπει προς το χρήστη. Επομένως, οι χρήστες στην ήπια

μεταπομπή συνεισφέρουν περίπου δύο φορές τόση παρεμβολή όση οι χρήστες που δεν είναι σε ήπια μεταπομπή.

Ας υποθέσουμε τότε ότι, σε ένα ομοιογενώς φορτωμένο πολυκυψελικό σύστημα, ένα τμήμα $g < 1$ όλων των χρηστών βρίσκεται σε ήπια μεταπομπή. Ακόμη, ας υποθέσουμε ότι και οι δύο σταθμοί βάσης που εμπλέκονται για κάθε τέτοιο χρήστη κατανέμουν κυρίως το ίδιο τμήμα $\phi_i$ προς εκείνο το χρήστη. Τότε ο ρυθμός άφιξης των χρηστών ανά σταθμό βάσης που εμπλέκονται στην παραγωγή της πιθανότητας διακοπής της επικοινωνίας του (6.81) έως (6.88) αυξάνεται αποτελεσματικά από λ σε λ(1 + g). Έτσι, στο φράγμα Chernoff του (6.85), το λ αυξάνει κατά το συντελεστή 1 + g, και στο προκύπτον γράφημα του Σχήματος 6.10, η τετμημένη γίνεται ρ(λ/μ) (1 + g).

Το συμπέρασμα είναι προφανές. Τα κατώφλια σε κατάσταση ήπιας μεταπομπής, όπου νέοι σταθμοί βάσης εισέρχονται στην κατάσταση και παλιοί φεύγουν, πρέπει να επιλεγούν ώστε το g να διατηρείται σχετικά χαμηλό (της τάξεως του $\frac{1}{2}$ έως $\frac{1}{3}$).

## 6.7.3 Ορθογωνικά σήματα για χρήστες της ίδιας κυψέλης

Σε όλο το κείμενο έχουμε υποθέσει ότι ανεξάρτητες ψευδοτυχαίες ακολουθίες χρησιμοποιούνται για να διαδόσουμε το σήμα του κάθε χρήστη, είτε σε ανάστροφη είτε σε εμπρόσθια ζεύξη. Τώρα εξετάζουμε μια εναλλακτική προσέγγιση για την εμπρόσθια ζεύξη μόνο: ένα υβρίδιο της ιδέας ανάθεσης θυρίδας και της τυχαίας σηματοδότησης. Αντί να διαμορφώνουμε τυχαία τα σήματα διάδοσης για κάθε μεμονωμένο χρήστη, ας υποθέσουμε ότι το ψευδοτυχαίο σήμα διάδοσης ανατίθεται μόνο σε μεμονωμένους σταθμούς βάσης (ή τομείς). Έτσι, αναφερόμενοι στο διάγραμμα εκπομπής εμπρόσθιας ζεύξης του Σχήματος 4.2, μια μεμονωμένη ψευδοτυχαία ακολουθία εισάγεται ανά φέρουσα φάση, $\alpha_n^{(I)}(0)$ και $\alpha_n^{(Q)}(0)$, αφού έχουν συνδυαστεί τα μεμονωμένα σήματα. Τώρα αντί

για τις μεμονωμένες ψευδοτυχαίες ακολουθίες για να ξεχωρίσουμε τους χρήστες, αναθέτουμε ορθογωνικές θυρίδες αλλά οι θυρίδες δεν βρίσκονται σε χρόνο ή συχνότητα, όπως στα συμβατικά συστήματα. Αντιθέτως, μια μοναδική ορθογωνική ακολουθία παρέχεται στον καθένα. Αυτό πραγματοποιείται πιο εύκολα αναθέτοντας σε μία από τις $k_u \leq N$ Hadamard-Walsh συναρτήσεις διάρκειας N chip (ή μια πολλαπλή τέτοια) να διαδόσει κάθε σύμβολο του κάθε χρήστη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.11. Ο ορθογωνισμός των χρηστών της ίδιας κυψέλης απαιτεί επίσης μια αντίστοιχη ελάχιστη μετατροπή του κινητού δέκτη. Όταν ο σταθμός βάσης λαμβάνει κι αναγνωρίζει ένα χρήστη πρόσφατης πρόσβασης, πρέπει να του αναθέσει μια Hadamard-Walsh συνάρτηση. Τότε, ενώ ο πομπός του σταθμού βάσης πολλαπλασιάζει την ακολουθία των κωδικοποιημένων δεδομένων με αυτή τη συνάρτηση για να διαδόσει και να ορθογωνίσει, ο αποδιαμορφωτής του δέκτη πρέπει ομοίως να πολλαπλασιαστεί με την ίδια ακολουθία, καθώς και με τις ψευδοτυχαίες ακολουθίες της κυψέλης (ή του τομέα), για να αφαιρέσουμε τη διάδοση πριν την BPSK διαμόρφωση. Σε ήπια μεταπομπή, η νέα κυψέλη ακόμη πρέπει να αναθέσει μια Hadamard-Walsh συνάρτηση για την εκπομπή προς τον κινητό χρήστη, που γενικά θα είναι διαφορετική από εκείνη που χρησιμοποιήθηκε από την πρώτη κυψέλη (εφόσον εκείνη μπορεί ήδη να έχει ανατεθεί).

