

L. D. LANDAU and E. M. LIFSHITZ

ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ 10

ΦΥΣΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αυτός ο τελευταίος τόμος του μαθήματος της *θεωρητικής φυσικής* ασχολείται με *φυσική κινητική*, υπό την ευρεία έννοια της θεωρίας του μικροσκοπικού των διαδικασιών σε συστήματα όχι σε στατιστική ισορροπία.

Σε αντίθεση με τις ιδιότητες των συστημάτων τα οποία είναι σε στατιστική ισορροπία, οι κινητικές ιδιότητες σχετίζονται πολύ περισσότερο με τη φύση τις αλληλεπιδράσεις του μικροσκοπικού με ένα συγκεκριμένο φυσικό αντικείμενο. Αυτός είναι ο λόγος για τη τεράστια ποικιλία σε αυτές τις ιδιότητες και την σημαντικά μεγαλύτερη πολυπλοκότητα της σχετικής θεωρίας. Η επιλογή θεμάτων που θα περιληφθούν σε μια γενική πορεία της θεωρητικής φυσικής γίνεται έτσι λιγότερο σαφής.

Ο σκοπός του βιβλίου θα είναι εμφανής από το πίνακα περιεχομένων. Εδώ, θα προσθέσουμε μόνο μερικά *σημάδια*.

Περισσότερη προσοχή δίνεται στη θεωρία των *οξυγόνων*, ως τον απλούστερο κλάδο, της αρχής της *κινητικής θεωρίας*. Πολλά κεφάλαια αναρωτούνται με τη θεωρία του *πλάσματος*, όχι μόνο εξαιτίας της εσωτερικής /ουσιαστική της *φυσικής πολυτιμότητας* αυτού του μέρους της κινητικής θεωρίας, αλλά επίσης επειδή πολλά από τα προβλήματα που εμπλέκονται μπορούν να λυθούν εντελώς και να προμηθεύσουν ένα διδασκόμενο παράδειγμα των γενικών μεθόδων της κινητικής θεωρίας.

Οι ιδιότητες της κινητικής των υγρών είναι ιδιαίτερα πολυποίκιλα.

Θεωρία Αστάθειας

Δεν πρέπει να προσδιορίσουμε τη φυσική φύση της διαταραχής ψ , ούτε επομένως τη δύναμη της πηγής g . Το μόνο σημαντικό σημείο είναι, ότι οι συνιστώσες ωk της διαταραχής προσδιορίζονται από την πηγή

$$\psi_{\omega k} = g_{\omega k} / \Delta(\omega, k). \quad (63.2)$$

Αυτή η έκφραση προέρχεται από την ανομοιογενή γραμμικοποιημένη «εξίσωση της κίνησης» του συστήματος, στο οποίο το $g(t, x)$ ενεργεί «στη σωστή δεξιά πλευρά» ακριβώς όπως (62.4) ήταν η λύση της ομοιογενούς εξίσωσης με την αρχική κατάσταση που καθορίστηκε από τη λειτουργία $g(0, x)$. Η πηγή (63.1) είναι

$$g_{\omega k} = \text{constant} / i(\omega - \omega_0) \quad (63.3)$$

Η λειτουργία $\psi(t, x)$ βρέθηκε από το τύπο αναστροφής

$$\psi(t, x) = \text{constant} \times \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \Phi(\omega, x) \frac{e^{-i\omega t}}{i(\omega - \omega_0)} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (63.4)$$

$$\Phi(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\Delta(\omega, k)} dk. \quad (63.5)$$

Αυτή η έκφραση ικανοποιεί κατ'ανάγκη την εξίσωση $\psi(t, x) = 0$ για $t < 0$, σύμφωνα με τις συνθήκες του προβλήματος: η διαταραχή εμφανίζεται μόνο μετά που έρχεται η πηγή σε $t = 0$.

Το πρόβλημα τώρα είναι να βρεθεί η ασυμπτωτική εξίσωση για $\psi(t, x)$ μακριά από την αιτία ($|x| \rightarrow \infty$) σε καταστάσεις σταθερότητας, για παράδειγμα σε μεγάλο χρονικό διάστημα μετά που η πηγή αρχίζει να λειτουργεί ($t \rightarrow \infty$). Εάν η διαταραχή τείνει στο μηδέν, τότε ως $x \rightarrow \pm\infty$, έχουμε έλλειψη διαφάνειας: αν αυξάνει στη μια ή στην άλλη κατεύθυνση από την πηγή, υπάρχει ενίσχυση. Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να μιλάμε προφανώς μόνο για ένα **convectively** ασταθές (η σταθερό) σύστημα. Με απόλυτη αστάθεια, η διαταραχή αυξάνει χωρίς όριο κατά τη διάρκεια του χρόνου σε κάθε σημείο του χώρου, έτσι ώστε να μην είναι δυνατόν να επιτευχθούν σταθερές συνθήκες.

Για να βρείτε την απαιτούμενη ασυμπτωτική μορφή, παρατηρούμε πρώτα από όλα ότι το ασυμπτωτικό όριο $t \rightarrow \infty$ πρέπει να ληφθεί πριν από το $|x| \rightarrow \infty$: εφόσον η

διαταραχή δεν μπορεί να μεταδοθεί στο άπειρο σε ένα πεπερασμένο χρόνο, $\psi \rightarrow 0$, καθώς $|x| \rightarrow \infty$, για πεπερασμένο χρόνο t .

Όπως στη §62, μετακινούμε το περίγραμμα της ολοκλήρωσης σε σχέση με το ω (63.4) προς τα κάτω για να πάρει την ασυμπτωτική έκφραση ως $t \rightarrow \infty$. Οι αναλυτικές ιδιότητες του $\Phi(\omega, x)$ είναι παρόμοιες με εκείνες του $\varphi(\omega, x)$ στο §62. Εφόσον το σύστημα θεωρείται μόνο convectively ασταθής, $\Phi(\omega, x)$ δεν έχει μοναδικότητα στο άνω ήμισυ του ω και η υψηλότερη μοναδικότητα του ολοκληρώματος στο (63.4) είναι ο πόλος $\omega = \omega_0$ στο πραγματικό άξονα. Εξ ου και η ασυμπτωτική μορφή $t \rightarrow \infty$ είναι

$$\psi(t, x) \propto e^{-i\omega_0 t} \Phi(\omega_0, x). \quad (63.6)$$

§63

Ενίσχυση και Έλλειψη Διαφάνειας

Για να βρεθεί η ασυμπτωτική μορφή του $\Phi(\omega_0, x)$ σαν $|x| \rightarrow \infty$, πρέπει να προχωρήσουμε στο δρόμο της ενοποίησης σε σχέση με το k προς τα πάνω για $x > 0$ ή προς τα κάτω για $x < 0$, μέχρι να πιαστεί στο πόλο του ολοκληρώματος (63.5), δηλαδή η ρίζα της εξίσωσης $\Delta(\omega_0, k) = 0$.

Ας δηλώσουμε $k_+(\omega)$ και $k_-(\omega)$ τους πόλους, στο οποίους $\text{im } \omega \rightarrow \infty$ είναι αντίστοιχα στο άνω και στο κάτω μισό επίπεδο του k . Καθώς το $\text{im } \omega$ μειώνεται, οι πόλοι κινούνται και για ένα πραγματικό $\omega = \omega_0$ μπορούν είτε να παραμείνουν στο αρχικό μέσο επίπεδο ή να προσχωρίσουν στο άλλο μισό επίπεδο. Στην πρώτη περίπτωση, το περίγραμμα της ένταξης στο $\Phi(\omega_0, x)$ παραμένει στο πραγματικό άξονα, όπως στην εικόνα 22a; Στη δεύτερη περίπτωση είναι παραμορφωμένο, όπως φαίνεται στην εικόνα 22b, έτσι ώστε να αγκαλιάσουν τους πόλους $k_+(\omega_0)$ και $k_-(\omega_0)$ (σημεία A και C) που έχουν «δραπετεύσει» από το άλλο μισό επίπεδο. Σε κάθε περίπτωση, όταν το περίγραμμα μετακινείται προς τα επάνω ή προς τα κάτω, πιάνει τους πόλους k_+ και k_- αντίστοιχα.

* Στον υπολογισμό $g_{\omega k}$ θα πρέπει να υπενθυμίσουμε, ότι η ενσωμάτωση στον αντίστροφο μετασχηματισμένο τύπο λαμβάνεται μαζί με ένα περίγραμμα $\text{im } \omega > 0$; ως εκ τούτου $e^{|\omega|} \rightarrow 0$ ως $t \rightarrow \infty$.

Ο ασυμπτωτικός τύπος του $\psi(t, x)$ ως $x \rightarrow +\infty$ καθορίζεται από τη συνεισφορά του χαμηλότερου πόλου $k_+(\omega_0)$; και ως $x \rightarrow -\infty$ καθορίζεται από τον ψηλότερο πόλο $k_-(\omega_0)$. Ο πόλος που μας ενδιαφέρει είναι έτσι πιο κοντά στον πραγματικό άξονα (αν όλοι οι πόλοι μιας δεδομένης κατηγορίας είναι ακόμη στο αρχικό τους μέσο επίπεδο), ή στο πιο απομακρυσμένο από τον πραγματικό άξονα μεταξύ εκείνων που έχουν μετακινηθεί στο άλλο μέσο επίπεδο. Με αυτές τις τιμές του k_+ και k_- έχουμε

$$\psi(t, x) \propto \begin{cases} \exp\{ik_+(\omega_0)x - i\omega_0 t\} & \text{for } x > 0, \\ \exp\{ik_-(\omega_0)x - i\omega_0 t\} & \text{for } x < 0. \end{cases} \quad (63.7)$$

Για ένα σταθερό σύστημα, όλοι οι πόλοι παραμένουν στο αρχικό μέσο επίπεδο, όταν $\omega = \omega_0$, δεδομένου ότι η απουσία ταλάντωσης των διακλαδώσεων με $\text{im } \omega(k) > 0$ (για πραγματικό k) σημαίνει ότι ένας πόλος $k(\omega)$ μπορεί να διαπεράσει τον πραγματικό άξονα μόνο με $\text{im } \omega < 0$. Ως εκ τούτου, στο (63.7),

$$\text{im } k_+(\omega_0) > 0, \quad \text{im } k_-(\omega_0) < 0,$$

έτσι τα κύματα μετριάζουν και προς στις δύο κατευθύνσεις από τη πηγή.

Στην περίπτωση αστάθειας της συναγωγής, οι πόλοι $k(\omega)$ φτάνουν τον πραγματικό άξονα με $\text{im } \omega > 0$. Υπάρχουν ωστόσο συγκεκριμένοι πόλοι k_+ ή k_- , οι οποίοι έχουν εισέλθει στο άλλο μέσο επίπεδο για $\omega = \omega_0$, δηλαδή τα οποία έχουν $\text{im } k_+(\omega_0) < 0$ ή $\text{im } k_-(\omega_0) > 0$. Η παρουσία ενός τέτοιου πόλου $k_+(\omega_0)$ ή $k_-(\omega_0)$ ενισχύει το κύμα προς τα δεξιά ή τα αριστερά της πηγής αντίστοιχα.

Από τα προηγούμενα επιχειρήματα, φτάνουμε στο εξής κριτήριο για τη διάκριση των περιπτώσεων της έλλειψης διαφάνειας και ενίσχυσης για κύματα από μια πηγή με συχνότητα ω_0 σε ένα ασταθές σύστημα που μεταφέρει θερμότητα: ένα κύμα με σύμπλεγμα $k(\omega_0)$ και πραγματικό ω_0 ενισχύεται, εάν το $\text{im } k(\omega)$ αλλάζει σημείο, όταν το $\text{im } \omega$ διαφέρει από $+\infty$ σε 0 με μια δεδομένη $\text{re } \omega = \omega_0$; Αν το $\text{im } k(\omega)$ δεν αλλάζει σημείο, υπάρχει έλλειψη διαφάνειας.

Το κριτήριο έχει την προέλευσή του στις απαιτήσεις της αιτιότητας. Όταν η πηγή έρχεται σε δράση ακαριαία, η διαταραχή πρέπει πάντα να μειώνεται στο $x \rightarrow \pm\infty$, απλά επειδή δεν μπορεί να μεταδοθεί σε μια άπειρη απόσταση σε έναν πεπερασμένο χρόνο. Από την άλλη πλευρά, αυτή η «απείρως ταχεία» έναρξης της πηγής μπορεί να

πραγματοποιηθεί ως $e^{-|\omega|}$ με $\text{im} \rightarrow \infty$, Είναι ωστόσο σαφές, ότι τα κύματα που ενισχύονται (για πραγματικό ω) σε μία ή στην άλλη κατεύθυνση από την πηγή πρέπει να μειώνονται σε αυτή την κατεύθυνση όταν $\text{im} \omega \rightarrow \infty$ και αυτό οδηγεί στο κριτήριο που διατυπώθηκε παραπάνω.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν έχουν μια περαιτέρω πτυχή, η οποία μας επιτρέπει να καθορίζουμε την κατεύθυνση της διάδοσης των κυμάτων σε ένα μέσο με απορρόφηση ή ενίσχυση. Σε ένα διαφανές μέσο, (δηλαδή, όταν ω και k είναι πραγματικά), η φυσική κατεύθυνση της διάδοσης είναι αυτής της ομάδας του διανύσματος της ταχύτητας. Ειδικότερα, στη μονοδιάστατη περίπτωση ένα κύμα με ένα θετικό ή αρνητικό παράγωγο $d\omega/dk$ κινείται στη θετική ή αρνητική x - κατεύθυνση αντίστοιχα. Σε ένα μέσο με απορρόφηση ή ενίσχυση, μπορούμε να πούμε ότι τα κύματα από τις ομάδες k_+ και k_- διαδίδουν στις θετικές και αρνητικές κατευθύνσεις αντίστοιχα. Για πραγματικό ω και k , αυτή η γενική διατύπωση είναι η ίδια με την προηγούμενη: μικρές αλλαγές στο ω και k σχετίζονται με

$$\delta k = \frac{\delta \omega}{d\omega/dk},$$

από το οποίο βλέπουμε, ότι εάν το ω αποκτά ένα φανταστικό μέρος $\text{im} \omega > 0$, το k κινείται προς το ανώτερο ή κατώτερο μέσο επίπεδο σύμφωνα με $d\omega/dk > 0$ ή < 0 .

Ως ένα απλό παράδειγμα της εφαρμογής των κριτηρίων που προέρχεται από τις §62 και 63, ας εξετάσουμε την αστάθεια μιας δέσμης κρούς ηλεκτρονίου σε ένα ψυχρό πλάσμα, όπως συζητήθηκε στην §61. Η σχέση διασποράς για αυτό το σύστημα είναι

$$\frac{\Omega_e^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - kV)^2} = 1; \quad (63.8)$$

δείτε (61.6) (για κύματα που πολλαπλασιάζονται προς την κατεύθυνση της δέσμης, $k \cdot V = kV$). Οι ρίζες $k(\omega)$ αυτής της εξίσωσης έχουν ως $|\omega| \rightarrow \infty$ το τύπο*

$$k = (\omega \pm \Omega_e')/V. \quad (63.9)$$

Όταν $\text{im} \omega \rightarrow \infty$, οι δύο ρίζες βρίσκονται στο ίδιο (πάνω) μέσο επίπεδο δηλαδή, και τα δυο είναι στη k_+ (ω) θέση. Στην κίνησή τους ωστόσο, δεν μπορούν να πιάσουν το k_-

* Σημειώστε ότι το (63.9) είναι το ίδιο με τη σχέση διασποράς για την ίδια δέσμη στην απουσία του πλάσματος σε κατάσταση ηρεμίας.

περίγραμμα καθώς το $\text{im } \omega$ μειώνεται, έτσι η αστάθεια να είναι συναγωγής. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά μιας διαταραχής που δημιουργήθηκε κατά την αρχική στιγμή διέπεται από τη συχνότητα $\omega = \Omega_e$, κοντά στην οποία οι ρίζες της εξίσωσης (63.8) τείνουν στο άπειρο, σύμφωνα με

$$k^2 = \Omega_e \Omega_e^2 / 2V^2(\omega - \Omega_e). \quad (63.10)$$

Έτσι όπως $t \rightarrow \infty$, μόνο μη αποσβεννυμένα κύματα πλάσματος παραμένουν από τη διαταραχή.

Για πραγματικές τιμές της εξίσωσης $\omega < \Omega_e$ (63.8) έχει δύο σύνθετες συζευγμένες ρίζες $k(\omega)$. Το ένα για το οποίο το $\text{im } k(\omega)$ έχει μετακινηθεί από το ανώτερο στο χαμηλότερο μέσο επίπεδο. Έτσι, όταν τα κύματα πολλαπλασιάζονται από μια πηγή με συχνότητα $\omega_0 < \Omega_e$, ευρύνονται προς την κατεύθυνση του $x > 0$, δηλαδή «κάτω» από την ακτίνα/δέσμη.

§64. Αστάθεια με αδύναμη σύζευξη των δύο διακλαδώσεων του φάσματος ταλάντωσης

Ας εφαρμόσουμε τη γενική μέθοδος που αναπτύχθηκε στις §§62 και 63 για να ερευνήσουμε την αστάθεια που προκύπτει από την «αλληλεπίδραση» των ταλαντώσεων με τις γειτονικές τιμές των ω και k και ανήκουν σε διάφορες διακλαδώσεις του φάσματος ταλάντωσης ενός μη στατικού συστήματος (εδώ δηλώνεται μια στην οποία και η αληθινή διάλυση και η απόσβεση Landau απουσιάζουν).

Εάν οι δύο κλάδοι $\omega = \omega_1(k)$ και $\omega = \omega_2(k)$ ήταν πλήρη ανεξάρτητοι, η σχέση διασποράς θα μπορούσε να χωριστεί σε δύο παράγοντες:

$$[\omega - \omega_1(k)][\omega - \omega_2(k)] = 0. \quad (64.1)$$

Κοντά σε ένα σημείο τομής τέτοιων διακλαδώσεων, οι λειτουργίες $\omega_1(k)$ και $\omega_2(k)$ θα μπορούσαν να έχουν το γενικό τύπο

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(k) &= \omega_0 + v_1(k - k_0), \\ \omega_2(k) &= \omega_0 + v_2(k - k_0). \end{aligned} \right\} \quad (64.2)$$

όπου u_1 και u_2 είναι κάποιες σταθερές, ω_0 και k_0 οι (πραγματικές) τιμές του ω και k στο σημείο τομής.

Μια τέτοια περίπτωση ωστόσο, γενικά δεν είναι ρεαλιστική. Η σύνδεση μεταξύ των δύο διακλαδώσεων θα μπορούσε να είναι εντελώς απύσχα για (στην καλύτερη) κάποιες συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του συστήματος και θα μπορούσε να εμφανιστεί, όταν αυτές άλλαζαν πολύ λίγο.* Για να αντιπροσωπευτεί μια πραγματική κατάσταση ως εκ τούτου, θα ήταν αναγκαίο να ληφθεί υπόψη η παρουσία μιας ασθενούς σύζευξης μεταξύ διακλαδώσεων. Αυτό έχει το αποτέλεσμα της αντικατάστασης μια μικρής ποσότητας ϵ για μηδέν στα δεξιά του (64.1). Η σχέση διασποράς κοντά στο σημείο τότε γίνεται

$$[\omega - \omega_0 - v_1(k - k_0)][\omega - \omega_0 - v_2(k - k_0)] = \epsilon. \quad (64.3)$$

Η λύση για ω είναι

$$\omega(k) - \omega_0 = \frac{1}{2}[(v_1 + v_2)(k - k_0) \pm [(k - k_0)^2(v_1 - v_2)^2 + 4\epsilon^2]^{1/2}], \quad (64.4)$$

και η λύση για k είναι

$$k(\omega) - k_0 = \frac{1}{\gamma_{v_1, v_2}} \{ (v_1 + v_2)(\omega - \omega_0) \pm [(\omega - \omega_0)^2(v_1 - v_2)^2 + 4\epsilon v_1 v_2]^{1/2} \}. \quad (64.5)$$

Η ύπαρξη συνδέσμου μεταξύ των διακλαδώσεων μετατοπίζει το σημείο της αλληλεπίδρασης τους στην περιοχή του συγκροτήματος. Οι λειτουργίες $\omega(k)$ για πραγματικό ω και k ποικίλλουν σε μορφή σύμφωνα με το σημείο σταθεράς ϵ και τα σχετικά σημεία σταθεράς u_1 και u_2 . Αυτές οι λειτουργίες εμφανίζονται στην εικόνα 23 για τέσσερις περιπτώσεις που θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

* Εξαιρέση αποτελεί η περίπτωση όπου η αλληλεπίδραση είναι απόν για λόγους συμμετρίας για παράδειγμα, εάν μια διακλάδωση σχετίζεται με διαμήκη κύματα και από την άλλη εγκάρσια κύματα σε ένα ισοτροπικό μέσο. Δεδομένου ότι σε ένα τέτοιο μέσο, η *κατά μήκος* του ρεύματος δεν μπορεί να προκαλέσει ένα εγκάρσιο τομέα και το αντίστροφο, τα κύματα αυτά δεν αλληλεπιδρούν. Η κατάσταση εδώ είναι ανάλογη με το τι βρέθηκε στην κβαντική μηχανική για την αλληλεπίδραση των διαφορετικών όρων με συμμετρία; βλέπε QM, §79.

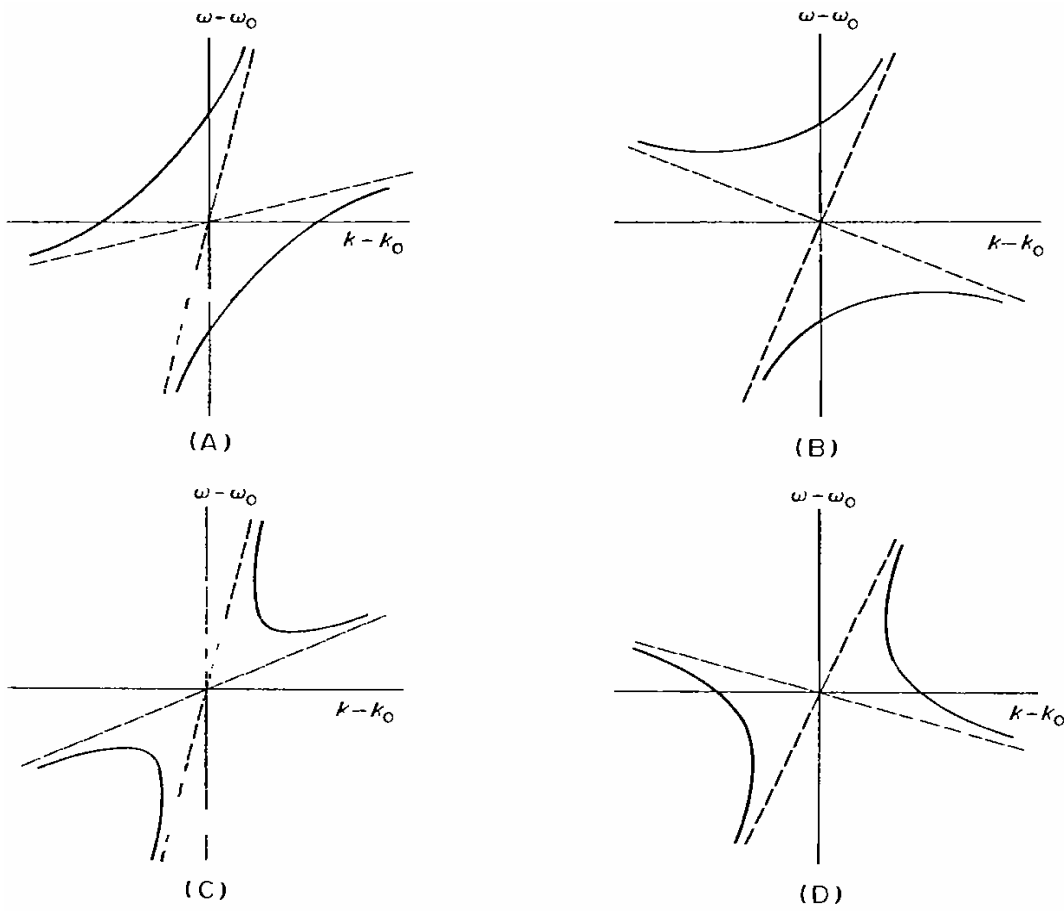


FIG. 23.

$$\left. \begin{array}{ll}
 \text{(A)} \quad \epsilon > 0, & v_1 v_2 > 0, \\
 \text{(B)} \quad \epsilon > 0, & v_1 v_2 < 0, \\
 \text{(C)} \quad \epsilon < 0, & v_1 v_2 > 0, \\
 \text{(D)} \quad \epsilon < 0, & v_1 v_2 < 0,
 \end{array} \right\} \quad (64.6)$$

(A) Εδώ οι λειτουργίες $\omega(k)$ είναι πραγματικές για όλα (πραγματικό) τα k και επομένως το σύστημα είναι σταθερό. Οι λειτουργίες $k(\omega)$ είναι επίσης πραγματικές για όλα τα ω , έτσι τα κύματα διαδίδονται χωρίς ενίσχυση για όλα τα ω .

(B) Οι λειτουργίες $\omega(k)$ είναι πραγματικές για όλα τα k και επομένως το σύστημα είναι σταθερό. Οι λειτουργίες $k(\omega)$ είναι πολύπλοκες στη περιοχή συχνοτήτων.

$$(\omega - \omega_0)^2 < 4|\epsilon v_1 v_2| / (v_1 - v_2)^2. \quad (64.7)$$

Δεδομένου ότι το σύστημα είναι σταθερό, δεν υπάρχει έλλειψη διαφάνειας σε αυτό το φάσμα.

(C) Όταν

$$(k - k_0)^2 < 4|\epsilon|/(v_1 - v_2)^2 \quad (64.8)$$

οι λειτουργίες $\omega(k)$ είναι πολύπλοκες και για ένα από αυτά $\text{im}(\omega) > 0$, δηλαδή υπάρχει αστάθεια και είναι συναγωγής αστάθεια, αφού όταν $|\omega| \rightarrow \infty$ οι ρίζες $k(\omega)$ είναι

$$k \approx \omega/v_1, \quad k \approx \omega/v_2, \quad (64.9)$$

και όταν $\text{im} \omega \rightarrow \infty$ βρίσκονται στο ίδιο μέσο επίπεδο του k . Ας v_1 και $v_2 > 0$. Τότε αυτό είναι το ανώτερο μέσο επίπεδο και οι ρίζες ανήκουν στη $k_+(\omega)$ τάξη. Για το πραγματικό ω στη περιοχή (64.7), οι ρίζες $k(\omega)$ σχηματίζουν ένα συγκρότημα συζευγμένου ζευγαριού. Αυτό για το οποίο $\text{im} k(\omega) < 0$ έχει μετακινηθεί από το ανώτερο στο κατώτερο επίπεδο του μέσο επιπέδου. Στην περιοχή των συχνοτήτων (64.7) ως εκ τούτου υπάρχει ενίσχυση των κυμάτων που διαδίδονται στη θετική x -κατεύθυνση.

Είναι επίσης εύκολο να βρεθούν σε αυτή την περίπτωση “η ταχύτητα ομάδας” των κυμάτων, τα οποία ορίζονται στο (62.14), δηλαδή η ταχύτητα του πλαισίου αναφοράς στο οποίο υπάρχει απόλυτη αστάθεια με το μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης. Διαφοροποιώντας το (64.3) σε σχέση με το k και αντικαθιστώντας $d\omega/dk = V$ σύμφωνα με (62.13) και (62.14), βρίσκουμε

$$\frac{V - v_1}{V - v_2} = -\frac{\omega - \omega_0 - v_1(k - k_0)}{\omega - \omega_0 - v_2(k - k_0)} \quad (64.10)$$

Επειδή η αριστερή πλευρά είναι πραγματική, η δεξιά πλευρά πρέπει να είναι έτσι, ακόμη και αν το ω είναι πολύπλοκο. Αυτή η συνθήκη δείχνει $k = k_0$; Έπειτα από (64.10)

$$V = \frac{1}{2}(v_1 + v_2). \quad (64.11)$$

και από (64.3) το αντίστοιχο μέγιστο ποσοστό αύξησης είναι

$$(\text{im} \omega)_{\max} = |\epsilon|^{1/2}. \quad (64.12)$$

(D) Οι λειτουργίες $k(\omega)$ είναι πραγματικές για όλα (πραγματικό) ω , αλλά το $\omega(k)$ είναι πολύπλοκο στη περιοχή, (64.8), έτσι το σύστημα είναι ασταθές. Για να προσδιοριστεί η φύση αυτής της αστάθειας, σημειώνουμε ότι από το (64.9) (με αντίθετα σημεία του v_1 και v_2), όπως $\text{im} \omega \rightarrow \infty$, οι ρίζες $k(\omega)$ βρίσκονται στο αντίθετο μέσο επίπεδο. Αυτές οι δύο ρίζες συγχωνεύονται σε ένα σημείο στο ανώτερο μέσο επίπεδο του ω , το οποίο δίνεται από

$$\omega = \omega_c = \omega_0 + 2iV(v_1 v_2 \epsilon) / |v_1 - v_2|. \quad (64.13)$$

Η αστάθεια είναι κατά συνέπεια απόλυτη με το ρυθμό ανάπτυξης $\text{im } \omega_0$. Για $u_1 = -u_2$ που αντιστοιχεί στη διατάραξη σε ένα πλαίσιο αναφοράς που κινούνται με ταχύτητα (64.11), ο ρυθμός ανάπτυξης φτάνει τη μέγιστη τιμή της (64.12).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Προσδιορίστε τη φύση της αστάθειας των χαμηλών συχνοτήτων ($\omega \sim \omega_{\beta e}$) «αργή» ($\omega k \ll c$) εγκάρσια ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται κατά μήκος ενός σταθερού μαγνητικού πεδίου σε ένα *ψυχρό magnetoactive πλάσμα*, με χαμηλή πυκνότητα κρύας δέσμης ηλεκτρονίου που κινείται μέσω του πλάσματος προς την ίδια κατεύθυνση.

ΛΥΣΗ. Για τον καθορισμό της σχέσης διασποράς, γράφουμε πρώτα για τη δέσμη ηλεκτρονίων, σε ένα πλαίσιο αναφοράς για το οποίο η δέσμη βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας. Σύμφωνα με (56.9), έχουμε σε αυτό το πλαίσιο,

$$k^2 c^2 - \omega^2 = -\Omega_e^2 \omega / (\omega \pm \omega_{He}),$$

όπου Ω_e' είναι η συχνότητα του πλάσματος που αντιστοιχεί στη πυκνότητα της δέσμης. Κατά την επιστροφή στο *πλαίσιο εργαστηρίου*, στο οποίο η δέσμη κινείται με ταχύτητα V (που παίρνουμε για να είναι στη x -κατεύθυνση), θα πρέπει να αντικαταστήσουμε ω με $\omega - kV$ στα δεξιά της εξίσωσης; η διαφορά $k^2 c^2 - \omega^2$ είναι αμετάβλητη σε σχέση με την αλλαγή στο πλαίσιο αναφοράς. Τώρα προσθέτοντας στο *πλαίσιο εργαστηρίου*, οι όροι που οφείλονται στα ηλεκτρόνια και στα ιόντα του πλάσματος, βρίσκουμε

$$k^2 c^2 - \omega^2 = -\frac{\Omega_e'^2 (\omega - kV)}{\omega - kV \pm \omega_{He}} - \frac{\omega \Omega_e^2}{\omega \pm \omega_{He}} - \frac{\omega \Omega_i^2}{\omega \mp \omega_{Hi}}$$

Παραλείποντας εδώ (σύμφωνα με τους όρους του προβλήματος) το ω σε σύγκριση με ek και $\omega_{\beta e}$ και σημειώνοντας επίσης ότι $\Omega_e'^2 / \omega_{He} = \Omega_e^2 / \omega_{He}$, θα έχουμε τη σχέση διασποράς με το τύπο

$$\begin{aligned} [k^2 c^2 - \Omega_e^2 \omega^2 / \omega_{He} (\omega_{Hi} \mp \omega)] (\omega - kV \pm \omega_{He}) \\ = -\Omega_e^2 (\omega - kV). \end{aligned} \quad (I)$$

Ο πρώτος παράγοντας στα αριστερά αντιστοιχεί στο “αρχικό” κλάδο ταλάντωσης και ο δεύτερος παράγοντας στον κλάδο δέσμης; η δεξιά πλευρά περιγράφει την «αλληλεπίδραση» αυτών των κλάδων.

Με τα παραπάνω σημεία στο (I), οι σχέσεις διασποράς για τις δύο ανεξάρτητους *κλάδους/διακλαδώσεις* εμφανίζονται από τις συνεχείς καμπύλες στην εικόνα 24; Είναι όπως πάντα, αρκετό να θεωρήσου τις διακλαδώσεις με $\omega > 0$. Κοντά στο σημείο $\omega_0 k_0$ όπου τέμνονται, η επέκταση της εξίσωσης (I) είναι

$$2k_0c^2[k - k_0 - (\omega - \omega_0)/v_1][\omega - \omega_0 - V(k - k_0)] = \Omega_e^2 \omega_{Be}$$

με θετικό συντελεστή u_1 . (όπως προκύπτει από την κλίση των καμπυλών στην εικόνα 24). Συγκρίνοντας με το (64.3) δείχνει ότι έχουμε περίπτωση C, συναγωγική αστάθεια. Οι διακεκομμένες καμπύλες στην εικόνα 24 δείχνουν τη μορφή των διακλαδώσεων, όταν η αλληλεπίδρασή τους λαμβάνεται υπόψη.

Παρόμοια διαγράμματα για τα χαμηλότερα σημεία (1) δίνονται στην εικόνα 25. Κοντά στο σημείο της τομής, η σχέση διασποράς είναι

$$2k_0c^2[k - k_0 + (\omega - \omega_0)/v_1][\omega - \omega_0 - V(k - k_0)] = -\Omega_e^2 \omega_{Be}$$

όπου και πάλι $u_1 > 0$. Έχουμε τώρα την περίπτωση D, απόλυτη αστάθεια. Η δεύτερη τομή σε αυτή τη περίπτωση φαίνεται από το διάγραμμα για να εμφανιστεί $\omega \geq \omega_{Be}$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τους όρους του προβλήματος.

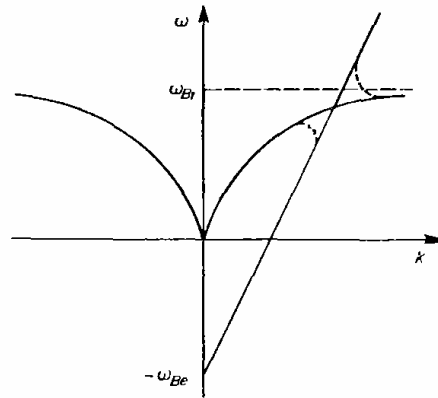


FIG. 24.

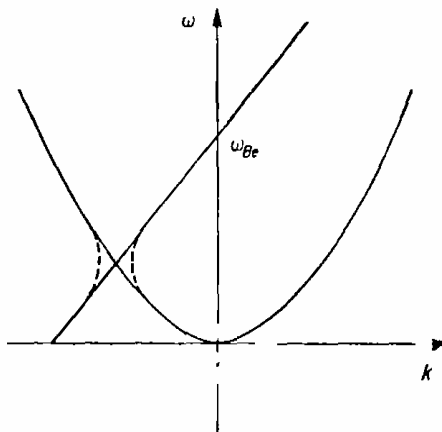


FIG. 25.

§65. Αστάθεια σε πεπερασμένα συστήματα

Το σύνολο της θεωρίας στις §61-63 σχετίζονται σε ομοιογενή μέσα μαζικής ενημέρωσης απεριόριστης έκτασης τουλάχιστον σε μια κατεύθυνση (στον άξονα x). Για εφαρμογές σε πραγματικά οριοθετημένα συστήματα αυτό σημαίνει, ότι οι συνέπειες εξαιτίας της αντανάκλασης των κυμάτων από τα όρια έχουν παραμεληθεί; Μια τέτοια θεωρία περιορίζεται στους χρόνους της τάξης του χρόνου που απαιτείται από τη διατάραξη για να διαδώσει το μήκος του συστήματος.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη σταθερότητα σε μια αντίθετη κατάσταση, όπου το πεπερασμένο του συστήματος είναι σημαντικό και το φάσμα των χαρακτηριστικών του ταλαντώσεων διέπονται από τις οριακές συνθήκες στα άκρα; Όπως και πριν, πρέπει να ερευνήσουμε μόνο την μονοδιάστατη περίπτωση και το μήκος του συστήματος στη x -κατεύθυνση και θα πρέπει να δηλώνεται από το L . Η συχνότητα του φάσματος σε ένα πεπερασμένο σύστημα είναι διακριτό και εάν μία ή περισσότερες από τις χαρακτηριστικές συχνότητες έχει ένα θετικό ιδανικό μέρος, το σύστημα είναι ασταθές. Η διάκριση μεταξύ απόλυτης και συναγωγής αστάθειας δεν έχει κανένα νόημα σε αυτή τη περίπτωση.

Έτσι το πρόβλημα που προσδιορίζει τη σταθερότητα ή την αστάθεια ενός πεπερασμένου συστήματος είναι ισοδύναμο με εκείνο της εξεύρεσης (μπλέγμα) ιδιοσυχνοτήτων. Η σχέση διασποράς, η οποία δίνει αυτές τις συχνότητες μπορεί να προκύψει σε μια γενική μορφή για ένα σύστημα με πεπερασμένο, αλλά με επαρκώς μεγάλες διαστάσεις L , έτσι ώστε $\text{im } |k| \cdot L \gg 1$ (A.G. Kulikovskii, 1966).

Ας $k(\omega)$ είναι λύσεις της σχέσης διασποράς για ένα άπειρο μέσο. Χωρίζουμε ξανά τις διακλαδώσεις αυτής της συνάρτησης με πολλές αξίες σε δύο ομάδες $k_+(\omega)$ και $k_-(\omega)$, όπως ορίζεται στη §63. Οι χαρακτηριστικές ταλαντώσεις ενός πεπερασμένου συστήματος μπορεί να θεωρηθεί σαν αποτέλεσμα από τη προσθήκη των κυμάτων που μετακινούνται και αντανakλώνται από τα δύο όρια (σε ένα μέσο χωρίς απορρόφηση και ενίσχυση, θα μπορούσαν να είναι συνηθισμένα στάσιμα κύματα). Η αντανάκλαση γενικά συνοδεύεται από ένα αμοιβαίο μετασχηματισμό των κυμάτων που ανήκουν σε διαφορετικές διακλαδώσεις του φάσματος. Το κύμα που μετακινείται μιας δεδομένης συχνότητας είναι συνεπώς μια προσθήκη όλων των διακλαδώσεων. Μακριά από τα όρια ωστόσο, η κύρια συμβολή του κάθε κύματος προέρχεται από ένα μόνο όρο στη

προσθήκη. Για παράδειγμα, σε ένα κύμα που πολλαπλασιάζεται από την αριστερή πλευρά του ορίου $x=0$ (εικόνα 26) στη θετική x -κατεύθυνση, η ασυμπτωτική έκφραση μακριά από το όριο αυτό είναι

$$\psi = a \exp\{i[k_+(\omega)x - \omega t]\}, \quad (65.1)$$

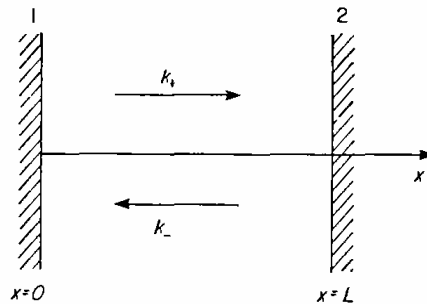


FIG. 26.

και $k_+(\omega)$ πρέπει να λαμβάνεται ως η διακλάδωση σε αυτή την ομάδα για την οποία $\text{im } k_+(\omega)$ έχει τουλάχιστον την αλγεβρικά της αξία για το συγκεκριμένο πραγματικό ω . *

Μετά την αντανάκλαση από τη δεξιά πλευρά του ορίου $x=L$, το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά και σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις από αυτό το όριο έχοντας την ασυμπτωτική μορφή

$$\psi = R_2 a \exp\{ik_-(\omega)L\} \exp\{i[k_-(\omega)(x - L) - \omega t]\}, \quad (65.2)$$

όπου $k_-(\omega)$ είναι η διακλάδωση σε αυτή την ομάδα για την οποία $\text{im } k_-(\omega)$ έχει τη μεγαλύτερη αλγεβρική αξία. Ο συντελεστής R_2 εξαρτάται από το νόμο του μετασχηματισμού του κύματος σε ένα συγκεκριμένο όριο.

Τέλος, μετά από μια δεύτερη σκέψη/αντανάκλαση, αυτή τη φορά στο αριστερό όριο έχουμε και πάλι ένα κύμα που πολλαπλασιάζεται προς τα δεξιά:

$$\psi = R_1 R_2 a e^{i(k_+ - k_-)L} e^{i(k_+ x - \omega t)}. \quad (65.3)$$

Δεδομένου ότι $\psi(t,x)$ είναι ένα αξιόλογο, αυτό πρέπει να συμπίπτει με (65.1), έτσι ώστε

$$R_1 R_2 \exp\{i[k_+(\omega) - k_-(\omega)]L\} = 1. \quad (65.4)$$

*Αυτή είναι η λιγότερη θετική τιμή, αν όλα $\text{im } k_+(\omega) > 0$ και η μεγαλύτερη (σε απόλυτο μέγεθος) αρνητική τιμή, εάν υπάρχουν διακλαδώσεις για τις οποίες $\text{im } k_+(\omega) < 0$. Στη πρώτη περίπτωση (65.1) είναι το κύμα με τη τουλάχιστον ραγδαία απόσβεση (με αύξηση του x); στη δεύτερη περίπτωση, είναι η μία από τις πιο ραγδαίες αυξήσεις.

Αυτό καθορίζει το φάσμα συχνοτήτων για το πεπερασμένο σύστημα, δηλαδή είναι η σχέση διασποράς.

Παίρνοντας το μέτρο της κάθε πλευράς έχουμε

$$|R_1 R_2| \exp\{-\text{im}(k_+ - k_-)L\} = 1. \quad (65.5)$$

Όταν το $L \rightarrow \infty$, ο εκθετικός παράγοντας τείνει στο μηδέν ή στο άπειρο ανάλογα με το σημείο $\text{im}(k_+ - k_-)$. Ως εκ τούτου, για αρκετά μεγάλα συστήματα, η εξίσωση (65.5) είναι πιθανή μόνο εάν

$$\text{im}[k_+(\omega) - k_-(\omega)] = 0. \quad (65.6)$$

Σε αυτή τη περίπτωση επομένως, η σχέση διασποράς μειώνει σε μια μορφή που εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου της ίδιας και ανεξάρτητη από τις ειδικές συνθήκες στα όρια. Η εξίσωση (65.6) ορίζει ένα μια καμπύλη στο ω -επίπεδο, στο οποίο οι διακριτές ίδιο-συχνότητες βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους (για ευρύ L). Εάν η καμπύλη βρίσκεται ακόμη και εν μέρει στο άνω ημιεπίπεδο, το σύστημα είναι ασταθές. Δεδομένου, ότι αυτή η αστάθεια είναι λόγω των ιδιοτήτων του συστήματος ως σύνολο, ονομάζεται *παγκόσμια αστάθεια*.

Κάποια περαιτέρω σχόλια μπορούν να γίνουν για τη σχέση μεταξύ της παγκόσμιας αστάθειας ενός πεπερασμένου συστήματος και την αστάθειας ενός άπειρου μέσου. Πρώτα απ'όλα, είναι εύκολο να δει κανείς, ότι με την παρουσία της παγκόσμιας αστάθειας το άπειρο μέσο είναι σίγουρα ασταθές, εφόσον υπάρχουν πραγματικές τιμές του k για τις οποίες $\text{im} \omega(k) > 0$. Από τον ορισμό του $k_+(\omega)$ και $k_-(\omega)$, οι αξίες τους για $\text{im} \omega \rightarrow \infty$ βρίσκονται σε διαφορετικά μέσο επίπεδα του k . Η συνθήκη (65.6) δηλώνει ότι, καθώς το $\text{im} \omega$ μειώνεται, τα σημεία $k_+(\omega)$ και $k_-(\omega)$, μπορούν να έρθουν στο ίδιο μέσο επίπεδο και το κάνουν (στη περίπτωση της παγκόσμιας αστάθειας), ενώ $\text{im} \omega > 0$. Κατά συνέπεια, τουλάχιστον ένα από αυτά τα σημεία διασχίζει τον πραγματικό άξονα ακόμη νωρίτερα, δηλαδή σίγουρα ενώ $\text{im} > 0$; Αυτό αποδεικνύει την παραπάνω δήλωση.

Η αντίστροφη δήλωση ωστόσο, ισχύει μόνο για την απόλυτη (*δεν συναγωγής*) αστάθεια του άπειρου μέσου: Η παρουσία της απόλυτης αστάθειας είναι αρκετή για να προκαλέσει την παγκόσμια αστάθεια του πεπερασμένου συστήματος. Η συνθήκη για την απόλυτη αστάθεια είναι ότι υπάρχει ένα σημείο διακλάδωσης του $k(\omega)$ με $\text{im} \omega > 0$ και οι

ενωμένες διακλαδώσεις ανήκουν στις k_+ και k_- ομάδες. Σε ένα τέτοιο σημείο, η συνθήκη (65.6) είναι σίγουρα ικανοποιημένη.