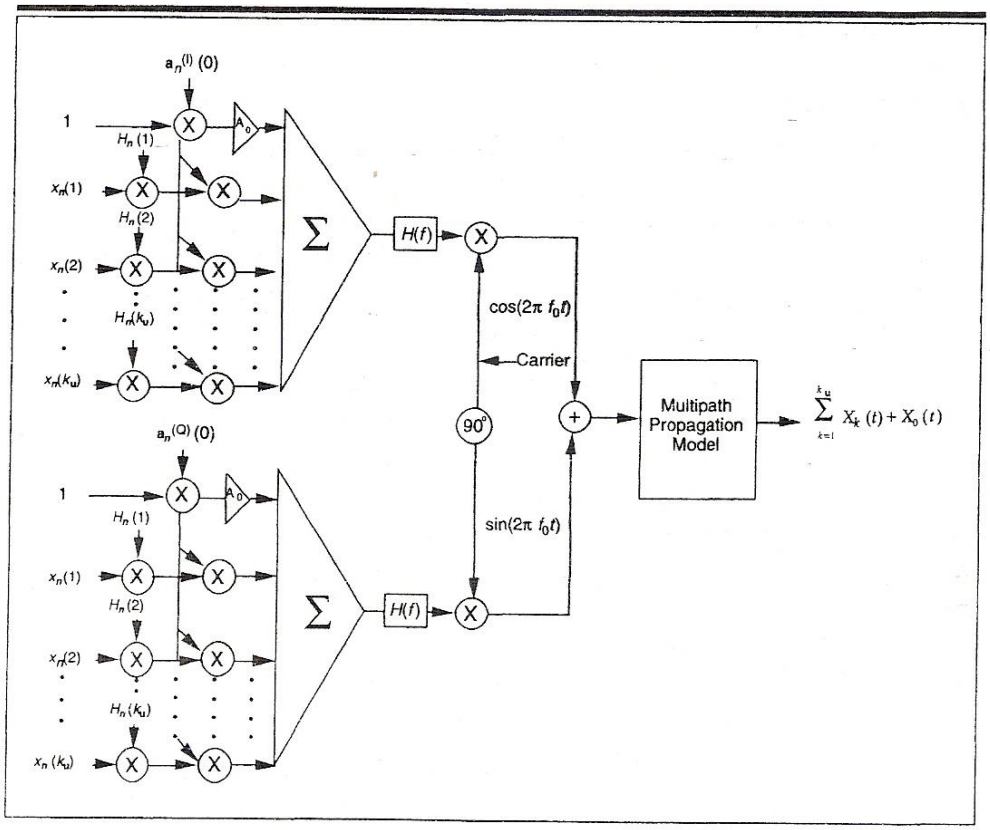



**Figure 6.11** Multiuser (base station) modulator employing orthogonal Hadamard–Walsh multiplexing. $H_n(k)$ = Hadamard–Walsh sequence for $k$th user; $n = 1, 2, \ldots, N$; $k \le k_u \le N$.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε δάχτυλο αποδιαμορφωτή που σχετίζεται με τη δεύτερη κυψέλη θα χρησιμοποιήσει τη νέα συνάρτηση για να απομακρύνει τη διάδοση από εκείνο το σταθμό βάσης.

Για ένα συντελεστή διάδοσης W/ R, όταν οι ακολουθίες δεδομένων των χρηστών ειναι κωδικοποιημένες με FEC κώδικα ρυθμού r < 1, τότε ο αριθμός των ορθογωνικών Hadamard-Walsh διαθέσιμων θυρίδων κι επομένως, ο αριθμός των χρηστών που μπορούν να υποστηριχθούν χωρίς ήπια μεταπομπή είναι

$$k_u \le (W/R)r \tag{6.89}$$

Με ήπια μεταπομπή, αυτό μειώνεται με συντελεστή 1 + g, όπου g είναι το τμήμα των χρηστών σε ήπια μεταπομπή. Προσέξτε ότι αυτό είναι ένα δύσκολο όριο, εφόσον ισχύει για όλα τα συστήματα με

θυρίδες. Μπορούμε, όμως, να διπλασιάσουμε αυτή την τιμή διαμορφώνοντας τους $k_u$ χρήστες σε ένα φορέα σε φάση (I) και επιπλέον $k_u$ χρήστες στον ορθογωνικό φορέα (Q). Η ορθογωνιότητα διατηρείται προφανώς στον κινητό δέκτη με σύμφωνη αποδιαμόρφωση χρησιμοποιώντας τον λαμβανόμενο πιλότο. Όλα τα συνδυασμένα σήματα στους I και Q φορείς γίνονται τυχαία εισάγοντας συγκεκριμένες ψευδοτυχαίες ακολουθίες σταθμού βάσης πριν την PSK διαμόρφωση του κάθε φορέα. Έτσι, οι εκπομπές από διαφορετικούς σταθμούς βάσης είναι αμοιβαίως ανεξάρτητες τυχαίες διαδικασίες.