Ένα ασταθές μέσο με συναγωγή μπορεί να είναι είτε σταθερό ή ασταθές, όταν υπάρχουν όρια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII ΜΟΝΩΤΕΣ

§66. Αλληλεπίδραση των φωτονίων

Η φυσική φύση των διαδικασιών μεταφοράς, όπως η θερμική και ηλεκτρική αγωγιμότητα σε αέρια, συνίσταται στη μεταφορά από τη θερμική κίνηση των σωματιδίων του αερίου: στα στερεά, τα σωματίδια αντικαθίστανται από ψευδό/ιονεί σωματίδια. Για να μελετήσει κανείς αυτές τις διαδικασίες, θα πρέπει να ξεκινήσουμε με θερμική αγωγιμότητα σε μη μαγνητικούς μονωτές. Η σχετική απλότητα της φυσικής εικόνας εδώ σε σύγκριση με τις διαδικασίες μεταφοράς σε στερεά από άλλα είδη, προκύπτει από την παρουσία των ιονεί σωματιδίων μόνο ενός είδους που ονομάζονται φωτόνια.

Η έννοια των ελεύθερων φωτονίων είναι το αποτέλεσμα της κβάντωσης της παλμικής κίνησης των ατόμων στο κρυσταλλικό πλέγμα, στην αρμονική προσέγγιση, δηλαδή μόνο με τους τετραγωνικούς όρους (στις μετατοπίσεις των ατόμων) που περιλαμβάνονται στο *Hamiltonian*; βλέπε SP 1, §72. Οι ποικίλλες διαδικασίες αλληλεπίδρασης του φωτονίου είναι το αποτέλεσμα, όταν λαμβάνονται υπόψη όροι υψηλότερων συστημάτων μικρότητας: οι αναρμονικοί όροι της τρίτης και μετέπειτα συστημάτων στις μετακινήσεις.*

Η πρώτη αναρμονία (το κυβικό) όρων στην κλασική ενέργεια πλέγματος είναι

$$H^{(3)} = \frac{1}{6} \sum_{(\alpha, \beta, \gamma)} \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{s_1 s_2 s_3} (n_1 - n_3, n_2 - n_3) U_{s_1\alpha}(n_1) U_{s_2\beta}(n_2) U_{s_3\gamma}(n_3). \quad (66.1)$$

* Η ανάγκη να ληφθεί υπόψη η αναρμονία των ατομικών δονήσεων στο πλέγμα εξετάζοντας τη θερμική αγωγιμότητα σε ένα κρύσταλλο παρατηρήθηκε για πρώτη φορά από τους P. Debye (1914) και M. Born (1914).

Εδώ το $U_s(\mathbf{n})$ είναι τα ατομικά διανύσματα μετατόπισης στο πλέγμα; α, β, γ είναι διάνυσμα κατάληξης παίρνοντας τις τιμές x, y, z ; s_1, s_2, s_3 αριθμώντας τα άτομα στη μονάδα του πυρήνα; n_1, n_2, n_3 είναι ενσωματωμένα «διανύσματα» δίνοντας τη θέση του πυρήνα στο πλέγμα; (n,s) κάτω από το σύμβολο αθροίσματος υποδηλώνει το άθροισμα πάνω από όλα το n και s . Επειδή ο κρύσταλλος είναι ομοιογενής, οι λειτουργίες Λ εξαρτώνται μόνο από τις σχετικές θέσεις $n_1 \sim n_3, n_2 \sim n_3$, των πυρήνων/κύτταρων, όχι στις απόλυτες θέσεις τους στο πλέγμα.

Το δεύτερο quatinized Hamiltonian διαπιστώθηκε από την αντικατάσταση της μετατόπισης των διανυσμάτων στο (66.1) από τους φορείς $\hat{U}_s(\mathbf{n})$ που εξέφρασαν σε όρους της δημιουργίας και εξαύλωσης $\hat{c}_{\mathbf{k}g}^+, \hat{c}_{\mathbf{k}g}$ για φωτόνια του τύπου g (δηλαδή διακλάδωση g του φάσματος του φωτονίου) με οιονεί ορμή k :

$$\hat{U}_s(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{g}, \mathbf{k}} [2M\mathcal{N}\omega_g(\mathbf{k})]^{-1/2} \{ \hat{c}_{\mathbf{k}g} e_s^{(g)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} + \hat{c}_{\mathbf{k}g}^+ e_s^{(g)*}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} \}, \quad (66.2)$$

όπου \mathbb{N} είναι ο αριθμός των κυττάρων στο πλέγμα, M η συνολική μάζα των ατόμων στο

κύτταρο, $e_s^{(g)}(\mathbf{k})$ τα διανύσματα πόλωσης του φωτονίου και $\omega_g(\mathbf{k})$ η ενέργεια των φωτονίων τύπου g .* Η αντικατάσταση δημιουργεί τους όρους που περιέχουν τους φορείς \hat{c} και \hat{c}^+ σε ομάδες των τριών. Αυτοί οι όροι αποτελούν διαδικασίες που αφορούν τρία φωτόνια: προϊόντα του τύπου $\hat{c}^+ \hat{c}^+ \hat{c}$ για τη διάσπαση ενός φωτονίου σε δύο και $\hat{c}^+ \hat{c} \hat{c}$ για τη συνένωση δυο φωτονίων που συγκρούονται σε ένα; όροι $\hat{c} \hat{c} \hat{c}$ και $\hat{c}^+ \hat{c}^+ \hat{c}^+$ θα αντιστοιχούν στις διαδικασίες που απαγορεύονται από το νόμο της διατήρησης της ενέργειας.

Ας γράψουμε για παράδειγμα τους όρους που αντιστοιχούν στην αποσύνθεση ενός φωτονίου k_1, g_1 σε δύο φωτόνια k_2, g_2 και k_3, g_3 . Αλλάζοντας στο (66.1) από

*Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιούμε μονάδες, ώστε $\hbar=1$. Οι διαστάσεις της ορμής και το διάνυσμα κύματος είναι τότε τα ίδια και εκείνες της ενέργειας και της συχνότητας είναι ίδια.

άθροιση n_1, n_2, n_3 σε άθροιση $\nu_1 = n_1 - n_3, \nu_2 = n_2 - n_3, n_3$, μπορούμε να βάλουμε αυτούς τους όρους με τη μορφή

$$\hat{H}_{dec}^{(3)} = \Omega \frac{\hat{c}_1 \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_3^\dagger}{M^{3/2} \dots \dots \dots M^{1/2}} \sum \exp\{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}_{n_j}\}, \quad (66.3)$$

όπου

$$\Omega = (2M)^{-3/2} \sum_{\nu_1, \nu_2} \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{\nu_1\nu_2}(\nu_1, \nu_2) e_{1\alpha} e_{2\beta}^* e_{3\gamma}^* \exp\{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_{\nu_1} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_{\nu_2})\}, \quad (66.4)$$

$$\hat{c}_1 \equiv \hat{c}_{\mathbf{k}_1 \mu_1}, \quad \omega_1 \equiv \omega_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}_1), \quad \mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_{\mathbf{k}_1}^{(\mu_1)}(\mathbf{k}_1), \dots$$

Ο εκθετικός παράγοντας διαχωρίζεται στο (66.3), ο οποίος εξαρτάται από την απόλυτη θέση n_3 του κυττάρου στο πλέγμα. Άθροιση αυτού του παράγοντα επί του συνόλου u_3 δίνει N , εάν $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$ είναι ίσο με οποιαδήποτε αμοιβαίο πλέγμα περιόδου \mathbf{b} ; διαφορετικά, είναι μηδέν. Ως εκ τούτου

$$\hat{H}_{dec}^{(3)} = \Omega \frac{\hat{c}_1 \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_3^\dagger}{N^{1/2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/2}}, \quad (66.5)$$

και το φωτόνιο οιονεί ορμές ικανοποιεί το νόμο διατήρησης

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{b}. \quad (66.6)$$

Ο όρος (66.6) πρέπει να θεωρηθεί ως μία εξίσωση που δίνει την τιμή, ας πούμε την ταχύτητα κίνησης οιονεί \mathbf{k}_3 από καθορισμένες τιμές των \mathbf{k}_1 και \mathbf{k}_2 . Οι τελευταίες πρέπει να ληφθούν μέσα σε κάποιο επιλεγμένο μονάδα πυρήνα του αντίστροφου πλέγματους (συμπεριλαμβανομένων όλες τις φυσικές διαφορετικές τιμές της οιονεί ορμής) και πρέπει να επαληθεύσουμε, ότι \mathbf{k}_3 είναι επίσης στο επιλεγμένο κελί. Αυτός ο τελευταίος όρος καθορίζει την απαιτούμενη τιμή του \mathbf{b} στο (66.6) και το κάνει χωρίς αμφιβολία. Εάν με καθορισμένα $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ και \mathbf{b} , το διάνυσμα \mathbf{k}_3 βρίσκεται στο επιλεγμένο κελί, τότε οποιαδήποτε αλλαγή στο \mathbf{b} θα φέρει σίγουρα \mathbf{k}_3 έξω από αυτό το πυρήνα.

Διαδικασίες (σε αυτή την περίπτωση, η αποσύνθεση των φωτονίων) για τις οποίες ο νόμος της διατήρησης των οιονεί-ορμή περιλαμβάνουν ένα μη μηδενικό διάνυσμα \mathbf{b} που ονομάζεται διεργασίες Umklapp, σε αντίθεση με τις κανονικές διαδικασίες, για τις οποίες

$b = 0$. Σημειώστε ότι η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο κατηγοριών διαδικασιών είναι σε κάποιο βαθμό συμβατικά: κάθε συγκεκριμένη διαδικασία μπορεί να είναι είτε άλλης κατηγορίας, ανάλογα με την επιλογή της βάσης του πυρήνα. Είναι σημαντικό ωστόσο, ότι καμιά επιλογή δεν μπορεί να κάνει το b μηδέν ταυτόχρονα για όλες τις πιθανές διαδικασίες. Είναι εύκολο να επιλέξεις το βασικό κύτταρο του αμοιβαίου πλέγματος, έτσι ώστε το σημείο $k=0$ (άπειρο μήκος κύματος) είναι στο κέντρο του; Αυτό θα θεωρηθεί στο εξής. Με αυτήν την επιλογή, χαμηλές τιμές της ψευδή ταχύτητα κίνησης ($k \ll 1/d$, όπου d είναι η σταθερά πλέγματος) αντιστοιχούν σε όλα τα φωτόνια χαμηλής συχνότητας και όλες οι διεργασίες που αφορούν μόνο τα φωτόνια χαμηλής συχνότητας είναι κανονικές διαδικασίες.* Μεγάλες τιμές της ψευδής ταχύτητας ($k \sim 1/d$) αντιστοιχούν σε μικρό μήκος κύματος φωτόνια με υψηλή ενέργεια (της τάξης της θερμοκρασίας Debye Θ).

Ας επιστρέψουμε στη διαδικασία αποσύνθεσης του φωτονίου. Σύμφωνα με τις γενικές αρχές της κβαντικής μηχανικής (βλέπε QM (43.1)), η πιθανότητα μιας αποσύνθεσης, στην οποία η οιονεί-ορμή ενός από τα δύο νεοσύστατα φωτόνια εξαπλώνεται στην κλίμακα d^3k_2 , δίνεται από το τετράγωνο του αντίστοιχου στοιχείου καλούπι του φορέα διαταραχής (66.5):

$$dW = 2\pi |\langle N_1 - 1, N_2 + 1, N_3 + 1 | H^{(0)} | N_1, N_2, N_3 \rangle|^2 \times \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) d^3k_2 / (2\pi)^3, \quad (66.7)$$

όπου $N_1 = N_{k_1g_1}$, N_2 , N_3 είναι οι αριθμοί κατοχής των φωτονίων στην αρχική κατάσταση του κρυστάλλου. Τα στοιχεία του καλουπιού/μήτρας της δημιουργίας του φωτονίου και οι φορείς εκμηδένισης δίνονται από

$$\langle N - 1 | \hat{c} | N \rangle = \langle N | \hat{c}^\dagger | N - 1 \rangle = \sqrt{N}. \quad (66.8)$$

Έτσι λάβαμε την πιθανότητα διάσπασης, με το τύπο

$$dW = w N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) d^3k_2 / (2\pi)^3, \quad (66.9)$$

όπου

$$w = w(g_2k_2, g_3k_3; g_1k_1) = 2\pi v |\Omega|^2 / \omega_1 \omega_2 \omega_3, \quad (66.10)$$

και το $\nu = \frac{v}{N}$ είναι ο όγκος του κυττάρου πλέγματος του κρυστάλλου. Η πιθανότητα

των διαδικασιών είναι ωστόσο ανάλογη με τον αριθμό N_1 των αρχικών φωτονίων στην

* Εάν, από την άλλη πλευρά, το κύτταρο βάσης επιλέγεται, έτσι το σημείο $k=0$ είναι σε μια από τις κορυφές της, για παράδειγμα χαμηλές συχνότητες θα αντιστοιχούν επίσης στις γειτονιές των άλλων κορυφών κοντά στο οποίο το k δεν είναι μικρό.

αρχική κατάσταση του κρυστάλλου καθώς επίσης και με τους αριθμούς των N_2+1 και N_3+1 των τελικών φωτονίων στην τελική κατάσταση. Η τελευταία ιδιότητα σχετίζεται με τη στατιστική Bose υπακούοντας από τα φωτόνια και είναι αλήθεια όλων των διεργασιών/διεργασιών που περιλαμβάνουν μποζόνια.*

Η αντίστροφη διαδικασία της αποσύνθεσης είναι η ένωση δυο φωτονίων k_2 και k_3 για να σχηματίσουν ένα φωτόνιο k_1 . Μπορούμε εύκολα να δείξουμε, ότι οι όροι στο Hamiltonian που είναι υπεύθυνοι για αυτή τη διαδικασία διαφέρουν από το (66.5) στο ότι οι c -φορείς στον αριθμητή έχουν αντικατασταθεί από \hat{c}_1^+ , \hat{c}_2 , \hat{c}_3 και Ω με Ω^* . Η πιθανότητα αυτής της διαδικασίας δίνεται επομένως από έναν τύπο, ο οποίος διαφέρει από το (66.9) μόνο όσον αναφορά τους παράγοντες N :

$$dW = w N_2 N_3 (N_1 + 1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) d^3 k_2 / (2\pi)^3 \quad (66.11)$$

Οι λειτουργίες w εδώ και στο (66.9) είναι ίδιες σύμφωνα με το γενικό κανόνα ότι στη προσέγγιση Born (η πρώτη προσέγγιση της θεωρίας διαταραχών) οι πιθανότητες άμεσης και αντίστροφης διασκόρπισης γεγονότων είναι ίσες; Βλέπε QM, §126.

Οι διακλαδώσεις του φάσματος των φωτονίων πάντα περιλαμβάνουν τρεις *ακουστικές διακλαδώσεις* στις οποίες η ενέργεια τείνει στο μηδέν, όπως $k \rightarrow 0$; για μακρύ-μήκους κύματος (μικρό k) ακουστικά φωτόνια, η συνάρτηση $\omega(k)$ είναι γραμμική. Η συμπεριφορά της λειτουργίας w στο (66.10) για τέτοια φωτόνια θα είναι αναγκαία παρακάτω. Μπορεί να καθοριστεί σημειώνοντας την ιδιότητα των συντελεστών Λ στο Hamiltonian (66.1), η οποία εκφράζει το γεγονός, ότι μια απλή μετατόπιση του κρυστάλλου ως σύνολο αφήνει την ενέργειά του αμετάβλητη, έστω και αν ο κρυστάλλος

παραμορφώνεται. Αυτό σημαίνει, ότι η ενέργεια $H^{(3)}$ πρέπει να είναι ανεπηρέαστη, αν κάποιος από τους παράγοντες $U_s(n)$ έχει αντικατασταθεί από $U_s + a$ με ένα διάνυσμα a που είναι ανεξάρτητος από το n και s . Για να είναι έτσι, πρέπει να έχουμε

** Η λειτουργία της κατανομή των φωτονίων N_k ή $N(k)$ θα πρέπει να ορίζεται ως κατοχή των αριθμών των κβαντικών καταστάσεων με διάφορες τιμές της οιονεί ορμή k . Ο αριθμός των καταστάσεων που ανήκουν σε ένα στοιχείο d^3k στο k -χώρο είναι $d^3k/(2\pi)^3$ και έτσι η κατανομή σε σχέση με το d^3k είναι $N_k/(2\pi)^3$.

$$\sum_{\mathbf{n}_1, \mathbf{s}_1} \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{s_1 s_2 s_3}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 0, \quad (66.12)$$

όπου οι αθροίσεις είναι πάνω από ένα τουλάχιστον ζεύγος μεταβλητών $\mathbf{n}_1, \mathbf{s}_1$.

Από τα τρία φωτόνια που εμπλέκονται στη διαδικασία, είτε το ένα είτε και τα τρία μπορεί να είναι μακρύ-μήκους κύματος ακουστικά φωτόνια: εάν υπάρχουν δύο τέτοια φωτόνια και ένα σύντομο μήκος κύματος, οι νόμοι διατήρησης της ορμής και της ενέργειας δεν μπορούν να ικανοποιηθούν. Για ένα ακουστικό φωτόνιο στο όριο $k \rightarrow 0$, τα διανύσματα πόλωσης $e_s(k)$ τείνουν σε ένα συνεχή ανεξάρτητο s , δεδομένου ότι όλα τα άτομα στο πυρήνα δονούνται από κοινού και οι παράγοντες $\exp(ik \cdot r_n)$ τείνουν στην ενότητα. Λόγω της ιδιότητας (66.12), η ποσότητα Ω (66.4) τείνει στο μηδέν και για μικρά k είναι ανάλογη με k ή (το ίδιο συμβαίνει και για ένα ακουστικό φωτόνιο) στο ω . Το αποτέλεσμα είναι

$$\omega \propto k_1 \quad (66.13)$$

εάν υπάρχει ένα μακρύ μήκους κύματος φωτονίου, ή

$$\omega \propto k_1 k_2 k_3 \quad (66.14)$$

αν υπάρχουν τρία.

Τα αποτελέσματα (66.13) και (66.14) μπορούν επίσης να επιτευχθούν με έναν πιο εμφανή τρόπο επισημαίνοντας, ότι τα μακρύ μήκους κύματος ακουστικών φωτονίων αντιστοιχούν σε μακροσκοπικά ηχητικά κύματα, τα οποία μπορούν να αντιμετωπιστούν με τη μακροσκοπικά με τη θεωρία ελαστικότητας. Τότε η ενέργεια του παραμορφωμένου κρυστάλλου εκφράζεται σε όρους του τανυστή.../στέλεχος διάχυσης.

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad (66.15)$$

όπου $U(\mathbf{r})$ είναι το μακροσκοπικό διάνυσμα μετατόπισης για σημεία στο ελαστικό μέσο. Τα συστατικά αυτού του τανύων μω είναι οι μικρές ποσότητες που χρησιμοποιήθηκαν στην επέκταση της ελαστικής ενέργειας. Στη δεύτερη κβαντοποίηση, το διάνυσμα U αντικαθίσταται από το χειριστή \hat{U} ανάλογο του (66.2). Η διαφοροποίηση του \hat{U} σε σχέση με τις συντεταγμένες για την απόκτηση των χειριστών $\hat{U}_{\alpha\beta}$ δίνει τον επιπλέον παράγοντα k που οδηγεί στα αποτελέσματα (66.13) και (66.14).

§67. Η εξίσωση μεταφοράς για φωτόνια σε ένα μονωτικό υλικό

Σε ένα στέρεο κρύσταλλο, τα φωτόνια σχηματίζουν ένα *rarefied* αέριο και η εξίσωση μεταφοράς τους λαμβάνεται με παρόμοιο τρόπο σε αυτό για ένα συνηθισμένο αέριο.

Ας $N = N_g(t, \mathbf{r}, k)$ είναι η συνάρτηση κατανομής για φωτόνια τύπου g . Η εξίσωση μεταφοράς για κάθε τύπο φωτονίου είναι γραμμένο ως

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}} = C(N), \quad (67.1)$$

όπου $v = \partial\omega/\partial k$ είναι η ταχύτητα φωτονίου.

Μια σημαντική διαφορά από την περίπτωση των συνηθισμένων αερίων ωστόσο, είναι ότι σε συγκρούσεις των φωτόνια αερίων, ούτε ο αριθμός των φωτονίων, (λόγω διεργασιών Umklapp) ούτε το σύνολο της ψευδό-ορμής είναι γενικά διατηρημένη. Ο μόνος νόμος διατήρησης που παραμένει είναι ότι από την ενέργεια εκφράζεται από

$$\sum_{\mathbf{k}} \int \omega C(N) d^3k / (2\pi)^3 = 0. \quad (67.2)$$

Πολλαπλασιάζοντας (67.1) επί ω , ενσωματώνοντας πάνω d^3k και αθροίζοντας πάνω g , παίρνουμε το νόμο της διατήρησης της ενέργειας με το τύπο

$$\partial E / \partial t + \text{div } \mathbf{q} = 0, \quad (67.3)$$

όπου η θερμική ενεργειακή πυκνότητα E του κρυστάλλου και η ενέργεια ροής \mathbf{q} δίνονται από τις προφανείς εκφράσεις

$$E = \sum_g \int \omega N d^3k / (2\pi)^3, \quad \mathbf{q} = \sum_g \int \omega \mathbf{u} N d^3k / (2\pi)^3. \quad (67.4)$$

Η σύγκρουση του ολοκλήρωματος στο (67.1) πρέπει να περιλαμβάνει καταρχήν όλες τις διαδικασίες που μπορούν να προκύψουν σαν αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των φωτονίων τύπου g με όλα τα άλλα φωτόνια. Στην πράξη ωστόσο, η κύρια συμβολή προέρχεται από τις τρεις διεργασίες φωτονίων που συζητούνται στη §66. Διεργασίες που εμπλέκουν ένα μεγαλύτερο αριθμό φωτονίων προκύπτουν από μεταγενέστερους όρους στην επέκταση του Hamiltonian σε δυνάμεις των μετακινήσεων των ατόμων: Αυτοί οι όροι μειώνουν ραγδαία όσο αυξάνεται η τάξη τους. Ο λόγος για τη μείωση είναι ότι η αναλογία του πλάτους δόνησης ξ με τη σταθερά πλέγματος d είναι μικρή: σε στέρεους

κρυστάλλους, αυτή παραμένει μικρή σε όλες τις θερμοκρασίες μέχρι το σημείο τήξεως. * Για μια πρόχειρη εκτίμηση, μπορούμε να αρχίσουμε από την κλασική σχέση $M\omega^2 \xi^2 \sim T$; υπολογίζοντας τη χαρακτηριστική συχνότητα $\omega \sim u/d$, ** βρίσκουμε

$$(\xi/d)^2 \sim T/Mu^2 \ll 1. \quad (67.5)$$

Το ολοκλήρωμα σύγκρουσης είναι όπως πάντα η διαφορά μεταξύ των αριθμών των διεργασιών (ανά μονάδα χρόνου), οι οποίες δημιουργούν φωτόνια σε μία δεδομένη κατάσταση g, k και οι οποίες μετακινούν τα φωτόνια από αυτή την κατάσταση. Λαμβάνοντας υπόψη τις διαδικασίες μόνο τριών φωτονίων έχουμε

$$C(N) = \int \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \times \right. \\ \times [(N+1)N_1N_2 - N(N_1+1)(N_2+1)] \\ \left. + \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 - \omega - \omega_3) \times \right. \\ \left. \times [(N+1)(N_1+1)N_3 - NN_1(N_3+1)] \right\} d^3k_1 / (2\pi)^3, \quad (67.6)$$

όπου $N_1 = N_{g_1}(\mathbf{k}_1), \dots$. Ο πρώτος όρος στις αγκύλες αντιστοιχεί στις άμεσες και αντίστροφες διεργασίες

$$(g, \mathbf{k}) \rightleftharpoons (g_1, \mathbf{k}_1) + (g_2, \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{b}; \quad (67.7)$$

ο συντελεστής $\frac{1}{2}$ σε αυτό τον όρο λαμβάνει υπόψη το γεγονός, ότι λόγω της ταυτότητας των φωτονίων πρέπει να συνοψίσουμε μόνο πάνω από το μισό των τελικών καταστάσεων. Ο δεύτερος όρος στους δεσμούς αντιστοιχούν στις διαδικασίες

$$(g_1, k_3) \rightleftharpoons (g, k) + (g_1, k_1), \quad k_3 = k + k_1 + b; \quad (67.8)$$

ο συντελεστής $\frac{1}{2}$ δεν είναι απαραίτητος σε αυτόν τον όρο, δεδομένου ότι ένα από τα δύο φωτόνια σχηματίζονται από τη διάσπαση. Στο ολοκλήρωμα του (67.6) θα πρέπει να σημειωθούν τα τριπλά γινόμενα NN_1N_2 και NN_1N_3 ματαίωσης.

Η σύγκρουση του ολοκληρώματος είναι πανομοιότυπα μηδέν για τη διανομή φωτονίων ισορροπίας, η κατανομή Planck.

* Εκτός από τον «κβαντικό κρύσταλλο» στερεό ήλιο.

** Στις εκτιμήσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε u ως την ταχύτητα του ήχου, αν και αυτό είναι φυσικά κυριολεκτικά σωστό μόνο για τα μεγάλα-μήκους κύματος ακουστικά φωτόνια.

$$N_0 = (e^{\omega/T} - 1)^{-1}. \quad (67.9)$$

Αυτό φαίνεται εύκολα για το ολοκλήρωμα (67.6) με άμεσο υπολογισμό: πολλαπλασιασμός των παραγόντων δίνει

$$N_0(N_{01} + 1)(N_{02} + 1) = (N_0 + 1)N_{01}N_{02} \exp[(\omega_1 + \omega_2 - \omega)/T], \quad (67.10)$$

και με το νόμο της διατήρησης της ενέργειας ο εκθετικός παράγοντας στα δεξιά είναι ίσος με την ενότητα.

Εάν οι Umklapp διαδικασίες ήταν απύσες, όχι μόνο η συνολική ενέργεια, αλλά και η συνολική οιονεί ορμή των φωτονίων θα ήταν μηδενική. Τότε όχι μόνο η συνάρτηση κατανομής (67.9), αλλά επίσης οι λειτουργίες

$$N_0 = \left[\exp \frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}}{T} - 1 \right]^{-1} \quad (67.11)$$

που αντιστοιχούν στην ευθύγραμμη κίνηση (παρασύρουν) του αερίου του φωτονίου ως σύνολο σε σχέση με το πλέγμα με οποιαδήποτε ταχύτητα V θα μπορούν να είναι συναρτήσεις ισορροπίας. Αυτό το αποτέλεσμα είναι σύμφωνα με τις γενικές αρχές της στατιστικής φυσικής. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί άμεσα: με τις λειτουργίες (67.11) ως N_0 , ένας περαιτέρω παράγοντας $\exp[\mathbf{V} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) / T]$ που εμφανίζεται στα δεξιά του (67.10) και είναι ίσος προς τη μονάδα για τις μη Umklapp διεργασίες, όπου $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$.

Η διανομή (67.11) οδηγεί φυσικά σε μια μη μηδενική ενέργεια ροής q . Έτσι, στην απουσία των διεργασιών Umklapp, μια ροή θερμότητας θα μπορούσε να υπάρξει στον

κρύσταλλο, αν και η θερμοκρασία ήταν σταθερή σε όλο το σώμα; Ο κρύσταλλος θα μπορούσε να έχει άπειρη θερμική αγωγιμότητα. Μια πεπερασμένη αγωγιμότητα προκύπτει μόνο και μόνο επειδή υπάρχουν διαδικασίες Umklapp.*

Για τον υπολογισμό της θερμικής αγωγιμότητας πρέπει να γράψουμε την εξίσωση μεταφοράς για ένα κρύσταλλο, στο οποίο η θερμοκρασία μεταβάλλεται αργά διαμέσου του όγκου. Ως συνήθως, αναζητούμε τις λειτουργίες διανομής του φωτονίου με τη μορφή

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = N_0(\mathbf{k}) + \delta N(\mathbf{r}, \mathbf{k}), \quad (67.12)$$

* Η κβαντική θεωρία της θερμικής αγωγιμότητας σε μονωτές με βάση την εξίσωση μεταφοράς για φωτόνια οφείλεται στον R.E. Peierls (1929), ο οποίος πρώτος επέστησε την προσοχή στο ρόλο των διαδικασιών Umklapp, στις διαδικασίες μεταφοράς σε στερεά.

όπου δN είναι μία μικρή διόρθωση στη λειτουργία ισορροπίας. Οι εξισώσεις μεταφοράς είναι τότε

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla T) \partial N_0 / \partial T = I(\delta N), \quad (67.13)$$

όπου $I(\delta N)$ είναι το γραμμικό ολοκλήρωμα σύγκρουσης.

Οι λειτουργίες δN πρέπει επίσης να πληρούν την επόμενη κατάσταση

$$\sum_{\mathbf{r}} \int \omega \delta N d^3k / (2\pi)^3 = 0, \quad (67.14)$$

που σημαίνει, ότι οι διαταραγμένες λειτουργίες διανομής δίνουν την ίδια τιμή του πλέγματος ενεργειακής πυκνότητας, όπως κάνουν οι λειτουργίες ισορροπίας. Όπως έχει ήδη σημειωθεί στη §6, αυτή η συνθήκη ουσιαστικά καθορίζει τον ορισμό της θερμοκρασίας σε ένα μη-ισορροπημένο σώμα. Οι άλλες καταστάσεις που επιβάλλονται στη δN στη §6 δεν εφαρμόζονται σε αέριο φωτονίου, σε αντίθεση με ένα συνηθισμένο αέριο. Ο αριθμός των σωματιδίων στο αέριο φωτονίου δεν είναι μια σταθερή ποσότητα, αλλά εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Η συνολική πραγματική ορμή (.....) των φωτονίων στον κρύσταλλο είναι αναγκαστικά μηδέν, διότι αλλιώς θα μπορούσε να υπάρξει ροή του στερεού, η οποία είναι σίγουρα αδύνατη για ένα ιδανικό (ελάττωμα-ελεύθερο) κρυσταλλικό πλέγμα. Κάθε άτομο στο πλέγμα εκτελεί μόνο μια πεπερασμένη κίνηση, η ταλάντωση γύρω από την τοποθεσία του πλέγματος; η μέση δυναμική μιας τέτοιας κίνησης είναι πανομοιότυπα μηδέν.

Έτσι, η ροή του φωτονίου (που σχετίζεται με τη ροή ενέργειας) σε ένα στέρεο κρύσταλλο δεν συνοδεύεται από μεταφορά μάζας.*

Ας γράψουμε ρητά το γραμμικό ολοκλήρωμα σύγκρουσης (67.6). Εδώ, είναι βολικό να χρησιμοποιηθεί αντί του δN νέο άγνωστο χ λειτουργίες που ορίζεται από

$$\delta N = -(\partial N_0 / \partial \omega) \chi = N_0(N_0 + 1) \chi / T. \quad (67.15)$$

Η διαδικασία της γραμμικοποίησης απλοποιείται σημειώνοντας ότι

$$\delta \frac{N}{1 + N} = \frac{N_0}{1 + N_0} \frac{\chi}{T}. \quad (67.16)$$

* Σε αντίθεση με ένα υγρό, όπου η κίνηση του φωτονίου είναι η πραγματική δυναμική και η ροή του φωτονίου περιλαμβάνει τη μεταφορά της μάζας. Σε ένα υγρό, τα άτομα εκτελούν μια κίνηση άπειρη: σε ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, κάθε άτομο μπορεί να φτάσει οποιοδήποτε σημείο του όγκου.

Η έκφραση στις τετραγωνισμένες αγκύλες στο πρώτο ολοκλήρωμα (67.6), για παράδειγμα μπορεί να γραφτεί

$$(N + 1)(N_1 + 1)(N_2 + 1) \left[\frac{N_1}{N_1 + 1} \frac{N_2}{N_2 + 1} - \frac{N}{N + 1} \right]$$

Στους παράγοντες που λαμβάνονται έξω από τις αγκύλες μπορούμε να βάλουμε αμέσως $N = N_0$. Η διαφορά στις αγκύλες δίνει

$$\frac{1}{T} \frac{N_0}{N_0 + 1} (\chi_1 + \chi_2 - \chi),$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον τύπο

$$\frac{N_{01}}{N_{01} + 1} \frac{N_{02}}{N_{02} + 1} = \frac{N_0}{N_0 + 1}$$

Η σύγκρουση του ολοκληρώματος γίνεται στη μορφή

$$\begin{aligned} C(N) \approx I(\chi) = \frac{1}{T} \int \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}) N_0(N_{01} + 1)(N_{02} + 1) \times \right. \\ \times \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega)(\chi_1 + \chi_2 - \chi) \\ \left. + \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2) N_0 N_{01}(N_{02} + 1) \times \right. \\ \left. \times \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2)(\chi_2 - \chi_1 - \chi) \right\} d^3 k_1 / (2\pi)^3. \quad (67.17) \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι $\chi(\mathbf{k})$ εμφανίζεται στα ολοκληρώματα ως απλά αθροίσματα των τιμών του για διάφορα \mathbf{k} , όπως στην κλασσική σύγκρουση του ολοκληρώματος για αέρια (6.4), (6.5).

Σε μια λύση του (67.13) μπορούμε πάντα να προσθέσουμε την προφανή λύση της ομογενούς εξίσωσης.

$$\chi = \text{constant} \times \omega, \quad (67.18)$$

η οποία καθιστά το ολοκλήρωμα (67.17) πανομοιότυπα μηδέν, λόγω της διατήρησης της ενέργειας σε συγκρούσεις. Όπως ήδη εξηγήθηκε στη §6, αυτή η «επιπλέον» λύση ανταποκρίνεται απλά σε μικρή συνεχόμενη αλλαγή στη θερμοκρασία και αποκλείεται από τη περαιτέρω κατάσταση (67.14).

Μια δεύτερη «επιπλέον» λύση,

$$\chi = \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{V}, \quad (67.19)$$

με $\delta \mathbf{V}$ σταθερά, αντιστοιχεί σε μια μικρή αλλαγή στην ταχύτητα του αερίου του φωτονίου ως σύνολο (cf. (6.6)) και αποκλείεται από την παρουσία των διαδικασιών Umklapp, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα ότι η συνολική ψευδό ταχύτητα του φωτονίου δεν διατηρείται.

§68. Θερμική αγωγιμότητα σε μονωτήρες. Υψηλές θερμοκρασίες

Η εξίσωση (67.13) μας επιτρέπει να καθορίσουμε αμέσως τη θερμοκρασία εξάρτησης της θερμικής αγωγιμότητας ενός μονωτή σε θερμοκρασίες πολύ μεγαλύτερες από τη θερμοκρασία Debye $\Theta \sim u/d$ (ή hu/d σε συνήθεις μονάδες).

Η μέγιστη ενέργεια φωτονίου σε όλους τους κλάδους του φάσματος είναι της τάξης του Θ . Ως εκ τούτου, όταν $T \gg \Theta$, οι ενέργειες όλων των φωτονίων $\omega \ll T$, και για τα περισσότερα από αυτά $\omega \sim \Theta$. Η συνάρτηση της διανομής ισορροπίας (67.9) γίνεται τότε

$$N_0 \approx T/\omega \gg 1. \quad (68.1)$$

Στη σύγκρουση του ολοκληρώματος (67.17), η θερμοκρασία διαχωρίζεται ως ένα παράγοντα T^2 ; Η λειτουργία w για συχνότητες $\omega \sim \Theta$ δεν επηρεάζει την εξάρτηση θερμοκρασίας του ολοκληρώματος. Στην αριστερή πλευρά του (67.13), $\partial N_0/\partial T \sim 1/\omega$ δεν εμπλέκει τη θερμοκρασία. Ως εκ τούτου,

$$\chi \propto \nabla T/T^2, \quad \delta N = -(\partial N_0/\partial \omega)\chi \propto \nabla T/T,$$

και έτσι η ροή θερμότητας*

$$\mathbf{q} = \sum_{\mathbf{g}} \int \omega \mathbf{u} \delta N d^3k/(2\pi)^3 \propto \nabla T/T.$$

Η θερμική αγωγιμότητα είναι έτσι αντιστρόφως ανάλογη με τη θερμοκρασία:

$$\kappa \propto 1/T, \quad T \gg \Theta; \quad (68.2)$$

στη κλασσική θεωρία, αυτό το αποτέλεσμα αποκτήθηκε από τον Debye. Σε ένα ανισοτροπικό κρύσταλλο, οι κατευθύνσεις των q και ∇T σε γενικές γραμμές δεν είναι το ίδιο και η αγωγιμότητα είναι επομένως η διάχυση βαθμού δύο, δεν είναι βαθμιδωτά;

* Η προφανής εξαφάνιση του q σε ισορροπία ακολουθεί επίσημα από την εξαφάνιση του ολοκληρώματος d^3k , επειδή το ολοκλήρωμα είναι μια περιττή λειτουργία του k : η συχνότητα $\omega(k)$ και επομένως $N_0(\omega)$ είναι ακόμη λειτουργίες του k και η ταχύτητα $u = \partial\omega/\partial k$ είναι μια περιττή λειτουργία. Η συνάρτηση $k(\omega)$ είναι άρτια λόγω της συμμετρίας υπό την αναστροφή του χρόνου, ανεξάρτητα από την συμμετρία του κρυσταλλικού πλέγματος (βλέπε SP 1, §69).

Δεν πρέπει να λάβουμε υπόψη αυτό, όταν θεωρώντας τη θερμοκρασία εξάρτηση του.

Ας υπολογίσουμε τη μέση ελεύθερη διαδρομή του φωτονίου στο εύρος της θερμοκρασίας που μας αφορά. Σύμφωνα με τη στοιχειώδη σχέση (7.10) της κινητικής θεωρίας των αερίων, $\kappa \sim C\bar{v}l$ όπου C είναι η συγκεκριμένη θερμοκρασία ανά μονάδα όγκου, \bar{v} η μέση ταχύτητα των φορέων ενέργειας και l μέση ελεύθερη διαδρομή τους. Η συγκεκριμένη θερμότητα του κρυστάλλου είναι σταθερή σε υψηλές θερμοκρασίες και έτσι είναι η ταχύτητα των φωτονίων που μπορεί να εκτιμηθεί ως η ταχύτητα του ήχου u . Βλέπουμε λοιπόν, ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή $l \propto 1/T$. Αυτό θα πρέπει να γίνει με τη σειρά της σταθεράς του πλέγματος d σε θερμοκρασίες τόσο υψηλές που τα πλάτη δόνησης των ατόμων είναι επίσης της τάξης του d . Σύμφωνα με την εκτίμηση (67.5) τέτοια θερμοκρασία είναι $\sim \mu^2$ και έχουμε για τη μέση ελεύθερη διαδρομή και για την αποτελεσματική σύγκρουση συχνότητα $\nu \sim u/l$ τις εκτιμήσεις

$$l \sim \mu u^2 d / T, \quad \nu \sim T / \mu u d. \quad (68.3)$$

Από αυτό βλέπουμε ότι $l \gg d$ σε σχεδόν όλες τις θερμοκρασίες κάτω από το σημείο τήξης.

Στην ανάλυση αυτή, αυτό έχει ουσιαστικά θεωρηθεί, ότι τα τρία φωτόνια μηχανισμού της θερμικής αντίστασης σε ένα κρυσταλλικό πλέγμα είναι λειτουργικά για όλα τα φωτόνια. Οι ροές ενέργειας που μεταφέρονται από τις διάφορες ομάδες φωτονίων είναι αθροιστικές και έτσι είναι οι συνεισφορές τους στη θερμική αγωγιμότητα. Αν ο

μηχανισμός ήταν ανεπαρκής για μια ακόμη ομάδα από φωτόνια, θα μπορούσε να ήταν ανεπαρκής για να παρέχει μια πεπερασμένη αγωγιμότητα. Οι μεγάλοι μήκους κύματος ακουστικών φωτονίων χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή εδώ.

Ας εξετάσουμε πρώτα τις διαδικασίες που αφορούν μόνο τέτοια φωτόνια με μικρή ψευδό ορμή του συγκρίσιμου μεγέθους που συμβολίζεται με f με την κατάλληλη κατάληξη. Θα πρέπει να εκτιμήσουμε για αυτές τις διαδικασίες το ολοκλήρωμα σύγκρουσης (67.17), όσον αφορά την εξάρτησή της από την f . Σύμφωνα με την (66.14), σε αυτή την περίπτωση $w \propto f_1 f_2 \propto f^3$. Οι παράγοντες $N_0 \sim T/\omega \propto 1/f$. Η ολοκλήρωση στο k -χώρο είναι πάνω από ένα όγκο $\sim f^3$, αλλά η συνάρτηση δέλτα διαχωρίζει εντός του όγκου μια επιφάνεια με χώρο $\sim f^2$. Θα βρείτε έτσι για το ολοκλήρωμα σύγκρουσης

$$I(\chi) \propto f^2 \chi \propto f^4 \delta N,$$

όπου η τελευταία έκφραση χρησιμοποιεί το γεγονός, ότι $\delta N \propto \chi/f^2$ (67.15); Το αποτέλεσμα μπορεί επίσης να γραφτεί σε ότι αφορά την αποτελεσματική συχνότητα συγκρούσεως όπως

$$\nu(f) \propto f^4. \quad (68.4)$$

Στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς (67.13), ο παράγοντας u είναι (για ακουστικά φωτόνια) ανεξάρτητος από το f και $\partial N_0 \sim \partial T/\omega \propto 1/f$. Συνεπώς

$$\delta N \propto 1/f \nu.$$

Η συμβολή του μακρύ μήκους-κύματος φωτόνια στην ενέργεια ροής q δίνεται από το ολοκλήρωμα (67.4) που λαμβάνεται πάνω από ένα όγκο $\sim f^3$. Αυτό το ολοκλήρωμα,

$$\int \omega u \delta N d^3 f / (2\pi)^3 \propto \int d^3 f \nu(f), \quad (68.5)$$

αποκλίνει όπως $1/f$ για μικρά f . Έτσι οι τρεις διαδικασίες φωτονίων ανάμεσα σε μόνο μεγάλο μήκους-κύματος ακουστικά φωτόνια θα μπορούσε να οδηγήσει σε μια άπειρη θερμική αγωγιμότητα; Για να καταλήξουμε σε μία πεπερασμένη αγωγιμότητα, οι συγκρούσεις μεταξύ αυτών και των μικρών μήκους κυμάτων φωτονίων είναι απαραίτητες (I. Ya. Pomeranchuk 1941).

Ας αφήσουμε μια μικρού μήκους-κύματος φωτονίου με ψευδο ορμή αποσύνθεσης k , σε ένα μακρύ μήκους-κύματος ακουστικού φωτονίου f και ένα σύντομου μήκους-κύματος φωτονίου $k - f - b$ που ανήκουν στην ίδια διακλάδωση του φάσματος

$\omega(\mathbf{k})$, όπως το φωτόνιο \mathbf{k} ; Στην ακόλουθη ανάλυση η απόλυτη αξία του \mathbf{k} είναι λιγότερο σημαντική από το γεγονός ότι $k \gg f$. Δεδομένου, ότι $\omega(\mathbf{k})$ είναι περιοδικό στο αντίστροφο πλέγμα, έχουμε $\omega(\mathbf{k} - \mathbf{f} - \mathbf{b})$ και κατά το νόμο της διατήρησης της ενέργειας αναφέρει ότι

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k} - \mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f. \quad (68.6)$$

Ο δεύτερος όρος στα δεξιά, η ακουστική συχνότητα φωτονίου είναι μία γραμμική συνάρτηση της f ; είναι η ταχύτητα φάσης του ήχου, η οποία εξαρτάται από την κατεύθυνση $\mathbf{n} = \mathbf{f}/f$. Επεκτείνοντας $\omega(\mathbf{k} - \mathbf{f})$ στις αρμοδιότητες του μικρού διανύσματος f , μπορούμε να βάλουμε αυτή την εξίσωση με το τύπο

$$\mathbf{f} \cdot \partial\omega/\partial\mathbf{k} = f u(\mathbf{n}). \quad (68.7)$$

Μπορεί να πληρούνται μόνο εάν η ταχύτητα του μικρού μήκους-κύματος φωτονίων να υπερβαίνουν εκείνη του ήχου:

$$|\partial\omega/\partial\mathbf{k}| > u(\mathbf{n}). \quad (68.8)$$

Με αυτή την έννοια, η πιο «επικίνδυνη» ακουστική διακλάδωση είναι, ότι με την υψηλότερο ταχύτητα του ήχου και αυτό είναι η διακλάδωση που πρέπει να έχουμε κατά νου, όταν αναφέρεται σε ακουστικά φωτόνια.*

Άλλες δυνατότητες για τρεις διεργασίες φωτονίων συμβαίνουν όταν υπάρχουν σημεία εκφυλισμού στο χώρο \mathbf{k} , όπου οι ενέργειες των δύο ή περισσότερων διακλαδώσεων του φάσματος φωτονίων συμπίπτουν (C. Herring 1954); Η παρουσία τέτοιων σημείων (είτε απομονωμένων, είτε σχηματίζοντας μια γραμμή ή επίπεδο) είναι σε πολλές περιπτώσεις μια αναγκαία συνέπεια της συμμετρίας του κρυσταλλικού πλέγματος. Οι δυνατότητες που προκύπτουν απεικονίζονται με μια γραφική κατασκευή που θα πρέπει πρώτα να δώσουμε για την υπόθεση που έχει ήδη συζητηθεί, ότι από την εκπομπή από το «υπερηχητικά» μικρού μήκους-κύματος φωτόνιο.