Ιδανικά, αν οι χρήστες ίδιας κυψέλης ορθογωνιστούν, δεν εμφανίζονται πλέον ως παρεμβολή ο ένας στον άλλο. Έτσι, στο (6.79), ο παρονομαστής θα ξεκινούσε με j = 2. Ομοίως, στο (6.80) και όλα τα ακόλουθα, ο όρος ενότητας θα εξαφανιζόταν. Δυστυχώς, οι συνθήκες δεν είναι τόσο ευνοϊκές: Η πολλαπλή διαδρομή θα εισάγει παρεμβολή που δεν είναι ορθογωνική για χρήστες της ίδιας κυψέλης. Στην πραγματικότητα, αν οι πολυδιαδρομικές συνιστώσες χωριστούν από περισσότερους του ενός χρόνους chip, η συγκεκριμένη ψευδοτυχαία ακολουθία του σταθμού βάσης θα τους κάνει να φαίνονται ως τυχαίος θόρυβος η μία στην άλλη. Για παράδειγμα, με δύο διαδρομές ίσης ισχύος που χωρίζονται από χρόνο ενός chip ή περισσότερο, η σχετική παρεμβολή θα είναι μισή (3 dB πιο κάτω) απ' ό,τι θα ήταν χωρίς ορθογωνισμό. Λιγότερο ευνοϊκές και περισσότερο ευνοϊκές καταστάσεις θα προκύψουν. Σε κάθε περίπτωση, ας υποθέσουμε ότι η παρεμβολή της ίδιας κυψέλης μειώνεται από τον ορθογωνισμό σε ένα συντελεστή h < 1. Τότε σε όλες τις παραστάσεις από το (6.80) και μετά ο όρος ενότητας αντικαθίσταται από το h. Τότε, εξηγώντας τον ορθογωνισμό και για ήπια μεταπομπή ενός τμήματος g χρηστών, το (6.85) μεταβάλλεται για να γίνει

$$P_{out} < \mathrm{Min}_{s>0} \exp\{(1+g)\rho(\lambda/\mu)E_y\left[e^{s(h+y)}-1\right]-s\beta K_o\} \tag{6.90}$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 6.10, για h = 0,  .5 και 1, που έχει χαρτογραφηθεί ως μια συνάρτηση του (1 + g)ρ(λ /μ). Μπορούμε να δούμε συγκρίνοντας με το Σχήμα 6.4 ότι για h ≥ 0.5 και g < f, το όριο χωρητικότητας εμπρόσθιας ζεύξης υπερβαίνει εκείνο της ανάστροφης ζεύξης.

Τέλος, δεδομένης της μέτριας εφικτής βελτίωσης μέσω ορθογωνισμού, μπορούμε να εξετάσουμε επίσης τη χρήση της σε ανάστροφη ζεύξη.  Αυτό παρουσιάζει μια δυσκολία με το συγχρονισμό του χρονισμού. Ο ορθογωνισμός είναι δυνατός σε εμπρόσθια ζεύξη επειδή όλοι οι χρήστες που απορρέουν από τον ίδιο πομπό έχουν ακριβώς ίδια συγχρονισμένο κοινό χρονισμό. Στην ανάστροφη ζεύξη, οι πολλαπλοί χρήστες είναι εντελώς ασυντόνιστοι. Για να συγχρονίσουμε το χρονισμό chip θα χρειαζόταν μια διαδικασία ελέγχου χρονισμού κλειστού βρόχου, όμοια με εκείνη που χρησιμοποιείται στον έλεγχο ισχύος. Η ακρίβεια παρακολούθησης θα χρειαζόταν να είναι στην τάξη του ενός μικρού κλάσματος του χρόνου chip.  Δεν μπορούμε να εγγυηθούμε μια τόσο περίπλοκη διαδικασία για μια μόνο μέτρια βελτίωση στην επίδοση. Επιπλέον, αν η ανάστροφη ζεύξη χρησιμοποιεί M-αδική ασύμφωνη διαμόρφωση, που ήδη επεκτείνει το εύρος ζώνης, η προσθετική επέκταση εύρους ζώνης για ορθογωνισμό μπορεί να υπερβεί το συνολικό διαθέσιμο συντελεστή επέκτασης W / R. Φυσικά, η ανάστροφη ζεύξη μπορεί να χρησιμοποιήσει δυαδική PSK ή διαφορική PSK διαμόρφωση. Αλλά τότε, για να διατηρήσουμε την επίδοση, θα ήταν επιθυμητή επίσης σύμφωνη αποδιαμόρφωση της ανάστροφης ζεύξης, που πιθανόν απαιτεί ασύμφωνο πιλοτικό σήμα ή ασύμφωνο χρονικό διάστημα για κάθε χρήστη.

## 6.8 Μείωση της παρεμβολής με πολυτομεακές και κατανεμημένες κεραίες

Μια βασική υπόθεση που έγινε σε όλο το κεφάλαιο, όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 6.4, είναι ότι οι χρήστες είναι ομοιογενώς κατανεμημένοι σε καθεμία από πολλές κυψέλες σε μια αυθαίρετα

μεγάλη περιοχή δύο διαστάσεων. Επιπλέον, έχουμε υποθέσει ότι έχουμε ιδανικοποιημένες τομεακές κεραίες με τετράγωνο μοτίβο αποκοπής, των οποίων το κέρδος λήψης κι εκπομπής είναι ενότητα πάνω από το εύρος δέσμης και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Έτσι, όλοι οι τομείς είναι εντελώς ξεχωριστοί και οι τομεακές κεραίες λειτουργούν ανεξάρτητα από τις άλλες τομεακές κεραίες της ίδιας κυψέλης. Για παράδειγμα, με κεραίες τριών τομέων, που η καθεμία καλύπτει ακριβώς 2π/3 ακτίνια, η χωρητικότητα Erlang είναι η ίδια για κάθε τομέα. Επομένως, η χωρητικότητα της κυψέλης είναι τρεις φορές όσο μιας κυψέλης με πολυκατευθυντική κεραία στο σταθμό βάσης. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι με μια ομοιόμορφη κατανομή χρηστών, η παρεμβολή των άλλων κυψελών είναι απλώς η συνολική παρεμβολή από χρήστες που ελέγχονται από άλλους σταθμούς βάσης τομεακών κυψελών, οι οποίοι επίσης βρίσκονται στον 2π/3 τομέα ακτινίου που φαίνεται από την τομεακή κεραία του δεδομένου σταθμού βάσης. Ιδανικά αυτή η βελτίωση θα μπορούσε να γίνει πολλαπλή (N-fold) χρησιμοποιώντας N τέτοιες υποθετικές 2π/N κεραίες εύρους δέσμης ακτινίου.

Διατηρώντας την υπόθεση μιας ομοιόμορφης πυκνοτητας χρηστών, στη συνέχεια εξετάζουμε ένα πιο ρεαλιστικό σταθμό βάσης με τομεακές κεραίες ,των οποίων τα μοτίβα αλληλοεπικαλύπτονται. Αυτές οι κεραίες μπορούν να εφαρμοστούν ξεχωριστά ή μπορεί να είναι τα πολλαπλά δεδομένα εξόδου μιας διάταξης φάσης. Στην τελευταία περίπτωση, ένα σύνολο N κεραίων (πιθανόν πολυκατευθυντικών) συνδυάζονται γραμμικά για να παράγουν ένα σύνολο από $M \leq N$ δεδομένα εξόδου που το καθένα τους αντιστοιχεί σε μια δέσμη με εύρος περίπου 2π/M ακτίνια. Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να διαφοροποιήσουμε ελαφρώς τον υπολογισμό παρεμβολής της Ενότητας 6.4 συμπεριλαμβάνοντας την επίδραση του κέρδους της κεραίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να διαιρεί τον όρο πολυκατευθυντικής παρεμβολής των άλλων χρηστών με το $G_A$, το κέρδος κεραίας, αντί με τον αριθμό τομέων N. Το $G_A$ ορίζεται ως το πλάτος γωνιακού μοτίβου προς την κατεύθυνση του επιθυμητού χρήστη διαιρεμένο με το μέσος πλάτος μοτίβου πάνω από 2π ακτίνια. Η προκύπτουσα χωρητικότητα κυψέλης (και των

εμπρόσθιων και των ανάστροφων ζεύξεων) αποκτάται όπως πριν για μια πολυκατευθυντήρια κυψέλη, αλλά με W/R που πολλαπλασιάζεται με το $G_A$ . Διαφορετικά, η χωρητικότητα τομέα αποκτάται πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη (ιδανική) χωρητικότητα τομέα με $G_A/N$.

Απομένει ακόμη ένας αριθμός ζητημάτων σχετικά με το συνδυασμό πολλαπλής διαδρομής. Αν το εύρος δέσμης του τομέα της κεραίας είναι σχετικά στενό (υψηλό κέρδος), πολλαπλές διαδρομές μπορούν να ληφθούν στο σταθμό βάσης μέσω διαφορετικών τομέων. Ο συνδυασμός αυτών των διαδρομών απαιτεί να αθροίσουμε διαφορετικά δεδομένα εξόδου στοιχείων (σύμφωνα ή ασύμφωνα, ανάλογα με τις περιστάσεις που περιγράφονται στο Κεφάλαιο 4). Με έλλειψη αμοιβαιότητας για εμπρόσθιες και ανάστροφες ζεύξεις, όμως, ο συνδυασμός πολλαπλών στοιχείων μπορεί να μην παράγει το ίδιο κέρδος εκπομπής και κέρδος λήψης.