Για μία δεδομένη κατεύθυνση της f , παίρνουμε τη κατεύθυνση όπως το x -άξονα; Εικόνα 27a, η συνεχής καμπύλη αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $\omega(\mathbf{k}_g)$ (που δίδεται k_y, k_z) για μικρού μήκους-κύματος. Γράφοντας τη συνθήκη (68.7) στο τύπο

$$v_x \equiv \partial\omega/\partial k_x = u(\mathbf{n}_x),$$

βλέπουμε, ότι η εκπομπή ενός ακουστικού φωτονίου είναι πιθανή, εάν σε κάποιο σημείο η κλίση της καμπύλης είναι ίση με την ταχύτητα του ήχου. Οι συχνότητες $\omega(k)$ και $\omega(k - f)$ από του μικρού μήκους-κύματος φωτονίων κοντά σε αυτό το σημείο, στη συνέχεια δίδεται από τις τομές της καμπύλης με τη διακεκομμένη γραμμή, της οποίας η κλίση είναι $u(n_x)$; Η διαφορά μεταξύ της συντεταγμένης από αυτά τα σημεία δίνει τη συχνότητα f_u .

* Σε μια ιστροπικό στερεό, ένας κλάδος του ακουστικού φάσματος αντιστοιχεί σε διαμήκεις δονήσεις και τα άλλα δύο σε εγκάρσιες δονήσεις; Η ταχύτητα των διαμήκη κυμάτων ήχου υπερβαίνει από τα εγκάρσια κύματα. Σε ανισότροπο κρύσταλλο, η κατανομή των κυμάτων σε διαμήκη και εγκάρσια σε γενικές γραμμές δεν έχει κανένα νόημα. Ωστόσο, στη βιβλιογραφία η διακλάδωση με την υψηλότερη ταχύτητα του ήχου είναι συχνά αυθαίρετη, ονομάζονται διάμηκες

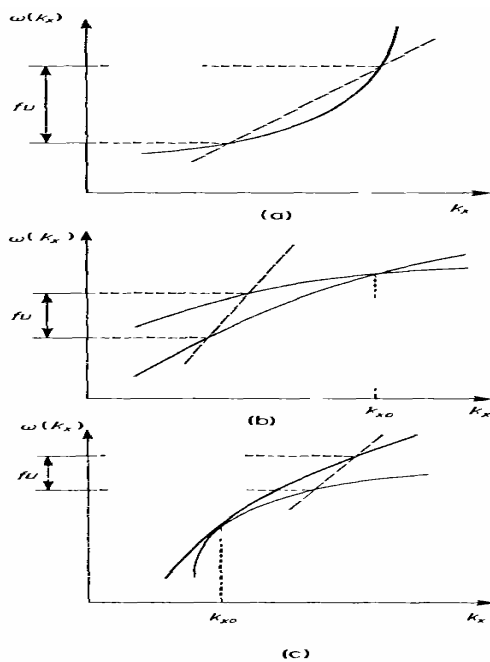


FIG. 27.

Εάν ωστόσο, οι καμπύλες των δύο διακλαδώσεων $\omega(k_g)$ τέμνονται σε ένα σημείο $k_g = k_{g0}$, μια διαδικασία τριών φωτονίων είναι πάντα δυνατή κοντά σε αυτό το σημείο ανεξάρτητα από τις κλίσεις των καμπυλών και αν ή όχι k_0 είναι μια απλή διασταύρωση (εικόνα 27b) ή ένα σημείο επαφής (εικόνα 27c). Τα δύο τότε σύντομα μήκους κύματος φωτόνια ανήκουν σε διαφορετικές διακλαδώσεις του φάσματος.

Ας εκτιμήσουμε τώρα τον πραγματικό αριθμό των συγκρούσεων μιας μακράς μήκους-κύματος ακουστικού φωτονίου, όταν υπάρχουν σημεία εκφυλισμού. Αυτές πρέπει να είναι διαδικασίες (67.8) απορρόφησης και εκπομπής του φωτονίου: η διάσπαση του φωτονίου από τις διαδικασίες (67.7) θα οδηγούσε σε δύο μεγάλα μήκους - κύματος φωτονίων, η περίπτωση αυτή έχει ήδη συζητηθεί. Έχουμε λοιπόν για να εκτιμήσουμε το δεύτερο όρο (67.17) με την υπόθεση ότι

$$\omega_1, \omega_3 \gg \omega \approx f \rightarrow 0.$$

Εδώ χρησιμοποιούμε τα γεγονότα, ότι $\omega \approx f$, $N_0 \approx 1/f$ και οι υπόλοιποι παράγοντες στο ολοκλήρωμα μπορούν να αντικατασταθούν από ανεξάρτητες μέσες τιμές της f , αφού η ενσωμάτωση έχει ληφθεί μόνο πάνω από τη γειτονιά των σημείων εκφυλισμού. Πάλι χρησιμοποιώντας $\delta N \approx \chi / f^2$ έχουμε αποκτήσει μια εκτίμηση της εξάρτησης της σύγκρουσης του ολοκλήρωματος στην f με το τύπο $I(x) \approx \nu(f)\delta N$, όπου

$$\nu(f) \approx f^2 \int \delta[\omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f - \omega_3(\mathbf{k})] d^3k. \quad (68.9)$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια επιφάνεια αναπόσπαστη σε k -χώρο, η επιφάνεια που ορίζεται από

$$\omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f - \omega_3(\mathbf{k}) = 0, \quad (68.10)$$

με τη βοήθεια του τύπου *

$$\int \delta(F) d^3k = \oint dS / |\nabla_{\mathbf{k}} F|, \quad (68.11)$$

το ολοκλήρωμα που λαμβάνεται πάνω από την επιφάνεια $F(\mathbf{k})=0$. Στη συνέχεια έχουμε

$$\nu(f) \approx f^2 \Delta S(f) \left\langle \left| \frac{\partial \omega_3(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial \omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f})}{\partial \mathbf{k}} \right|^{-1} \right\rangle, \quad (68.12)$$

όπου $\Delta S(f)$ είναι η περιοχή της επιφάνειας (68.10) και οι γωνιακές παρενθέσεις συμβολίζουν μέσο όρο πάνω από την επιφάνεια.

Ας θεωρήσουμε μια τυπική περίπτωση, στην οποία τα σημεία εκφυλισμού σχηματίζουν μια καμπύλη στο k -χώρο. Στη συνέχεια, ως $f \rightarrow 0$, η επιφάνεια (68.10) συστέλλεται σε μία καμπύλη επί της οποίας βρίσκονται τα εκφυλισμένα σημεία και για τα μικρά f είναι ένας στενός σωλήνας που περιτριγυρίζει αυτή τη γραμμή; Η εξάρτηση της περιοχής ΔS στην f είναι συνεπώς το ίδιο με την f -εξάρτηση της διαμέτρου του σωλήνα.

Αν οι επιφάνειες $\omega(\mathbf{k})$ ανταποκρίνονται στην καμπύλη εκφυλισμού, αλλά δεν αγγίζουν (εικόνα 27b) την απόσταση του σημείου \mathbf{k} από το σημείο εκφυλισμού μεταβάλλονται γραμμικά με την f και έτσι $\Delta S \propto f$ επίσης. Δεδομένου, ότι η διαφορά των παραγώγων σε αυτή την περίπτωση είναι πεπερασμένη στο σημείο της τομής, έχουμε

$$\nu(f) \propto f^3. \quad (68.13)$$

Το ολοκλήρωμα (68.5) αποκλίνει πλέον μόνο λογαριθμικά. Η απόκλιση αυτή πρέπει να αφαιρεθεί κατά τον ίδιο τρόπο, όπως όταν δεν υπάρχει εκφυλισμός (βλέπε παρακάτω). Επειδή η απόκλιση είναι αδύναμη, αυτό συνήθως δεν προκαλεί καμία σημαντική αλλαγή στο νόμο (68.2).

* Αυτό προέρχεται αμέσως σημειώνοντας ότι

$$d^2k = dS dl = dS dF/|\nabla_{\mathbf{k}}F|,$$

όπου l είναι η απόσταση κατά μήκος του κανονικού προς την επιφάνεια.

Τώρα ας αφήσουμε τις επιφάνειες $\omega(\mathbf{k})$ να έχουν μια τετραγωνική επαφή στο σημείο εκφυλισμού. Κατόπιν, όπως βλέπουμε στην Εικ.27c, f είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο της επαφής. Η περιοχή ΔS είναι ανάλογη προς αυτή την απόσταση, είναι $\Delta S \propto f^{1/2}$. Στην εν λόγω περίπτωση, η ίδια εξάρτηση από την f συμβαίνει για τη διαφορά των παραγώγων στο (68.12), δεδομένου ότι οι παράγωγες καμπύλες τέμνονται χωρίς επαφή. Σε αυτή τη περίπτωση ωστόσο,

$$\nu(f) \propto f^2, \quad (68.14)$$

και δεν υπάρχει απόκλιση στη θερμική αγωγιμότητα.

Άλλοι τύποι των σημείων εκφυλισμού μπορούν επίσης να αντιμετωπιστούν παρόμοια. *

Εάν δεν υπάρχουν σημεία εκφυλισμού στο φάσμα του φωτονίου, ο όρος (68.6) πρέπει να πληρείται για όλες τις κατευθύνσεις \mathbf{n} σε μια τουλάχιστον διακλάδωση $\omega(\mathbf{k})$ φάσματος, προκειμένου να διασφαλιστεί πεπερασμένη θερμική αγωγιμότητα από τρεις διαδικασίες φωτονίων. Διαφορετικά, η πεπερασμένη αγωγιμότητα είναι αποτέλεσμα μόνο από μεγαλύτερες τάξης (τέσσερα-φωτόνια) διεργασίες και ο όρος (68.2) δεν ισχύει. Σε χαμηλές θερμοκρασίες, η μέση ελεύθερη διαδρομή αυξάνεται και μπορεί να γίνει συγκρίσιμο με το μέγεθος L του σώματος; Η απόκλιση του ολοκληρώματος (68.5) μπορεί στη συνέχεια να κοπεί στο $f \sim 1/L$, η οποία θα καθιστούσε τη θερμική αγωγιμότητα εξαρτώμενη από την L .

§69. Θερμική αγωγιμότητα σε μονωτές. Χαμηλές θερμοκρασίες

Σε χαμηλές θερμοκρασίες ($T \ll \Theta$), η μεταφορά θερμότητας σε μονωτήρες γίνεται αρκετά διαφορετικά. Ο λόγος είναι ότι κάτω από αυτές τις συνθήκες, ο αριθμός των διεργασιών Umklapp γίνονται εκθετικά μικρές, όπως προκύπτει από τα ακόλουθα επιχειρήματα.

Η διατήρηση της οιονεί ορμής σε μια διαδικασία τριών φωτονίων με Umklapp που εκφράζεται από $k = k_1 + k_2 + b$ απαιτεί τουλάχιστον μία από τις τρεις οιονεί ορμές θα πρέπει να είναι μεγάλες; ας είναι αυτό $k_1 \sim b$. Τότε η ενέργεια $\omega_1 \sim \Theta$ και η διατήρηση της ενέργειας ($\omega = \omega_1 + \omega_2$) απαιτεί ότι η ενέργεια $\omega \sim \Theta$ πρέπει να είναι επίσης μεγάλη.

* Η συζήτηση αυτών μπορούν να βρεθούν στο αρχικό έγγραφο από τον C. Herring, *Physical Review* 95, 954, 1954.

Όταν $T \ll \Theta$, η πλειονότητα των φωτονίων έχουν ενέργειες $\sim T$ και ο αριθμός με ενέργειες $\sim \Theta$ είναι εκθετικά μικρός. Έτσι, τόσο για τη διαδικασία αποσύνθεσης των φωτονίων, όσο και για την αντίστροφη διαδικασία της συνένωσης δύο φωτονίων, οι αριθμοί αρχικών φωτονίων και συνεπώς οι αριθμοί των διαδικασιών είναι εκθετικά μικροί. Είναι εύκολο να δει κανείς, ότι στη πραγματικότητα πρόκειται για μια διαδικασία τριών φωτονίων ασήμαντη σε αυτά τα επιχειρήματα, τα οποία ισχύουν εξίσου και για τις διαδικασίες που αφορούν μεγαλύτερο αριθμό φωτονίων.

Σε αυτήν την κατάσταση, η φυσική εικόνα της μεταφοράς θερμότητας έχει ως εξής. Πολυάριθμες κανονικές συγκρούσεις φωτονίων, στην οποία η συνολική οιονεί ορμή διατηρείται, καθορίζει μόνο την «εσωτερική» ισορροπία του αερίου του φωτονίου που μπορεί ακόμη να κινείται σε σχέση με το πλέγμα με οποιαδήποτε ταχύτητα V . Ο μικρός αριθμός συγκρούσεων με Umklapp αλλάζουν τη λειτουργία διανομής ελάχιστα, αλλά καθιερώνουν μια οριστική τιμή του V ανάλογη με την κλίση θερμοκρασίας; Αυτό με τη σειρά του καθορίζει τη ροή θερμότητας. Τώρα θα δείξουμε πώς αυτή η εικόνα παρουσιάζεται στη μαθηματική λύση του προβλήματος. *

Η εξίσωση μεταγωγής/μεταφοράς γράφεται ως

$$(\partial N_{\theta} / \partial T) \mathbf{u} \cdot \nabla T = I_N(\chi) + I_U(\chi), \quad (69.1)$$

το ολοκλήρωμα της σύγκρουσης διαχωρίζεται σε τμήματα που συνδέονται με κανονικές και Umklapp συγκρούσεις. Η συνάρτηση της κατανομής ισορροπίας που αντιστοιχεί στην κίνηση του αερίου ως σύνολο με ταχύτητα V λαμβάνεται από $N_0(\omega)$ για την αντικατάσταση του επιχειρήματος ω με $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$; όταν το V είναι μικρό έχουμε

$$N_0(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) \approx N_0(\omega) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} \partial N_0 / \partial \omega. \quad (69.2)$$

Σύμφωνα με την εικόνα που περιγράφεται παραπάνω, επιδιώκουμε τη λύση της εξίσωσης (69.1) με το τύπο

$$\chi = \chi_N + \chi_U, \quad \chi_N = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}; \quad (69.3)$$

* Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο σαφής διαχωρισμός των διεργασιών Umklapp ως ένα μικρό αποτέλεσμα επιτυγχάνεται με ακρίβεια η επιλογή που περιγράφεται στη §66 για το κύτταρο βάσης στο αμοιβαίο πλέγμα, ως αποτέλεσμα του οποίου όλες οι συγκρούσεις μεταξύ μακρύ μήκους-κύματος φωτονίων μόνο με χαμηλές ενέργειες είναι φυσιολογικές.

χ_U είναι μέρος της μεταβολής στη συνάρτηση κατανομής που οφείλεται σε Umklapp διεργασίες και είναι μικρό σε σύγκριση με το χ_N . Εάν v_u και v_N δηλώνουν τις τάξεις μεγέθους των αποτελεσματικών συχνοτήτων σύγκρουσης με και χωρίς Umklapp ($v_u \ll v_N$), όταν

$$\chi_U / \chi_N \sim v_u / v_N. \quad (69.4)$$

Η αντικατάσταση στο (69.1) δίνει

$$(\partial N_0 / \partial T) \mathbf{u} \cdot \nabla T = I_N(\chi_U) + I_U(\chi_N), \quad (69.5)$$

όπου οι γραμμικοί φορείς που αντιδρούν στις λειτουργίες χ ορίζονται στο (67.17). Στο (69.5) έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $I_N(\chi_N) = 0$ και παραλείπονται $I_u(\chi_U)$ ως μια μικρή ποσότητα; Οι δύο όροι που απομένουν στα δεξιά είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, εάν (69.4) είναι έγκυρο.

Ας τονίσουμε καταρχάς, ότι όταν οι διεργασίες Umklapp έχουν παραμεληθεί και η κλίση της θερμοκρασίας δεν είναι μηδέν, η εξίσωση μεταφοράς δεν έχει καμία λύση. Εάν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (69.5) με k , ενσωματώνουμε πάνω $d^3 k / (2\pi)^3$ και αθροίσουμε όλες τις διακλαδώσεις του φάσματος φωτονίων. Δεδομένου ότι οι

κανονικές συγκρούσεις διατηρούν τη συνολική ψευδό ορμή, ο όρος $I_N(\chi_u)$ γίνεται μηδέν αφήνοντας

$$\sum_{\mathbf{g}} \int \mathbf{k}(\mathbf{u} \cdot \nabla T) \frac{\partial N_0}{\partial T} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \sum_{\mathbf{g}} \int \mathbf{k} I_U(\chi_N) \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (69.6)$$

Όταν έχουν παραμεληθεί οι διεργασίες Umklapp, η δεξιά πλευρά είναι μηδέν, ενώ η αριστερή πλευρά δεν είναι βέβαια μηδέν, το ολοκλήρωμα γίνεται μια άρτια λειτουργία, δεδομένου ότι $\omega(\mathbf{k})$ είναι άρτια και $v = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ περιττή. Αυτή η αντίφαση σημαίνει, ότι η εξίσωση μεταφοράς δεν έχει καμία λύση.

Με διεργασίες Umklapp που λαμβάνονται υπόψη ωστόσο, εξίσωση (69.6) προσδιορίζει την άγνωστη ποσότητα V στην επίλυση (69.3). Για να απλοποιηθεί ο συμβολισμός θα πρέπει να υποθέσουμε, ότι ο κρύσταλλος έχει κυβική συμμετρία. Η ανισοτροπία του κρυστάλλου τότε δεν εμφανίζεται* στα ολοκληρώματα στο (69.6) και αυτή η εξίσωση γίνεται μετά την αντικατάσταση του χ_N από (69.3),

$$\beta_1 \nabla T = -\nu_U \beta_2 T \mathbf{V}. \quad (69.7)$$

* Για κυβική συμμετρία, κάθε τανυστής τάξης δύο μειώνει σε ένα βαθμωτό: $a_{ab} = \frac{1}{3} a \delta_{ab}$, $a \equiv a_{mm}$ με τη σημείωση

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial T} \sum_{\mathbf{k}} \int \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} N_0 \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \\ \beta_2 &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial T} \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{k^2}{\omega} N_0 \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \\ T \nu_U \beta_2 &= -\frac{1}{3} \sum_{\mathbf{k}} \int \mathbf{k} \cdot I_U(\mathbf{k}) \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}; \end{aligned} \right\} \quad (69.8)$$

ο παράγοντας β διαχωρίζεται προκειμένου να απλοποιηθεί ο μεταγενέστερος τύπος.

Η εξίσωση (69.7) προσδιορίζει το V και η ροή της ενέργειας στη συνέχεια υπολογίζεται ως ολοκλήρωμα (67.4), στην οποία το N θα αντικατασταθεί από

$$\delta N_N = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} \partial N_0 / \partial \omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} (T/\omega) \partial N_0 / \partial T.$$

Τότε $q = T \beta_1 V$ και μαζί με το (69.7) δίνει $q = -\kappa \nabla T$ με τη θερμική αγωγιμότητα

$$\kappa = \beta_1^2 / \nu_U \beta_2. \quad (69.9)$$

Είναι αξιοσημείωτο, ότι σε αυτή την περίπτωση ο υπολογισμός του κ δεν απαιτεί την εξίσωση μεταφοράς (69.5) για να λυθεί, αλλά μόνο να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα (69.8).

Τα ολοκληρώματα β_1 και β_2 διέπονται από την περιοχή συχνοτήτων $\omega \sim T$, το οποίο περιέχει την πλειονότητα των φωτονίων. Εξαρτώνται από το T μόνο με ένα νόμο δύναμης. Δεδομένου, ότι μόνο ακουστικά φωτόνια μπορούν να έχουν χαμηλές ενέργειες, β_1 και β_2 πρέπει στην πράξη να αθροίζονται μόνο στη διάρκεια των τριών ακουστικών διακλαδώσεων του φάσματος. Είναι εύκολο να δούμε τότε ότι έχουμε

$$\beta_1, \beta_2 \propto T^3. \quad (69.10)$$

Η εκθετική εξάρτηση περιέχεται στο ολοκλήρωμα ν_u . Ο συγκεκριμένος τύπος του μπορεί να ληφθεί με τη βοήθεια του (67.17). Για Umklapp διεργασίες,

$$\chi_{N_1} + \chi_{N_2} - \chi_N = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{b}.$$

Για την πλειοψηφία φωτονίων $\omega \sim T$ και η συνάρτηση κατανομής $N_0 \sim 1$; Για φωτόνια με $\omega \gg T$ ωστόσο $N_0 \ll 1$. Οι παράγοντες $N_0 + 1 \sim 1$ ωστόσο δεν πρέπει να λαμβάνονται υπόψη για την εκτίμηση του ολοκληρώματος. Οι λειτουργίες

$$N_0 = e^{-\omega/T} (N_0 + 1)$$

περιέχουν παράγοντες $e^{\omega/T}$ που μπορεί να είναι μικροί εκθετικά και οι οποίοι έχουν αποφασιστική επίδραση στην εκτίμηση του ολοκληρώματος.

Έτσι, αν λάβουμε υπόψη μόνο την εκθετική εξάρτηση θερμοκρασίας του ν_u έχουμε

$$\nu_U \propto \sum_{(\mathbf{r}, \mathbf{b})} e^{-\omega/T} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d^3k d^3k_1; \quad (69.11)$$

το άθροισμα είναι πάνω από όλες τις διακλαδώσεις g, g_1, g_2 του φάσματος και πάνω από όλες τις μη-μηδενικές τιμές του \mathbf{b} που πραγματοποιούνται στις Umklapp διεργασίες. Η εξίσωση

$$\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) = \omega_{g_1}(\mathbf{k}_1) + \omega_{g_2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \quad (69.12)$$

ορίζει μία επιφάνεια πέντε διαστάσεων σε έξι-διαστάσεις kk_1 -χώρο. Ας είναι $\Delta(g, g_1, g_2)$ η ελάχιστη τιμή του $\omega_g(\mathbf{k})$ σε αυτό το υπερ-διαστάσεων; Δεδομένου ότι οι ενέργειες των φωτονίων που εμπλέκονται σε διεργασίες Umklapp είναι μεγάλες, αυτές οι τιμές είναι $\sim \Theta$. Κάθε ένα από τα ολοκληρώματα στο άθροισμα από (g) στο (69.11) είναι αναλογικό σε $\exp[-\Delta(g, g_1, g_2)/T]$. Διατηρώντας μόνο το μεγαλύτερο από αυτά, έχουμε

$$\nu_U \propto \exp(-\Delta_{\min}/T), \quad (69.13)$$

όπου Δ_{\min} είναι το μικρότερο από τα $\Delta(g, g_1, g_2)$.

Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε, ότι η θερμική αγωγιμότητα εξαρτάται ουσιαστικά από τη θερμοκρασία σύμφωνα με την εκθετική σχέση

$$\kappa \propto \exp(\Delta_{\min}/T), \quad (69.14)$$

με $\Delta_{\min} \sim \Theta$ (R.E. Peirls, 1929).

Οι υψηλότερες στη σειρά διαδικασίες που περιλαμβάνουν ένα μεγαλύτερο αριθμό φωτονίων, οδηγούν σε εξάρτηση της θερμοκρασίας ενός παρόμοιου τύπου με Δ την χαμηλότερη δυνατή τιμή της ενέργειας των αρχικών φωτονίων σε κάθε διεργασία (ή ισοδύναμα, το ήμισυ τουλάχιστον της συνολικής ενέργειας όλων των φωτονίων, αρχικά και τελικά, λαμβάνοντας μέρος στη διαδικασία). Κατ'αρχήν, μπορεί να συμβεί, ότι η τιμή αυτή είναι μικρότερη από τρεις διεργασίες τριών φωτονίων, στην περίπτωση αυτή η συνεισφορά υψηλότερων στη σειρά διεργασίες για τη θερμική αγωγιμότητα μπορεί να γίνει κυρίαρχη, παρά το γεγονός ότι ο συντελεστής του εκθέτη μειώνεται φυσικά όσο η σειρά της διαδικασίας αυξάνεται.

Σε αντίθεση, με τη συχνότητα διεργασίας Umklapp ν_u , η αποτελεσματική συχνότητα ν_N των κανονικών συγκρούσεων μειώνεται ως δύναμη της θερμοκρασίας; Πρέπει να καθορίσουμε τη σχέση προκειμένου να το χρησιμοποιήσουμε στη §71.

Κανονικές συγκρούσεις λαμβάνουν χώρα μεταξύ ακουστικών φωτονίων με $\omega \sim T$, οι οποίες αποτελούν την πλειοψηφία. Η οιονεί ορμή $k \sim \omega/u \sim T/u$. Στη σύγκρουση του ολοκληρώματος (67.17), η ενσωμάτωση είναι πάνω από μια επιφάνεια με περιοχή k^2 που διακρίνεται από τη δέλτα λειτουργία σε έναν όγκο $\sim k^2$. Στην περιοχή αυτή, οι λειτουργίες $N_0 \sim 1$ και $\omega \propto k^2$ σύμφωνα με (66.14). Ως εκ τούτου, $\nu_N \propto T^5$. Ο συντελεστής αναλογικότητας είναι περισσότερο απλά καθορισμένος από τον όρο, ότι όταν $T \sim \Theta$ η έκφραση αυτή και η εκτίμηση (68.3) πρέπει να δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα, έτσι ώστε

$$\nu_N \sim T^5/\Theta^4 M u d. \quad (69.15)$$

§70. Φωτόνια διασκορπίζονται από ακαθαρσίες

Στις §68 και §69 έχουμε υποθέσει, ότι το κρυσταλλικό πλέγμα είναι ιδανικό και ελεύθερο από ελαττώματα. Ας εξετάσουμε τώρα την πιθανή σημασία διασκόρπισης φωτονίου με άτομα πρόσμιξης όσον αφορά τη θερμική αγωγιμότητα σε μονωτές.

Σε σχέση με τα μακρύ μήκους-κύματος ακουστικά φωτόνια, η πρόσμιξη ατόμου είναι ένα σημείο ελαττώματος στο πλέγμα. Μια χαρακτηριστική ιδιότητα της διασκόρπισης από τέτοια ελαττώματα είναι ότι είναι ελαστική (η συχνότητα φωτονίων είναι αμετάβλητη) και η διατομή διασκόρπισης μειώνεται γρήγορα με τη συχνότητα, για παράδειγμα με τον αριθμό κύματος, ως k^4 *

Η σύγκρουση του ολοκληρώματος για το φωτόνιο που διασκορπίζεται από ακαθαρσίες είναι

$$C(N_{\mathbf{k}}) = N_{\text{imp}} \int w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \{N_{\mathbf{k}}(1 + N_{\mathbf{k}}) - N_{\mathbf{k}'}(1 + N_{\mathbf{k}'})\} \delta(\omega' - \omega) d^3k' / (2\pi)^3. \quad (70.1)$$

Ως συνήθως, ο πρώτος όρος στους δεσμούς δίνει τον αριθμό των γεγονότων

* Αυτή είναι μια γενική ιδιότητα των κυμάτων ήχου διασκόρπισης από εμπόδια μικρά σε σύγκριση με το μήκος κύματος; cf. FM, §76. Συγκρίνοντας επίσης την αντίστοιχη περίπτωση στη διασκόρπιση των μακρύ ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (Fields, . §79).

διασκόρπισης ανά μονάδα χρόνου, το οποίο φέρνει ένα φωτόνιο σε μια κατάσταση με μια συγκεκριμένη οιονεί ορμή k από καταστάσεις με οποιαδήποτε άλλες τιμές k' που αντιστοιχούν στην ίδια ενέργεια. Ομοίως, ο δεύτερος όρος δίνει τον αριθμό των γεγονότων διασκόρπισης που λαμβάνουν φωτόνια από αυτή την κατάσταση σε οποιαδήποτε άλλη. Αν τα άτομα πρόσμιξης είναι διατεταγμένα τυχαία και η μέση απόσταση μεταξύ τους είναι πολύ μεγαλύτερη από το πλάτος διασκόρπισης, τότε διαφορετικά άτομα διασκορπίζονται ανεξάρτητα και οι πιθανότητες είναι προσθετικές. Υπό αυτές τις συνθήκες, οι οποίες έχουν θεωρηθεί στο (70.1) ο συνολικός αριθμός των γεγονότων διασκόρπισης είναι ανάλογος προς τη συγκέντρωση του ατόμου πρόσμιξης N_{imp} . Για διασκόρπιση σε ένα ανισότροπο μέσο, η συνάρτηση $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ εξαρτάται από τις κατευθύνσεις των δύο διανυσμάτων \mathbf{k} και \mathbf{k}' , αλλά η εξάρτηση της στο μέγεθος k είναι $w \propto k^4$. Στο (70.1) έχουμε θέσει $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = w(\mathbf{k}', \mathbf{k})$. Στην προσέγγιση Born αυτό προκύπτει από την μοναδιαία κατάσταση και τη μικρότητα του πλάτους διασκόρπισης, όταν δεύτεροι όροι παραμελούνται. (βλέπε QM, §126). Η προσέγγιση Born δεν είναι γενικά εφαρμόσιμη στη διασκόρπιση φωτονίων από ένα άτομο ακαθαρσίας. Σε χαμηλές

θερμοκρασίες ωστόσο, όταν μας ενδιαφέρουν φωτόνια με μικρό k , το πλάτος διασκόρπισης είναι μικρό για έναν άλλο λόγο, να είναι ανάλογο με k^2 ; Εάν όροι $\propto k^4$ είναι παραμελημένοι, έχουμε και πάλι την ίδια εξίσωση.

Τα γινόμενα $N_k N_{k'}$ στους δεσμούς στο (70.1) ακυρώνονται και μετά την αντικατάσταση $N = N_0 \delta N$ το ολοκλήρωμα σύγκρουσης γραμματικοποιήθηκε αμέσως:

$$C(N) \equiv I_{imp}(\delta N) = N_{imp} \int w(\delta N_{k'} - \delta N_k) \delta(\omega' - \omega) d^3 k' / (2\pi)^3. \quad (70.2)$$

Αυτό το ολοκλήρωμα είναι σαν w ανάλογο με k^4 . Από $\partial N_0 / \partial T \propto 1/\omega \propto 1/k$ όταν $\omega \ll T$, σε αυτή την περιοχή συχνότητας έχουμε

$$\delta N \propto k^{-5} \quad (70.3)$$

Μια παρόμοια περίπτωση έχει ήδη συμβεί στη §68; cf. (68.4). Η σχέση (70.3) οδηγεί στην απόκλιση του ολοκληρώματος για τη ροή θερμότητας. Έτσι, η παρουσία των προσμείξεων στον κρύσταλλο δεν μπορεί από μόνη της να εξασφαλίσει μια πεπερασμένη θερμική αγωγιμότητα του μονωτικού υλικού.

Αυτό δεν σημαίνει ωστόσο, ότι οι ακαθαρσίες δεν παίζουν κανένα ρόλο στον προσδιορισμό της αγωγιμότητας. Ο λόγος είναι ότι η διασκόρπιση από άτομα πρόσμιξης δεν διατηρούν την ψευδο ορμή των φωτονίων και με αυτή την έννοια μπορεί να λάβει τη θέση των Umklapp διεργασιών. Σε επαρκώς καθαρά δείγματα μπορεί να υπάρχει μία σειρά από χαμηλές θερμοκρασίες, στις οποίες η πραγματική συχνότητα ν_{imp} της διασκόρπισης από ακαθαρσίες (για φωτόνια με $\omega \sim T$) είναι ενδιάμεση μεταξύ των συχνοτήτων των φυσιολογικών και συγκρούσεων Umklapp μεταξύ των φωτονίων:

$$\nu_N \gg \nu_{imp} \gg \nu_U. \quad (70.4)$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, ο ρόλος των διεργασιών Umklapp λαμβάνονται από τη διασκόρπιση ακαθαρσίας και τις εξισώσεις (69.6)- (69.8) που εξακολουθούν να ισχύουν, αν I_U αντικαθίσταται από I_{imp} . Η θερμική αγωγιμότητα στη συνέχεια δίδεται από το (69.9) με ν_{imp} στη θέση του ν_U :

$$\kappa = \beta_1^2 / \beta_2 \nu_{imp}.$$

Σύμφωνα με το (70.2), $\nu_{imp} \propto \omega^4 \sim T^4$. Οι ποσότητες β_1 και β_2 για τα ακουστικά φωτόνια είναι ανάλογα με T^3 ; Έτσι σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\kappa \propto 1/T$.

§71. Δυναμικές αερίου του φωτονίου σε μονωτές.

Η προσέγγιση διατήρησης της ψευδό ορμής όταν η μέση ελεύθερη διαδρομή (I_N) για κανονικές συγκρούσεις είναι μικρή σε σύγκριση με εκείνη (I_U) για Umklapp διεργασίες,

$$I_N/I_U \sim v_U/v_N \ll 1, \quad (71.1)$$

καθιστά το σύστημα των φωτονίων στον κρύσταλλο σε χαμηλές θερμοκρασίες παρόμοιο από πολλές απόψεις με ένα συνηθισμένο αέριο. Οι κανονικές συγκρούσεις καθιερώνουν εσωτερική ισορροπία σε κάθε στοιχείο όγκου του αερίου (μεγάλες σε σύγκριση με I_N), το οποίο μπορεί ακόμα να κινείται με οποιαδήποτε ταχύτητα V . Εάν V και θερμοκρασία T διαφέρουν αισθητά μόνο σε αποστάσεις μεγάλες σε σύγκριση με I_N (και σε στιγμές μεγάλες σε σχέση με $1/u_N$), ένα σύστημα εξισώσεων «υδροδυναμικών» μπορεί να προέρχεται για αυτούς. Μπορούμε να προσθέσουμε αυτές στη γραμμική προσέγγιση σε σχέση με την ταχύτητα V και την κλίση της θερμοκρασίας, οι οποίες θα θεωρηθούν ως μικρές ποσότητες της ίδιας τάξης. Επιπλέον, για να απλοποιήσουμε το τύπο, μπορούμε πάλι να υποθέσουμε, ότι το κρύσταλλο έχει κυβική συμμετρία.

Μία από τις απαιτούμενες εξισώσεις εκφράζει το νόμο της διατήρησης της ενέργειας. Λαμβάνεται ότι με την αντικατάσταση της συνάρτησης διανομής (69.2) στο (67.3) και (67.4). Τα ολοκληρώματα των $\omega(k \cdot V) \partial N_0 / \partial \omega$ και των $\omega u N_0$ είναι μηδέν, όταν η ενσωμάτωση πάνω στις κατευθύνσεις του k διεξάγεται; cf η πρώτη υποσημείωση της §68. Η συνάρτηση $N_0(\omega)$ εξαρτάται από τις συντεταγμένες και το χρόνο μέσω του T . Παραμελώντας τους νόμους, οι οποίοι περιλαμβάνουν τη διεξαγωγή $V \cdot \nabla T$, βρίσκουμε

$$\beta_3 \partial T / \partial t + \beta_1 T \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (71.2)$$

όπου

$$\beta_3 = \partial E_0 / \partial T, \quad (71.3)$$

E_0 είναι η πυκνότητα ενέργειας ισορροπίας και β_1 ορίζεται στο (69.8).

Η δεύτερη εξίσωση εκφράζει (την προσέγγιση) τη διατήρηση της ορμής οιονεί. Λαμβάνεται από την εξίσωση μεταφοράς

$$\partial \mathbf{N} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{N} = C_N(\mathbf{N}) + C_U(\mathbf{N}) \quad (71.4)$$

αντικαθιστώντας \mathbf{N} με το τύπο (69.2), πολλαπλασιάζοντας με k , ενσωματώνοντας πάνω d^3k και αθροίζοντας πάνω τους τύπους του φωτονίου. Το ολοκλήρωμα του $kC_N(\mathbf{N})$ είναι μηδέν με τη διατήρηση της ψευδό ορμής σε κανονικές συγκρούσεις. Το αποτέλεσμα είναι

$$\beta_2 T \partial \mathbf{V} / \partial t + \beta_1 \nabla T = -\nu_U \beta_2 T \mathbf{V}, \quad (71.5)$$

με β_2 και ν_U που δίνονται από (69.8). Οι εξισώσεις (71.2) και (71.5) είναι οι υδροδυναμικές εξισώσεις για ένα αέριο φωτονίου σε ένα μονωτήρα.

Ο εκθετικά μικρός (σαν ν_U) όρος στα δεξιά (71.5) αντιπροσωπεύει την επίδραση των Umklapp διεργασιών. Όταν αυτός ο όρος είναι παραμελημένος, η οιονεί ορμή διατηρείται ακριβώς. Κάτω από αυτές τις συνθήκες χωρίς απόσβεση κύματα μπορούν να μεταδοθούν στο αέριο φωτονίου, ανάλογο προς στα δεύτερα ηχητικά κύματα σε ένα υπερρευστό (V. P. Peshkov 1946): Εξαλείφοντας \mathbf{V} από (71.2) και (71.5) έχουμε σε αυτή την περίπτωση

$$\partial^2 T / \partial t^2 = (\beta_1^2 / \beta_2 \beta_3) \Delta T, \quad (71.6)$$

δηλαδή την κυματική εξίσωση που περιγράφει την διάδοση των συγκρούσεων θερμοκρασίας με ταχύτητα

$$u_2 = (\beta_1^2 / \beta_2 \beta_3)^{1/2}. \quad (71.7)$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι συνεισφορές προς τα ολοκληρώματα $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ σε χαμηλές θερμοκρασίες προέρχονται σχεδόν αποκλειστικά από τις ακουστικές διακλαδώσεις του φάσματος. Για γραμμικές σχέσεις διασποράς $\omega(k)$, αυτά τα ολοκληρώματα είναι ανάλογα προς T^3 ; Η ταχύτητα (71.7) είναι τότε ανεξάρτητη της θερμοκρασίας και η ίδια σειρά όπως η ταχύτητα του ήχου. *

Μέχρι στιγμής έχουμε θεωρήσει ότι το κρύσταλλο είναι πεπερασμένου μεγέθους. Σε χαμηλές θερμοκρασίες, όταν η μέση ελεύθερη διαδρομή του φωτονίου αυξάνεται ταχέως μια κατάσταση μπορεί πράγματι να συμβεί κατά την οποία η μέση ελεύθερη

διαδρομή γίνεται συγκρίσιμη με ή ακόμη πολύ μεγαλύτερη από το μέγεθος L του κρυστάλλου. Αυτό ισχύει ιδίως για την εκθετικά αυξανόμενη I_U .

Ας εξετάσουμε τη μεταφορά θερμότητας σε ένα μονωτή με $I_U \gg L$ (η κατάσταση θα καθοριστεί ακριβέστερα παρακάτω), αλλά ακόμα $I_N \ll L$; Η τελευταία ανισότητα μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της υδροδυναμικής των φωτονίων (J. A. Sussmann and A. Thellung 1963, R. N. Gurzhi 1964).

Λόγω των μικροσκοπικών ανωμαλιών της κρυσταλλικής επιφάνειας, τα φωτόνια συνήθως αντανακλώνται από αυτό τυχαία (ή διάχυτα); Αυτό σημαίνει, ότι η μακροσκοπική ταχύτητα V του αερίου των φωτονίων είναι μηδέν στην επιφάνεια.

* Σε ένα ισότροπο υγρό με ένα φάσμα ενέργειας φωτονίου (υπερρευστό ήλιο σε χαμηλές θερμοκρασίες) υπάρχει μόνο μια ακουστική διακλάδωση, στην οποία $\omega = uk$. Τότε $\beta_1 / \beta_2 = u^2$, $\beta_1 / \beta_3 = \frac{1}{3}$ και η ταχύτητα του δεύτερου ήχου είναι $u_2 = u/3$.

Εξισώσεις (71.2) και (71.5) ωστόσο, δεν επιτρέπουν μια τέτοια οριακή κατάσταση; Οι λύσεις τους μπορεί να ικανοποιήσουν μόνο την κατάσταση που η κανονική συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδέν στην επιφάνεια. Όπως στις υδροδυναμικές συνήθων υγρών, η κατάσταση του ορίου που η εφαιπτόμενη ταχύτητα της συνιστώσας είναι μηδέν απαιτεί το ιξώδες να λαμβάνεται υπόψη.

Στη σταθερή κατάσταση, η εξίσωση (71.2) δίνει $\text{div } \mathbf{V} = 0$. Η περίληψη του ιξώδους προσθέτει έναν όρο σε ΔV στην δεξιά πλευρά του (71.5), παρόμοιο με τον αντίστοιχο όρο στην εξίσωση Navier-Stokes για ένα συνηθισμένο ιξώδες υγρό. Σε σταθερή κατάσταση η εξίσωση είναι

$$(\beta_1 / \beta_2 T) \nabla T = \mu \Delta \mathbf{V} - \nu_U \mathbf{V}. \quad (71.8)$$

Η ποσότητα μ έχει τις διαστάσεις $[L^2 / T]$ και ενεργεί ως το κινηματικό ιξώδες του αερίου του φωτονίου.* Ο υπολογισμός του απαιτεί στην αρχή τη λύση της εξίσωσης της αντίστοιχης μεταφοράς. Ωστόσο, για μία τάξη μεγέθους εκτίμησης που μπορούμε να

χρησιμοποιήσουμε το συνήθη τύπο από την κινητική θεωρία των αερίων, σύμφωνα με την οποία

$$\mu \sim l_N \bar{v} \sim u^2 / \nu_N. \quad (71.9)$$

Το μέγεθος των αποτελεσμάτων είναι κυρίαρχα, όταν ο όρος $\nu_U V$ στο (71.8) είναι αμελητέα σε σύγκριση με $\mu \Delta V$. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη μεταφορά θερμότητας κατά μήκος μιας κυλινδρικής ράβδου με διάμετρο R , η οποία είναι το χαρακτηριστικό μήκος όσον αφορά κκκκκκκκκκ της ταχύτητας V , ώστε $\Delta V \sim V/R^2$. Βλέπουμε ότι ο όρος $\nu_U V$ είναι αμελητέος, αν $\mu/R^2 \gg \nu_U$. Με την εκτίμηση (71.9), αυτός ο όρος γίνεται $l_U \gg l_{eff}$, όπου

$$l_{eff} \sim R^2 / l_N \quad (71.10)$$

ενεργεί ως ένα αποτελεσματικό φωτόνιο μέσης ελεύθερης διαδρομής στο πεπερασμένο σώμα. Αν $l_{eff} \gg l_U$, από την άλλη πλευρά, το μέγεθος του σώματος είναι ασήμαντο και (69.14) είναι έγκυρο.

* Λαμβάνοντας υπόψη το πρόβλημα καθαρά ποιοτικά, εδώ παραμελούμε εντελώς την ανισοτροπία του κρυστάλλου. Θα πρέπει να θυμόμαστε, ότι ακόμη και με κυβική συμμετρία, το ιζώδες δεν περιγράφεται με έναν βαθμιδωτό συντελεστή, αλλά από ένα τανυστή βαθμού τέσσερα έχοντας περισσότερες από μία ανεξάρτητη συνιστώσα.

Η διαδικασία της μεταφοράς θερμότητας κατά μήκος της ράβδου, όταν $l_U \gg l_{eff}$ είναι μία ροή Poiseuille ενός ιζώδους αερίου φωτονίου και μπορεί να περιγραφεί από μια αποτελεσματική θερμική αγωγιμότητα, η οποία καθορίζει την ενεργειακή ροή - κ_{eff} και ∇T , όπου ∇T είναι η βαθμίδα θερμοκρασίας κατά μήκος της ράβδου. Αυτή η ροή μπορεί να εκτιμηθεί αντικαθιστώντας (71.10) στην έκφραση $\kappa_{eff} \sim C u l_{eff}$. Σε χαμηλές θερμοκρασίες, η ειδική θερμότητα πλέγμα $C \propto T^3$ και $l_N \sim u / \nu_N \propto T^{-5}$ σύμφωνα με (69.15). Η αποτελεσματική θερμική αγωγιμότητα είναι επομένως

$$\kappa_{eff} \propto R^2 T^8 \quad \text{when} \quad R^2 / l_U \ll l_N \ll R; \quad (71.11)$$

αυτό μειώνεται με πτώση της θερμοκρασίας.

Τέλος, σε ακόμα χαμηλότερες θερμοκρασίες, όταν επίσης $l_N \gg R$, συγκρούσεις μεταξύ φωτονίων γίνονται ασήμαντες, όπως στην περίπτωση Knudsen για ιδιαίτερα

αραιά συνήθη αέρια. Ο ρόλος της μέσης ελεύθερης διαδρομής λαμβάνεται στη συνέχεια με τη R μέγεθος του σώματος και η αποτελεσματική θερμική αγωγιμότητα είναι

$$\kappa_{\text{eff}} \sim CuR \propto T^3 R \quad (71.12)$$

(H. B. Casimir 1938).

§72. Ήχος απορρόφησης σε μονωτές. Μακριά κύματα

Η φύση του ήχου απορρόφησης σε μονωτή κρυστάλλων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη σχέση μεταξύ του μήκους κύματος και της μέσης ελεύθερης διαδρομής l των θερμικών φωτονίων. Εάν το μήκος κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο από το l ($fl \ll 1$, όπου f είναι ο ήχος διανύσματος του κύματος), η μακροσκοπική θεωρία που βασίζεται στις εξισώσεις της θεωρίας ελαστικότητας είναι έγκυρη (βλέπε *TE*, §35), σύμφωνα με την οποία ο συντελεστής απορρόφησης ήχου περιλαμβάνει δύο όρους, οι οποίοι αντιστοίχως καθορίζονται από τη θερμική αγωγιμότητα και το ιξώδες του μέσου. Και οι δύο όροι είναι ανάλογοι με το τετράγωνο της συχνότητας. Στόχος μας εδώ είναι να βρούμε την εξάρτησή τους στη θερμοκρασία.