Κάτι άλλο σημαντικό που πρέπει να λάβουμε υπ’ όψιν μας είναι η πυκνότητα του ομοιογενούς χρήστη. Στις περισσότερες περιοχές, η υπόθεση δεν είναι έγκυρη. Σε ακραίες περιπτώσεις, όπως κατά μήκος μιας ακτογραμμής που συνορεύει με μια οροσειρά, ο πληθυσμός χρήστη μπορεί να είναι σχεδόν γραμμικά κατανεμημένος σε μια στενή λωρίδα. Προφανώς, σε τέτοιες περιπτώσεις, οι τομεακές κεραίες είναι σχεδόν άχρηστες διότι όλη η παρεμβολή των άλλων χρηστών βρίσκεται σε ένα σχετικά στενό εύρος δέσμης. Τότε, ένας τρόπος για να αυξήσουμε τη χωρητικότητα είναι να τοποθετήσουμε μικροκυψέλες (με μικρότερες διαμέτρους και χαμηλότερα ύψη κεραίας) κατά μήκος της λωρίδας, αλλά να τις ελέγχουμε κεντρικά σε ένα σταθμό βάσης [Lee, 1994]. Ο σταθμός βάσης πραγματοποιεί όλη την επεξεργασία, συμπεριλαμβανομένου του ελέγχου ισχύος. Αυτό, φυσικά, απαιτεί μια διασύνδεση ευρείας ζώνης των κεραίων. Μια τέτοια προσέγγιση είναι ακόμη πιο χρήσιμη σε εσωτερικό χώρο, όπου η διάδοση μπορεί να είναι περιορισμένη σε διαδρόμους και μεμονωμένα δωμάτια. Εδώ η χρήση των κατανεμημένων κεραίων με πολλά μικρά στοιχεία μπορεί να είναι ο καλύτερος τρόπος για να παρέχουμε κάλυψη. Επιπλέον, αν κάθε

εκπομπή κεραίας στοιχείου καθυστερεί σε σύγκριση με των γειτόνων της κατά ένα διάστημα μεγαλύτερο του 1/W, το λαμβανόμενο σήμα στο κινητό από δύο ή περισσότερα στοιχεία που εκπέμπουν το ίδιο σήμα μπορεί να συνδυαστεί προς ώφελός μας από ένα δέκτη rake.Αυτό είναι ένα άλλο παράδειγμα ήπιας μεταπομπής, που περιγράφεται και αναλύεται στις Ενότητες 6.4 και 6.5. Όλες οι προηγούμενες εναλλακτικές είναι πιθανές λόγω του χαρακτηριστικού επαναχρησιμοποίησης της καθολικής συχνότητας για πολλαπλή πρόσβαση διάχυτου φάσματος.

Το σχέδιο των συστημάτων κεραίας, είτε χωρίζοντας σε τομείς, με διατάξεις, είτε με κατανεμημένα στοιχεία, παρέχει ίσως τη μεγαλύτερη ευκαιρία για αύξηση της χωρητικότητας για οποιαδήποτε μελλοντική πρόοδο στα δίκτυα κυψελικής και προσωπικής επικοινωνίας. Η προσαρμογή της τεχνικής κεραίας στην κατανομή φυσικού περιβάλλοντος και πληθυσμού, η εισαγωγή κι αφαίρεση ισχύος σήματος προς κι από όπου χρειάζεται, είναι ένας σημαντικός τρόπος αύξησης της χωρητικότητας μέσω διαχείρισης της χωρικής παρεμβολής.

## 6.9 Ακύρωση Παρεμβολής

Για ένα σύστημα πολλαπλής πρόσβασης μοναδικής κυψέλης, αν δεχτούμε εκπομπή χωρίς απόσβεση για κάθε χρήστη σε ένα κοινό κανάλι με προσθετικό λευκό Γκαουσιανό θόρυβο, η θεωρία της πληροφορίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι η παρεμβολή από χρήστες ίδιας κυψέλης μπορεί να εξαλειφθεί εντελώς με μια διαδικασία διαδοχικής ακύρωσης των παρεμβαλλόντων χρηστών [Wyner, 1974; Viterbi, 1990]. Η προκύπτουσα χωρητικότητα του καναλιού πολλαπλών χρηστών δίνεται από τον κλασικό AWGN τύπο [Shannon, 1949], με ρυθμό που αναφέρεται στο άθροισμα των ρυθμών όλων των χρηστών και ισχύ σήματος που είναι το άθροισμα των λαμβανόμενων ισχύων (στο σταθμό βάσης) από όλους τους χρήστες. Αν και η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος είναι εποικοδομητική, που σημαίνει ότι η

μέθοδος για να φτάσουμε στο αποτέλεσμα προσδιορίζεται, υπάρχουν αρκετές πλευρές της τεχνικής που θα το καταστήσουν πάντα μη πρακτικό:

(α) απαιτείται ένας αυθαίρετα μακρύς και ισχυρός κώδικας FEC

(β) εμπλέκονται αυθαίρετα μεγάλες καθυστερήσεις επεξεργασίας

(γ) η λήψη είναι χωρίς απόσβεση ή η απόσβεση είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με τη διάρκεια πλαισίου

(δ) πρέπει να επεξεργαστούμε  όλους τους λαμβανόμενους χρήστες μαζί για να επαναφέρουμε οποιονδήπορε χρήστη

Όλες αυτές οι 4 συνθήκες μπορούν να είναι πιο ήπιες, με λίγο συμβιβασμό στην επίδοση, για να πετύχουμε ένα λογικό επίπεδο πολυπλοκότητας και καθυστέρησης. Όμως, η προκύπτουσα επίδοση θα είναι κατά πάσα πιθανότητα χειρότερη απ’ ό,τι εφαρμόζοντας άλλες απλές, πιο εύρωστες τεχνικές, ιδιαίτερα μεθόδους σχεδίου κεραίας που περιγράφονται στην τελευταία ενότητα.