Η θερμική αγωγιμότητα συνεισφορά στον συντελεστή απορρόφησης του ήχου δίνεται στην τάξη μεγέθους από *

$$\gamma_{\text{th}} \sim \omega^2 \kappa T \alpha^2 \rho / \mu C^2, \quad (72.1)$$

όπου α είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής του σώματος, C η ειδική θερμότητα ανά μονάδα όγκου και ρ η πυκνότητα. Σε υψηλές θερμοκρασίες $T \gg \Theta$ της θερμικής αγωγιμότητας $\kappa \propto 1/T$, ενώ το C και α είναι ανεξάρτητα από τη θερμοκρασία: βλέπε *SP* 1, §§65.67. Σε αυτό το εύρος, το γ_{th} είναι ανεξάρτητο από τη θερμοκρασία. Σε χαμηλές θερμοκρασίες, η εξάρτηση θερμοκρασίας της διέπεται κυρίως (σε ένα ιδανικό πλέγμα) από τη θερμική αγωγιμότητα, η οποία αυξάνει εκθετικά, καθώς το T μειώνεται.

Ας καθορίσουμε τώρα το μέρος του ιξώδους του συντελεστή ήχου απορρόφησης (A.I. Akhiezer 1938). Το εξωτερικό πεδίο ήχου μεταβάλλει τη σχέση διασποράς του φωτονίου προκαλώντας μια μακροσκοπική παραμόρφωση του κρυσταλλικού πλέγματος. Το μήκος κύματος των θερμικών φωτονίων είναι μικρό σε σύγκριση με το μήκος κύματος του ήχου; Επομένως η παραμόρφωση μπορεί να θεωρηθεί σαν προστασία σε

σχέση με ένα θερμικό φωτόνιο, δηλαδή η τελευταία μπορεί να θεωρηθεί σαν να είναι σε ένα πλέγμα που εξακολουθεί να είναι κανονικό, αλλά έχει μεταβληθεί ελαφρά σε περιόδους. Στην πρώτη προσέγγιση σε σχέση με την μικρή παραμόρφωση, η συχνότητα του φωτονίου $\omega(\mathbf{k})$ σε ένα τέτοιο πλέγμα σχετίζεται με την αξία $\omega^{(0)}\mathbf{k}$ στο μη παραμορφωμένο πλέγμα

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega^{(0)}(\mathbf{k})(1 + \lambda_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}), \quad (72.2)$$

όπου

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right)$$

είναι ο τανυστής ελέγχου και U το διάνυσμα μετατόπισης. Ο χαρακτηριστικός τανυστής $\lambda_{\alpha\beta}$ του κρυστάλλου γενικά εξαρτάται από το \mathbf{k} ; Για μεγάλου μήκους κύματος ακουστικά φωτόνια με μία γραμμική σχέση διασποράς, ωστόσο δεν εξαρτάται από το μέγεθος του \mathbf{k} .

* Δίνουμε τον συντελεστή απορρόφησης ανά μονάδα μήκους διαδρομής. Οι εξαρτήσεις συχνοτήτων και θερμοκρασίας είναι οι ίδιες για τον συντελεστή ανά μονάδα χρόνου, εφόσον οι δύο συντελεστές διαφέρουν μόνο με ένα σταθερό παράγοντα, την ταχύτητα του ήχου.

Οι παρενθέσεις στο (72.2) πρέπει επίσης να περιέχουν έναν όρο της μορφής $\lambda \text{curl } U$ που εκφράζει το ασήμαντο γεγονός ότι, εάν η παραμόρφωση προκαλεί περιστροφή ενός στοιχείου όγκου του πλέγματος ($\text{curl } U \neq 0$), αυτό αλλάζει την κατεύθυνση των αξόνων (το αμοιβαίο πλέγμα) σε σχέση με την οποία η ψευδό ορμή ενός φωτονίου στη σχέση διασποράς είναι να προσδιοριστεί; Ο όρος $\lambda \text{curl } U$ θα εκπροσωπήσει την αντίστοιχη μεταβολή στο \mathbf{k} . Δεν έχουμε γράψει αυτόν τον όρο στο (72.2), εφόσον είναι προφανές εκ των προτέρων, ότι δεν μπορεί να επηρεάσει την απορρόφηση ενέργειας στο ηχητικό κύμα που μας απασχολεί εδώ: Το πραγματικό φυσικό φαινόμενο (απαγωγή) δεν μπορεί να εξαρτάται από το διάνυσμα $\text{curl } U$, το οποίο διαφέρει από το μηδέν ακόμη και για μια απλή περιστροφή σώματος ως σύνολο.

Η αλλαγή στη συνάρτηση της διανομής φωτονίου λόγω της παραμόρφωσης του πλέγματος δίνεται από την εξίσωση μεταφοράς

$$(\partial N / \partial \omega) \dot{\omega} + (\partial N / \partial T) \dot{T} = C(N), \quad (72.3)$$

όπου $C(N)$ είναι η σύγκρουση του ολοκληρώματος φωτόνιο-φωτόνιο (67.6) και T ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας σε ένα δεδομένο σημείο στον κρύσταλλο που

απαραίτητα καταλήγει από την παραμόρφωση. Γραμματικοποιώντας την εξίσωση αυτή με τον συνήθη τρόπο και χρησιμοποιώντας τη λειτουργία χ που ορίζεται από (67.15) μπορούμε να το μειώσουμε στο τύπο

$$\omega \frac{\partial N_0}{\partial \omega} (\lambda_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta} - \dot{T}/T) = I(\chi), \quad (72.4)$$

όπου $I(\chi)$ είναι η γραμματικοποιημένο σύγκρουση του ολοκληρώματος (67.17). Από την αριστερή πλευρά, το παράγωγο ω έχει μεταμορφωθεί μέσω του (72.2); Ο εκθέτης (0) στην ατάραχη συχνότητα παραλείπεται εδώ και στο εξής.

Τα παράγωγα T μπορούν κατ' αρχήν να εκφραστούν σε όρους του ίδιου ταυυστή $\lambda_{\alpha\beta}$. Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της εξίσωσης (72.4) με ω , ενσωματώνοντας σε k -χώρο και αθροίζοντας όλες τις διακλαδώσεις του φάσματος των φωτονίων, μειώνει την δεξιά πλευρά στο μηδέν, λόγω της διατήρησης της ενέργειας σε συγκρούσεις. Η αριστερή πλευρά δίνει

$$\dot{T}/T = \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta}, \quad (72.5)$$

όπου $\lambda_{\alpha\beta}$ είναι ο ταυυστής κατά μέσο όρο $\omega^2 \partial N_0 / \partial \omega$. Και στις δυο περιορισμένες περιπτώσεις της υψηλής και χαμηλής θερμοκρασίας $\lambda_{\alpha\beta}$ είναι ανεξάρτητες από τη θερμοκρασία: Όταν $T \gg \theta$, τα σημαντικά φωτόνια στο μέσο όρο είναι εκείνα με τη θερμοκρασία ανεξάρτητη οιονεί ορμή $k \sim k_{\max} \sim 1/d$ και όταν $T \ll \theta$ τα μακρύ μήκους-κύματος ακουστικά φωτόνια είναι τα σημαντικά με $\lambda_{\alpha\beta}$ ανεξάρτητα του k , έτσι ώστε ο μέσος όρος να μην προκαλεί πάλι καμία εξάρτηση στην θερμοκρασία.

Με $\lambda_{\alpha\beta} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}$ γράφουμε την εξίσωση μεταφοράς ως

$$\omega (\partial N_0 / \partial \omega) \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta} = I(\chi). \quad (72.6)$$

Στη συνέχεια, παράγουμε έναν τύπο για τη διάχυση της ενέργειας σε ένα μη ισορροπημένο φυσικό αέριο φωτονίου. Ξεκινάμε από την έκφραση για την εντροπία ανά μονάδα όγκου ενός αερίου Bose:

$$S = \sum_{\mathbf{k}} \int [(N + 1) \log(N + 1) - N \log N] d^3k / (2\pi)^3 \quad (72.7)$$

(βλέπε SP 1, §55). Η διαφοροποίηση ως προς το χρόνο δίνει

$$\dot{S} = \sum_{\mathbf{k}} \int \dot{N} \log \frac{N+1}{N} d^3k / (2\pi)^3. \quad (72.8)$$

Αντικαθιστώντας εδώ N από το ολοκλήρωμα $C(N)$ (cf. §4) και μετονομάζοντας κατάλληλα τους μεταβλητές k, k_1 και k_2 σε δύο όρους (67.6), μπορούμε να βάλουμε S στον τύπο.

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2, k_3} \int w(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \log \frac{(N_1 + 1)N_2N_3}{N_1(N_2 + 1)(N_3 + 1)} \times \\ \times [(N_1 + 1)N_2N_3 - N_1(N_2 + 1)(N_3 + 1)] d^3k_1 d^3k_2 / (2\pi)^6.$$

Πολλαπλασιασμός με T δίνει dissipative λειτουργία, δηλαδή η ενέργεια που καταναλώνεται ανά μονάδα χρόνου και όγκου. Αντικαθιστώντας $N = N_0 + \delta N$ με δN στον τύπο (67.15) και κρατώντας τους πρώτους (τετραγωνικούς) όρους στην επέκταση των αρμοδιοτήτων του δN , βρίσκουμε

$$T\dot{S} = \frac{1}{2T} \sum_{k_1, k_2, k_3} \int w(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times \\ \times (N_{01} + 1)N_{02}N_{03}(\chi_1 - \chi_2 - \chi_3)^2 d^3k_1 d^3k_2 / (2\pi)^6. \quad (72.9)$$

Ο παραπάνω τύπος είναι επαρκής για να προσδιοριστεί η εξάρτηση της θερμοκρασίας του συντελεστή απορρόφησης ήχου. Ας εξετάσουμε πρώτα το φάσμα των υψηλών θερμοκρασιών.

Σε αυτή την περίπτωση, η σύγκρουση του ολοκληρώματος $I(\chi)$ περιέχει τη θερμοκρασία ως παράγοντα T^2 (βλέπε την αρχή της §68). Από την αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς (72.6) έχουμε $\omega \partial N_0 / \partial \omega \approx -T/\omega$ και για την πλειοψηφία των φωτονίων η συχνότητα $\omega \sim \Theta$ είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία. Για αυτές τις συχνότητες συνεπώς

$$\chi \sim (1/T) \lambda_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta}.$$

Από το (72.9) στο οποίο πρέπει να θέσουμε $N_0 \approx T/\omega \gg 1$, διαπιστώνουμε τώρα ότι η dissipative λειτουργία είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία. Το ίδιο ισχύει και για το συντελεστή απορρόφησης που λαμβάνεται με την κατάδυση..... λειτουργία από τη ροή ενέργειας στο ηχητικό κύμα, η οποία είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία. Όταν $T \gg \Theta$, ωστόσο τόσο το τμήμα του ιξώδους, όσο και η θερμική αγωγιμότητα, μέρος του συντελεστή απορρόφησης ήχου είναι ανεξάρτητα από τη θερμοκρασία.

Σε χαμηλές θερμοκρασίες υπάρχει πρώτα απ' όλα μια θεμελιώδη διαφορά από το πρόβλημα της θερμικής αγωγιμότητας: ο συντελεστής του ήχο απορρόφησης είναι

πεπερασμένος, ακόμη και όταν οι Umklapp διεργασίες (των οποίων η συχνότητα είναι μικρή σε χαμηλές θερμοκρασίες) έχουν παραμεληθεί. Στην περίπτωση της θερμικής αγωγιμότητας, η απουσία οποιασδήποτε λύσης της εξίσωσης μεταφοράς, όταν οι Umklapp παραμελούνται φάνηκε από την αντίφαση που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της εξίσωσης αυτής με k και την ένταξη σε όλο το φάσμα του φωτονίου: Η δεξιά πλευρά είναι τότε μηδέν, αλλά στην αριστερή πλευρά δεν είναι σίγουρα μηδέν; cf. (69.6). Ωστόσο για την εξίσωση (72.6), η αντίφαση δεν συμβαίνει: εφόσον από την αριστερή πλευρά είναι μια ακόμη λειτουργία του k , γίνεται μια περιττή λειτουργία για τον πολλαπλασιασμό με k και εξαφανίζεται στην ένταξη πάνω από d^3k . Εδώ υποθέτουμε, ότι το ολοκλήρωμα του όρου που περιέχει το χειριστή της Umklapp διεργασίας, δηλαδή $kI_U(\chi)$ είναι επίσης μηδέν. Δεδομένου ότι αυτό δεν εξασφαλίζεται από κανένα νόμο διατήρησης, μια συγκεκριμένη συνθήκη επιβάλλεται στη λύση της εξίσωσης μεταφοράς: Η συνάρτηση $\chi(k)$ πρέπει να είναι άρτια στο k (και $kI_U(\chi)$ είναι τότε μια περιττή συνάρτηση, αφού είναι εύκολο να αποδειχθεί, ότι ο φορέας I δεν αλλάζει την ισοτιμία του χ). Αυτή η προϋπόθεση εξαλείφει την αυθαιρεσία που οφείλεται στην ύπαρξη (σε αντίθεση με τις Umklapp διεργασίες) μιας «επιπλέον» λύσης του τύπου $\chi = k \cdot \delta V$, μια περιττή συνάρτηση του k και εξασφαλίζει μια σωστή δίοδο στην οριακή περίπτωση, όπου οι διαδικασίες αυτές είναι απύουσες.

Όταν $T \ll \Theta$, φωτόνια με ενέργεια $\omega \sim T$ είναι τα πιο σημαντικά στη σύγκρουση του ολοκληρώματος (και στην ----- λειτουργία). Αυτές είναι μακρύ μήκους-κύματος φωτόνια στις ακουστικές διακλαδώσεις του φάσματος; Η συχνότητά τους ποικίλλει γραμμικά με k και έχουν ως εκ τούτου $k \sim T/u$. Σύμφωνα με το (66.14) η λειτουργία w στο ολοκλήρωμα (67.17) για συγκρούσεις τέτοιων φωτονίων είναι $w \propto k_1 k_2$. Η συνάρτηση κατανομής N_0 εξαρτάται μόνο από την αναλογία ω/T , έτσι ώστε $N_0 \sim 1$, όταν $\omega \sim T$. Η ενσωμάτωση είναι $d^3k = k_1^2 dk_1 d\Omega_1$ και για k_1 από μία περιοχή $\sim T$. Κάθε παράγοντας k , k_1 , k_2 συμβάλλει επομένως σε ένα T παράγοντα στο ολοκλήρωμα και η δέλτα λειτουργία δίνει έναν παράγοντα $1/T$. Έτσι το σύνολο ολοκληρώματος ως προς την εξάρτηση θερμοκρασίας του υπολογίζεται ως χT^4 . Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς (72.6) είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία όταν $\omega \sim T$. Ως εκ τούτου έχουμε, όταν $\omega \sim T$,

$$\chi \propto T^{-4} \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta}$$

Μια αντίστοιχη εκτίμηση του ολοκληρώματος (72.9) οδηγεί στη συνέχεια στο αποτέλεσμα, ότι η ποσοτικομηχανική λειτουργία και συνεπώς το τμήμα του ιξώδους του συντελεστή απορρόφησης ήχου είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το T . Έτσι

$$\gamma_{vi} \propto \omega^2/T \quad \text{when } T \ll \Theta. \quad (72.10)$$

Η απουσία οποιαδήποτε ανάγκης για Umklapp διεργασίες έχει το αποτέλεσμα ότι αυτό το μέρος του συντελεστή απορρόφησης αυξάνεται μόνο από ένα νόμο δυνάμεως με μειωμένη θερμοκρασία όχι εκθετική.

Η χρήση της λειτουργίας διασκόρπισης στην προηγηθείσα ανάλυση κατέστησε δυνατό να αποφευχθεί την έκφραση του ιξώδες τανυστή στρες στον κρύσταλλο από την άποψη της λειτουργίας διανομής φωτονίου. Αυτό δεν είναι ένα ασήμαντο πρόβλημα, επειδή η πραγματική ροή ορμής του τανυστή εμπλέκεται και αυτή η ορμή δεν είναι η ίδια με την οιονεί ορμή των φωτονίων. Θα δείξουμε πώς αυτή η έκφραση μπορεί στη συνέχεια να προέρχεται από τον τύπο της συνάρτησης dissipative.

Για να γίνει αυτό, θα αρχίσουμε πάλι από το ολοκλήρωμα (72.8) και τώρα γράφουμε σε αυτό N ως έκφραση στα αριστερά της εξίσωσης μεταφοράς (72.6). Ο λογάριθμος του ολοκληρώματος είναι γραμμένος στο τύπο (βλέπε (67.16)).

$$-\log \frac{N}{N+1} = -\log \left[\frac{N_0}{N_0+1} \left(1 + \frac{\chi}{T} \right) \right] \approx \frac{\omega - \chi}{T}.$$

Το αποτέλεσμα είναι

$$T\dot{S} = \sum_{\mathbf{k}} \int \omega \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \delta N \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \dot{U}_{\alpha\beta}, \quad (72.11)$$

όπου $\delta N = -\chi \partial N_0 / \partial \omega$; Ο όρος με το παράγοντα ω στη θέση του χ είναι πανομοιότυπα μηδέν, από τον ορισμό του $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$. Αντί $\bar{\lambda}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta}$, μπορούμε εδώ να θέσουμε απλά $\lambda_{\alpha\beta}$, αφού το ολοκλήρωμα που περιέχει το σταθερό παράγοντα $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ είναι μηδέν με την περαιτέρω προϋπόθεση (67.14) που ισχύει για δN .

Η ποσοτικομηχανικό συνάρτηση (ανά μονάδα όγκου) μπορεί να εκφραστεί με όρους του ιξώδους τανυστή στρες $\sigma'_{\alpha\beta}$ ως $\sigma'_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}$; cf. TE, §34. Μια σύγκριση με (72.11) δίνει την ακόλουθη έκφραση για το ιξώδες τανυστή στρες:

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \sum_{\mathbf{k}} \int \omega \lambda_{\alpha\beta} \delta N \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (72.12)$$

(V. L. Gurevich 1980)

§73. Ήχος απορρόφηση σε μονωτές. Σύντομα κύματα

Στην αντίθετη περίπτωση σύντομων μήκων κύματος, $fl \gg 1$, η διαδικασία μετρίασης του ήχου κύματος μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της απορρόφησης ατομικών κβάντων ήχου, όταν συγκρούονται με θερμικά φωτόνια (L. D. Landau and Yu. B. Rumer, 1937). Για αυτή τη θεραπεία/κατεργασία για να είναι επιτρεπτή, η ενέργεια και η ορμή των θερμικών φωτονίων πρέπει να ορίζονται με επαρκή ακρίβεια: Όταν αλλάξε από την απορρόφηση του κβαντικού ήχου, θα πρέπει να έρχονται σε μια σειρά έξω από την κβαντική αβεβαιότητα λόγω της πεπερασμένης μέσης ελεύθερης διαδρομής και αυτό διασφαλίζεται από την ανισότητα $fl \gg 1$. Στην πράξη, μια τέτοια κατάσταση μπορεί να συμβεί μόνο σε χαμηλές θερμοκρασίες, όταν η μέση ελεύθερη διαδρομή γίνεται επαρκώς μεγάλη.

Στην πρώτη προσέγγιση, δηλαδή όταν οι διεργασίες που απαιτούν το μικρότερο αριθμό φωτονίων θεωρούνται, έχουμε τρεις διεργασίες φωτονίων:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{f} = \mathbf{k}_2, \quad \omega_1 + \omega = \omega_2, \quad (73.1)$$

όπου ω και f είναι η ενέργεια και η ...ορμή του ήχου της κβαντικής μηχανικής, ενώ ω_1 , k_1 και ω_2 , k_2 ανήκουν σε θερμικά φωτόνια. Το τελευταίο είναι ω_1 , $\omega_2 \sim T$, k_1 , $k_2 \sim T/u$. Θα υποθέσουμε ότι

$$\hbar\omega \ll T. \quad (73.2)$$

Τότε ω_1 , k_1 και ω_2 , k_2 είναι μεγάλες σε σύγκριση με ω και f αντίστοιχα.

Όπως έχουμε δει στη §68, οι νόμοι διατήρησης (73.1) μπορούν να τηρούνται μόνο εάν η ταχύτητα του θερμικού φωτονίου υπερβαίνει εκείνη του ήχου κβάντα που απορροφάται (ή που εκπέμπεται). Χωρίς να υπεισέλθουμε σε μια συζήτηση για τις διάφορες δυνατές περιπτώσεις, θα υποθέσουμε ότι το ηχητικό κύμα δεν είναι «διαμηκές» (δηλαδή δεν αντιστοιχεί στην ακουστική διακλάδωση του φάσματος του φωτονίου για την οποία η ταχύτητα είναι η μεγαλύτερη) και ότι η κατάσταση που αναφέρεται μπορεί επομένως να πληρείται. Δεδομένου ότι ω και f είναι μικρά, τα αρχικά και τελικά θερμικά φωτόνια ανήκουν γενικά στην ίδια διακλάδωση του ακουστικού φάσματος φωτονίου: Σε χαμηλές θερμοκρασίες είναι μακρύ μήκους-κύματος φωτόνια.

Οι πιθανότητες της εκπομπής φωτονίου ή απορρόφησης σε μία διαδικασία τριών φωτονίων δίνεται από (66.9) ή (66.11). Η κατοχή αριθμών $N_1=N(k_1)$ και $N_2=N(k_2)$ δίνονται από την συνάρτηση κατανομής ισορροπίας Planck (67.9). Ένα μακροσκοπικό κύμα ήχου αντιστοιχεί σε ένα πολύ μεγάλο αριθμό κατοχής για μία δεδομένη κατάσταση φωτονίου f ; Συγκρίνοντας το με αυτό, η ενότητα είναι φυσικά αμελητέα. Παραλείποντας τον συντελεστή $N(f)$ παίρνουμε την πιθανότητα ανά ήχο κβαντικής.

Έτσι, η πιθανότητα της απορρόφησης ενός ήχου κβαντικής σε συγκρούσεις του με θερμικά φωτόνια που έχουν όλες τις δυνατές τιμές του k_1 δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$\int A k_1 k_2 f N_1 (N_2 + 1) \delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) d^3 k_1 / (2\pi)^3. \quad (73.3)$$

Η πιθανότητα της αντίστροφης διεργασίας της εκπομπής ενός φωτονίου f από όλα τα πιθανά φωτόνια k_2 είναι

$$\int A k_1 k_2 f N_2 (N_1 + 1) \delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) d^3 k_1 / (2\pi)^3. \quad (73.4)$$

Η λειτουργία w στο (66.9) και (66.11) είναι γραμμένη σύμφωνα με το (66.14) με το τύπο $A k_1 k_2 f$, και τα τρία φωτόνια είναι μεγάλου μήκους-κύματος (το A είναι μια λειτουργία/συνάρτηση) των κατευθύνσεων όλων των φωτονίων). Η απορρόφηση των φωτονίων (το σχετικό ποσοστό μείωσης του αριθμού των φωτονίων) καθορίζεται από τη διαφορετικότητα των δύο αυτών πιθανοτήτων. Δεδομένου, ότι η συχνότητα ω είναι μικρή σε σύγκριση με ω_1 και ω_2 έχουμε

$$N_1 (N_2 + 1) - (N_1 + 1) N_2 = N_1 - N_2 = - (\partial N_1 / \partial \omega_1) \omega.$$

Ο συντελεστής απορρόφησης είναι ως εκ τούτου

$$\gamma \propto \omega f \int A k_1 k_2 |\partial N_1 / \partial \omega_1| \delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) d^3 k_1. \quad (73.5)$$

Ενδιαφερόμαστε για την εξάρτηση αυτής της ποσότητας στον ήχο συχνότητας ω και στη θερμοκρασία T του κρυστάλλου. Διέπεται εξ ολοκλήρου από το γεγονός, ότι όλες οι συχνότητες στο (73.5) είναι πρώτης τάξης ομογενούς λειτουργίες των διανυσμάτων κύματος. Για να απλουστεύσουμε τη συζήτηση, είναι σημαντικό να ληφθεί $\omega = Uf$, $\omega_1 = uk_1$, $\omega_2 = uk_2$, όπου U και u είναι ταχύτητες ανεξάρτητες από την κατεύθυνση. Δεδομένου, ότι f είναι μικρό, μπορούμε να βάλουμε $k_1 \approx k_2$. Για τον ίδιο λόγο,

$$\omega_2 - \omega_1 \approx (\partial\omega_1/\partial\mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{f} = u\mathbf{f} \cos \theta = \omega(u/U) \cos \theta,$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ της \mathbf{f} και \mathbf{k} . Τότε

$$\delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) = \frac{1}{\omega} \delta\left(1 - \frac{u}{U} \cos \theta\right),$$

και το ολοκλήρωμα (73.5) γίνεται

$$\gamma \propto \omega \int A k_1^2 \left| \frac{\partial N_1}{\partial \omega} \right| \delta\left(1 - \frac{u}{U} \cos \theta\right) k_1^2 dk_1 d \cos \theta, \quad (73.6)$$

ή μετά την αφαίρεση της δέλτα λειτουργίας,

$$\gamma \propto \omega \int k_1^4 \left| \partial N_1 / \partial k_1 \right| dk_1.$$

Δεδομένου, ότι το N_1 είναι μια συνάρτηση μόνο της αναλογίας $\omega_1/T \approx uk_1/T$ (λόγω της ταχείας σύγκλισης, η ολοκλήρωση όσον αφορά το k_1 μπορεί να επεκταθεί στο άπειρο), το υπόλοιπο ολοκλήρωμα είναι ανάλογο με T^4 . Έτσι

$$\gamma \propto \omega T^4, \quad (73.7)$$

Εδώ, ο συντελεστής του ήχου απορρόφησης μεταβάλλεται γραμμικά με τη συχνότητα.

Με την κατάσταση (73.2) όπως θεωρήθηκε παραπάνω, ο μηχανισμός του ήχου εξασθένησης στην ερώτηση είναι ακριβώς ανάλογη με την απόσβεση Landau στο πλάσμα. Τα ηλεκτρόνια «συντονισμού» εδώ εκπροσωπούνται από φωτόνια που κινούνται σε φάση με το ηχητικό κύμα. Υπάρχει συνεπώς μια φυσική ομοιότητα μεταξύ του (73.6) και του τύπου της Landau απόσβεσης (30.1).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

Quantum ΥΓΡΑ

§74. Εξίσωση μεταφοράς για οιονεί σωματίδια σε ένα υγρό Fermi

Η εξίσωση μεταφοράς για οιονεί σωματίδια σε ένα κανονικό υγρό Fermi έχει ήδη συζητηθεί (SP 2, §§4 και 5) σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό των ταλαντώσεων σε αυτό; Το ολοκλήρωμα σύγκρουσης στην εξίσωση ήταν ασήμαντο. Θα συνεχίσουμε τώρα τη συζήτηση για την εξίσωση μεταφοράς με μια ματιά στην εφαρμογή του σε dissipative διαδικασίες που αφορούν ειδικά τις συγκρούσεις.

Τα οιονεί σωματίδια σε ένα υγρό Fermi έχουν περιστροφική κίνηση 1/2. Συνεπώς, η λειτουργία της διανομής τους είναι γενικά ένα καλούπι σε σχέση με τις μεταβλητές της περιστροφικής κίνησης. Ωστόσο, υπάρχει ένα ευρύ φάσμα των προβλημάτων, το οποίο είναι αρκετό για να εξετάσουμε μια κατανομή ανεξάρτητη των μεταβλητών της περιστροφικής κίνησης, μειώνοντας σε μια βαθμιδωτή λειτουργία $n(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ που είναι κανονική, έτσι ώστε $nd^3p/(2\pi\hbar)^3$ να είναι ο αριθμός των οιονεί σωματιδίων ανά μονάδα όγκου με ορμές στο φάσμα d^3p και μια δεδομένη συνιστώσα περιστροφικής κίνησης. Αυτό θα πρέπει να θεωρηθεί στις §§74-76 .

Η χαρακτηριστική ιδιότητα του φάσματος ενός υγρού Fermi είναι, ότι η ενέργεια ϵ των οιονεί σωματιδίων είναι μια συνάρτηση της διανομής λειτουργίας. Όταν το τελευταίο μεταβάλλεται κατά ένα μικρό ποσό:

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_0(\mathbf{p}) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (74.1)$$

όπου n_0 είναι η κατανομή ισορροπίας, η ενέργεια αλλάζει

$$\delta \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}') d^3p' / (2\pi\hbar)^3, \quad (74.2)$$

όπου $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ είναι η συνάρτηση των οιονεί σωματιδίων αλληλεπίδρασης. Έτσι, η κατανομή (74.1) αντιστοιχεί στην ενέργεια του οιονού σωματιδίου

$$\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \epsilon_0(\mathbf{p}) + \delta \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (74.3)$$

όπου $\epsilon_0(\mathbf{p})$ είναι η ενέργεια που ανταποκρίνεται στην κατανομή ισορροπίας.

Η εξίσωση μεταφοράς είναι

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = C(n). \quad (74.4)$$

Χαρακτηριστικό της είναι ότι, σε ένα ανομοιογενές υγρό, η αριστερή πλευρά της εξίσωσης περιέχει έναν όρο που περιλαμβάνει το παράγωγο $\partial \epsilon / \partial \mathbf{r}$ ακόμη και εν απουσία ενός εξωτερικού πεδίου, λόγω της ισότιμης εξάρτησης του ϵ (74.3).

Η σύγκρουση του ολοκληρώματος στα δεξιά του (74.4) έχει το τύπο

$$C(n) = \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) [n' n'_1 (1-n)(1-n_1) - n n_1 (1-n')(1-n'_1)] \times \\ \times \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon' - \epsilon'_1) d^3p_1 d^3p'_1 / (2\pi\hbar)^6, \quad (74.5)$$

όπου n, n_1, n', n'_1 είναι λειτουργίες της ορμής $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1$ των συγκρουόμενων οιονεί σωματιδίων. Ο νόμος της διατήρησης της ορμής στις συγκρούσεις θεωρείται ότι έχει ήδη

ληφθεί υπόψη, έτσι ώστε η ενσωμάτωση $p_+ p_- = p'_+ p'_-$; Η ολοκλήρωση του (74.5) έχει ληφθεί μόνο με δύο ορμές, όχι τρεις. Η διατήρηση της ενέργειας εξασφαλίζεται από τη γραπτή δέλτα λειτουργία. Τέλος, το w είναι μία συνάρτηση της ορμής που δίνει την πιθανότητα σύγκρουσης. Οι δύο όροι στις τετραγωνισμένες παρενθέσεις δίνουν αντίστοιχα τον αριθμό των οιονεί σωματιδίων που εισέρχονται και αφήνουν μια συγκεκριμένη κβαντική κατάσταση ως αποτέλεσμα των συγκρούσεων. Διαφέρουν από τους αντίστοιχους όρους στο *ολοκλήρωμα σύγκρουσης* αερίου Boltzmann από τους παράγοντες $(1 - n)$ κλπ. Η παρουσία αυτών των παραγόντων οφείλεται στις στατιστικές Fermi δια το οποίοι οι συγκρούσεις μπορούν να λάβουν οιονεί σωματίδια μόνο σε μη *κατειλημμένα* καταστάσεις.

Η προσέγγιση Born σε γενικές γραμμές δεν ισχύει για τις συγκρούσεις των οιονεί σωματιδίων σε ένα υγρό Fermi. Παρ' όλα αυτά, οι πιθανότητες των άμεσων και αντίστροφων διεργασιών διασκόρπισης μπορούν να θεωρηθούν το ίδιο. Εξετάζουμε ποσότητες που έχουν ήδη κατά μέσο όρο πάνω από τις κατευθύνσεις των οιονεί σωματιδίων περιστροφές. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η πιθανότητα διασκόρπισης εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική ορμή των συγκρουόμενων οιονεί σωματιδίων. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν στη §2, όταν προκύπτει η αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας με το τύπο (2.8). Εδώ είναι σημαντικό, ότι σε ένα υγρό Fermi υπάρχει και πάλι αναλλοίωτο υπό *χωρική* αναστροφή. Έτσι φτάνουμε στην εξίσωση

$$w(\mathbf{p}', \mathbf{p}'; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \mathbf{p}', \mathbf{p}'),$$

που ήδη χρησιμοποιείται στην αναπόσπαστη σύγκρουση (74.5). Η λειτουργία w εξαρτάται σε γενικές γραμμές από τους αριθμούς κατάστασης της κατοχής και ως εκ τούτου από τη θερμοκρασία. Ωστόσο, δεδομένου ότι η θερμοκρασία είναι χαμηλή (ένα σημαντικό σημείο σε όλη την θεωρία των υγρών Fermi) w στο ολοκλήρωμα σύγκρουσης πρέπει να λαμβάνεται ως η λειτουργία που υπολογίζεται για $T=0$.

Το ολοκλήρωμα (74.5) εξαφανίζεται με τον ίδιο όπως θα έπρεπε, όταν αντικαθιστάμε για n τη συνάρτηση Fermi κατανομής ισορροπίας.

$$n_0(\epsilon) = \left[\exp\left(\frac{\epsilon - \mu}{T}\right) + 1 \right]^{-1}. \quad (74.6)$$

Για

$$\frac{n_0}{1-n_0} = \exp\left(-\frac{\epsilon - \mu}{T}\right),$$

βλέπουμε αμέσως, ότι ο νόμος της διατήρησης της ενέργειας οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{n_0 n_{01}}{(1-n_0)(1-n_{01})} = \frac{n'_0 n'_{01}}{(1-n'_0)(1-n'_{01})}. \quad (74.7)$$

Ας χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση μεταφοράς για να εκφράσουμε τους νόμους διατήρησης της μάζας, της ενέργειας και της ορμής σε ένα υγρό Fermi σε ότι αφορά τη λειτουργία διανομής. Η εξάρτηση της ενέργειας των οιονεί σωματιδίων στην κατανομή τους το καθιστά ένα αρκετά συγκεκριμένο πρόβλημα.

Έχουμε ενσωματώσει και τις δύο πλευρές (74.4) πάνω $2d^3 p / (2\pi\hbar)^3$; Ο παράγοντας 2 λαμβάνει υπόψη τις δύο πιθανές κατευθύνσεις της περιστροφής. Λόγω της διατήρησης του αριθμού των οιονεί σωματιδίων σε συγκρούσεις, το ολοκλήρωμα της $C(n)$ είναι μηδέν. Από την αριστερή πλευρά, ο όρος $-(\partial n / \partial p)$ έχει ενσωματωθεί κατά μέρη και η εξίσωση στη συνέχεια γίνεται,

$$\partial N / \partial t + \text{div } \mathbf{i} = 0,$$

όπου N είναι ο αριθμός πυκνότητας των οιονεί σωματιδίων,

$$\mathbf{i} = \langle \mathbf{v} \rangle, \quad (74.8)$$

και $\mathbf{v} = \partial \epsilon / \partial \mathbf{p}$ είναι η ταχύτητα των οιονεί σωματιδίων.* Αυτή είναι η εξίσωση της συνέχειας για οιονεί σωματίδια και \mathbf{i} είναι ως εκ τούτου η ροή των οιονεί σωματιδίων. Δεδομένου ότι ο αριθμός των οιονεί σωματιδίων σε ένα υγρό Fermi είναι ο ίδιος με τον αριθμό των πραγματικών σωματιδίων, \mathbf{i} είναι επίσης η ροή των πραγματικών σωματιδίων, έτσι ώστε $\mathbf{i} = (\mathbf{p}/m)$.

Ας εφαρμόσουμε τώρα τις ίδιες λειτουργίες (74.4), αφού πρώτα πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές με p . Το ολοκλήρωμα της $pC(n)$ είναι μηδέν, λόγω της διατήρησης της συνολικής ορμής των οιονεί σωματιδίων σε συγκρούσεις. Η αριστερή πλευρά στις συνιστώσες του διανύσματος είναι

$$\frac{\partial \langle p_\alpha \rangle}{\partial t} + \int p_\alpha \left(\frac{\partial n}{\partial x_\beta} \frac{\partial \epsilon}{\partial p_\beta} - \frac{\partial n}{\partial p_\beta} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\beta} \right) \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Το ολοκλήρωμα στο δεύτερο όρο μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(p_\alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial p_\beta} n \right) + n \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial p_\beta} \left(p_\alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\beta} n \right).$$

Στην ολοκλήρωση ο τρίτος όρος δίνει μηδέν και ο δεύτερος όρος δίνει το παράγωγο $\partial E / \partial \epsilon_0$ της ενεργειακής πυκνότητας E του υγρού, η ενέργεια του οιονεί σωματιδίου σε ένα υγρό Fermi προσδιορίζεται από την μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας,

$$\delta E = \int \epsilon \delta n \cdot 2d^3p / (2\pi\hbar)^3. \quad (74.9)$$

Έτσι έχουμε την εξίσωση της διατήρησης της ορμής με το τύπο

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle p_\alpha \rangle + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0,$$

$$(\dots) = \int \dots n \cdot 2d^3p / (2\pi\hbar)^3$$

όπου ο τανυστής της η ταχύτητα της κίνησης της ροής είναι

$$\Pi_{\alpha\beta} = \langle p_\alpha v_\beta \rangle + \delta_{\alpha\beta} (\langle \epsilon \rangle - E). \quad (74.10)$$

* Εδώ και στην υπόλοιπη §74 (...) υποδηλώνει την ενσωμάτωση πάνω στη διανομή n :

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές του (74.4) με ϵ και ενσωματώνοντας, παίρνουμε ομοίως την εξίσωση της διατήρησης της ενέργειας:

$$\partial E / \partial t + \text{div } \mathbf{q} = 0,$$

όπου η ροή της ενέργειας είναι

$$\mathbf{q} = \langle \epsilon \mathbf{v} \rangle. \quad (74.11)$$

Σε ισορροπία, όλες οι ροές I , \mathbf{q} και $\Pi_{\alpha\beta}$ είναι μηδέν. Μπορούμε να παράγουμε εκφράσεις για αυτές που είναι γραμμικές στη μικρή διόρθωση δn στη διαταραγμένη διανομή (74.1). Η συνάρτηση ισορροπίας n_0 εξαρτάται μόνο από την ενέργεια του οιονεί σωματιδίου, το οποίο με τη σειρά του αντιστοιχεί στην κατανομή ισορροπίας. Συμβολίζοντας το γεγονός αυτό με την κατάληξη του μηδέν σε ϵ , γράφουμε τον ορισμό (74.1) στον πιο ακριβό τύπο

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_0(\epsilon_0) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (74.12)$$

Εάν n_0 εκφράζεται ως μια λειτουργία του πραγματικού οιονεί σωματιδίου ενέργειας ϵ , πρέπει να θέσουμε

$$n_0(\epsilon_0) = n_0(\epsilon) - \delta \epsilon \cdot \partial n_0 / \partial \epsilon$$

και η διαταραγμένη συνάρτηση κατανομής τότε γίνεται

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_0(\epsilon) + \delta\bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (74.13)$$

$$\begin{aligned} \delta\bar{n} &= \delta n - \delta\epsilon \cdot \partial n_0 / \partial \epsilon \\ &= \delta n - \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned}$$

Δεδομένου, ότι στα ολοκληρώματα (74.8)-(74.11), ϵ και $v = \partial\epsilon/\partial p$ είναι η πραγματική ενέργεια και ταχύτητα του ιονεί σωματιδίου. Αρκεί να αντικατασταθεί το n σε αυτά με το τύπο (74.13), ο οποίος δίνει αμέσως

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= \int \mathbf{v} \delta\bar{n} \cdot 2 d^3 p / (2\pi\hbar)^3, \\ \mathbf{q} &= \int \epsilon \mathbf{v} \delta\bar{n} \cdot 2 d^3 p / (2\pi\hbar)^3, \\ \Pi_{\alpha\beta} &= \int p_\alpha v_\beta \delta\bar{n} \cdot 2 d^3 p / (2\pi\hbar)^3; \end{aligned} \right\} \quad (74.14)$$

στην τελευταία έκφραση, έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει (74.9). Τώρα, όπως έχουν διαχωριστεί οι πρώτοι όροι στο $\delta\bar{n}$ μπορούμε φυσικά να χειριζόμαστε τα ϵ όπως $\epsilon_0(\mathbf{p})$ στα ολοκληρώματα (74.14).

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, εκφράζουμε δn ως

$$\delta n = -\psi \partial n_0 / \partial \epsilon. \quad (74.15)$$

Σε αυτή τη περίπτωση, ο διαχωρισμός του παράγοντα $\partial n_0 / \partial \epsilon$ έχει μια συγκεκριμένη σημασία. Η διαταραχή δn συγκεντρώνεται στη θολή περιοχή της κατανομής Fermi. Το παράγωγο $\partial n_0 / \partial \epsilon$ επίσης είναι αισθητώς διαφορετικό από το μηδέν σε αυτήν ακριβώς τη περιοχή; Όταν αυτός ο παράγοντας έχει διαχωριστεί, η λειτουργία ψ που παραμένει είναι ένα αργά εναλλασσόμενο.

Μαζί με (74.15) θα γράψουμε

$$\begin{aligned} \delta\bar{n} &= -\varphi \partial n_0 / \partial \epsilon \\ &= n_0(1 - n_0)\varphi / T, \end{aligned} \quad (74.16)$$

όπου

$$\varphi = \psi - \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial n_0(\epsilon')}{\partial \epsilon'} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (74.17)$$

Στην προσέγγιση μηδενικής τάξεως σε σχέση με τις μικρές αναλογίες T/ϵ_p , η λειτουργία $n_0(\epsilon)$ μπορεί να αντικατασταθεί από ένα βήμα λειτουργίας που αποκόπτεται στο περιορισμό ενέργειας ϵ_p . Τότε

$$\partial n_0 / \partial \epsilon = -\delta(\epsilon - \epsilon_p), \quad (74.18)$$

και η ένταξη του d^3p μειώνει σε ένταξη πάνω από την επιφάνεια Fermi $\epsilon = \epsilon_p$. Το στοιχείο όγκου μεταξύ δύο απείρων κλειστών σταθερών-ενέργειας επιφάνειες στο χώρο ορμής είναι

$$dS d\epsilon / |\partial \epsilon / \partial p|, \quad (74.19)$$

όπου dS είναι ένα στοιχείο χώρου για τη συνεχή-ενεργειακή επιφάνεια. Η ενσωμάτωση στο d^3p γίνεται έτσι ένα πάνω στην επιφάνεια Fermi σύμφωνα με τον τύπο

$$\int \dots \delta(\epsilon - \epsilon_F) d^3p = \int \dots dS_F / v_F, \quad (74.20)$$

όπου v_F είναι η ταχύτητα στη επιφάνεια Fermi. Αυτός ο τύπος δεν θεωρεί ότι η επιφάνεια Fermi είναι σφαιρική; Σε μια σφαίρα $dS_F = p_F^2$ κάνει με σταθερά p_F .

Μετά από αυτό το μετασχηματισμό, ο ορισμός (74.17) καθίσταται

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}') dS_F / v_F (2\pi\hbar)^3, \quad (74.21)$$

όπου p_F συμβολίζει την ορμή (με μεταβλητή κατεύθυνση) στην επιφάνεια Fermi. Η ροή του σωματιδίου είναι

$$\mathbf{i} = \int (\mathbf{v}_F / v_F) \varphi \cdot 2dS_F (2\pi\hbar)^3 \quad (74.22)$$

και η ροή ορμής δίνεται από μια παρόμοια έκφραση. Στη ροή της ενέργειας, η προσέγγιση (74.18) είναι σίγουρα ανεπαρκής: Θα μπορούσε να μειώσει το q απλά στην συναγωγή μεταφοράς ενέργειας $\epsilon_F \mathbf{i}$, τον πρώτο όρο στην έκφραση

$$\mathbf{q} = \epsilon_F \mathbf{i} - \int \mathbf{v}(\epsilon - \epsilon_F) \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \varphi \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (74.23)$$

Για να γίνει γραμμικοποίηση η σύγκρουση του ολοκληρώματος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η κατανομή ισορροπίας $n_0(\epsilon)$ ως λειτουργία της πραγματικής ενέργειας ϵ που καθιστά τη σύγκρουση, αναπόσπαστο μηδέν.* Η γραμμικοποίηση γίνεται έτσι με αντικατάσταση του n στο τύπο (74.13) και (74.16). Οι υπολογισμοί είναι παρόμοιοι με

αυτούς που πηγαίνουν από το (67.6) στο (67.17). Η έκφραση στις τετραγωνισμένες παρενθέσεις στο (74.5) είναι γραμμένη με το τύπο

$$(1-n)(1-n_1)(1-n')(1-n_1') \left[\frac{n'}{1-n'} \frac{n_1'}{1-n_1'} - \frac{n}{1-n} \frac{n_1}{1-n_1} \right],$$

και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\delta \frac{n}{1-n} = \frac{n_0}{1-n_0} \frac{\varphi}{T}.$$

Σημειώστε, ότι η απαιτούμενη διαταραχή της λειτουργίας διανομής (για να βρεθεί από την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς) εμφανίζεται κατά την αναπόσπαστη σύγκρουση, καθώς το $\delta \bar{n}$ εμφανίζεται στις ροές (74.14). Εάν οι όροι στο δn μπορούν να παραλείπονται

* Αυτή είναι μια γενική παρατήρηση, η οποία ισχύει για κάθε σύγκρουση ολοκληρώματος που αφορά τα οιονεί σωματίδια Fermi, όχι μόνο για το (74.5).

στα αριστερά της εξίσωσης μεταφοράς (όπως για τον υπολογισμό της θερμικής αγωγιμότητας και το ιξώδες; Βλέπε §75), τότε η συνάρτηση κατανομής του οιονεί σωματιδίου $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ δεν παρουσιάζεται ρητά στις εξισώσεις που προκύπτουν: οι εξισώσεις f για τα άγνωστα $\delta \bar{n}$ είναι τα ίδια με εκείνα με $f=0$ για το άγνωστο δn . Σε τέτοια προβλήματα επομένως, οι επιδράσεις των υγρών Fermi δεν εμφανίζονται και η κατάσταση είναι τυπικά όμοια με εκείνη για ένα αέριο Fermi.

Θα δείξουμε, ότι μια παρόμοια περίπτωση συμβαίνει σε μία συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων, όπου οι πρώτοι όροι δn πρέπει να διατηρηθούν στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς. Εάν η συνάρτηση n_0 είναι ανεξάρτητη από τις συντεταγμένες, αυτοί οι όροι είναι

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \delta \epsilon}{\partial \mathbf{r}} \\ & = \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned}$$

Με $\delta \bar{n}$ από (74.13) γίνονται

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta \bar{n}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (74.25)$$

Αν η χρονική παράγωγος μπορεί να αγνοηθεί και πάλι μόνο $\delta \bar{n}$ συμβαίνει εδώ.

Αυτές οι δηλώσεις εξακολουθούν να ισχύουν όχι μόνο για ένα ηλεκτρικό ουδέτερο υγρό Fermi που συζητείται εδώ, αλλά επίσης και για το ηλεκτρόνιο υγρού σε μέταλλα, το οποίο θα εξετασθεί στο κεφάλαιο IX. Για το λόγο αυτό και προκειμένου να μην χρειαστεί να επιστρέψουμε στο θέμα, θα γίνουν εδώ μερικές πρόσθετες παρατηρήσεις.

Εάν τα ιονεί σωματίδια φέρουν ένα ηλεκτρικό φορτίο $-e$, τότε στην παρουσία ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου το παράγωγο $p = -\partial\epsilon/\partial\Gamma$ περιέχει ένα περαιτέρω όρο, τη δύναμη Lorentz στη φόρτιση. Συνεπώς, η αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς περιέχει έναν όρο

$$-e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο θεωρείται γενικά, ότι είναι αδύναμο και στον όρο $-eE$. $\partial n/\partial p$ είναι επαρκής, ώστε να θέσει $n = n_0$. Ο όρος του μαγνητικού πεδίου είναι ταυτόσημα μηδέν για μια λειτουργία $n_0(\epsilon)$ που εξαρτάται μόνο στο ϵ . Εάν το πεδίο είναι ισχυρό ωστόσο, μπορεί να είναι αναγκαίο να διατηρηθούν επίσης οι πρώτοι όροι διάταξης στο δn . Αυτοί είναι

$$-\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{p}} - \frac{e}{c} \frac{\partial \delta \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \left\{ \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial \delta \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \right\},$$

όπου $\mathbf{v} = \partial \epsilon_0 / \partial \mathbf{p}$. Ο παράγοντας $\partial n_0 / \partial \epsilon$ που εξαρτάται μόνο από το ϵ μπορεί να ληφθεί σύμφωνα με $\partial/\partial \mathbf{p}$ στους δεσμούς; Το παράγωγο της είναι παράλληλο προς το \mathbf{v} και δίνει μηδέν στο πολλαπλασιασμό με $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Οι όροι αυτοί ήρθαν από τον τύπο

$$-\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \delta \bar{n}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (74.26)$$

το οποίο ξανά περιέχει μόνο $\delta \bar{n}$.

§75. Θερμική αγωγιμότητα και ιξώδες ενός υγρού Fermi

Οι εξαρτήσεις θερμοκρασίας του ιξώδους και θερμικής αγωγιμότητας ενός υγρού Fermi μπορεί να αποδειχθεί με απλά ποιοτικά επιχειρήματα (I. Ya. Pomeranchuk 1950).

Σύμφωνα με το στοιχειώδη τύπο (8.11) στην κινητική θεωρία των αερίων, το ιξώδες είναι $\eta \sim mNuI$, όπου m είναι η μάζα του σωματιδίου, N ο αριθμός πυκνότητας του

σωματιδίου, u η μέση θερμική ταχύτητα και I η μέση ελεύθερη διαδρομή. Στην προκειμένη περίπτωση, τα σωματίδια της κινητικής θεωρίας είναι οιονεί σωματίδια, αλλά επειδή οι αριθμοί του καθενός είναι ίδια, το προϊόν nN είναι μια ποσότητα ανεξάρτητη από την θερμοκρασία, ονομαστικά η πυκνότητα του υγρού.* Η ταχύτητα $u \sim u_F$, όπου u_F είναι η θερμοκρασία-ανεξάρτητη ταχύτητα στην επιφάνεια Fermi. Η μέση ελεύθερη διαδρομή $I \sim u_F \tau$, όπου τ είναι ο ίδιος χρόνος μεταξύ των συγκρούσεων των οιονεί σωματιδίων. Αυτή τη φορά ποικίλλει με τη θερμοκρασία ως T^{-2} (βλέπε SP 2, §1), έτσι ώστε για το ιξώδες

$$\eta \propto T^{-2}. \quad (75.1)$$

Η θερμική αγωγιμότητα υπολογίζεται από το (7.10): $\kappa \sim cNul$, όπου c είναι η

* Από τη στιγμή που θα επιδιώξουμε το περιορισμένο τύπο της λειτουργίας $\eta(T)$ σε χαμηλές θερμοκρασίες, αυτό το όριο φυσικά εννοείται για όλες τις ποσότητες που τείνουν σε μια πεπερασμένη τιμή, όπως $T \rightarrow 0$.

ειδική θερμότητα ανά σωματίδιο. Για ένα υγρό Fermi $c \propto T$ και έτσι

$$\kappa \propto T^{-1}. \quad (75.2)$$

Για τον ακριβή καθορισμό του η και κ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση μεταφοράς. Η αλληλουχία του υπολογισμού για την αγωγιμότητα είναι η ακόλουθη.

Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς (74.4) μεταφέρεται με ένα όμοιο τρόπο στην διαδικασία της §7 για τη θερμική αγωγιμότητα ενός κλασικού αερίου.

Ας υπάρχει εκεί μια βαθμίδα θερμοκρασίας στο υγρό, το οποίο είναι μακροσκοπικό σε κατάσταση ηρεμίας. Η τελευταία προϋπόθεση σημαίνει, ότι η πίεση είναι σταθερή σε όλο το υγρό και η κατανομή θερμοκρασίας είναι σταθερή. Στα αριστερά της (74.4) έχουμε αντικαταστήσει n και ϵ , τις τοπικές τιμές ισορροπίας τους με μια θερμοκρασία κυμαινόμενη μέσω του υγρού. Τότε $\partial \epsilon / \partial r = 0$ και μόνο ο όρος $\mathbf{v} \cdot \partial n_0 / \partial r$ παραμένει (εμείς παραλείπουμε τη κατάληξη 0 έως ϵ και ν). Η λειτουργία n περιλαμβάνει μόνο το συνδυασμό $(\epsilon - \mu)/T$ και αφού θα επιδιώξουμε μόνο τους περιορισμένους τύπους, όπως $T \rightarrow 0$, το χημικό δυναμικό $\mu(T)$ μπορεί να ληφθεί για να έχουν τιμές σε $T = 0$ (το οποίο είναι το ίδιο σαν την περιορισμένη ενέργεια ϵ_1). Στη συνέχεια

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \partial n_0 / \partial \mathbf{r} &= (\partial n_0 / \partial T) \mathbf{v} \cdot \nabla T \\ &= \frac{n_0(1 - n_0)}{T} \cdot \frac{\epsilon - \mu}{T} \mathbf{v} \cdot \nabla T, \end{aligned}$$

και η εξίσωση μεταφοράς γίνεται

$$n_0(1 - n_0) \frac{e^{-\mu}}{T^2} \mathbf{v} \cdot \nabla T = I(\varphi), \quad (75.3)$$

με $I(\varphi)$ από το (74.24). Η λύση της εξίσωσης αυτής θα πρέπει να υποβάλλεται σε μια περαιτέρω κατάσταση που εκφράζει την απουσία κάθε μεταφοράς μακροσκοπικής μάζας:

$$\int \mathbf{v} \varphi \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 0. \quad (75.4)$$

Εξαιτίας αυτής της κατάστασης μόνο ο δεύτερος όρος παραμένει στη ροή της ενέργειας (74.23).

Όπως έχει ήδη σημειωθεί στη §74, οι εξισώσεις (75.3) και (75.4) δεν περιέχουν τη συνάρτηση αλληλεπίδρασης του ιονειί σωματιδίου, έτσι το πρόβλημα της θερμικής αγωγιμότητας σε ένα υγρό Fermi (και το ίδιο ισχύει για το πρόβλημα ιξώδους) είναι τυπικά ταυτόσημη με εκείνη για ένα αέριο Fermi.

Σε όλα τα ολοκληρώματα, η πιο σημαντική περιοχή είναι εκεί όπου $\epsilon - \mu \sim T$ και η κατανομή Fermi είναι θολή; Η ταχύτητα του ιωνού σωματιδίου είναι κοντά στην ακτίνα p_F της σφαίρας Fermi και σε αυτό το εύρος $\epsilon - \mu = u_F(p - p_F)$. Όπου η ορμή συμβαίνει εκτός από τη διαφορά $p - p_F$, μπορούμε να βάλουμε $p = p_F$ και η ταχύτητα μπορεί παντού να εξομοιωθεί με u_F . Ειδικότερα, αυτό μπορεί να γίνει w , το οποίο στη συνέχεια γίνεται συνάρτηση μόνο για τις γωνίες, οι οποίες περιγράφουν τον σχετικό προσανατολισμό των φορέων p, p_1, p', p'_1 . Για μια δεδομένη p και p_1 , ο νόμος της διατήρησης της ορμής καθορίζει τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων p' και $p'_1 = p + p_1 - p'$; Η ενσωμάτωση σε σχέση με αυτή τη γωνία απομακρύνει τη δέλτα λειτουργία από το ολοκλήρωμα σύγκρουσης. Εκεί παραμένουν ενσωματώσεις πάνω στα μεγέθη p_1 και p' (και πάνω από τις άλλες μεταβλητές γωνίας). Οι ενσωματώσεις σε αυτά τα μεγέθη αντικαθίστανται από ένα πάνω $T^2 du_1 du'$, όπου $u = (\epsilon - \mu)/T = u_F(p - p_F)/T$ είναι μεταβλητές στις οποίες οι λειτουργίες διανομής n_0 εξαρτώνται; ενόψει της ταχείας σύγκλισης, αυτές οι εντάξεις μπορούν να ληφθούν από $-\infty$ σε ∞ . Στη συνέχεια βρίσκουμε, ότι ολόκληρο το ολοκλήρωμα $I(\varphi)$ είναι ανάλογο με T και η λύση του (75.3) είναι

$$\varphi = -T^2 g(u) \mathbf{v} \cdot \nabla T.$$

Όταν αυτό αντικαθίσταται στο (74.23), η ολοκλήρωση προς τις κατευθύνσεις του ν βάζει τη ροή θερμότητας με το τύπο $q = -\kappa \nabla T$ με

$$\kappa = \frac{8\pi\nu_F p_F^2}{3T} \int_x^\infty u g(u) \left| \frac{\partial n_0}{\partial u} \right| du.$$

Ως εκ τούτου, βλέπουμε και πάλι, ότι $\kappa \propto T^{-1}$.

Οι παραπάνω απλουστεύσεις της σύγκρουσης του ολοκληρώματος είναι επαρκείς για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς ακριβώς (και το ίδιο ισχύει και για το πρόβλημα του ιξώδους). Οι τύποι που πάρθηκαν για κ και η εκφράζουν αυτούς σε ότι αφορά τους παραμέτρους p_F και u_F και τη συνάρτηση w κατάλληλη ως προς μέσος όρος στις κατευθύνσεις.*

*Βλέπε G. A. Brooker and J. Sykes, Physical Review Letters 21, 279, 1968.

§76. Ήχος απορρόφησης σε ένα υγρό Fermi *

Έχει αποδειχθεί στο SP 2 (§4), ότι η φύση των κυμάτων που διαδίδονται σε ένα υγρό Fermi εξαρτώνται ουσιαστικά από την αξία του προϊόντος $\omega\tau$ όπου τ είναι η μέση ελεύθερη ώρα.

Όταν $\omega\tau \ll 1$, έχουμε συνηθισμένα υδροδυναμικά ηχητικά κύματα. Οι εξαρτήσεις συχνότητας και θερμοκρασίας του συντελεστή γ για την απορρόφηση αυτών των κυμάτων ανά μονάδα απόστασης μπορεί να βρεθεί από το γνωστό τύπο $\gamma \sim \omega^2 \eta / \rho u^3$, όπου το η είναι το ιξώδες, ρ η πυκνότητα του υγρού και u η ταχύτητα του ήχου. Δείτε FM, §77. Επειδή σε ένα υγρό Fermi $\eta \propto T^{-2}$, έχουμε

$$\gamma \propto \omega^2 / T^2. \quad (76.1)$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί τυπικά να προέρχεται σημειώνοντας, ότι η απορρόφηση περιγράφεται από τον πρώτο διορθωμένο όρο (σε σχέση με τη μικρή παράμετρο) στη σχέση ήχου διασποράς:

$$k = (\omega/u)(1 + i\alpha\omega\tau), \quad (76.2)$$

όπου α είναι μία σταθερά. Το πλασματικό μέρος της έκφρασης αυτής (για μια πραγματική συχνότητα) δίνει γ ; αφού $\tau \propto T^{-2}$, επιστρέφουμε στο (76.1).

Όταν $\omega\tau \sim 1$ η απορρόφηση γίνεται πολύ ισχυρή, η διάδοση των ηχητικών κυμάτων δεν μπορεί να συμβεί.

Όταν $\omega\tau \gg 1$, η διάδοση ασθενών κυμάτων απόσβεσης (ήχου μηδέν) γίνεται και πάλι δυνατή. Η απορρόφηση περιγράφεται από έναν όρο διόρθωσης στην σχέση διασποράς, σε αυτή την περίπτωση περιλαμβάνεται η μικρή παράμετρος $1/i\omega\tau$:

$$k = \frac{\omega}{u_0} \left(1 + \frac{i\alpha}{\omega\tau} \right), \quad (76.3)$$

όπου u_0 είναι η ταχύτητα της διάδοσης του ήχου μηδενικής. Ο συντελεστής απορρόφησης είναι συνεπώς ανάλογος ως προς τη συχνότητα σύγκρουσης: $\gamma \propto 1/\tau$ και το τελευταίο είναι με τη σειρά του αναλογικό στο τετράγωνο πλάτος της θολής περιοχής της κατανομής του οιονεί σωματιδίου. Όταν $\hbar\omega \ll T$, το πλάτος αυτό διέπεται από την

* Τα αποτελέσματα σε αυτό το τμήμα οφείλονται στον L. D. Landau (1957).

θερμοκρασία, έτσι ώστε $1/\tau \propto T^2$ και ο συντελεστής απορρόφησης είναι

$$\gamma = aT^2, \quad T \gg \hbar\omega \gg \hbar/\tau. \quad (76.4)$$

Εάν ωστόσο, $\hbar\omega \gg T$ (αλλά ακόμα $\hbar\omega \ll \epsilon_F$ ως απαραίτητη προϋπόθεση για ολόκληρη τη θεωρία για να μπορεί να εφαρμοστεί), η διανομή είναι θολή σε μια περιοχή πλάτους $\sim \hbar\omega$. Η απορρόφηση του μηδενικού ήχου είναι τότε

$$\gamma = b\omega^2, \quad \hbar\omega \gg T. \quad (76.5)$$

Αυτή η περίπτωση περιλαμβάνει ειδικότερα μηδενικό ήχο σε όλες τις συχνότητες στο $T=0$. Θα αποδειχθεί παρακάτω, ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των σταθερών a και b στο (76.4) και (76.5).

Η διαφορά στη φύση της απορρόφησης του συνηθισμένου και μηδενικού ήχου οφείλεται σε μία διαφορά στη φυσική φύση τους. Σε ένα συνηθισμένο κύμα ήχου σε οποιοδήποτε μικρό στοιχείο όγκου σε σύγκριση με το μήκος κύματος, η κατανομή του οιονεί σωματιδίου αντιστοιχεί στην πρώτη προσέγγιση σε ισορροπία για μία δεδομένη τοπική θερμοκρασία και ταχύτητα του υγρού. Σε αυτή την προσέγγιση, δεν υπάρχει διάλυση και απορρόφηση ήχου και εμφανίζεται μόνο όταν πάρουμε υπόψη την επίδραση των βαθμίδων θερμοκρασίας και ταχύτητας στη διανομή του οιονεί-σωματιδίου. Σε ένα

μηδενικό ηχητικό κύμα ωστόσο, οι δονήσεις οι ίδιες προκαλούν τη λειτουργία διανομής να παρεκκλίνουν από την ισορροπία από κάθε στοιχείο του όγκου και οι συγκρούσεις των οιονεί σωματιδίων προκαλούν απορρόφηση του ήχου.

Σύμφωνα με τις βασικές ιδέες της κανονικής θεωρίας υγρού Fermi, ένα οιονεί σωματίδιο σε ένα τέτοιο υγρό μπορεί να θεωρηθεί κατά μία έννοια ως ένα σωματίδιο στο ίδιο-σταθερό πεδίο για τα περιβάλλοντα σωματίδια. Σε ένα ηχητικό κύμα μηδέν, αυτό το πεδίο είναι περιοδικό στο χρόνο και το χώρο. Σύμφωνα με τους γενικούς κανόνες της κβαντικής μηχανικής μια σύγκρουση δύο οιονεί σωματιδίων σε ένα τέτοιο πεδίο συνοδεύεται από μια αλλαγή στη συνολική ενέργεια και ορμή τους με $\hbar\omega$ και $\hbar\mathbf{k}$ αντίστοιχα: Μπορούμε να πούμε, ότι στη σύγκρουση ένας «μηδενικός ήχος κβαντικής» εκπέμπεται ή απορροφάται.* Το συνολικό αποτέλεσμα αυτών των συγκρούσεων είναι να

* Τέτοια εκπομπή ή απορρόφηση από ένα οιονεί σωματίδιο είναι αδύνατο, εφόσον η ταχύτητα του ήχου μηδενικής υπερβαίνει την ταχύτητα Fermi u_F .

μειωθεί ο συνολικός αριθμός των κβάντων ήχου; Ο ήχος συντελεστής απορρόφησης είναι ανάλογος με το ρυθμό αυτής της μείωσης.

Με αυτή την προσέγγιση ο συντελεστής απορρόφησης του μηδενικού ήχου είναι

$$\begin{aligned} \gamma = & \int W \{ n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1) (1 - n_2) \} \times \\ & \times \delta(\epsilon'_1 + \epsilon'_2 - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \hbar\omega) \delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}) \times \\ & \times d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 / (2\pi\hbar)^{12}. \end{aligned} \quad (76.6)$$

Στο ολοκλήρωμα, οι δέλτα λειτουργίες που παρέχουν για τη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής σε συγκρούσεις, εμφανίζονται ρητώς. Ο πρώτος όρος στις παρενθέσεις αντιστοιχεί σε συγκρούσεις $p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2$ με απορρόφηση της κβαντικής, η δεύτερη σε $p'_1, p'_2 \rightarrow p_1, p_2$ με την εκπομπή ενός κβαντικού. Η λειτουργία W που σχετίζεται με την πιθανότητα συγκρούσεων με «ακτινοβολία», καθορίζεται από τις ιδιότητες του μηδενικού ηχητικού κύματος. Το ίδιο το κύμα μπορεί να θεωρηθεί ως πολλαπλασιαστικό στο $T=0$ (βλέπε SP 2, §4) και W είναι έτσι ανεξάρτητο από τη θερμοκρασία.*

Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τη λειτουργία W , εάν επιδιώκουμε μόνο να εκφράσουμε το συντελεστή απορρόφησης όσον αφορά την αξία του στην οριακή περίπτωση $\hbar\omega \ll T$. Για να γίνει αυτό, σημειώνουμε ότι στο ολοκλήρωμα (76.6) οι μόνο σημαντικές αξίες των ενεργειών του οιονεί σωματιδίου είναι αυτές στην περιοχή

θόλωσης από την κατανομή Fermi. Στην περιοχή αυτή, οι μόνοι παράγοντες στο ολοκλήρωμα, οι οποίοι ποικίλλουν ραγδαία είναι εκείνοι που περιέχουν τις συναρτήσεις $n(\epsilon)$. Επιπλέον, τα ολοκληρώματα στις αγκύλες (76.6) είναι σχεδόν αμετάβλητα, όταν πάμε από το $\hbar\omega \ll T$ σε $\hbar\omega \gg T$. Κατά συνέπεια, αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$J = \int \{n_1 n_2 (1 - n'_1)(1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1)(1 - n_2)\} \times \\ \times \delta(\epsilon'_1 + \epsilon'_2 - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \hbar\omega) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon'_1 d\epsilon'_2, \quad (76.7)$$

που λαμβάνεται μόνο σε σχέση με τις ενέργειες. Ο συντελεστής αναλογικότητας μεταξύ του γ και J εξαρτάται μόνο από το ω , όχι στο T , έτσι ώστε να μπορεί να βρεθεί από την οριακή τιμή του γ όταν $\hbar\omega/T \ll 1$.

Στο ολοκλήρωμα (76.7) μπορούμε βέβαια να παραμελήσουμε την ελαφρά στρέβλωση

* Προς αποφυγή παρανόησης θα πρέπει να τονιστεί, ότι W δεν είναι το ίδιο, όπως w στο ολοκλήρωμα σύγκρουσης (74.5).

της λειτουργίας της διανομής στο κύμα, βάζοντας

$$n(\epsilon) = [e^{\epsilon - \mu/T} + 1]^{-1}.$$

Με το συμβολισμό

$$x = (\epsilon - \mu)/T, \quad \xi = \hbar\omega/T,$$

έχουμε

$$J = T^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\xi}) \delta(x'_1 + x'_2 - x_1 - x_2 - \xi) dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)(1 + e^{-x'_1})(1 + e^{-x'_2})}.$$

Λόγω της ταχείας σύγκλισης του ολοκληρώματος, το εύρος της ολοκλήρωσης μπορεί να επεκταθεί από $-\infty$ σε ∞ .

Για την πραγματοποίηση της ένταξης αλλάζουμε τους μεταβλητές y_1, y_2, u_1, u_2 , όπου $y = x - x' = e^x$. Η ενσωμάτωση σε σχέση με το u_1 και u_2 είναι στοιχειώδη και δίνει

$$T^{-3}J = (1 - e^{-\xi}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \int_0^x \frac{\delta(y_1 + y_2 + \xi) du_1 du_2 dy_1 dy_2}{(u_1 + 1)(u_2 + 1)(u_1 + e^{y_1})(u_2 + e^{y_2})} \\ = (1 - e^{-\xi}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1 y_2 \delta(y_1 + y_2 + \xi)}{(1 - e^{y_1})(1 - e^{y_2})} dy_1 dy_2 \\ = \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi + y) \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^{y+\xi} - 1} \right\} dy.$$

Για τον υπολογισμό αυτής της διαφοράς των δύο ολοκληρωμάτων που αποκλίνουν, βάζουμε πρώτα σε ένα πεπερασμένο όριο χαμηλότερο $-\Lambda$, γραπτώς

$$\begin{aligned} T^{-3}J &= \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y(\xi+y)}{e^y-1} dy - \int_{-\Lambda+\xi}^{\infty} \frac{y(y-\xi)}{e^y-1} dy \\ &= 2\xi \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y}{e^y-1} dy - \int_{-\Lambda+\xi}^{-\Lambda} \frac{y(y-\xi)}{e^y-1} dy. \end{aligned}$$

Σκοπεύοντας να λάβουμε το όριο $\Lambda \rightarrow \infty$, παραμελούμε e^y στον παρονομαστή του δεύτερου ολοκληρώματος. Το πρώτο ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y}{e^y-1} dy &= \int_0^{\infty} \frac{y}{e^y-1} dy + \int_{-\Lambda}^0 \frac{y}{e^y-1} dy \\ &= \frac{1}{6}\pi^2 + \int_{-\Lambda}^0 \left(\frac{y}{1-e^{-y}} - y \right) dy \\ &= \frac{1}{6}\pi^2 + \int_0^{\Lambda} \frac{y}{e^y-1} dy + \frac{1}{2}\Lambda^2. \end{aligned}$$

Ακυρώνοντας τους όρους και παίρνοντας στη συνέχεια το όριο $\Lambda \rightarrow \infty$, έχουμε στο τέλος

$$J = \frac{2}{3} \pi^2 \xi T^3 (1 + \xi^2/4\pi^2).$$

Ο αναλογικός συντελεστής μεταξύ του γ και J είναι όπως έχει ήδη αναφερθεί από τη κατάσταση, ότι όταν έχουμε $\xi \ll 1$, έχουμε $\gamma = aT^2$ από (76.4). Αυτό δίνει

$$\gamma = a[T^2 + (\hbar\omega/2\pi)^2]. \quad (76.8)$$

Ειδικότερα, στο όριο των υψηλών συχνοτήτων $\hbar\omega \gg T$, αποκτάμε

$$\gamma = (a/4\pi^2)(\hbar\omega)^2, \quad (76.9)$$

που καθορίζει τη σχέση μεταξύ των συντελεστών στο (76.4) και (76.5).

§77. Εξίσωση μεταφοράς για οιονεί σωματίδια σε ένα υγρό Bose.

Εάν η μέση ελεύθερη διαδρομή των οιονεί σωματιδίων σε ένα υπερρευστό Bose είναι μικρή σε σύγκριση με τις χαρακτηριστικές διαστάσεις του προβλήματος, η ταχύτητα του υγρού περιγράφεται από τις εξισώσεις Landau δύων ταχυτήτων υδροδυναμικής (βλέπε *FM*, κεφάλαιο XVI). Οι όροι του υλικού απορρόφησης σε αυτές τις εξισώσεις περιέχουν αρκετές συντελεστές μεταφοράς (τη θερμική αγωγιμότητα και τέσσερις συντελεστές ιξώδους). Ο υπολογισμός τους απαιτεί μια λεπτομερή συζήτηση διαφόρων διαδικασιών διασκόρπισης, η πολλαπλότητα των οποίων οφείλεται στην

ύπαρξη δύο τύπων οιονεί σωματιδίων (φωτόνια και rotons). Στην πραγματικότητα, σε υγρό ήλιο, η κατάσταση περιπλέκεται περαιτέρω από την αστάθεια του αρχικού τμήματος του φάσματος φωτονίων. Τέτοια θέματα δεν θα συζητηθούν εδώ.

Οι μέσες ελεύθερες διαδρομές των οιονεί σωματιδίων αυξάνονται, καθώς η θερμοκρασία πέφτει, έστω και εάν μόνο λόγω της μείωσης του αριθμού πυκνότητας τους. Ως εκ τούτου, σε αρκετά χαμηλές θερμοκρασίες μπορούν να υπάρχουν σημαντικές ανατροπές του συστήματος των οιονεί σωματιδίων. Υπό αυτές τις συνθήκες, οι εξισώσεις των δύο ταχυτήτων υδροδυναμικής δεν ισχύουν. Οι έννοιες της θερμοκρασίας και της κανονικής ταχύτητα v_n επίσης παύουν να έχουν νόημα (μπορούν να οριστούν μόνο από την άποψη της κατανομής ισορροπίας των οιονεί σωματιδίων) και κατά μήκος με v_n , έτσι γίνεται ο διαχωρισμός της πυκνότητας του υγρού μέσα σε υπερρευστό και σε φυσιολογικά μέρη. Η συνολική πυκνότητα ρ και η υπερρευστή ταχύτητα v_s , ωστόσο διατηρούν το νόημά τους και από την άποψη αυτή είναι ουσιαστικά μηχανικές μεταβλητές. Το σύνολο των εξισώσεων που περιγράφουν έναν υπερρευστό πρέπει τότε να αποτελούν την εξίσωση μεταφοράς για τη συνάρτηση κατανομής του οιονεί σωματιδίου $n(t,r,p)$ η εξίσωση συνέχειας για τη πυκνότητα ρ και την εξίσωση για την ταχύτητα v_s .

Η εξίσωση μεταφοράς έχει το συνήθη τύπο*

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial r} = C(n), \quad (77.1)$$

όπου ϵ είναι η ενέργεια του οιονεί σωματιδίου, ανάλογα με την ταχύτητα v_s του υπερρευστού ως παράμετρος; Το σύμβολο ϵ συγκρατείται για την ενέργεια του οιονεί σωματιδίου σε ένα ρευστό σε κατάσταση ηρεμίας. Η σχέση μεταξύ ϵ και $\tilde{\epsilon}$ καθορίζεται ως εξής.

Εξ ορισμού $\epsilon(p)$ είναι η σχέση διασποράς για οιονεί σωματίδια σε ένα πλαίσιο της αναφοράς K_0 τέτοια ώστε $v_s=0$. Αυτή είναι η παρουσία μόνο ενός οιονεί σωματιδίου, η ενέργεια του υγρού (σε σχέση με εκείνο του $T=0$) είναι $\epsilon(p)$ και η ορμή του είναι ίση με τη ορμή p του οιονεί σωματιδίου. Κάνουμε ένα μετασχηματισμό Galilean σε ένα πλαίσιο

αναφοράς K σε κατάσταση ηρεμίας, κατά την οποία η ταχύτητα του υπερρευστό είναι v_s . Στο πλαίσιο αυτό, η ενέργεια και η ορμή της μάζας M του υγρού είναι

$$E = \epsilon(p) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s + \frac{1}{2} M v_s^2, \mathbf{P} = \mathbf{p} + M \mathbf{v}_s, \quad (77.2)$$

Από αυτό βλέπουμε, ότι σε ένα υγρό με υπερρευστή κίνηση, η ενέργεια ενός οιονεί σωματιδίου είναι

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) = \epsilon(p) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s; \quad (77.3)$$

cf. τα επιχειρήματα στην παραγωγή της κατάστασης υπερρευστότητας (SP 2, §23).

Τα παράγωγα που εμφανίζονται στην εξίσωση μεταφοράς είναι ως εκ τούτου **

* Είναι βέβαια δεδομένο ότι η κατάσταση της οιονεί κλασικότητας είναι ικανοποιητική: όλες οι ποσότητες διαφέρουν μόνο ελαφρώς σε αποστάσεις της τάξης του μήκους κύματος του οιονεί σωματιδίου h/p .

* Ο τύπος (77.2) έχει προέλθει αυστηρά μιλώντας για μια ομοιογενές υπερρευστή ροή $v_s = \text{σταθερή}$. Σε μια ανομοιογενές ροή, η ενέργεια μπορεί να περιέχει όρους στα χωρικά παράγωγα του v_s . Ωστόσο, αν v_s θεωρηθεί, ότι μεταβάλλεται αργά, αυτοί οι όροι θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε διορθώσεις των υψηλότερων τάξεων του μικρού μεγέθους στην εξίσωση μεταφοράς.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \mathbf{p}} &= \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{v}_s, \\ \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s) = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \nabla \rho + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{v}_s. \end{aligned} \right\} \quad (77.4)$$

Στη δεύτερη εξίσωση έχουμε χρησιμοποιήσει τα δεδομένα, ότι η ενέργεια ϵ εξαρτάται από το μεταβλητή πυκνότητας ρ και έτσι μπορεί να εξαρτώνται από τις συντεταγμένες και (στο μετασχηματισμό των παραγώγων του ρ , v_s) ότι η υπερρευστή ροή είναι πάντα μια πιθανή ροή:

$$\text{curl } \mathbf{v}_s = 0. \quad (77.5)$$

Η εξίσωση συνέχειας για την πυκνότητα είναι

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } \mathbf{i} = 0, \quad (77.6)$$

όπου \mathbf{i} είναι εξ ορισμού η δυναμική του υγρού ανά μονάδα όγκου. Μία έκφραση για \mathbf{i} μπορεί να βρεθεί κατευθείαν από το δεύτερο τύπο (77.2) αθροίζοντας πάνω από όλα τα οιονεί σωματίδια σε μονάδα όγκου:

$$\mathbf{i} = \rho \mathbf{v}_s + \langle \mathbf{p} \rangle. \quad (77.7)$$

Εδώ και στην υπόλοιπη της §77, οι αγκύλες υποδηλώνουν την ένταξη στη δυναμική κατανομή:

$$\langle \dots \rangle = \int \dots n d^3p / (2\pi\hbar)^3.$$

Μένει να βρούμε μια εξίσωση για την υπερρευστή ταχύτητα. Για να γίνει αυτό, θα ξεκινήσουμε από το νόμο της διατήρησης της ορμής που εκφράστηκαν από

$$\frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}_\beta} = 0, \quad (77.8)$$

όπου \mathbf{i} δίνεται από (77.7) και $\Pi_{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής ροής της ορμής. Έστω $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$ είναι η τιμή αυτού του τανυστή στα πλαίσια αναφοράς K_0 . Μετασχηματισμός στο πλαίσιο αποδόσεων K^*

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta} &= \Pi_{\alpha\beta}^{(0)} + \rho v_{s\alpha} v_{s\beta} + v_{s\alpha} i_\beta^{(0)} + v_{s\beta} i_\alpha^{(0)} \\ &= \Pi_{\alpha\beta}^{(0)} + \rho v_{s\alpha} v_{s\beta} + v_{s\alpha} \langle p_\beta \rangle + v_{s\beta} \langle p_\alpha \rangle; \end{aligned} \quad (77.9)$$

* Ο τύπος μετασχηματισμού του Galilean για $\Pi_{\alpha\beta}$ βρίσκεται εύκολα θεωρώντας ένα κλασσικό σύστημα των σωματιδίων, για τα οποία $\Pi_{\alpha\beta} = \sum p_\alpha u_\beta = \sum m_\alpha u_\beta$, όπου το άθροισμα είναι από όλα τα σωματίδια σε μονάδα όγκου.

$i^{(0)} = \{\rho\}$ είναι η δυναμική ανά μονάδα όγκου του υγρού στο πλαίσιο K_0 . Αυτό καθορίζει την εξάρτηση του τανυστή $\Pi_{\alpha\beta}$ για την ταχύτητα v_s .

Για περαιτέρω μετασχηματισμό της εξίσωσης (77.8) πάμε πίσω στην εξίσωση μεταφοράς (77.1) πολλαπλασιάζοντας το με p_α και ενσωματώνοντα $d^3p / (2\pi\hbar)^3$. Επειδή η ολική ορμή των οιονεί σωματιδίων διατηρείται σε συγκρούσεις, η δεξιά πλευρά της εξίσωσης γίνεται μηδέν. Το ολοκλήρωμα στην αριστερή πλευρά μετασχηματίζεται ακριβώς όπως στην παραγωγή του (74.10) δίνοντας

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle p_\alpha \rangle + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \langle p_\alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial p_\beta} \rangle + \left\langle \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\alpha} \right\rangle = 0. \quad (77.10)$$

Τώρα αντικαθιστάμε στο (77.8) την έκφραση (77.7) και (77.9) για το \mathbf{i} και $\Pi_{\alpha\beta}$ και στη συνέχεια εξαλείφουμε $\partial p / \partial t$ και $\partial \{p\} / \partial t$ μέσω των (77.6) και (77.10). Το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{\partial v_{s\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{v_s^2}{2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right\rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \langle p_\alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial p_\beta} \rangle = 0.$$

Από τον όρο $\text{curl } \mathbf{v}_s = 0$ (ο οποίος έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στο δεύτερο όρο) προκύπτει, ότι το άθροισμα των τριών τελευταίων όρων θα πρέπει να είναι η κλίση κάποιας λειτουργίας. Επιπλέον, ο ταυιστής $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$ στην απουσία των οιονεί σωματιδίων πρέπει να είναι ίσος προς $P_0 \delta_{\alpha\beta}$, όπου $P_0(\rho)$ είναι η πίεση του υγρού $T = 0$. Αυτά τα επιχειρήματα δίνουν το μόνο δυνατό τύπο του $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = \langle p_{\alpha} \partial \epsilon / \partial p_{\beta} \rangle + \delta_{\alpha\beta} [P_0 + \rho \langle \partial \epsilon / \partial \rho \rangle]. \quad (77.11)$$

Η εξίσωση για \mathbf{v}_s γίνεται τώρα

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left[\frac{1}{2} v_s^2 + \frac{\mu_0}{m} + \left\langle \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right\rangle \right] = 0, \quad (77.12)$$

όπου μ_0 είναι το χημικό δυναμικό του υγρού σε $(T = 0)$ που σχετίζεται με την πίεση P_0 από τον θερμοδυναμικό τύπο $d\mu_0 = md P_0 / \rho$ (όπου m είναι η μάζα του σωματιδίου ενός υγρού και m/ρ ο μοριακός όγκος).

Οι εξισώσεις (77.1), (77.6) και (77.12) για ένα πλήρες σετ για την περιγραφή ενός υπερρευστού στην κατάσταση μη ισορροπίας (I.M.) > Khalatnikov 1952).

Για την πληρότητα, ας εξετάσουμε επίσης το νόμο της διατήρησης της ενέργειας. Αυτό εκφράζεται από

$$\partial E / \partial t + \text{div } \mathbf{q} = 0, \quad (77.13)$$

όπου \mathbf{q} είναι η ροή της ενέργειας στο υγρό. Σύμφωνα με το (77.2),

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\rho) + \langle \epsilon \rangle + \mathbf{v}_s \cdot \langle \mathbf{p} \rangle + \frac{1}{2} \rho v_s^2, \quad (77.14)$$

όπου $E_0(\rho)$ είναι η ενέργεια σε $T = 0$ και σχετίζεται με το χημικό δυναμικό από $dE_0 = \mu_0 d\rho / m$. Με τη διαφοροποίηση (77.14) σε σχέση με το χρόνο και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που είναι ήδη διαθέσιμες για τις διάφορες ποσότητες, η ροή της ενέργειας μπορεί να βρεθεί. Κάνοντας τους υπολογισμούς, θα δώσουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$\mathbf{q} = (\langle \mathbf{p} \rangle + \rho \mathbf{v}_s) \left[\frac{\mu_0}{m} + \left\langle \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right\rangle + \frac{1}{2} v_s^2 \right] + \left\langle (\epsilon + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{v}_s \right) \right\rangle. \quad (77.15)$$

Η ισορροπία της συνάρτησης κατανομής του οιονεί σωματιδίου σε ένα πλαίσιο αναφοράς, όπου το «αέριο του οιονεί σωματιδίου» είναι σε κατάσταση ηρεμίας ως σύνολο (για παράδειγμα, η κανονική ταχύτητα $\mathbf{v}_n = 0$) είναι η συνήθης κατανομή Bose με την ενέργεια του οιονεί σωματιδίου $\tilde{\epsilon}$ δίνεται από το (77.3). Η κατανομή σε ένα πλαίσιο

όπου η κανονική ταχύτητα δεν είναι μηδέν λαμβάνεται για την αντικατάσταση $\bar{\epsilon}$ σε $\epsilon - \rho \cdot v_n$. Έτσι, η κατανομή ισορροπίας των οιονεί σωματιδίων όταν και οι δύο κινήσεις είναι παρόντες είναι

$$n(\mathbf{p}) = \left[\exp \frac{\epsilon + (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{p}}{T} - 1 \right]^{-1} \quad (77.16)$$

Κατά μέσο όρο οι παραπάνω εξισώσεις κατά τη διάρκεια αυτής της διανομής, οι εξισώσεις των δύο ταχυτήτων υδροδυναμικών (χωρίς τους όρους *dissipative*, σε αυτή την προσέγγιση) μπορεί να προκύψει, αλλά εμείς δεν θα σταματήσουμε να το κάνουμε εδώ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Προσδιορίστε το συντελεστή απορρόφησης ήχου σε ένα υγρό Bose σε συχνότητες $\omega \gg \nu$, όπου ν είναι η συχνότητα της σύγκρουσης του οιονεί σωματιδίου. Η θερμοκρασία υποτίθεται ότι είναι τόσο χαμηλή που σχεδόν όλα τα οιονεί σωματίδια είναι φωτόνια (A. F. Andreev and I. M. Khalatnikov 1963).

ΛΥΣΗ. Κάτω από τις συνθήκες που δηλώθηκαν, μπορούμε να παραμελήσουμε τη σύγκρουση του ολοκληρώματος (77.1). Βάλαμε $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $n = n_0 + \delta n$ (όπου $\delta\rho$ και δn είναι μικρές διορθώσεις στην πυκνότητα ισορροπίας του υγρού και της συνάρτησης κατανομής ισορροπίας του φωτονίου) και γραμμικοποίηση εξισώσεων (77.1), (77.6) και (77.12) σε σχέση με τις μικρές ποσότητες $\delta\rho$, δn και v_s . Υποθέτοντας, ότι όλα αυτές οι αναλογίες με \exp βρίσκουμε

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) \delta n = \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \delta \rho + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s \right), \quad (1)$$

$$\omega \delta \rho - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_s \rho = \int \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} \delta n d^3 p / (2\pi\hbar)^3 \quad (2)$$

$$\omega v_s - \mathbf{k} u_0^2 \delta \rho / \rho = \mathbf{k} \int \{ n (\partial^2 \epsilon / \partial \rho^2) \delta \rho + (\partial \epsilon / \partial \rho) \delta n \} d^3 p / (2\pi\hbar)^3. \quad (3)$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει τις θερμοδυναμικές σχέσεις

$$d(\mu_0/m) = dP_0/\rho = u_0^2 d\rho/\rho,$$

όπου u_0 είναι η ταχύτητα του ήχου σε $T = 0$; ο δείκτης 0 στο ρ και n παραλείπεται εδώ και στο εξής.

Δεδομένου ότι ο αριθμός των φωτονίων είναι μικρός σε θερμοκρασίες κοντά στο μηδέν, οι εκφράσεις στα δεξιά των εξισώσεων (1)-(3) είναι μικρές διορθώσεις. Παραλείποντας τους συνολικά, έχουμε από το (2) και (3)

$$\omega = u_0 k, \quad \mathbf{v}_s = u_0 (\delta \rho / \rho) \mathbf{k} / k. \quad (4)$$

Στην επόμενη προσέγγιση έχουμε αντικαταστήσει αυτές στα δεξιά του (1):

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \frac{v \cos \theta}{v \cos \theta - \omega/k} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} + \frac{\rho u_0}{\rho} \cos \theta \right) \delta \rho, \quad (5)$$

όπου το θ είναι η γωνία μεταξύ ρ και \mathbf{k} . Η σχέση διασποράς του φωτονίου είναι γραμμικό

$$\epsilon(\mathbf{p}) = u_0 p (1 + \alpha p^2), \quad v = \partial \epsilon / \partial p = u_0 (1 + 3\alpha p^2),$$

συμπεριλαμβάνοντας τον επόμενο όρο μετά την γραμμική στην επέκταση; Για το υγρό ήλιο σε συνήθεις πιέσεις, $\alpha > 0$ σημαίνει, ότι τα φωτόνια είναι ασταθείς σε σχέση με την αυθόρμητη αποσύνθεση.

Η παρουσία ενός «συντονισμένου» παρανομαστή στο (5) οδηγεί (βλέπε παρακάτω) σε ένα μεγάλο λογαριθμικό παράγοντα στην ολοκλήρωση. Χρησιμοποιούμε μόνο λογαριθμική ακρίβεια και παραμέληση στα δεξιά του (3) όρου στο $\delta\rho$, το οποίο δεν έχει τέτοιο παρανομαστή. Στη συνέχεια, εξαλείφοντας το ν από το (2) και (3) έχουμε τελικά καταλήξει στη σχέση διασποράς

$$\frac{\omega^2}{k^2} - u_0^2 = A \frac{u_0^2}{\rho} \int \frac{p^2}{\cos \theta - 1 + 3\alpha p^2 - i0} \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (6)$$

όπου

$$A = \left(1 + \frac{\rho}{u_0} \frac{d u_0}{d \rho} \right)^2.$$

Το φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος ως προς το $\cos \theta$ προσδιορίζεται με το πέρασμα γύρω από το πόλο (ο οποίος είναι στην περιοχή της ενσωμάτωσης $\alpha > 0$). Το πραγματικό μέρος υπολογίζεται με λογαριθμική ακρίβεια κόβοντας την ενσωμάτωση στο κατώτερο όριο $1 - \cos \theta \sim \alpha p^2 \sim \alpha T^2 / u_0^2$ και στο ανώτερο όριο $1 - \cos \theta \sim 1$. Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (6) γράφεται ως $2 u_0 (\delta u - u_0 \gamma)$, όπου γ είναι ο συντελεστής απορρόφησης και δu η διόρθωση στην ταχύτητα του ήχου. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος δίνει

$$\delta u = (3\rho u_0 A / 4\rho) \log(u_0^2 / \alpha T^2), \quad \gamma = 3\pi \omega \rho A / 4\rho, \quad (7)$$

όπου $\rho_n = 2\pi^2 T^3 / 45 \hbar^3 u_0^3$ είναι το μέρος του φωτονίου της κανονικής πυκνότητας του υγρού. Οι εξαρτήσεις της συχνότητας και της θερμοκρασίας του γ είναι φυσικά το ίδιο όπως εκείνα που βρέθηκαν στη §73.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΧ ΜΕΤΑΛΛΑ

§78. Υπολειμματική αντίσταση

Οι ιδιότητες μεταφοράς των μετάλλων είναι πολύ πιο περίπλοκες από ό, τι εκείνες των μονωτήρων, έστω και μόνο επειδή περιέχουν οιονεί σωματίδια διαφόρων ειδών (ηλεκτρόνια αγωγιμότητας και φωτόνια).