Δεν θα εξετάσουμε συγκεκριμένες τεχνικές ακύρωσης της παρεμβολής για την ανάστροφη ζεύξη, όπως έχει γίνει από αρκετούς συγγραφείς [Viterbi, 1990; Yoon et al., 1992; Dent, 1993]. Αντί γι’ αυτό, ορίζουμε μόνο κάποια άνω φράγματα στη μέγιστη βελτίωση της ακύρωσης παρεμβολής σε ένα κυψελικό σύστημα. Η υπόθεσή μας είναι ότι κάθε σταθμός βάσης επεξεργάζεται όλους τους χρήστες που ελέγχει, αλλά κανέναν από αυτούς που ελέγχονται από άλλους σταθμούς βάσης. Προς διευκόλυνση και για να αποκτήσουμε ξεκάθαρα αποτελέσματα, επίσης, λαμβάνουμε την ιδανικοποιημένη κατάσταση εκπομπής χωρίς απόσβεση (όχι πολλαπλή διαδρομή ή τουλάχιστον καλά ξεχωρισμένες διαδρομές γνωστών πλατών) και σύμφωνη λήψη. Τότε αν η τέλεια ακύρωση παρεμβολής ήταν εφικτή (που θα απαιτούσε τη βοήθεια ενός «τζίνι»), η πυκνότητα παρεμβολής θα μειωνόταν από $(1 + f)I_0$ σε $fI_0$, όπου f είναι η σχετική παρεμβολή άλλων κυψελών όπως υπολογίστηκε στην Ενότητα 6.4. Έτσι, δεν μας εκπλήσσει ότι αυτό το άνω όριο στο κέρδος ακύρωσης της παρεμβολής για το κυψελικό σύστημα ανάστροφης ζεύξης, (1 +

f)/f, είναι το ίδιο με το μέγιστο όφελος της χρήσης ορθογωνικών ακολουθιών (Hadamard) για το διαχωρισμό χρηστών στην εμπρόσθια ζεύξη-ή επιπλέον στην ανάστροφη ζεύξη αν προσθετικά χαρακτηριστικά και διαδικασίες εφαρμοστούν στην τελευταία για να παρέχουν ορθογωνισμό και συμφωνία όπως περιγράφτηκε στην Ενότητα 6.7.3. Παρουσιάζουμε αυτό το υποβοηθούμενο από τζίνι όριο ακύρωσης της παρεμβολής για βελτίωση ως την άνω καμπύλη στο Σχήμα 6.12. Έτσι, για παράδειγμα, αν f = 0.6, ο συντελεστής βελτίωσης είναι 2.67 ή 4.3 dB.

Τώρα παρουσιάζουμε μια λιγότερο αισιόδοξη αξιολόγηση της βελτίωσης της ακύρωσης παρεμβολής σε ένα σύστημα που χρησιμοποιεί έναν ισχυρό FEC κώδικα. Ο κλασικός τύπος Shannon παρέχει ένα άνω φράγμα στη χωρητικότητα για ένα κυψελικό σύστημα με ακύρωση παρεμβολής. Το σύνολο της λαμβανόμενης ισχύος χρήστη ίδιας κυψέλης από όλους τους χρήστες της κυψέλης ή του τομέα είναι $k_u P_s$. Το $P_s$ είναι η ίση λαμβανόμενη ισχύς (με ελεγχόμενη ισχύ) ανά χρήστη της δεδομένης κυψέλης.

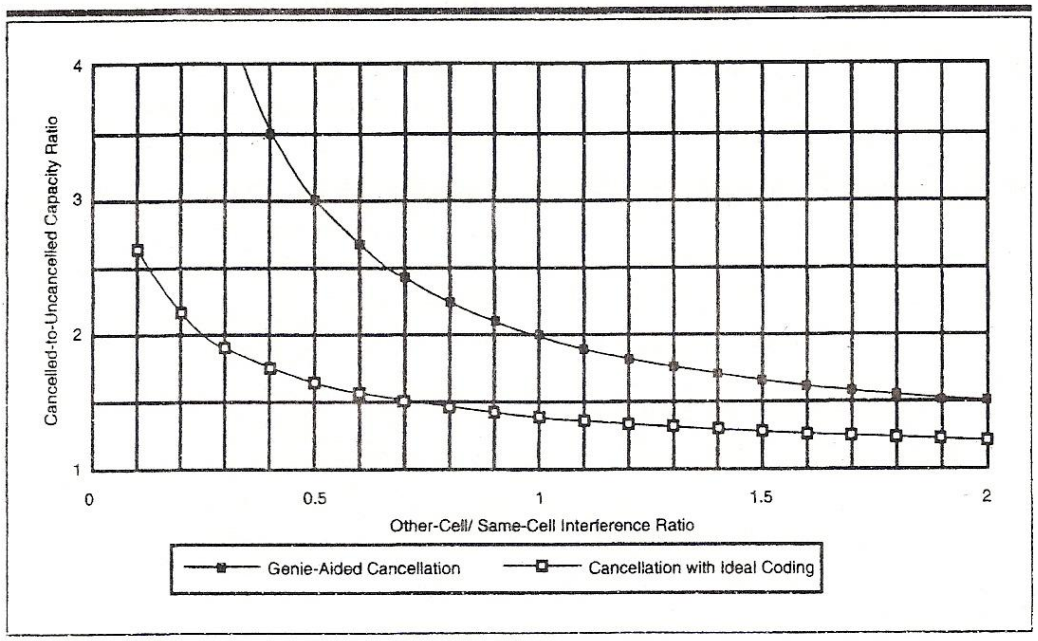



**Figure 6.12** Maximum capacity improvement by same-cell interference cancellation.

Ακόμη, όπως υποθέσαμε, η συνολική (μη ακυρώσιμη) παρεμβολή άλλης κυψέλης (ή τομέα) είναι $fk_uP_s$. Τότε ο μέγιστος συνολικός ρυθμός που έλαβε ο σταθμός βάσης από τους χρήστες της, ο καθένας απ' τους οποίους εκπέμπει σε ρυθμό R, έχει φράγμα

$$k_u R < W \log_2 \left(1 + \frac{k_u P_S}{f k_u P S}\right) \tag{6.91}$$

ή

$$k_u < \frac{W}{R} \log_2 \frac{\ln (1+1/f)}{\ln 2}$$

(6.92)

Αν αυτό δεν ίσχυε και μπορούσαμε να υπερβούμε το συγκεκριμένο όριο, τότε θεωρώντας το $fk_uP_s$ ως Gaussian θόρυβο υποβάθρου, $N_0W$, ένας μοναδικός χρήστης κυψέλης θα μπορούσε να χωρίσει το σήμα του σε $k_u$ προσθετικές συνιστώσες, με συνολική ισχύ $k_uP_s$. Τότε χρησιμοποιώντας την ακύρωση παρεμβολής, θα μπορούσε να λειτουργήσει πάνω από το συνολικό ρυθμό που δίνεται από τη δεξιά πλευρά του (6.91), ξεπερνώντας έτσι τη χωρητικότητα Shannon.

Για να συγκρίνουμε λογικά με την περίπτωση χωρίς ακύρωση, υποθέτουμε στην τελευταία ότι κάθε χρήστης λειτουργεί ανεξάρτητα, με την ίδια ιδανικοποιημένη FEC κωδικοποίηση να λειτουργεί στη χωρητικότητα Shannon για το (μη ακυρωμένο) κανάλι. Τότε στη συγκεκριμένη περίπτωση, με $W \gg R$, το $E_b / I_0$ του κάθε χρήστη προσεγγίζει το ln 2. Χρησιμοποιώντας τον κλασικό τύπο (1.5), χωρίς συντελεστές κέρδους που δεν λήφθηκαν με ακύρωση,

$$k_u < \frac{W/R}{(E_b/I_0)(1+f)}$$

Με $E_b / I_0 = \ln 2$, βρίσκουμε

$$k_u < \frac{W/R}{\ln 2(1+f)} \tag{6.93}$$

Τότε, παίρνοντας το λόγο των (6.92) και (6.93) για αυτές τις ιδανικοποιημένες ακυρωμένες και μη περιπτώσεις, βρίσκουμε

$$\frac{k_u(\text{ακύρωση παρεμβολής})}{k_u(\text{μη ακυρωμένο})} = (1+f)\ln(1+1/f)$$

(6.94)

που φαίνεται στην κάτω καμπύλη του Σχήματος 6.12. Προσέχουμε ότι για f = 0.6, ο λόγος είναι μόνο 1.57 (ή 2.0 dB), σε σύγκριση με 2.67 (ή 4.3 dB) για την υποβοηθούμενη από τζίνι περίπτωση. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όταν εφαρμόζεται η ισχυρή FEC, το επιπρόσθετο πλεονέκτημα της ακύρωσης παρεμβολής μειώνεται σημαντικά από το υποβοηθούμενο από τζίνι όριο. Εκτός από το προφανές γεγονός ότι η ακύρωση της παρεμβολής θα περιλαμβάνει κάποια καθυστέρηση επεξεργασίας, ειδικά αν η αποκωδικοποίηση απαιτείται πριν την ακύρωση, ένα πιο λεπτό ζήτημα είναι η αλληλεπίδρασή της με τη διαδικασία ελέγχου ισχύος κλειστού βρόχου.