Το ηλεκτρικό φορτίο φυσικά μεταφέρεται από τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας. Η μεταφορά θερμότητας από την άλλη πλευρά, είναι και από τα ηλεκτρόνια και τα φωτόνια. Στην πράξη ωστόσο, τα ηλεκτρόνια επίσης κυρίαρχα σε θερμική αγωγιμότητα σε μέταλλα επαρκώς υψηλής καθαρότητας, κυρίως επειδή οι ταχύτητές τους (u_F επί της

επιφάνειας Fermi) είναι πολύ μεγαλύτερες από εκείνες των φωτονίων (η ταχύτητα του ήχου). Επιπλέον, σε χαμηλές θερμοκρασίες το ηλεκτρόνιο σε ειδική θερμότητα υπερβαίνει σημαντικά την ειδική θερμότητα του φωτονίου.

Τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας υφίστανται συγκρούσεις διαφόρων τύπων: ένας με τον άλλο, με φωτόνια και με άτομα πρόσμιξης (και άλλα ελαττώματα πλέγματος). Η συχνότητα σύγκρουσης για τους δυο πρώτους τύπους μειώνεται με τη θερμοκρασία. Σε αρκετά χαμηλές θερμοκρασίες κατά συνέπεια, η διασκόρπιση των ηλεκτρονίων από ακαθαρσίες είναι ο καθοριστικός παράγοντας σε φαινόμενα μεταφοράς. Αυτή η τάξη ονομάζεται *εναπομένουσα αντοχή* τάξης και εμείς θα θεωρήσουμε αυτό ως το πρώτο θέμα στην κινητική των μετάλλων.

Οι σχέσεις μεταξύ του ηλεκτρικού ρεύματος j και της ροής ενέργειας ποσοτικομηχανικό q' σε ένα μέταλλο και το ηλεκτρικό πεδίο E και την θερμοκρασιακή κλίση, έχουν την μορφή (44.12), (4.13).

$$\mathbf{E} + \nabla(\mu/e) = \mathbf{j}/\sigma + \alpha \nabla T, \quad (78.1)$$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} - (\varphi - \mu/e)\mathbf{j} = \alpha T \mathbf{j} - \kappa \nabla T. \quad (78.2)$$

Σε αυτή τη μορφή εφαρμόζονται σε κρυστάλλους με κυβική συμμετρία, καθώς και για την απλότητα, αυτή η συμμετρία θα θεωρηθεί παντού. Για κρυστάλλους που δεν έχουν κυβική συμμετρία, οι συντελεστές σ , κ και α αντικαθίστανται από τανυστές βαθμού δύο. Η σχέση (78.2) είναι πιο βολική να χρησιμοποιηθεί, αν j σε αυτό εκφράζεται με όρους της E μέσω του (78.1):

$$\mathbf{q}' = \sigma \alpha T [\mathbf{E} + \nabla(\mu/e)] - (\kappa + T \sigma \alpha^2) \nabla T. \quad (78.3)$$

Η συζήτηση στη §74 για την εξίσωση μεταφοράς για ένα υγρό Fermi παραμένει σε μεγάλο βαθμό έγκυρο για ένα υγρό ηλεκτρόνιο σε ένα μέταλλο. Η ορμή των οιονεί σωματιδίων εδώ αντικαθιστώνται από την οιονεί ορμή τους και η μορφή της επιφάνειας Fermi είναι γενικά πολύπλοκη και διαφορετικό για κάθε άτομο μετάλλου.

Οι συντελεστές μεταφοράς για ένα μέταλλο στην αρχή υπολογίζεται με τη βοήθεια της εξίσωσης μεταφοράς γραμμικοποιημένη

$$-e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \partial n_0 / \partial \epsilon + \mathbf{v} \cdot \partial n_0 / \partial \mathbf{r} = I(\delta \bar{n}),$$

όπου $v = \partial \epsilon / \partial p$ και το ολοκλήρωμα σύγκρουσης γραμματικοποιείται σε σχέση με την απαιτούμενη μικρή λειτουργία $\delta \bar{n}$ που καθορίζεται από το (74.13). Διαφοροποίηση του

n_0 σε σχέση με το τ μπορεί αυθαίρετα να πραγματοποιηθεί με $\mu =$ σταθερή, δεδομένου, ότι η κλίση του μ θα εξακολουθεί να εισέρχεται στο συνδυασμό $eE + \nabla\mu$, όπως θα έπρεπε κατά (78.1). Τότε

$$\frac{\partial n_0}{\partial T} = -\frac{\epsilon - \mu}{T} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon},$$

και η εξίσωση μεταφοράς παίρνει τη μορφή

$$-\left(e\mathbf{E} + \frac{\epsilon - \mu}{T} \nabla T\right) \cdot \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} = I(\delta\bar{n}). \quad (78.4)$$

Η πυκνότητα ρεύματος και η ποσοτικομηχανική ενεργειακή ροή δίνονται από τα ολοκληρώματα

$$\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta\bar{n} \cdot 2d^3p / (2\pi\hbar)^3, \quad \mathbf{q}' = \int (\epsilon - \mu) \mathbf{v} \delta\bar{n} \cdot 2d^3p / (2\pi\hbar)^3; \quad (78.5)$$

όταν \mathbf{q}' υπολογίζεται ως η ροή της κινητικής ενέργειας $\epsilon - \mu$, δεν υπάρχει καμία ανάγκη να αφαιρεθεί η αγώγιμη μεταφορά του ενεργειακού δυναμικού, ϕ_j .

Ένα χαρακτηριστικό της διασκόρπισης ηλεκτρονίων αγωγιμότητας από άτομα πρόσμιξης είναι ότι είναι ελαστική. Επειδή τα άτομα έχουν μια μεγάλη μάζα και είναι "αναπήδημα" στο πλέγμα, η ενέργεια ηλεκτρονίων μπορεί να θεωρηθεί ως αμετάβλητη σε μία σύγκρουση. Θα αποδειχθεί, ότι η υπόθεση της ελαστικής διασκόρπισης είναι από μόνη της αρκετή για να δώσει μια απλή σχέση μεταξύ των ηλεκτρικών και θερμικών αγωγιμοτήτων του μετάλλου.

Για να επιτευχθεί αυτό, σημειώνουμε ότι ο φορέας της ελαστικής σύγκρουσης δεν επηρεάζει την εξάρτηση της λειτουργίας $\delta\bar{n}$ στην ενέργεια ϵ ; Οι συγκρούσεις μετακινούν απλά τα σωματίδια σε συνεχή - ενεργειακή επιφάνεια. Αυτό σημαίνει, ότι κάθε παράγοντας δn που εξαρτάται μόνο από το ϵ μπορεί να ληφθεί έξω από το χειριστή I . Μπορούμε να αναζητήσουμε ως εκ τούτου τη λύση της εξίσωσης μεταφοράς στο τύπο

$$\delta\bar{n} = \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \left(e\mathbf{E} + \frac{\epsilon - \mu}{T} \nabla T \right) \cdot \mathbf{l}(\mathbf{p}), \quad (78.6)$$

όπου $I(\mathbf{p})$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$I(\mathbf{l}) = -\mathbf{v}. \quad (78.7)$$

Η πυκνότητα ρεύματος που υπολογίζεται από τη διανομή (78.6) είναι

$$\mathbf{j} = -e \int \left\{ e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{l})\mathbf{v} + \frac{\epsilon - \mu}{T} (\mathbf{l} \cdot \nabla T)\mathbf{v} \right\} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (78.8)$$

Ο πρώτος όρος δίνει τον τανυστή αγωγιμότητας

$$\sigma_{\alpha\beta} = -e^2 \int v_{\alpha} v_{\beta} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (78.9)$$

Σε ένα κρύσταλλο με κυβική συμμετρία, $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$ και η αγωγιμότητα είναι

$$\sigma = -\frac{1}{3}e^2 \int \mathbf{1} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

ή, μετατρέποντας το ολοκλήρωμα όπως στο (74.18) - (74.20),

$$\sigma = \frac{2}{3}e^2 J_F, \quad J = \int \mathbf{1} \cdot \mathbf{v} dS/v(2\pi\hbar)^3. \quad (78.10)$$

Η ένταξη στο J_F πάνω σε όλα τα σημεία της επιφάνειας Fermi με ένα μοναδικό κύτταρο του αμοιβαίου πλέγματος.

Ομοίως, ο δεύτερος όρος στο (78.8) δίνει συγκρίνοντας με (78.1)

$$\alpha\sigma = \frac{2e}{3T} \int \eta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{1}) \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

όπου $\eta = \epsilon - \mu$. Η ενσωμάτωση πάνω στο d^3p αντικαθίσταται από την ένταξη πάνω από τις συνεχείς- ενέργεια επιφάνειες $\eta = \text{σταθερή}$ και πάνω η . Πάλι με το J στο (78.10), βρίσκουμε

$$\alpha\sigma = \frac{2e}{3T} \int J\eta \frac{\partial n_0}{\partial \eta} d\eta. \quad (78.11)$$

Η συνάρτηση

$$\frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{T(e^{\eta/T} + 1)(e^{-\eta/T} + 1)}$$

μειώνεται εκθετικά ως $\eta \rightarrow \pm\infty$; Η ενσωμάτωση σε σχέση με το η μπορεί να επεκταθεί από $-\infty$ σε $+\infty$. Το ολοκλήρωμα διέπεται κυρίως από τη σειρά $|\eta| \sim T$; $J(\eta)$ από την άλλη πλευρά ποικίλλει σημαντικά μόνο στην περιοχή $\eta \sim \mu \gg T$. Επομένως, αρκεί να γράψετε

$$J \approx J_F + \eta dJ/d\epsilon_F.$$

Στην αντικατάσταση του (78.11), το ολοκλήρωμα του πρώτου όρου είναι μηδέν, επειδή το ολοκλήρωμα είναι μία περιττή συνάρτηση του η ; Ο δεύτερος όρος δίνει

$$\begin{aligned} \alpha\sigma &= \frac{2e}{3T} \frac{dJ}{d\epsilon_F} 2 \int_0^\infty \eta^2 \frac{\partial n_0}{\partial \eta} d\eta \\ &= -\frac{8e}{3T} \frac{dJ}{d\epsilon_F} \int_0^\infty \eta n_0 d\eta. \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{e^{\eta/T} + 1} = \frac{\pi^2}{12} T^2;$$

χρησιμοποιώντας επίσης (78.10), βρίσκουμε

$$\alpha = -\frac{\pi^2 T}{3e} \frac{d \log J}{d\epsilon_F}. \quad (78.12)$$

Στην τάξη μεγέθους, $|\alpha| \sim T/\epsilon_F$.

Ας βάλουμε τώρα $E = 0$ και υπολογίστε τη ροή της ενέργειας. Πάλι χρησιμοποιώντας με τη κυβική συμμετρία, θα βρούμε

$$\mathbf{q}' = \frac{2\nabla T}{3T} \int_{-\infty}^{\infty} J \eta^2 \frac{\partial n_0}{\partial \eta} d\eta.$$

Εδώ είναι αρκετό να βάλουμε $J = J_F$ που δίνει

$$\mathbf{q}' = -\frac{2\pi^2}{9} T J_F \nabla T.$$

Συγκρίνοντας (78.3) και (78.10) δείχνει, ότι

$$\kappa + T\sigma\alpha^2 = \pi^2 \sigma T / 3e^2.$$

Από την εκτίμηση της α που δόθηκε παραπάνω, ο όρος $T\sigma\alpha^2$ στα αριστερά είναι μικρός σε σύγκριση με τη δεξιά πλευρά, στην αναλογία $(T/\epsilon_F)^2$. Η παραμέληση αυτού του όρου, έχουμε τελικά την ακόλουθη σχέση μεταξύ των θερμικών και ηλεκτρικών αγωγιμοτήτων:

$$\kappa = (\pi^2 T / 3e^2) \sigma, \quad (78.13)$$

ο νόμος Wiedermann- Franz *.

Πρέπει να τονίσουμε και πάλι, ότι η απόδειξη αυτής της σχέσης χρησιμοποιεί μόνο το γεγονός ότι η διασκόρπιση των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας είναι ελαστική. Η εξέταση της απόδειξης επίσης δείχνει εύκολα, ότι η υπόθεση της κυβικής συμμετρίας απλώς απλοποιεί το τύπο. Στην γενική περίπτωση, όπου ο κρύσταλλος έχει οποιαδήποτε συμμετρία, μια παρόμοια σχέση (78.13) υπάρχει μεταξύ των τανυστών $\kappa_{\alpha\beta}$ και $\sigma_{\alpha\beta}$.

Για να βρούμε την εξάρτηση θερμοκρασίας των συντελεστών κ και σ χωριστά, χρειάζεται η σύγκρουση του ολοκληρώματος. Για συγκρούσεις με άτομα πρόσμιξις, η

μορφή της είναι ακριβώς ανάλογη με το ολοκλήρωμα (70.3) για τη διασκόρπιση φωτονίων από ακαθαρσίες:

$$C(n) = N_{\text{imp}} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [n'(1-n) - n(1-n')] \delta(\epsilon - \epsilon') \cdot 2d^3p' / (2\pi\hbar)^3. \quad (78.14)$$

Οι παράγοντες $1-n$ και $1-n'$ που λαμβάνονται υπόψη από την αρχή του Pauli (η μετάβαση μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο σε μια μη κατειλημμένη κατάσταση); Οι παράγοντες n και n' σημαίνουν, ότι διασκόρπιση μπορεί να προκύψει από μια κατεχόμενη κατάσταση. Όπως στο (70.3), θεωρείται ότι στο ολοκλήρωμα (78.14), ότι τα άτομα πρόσμιξης κατανεμήθηκαν τυχαία και ότι η μέση απόσταση μεταξύ τους είναι πολύ μεγαλύτερη από το πλάτος διασκόρπισης; Τα διάφορα άτομα, στη συνέχεια διασκορπίζονται ανεξάρτητα. Η εξίσωση $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στο (78.14). Η προσέγγιση Born είναι δεν ισχύει σε γενικές γραμμές για τη διασκόρπιση των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας από άτομα πρόσμιξεις. Η εξίσωση που δίνεται μπορεί να

* Ένας τύπος του τύπου (78.13) παρήχθη ποιοτικά από τον P. Drude (1900), ο οποίος πρώτος διαμόρφωσε την έννοια της αγωγιμότητας των ηλεκτρονίων που συμμετέχουν στη θερμική ισορροπία του μετάλλου. Το ποσοτικό αποτέλεσμα στην κλασική στατιστική δόθηκε από τον H.A. Lorentz (1905) και στα στατιστικά Fermi από τον A. Sommerfeld (1928).

δικαιολογηθεί από τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται κατά τον υπολογισμό της αρχής της λεπτομερούς ισορροπίας, με το τύπο (2.8). Εδώ ωστόσο, υπονοείται ότι οι θέσεις που καταλαμβάνονται από τα άτομα πρόσμιξεις στο πλέγμα μετάλλου έχουν συμμετρία που επιτρέπουν την αναστροφή.

Η γραμμικοποίηση των ποσών των συγκρούσεων του ολοκληρώματος στην αντικατάσταση της διαφοράς $n'(1-n) - n(1-n') = n; - n$ με $\delta n' - \delta n$. Η εξίσωση (78.7) γίνεται τότε

$$N_{\text{imp}} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (1-1) \delta(\epsilon - \epsilon') \cdot 2d^3p' / (2\pi\hbar)^3 = -\mathbf{v}. \quad (78.15)$$

Αυτό δεν περιλαμβάνει την θερμοκρασία. Η λύση $g(\mathbf{p})$ είναι επομένως ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία, όπως είναι η αγωγιμότητα σ από την (78.10). Έτσι σε αρκετά χαμηλές θερμοκρασίες, όταν η διασκόρπιση από πρόσμιξεις είναι ο κύριος μηχανισμός για την ηλεκτρική αντίσταση, η αντίσταση τείνει σε μια σταθερή

(υπολειμματική) αξία. Κατά συνέπεια, η θερμική αγωγιμότητα κ σε αυτό το φάσμα είναι ανάλογη με T .*

Για μια πρόχειρη ποσοτική εκτίμηση της υπολειμματικής αντίστασης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον στοιχειώδη τύπο (43.7), θέτοντας (για ηλεκτρόνια σε ένα μέταλλο) $p \sim p_F$:

$$\sigma \sim e^2 N v_F / p_F, \quad (78.16)$$

όπου N είναι η πυκνότητα του ηλεκτρονίου. Για διασκόρπιση από ακαθαρσίες, η μέση ελεύθερη διαδρομή $l \sim 1/N_{imp} \sigma_1$, όπου σ_1 είναι η διασκόρπιση μεταφοράς διατομής. Εξ ου και η υπολειμματική αντίσταση ρ_{res} είναι

$$\rho_{res} \sim N_{imp} \sigma_1 p_F / e^2 N. \quad (78.17)$$

Ένα περαιτέρω σχόλιο θα πρέπει να προστεθεί στη παραπάνω συζήτηση. Η γενική προϋπόθεση για την εφαρμογή της εξίσωσης μεταφοράς σε ένα υγρό Fermi απαιτεί, ότι η κβαντική αβεβαιότητα για την ενέργεια των ηλεκτρονίων πρέπει να είναι μικρή σε σύγκριση με το πλάτος ($\sim T$) του θερμικού θολώματος της κατανομής Fermi.

* Στην ανάλυση αυτή υποτίθεται ότι η εξίσωση (78.15) δεν περιέχει ποσότητες που ποικίλλουν γρήγορα κοντά στο $\epsilon = \epsilon_F$ και γι' αυτό μπορεί το l να αντικατασταθεί από το l στο (78.9). Αυτό είναι αλήθεια για διασκόρπιση με συνήθεις ακαθαρσίες, αλλά όχι για διασκόρπιση από παραμαγνητικά άτομα.

Αυτή η αβεβαιότητα είναι $\sim \hbar/\tau$, όπου τα $\tau \sim 1/v_F$ είναι η μέση ελεύθερη ώρα. Για διασκόρπιση από ακαθαρσίες $l \sim 1/N_{imp} \sigma_1$; Η αβεβαιότητα \hbar/τ είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία και συνεπώς θολώνει το όριο Fermi ακόμη και όταν $T = 0$. Εκ πρώτης όψεως προκύπτει, ότι το σύνολο της παραπάνω συζήτησης υπόκειται στην πολύ σοβαρή κατάσταση ανάλογα με τη συγκέντρωση ακαθαρσιών. Στην πραγματικότητα ωστόσο, δεν υπάρχει τέτοιος περιορισμός (L. D. Landau, 1934)

$$T \gg \hbar v_F \sigma_1 N_{imp}, \quad (78.18)$$

Ο λόγος είναι, ότι λόγω των σταθερών θέσεων των ατόμων πρόσμιξης και την ελαστικότητα της διασκόρπισης των ηλεκτρονίων από αυτά, ολόκληρο το πρόβλημα υπολογισμού του ηλεκτρικού ρεύματος μπορεί κατ' αρχήν να τυποποιηθεί ως πρόβλημα κβαντικής μηχανικής της κίνησης ενός ηλεκτρονίου σε ένα περίπλοκο εξωτερικό πεδίο

που έχει ένα δυναμικό. Οι καταστάσεις του ηλεκτρονίου προσδιορίζονται ως στάσιμες καταστάσεις σε αυτό το πεδίο, η ενέργεια δεν έχει αβεβαιότητα; Σε $T=0$, τα ηλεκτρόνια καταλαμβάνουν μια σειρά από καταστάσεις που οριοθετούνται από μία επιφάνεια Fermi, αλλά στο χώρο των κβαντικών αριθμών για κίνηση στο πεδίο και όχι στο χώρο ορμής. Με αυτή τη διατύπωση του προβλήματος, οι συνθήκες του τύπου (78.18) δεν προκύπτουν.

§79. Αλληλεπίδραση ηλεκτρόνιο-φωτόνιο

Σε επαρκώς καθαρά μέταλλα, ο κύριος μηχανισμός για τη δημιουργία της ισορροπίας σε μία ευρεία περιοχή θερμοκρασίας είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας και φωτόνια.

Η προϋπόθεση για ένα ηλεκτρόνιο να είναι σε θέση να εκπέμπει (ή να απορροφά) ένα φωτόνιο απαιτεί η ταχύτητα του ηλεκτρονίου να είναι μεγαλύτερη από εκείνη του φωτονίου. Συγκρίνετε το ανάλογο αποτέλεσμα στη §68 για την εκπομπή ενός φωτονίου από ένα φωτόνιο. Η ταχύτητα των ηλεκτρονίων στην επιφάνεια Fermi είναι όμως συνήθως μεγάλη σε σύγκριση με εκείνη των φωτονίων; Η κατάσταση είναι συνεπώς ικανοποιητική και η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα σύγκρουσης ηλεκτρόνιο-φωτόνιο προέρχεται από αυτές μόνο ένα-φωτόνιο διεργασίες.

Το ολοκλήρωμα σύγκρουσης έχει τότε τον ακόλουθο τύπο ανάλογο προς το ολοκλήρωμα φωτόνιο- φωτόνιο (67.6): *

$$\begin{aligned}
 C_{e,ph}(n_p) = & \int w(\mathbf{p}', \mathbf{k}; \mathbf{p}) \{n_p(1 - n_p)N_k - n_p(1 - n_p)(1 + N_k)\} \times \\
 & \times \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'} - \omega_k) d^3k / (2\pi)^3 \\
 & + \int w(\mathbf{p}'; \mathbf{p}, \mathbf{k}) \{n_p(1 - n_p)(1 + N_k) - n_p(1 - n_p)N_k\} \times \\
 & \times \delta(\epsilon_p + \omega_k - \epsilon_{p'}) d^3k / (2\pi)^3.
 \end{aligned} \tag{79.1}$$

Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί σε διεργασίες με εκπομπή ενός φωτονίου που διαθέτει οιονεί ορμή k από ένα ηλεκτρόνιο που έχει μία δεδομένη οιονεί ορμή p και τις αντίστροφες διαδικασίες με απορρόφηση ενός φωτονίου k από ηλεκτρόνια p' με επιστροφή στην οιονεί ορμή p :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} + \mathbf{b}; \tag{79.2a}$$

σε αυτές τις διαδικασίες, οι μεταβάσεις λαμβάνουν χώρα μεταξύ μιας κατάστασης ηλεκτρονίου με δεδομένη ενέργεια ϵ_p και καταστάσεις χαμηλότερης ενέργειας. Ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί σε διεργασίες με απορρόφηση ενός φωτονίου από ένα ηλεκτρόνιο p και τις αντίστροφες διαδικασίες της εκπομπής από ηλεκτρονία p' :

$$\mathbf{p} + \mathbf{k} = \mathbf{p}' + \mathbf{b}; \quad (79.2b)$$

σε αυτές τις διαδικασίες οι μεταβάσεις λαμβάνουν χώρα μεταξύ μιας καθορισμένης κατάστασης ηλεκτρονίων και αυτών με υψηλότερη ενέργεια. Για τους ίδιους λόγους όπως και στην περίπτωση των εκπομπών των φωτονίων από φωτόνια (§66), η τιμή του b στις εξισώσεις (79.2) προσδιορίζεται μοναδικά καθορίζοντας τις τιμές των k και p με την προϋπόθεση, ότι p' πρέπει να είναι στο ίδιο επιλεγμένο πυρήνα του αμοιβαίου πλέγματος. Οι παράγοντες λειτουργία δέλτα (79.1) εκφράζουν το νόμο της διατήρησης της ενέργειας; ϵ_p είναι η ενέργεια ηλεκτρονίου και ω_k η ενέργεια του φωτονίου. Όπως και στο κεφάλαιο VII, η συνάρτηση κατανομής του φωτονίου (αριθμοί κατεχόμενων μελών) υποδηλώνονται από το n_p . Οι δείκτες που σηματοδοτούν το τμήμα του φάσματος του φωτονίου και τα σημάδια της άθροισης σε σχέση με αυτούς, θα πρέπει να παραλείπεται για λόγους συντομίας.

* Στις §§79-83 οι μονάδες που χρησιμοποιήθηκαν είναι τέτοιες ώστε $h=1$.

Θεωρείται, ότι οι πιθανότητες μετάβασης είναι ανεξάρτητες από τη περιστροφική κίνηση του ηλεκτρονίου, οι οποίες είναι αμετάβλητες στην μετάβαση.

Υπάρχει μια παρόμοια έκφραση για τη σύγκρουση του ολοκληρώματος φωτόνιο – ηλεκτρόνιο, το οποίο πρόκειται να προστεθεί στο ολοκλήρωμα φωτόνιο-φωτόνιο στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς για τη λειτουργία διανομής του φωτονίου:

$$C_{ph,e}(N_k) = \int w(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{k}) \{n_p(1 - n_p)(1 + N_k) - n_p'(1 - n_p')N_k\} \times \\ \times \delta(\epsilon_p + \omega_k - \epsilon_p) \cdot 2d^3p/(2\pi)^3, \quad (79.3)$$

με $p=p' + k + b$. Αυτή η διαφορά μεταξύ του αριθμού των φωτονίων k εκπέμπονται από τα ηλεκτρόνια με οποιαδήποτε οιονεί ορμές p και του αριθμού που απορροφάται από τα

ηλεκτρόνια με οποιοδήποτε p' . Ο συντελεστής 2 επιτρέπει για τις δύο πιθανές περιστροφικές κινήσεις της εκπομπής ή απορρόφησης των ηλεκτρονίων.

Στην πρώτη τάξη θεωρία διαταραχών, οι πιθανότητες της εκπομπής φωτονίων ή απορρόφησης από ένα ηλεκτρόνιο που συμβαίνουν σε αυτά τα ολοκληρώματα προσδιορίζονται από το φορέα γραμμικής αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίου-φωτονίου στους φορείς φωτονίου $\hat{U}_i^{(n)}$ (66.2): Η γραμμικότητα αντιστοιχεί στο γεγονός ότι αυτοί οι φορείς είναι υπεύθυνοι για μεταβάσεις στις οποίες μόνο μια κατάσταση φωτονίου κατοχής αριθμών αλλάζει με ενότητα. Χωρίς να επαναλάβουμε τη συζήτηση της §66, μπορούμε να σημειώσουμε ότι, στο όριο καθώς η οιονεί ορμή k του φωτονίου τείνει στο μηδέν, η εκπομπή ή πιθανότητα απορρόφησης του φωτονίου είναι ανάλογη με k :

$$w \propto k. \quad (79.4)$$

Σύμφωνα με μία γενική ιδιότητα των πιθανοτήτων μετάβασης στη προσέγγιση Born, οι πιθανότητες των άμεσων και αντίστροφων μεταβάσεων είναι ίσες και έτσι *

$$w(\mathbf{p}', \mathbf{k}; \mathbf{p}) = w(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{k}). \quad (79.5)$$

Αυτό το ακίνητο έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στα ολοκληρώματα (79.1) και (79.3).

Μια περαιτέρω απλούστευση επιτυγχάνεται λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία (που εκφράζεται από το γεγονός ότι οι φορείς \hat{U}_i , είναι πραγματικές) με τις οποίες η

* Οι κβαντικοί αριθμοί i και f των αρχικών και τελικών καταστάσεων γράφονται πάντα στη σειρά fi με την ένδειξη για την πιθανότητα.

δημιουργία φωτονίου και εκμηδένιση των φορέων εμφανίζονται στο φορέα αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίου-φωτονίου. Εξαιτίας αυτού, η εκπομπή ενός φωτονίου με οιονεί ορμή k είναι ισοδύναμη στην απορρόφηση ενός με οιονεί ορμή $-k$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης το γεγονός, ότι οι ενέργειες των ηλεκτρονίων ϵ_p και $\epsilon_{p'}$ είναι κοντά στην ενέργεια Fermi. Έστω p και p' είναι διανύσματα στις κατευθύνσεις του p και p' καταλήγοντας στην επιφάνεια Fermi και έστω οι συναρτήσεις w να εκφραστούν όσον αφορά στις κατευθύνσεις των p_F και p'_F και οι διαφορές $\eta_\rho = \epsilon_{p'} - \epsilon_p$, $\eta_\rho = \epsilon_p - \epsilon_{p'}$ που αντιπροσωπεύουν με εγγύτητα την ενέργεια του ηλεκτρονίου ϵ_p . Όσον αφορά αυτές τις μεταβλητές, w είναι μια αργή μεταβαλλόμενη λειτουργία, η οποία αλλάζει αισθητά μόνο

σε περιοχές $\sim \epsilon_p \gg T$. Παραμελώντας ποσότητες $\sim \eta \sim T$ μπορούμε να βάλουμε $\eta_p = \eta_{p'} = 0$ σε αυτές τις λειτουργίες. Η ισοδυναμία που αναφέρθηκε παραπάνω εκφράζεται στη συνέχεια από την εξίσωση

$$w(\mathbf{p}_F, \mathbf{k}; \mathbf{p}_F) = w(\mathbf{p}_F; \mathbf{p}_F - \mathbf{k}), \quad (79.6)$$

το w είναι συναρτήσεις μόνον από τις κατευθύνσεις των \mathbf{p}_p και \mathbf{p}'_p . Αν τώρα αλλάξουμε το μεταβλητή της ολοκλήρωσης \mathbf{k} σε $-\mathbf{k}$ στο δεύτερο όρο στο (79.1), οι συντελεστές w στα δύο ολοκληρώματα γίνονται ίσοι; Δεδομένου $\omega_{-\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}$, η αλλαγή αντικαθιστά απλά $N_{\mathbf{k}}$ σε $N_{-\mathbf{k}}$.

Τα ολοκληρώματα (79.1) και (79.3) είναι φυσικά μηδέν, όταν το ηλεκτρόνιο ισορροπίας και οι λειτουργίες διανομής του φωτονίου είναι υποκατεστημένα. Η γραμμικοποίηση αυτών των ολοκληρωμάτων για μικρές αποκλίσεις από την ισορροπία διεξάγεται ταυτόχρονα σε σχέση και με τις δυο συναρτήσεις κατανομής, τις οποίες γράφουμε ως

$$\left. \begin{aligned} n &= n_0(\epsilon) + \delta n, & N &= N_0(\omega) + \delta N, \\ \delta n &= -\frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \varphi = \frac{n_0(1-n_0)}{T} \varphi, \\ \delta N &= -\frac{\partial N_0}{\partial \omega} \chi = \frac{N_0(1+N_0)}{T} \chi. \end{aligned} \right\} \quad (79.7)$$

Ο μετασχηματισμός είναι ακριβώς όμοιος με εκείνο στις §§67 και 74. Για παράδειγμα, η έκφραση στις αγκύλες στο πρώτο όρο (79.1), ξαναγράφεται ως

$$(1-n)(1-n')(1+N) \left[\frac{n'}{1-n'} \frac{N}{1+N} - \frac{n}{1-n} \right],$$

τίθεται στη μορφή

$$n_0(1-n_0)(1+N_0) \frac{1}{T} (\varphi' - \varphi + \chi).$$

Αυτό βολικά μετασχηματίζεται περαιτέρω μέσω της εξίσωσης

$$n_0(\epsilon)[1-n_0(\epsilon')] = [n_0(\epsilon) - n_0(\epsilon')]N_0(\epsilon - \epsilon'), \quad (79.8)$$

η οποία είναι εύκολη να επαληθευθεί με άμεσο υπολογισμό. Στη συνέχεια βρίσκουμε

$$(n_0 - n_0') \frac{N_0(1+N_0)}{T} (\varphi' - \varphi + \chi) = -\frac{\partial N_0}{\partial \omega} (n_0 - n_0') (\varphi' - \varphi + \chi).$$

Οι άλλοι όροι μετασχηματίζονται ομοίως, οδηγώντας στις ακόλουθες γραμμικοποιημένες συγκρούσεις ολοκληρωμάτων:

$$C_{e,ph}(n) = I_{e,ph}(\varphi, \chi) = - \int \frac{\partial N_0}{\partial \omega} w(n'_0 - n_0) \{ (\varphi_{p'} - \varphi_p + \chi_k) \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'} - \omega_k) - (\varphi_{p'} - \varphi_p - \chi_k) \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'} + \omega_k) \} d^3k / (2\pi)^3, \quad (79.9)$$

$$C_{ph,e}(N) = I_{ph,e}(\chi, \varphi) = \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \int w(n'_0 - n_0) (\varphi_p - \varphi_{p'} + \chi_k) \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'} - \omega_k) \cdot 2d^3p / (2\pi)^3; \quad (79.10)$$

και στα δύο ολοκληρώματα, $p=p'+k+b$.

Αυτά τα ολοκληρώματα εμπίπτουν φυσικά σε δύο μέρη, οι γραμμικοί φορείς ολοκληρωμάτων που ενεργούν για το φ και χ αντίστοιχα. Για παράδειγμα,

$$I_{e,ph}(\varphi, \chi) = I_{e,ph}^{(1)}(\varphi) + I_{e,ph}^{(2)}(\chi). \quad (79.11)$$

Μία σημαντική ιδιότητα του φορέα $I_{e,ph}^{(1)}$ είναι ότι δεν αλλάζει την ισοτιμία της συνάρτησης $\varphi(\eta, p_p)$ σε σχέση με τον μεταβλητή η , για παράδειγμα αφήνει μονές και ζυγές λειτουργίες το ίδιο: Όσον αφορά την επίδρασή της στη συνάρτηση της η ,

$$I_{e,ph}^{(1)}(\varphi(\eta)) \sim \int K(\eta, \eta') [\varphi(\eta') - \varphi(\eta)] d\eta,$$

όπου

$$K(\eta, \eta') = [n_0(\eta') - n_0(\eta)] [\delta(\eta - \eta' - \omega) - \delta(\eta' - \eta - \omega)].$$

Αφού

$$n_0(\eta) = \frac{1}{2} [1 - \tanh(\eta/2T)], \quad (79.12)$$

και έτσι

$$n_0(\eta') - n_0(\eta) = \frac{1}{2} [\tanh(\eta/2T) - \tanh(\eta'/2T)],$$

βλέπουμε ότι

$$K(\eta, \eta') = K(-\eta, -\eta'),$$

και αυτό αποδίδει αμέσως την παραπάνω ιδιότητα του φορέα, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στις §§80 και 82.

Τα ολοκληρώματα σύγκρουσης (79.9) και (79.10) είναι πανομοιότυπα μηδέν για τις λειτουργίες

$$\varphi = \text{constant} \times \epsilon, \quad \chi = \text{constant} \times \omega, \quad (79.13)$$

με την ίδια σταθερά. Αυτή η «πλαστή» λύση της εξίσωσης μεταφοράς αντιστοιχεί, όπως η λύση (67.18) στην εξίσωση φωτόνιο-φωτόνιο σε μία αλλαγή στη θερμοκρασία του

συστήματος από ένα μικρό σταθερό ποσό. Τα ολοκληρώματα (79.9) και (79.10) είναι ωστόσο επίσης μηδέν, όταν

$$\varphi = \text{constant} \quad (79.14)$$

και το $\chi = 0$. Η λύση αυτή οφείλεται στην σταθερότητα του συνολικού αριθμού των ηλεκτρονίων (σε αντίθεση με το συνολικό αριθμό των φωτονίων); Τυπικά, αντιστοιχεί σε μια μεταβολή του χημικού δυναμικού των ηλεκτρονίων από ένα μικρό σταθερό ποσό.

Για να προχωρήσουμε σε ποσοτικές εκτιμήσεις σημειώνουμε, ότι οι τάξεις μεγέθους των παραμέτρων του φάσματος ηλεκτρονίου σε ένα μέταλλο μπορεί να εκφραστεί σε όρους της σταθεράς πλέγματος d και της αποτελεσματικής μάζας m^* του ηλεκτρονίου; Για παράδειγμα, η ορμή Fermi (σε συνήθη μεριδία) είναι $p_F \sim \hbar/d$, η ταχύτητα $u_F \sim p_F/m^* \sim \hbar/m^*d$ και η ενέργεια $\epsilon_F \sim u_F p_F \sim \hbar^2/m^*d^2$. Οι παράμετροι του φάσματος φωτονίου και η αλληλεπίδραση ηλεκτρόνιο-φωτόνιο περιέχουν επίσης την μάζα M των ατόμων. Η πυκνότητα της ουσίας $\rho \propto M$ και η ταχύτητα του ήχου $u \propto \rho^{-1/2} \propto M^{-1/2}$. Καθιστώντας τις διαστάσεις δεξιά μέσω του \hbar , d και m^* (η οποία μπορεί να γίνει με έναν μόνο τρόπο), παίρνουμε την εκτίμηση

$$u \sim v_F (m^*/M)^{1/2}. \quad (79.15)$$

Εξ ου και η θερμοκρασία Debye

$$\Theta \sim \hbar \omega_{\max} \sim \hbar u/d \sim \epsilon_F (m^*/M)^{1/2}. \quad (79.16)$$

Η μάζα M εμφανίζεται στο φορέας αλληλεπίδρασης ηλεκτρόνιο-φωτόνιο μόνο μέσω της μετατόπισης φορέων \hat{U}_s (66.2) των ατόμων; Η αλληλεπίδραση αυτή δεν περιέχει άλλους μικρούς όρους σε $1/M$, η ενέργεια του είναι $\sim \epsilon_F$, όταν $U_s \sim d$. Τα στοιχεία της μήτρας των φορέων \hat{U}_s και συνεπώς εκείνου του φορέα αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίου-φωτονίου, είναι $\propto (M\omega)^{1/2} \propto M^{-1/4}$; Για ένα δεδομένο οιονεί ορμή k , η συχνότητα $\omega \sim uk \propto M^{-1/2}$. Η πιθανότητα διασκόρπισης δίνεται από το τετράγωνο του στοιχείου μήτρας. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση w στην σύγκρουση του ολοκληρώματος είναι αναλογική με $M^{-1/2}$ ή κάνοντας τις διαστάσεις δεξιά,

$$w \sim \Theta v_F d^2. \quad (79.17)$$

Η εκτίμηση αυτή χρειάζεται τροποποιήσεις σε σχέση με την εκπομπή ή απορρόφηση μιας μακράς μήκους κύματος ακουστικού φωτονίου. Το γεγονός, ότι w

είναι τότε ανάλογο προς k σημαίνει ότι η εκτίμηση πρέπει να περιλαμβάνει έναν επιπλέον παράγοντα $k/k_{\max} \sim kd$:

$$w \sim \Theta v_F k d^3. \quad (79.18)$$

§80. Συντελεστές μεταφοράς σε μέταλλα. Υψηλές θερμοκρασίες

Σε υψηλές θερμοκρασίες $T \gg \Theta$, τα φωτόνια με όλες τις πιθανές οιονεί ορμές διεγείρονται στο κρύσταλλο μέχρι την μέγιστη τιμή, η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους όπως η ορμή Fermi του ηλεκτρονίου $k_{\max} \sim p_F \sim 1/d$. Από τον ορισμό της θερμοκρασίας Debye, η μέγιστη ενέργεια φωτονίου $\omega_{\max} \sim \Theta$ και έτσι $\omega \ll T$ για όλα τα φωτόνια.

Υπό αυτές τις συνθήκες κατά συνέπεια, οι ενέργειες φωτονίων είναι μικρές σε σύγκριση με το πλάτος της θολής περιοχής στην κατανομή Fermi των ηλεκτρονίων. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να αντιμετωπίσουμε την εκπομπή φωτονίου ή απορρόφησης περίπου ως ελαστική διασκόρπιση ενός ηλεκτρονίου. Οι γωνίες διασκόρπισης δεν είναι μικρές, δεδομένου ότι η οιονεί ορμή του ηλεκτρονίου και φωτονίου υπό αυτές τις συνθήκες είναι της ίδιας τάξης μεγέθους.

Σε υψηλές θερμοκρασίες, όταν οι αριθμοί κατοχής της κατάστασης του φωτονίου είναι υψηλές, η εγκατάσταση της ισορροπίας σε κάθε στοιχείο όγκου του αερίου φωτονίου (φωτόνιο-φωτόνιο χαλάρωση) λαμβάνει χώρα πολύ γρήγορα. Μπορούμε να θεωρήσουμε τη λειτουργία διανομής του φωτονίου σαν να είναι η ισορροπία του ενός, όταν εκτιμώντας τις ηλεκτρικές και θερμικές αγωγιμότητες, για παράδειγμα παίρνοντας $\chi=0$ στη σύγκρουση ολοκληρωμάτων (μια ποσοτική εκτίμηση του χ θα γίνει στο τέλος αυτής της ενότητας). Είναι επαρκής, να ασχοληθούμε με την εξίσωση μεταφοράς μόνο για τα ηλεκτρόνια.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ταυτόχρονα σε μια προσέγγιση, η οποία αναλαμβάνει την ελαστική διασκόρπιση ηλεκτρονίου, τα αποτελέσματα από τη §78 εξακολουθεί να ισχύει βασιζόμενη μόνο σε αυτή την προσέγγιση συμπεριλαμβανομένου του νόμου Wiedermann-Franzw (78.13), ο οποίος δίνει την αναλογία σ/κ . Για να προσδιοριστεί η εξάρτηση της θερμοκρασία του σ και κ ξεχωριστά είναι αναγκαίο να εξεταστούν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια η σύγκρουση του ολοκληρώματος ηλεκτρόνιο-φωτόνιο (79.9).

Σύμφωνα με την ερώτηση, το ολοκλήρωμα είναι σε μεγάλο βαθμό απλοποιημένο. Επειδή η ενέργεια του φωτονίου είναι μικρή $\omega = \pm(\epsilon' - \epsilon)$, μπορούμε να επεκτείνουμε τη διαφορά $n'_0 - n_0$ σε δυνάμεις του ω .*

$$n'_0 - n_0 \approx \pm \omega \partial n_0 / \partial \epsilon.$$

Μπορούμε να θέσουμε τότε $\omega = 0$ στα επιχειρήματα των συναρτήσεων δέλτα αποκτώντας

$$I_{e,ph}(\varphi) = 2 \int w \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \delta(\epsilon' - \epsilon)(\varphi' - \varphi) \omega \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}.$$

Όταν $\omega \ll T$ η συνάρτηση κατανομής του φωτονίου $N_0 \approx T/\omega$, έτσι ώστε $\partial N_0 / \partial \omega \approx -T/\omega^2$. Το παράγωγο $\partial n_0 / \partial \epsilon \sim -1/T$. Το ολοκλήρωμα διέπεται από τη σειρά $k \sim k_{\max}$ στο οποίο $\omega \sim \Theta$. Όταν οι συναρτήσεις δέλτα ληφθούν υπόψη, η ενσωμάτωση προσθέτει πάνω $d^3 k$ ένα συντελεστή k_{\max}^2 / u_F στην εκτίμηση του ολοκληρώματος:

$$I_{e,ph}(\varphi) \sim -w(T/\Theta)(k_{\max}^2 / u_F)\varphi/T.$$

Με (79.19) δίνει αυτό

$$I_{e,ph}(\varphi) \sim -\varphi \sim -T \delta \bar{n}. \quad (80.1)$$

Αυτό σημαίνει ότι η συχνότητα σύγκρουσης ηλεκτρόνιο-φωτόνιο $\nu_{e,ph} \sim T$ (T/h σε συνήθεις μονάδες), η μέση ελεύθερη διαδρομή $l \sim u_F/T$ και (78.16) δίνει για την

* Η παρουσία του ω σε αυτή διαφορά είναι συνεπής με την προσέγγιση ότι η διασκόρπιση ηλεκτρονίου είναι ελαστική. Είναι απαραίτητο, διότι φέρνοντας τη σύγκρουση του ολοκληρώματος στη μορφή (79.9), χρησιμοποιήσαμε εξίσωση (79.8), η δεξιά πλευρά του οποίου καθίσταται ακαθόριστη, όταν $\epsilon = \epsilon'$.

ηλεκτρική αγωγιμότητα (σε συνήθεις ενότητες).*

$$\sigma \sim Ne^2 \hbar / m^* T. \quad (80.2)$$

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα του μετάλλου είναι συνεπώς αντιστρόφως ανάλογη προς την θερμοκρασία, όταν $T \gg \theta$. Ο νόμος Wiedemann-Franz δείχνει τότε, ότι η θερμική αγωγιμότητα είναι σταθερή:

$$\kappa \sim N \hbar / m^*. \quad (80.3)$$

Ας εκτιμήσουμε τώρα τις διορθωμένες συναρτήσεις φ και χ στις διανομές ηλεκτρονίου και φωτονίου, προκειμένου να δικαιολογήσουμε την παραμέληση χ στη

σύγκρουση ολοκληρώματος. Μπορούμε να κάνουμε αυτό, δηλαδή στην περίπτωση όπου υπάρχει ένα ηλεκτρικό πεδίο, αλλά καμία κλίση θερμοκρασίας.

Δεδομένου ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν επηρεάζει την κίνηση των φωτονίων, η αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς για φωτόνια είναι μηδέν. Η εξίσωση μειώνει ως εκ τούτου την εξαφάνιση του αθροίσματος των ολοκληρωμάτων σύγκρουσης για φωτόνια με ηλεκτρόνια και φωτόνια με φωτόνια .

$$I_{ph,e}^{(1)}(\varphi) + I_{ph,e}^{(2)}(\chi) + I_{ph,ph}(\chi) = 0; \quad (80.4)$$

οι εκθέτες (1) και (2) διακρίνουν τα δύο μέρη του ολοκληρώματος (79.10) με τον ίδιο τρόπο όπως έγινε στο (79.11).

Το ολοκλήρωμα $I_{ph,e}$ εκτιμάται παρομοίως προς $I_{e,ph}$ ανωτέρω. Εδώ όμως, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η ενσωμάτωση επί της οιονεί ορμής ηλεκτρονίου p στην πράξη λαμβάνονται μόνο κοντά στην επιφάνεια Fermi, επί του όγκου ενός στρώματος με πάχος $\sim T/u_F$ και περιοχή $\sim p_F^{-2}$. Η συνάρτηση δέλτα προσθέτει έναν παράγοντα $1/\epsilon_F$ προς την εκτίμηση του ολοκληρώματος. Το αποτέλεσμα είναι

$$I_{ph,e}^{(2)}(\chi) \sim -w \frac{\chi T T p_F^2}{T \Theta v_F \epsilon_F} \sim -\chi T / \epsilon_F, \quad I_{ph,e}^{(1)}(\varphi) \sim -\varphi T / \epsilon_F. \quad (80.5)$$

* Σημειώστε ότι η κβαντική αβεβαιότητα της ενέργειας ηλεκτρονίου $\sim \hbar \nu_{e,ph} \sim T$, είναι της τάξης του πλάτους της θολής περιοχής στη διανομή ηλεκτρονίου. Το γεγονός αυτό, ωστόσο δεν κάνει ανεφάρμοστα τα αποτελέσματα για ένα λόγο παρόμοιο με αυτό που δίνεται στο τέλος της §78 σε σχέση με τη διασκόρπιση από ακαθαρσίες. Λόγω της σχετικής βραδύτητας των δονήσεων των ατόμων στο πλέγμα και την ελαστικότητα της διασκόρπισης του ηλεκτρονίου, το πρόβλημα μπορεί κατ 'αρχήν να τυποποιηθεί ως εκείνη που το ηλεκτρόνιο κινείται στο δεδομένο δυναμικό πεδίο του παραμορφωμένου πλέγματος.

Το ολοκλήρωμα σύγκρουσης φωτόνιο- φωτόνιο εκτιμάται ως

$$I_{ph,ph}(\chi) \sim -\nu_{ph,ph} \delta N \sim -\nu_{ph,ph} (T/\Theta^2) \chi,$$

με την αποτελεσματική συχνότητα σύγκρουσης από (68.3):

$$\nu_{ph,ph} \sim T / M u d \sim T \sqrt{(m^* / M)}.$$

Έτσι

$$I_{ph,ph}(\chi) \sim -(T^2 / \Theta^2) \sqrt{(m^* / M)} \chi \sim T^2 \chi / \Theta \epsilon_F. \quad (80.6)$$

Συγκρίνοντας το (80.5) και (80.6) δείχνει πρώτα απ 'όλα ότι

$$I_{\text{ph},e}^{(2)}(\chi)/I_{\text{ph},\text{ph}}(\chi) \sim \Theta/T \ll 1:$$

η πραγματική συχνότητα των συγκρούσεων φωτόνιο-ηλεκτρόνιο (για τα ηλεκτρόνια ισορροπίας, δηλαδή με $\varphi = 0$) είναι μικρή σχετικά ως προς τη συχνότητα σύγκρουσης φωτόνιου-φωτόνιου. Μπορούμε επομένως να παραμελήσουμε το δεύτερο όρο στο (80.4).

Η σύγκριση των δύο όρων που παραμένουν δίνει

$$\chi/\varphi \sim \Theta/T \ll 1, \quad (80.7)$$

και αυτό δικαιολογεί την παραμέληση του χ στην σύγκρουση του ολοκληρώματος ηλεκτρόνιο-φωτόνιο. Φαίνεται εύκολα ότι το ίδιο αποτέλεσμα (80.7) λαμβάνεται, όταν μία κλίση θερμοκρασίας είναι παρούσα.

Η παραμέληση της λειτουργίας χ στην εξίσωση μεταφοράς ηλεκτρονίου μπορεί ωστόσο, να είναι μη επιτρεπτή στην αγωγή των θερμοηλεκτρικών φαινομένων.

Σύμφωνα με το (78.12), ο υπολογισμός του οποίου βασίστηκε μόνο στην υπόθεση της ελαστικής διασκόρπισης των ηλεκτρονίων, ο συντελεστής του θερμοηλεκτρικού είναι

$$\alpha^1 \sim T/e\epsilon_F; \quad (80.8)$$

η έννοια του εκθέτη I θα εξηγηθεί αργότερα. Η ποσότητα αυτή είναι «ανώμαλα» μικρή με την έννοια ότι η τάξη μεγέθους του ολοκληρώματος στο (78.8) (ο δεύτερος όρος) μειώθηκε στην αναλογία T/ϵ_F επειδή

$$\varphi^1 = -(\eta/T)I \cdot \nabla T \quad (80.9)$$

είναι μια περιττή συνάρτηση του $\eta = \epsilon - \mu$. Αυτή η ιδιότητα είναι με μια έννοια τυχαία και μπορεί να έχει το αποτέλεσμα ότι μία συγκριτικά μικρή προσθήκη στη φ λόγω της μη-ισορροπίας των φωτονίων αποδίδει μια συμμετοχή στην α που είναι συγκρίσιμη με το (80.8).

Θα επιδιώξουμε τη λύση της εξίσωσης μεταφοράς ηλεκτρονίου

$$\frac{\partial n_0}{\partial T} \mathbf{v} \cdot \nabla T = -\frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{\eta}{T} \mathbf{v} \cdot \nabla T = I_{\epsilon,\text{ph}}^{(1)}(\varphi) + I_{\epsilon,\text{ph}}^{(2)}(\chi) \quad (80.10)$$

ως ένα σύνολο $\varphi = \varphi^1 + \varphi^{11}$, όπου φ^1 είναι η λύση της εξίσωσης χωρίς δεύτερο όρο στα δεξιά και φ^{11} είναι η λύση της εξίσωσης

$$I_{\epsilon,\text{ph}}^{(1)}(\varphi) + I_{\epsilon,\text{ph}}^{(2)}(\chi) = 0. \quad (80.11)$$

Εδώ φ^1 είναι το «μεγαλύτερο» μέρος της φ ; Επειδή ο φορέας $I_{\epsilon\varphi}^{(0)}$ είναι ακόμη σε σχέση με το μεταβλητή (§79), αυτό το μέρος έχει το τύπο (80.9) και είναι μονή συνάρτηση του η . Η εξίσωση (80.11) δείχνει ότι $\varphi^{11} \sim \chi$ και επομένως

$$\varphi^{11}/\varphi^1 \sim \chi/\varphi^1 \sim \Theta/T \ll 1.$$

Σε αντίθεση με την φ^1 , η φ^{11} δεν είναι μηδέν, όταν $\epsilon = \mu$. Κατά τον υπολογισμό της αντίστοιχης συνεισφοράς στην πυκνότητα ρεύματος, ο κύριος όρος ωστόσο δεν ακυρώνεται και το αποτέλεσμα είναι μικρό μόνο με την έννοια, ότι φ^{11} είναι σχετικά μικρή. Αυτό σημαίνει ότι, η συμβολή του τελευταίου με τον συντελεστή θερμοηλεκτρικής είναι

$$\alpha^{11} \sim \alpha^1(\epsilon F/T)(\Theta/T) \sim \Theta/eT. \quad (80.12)$$

Στο κατώτερο άκρο της εξεταζόμενης περιοχής θερμοκρασίας, όπου $T \sim \Theta$, έχουμε $\alpha^{11} \sim 1$ σε σημείο της μικρής ποσότητας $\epsilon \alpha^1$, $\sim \Theta/\epsilon$.

Ο συντελεστής θερμοηλεκτρικής συνεπώς αποτελείται από δύο πρόσθετα μέρη. Αυτές μπορεί να είναι ίδιας τάξης μεγέθους, αλλά ποικίλλουν διαφορετικά με τη θερμοκρασία. Η φυσική προέλευση του δεύτερου όρου α είναι ότι η μεταφορά θερμότητας στο κρύσταλλο προκαλεί μία ροή των φωτόνια («άνεμο φωτονίου»), όπου μεταφέρει τα ηλεκτρόνια με αυτό. *

* Ο ρόλος του συρόμενου φωτονίου για τα ηλεκτρόνια όσον αφορά στις επιδράσεις της μεταφοράς στα μέταλλα είχε διευκρινιστεί από τον L.E. Gurevich (1946).

§81. Διεργασίες Umklapp σε μέταλλα

Η φύση της διασκόρπισης ηλεκτρονίου φωτονίου σε χαμηλές θερμοκρασίες είναι αρκετά διαφορετική από ότι όταν $T \gg \theta$. Όταν $T \ll \theta$, τα φωτόνια διεγείρονται με ενέργειες $\omega \sim T$ στον κρύσταλλο (και ανήκουν γενικά σε ακουστικά σημεία του φάσματος). Όταν ένα τέτοιο φωτόνιο εκπέμπεται ή απορροφάται, η ενέργεια του ηλεκτρονίου αλλάζει κατά ένα ποσό $\sim T$, δηλαδή κατά μία ποσότητα της τάξεως του συνολικού πλάτους της

θολής περιοχής στην κατανομή Fermi. Η αλλαγή στην οιονεί ορμή του ηλεκτρονίου είναι ίση με την οιονεί ορμή του φωτονίου. Δεδομένου $k \sim T/u \ll k_{\max}$ και $k_{\max} \sim p_F$, ακολουθεί ότι η οιονεί ορμή του ηλεκτρονίου αλλάζει μόνο από ένα σχετικά μικρό ποσό. Σε χαμηλές θερμοκρασίες κατά συνέπεια, υπάρχει μια οριακή περίπτωση, η οποία είναι το αντίθετο της ελαστικής διασκόρπισης: η χαλάρωση του ηλεκτρονίου στην ενέργεια λαμβάνει χώρα πολύ πιο γρήγορα από ό, τι αφορά την κατεύθυνση της οιονεί ορμής.

Η χαλάρωση της ενέργειας είναι μια ταχεία «ανάμιξη» στην θολή περιοχή της κατανομής Fermi. Η χαλάρωση όσον αφορά την κατεύθυνση αποτελεί μια εξίσωση της κατανομής πάνω στην επιφάνεια αυτή; Λαμβάνει χώρα σε μικρές ποσότητες ($\sim T/u$), για παράδειγμα, είναι μια αργή διάχυση πάνω από την επιφάνεια.

Πριν προχωρήσουμε σε μια λεπτομερή εξέταση των φαινομένων μεταφοράς κάτω από αυτές τις συνθήκες, θα κάνουμε μερικές γενικές παρατηρήσεις σχετικά με το ρόλο των διεργασιών Umklapp. Όπως και στο μονωτή κρυστάλλων, το πεπερασμένο των συντελεστών μεταφοράς σε ένα ιδανικό κρύσταλλο μετάλλου (χωρίς προσμίξεις ή ελαττώματα) είναι λόγω της εμφάνισης αυτών των διεργασιών. Μόνο με τις κανονικές διαδικασίες που διατηρούν τη συνολική οιονεί ορμή των ηλεκτρονίων και φωτονίων, οι εξισώσεις μεταφοράς θα μπορούσαν να έχουν νοθές λύσεις που αντιστοιχούν στην κίνηση των συστημάτων ηλεκτρονίου και φωτονίου ως σύνολο σε σχέση με το πλέγμα. Αυτές είναι λύσεις του τύπου

$$\varphi = \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{V}, \quad \chi = \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{V} \quad (81.1)$$

με ένα σταθερό διάνυσμα $\delta \mathbf{V}$; cf. (67.19). Μειώνουν σε μηδέν τα ολοκληρώματα σύγκρουσης (79.9), (79.10), εάν η εκπομπή ή η απορρόφηση των φωτονίων από τα ηλεκτρόνια πραγματοποιείται με διατήρηση της οιονεί ορμής ($p=p'+k$).

Σε υψηλές θερμοκρασίες, όταν η οιονεί ορμή των δύο ηλεκτρονίων και φωτονίων είναι μεγάλες ($\sim 1/d$) οι διεργασίες Umklapp λαμβάνουν χώρα γενικά με την ίδια συχνότητα, όπως στις κανονικές διεργασίες. Η ανάγκη να ληφθούν υπόψη ως εκ τούτου δεν αναπτύσει κανένα από τα ειδικά χαρακτηριστικά των φαινομένων μεταφοράς.

Οι οιονεί κείνται ορμές του ηλεκτρονίου κοντά στην επιφάνεια Fermi και με αυτή την έννοια είναι σχεδόν ανεξάρτητες από τη θερμοκρασία. Σε χαμηλές θερμοκρασίες όμως, οι οιονεί ορμές του φωτονίου γίνονται μικρές και οι διεργασίες

Umklapp μπορούν συνεπώς να παρεμποδίζονται. Από την άποψη αυτή, η κατάσταση είναι αισθητά διαφορετική για κλειστές και ανοικτές επιφάνειες Fermi.

Μια ανοικτή επιφάνεια Fermi, για κάθε επιλογή του συνόλου του κυττάρου στο χώρο p (το αντίστροφο πλέγμα), διασχίζει τα όρια του κυτάρου. Στην περίπτωση αυτή, σαφώς οι διεργασίες Umklapp είναι πάντα δυνατόν με εκπομπή ή απορρόφηση ενός φωτονίου με αυθαίρετα χαμηλή ενέργεια: Ακόμη και μια μικρή αλλαγή στην οιονεί ορμή του ηλεκτρονίου κοντά στο όριο του κυττάρου μπορεί να μεταφέρει το ηλεκτρόνιο σε ένα γειτονικό κύτταρο. Κατά τη διάρκεια της διάχυσης τους πάνω από στην επιφάνεια Fermi, όλα τα ηλεκτρόνια θα φθάσουν τελικά τα όρια του πυρήνα και επιπλέον μπορεί να πάρουν μέρος στις διεργασίες Umklapp. Κατά συνέπεια, σε αυτή την περίπτωση επίσης η πιθανότητα τέτοιων διεργασιών δεν περιέχουν κανένα πρόσθετο μικρό παράγοντα σε σύγκριση με τις κανονικές διαδικασίες. Πράγματι, η κατάταξη σε κανονικές και Umklapp διεργασίες εξαρτώνται από την επιλογή του αμοιβαίου πλέγματος του κυττάρου και είναι αυθαίρετο. Με μια ανοικτή επιφάνεια Fermi, η ιδιότητα ότι δεν υπάρχει μικρός πρόσθετος συντελεστής στη συχνότητα των διεργασιών Umklapp, υπάρχει για κάθε επιλογή του κυττάρου. Είναι τότε επιθυμητό να αποφεύγεται οποιαδήποτε διάκριση των δύο τύπων εκδήλωσης διασκόρπισης και να θεωρηθούν όλα αυτά ως κανονικά (δηλαδή διατήρηση της οιονεί ορμής), αλλά να επιτραπούν οι αξίες της οιονεί ορμής του ηλεκτρονίου παντού στο αμοιβαίο πλέγμα. Για τα φωτόνια το μοναδιαίο κύτταρο επιλέγεται, έτσι ώστε το σημείο $k=0$ είναι στο κέντρο του; Τότε όλα του μακρύ-κύματος φωτόνια (τα μόνα που χρειάζονται να λαμβάνονται υπόψη όταν $\hbar\omega$) είναι σε ένα μικρό τμήμα του όγκου ενός κυττάρου κοντά κέντρο του. Σε αυτή τη θεραπεία, η ψευδή λύση (81.1) αποκλείεται με την εφαρμογή στη συνάρτηση κατανομής του ηλεκτρονίου στην κατάσταση της περιοδικότητας του αμοιβαίου πλέγματος:

$$n(\mathbf{p} + \mathbf{b}) = n(\mathbf{p}). \quad (81.2)$$

Η ισορροπία κατανομής ανάλογα μόνο με την ενέργεια ηλεκτρονίου $\epsilon(p)$, αναγκαστικά ικανοποιεί αυτή την κατάσταση, δεδομένου ότι $\epsilon(p)$ είναι περιοδική. Καθώς $n_0(p)$, το παράγωγο $\partial n_0 / \partial \epsilon$ είναι περιοδικό και έτσι κατά συνέπεια είναι ο συντελεστής $\phi(p)$ στο $\delta\tilde{n}$; Αυτή η απαίτηση εξαλείφει τη λύση (81.1), η οποία δεν την ικανοποιεί.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια κλειστή επιφάνεια Fermi. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να επιλέξουμε το βασικό αμοιβαία πλέγμα του κυττάρου κατά τέτοιο τρόπο ώστε η επιφάνεια Fermi να μη διασχίζει τα όρια της.* Τότε οι διεργασίες Umklapp αντιστοιχούν σε μεταπτώσεις του ηλεκτρονίου μεταξύ οποιωνδήποτε σημείων επί της επιφάνειας Fermi στο βασικό κύτταρο και στο πανομοιότυπό του γειτονικού κυττάρου, όπως φαίνεται σχηματικά στην εικόνα 29.

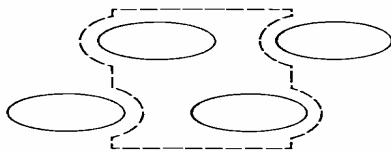


FIG. 28.

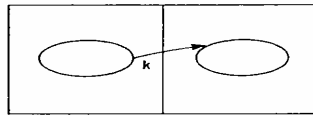


FIG. 29.

Το διάνυσμα k που συνδέει τα σημεία αυτά είναι οιονεί ταχύτητα του εκπεμπόμενου ή απορροφημένου φωτονίου. Η απόσταση k είναι γενικά μεγάλη ($\sim 1/d$) και σε χαμηλές θερμοκρασίες ο αριθμός των φωτονίων με ενέργεια $\omega(k)$ είναι εκθετικά μικρή, αναλογικό στο $\exp[-\omega(k)/T]$. Η αποτελεσματική συχνότητα της Umklapp που διασκορπίζει γεγονός, στη συνέχεια εξαρτάται από την θερμοκρασία σύμφωνα με

$$\nu_U \propto \exp[-\omega(k_{\min})/T], \quad (81.3)$$

* Εάν, ωστόσο η επιφάνεια Fermi αποτελείται από έναν αριθμό κλειστών κοιλοτήτων μπορεί να είναι αναγκαίο να καθοριστεί το βασικό κύτταρο αλλιώς παρά ως παραλληλεπίπεδο με επίπεδες όψεις. Αυτό απεικονίζεται σχηματικά στην εικόνα 28 για την περίπτωση ενός επίπεδου πλέγματος με δύο μη-ισοδύναμες κλειστές κοιλοότητες που σχηματίζουν την «επιφάνεια Fermi». Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει το βασικό κύτταρο, το οποίο δεν τέμνει αυτές τις κοιλοότητες. Οι διασταυρώσεις δεν θα μπορούσαν να αποφευχθούν με οποιαδήποτε επιλογή ενός ορθογώνιου κυττάρου.

όπου k_{\min} είναι η τιμή του φωτονίου της οιονεί ορμής (ανάμεσα σε όλα τα διανύσματα του εν λόγω τύπου) για την οποία η ενέργεια $\omega(k)$ έχει την ελάχιστη τιμή. Εδώ είναι σημαντικό φυσικά, ότι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτονίου. Για αυτό το λόγο, δεν μπορούμε να μειώσουμε την εκθετική στο (81.3) με την αλλαγή του μήκους του διανύσματος k απομακρύνοντας το από την

επιφάνεια του Fermi. Αν και η ενέργεια του φωτονίου επιτρέπεται να μειώνεται κατά μία ποσότητα $\sim u\delta k$, η ενέργεια του ηλεκτρονίου που εμπλέκεται στη διαδικασία θα μπορούσε ταυτόχρονα να αυξηθεί κατά ένα πολύ μεγαλύτερο ποσό $\sim u_F \delta k$, μειώνοντας έτσι v_U αντί να το αυξήσει. Για να βρείτε k_{\min} , αρκεί να εξετάσετε την επιφάνεια Fermi ως τέτοια χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ασάφεια της κατανομής κοντά σε αυτό. Τα σημεία που είναι σημαντικά στην πράξη είναι συνήθως εκείνα κοντά στην πλησιέστερη προσέγγιση της επιφάνειας Fermi στο αντίγραφο της στο διπλανό πυρήνα.

Η λύση (81.1) συνεπάγεται ότι υπάρχει μία μακροσκοπική ροή των ηλεκτρονίων στην απουσία ενός ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή μια άπειρη ηλεκτρική αγωγιμότητα. Η εκθετικά μικρή συχνότητα των διεργασιών Umklapp προκαλεί εκθετικά μεγάλη ηλεκτρική αγωγιμότητα (R.E.Peierls).

Η θερμική αγωγιμότητα ενός μετάλλου που έχει μια κλειστή επιφάνεια Fermi παραμένει πεπερασμένη ακόμη και όταν οι διεργασίες Umklapp παραμεληθούν. Αυτό συμβαίνει διότι από το (78.2), η θερμική αγωγιμότητα κ ορίζει τη ροή θερμότητας στην απουσία ηλεκτρικού ρεύματος και η κατάσταση $j = 0$ αποκλείει αναγκαστικά τη ψευδή λύση (81.1). Η περίληψη των διεργασιών Umklapp μπορούν να μεταβάλουν την τιμή του κ μόνο εάν είναι μικρή. Το ίδιο ισχύει και για το θερμοηλεκτρικό συντελεστή α , ο οποίος από τον ορισμό (78.1), αναφέρεται ότι η βαθμίδα θερμοκρασίας και το ηλεκτρικό πεδίο και πάλι με τον όρο $j = 0$; Βλέπε §82, πρόβλημα .

Οι παραπάνω παρατηρήσεις ωστόσο, δεν ισχύουν για τα μέταλλα που έχουν αποζημιωθεί έχοντας κλειστό ηλεκτρόνιο και οπές στις επιφάνειες Fermi, δηλαδή σε μέταλλα με ίσο αριθμό ηλεκτρονίων και οπών $N_e = N_h$ (βλέπε SP 2, §61). Ο λόγος είναι ότι σε αυτή την περίπτωση, η λύση (81.1) δεν εξαρτάται από την παρουσία ενός ηλεκτρικού ρεύματος. Η πυκνότητα ρεύματος που αντιστοιχεί σε αυτό το διάλυμα είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= e \int \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{V} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3} \\ &= e \int \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{V} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3} \\ &= e \int \frac{\partial n_0^{(e)}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{V} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3} - e \int \frac{\partial n_0^{(h)}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{V} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

Τα δύο ολοκληρώματα λαμβάνονται επί του ηλεκτρονίου και οπών κοιλοτήτων αντίστοιχα στην επιφάνεια Fermi; Στο δεύτερο, η κατανομή οπής που χρησιμοποιείται

είναι $n^{(h)} = 1 - n$. Μπορούμε τώρα να ενσωματώσουμε ανά μέρος; Τα ολοκληρώματα που προκύπτουν πάνω από τις επιφάνειες των όψεων του κυττάρου είναι μηδενική λόγω της ταχείας μείωσης της $n_0^{(e)}$ και $n_0^{(h)}$ μακριά από τις αντίστοιχες επιφάνειες Fermi. Το αποτέλεσμα είναι

$$\mathbf{j} = e\delta\mathbf{V}(N_h - N_e). \quad (81.4)$$

Για ένα αντισταθμιζόμενο μέταλλο, $j = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι η ηλεκτρική αγωγιμότητα ενός αντισταθμιζόμενου μετάλλου είναι πεπερασμένο, ακόμα και όταν οι διεργασίες Umklapp δεν λαμβάνονται υπόψη. Η θερμική αγωγιμότητα και ο συντελεστής θερμοηλεκτρικών από την άλλη πλευρά, διέπονται από τις διεργασίες Umklapp και θα ήταν άπειρες εάν αυτές είχαν αγνοηθεί, δεδομένου ότι η κατάσταση $j = 0$, δεν αποκλείει τότε τη ψευδή λύση (81.1).

Στα επιχειρήματα και στις εκτιμήσεις στις §§81 και 82 δηλώνουμε ουσιαστικά τις απλούστερες υποθέσεις ως προς τη μορφή της επιφάνειας Fermi, δηλαδή ότι είναι είτε κλειστές ή ανοικτές με όλες τις χαρακτηριστικές διαστάσεις της τάξης του $1/d$. Οι επιφάνειες Fermi των πραγματικών μετάλλων ωστόσο, σε γενικές γραμμές έχουν μια σύνθετη μορφή και μπορεί να αποτελούνται από πολλά διαφορετικά επίπεδα; Δεν θα σταματήσουμε να αναλύουμε τις επιπλοκές που προκύπτουν στη συμπεριφορά των συντελεστών μεταφοράς. Για παράδειγμα, τα σημεία των ανοικτών επιφανειών Fermi σε διαφορετικά κύτταρα του αντίστροφο πλέγματος μπορεί να συνδέεται με στενές γέφυρες (πλάτους $\Delta p \ll p_F$). Η παρουσία της μικρής παραμέτρου $\Delta p/p_F$ στο πρόβλημα μπορεί να δημιουργήσει νέες ενδιάμεσες σειρές θερμοκρασίας με διαφορετική εξαρτημένη θερμοκρασία των συντελεστών θερμοκρασίας. Τα σημεία των κλειστών επιφανειών Fermi μπορεί να έρθουν «ανώμαλα» κοντά μαζί και αυτό μπορεί να μετακινήσει τον εκθετικό νόμο (81.3) εντός της περιοχής από «ανώμαλα» χαμηλές θερμοκρασίες.

§82. Μεταφορά συντελεστών στα μέταλλα. Χαμηλές θερμοκρασίες

Στην ποσοτική μελέτη των φαινομένων μεταφοράς σε χαμηλές θερμοκρασίες, θα πρέπει να έχουμε κατά νου την περίπτωση των ανοικτών επιφανειών Fermi και ως εκ τούτου να μην καταβάλλουμε ιδιαίτερη προσοχή στις διεργασίες Umklapp.

Πρώτα απ' όλα, θα δείξουμε ότι η χαλάρωση του συστήματος φωτονίου γίνεται (όταν $T \ll \Theta$) κυρίως από συγκρούσεις φωτόνιο-ηλεκτρόνιο.

Για να εκτιμηθεί η σύγκρουση του ολοκληρώματος φωτόνιο-ηλεκτρόνιο (79.10) σημειώνουμε ότι σε χαμηλές θερμοκρασίες $\omega \sim T$, $\epsilon - \mu \sim T$ και συνεπώς $N_0 \sim n_0 \sim 1$, $\partial N_0 / \partial \omega \sim 1/T$. Η ενσωμάτωση πάνω στο $d^3 p$ λαμβάνεται επί του όγκου ενός στρώματος με πάχος $\sim T/u_F$ κατά μήκος της επιφάνειας Fermi. Αφού k/p είναι μικρό, το επιχείρημα της συνάρτησης δέλτα μπορεί να εκφραστεί ως

$$\epsilon(\mathbf{p}) - \epsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}) \approx \mathbf{k} \cdot \partial \epsilon / \partial \mathbf{p} - \omega \approx \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{k} - \omega. \quad (82.1)$$

Η συνάρτηση δέλτα απομακρύνεται με ολοκλήρωση από τις οδηγίες του p (ή, ισοδύναμα έναντι εκείνων των v_F) για ένα δεδομένο k , προσθέτοντας ένα παράγοντα $1/u_F k$ στο ολοκλήρωμα. Τέλος, το w εκτιμάται μέσω του (79.18). Το αποτέλεσμα είναι

$$I_{\text{ph},e}(\chi) \sim -\chi(m^*/M)^{1/2} \sim -T(m^*/M)^{1/2} \delta n,$$

έτσι ώστε η αποτελεσματική συχνότητα σύγκρουσης είναι

$$\nu_{\text{ph},e} \sim T \sqrt{(m^*/M)}. \quad (82.2)$$

Η πραγματική συχνότητα των συγκρούσεων φωτόνιο-φωτόνιο σε χαμηλές θερμοκρασίες είναι σύμφωνα με την εκτίμηση (69.15),

$$\nu_{\text{ph,ph}} \sim T \sqrt{(m^*/M)} (T/\Theta)^4 \ll \nu_{\text{ph},e}, \quad (82.3)$$

και αυτό αποδεικνύει την παραπάνω δήλωση.

Θα αγνοήσουμε στο εξής τις συγκρούσεις φωτόνιο-φωτόνιο. Η εξίσωση μεταφοράς φωτονίου είναι τότε

$$\mathbf{u} \cdot \frac{\partial N_0}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\omega}{T} \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \mathbf{u} \cdot \nabla T = I_{\text{ph},e}(\chi, \varphi). \quad (82.4)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί ρητά για τη λειτουργία φωτονίου χ . Αφού k σε αυτή την εξίσωση δίνεται χ , μπορεί να ληφθεί έξω από το ολοκλήρωμα και βρίσκουμε

$$\chi_k = -\frac{\omega}{T \nu_{\text{ph},e}} \mathbf{u} \cdot \nabla T + \frac{1}{\nu_{\text{ph},e}} \int w(n'_0 - n_0) \delta(\epsilon - \epsilon' - \omega) (\varphi - \varphi') \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3} \equiv \chi_1 + \chi_2, \quad (82.5)$$

όπου

$$\nu_{\text{ph},e} = \int w(n'_0 - n_0) \delta(\epsilon - \epsilon' - \omega) \cdot 2d^3 p / (2\pi)^3. \quad (82.6)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\chi_2 \gg \chi_1$: από τον ορισμό χ_2 , ακολουθεί ότι $\chi_2 \sim \varphi$ (τα ολοκληρώματα στον αριθμητή και παρονομαστή διαφέρουν μόνο από τον συντελεστή φ

–φ’ στο ολοκλήρωμα) και η τάξη μεγέθους του φ διέπεται από την εξίσωση μεταφοράς ηλεκτρονίου,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T \partial n_0 / \partial T = I_{e,ph}(\varphi) \sim -v_{e,ph} \delta \tilde{n} \sim -v_{e,ph} \varphi / T,$$

απ' όπου

$$\varphi \sim v_F |\nabla T| / v_{e,ph}.$$

Η αποτελεσματική συχνότητα σύγκρουσης ηλεκτρόνιο-φωτόνιο εκτιμάται με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω $\nu_{ph,e}$, με τη μόνη διαφορά ότι η ενσωμάτωση πάνω στο d^3k στο $I_{e,ph}$ λαμβάνεται σε ένα όγκο $\sim (T/u)^3$ από ένα χώρο ορμής, αντί του $\sim p_F^2 T / v_F$ στην ενσωμάτωση πάνω d^3p στο $I_{e,ph}$:

$$v_{e,ph} \sim T^3 / \Theta^2. \quad (82.7)$$

Τέλος, εφόσον $\chi_1 \sim |\nabla T| u / v_{ph,e}$, έχουμε

$$\chi_1 / \chi_2 \sim u v_{e,ph} / v_F v_{ph,e} \sim T^2 / \Theta^2 \ll 1, \quad (82.8)$$

όπως θα έπρεπε να αποδειχθεί.

Κατά τον υπολογισμό των ηλεκτρικών και θερμικών αγωγιμοτήτων (αλλά όχι το συντελεστή θερμοηλεκτρικής; Βλέπε παρακάτω) μπορούμε να αγνοήσουμε τη μικρή ποσότητα χ_1 . Αντικαθιστώντας επομένως $\chi \approx \chi_2$ από την (82.5) στη γραμμική σύγκρουση του ολοκληρώματος ηλεκτρονίου-φωτονίου το τύπο (79.11) βρίσκουμε

$$I_{e,ph}(\varphi, \chi) = I_{e,ph}^{(1)}(\varphi) + I_{e,ph,e}(\varphi), \quad (82.9)$$

όπου $I_{e,ph,e}(\varphi)$ δηλώνει το αποτέλεσμα της αντικατάστασης χ_2 στο ολοκλήρωμα $I_{e,ph}^{(2)}(\chi)$.

Ο πρώτος όρος στο (82.9) είναι η σύγκρουση του ολοκληρώματος για ηλεκτρόνια και ισορροπία φωτονίων; Ο δεύτερος όρος μπορεί να ονομαστεί η σύγκρουση ολοκληρώματος μεταξύ των ηλεκτρονίων μέσω φωτονίων.

Όπως στη §79, παίρνουμε ως ανεξάρτητες μεταβλητές στη συνάρτηση $\varphi(\mathbf{p})$ τη ποσότητα $\eta = \epsilon - \mu$ και το διάνυσμα \mathbf{p}_F , το οποίο έχει την κατεύθυνση του \mathbf{p} και τελειώνει στην επιφάνεια Fermi. Και οι δύο όροι στο (82.9) έχουν στα ολοκλήρωμά τους τη διαφορά

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{p}_F) - \varphi(\boldsymbol{\eta}', \mathbf{p}'_F), \quad (82.10)$$

με

$$\eta - \eta' = \pm \omega, \quad \mathbf{p}_F - \mathbf{p}'_F = \mathbf{k},$$

όπου \mathbf{k} είναι η προβολή του \mathbf{k} στο εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια Fermi στο σημείο \mathbf{p}_F .

Σε σχέση με τον μεταβλητή \mathbf{p}_F , η συνάρτηση $\varphi(\eta, \mathbf{p}_F)$ ποικίλλει σημαντικά στις διακυμάνσεις $\sim \mathbf{p}_F$; Η διαφορά $\mathbf{k} \sim \mathbf{k} \ll \mathbf{p}_F$. Υπό την έννοια αυτή, φ μεταβάλλεται αργά με το \mathbf{p}_F και σε μια πρώτη προσέγγιση μπορούμε να πάρουμε $\mathbf{p}'_F = \mathbf{p}_F$ στη διαφορά (82.10), δηλαδή να αντικατασταθεί με

$$\varphi(\eta, \mathbf{p}_F) - \varphi(\eta', \mathbf{p}_F). \quad (82.11)$$

Η εξάρτηση από την η ωστόσο, είναι ισχυρή με την έννοια ότι $|\eta - \eta'| \sim \omega \sim T$ είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την περιοχή στην οποία φ ποικίλλει σημαντικά.

Έστω L_0 είναι ο φορέας που λαμβάνεται από $I_{e,ph}$ (82.9) αντικαθιστώντας το (82.10) από (82.11): τότε

$$I_{e,ph}(\varphi) = L_0(\varphi) + L_1(\varphi),$$

και $L_0 \gg L_1$. Η εξίσωση μεταφοράς ηλεκτρονίων (με την παρουσία ενός ηλεκτρικού πεδίου και μίας διαβάθμισης της θερμοκρασίας) είναι

$$-\left(\mathbf{eE} + \frac{\eta}{T} \nabla T\right) \cdot \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{e}} = L_0(\varphi) + L_1(\varphi). \quad (82.12)$$

Οι δύο όροι στα δεξιά έχουν αρκετές διαφορετικές σημασίες: Οι πρώτες προκαλούν ταχεία χαλάρωση ενέργειας, οι δεύτερες προκαλούν διάχυτη χαλάρωσης σε σχέση με την κατεύθυνση της οιονεί ορμής.

Υπάρχουν δύο προφανείς ιδιότητες του χειριστή L_0 . Πρώτον, είναι μηδέν για κάθε λειτουργία του \mathbf{p}_F μόνο δεδομένου ότι η διαφορά (82.11) είναι μηδέν. Δεύτερον, το ολοκλήρωμα

$$\int L_0(\varphi) d\eta = 0; \quad (82.13)$$

L_0 περιγράφει συγκρούσεις στις οποίες μόνο η ενέργεια αλλάζει και (82.13) δηλώνει απλώς τη διατήρηση του αριθμού των ηλεκτρονίων που έχουν μία δεδομένη κατεύθυνση \mathbf{p} .

Θα επιδιώξουμε τη λύση της εξίσωσης μεταφοράς με τον τύπο

$$\varphi(\eta, \mathbf{p}_F) = \mathbf{a}(\mathbf{p}_F) + \mathbf{b}(\eta, \mathbf{p}_F), \quad (82.14)$$

όπου $\mathbf{a}(\mathbf{p}_F)$ είναι η συνάρτηση του \mathbf{p}_F μόνο και $|\mathbf{a}| \gg |\mathbf{b}|$. Το γεγονός ότι \mathbf{a} (για το οποίο το μέρος L_0 της σύγκρουσης του ολοκληρώματος είναι μηδέν) είναι μεγάλο εκφράζει τη ταχύτητα της χαλάρωσης της ενέργειας. Αντικαθιστώντας (82.14) στο (82.12) και παραμελώντας το σχετικό μικρό όρο $L_1(\mathbf{b})$, βρίσκουμε

$$-\left(\mathbf{e}\mathbf{E} + \frac{\eta}{T}\nabla T\right) \cdot \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} = L_0(\mathbf{b}) + L_1(\mathbf{a}). \quad (82.15)$$

Οι δύο όροι στα δεξιά είναι γενικά της ίδιας τάξης μεγέθους. Ωστόσο, κατά τον υπολογισμό της ηλεκτρικής ή θερμικής αγωγιμότητας, μόνο ένας από αυτούς τους όρους είναι σημαντικός, όπως μπορεί να φανεί από το γεγονός ότι το ευθυγραμμισμένο ηλεκτρόνιο-φωτόνιο χειριστής $\mathbf{I}_{\mathbf{e},\mathbf{p}_F}$ (και, επομένως L_0 και L_1) ενεργεί για τη συνάρτηση $\varphi(\eta, \mathbf{p}_F)$ δεν αλλάζει την ισοτιμία της σε σχέση με το η^* . Εμείς ωστόσο χωρίζουμε τη φ σε τμήματα φ_g και φ_u σε μονά και ζυγά σε σχέση με το η :

$$\varphi_K = \mathbf{a} + \mathbf{b}_g, \quad \varphi_u = \mathbf{b}_u$$

(η λειτουργία \mathbf{a} είναι ανεξάρτητη της η και είναι προφανώς άρτια). Αντικατάσταση της $\varphi = \varphi_g + \varphi_u$ στο (82.15) που ακολουθείται από διαχωρισμό των όρων μονών και ζυγών σε η , δίνει δύο εξισώσεις:

$$-\frac{\eta}{T} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v}_F \cdot \nabla T = L_0(\mathbf{b}_u), \quad (82.16)$$

$$-\frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \mathbf{e}\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_F = L_0(\mathbf{b}_K) + L_1(\mathbf{a}); \quad (82.17)$$

στις αριστερές πλευρές, η ταχύτητα \mathbf{v} έχει αντικατασταθεί με επαρκή ακρίβεια από τη

* Αυτό έχει αποδειχθεί στην §79 για την $\mathbf{I}_{\mathbf{e},\mathbf{p}_F}$. Δεν θα παύσουμε να δίνουμε την ακριβώς παρόμοια απόδειξη για $\mathbf{I}_{\mathbf{e},\mathbf{p}_F}$.

ταχύτητα \mathbf{v}_F επί της επιφάνειας Fermi, η οποία είναι ανεξάρτητη από την η . Ενσωμάτωση της δεύτερης εξίσωσης σε σχέση με την η δίνει

$$\mathbf{e}\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_F = \int L_1(\mathbf{a}) d\eta, \quad (82.18)$$

δεδομένου ότι (82.13) ο όρος L_0 εξαφανίζεται.

Η ροή θερμότητας (για $E = 0$) καθορίζεται εξ ολοκλήρου από τη λύση της εξίσωσης (82.16), η οποία περιέχει μόνο το χειριστή L_0 : Όπως θα πρέπει να περιμένουμε, αυτό εξαρτάται από τις διαδικασίες χαλάρωσης της ενέργειας του ηλεκτρονίου. Υπολογίζεται από αυτή τη λύση καθώς το ολοκλήρωμα

$$\mathbf{q}' = \int \mathbf{v} \eta \delta \bar{n} \cdot 2d^3p / (2\pi)^3 \approx - \int \mathbf{v}_F \eta \frac{\partial n_0}{\partial \eta} b_u \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}; \quad (82.19)$$

το μέρος της φ που είναι όμοιο στο η δεν κάνει καμία συνεισφορά, επειδή το ολοκλήρωμα που προκύπτει είναι μια περιττή λειτουργία.

Ο χειριστής L_0 είναι το κύριο μέρος της σύγκρουσης του ολοκληρώματος ηλεκτρονίου-φωτονίου. Η αντίστοιχη αποτελεσματική συχνότητα σύγκρουσης είναι επομένως ν_{e-ph} από (82.7); Με μεγαλύτερη ακρίβεια, η ποσότητα αυτή είναι η αποτελεσματική συχνότητα σύγκρουσης όσον αφορά στην ενεργειακή ανταλλαγή. Το αντίστοιχο ηλεκτρόνιο μέσης ελεύθερης διαδρομής είναι $l \sim v_F / \nu_{e-ph}$. Η θερμική αγωγιμότητα μπορεί να εκτιμηθεί από τον τύπο (7.10) στην κινητική θεωρία των αερίων: $\kappa \sim c \bar{v} N$. Στην προκειμένη περίπτωση, το N είναι ο αριθμός πυκνότητας των ηλεκτρονίων, c το ηλεκτρονικό μέρος της ειδικής θερμότητας (ανά ηλεκτρονίων αγωγής) και $\bar{v} \sim v_F$. Οι ποσότητες N και v_F είναι ανεξάρτητες από τη θερμοκρασία; Η ειδική θερμότητα ενός υγρού ηλεκτρονίου Fermi είναι ανάλογη προς T και από το (82.7) η μέση ελεύθερη διαδρομή $l \propto T^{-3}$. Δεδομένου ότι η ροή θερμότητας υπολογίζεται, αναφέρεται στο $E=0$, ο συντελεστής σε αυτό δεν είναι η θερμική αγωγιμότητα κ η ίδια αλλά $\kappa' = \kappa + T \sigma \alpha^2$: Βλέπε (78.3). Αυτό $\kappa' \propto T^{-2}$. Ο όρος $T \sigma \alpha^2$ είναι μικρός σε σύγκριση με το κ' (βλ. την επόμενη υποσημείωση-ένα) και έτσι $\kappa \propto T^{-2}$. Κάνοντας μια πρόχειρη εκτίμηση $c \sim m^* v_F T / N \hbar^3$ σε συνήθεις μονάδες (SP 2, (1.15)), βρίσκουμε

$$\kappa \sim (\epsilon_F v_F / \hbar^2) \Theta^2 / T^2. \quad (82.20)$$

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα επιτυγχάνεται με την επίλυση της εξίσωσης (82.18), η οποία περιέχει μόνο τον χειριστή L_1 ; Όπως είναι αναμενόμενο, το ηλεκτρικό ρεύμα εξαρτάται από τις διεργασίες χαλάρωσης σε σχέση με τις κατευθύνσεις της οιονεί ορμής του ηλεκτρονίου. Έχει σημειωθεί στην αρχή της §81, ότι αυτές οι διεργασίες είναι από τη φύση της διάχυσης κατά μήκος της επιφάνειας Fermi. Θα δείξουμε στην §83 πώς η εξίσωση μεταφοράς (82.18) μπορεί στην πραγματικότητα να τεθεί στη μορφή μιας

διάχυτης εξίσωσης. Η εξάρτηση της θερμοκρασίας της ηλεκτρικής αγωγιμότητας, ωστόσο μπορεί να εξακριβωθεί από τα ακόλουθα απλά επιχειρήματα.

Η κίνηση κατά μήκος της επιφάνειας Fermi λαμβάνει χώρα σε μικρά άλματα $k \sim T/u$; Αυτό ενεργεί ως η «μέση ελεύθερη διαδρομή» l_p στο χώρο ορμής και η συχνότητα των «γεγονότων διασκόρπισης» είναι η ίδια με τη συχνότητα σύγκρουσης ηλεκτρονίου-φωτονίου ν_{e-ph} . Ο συντελεστής διάχυσης κατά μήκος της επιφάνειας Fermi μπορεί να εκτιμηθεί από τον τύπο $D \sim l_p v$ από την κινητική θεωρία των αερίων με l_p και v αντικατασταθεί από l_p και ν_{e-ph} . Έχουμε συνεπώς (σε συνήθεις μονάδες)

$$D_p \sim (p_F^2 \Theta / \hbar) (T / \Theta)^5. \quad (82.21)$$

Από αυτό μπορούμε να βρούμε το χρόνο χαλάρωσης που πρόκειται να εμφανιστεί στην εκτίμηση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας, σύμφωνα με (78.16): $\sigma \sim e^2 N v_F^2 / \rho_F$. Είναι ο χρόνος στον οποίο η οιονεί ταχύτητα του ηλεκτρονίου αλλάζει από μια ποσότητα της τάξεως του εαυτού του. Στο χρόνο τ το ηλεκτρόνιο πρέπει να διαδώσει μια απόσταση κατά μήκος της επιφάνειας Fermi. Σε μία κίνηση διάχυσης, η μέση τετραγωνική της μετατόπισης είναι ανάλογη με το χρόνο (και με τον συντελεστή διάχυσης). Θα βρούμε $p_F^2 \sim D_p \tau$ και για την αγωγιμότητα (σε συνήθεις μονάδες)

$$\sigma \sim (\hbar e^2 N / m^* \Theta) (\Theta / T)^5. \quad (82.22)$$

Σε χαμηλές θερμοκρασίες επομένως η αγωγιμότητα είναι ανάλογη με T^{-5} .*

Ας εξετάσουμε τώρα το συντελεστή θερμοηλεκτρικής. Εδώ η θέση είναι παρόμοια με εκείνη σε υψηλές θερμοκρασίες. Εάν η τρέχουσα j υπολογίζεται από τη συνάρτηση της b_u η λύση της (82.16) τότε, δεδομένου ότι είναι μια περιττή συνάρτηση της η , το ολοκλήρωμα στην πρώτη προσέγγιση είναι μηδέν και λαμβάνεται ένα μη μηδενικό αποτέλεσμα μόνο όταν περιλαμβάνουμε τον επόμενο όρο στην η / ϵ_F στην επέκταση του ολοκληρώματος. Όπως όταν $T \gg \Theta$, δίνει στο συντελεστή θερμοηλεκτρικής

* Ο όρος εισήχθη για πρώτη φορά από τον F. Bloch (1929).

(σε συνήθεις μονάδες)

$$\alpha^1 \sim T / e \epsilon_F, \quad (82.23)$$

αντί για την «κανονική» τάξη μεγέθους $\alpha \sim 1/e$ *.