Τέλος, σημειώνουμε ότι εφόσον η ακύρωση παρεμβολής γενικά απαιτεί σύμφωνη λήψη, ίσως να είναι πιο εύκολο να καταστήσουμε τα σήματα χρηστών ίδιας κυψέλης ορθογωνικά στην ανάστροφη ζεύξη με συγχρονισμό χρόνου κι έτσι να οδηγηθούμε σε καλύτερη επίδοση απ’ ότι η ακύρωση της παρεμβολής.

## 6.10 Επίλογος

Αυτό το κείμενο είναι ένας ανορθόδοξος χειρισμός της ψηφιακής θεωρίας της πληροφορίας , που τονίζει το φυσικό στρώμα πολλαπλού χρήστη, πολλαπλής κυψέλης, δικτύων επικοινωνίας. Ανάμεσα στα μη συμβατικά θέματα που εισάγαμε, τα πιο σημαντικά είναι

(α) χωρητικότητα καθολικής συχνότητας και χρόνου, σε αντίθεση με το διαχωρισμό χρόνου ή συχνότητας της πολλαπλής πρόσβασης συμβατικού διαχωρισμού συχνότητας-χρόνου,

(β) ο ρόλος του ελέγχου ισχύος στη βελτίωση της επίδοσης αμφίδρομων συστημάτων,

(γ) ήπια μεταπομπή ανάμεσα σε κόμβους ενός κυψελικού δικτύου, ιδιαίτερα ως επέκταση του εποικοδομητικού συνδυασμού της πολυδιαδρομικής διάδοσης, μέσω ενός πομπού rake,

(δ) ο κεντρικός ρόλος της πρόσθιας διόρθωσης σφαλμάτων χαμηλού ρυθμού στη βελτίωση επίγειας εκπομπής, που έχει περισσότερο περιορισμένο εύρος ζώνης παρά περιορισμένη ισχύ,

(ε) αυξημένη χωρητικότητα δικτύου μέσω κατανεμημένης, μη κεντρικά ελεγχόμενης, προσαρμοστικής επεξεργασίας ώστε να εκμεταλλευτούμε το ρυθμό πηγής και τις διακυμάνσεις της χωρικής παρεμβολής.

Επαναλαμβάνουμε το σχόλιο του προλόγου ότι αν και αυτό το κείμενο παρέχει πολλά κίνητρα μέσω εφαρμογών, έχει εστιάσει σε αρχές παρά σε λεπτομερείς μεθόδους. Στόχος μας ήταν να παρέχουμε μια κατανόηση του «γιατί» των τεχνικών εφαρμογής ενός CDMA συστήματος παρά τις λεπτομέρειες για το «πώς». Ως αποτέλεσμα, έχουμε αποφύγει κάθε σύγκριση, εκτός από τις πιο γενικές, με συστήματα με θυρίδες (FDMA και TDMA). Αυτό γίνεται εν μέρει διότι οι συγκρίσεις είναι επιβαρυντικές κι εν μέρει επειδή οποιαδήποτε σύγκριση πρέπει να γίνεται είτε με υπάρχοντα, και εξ ορισμού, απαρχαιωμένα συστήματα είτε με προβαλλόμενα κι επομένως, μη αποδεδειγμένα συστήματα.

Εκτός από τα σύντομα σχόλια στα Κεφάλαια 4,5 και 6 και κάποιες κοινές στοιχειώδεις αναλυτικές τεχνικές, αυτό το βιβλίο δεν έχει ασχοληθεί με τη θεωρία της πληροφορίας. Όμως, πρέπει να αναγνωρίσουμε τη θεμελιώδη σχέση ανάμεσα στις επικοινωνίες διάχυτου φάσματος και τη θεωρία της πληροφορίας της Shannon. Μια επιφανειακή συζήτηση των εννοιολογικών υποθέσεων και της θεωρητικής δικαιολόγησης που παρέχει η θεωρία της πληροφορίας στην ψηφιακή επικοινωνία διάχυτου φάσματος παρουσιάστηκε σε πρόσφατα άρθρα από το συγγραφέα [Viterbi, 1991, 1993b, 1994]. Μπορούμε να βρούμε μια βαθύτερη κατανόηση αυτής της σχέσης σε θεωρητικές εργασίες και κείμενα με πληροφορίες για πολλαπλούς χρήστες [Wyner, 1974; Cover και Thomas, 1991]. Αν και τα τελευταία

δεν διαφωτίζουν την πορεία προς την πρακτική πραγματοποίηση συστήματος, πιστεύουμε ακράδαντα ότι, όπως και στο παρελθόν, η επόμενη σημαντική πρόοδος θα εξαρτάται σημαντικά από τέτοιου είδους θεμέλια. Ελπίζουμε ότι αυτό το κείμενο θα λειτουργήσει ως ένα βήμα στην πορεία προς την πλήρη εκμετάλλευση των θεωρητικών εννοιών μέσω των διαρκώς βελτιωθέντων τεχνολογιών εφαρμογής.