Μία άλλη συνεισφορά στο συντελεστή θερμοηλεκτρικής προκύπτει από τον όρο χ_1 , παραμελώντας (82.5) στη συνάρτηση χ του φωτονίου: Η συνεισφορά αυτή οφείλεται στην έλξη φωτονίου ενεργώντας για τα ηλεκτρόνια. Εάν ο όρος αυτός διατηρείται, η σύγκρουση του ολοκληρώματος (82.9) περιέχει ένα επιπλέον όρο

$$I_{\text{eph}}^{(2)}(\chi_1) \sim \nu_{\text{eph}} \chi_1 \partial N_0 / \partial \omega \sim -\nu_{\text{eph}} u |\nabla T| / \nu_{\text{ph},e} T, \quad (82.24)$$

που μπορεί στη συνέχεια να ληφθεί στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς (82.12), όπου θα συγκριθεί με τον όρο

$$-\frac{\partial n_0}{\partial T} \frac{\eta}{T} \mathbf{v} \cdot \nabla T. \quad (82.25)$$

Ο όρος (82.24) είναι μικρός σε σύγκριση με το (82.25) σε αναλογία T^2 / Θ^2 ; Η εκτίμηση είναι ανάλογη προς το (82.8). Η περίληψή της δίνει όμως έναν όρο ανάλογο προς ∇T στη λύση της εξίσωσης μεταφοράς ϕ και αυτό δεν είναι μια περιττή συνάρτηση της η . Ως εκ τούτου, για τον υπολογισμό της σχετικής συνεισφοράς στην τρέχουσα, δεν υπάρχει περαιτέρω μικρός παράγοντας και ο συντελεστής θερμοηλεκτρικού περιέχει έναν όρο

$$\alpha^{11} \sim T^2 / e \Theta^2 \quad (82.26)$$

(L.E. Gurevich, 1946). **

Καθώς η θερμοκρασία μειώνεται, το ίδιο κάνει και η συχνότητα σύγκρουσης ηλεκτρόνιο-φωτόνιο και τελικά οι συγκρούσεις μεταξύ ηλεκτρονίων και ατόμων

*Από τις εκτιμήσεις (82.20)-(82.23) βλέπουμε ότι $T \alpha^2 \sigma k \sim (\Theta / \epsilon_F)^2 \ll 1$, και αυτό δικαιολογεί την προσέγγιση που χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό (82.21).

* Εδώ το ακόλουθο σχόλιο είναι απαραίτητο. Δεδομένου ότι η οιονεί ορμή του φωτονίου είναι μικρή, ο νόμος της διατήρησης της ενέργειας δίνει $\epsilon(\mathbf{p}) - \epsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \approx \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{k} \approx \pm \omega(\mathbf{k})$, από την οποία βλέπουμε ότι η γωνία θ μεταξύ \mathbf{v}_F και \mathbf{k} είναι σχεδόν $\frac{1}{2}\pi$: $\cos \theta \sim \omega / v_F k \sim u / v_F \ll 1$. Στην ανιστροπική περίπτωση που η οιονεί ορμή \mathbf{k} και η ταχύτητα \mathbf{u} του φωτονίου είναι στην ίδια κατεύθυνση και έτσι το προϊόν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_F$ είναι επίσης μικρό. Ένα παρόμοιο προϊόν παρουσιάζεται στο ολοκλήρωμα που δίνει την τρέχουσα άποψη της συνάρτησης ϕ ανάλογη προς $u \nabla T \alpha$; Αυτό θα μπορούσε να προκαλέσει σε μια ιστροπική περίπτωση ένα πρόσθετο μικρό παράγοντα σε ένα $\bar{\alpha}^{11}$. Σε ένα ανιστροπικό κρύσταλλο ωστόσο, συμπεριλαμβανομένων εκείνων με κυβική συμμετρία, δεν υπάρχει γενικά κανένας λόγος για ένα τόσο μικρό παράγοντα να συμβεί.

πρόσμιξης γίνεται κυρίαρχοι προκαλώντας την ηλεκτρική και θερμική αντίσταση. Εξαιτίας της διαφορετικής εξάρτησης θερμοκρασίας, αργότερα γίνεται μετάβαση στην «υπολειμματική θερμική αντίσταση» από ότι στην υπολειπόμενη ηλεκτρική αντίσταση.

Σε πολύ καθαρά μέταλλα μπορεί να υπάρχουν μια σειρά από θερμοκρασίες στις οποίες οι ιδιότητες μεταφοράς του μετάλλου διέπονται από σύγκρουση μεταξύ των ηλεκτρονίων. Η αντίστοιχη μέση ελεύθερη διαδρομή του υγρού ηλεκτρονίου σε ένα μέταλλο, όπως σε οποιοδήποτε υγρό Fermi ποικίλει ανάλογα με τη θερμοκρασία όπως T^{-2} και η μικρή επεκταμένη παράμετρος είναι η αναλογία T/ϵ_F (βλέπε §75). Όταν $T \sim \epsilon_F$, η μέση ελεύθερη διαδρομή πρέπει να γίνει $\sim d$ και έτσι

$$l_{ee} \sim d(\epsilon_F/T)^2. \quad (82.27)$$

Η εξάρτηση θερμοκρασίας των ηλεκτρικών και θερμικών αγωγιμοτήτων είναι τότε

$$\sigma \propto T^{-2}, \quad \kappa \propto T^{-1} \quad (82.28)$$

(L. D. Landau and I. Ya. Pomeranchuk, 1936). Όταν η θερμοκρασία πέφτει, η αποτελεσματική συχνότητα σύγκρουσης ν_{ee} ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου μειώνεται πολύ πιο σιγά από ότι η συχνότητα σύγκρουσης ηλεκτρονίου-φωτόνιο $\nu_{e,ph}$. Ωστόσο, επειδή η μικρή παράμετρος στη ν_{ee} είναι T/ϵ_F και όχι T/Θ , όπως ν_{ee} συγκρούσεις ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου μπορούν να διαδραματίσουν έναν κυρίαρχο ρόλο μόνο σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες.

Σημειώστε επίσης, ότι οι νόμοι (82.28) μπορούν κατ' αρχήν να αφορούν περιπτώσεις είτε με ανοικτές είτε με κλειστές επιφάνειες Fermi. Αφού η οιονεί ορμή του ηλεκτρονίου είναι μεγάλη, η αναγκαία ύπαρξη των διεργασιών Umklapp δεν δίνει ανύψωση σε γενικές γραμμές σε κανένα μικρό παράγοντα για κλειστές επιφάνειες Fermi.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Υπολογίστε τον συντελεστή θερμοηλεκτρικού α για ένα μέταλλο με κλειστή επιφάνεια Fermi σε χαμηλές θερμοκρασίες, παραμελώντας τις διεργασίες Umklapp.

ΛΥΣΗ. Η εξίσωση μεταφοράς ηλεκτρονίων είναι

$$-e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\epsilon - \mu}{T} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \nabla T = C_{e,ph}(n). \quad (1)$$

Η εξίσωση μεταφοράς του φωτονίου μπορεί να γραφτεί

$$-\frac{\omega}{T} \frac{\partial N_0}{\partial \mathbf{k}} \cdot \nabla T = C_{ph,e}(N). \quad (2)$$

από

$$\mathbf{u} \cdot \frac{\partial N_0}{\partial \mathbf{T}} = -\frac{\omega}{T} \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \mathbf{u} = -\frac{\omega}{T} \frac{\partial N_0}{\partial \mathbf{k}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (1) και (2) από p και k αντίστοιχα και η ενσωμάτωσή τους πάνω $2d^3p/(2\pi)^3$ και $d^3k/(2\pi)^3$ αντίστοιχα, προσθέτουμε όρο με όρο; Η δεξιά πλευρά είναι μηδέν με τη διατήρηση του συνόλου της οιονεί ορμής των ηλεκτρονίων και φωτονίων από την απουσία των διεργασιών Umklapp. Το αποτέλεσμα είναι

$$A = \frac{\pi^2}{9} \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \frac{dS}{v(2\pi)^3} \right]_{\epsilon=\epsilon_F};$$

το δεύτερο και τρίτο ολοκλήρωμα είναι γραμμένο στην υπόθεση ότι ο κρύσταλλος έχει κυβική συμμετρία.

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο (3) μετασχηματίζεται όπως στην παραγωγή του (81.4) και δίνει $-e\mathbf{E}(N_e - N_h)$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα υπολογίζεται όπως στην πηγή του (78.12) και είναι $-\overline{ATVT}$, όπου

$$A = \frac{\pi^2}{9} \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \frac{dS}{v(2\pi)^3} \right]_{\epsilon=\epsilon_F};$$

το ολοκλήρωμα λαμβάνεται πάνω σε μία επιφάνεια σταθερής ενέργειας ϵ . Το τρίτο ολοκλήρωμα μετά την ενσωμάτωση με τμήματα γίνεται

$$-\frac{\nabla T}{3T} \int N_0(3\omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3};$$

το ολοκλήρωμα επί των επιφανειών του αμοιβαίου πλέγματος του κυττάρου είναι μηδέν, λόγω της ταχείας μείωσης της N_0 με αυξανόμενη ω σε χαμηλές θερμοκρασίες. Για μεγάλο μήκους κύματος ακουστικά φωτόνια (τα μόνα που είναι σημαντικά σε χαμηλές θερμοκρασίες), η ταχύτητα u και η αναλογία $k=k/\omega$ εξαρτώνται μόνο από τις οδηγίες του k , όχι στο ω . Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα σε σχέση με την ω , την συνηθισμένη έκφραση, βρίσκουμε ότι το τρίτο ολοκλήρωμα στο (3) είναι $-\overline{BT^3VT}$, όπου

$$B = \frac{\pi^4}{15} \sum \int (1 + \frac{1}{3}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) \kappa^2 \frac{d\Omega_k}{(2\pi)^3};$$

και το άθροισμα είναι πάνω από τις ακουστικές διακλαδώσεις του φάσματος του φωτονίου.

Η εξίσωση (3) έτσι γίνεται

$$-e\mathbf{E}(N_e - N_h) = \nabla T(AT + BT^3).$$

Συγκρίνοντας με (78.1) (για $j=0$) δίνει το συντελεστή θερμοηλεκτρικής

$$\alpha = (AT + BT^3)/(N_e - N_h). \quad (4)$$

Η κατάσταση $j=0$ μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια ενός κατάλληλα επιλεγμένου όρου της μορφής (81.1) στη λύση της εξίσωσης μεταφοράς. Σύμφωνα με την συζήτηση στη §81, η έκφραση (4) είναι πεπερασμένη για ένα αποζημιωμένο μέταλλο αλλά γίνεται άπειρο, όταν $N_e = N_h$.

§83. Διάχυση ηλεκτρονίου επί της επιφάνειας Fermi

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε πως η εξίσωση μεταφοράς (82.17) για το πρόβλημα την ηλεκτρική αγωγιμότητα σε χαμηλές θερμοκρασίες μπορεί να μειωθεί σε μία εξίσωση διάχυσης.* Έχοντας μόνο αυτό το πρόβλημα στο μυαλό, θα εξετάσουμε μόνο το τμήμα της συνάρτησης φ που είναι ανεξάρτητη της $\eta = \epsilon - \mu$ και δηλώνει ότι με $\varphi(p_F)$ αντί για $\alpha(p_F)$ όπως στη §82. Θα έχουμε και πάλι κατά νου την περίπτωση των ανοικτών επιφανειών Fermi. Η λειτουργία

$$\frac{\delta \bar{n}}{(2\pi)^3} = -\frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{\varphi}{(2\pi)^3}$$

είναι η αλλαγή μη-ισορροπίας στην κατανομή ηλεκτρονίου στο χώρο ορμής. Από αυτό μπορούμε να πάμε στη διανομή πάνω από την επιφάνεια Fermi γράφοντας το στοιχείο όγκου d^3p όπως $de dS/u$ (74.19), ενσωματώνοντας πάνω $de = d\eta$ και την περίπου αντικατάσταση του ορίου της περιοχής dS για τη συνεχή-ενέργεια επιφάνειας και την ταχύτητα u που εξαρτάται από την ϵ με τις τιμές τους dS_F και u_F επί της επιφάνειας Fermi. Η συνάρτηση φ είναι υποθετικά ανεξάρτητη της ϵ και η ενσωμάτωση του παράγοντα $-\partial n_0/\partial \epsilon$ δίνει ενότητα. Η διανομή πυκνότητας της για τις επιφάνειες Fermi είναι τότε

$$\varphi(p_F)/(2\pi)^3 v_F. \quad (83.1)$$

Για ευκρίνεια στη πηγή γράφουμε πρώτα την εξίσωση μεταφοράς (82.17) με τη μερική παράγωγο ως προς το χρόνο στην αριστερή πλευρά, όπως εάν η κατανομή δεν ήταν ακινητοποιημένη:

$$-\frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_F \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} = L_1(\varphi).$$

Εδώ ο όρος στο L_0 παραλείπεται, ο οποίος σε κάθε περίπτωση εξαφανίζεται όταν η εξίσωση είναι ενσωματωμένη $d\eta/u_F$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{1}{v_F} - \int L_1(\varphi) \frac{d\eta}{v_F} = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_F/v_F. \quad (83.2)$$

Ο πρώτος όρος στα αριστερά είναι ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας του ηλεκτρονίου επί της επιφάνειας Fermi. Αυτή η εξίσωση πρέπει να έχει τη μορφή μιας συνεχιζόμενης

*Η απόδειξη που δίνεται παρακάτω είναι των R.N. Gurzhi και A. I. Kopeliovich (1971).

εξίσωσης, δηλαδή ο δεύτερος όρος στα αριστερά πρέπει να είναι η απόκλιση της ροής ηλεκτρονίου s στην επιφάνεια Fermi και ο όρος του ηλεκτρικού πεδίου στα δεξιά ενεργεί ως πηγή ή πυκνότητα βύθισης. Εδώ ενδιαφερόμαστε για μια δισδιάστατη απόκλιση σε μία καμπυλωμένη επιφάνεια, αλλά ίσως μπορεί εύκολα να γραφτεί σε τρισδιάστατους όρους:

$$-\int L_1(\varphi) d\eta/v_F = \{\nabla_p - \mathbf{u}_F(\mathbf{u}_F \cdot \nabla_p)\} \cdot \mathbf{s}, \quad (83.3)$$

όπου ∇_p είναι ο συνήθης φορέας της διαφοροποίησης σε σχέση με τις συντεταγμένες Cartesian στο χώρο p και ο φορέας στους δεσμούς είναι η προβολή του στο εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια Fermi σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σημείο (\mathbf{n}_F είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της κανονικής).* Το διάνυσμα $s(p_F)$ προσδιορίζεται στην επιφάνεια Fermi, αλλά στο (83.3) θεωρείται τυπικά ότι προσδιορίζεται σε όλο το χώρο (αν και εξαρτάται μόνο από τη κατεύθυνση της p_F). Στην εξίσωση μεταφοράς θα παραλείψουμε τώρα το παράγωγο του χρόνου και θα γίνει

$$\{\nabla_p - \mathbf{u}_F(\mathbf{n}_F \cdot \nabla_p)\} \mathbf{s} = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_F/v_F. \quad (83.4)$$

Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η ροή s σε ότι αφορά το φ .

Χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες Cartesian σε χώρο- p με την προέλευση επί της επιφάνειας Fermi στο σημείο όπου $s(p_F)$ υπολογίζεται και ο z -άξονας κατά μήκος της κανονικής. Από τον ορισμό η ροή συστατικών s_x είναι η διαφορά μεταξύ των αριθμών ηλεκτρονίων ανά μονάδα χρόνου διέλευσης (ως αποτέλεσμα των συγκρούσεων) μια λωρίδα πλάτους της μονάδας στο yz -επίπεδο από τα αριστερά προς τα δεξιά (για παράδειγμα στη θετική x -διεύθυνση) και από τα δεξιά προς τα αριστερά.

Ας εξετάσουμε τη διαφορά μεταξύ του αριθμού των εκδηλώσεων στις οποίες ένα φωτόνιο με οιονεί ορμή k σε μια δεδομένη περιοχή d^3k εκπέμπεται από ένα ηλεκτρόνιο

* Αυτός ο συντελεστής εμφανίζεται στη δισδιάστατη αναλογία του θεωρήματος Gauss's,

$$\oint \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\mathbf{l} = \int \{\nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)\} \cdot \mathbf{s} dS.$$

Το ολοκλήρωμα στα αριστερά λαμβάνεται γύρω από ένα κλειστό περίγραμμα πάνω στην επιφάνεια σε ερώτηση (\mathbf{e} είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος την εξωτερική κάθετο προς το περίγραμμα του επιπέδου της εφαπτομένης στην επιφάνεια σε εξέταση σημείο); Το ολοκλήρωμα στα δεξιά έχει ληφθεί στο μήκη της επιφάνειας που περικλείεται από το περίγραμμα.

με οιονεί ορμή σε μια σειρά d^3p και ο αριθμός των αντίστροφων εκδηλώσεων στις οποίες ένα τέτοιο φωτόνιο απορροφάται. Είναι μείον ο πρώτος όρος στο ολοκλήρωμα (79.9):

$$d^3p \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial N_0}{\partial \omega} w(n'_0 - n_0) \delta(\epsilon - \epsilon' - \omega_k) (\varphi_{p'} - \varphi_p + \chi_k), \quad (83.5)$$

με $p=p'+k$.^{*} Η λειτουργία του φωτονίου χ_k εκφράζεται εδώ από πλευράς του φ (82.5):

$$\chi_k = -\frac{1}{v_{ph,\epsilon}} \int w(n'_0 - n_0) \delta(\epsilon - \epsilon' - \omega_k) (\varphi_{p'} - \varphi_p) \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (83.6)$$

με $v_{ph,\epsilon}$ από (82.6)

Εάν $k_x < 0$, η εκπομπή του φωτονίου θα οδηγήσει στη δίοδο μέσω της λωρίδας (από αριστερά προς τα δεξιά) από αυτά τα ηλεκτρόνια για τα οποία η x-συνιστώσα της αρχικής οιονεί - ορμής είναι στο εύρος

$$k_x < p_x < 0; \quad (83.7a)$$

για τέτοιες τιμές του p , (83.5) δίνει μια θετική συμβολή στη ροή s_x . Εάν $k_x > 0$, η εκπομπή των αποτελεσμάτων του φωτονίου στη δίοδο μέσω της λωρίδας (από δεξιά προς τα αριστερά) των ηλεκτρονίων με

$$0 < p_x < k_x; \quad (83.7b)$$

η αντίστοιχη συμβολή της s_x είναι αρνητική.

Είναι πλέον σαφές ότι για να βρει κανείς s_x θα πρέπει (1) να ενσωματώσουμε την έκφραση (83.5) σε μία περιοχή μονάδας p_y και σε όλο το φάσμα του p , (λόγω της ταχείας σύγκλισης, η τελευταία ενσωμάτωση μπορεί να επεκταθεί από $-\infty$ έως $+\infty$); (2) πρέπει να ενσωματώσουμε στην περιοχή (83.7) το p_x (εν όψει της αργής μεταβολής όλων των ποσοτήτων με p_x επί της επιφάνειας Fermi. Αυτό μειώνει απλά τον πολλαπλασιασμό με το μήκος της σειράς, δηλαδή $-k_x$ όταν πάρουμε υπόψη το σημείο

* Στα προηγούμενα επιχειρήματα παραλείψαμε ένα παράγοντα $(2\pi)^{-3}$ στον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας (83.1). Ένας αντίστοιχος συντελεστής επίσης παραλείπεται από το (83.5).

Έχουμε συμφωνήσει στη περίπτωση των ανοικτών επιφανειών Fermi να περιλαμβάνονται τιμές της οιονεί ορμής του ηλεκτρονίου σε όλο το αμοιβαίο πλέγμα (βλέπε §81); Ο νόμος της διατήρησης της οιονεί ορμής είναι ωστόσο γραπτή χωρίς τον όρο b.

του αποτελέσματος στο s_x); (3) να ενσωματώσουμε d^3k .

Το στοιχείο ροής s_y διαφέρει από το s_x μόνο κατά το ότι k_x αντικαθίσταται από το k_y στο ολοκλήρωμα. Η ροή μπορεί επομένως να γραφτεί με το διανυσματικό τύπο

$$s(\mathbf{p}_F) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa \left\{ \frac{\partial N_0}{\partial \omega} w(n'_0 - n_0) \delta(\epsilon - \epsilon' - \omega) (\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} + \chi_k) \right\} dp_z, \quad (83.8)$$

όπου κ είναι η προβολή της k στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο \mathbf{p}_F .

Πρώτα απ' όλα, γράφουμε $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ και ενσωματώνουμε σε σχέση με το k_z . Αφού το k είναι μικρό, μπορούμε να μετατρέψουμε το επιχείρημα της λειτουργίας δέλτα (83.8):

$$\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'} - \omega_k) \approx \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_F - \omega) = \frac{1}{v_F} \delta(k_z - \omega/v_F);$$

v_F είναι κατά μήκος της ομαλής προς την επιφάνεια Fermi. Η ενσωμάτωση σε σχέση με k_z αφαιρεί τη λειτουργία δέλτα και αντικαθιστά το k_z από παντού με ω/v_F . Αφού με $\omega/v_F \sim kv_F \ll k$, μπορούμε να θέσουμε απλά $k_z = 0$, δηλαδή γίνεται η αλλαγή

$$\mathbf{k} \rightarrow \boldsymbol{\kappa}. \quad (83.9)$$

Η ενσωμάτωση $dp_z = d\epsilon/v_z$ μπορεί επίσης να διεξαχθεί σε ένα γενικό τύπο, αφού η μοναδική ταχεία μεταβαλλόμενη συνάρτηση της ϵ στο ολοκλήρωμα είναι η διαφορά

$$n_0(\epsilon - \omega) - n_0(\epsilon) \approx -\omega \partial n_0 / \partial \epsilon;$$

η ενσωμάτωση σε σχέση με την ϵ μετατρέπει αυτόν τον παράγοντα σε ω . Η έκφραση (83.8) γίνεται τώρα

$$s(\mathbf{p}_F) = - \frac{1}{2\pi v_F^2} \int \boldsymbol{\kappa} \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \frac{\partial N_0(\omega_{\boldsymbol{\kappa}})}{\partial \omega_{\boldsymbol{\kappa}}} w(\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} + \chi_{\boldsymbol{\kappa}}) \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}}{(2\pi)^2}. \quad (83.10)$$

Για να μετασχηματίσουμε το ολοκλήρωμα περαιτέρω χρησιμοποιούμε πάλι τη μικρότητα του k για να γράψουμε

$$\varphi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \varphi(\mathbf{p}) \approx -\mathbf{k} \cdot \partial \varphi / \partial \mathbf{p} \approx -\boldsymbol{\kappa} \cdot \partial \varphi / \partial \mathbf{p} = -\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{t} \cdot \partial \varphi / \partial \mathbf{p},$$

όπου $\mathbf{t} = \mathbf{k}/k$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στην επιφάνεια Fermi στην κατεύθυνση του $\boldsymbol{\kappa}$. Δεδομένου ότι μια παρόμοια διαφορά εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα (83.6), μπορούμε να βάλουμε $\chi(\mathbf{k})$ με το τύπο

$$\chi(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{t}). \quad (83.11)$$

Τέλος, από (79.4),

$$\mathbf{w} = \kappa \mathbf{M}(\mathbf{p}_F, \mathbf{t}). \quad (83.12)$$

Με αυτή τη σημείωση,

$$\mathbf{s} = -\frac{1}{2\pi v_F^2} \int \mathbf{t} \kappa^3 \omega_\kappa \frac{\partial N_0}{\partial \omega_\kappa} M \left(\mathbf{t} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} \right) \kappa \frac{d\kappa d\phi}{(2\pi)^2}, \quad (83.13)$$

όπου φ είναι η πολική γωνία των κατευθύνσεων του κ στο εφαπτόμενο επίπεδο.

Η ενσωμάτωση σε σχέση με το κ στο (83.13) μειώνει τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty \kappa^4 \omega_\kappa \frac{\partial N_0}{\partial \omega_\kappa} d\kappa;$$

εξαιτίας της ταχείας σύγκλισης, η ένταξη μπορεί να επεκταθεί μέχρι το ∞ . Η ενέργεια ενός φωτονίου με μια μικρή οιονεί - ορμή $\kappa = \kappa \mathbf{t}$ είναι $\omega_\kappa = u(t)\kappa$. Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{1}{u^3} \int_0^\infty \omega^5 \frac{\partial N_0}{\partial \omega} d\omega = -\frac{5}{u^3} \int_0^\infty N_0 \omega^4 d\omega = -\frac{5T^5}{u^5} \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{e^x - 1} \\ &= -120\zeta(5)T^5/u^5; \end{aligned}$$

η τιμή της συνάρτησης zeta είναι $\zeta(5) = 1.037$.

Εμείς επομένως φθάνουμε στην ακόλουθη έκφραση για τη ροή ηλεκτρονίου κατά μήκος της επιφάνειας Fermi:

$$\mathbf{s} = -\frac{30\zeta(5)T^5}{\pi^2 v_F^2} \left\langle \frac{\mathbf{M}(\mathbf{t})}{u^5(\mathbf{t})} \mathbf{t} \left(\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{a} \right) \right\rangle, \quad (83.14)$$

όπου οι αγκύλες υποδηλώνουν κατά μέσο όρο πάνω τις κατευθύνσεις του \mathbf{t} στο εφαπτόμενο επίπεδο σε ένα δεδομένο σημείο \mathbf{p}_F επί της επιφάνειας Fermi. Παραμένει για μας να απλοποιήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο την έκφραση για \mathbf{a} .

Με τον ορισμό (83.11) έχουμε από το (83.6)

$$\mathbf{a} = \frac{\int \mathbf{M}(n'_0 - n_0) \delta(\epsilon - \epsilon' - \omega) (\partial \varphi / \partial \mathbf{p}) d^3 p}{\int \mathbf{M}(n'_0 - n_0) \delta(\epsilon - \epsilon' - \omega) d^3 p},$$

όπου κοινά στοιχεία έχουν ακυρωθεί στον αριθμητή και στο παρονομαστή. Η ενσωμάτωση $d^3 p$ αντικαθίσταται από $dS_F d\epsilon/u_F$ (βλέπε στην αρχή αυτής της ενότητας).

Μόνο ο παράγοντας $n'_0(\epsilon - \omega) - n_0(\epsilon)$, ο οποίος είναι ο ίδιος και στα δύο ολοκληρώματα, εξαρτάται από το ϵ ; Το αποτέλεσμα της ενσωμάτωσης στο $d\epsilon$ caucels στον αριθμητή και παρονομαστή. Το επιχείρημα της συνάρτησης δέλτα μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_F - \omega \approx \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_F$, ποσότητες σε σχετική σειρά u/u_F είναι παραμελημένες. Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\mathbf{a} = \frac{\int v_F^{-2} M \delta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) (\partial \varphi / \partial \mathbf{p}) dS_F}{\int v_F^{-2} M \delta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) dS_F}, \quad (83.15)$$

M είναι μία συνάρτηση της θέσης \mathbf{p}_F επί της επιφάνειας Fermi και της κατεύθυνσης \mathbf{t} και \mathbf{v} να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του κανονικού. Ως συνέπεια της παρουσίας των συναρτήσεων δέλτα, τα ολοκληρώματα στην πραγματικότητα λαμβάνονται μόνο κατά μήκος μιας καμπύλης επί της επιφάνειας Fermi όπου το κανονικό είναι κάθετο στην \mathbf{t} κατεύθυνση της οιονεί ορμής του φωτονίου.

Οι τύποι (83.4), (83.14) και (83.15) λύνουν το πρόβλημα φέρνοντας την εξίσωση μεταφοράς στη μορφή διάχυσης. Το αποτέλεσμα είναι ένα ολοκληρωμα-διαφορικών εξισώσεων. Η ροή (83.14) μπορεί να γραφεί ως

$$s_\alpha = -D_{\alpha\beta} (\partial \varphi / \partial p_\beta - a_\beta), \quad (83.16)$$

όπου

$$D_{\alpha\beta} = T^5 \frac{30 \zeta(5)}{\pi^2 v_F^2} \left\langle \frac{M(\mathbf{t})}{u^5(\mathbf{t})} t_\alpha t_\beta \right\rangle \quad (83.17)$$

και α, β είναι δύο διαστάσεις διανυσμάτων καταλήξης. Ο πρώτος όρος έχει τη συνήθη διαφορική μορφή με το συντελεστή διάχυσης τανυστής $D_{\alpha\beta}$. Σχετίζεται με τη διασκόρπιση ηλεκτρονίου από ισορροπημένα φωτόνια. Το δεύτερο ολοκλήρωμα, όρος οφείλεται στην έλξη ηλεκτρονίου από μη ισορροπημένα φωτόνια.

Η πυκνότητα ρεύματος υπολογίζεται από τη συνάρτηση φ ως το ολοκλήρωμα

$$\mathbf{j} = -\frac{2e}{(2\pi)^3} \int \varphi \mathbf{u} dS_F.$$

Είναι σαφές από το (83.4) με s από (83.16) και (83.17), ότι φ (και συνεπώς η αγωγιμότητα του μετάλλου) ποικίλλει με τη θερμοκρασία ως T^{-5} , σύμφωνα με το αποτέλεσμα στη §82. Σημειώστε ότι η ηλεκτρική αντίσταση από φωτόνια δεν επηρεάζουν αυτό το νόμο, αν και επηρεάζει τη μορφή της εξίσωσης μεταφοράς.

§84. Galvanomagnetic φαινομένων σε ισχυρά πεδία. Θεωρία General

Η χαρακτηριστική αδιάστατη παράμετρος που διέπει την επίδραση ενός μαγνητικού πεδίου για την ηλεκτρική αγωγιμότητα ενός μετάλλου είναι η αναλογία r_B/I όπου r_B είναι η ακτίνα της τροχιάς Larmor του ηλεκτρονίου και I η μέση ελεύθερη διαδρομή.

Είναι γνωστό (*SP 2*, §57) ότι η κίνηση ενός ηλεκτρονίου αγωγιμότητας σε ένα μαγνητικό πεδίο είναι σχεδόν πάντα οιονεί κλασσική, διότι ο λόγος $\hbar\omega_B/\epsilon_F$ (όπου ω_B είναι η συχνότητα Larmor) είναι πολύ μικρός. Η τροχιά στο χώρο ορμής είναι τότε η περίμετρος της εγκάρσιας διατομής μιας σταθερής επιφάνειας ενέργειας $\epsilon(p) = \text{σταθερά}$ από ένα επίπεδο $p_z = \text{σταθερά}$, όπου ο z -άξονας είναι παράλληλος προς το πεδίο. Επειδή η ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι κοντά στη περιορισμένη ενέργεια ϵ_F , οι συνεχής-ενέργεια της **κατάληξης της ερώτησης είναι κοντά** στην επιφάνεια Fermi. Ως εκ τούτου το μέγεθος της τροχιάς στο χώρο ώθησης δίνεται από τη γραμμική p_F της κατάλληλης διατομής της επιφάνειας Fermi. Το μέγεθος της τροχιάς σε συνήθη χώρο είναι

$$r_B \sim cp_F/eB,$$

και είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το μαγνητικό πεδίο. Σε galvanomagnetic φαινόμενα, τα πεδία πρέπει να θεωρούνται ως αδύναμα για το οποίο $r_B \gg I$ και τόσο ισχυρά για τα οποία

$$r_B \ll l. \quad (84.1)$$

Για αδύναμα μαγνητικά πεδία, η συμπεριφορά μεταφοράς δεν (για μια γενική σχέση διασποράς ηλεκτρονίου) καθοδηγείται σε τίποτα από τα αποτελέσματα της καθαρά φαινομενολογικής θεωρίας. Η φύση της εξάρτησης του μαγνητικού πεδίου της αγωγιμότητας των συστατικών του τανυστή $\sigma_{\alpha\beta}$ σε αυτή την περίπτωση αντιστοιχεί απλά με την επέκταση των αρμοδιοτήτων του B , λαμβάνοντας υπόψη τις απαιτήσεις που επιβάλλονται από την αρχή της συμμετρίας των κινητικών συντελεστών (βλέπε ECM, §21).

Σε ισχυρά μαγνητικά πεδία ωστόσο, η θεραπεία μεταφοράς είναι απαραίτητη προκειμένου να βρεθεί αυτή η εξάρτηση. Η προϋπόθεση (84.1) για ένα ισχυρό πεδίο

στην πράξη πληρούται μόνο σε χαμηλές θερμοκρασίες, όπου η μέση ελεύθερη διαδρομή l είναι αρκετά μεγάλη. Το μέταλλο είναι συνήθως στην περιοχή της υπολειμματικής αντίστασης που οφείλεται στη διασκόρπιση του ηλεκτρονίου από άτομα πρόσμιξης και θα πρέπει να έχουμε την περίπτωση αυτή στο μυαλό μας. Η αλληλεπίδραση των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας με ένα άτομο ακαθαρσίας λαμβάνει χώρα σε αποστάσεις της τάξης της σταθεράς του πλέγματος d . Εάν $r_B \ll l$, αλλά $r_B \gg d$ η παρουσία του μαγνητικού πεδίου δεν επηρεάζει αυτή την αλληλεπίδραση, ούτε κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα σύγκρουσης. Υπό αυτές τις συνθήκες, η εξάρτηση του μαγνητικό πεδίο του τανυστή αγωγιμότητας δεν επηρεάζεται από την ειδική μορφή της σύγκρουσης του ολοκληρώματος. Εξαρτάται σημαντικά από την δομή την αγωγιμότητα του ενεργειακού φάσματος ηλεκτρονίου, για παράδειγμα για την μορφή της επιφάνειας Fermi.*

Ας κατασκευάσουμε τώρα την εξίσωση μεταφοράς που περιγράφει τα galvanomagnetic φαινόμενα.

Η συνάρτηση κατανομής εκφράζεται εδώ κατάλληλα όχι από την άποψη των καρτεσιανών συνιστωσών της οιονεί ορμής p αλλά από την άποψη των άλλων μεταβλητών που σχετίζονται με την τροχιά ηλεκτρονίου: η ενέργεια ϵ , η συνιστώσα της οιονεί ορμής p κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου (z -άξονας) και ο «χρόνος για το ηλεκτρόνιο να κινείται κατά μήκος της ορμής της τροχιάς» από κάποιο σταθερό σημείο στο εν λόγω σημείο. Αυτή η τελευταία μεταβλητή, την οποία συμβολίζουμε με τ φέρεται στο μέσω της οιονεί κλασσικής εξίσωσης της κίνησης ενός ηλεκτρονίου αγωγιμότητας σε ένα μαγνητικό πεδίο,

$$d\mathbf{p}/d\tau = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c, \quad \mathbf{v} = \partial\epsilon/\partial\mathbf{p};$$

οι x και y συνιστώσες αυτού είναι

$$dp_x/d\tau = -ev_y B/c, \quad dp_y/d\tau = ev_x B/c. \quad (84.2)$$

Λαμβάνοντας το άθροισμα των τετραγώνων των εξισώσεων αυτών και χρησιμοποιώντας το στοιχείο του μήκους ds για την τροχιά δυναμικής στο xy -επίπεδο ($ds^2 = dp_x^2 + dp_y^2$), παίρνουμε

$$d\tau = (c/eB) ds/v_{\perp}, \quad v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2; \quad (84.3)$$

* Η θεωρία που δίνεται παρακάτω οφείλεται στους I. M. Lifshitz, M. Ya. Azbel and M. I. Kaganov (1956).

Η ενσωμάτωση αυτής της εξίσωσης δίνει το νέο μεταβλητή, σε ότι αφορά τους παλιούς μεταβλητές p_x, p_y, p_z .

Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς* είναι στις νέες μεταβλητές,

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial n}{\partial p_z} \dot{p}_z + \frac{\partial n}{\partial \tau} \dot{\tau}. \quad (84.4)$$

Η συνάρτηση κατανομής ως συνήθως θα πρέπει να αναζητηθούν στο τύπο

$$n = n_0(\epsilon) + \delta \bar{n}(\epsilon, p_z, \tau). \quad (84.5)$$

Αποδείχθηκε στο τέλος της §74, ότι σε στατικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, η εξίσωση μεταφοράς γραμματικοποιείται προς $\delta \bar{n}$, για οιονεί σωματίδια σε ένα υγρό Fermi με τον ίδιο τύπο, όπως για τα σωματίδια σε ένα αέριο Fermi. Τα παράγωγα $\dot{\epsilon}$, \dot{p}_z and $\dot{\tau}$ εκφράζονται με τη βοήθεια της εξίσωσης της κίνησης ενός ατόμου ηλεκτρονίου σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

$$\dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c. \quad (84.6)$$

Ως εκ τούτου έχουμε

$$\dot{\epsilon} = (\partial \epsilon / \partial \mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E};$$

το μαγνητικό πεδίο δεν εμφανίζεται, δεδομένου ότι δεν φορτίζει. Για ένα πεδίο B στην z-κατεύθυνση έχουμε $\dot{p}_z = -eE_z$. Τέλος, η σύγκριση των (84.2) και (84.6), δείχνει ότι το παράγωγο dn/dt διαφέρει από την ενότητα μόνο λόγω του πεδίου E; Και αυτή η διαφορά δεν χρειάζεται να ληφθεί υπόψη.

Επειδή η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας n_0 εξαρτάται μόνο από ϵ , and ϵ , p_z and τ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, έχουμε $\partial n_0 / \partial p_z = 0$, $\partial n_0 / \partial \tau = 0$. Το ηλεκτρικό πεδίο θεωρείται ότι είναι εξαιρετικά ασθενές και στην γραμμικοποίηση η εξίσωση μεταφοράς τους όρους που περιέχουν τις μικρές ποσότητες $\delta \bar{n}$ και το E θα παραλειφθούν. Η έκφραση (84.4) μειώνει στη συνέχεια στο

$$\frac{dn}{dt} \approx -\frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \delta \bar{n}}{\partial t}.$$

* Η χρήση της οιονεί κλασικής εξίσωσης μεταφοράς συνεπάγεται με την παραμέληση των αποτελεσμάτων που οφείλονται στην κβάντωση των επιπέδων ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο. Αυτά θα συζητηθούν στη §90.

Γράφουμε

$$\delta \bar{n} = (\partial n_0 / \partial \epsilon) e \mathbf{E} \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}(\epsilon, p_z, \tau); \quad (84.7)$$

cf.(78.6). Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς γίνεται τελικά

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} e \mathbf{E} \cdot \left(-\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} \right). \quad (84.8)$$

Η σύγκρουση του ολοκληρώματος στα δεξιά της εξίσωσης μεταφοράς μετά από τη γραμμικοποίηση είναι γραμμένη με το τύπο

$$\mathbf{C}(\mathbf{n}) = (\partial n_0 / \partial \epsilon) e \mathbf{E} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{g}); \quad (84.9)$$

στη σύγκρουση του ολοκληρώματος για ελαστική διασκόρπιση από άτομα προσμίξεων, κάθε παράγοντας στο $\delta \bar{n}$ που εξαρτάται μόνο από την ϵ μπορεί να ληφθεί έξω από το ολοκλήρωμα. Ο συγκεκριμένος τύπος του γραμμικού ολοκληρώματος του φορέα $I(\mathbf{g})$ θα πρέπει να δηλώνεται.

Εξισώνοντας (84.8) και (84.9) έχουμε τελικά την εξίσωση μεταφοράς που καθορίζει τη συνάρτηση \mathbf{g} :

$$\partial \mathbf{g} / \partial \tau - \mathbf{I}(\mathbf{g}) = \mathbf{v}. \quad (84.10)$$

Ο ταυστής αγωγιμότητας δίνεται από το ολοκλήρωμα (78.9):

$$\sigma_{\alpha\beta} = -e^2 \int \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} v_{\alpha} g_{\beta} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Σε αυτό το ολοκλήρωμα, η αλλαγή στις νέες μεταβλητές γίνεται από την αντικατάσταση $d^3p \rightarrow |J| d\epsilon dp_z d\tau$, όπου

$$\mathbf{J} = \partial(p_x, p_y, p_z) / \partial(\tau, \epsilon, p_z)$$

είναι το Jacobian του μετασχηματισμού, το οποίο βρίσκεται εύκολα κατευθείαν από τις εξισώσεις (84.2) που ορίζουν το μεταβλητή τ . Γράφοντας και τις δύο πλευρές της πρώτης εξίσωσης (84.2), για παράδειγμα ως Jacobians

$$\frac{\partial(p_x, \epsilon, p_z)}{\partial(\tau, \epsilon, p_z)} = -\frac{e\mathbf{B}}{c} \frac{\partial(\epsilon, p_x, p_z)}{\partial(p_y, p_x, p_z)},$$

και πολλαπλασιάζοντας όλες τις πλευρές με $\partial(p_y, p_x, p_z) / \partial(\epsilon, p_x, p_z)$, βρίσκουμε $|J| = e\mathbf{B}/c$. Παραμελώντας τη θερμική θόλωση της κατανομής n_0 , έχουμε θέσει ως συνήθως $\partial n_0 / \partial \epsilon = -\delta(\epsilon - \epsilon_F)$, αποκτώντας ως την τελική έκφραση

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2e^3 B}{c(2\pi\hbar)^3} \int v_{\alpha} g_{\beta} d\tau dp_z, \quad (84.11)$$

η ενσωμάτωση γίνεται στην επιφάνεια Fermi. Σύμφωνα με τον ορισμό (84.3) τ είναι ανάλογο με $1/B$. Ο όρος $\partial g/\partial \tau$ στη γραμμική εξίσωση (84.10) είναι ανάλογος με το B και είναι έτσι μεγάλος σε σύγκριση με τους άλλους όρους. Αυτό καθιστά δυνατή την επίλυση της εξίσωσης με τη διαδοχική προσέγγιση ως μια σειρά από αρμοδιότητες $1/B$:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^{(0)} + \mathbf{g}^{(1)} + \dots, \quad (84.12)$$

όπου $\mathbf{g}^{(n)} \propto B^{-n}$.* Οι όροι αυτής της σειράς ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\left. \begin{aligned} \partial \mathbf{g}^{(0)} / \partial \tau &= \mathbf{0}, \\ \partial \mathbf{g}^{(1)} / \partial \tau &= \mathbf{I}(\mathbf{g}^{(0)}) + \mathbf{v}, \\ \partial \mathbf{g}^{(2)} / \partial \tau &= \mathbf{I}(\mathbf{g}^{(1)}), \dots \end{aligned} \right\} \quad (84.13)$$

Η λύση αυτών των εξισώσεων είναι

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}^{(0)} &= \mathbf{C}^{(0)}, \\ \mathbf{g}^{(1)} &= \int_0^{\tau} [\mathbf{I}(\mathbf{C}^{(0)}) + \mathbf{v}(\tau)] d\tau + \mathbf{C}^{(1)}, \\ \mathbf{g}^{(2)} &= \int_0^{\tau} \mathbf{I}(\mathbf{g}^{(1)}) d\tau + \mathbf{C}^{(2)}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (84.14)$$

όπου $\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}, \dots$ είναι συναρτήσεις του ϵ και p_z μόνο.

Η συνάρτηση g πρέπει να πληρεί ορισμένες προϋποθέσεις. Αν οι τροχιές της ορμής του ηλεκτρονίου (δηλαδή οι περιμετροί των διατομών της επιφάνειας Fermi από επίπεδα $p_z = \text{σταθερά}$) είναι κλειστές, η κίνηση των ηλεκτρονίων είναι περιοδική; Κατά συνέπεια, η συνάρτηση $g(\epsilon, p_z, \tau)$ πρέπει να είναι περιοδική σε τ (η περίοδος T εξαρτάται από το p_z). Αν η τροχιά είναι ανοιχτή, η κίνηση στο χώρο της ορμής είναι άπειρη και g πρέπει να πληρεί μόνο την προϋπόθεση να είναι πεπερασμένη.

Ας υπολογίσουμε τώρα τις εξισώσεις (84.13) ως προς το τ . Εάν οι λειτουργίες g είναι περιοδική, η μέση τιμή για την περίοδο,

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} d\tau = \frac{\mathbf{g}(T) - \mathbf{g}(0)}{T},$$

είναι μηδέν, δεδομένου ότι $\mathbf{g}(T) = \mathbf{g}(0)$. Εάν δεν είναι περιοδικές, ο μέσος όρος είναι

* Όπως στη §59 κατά τον υπολογισμό των συντελεστών μεταφοράς ενός πλάσματος σε ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο.

σε ένα άπειρο φάσμα των τ και η μέση τιμή είναι μηδέν αφού g είναι πεπερασμένο. Σε όλες τις περιπτώσεις ως εκ τούτου, ο μέσος όρος της εξίσωσης δίνει

$$\overline{I(\mathbf{g}^{(0)})} \equiv \overline{I(\mathbf{C}^{(0)})} = -\bar{\mathbf{v}}, \quad \overline{I(\mathbf{g}^{(1)})} = 0, \dots; \quad (84.15)$$

οι σχέσεις αυτές καθορίζουν κατ'αρχήν τις λειτουργίες $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots$

Υπολογίζοντας τον ταυνοστή αγωγιμότητας, ας θυμηθούμε πρώτα κάποιες γενικές ιδιότητες του που απορρέουν από τη φαινομενολογική θεωρία (ECM, §21).

Η αρχή της συμμετρίας των κινητικών συντελεστών δίνει

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \sigma_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}). \quad (84.16)$$

Ο ταυνοστής $\sigma_{\alpha\beta}$ μπορεί να διαχωριστεί σε συμμετρικά και αντισυμμετρικά μέρη:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(a)}. \quad (84.17)$$

Για αυτά έχουμε με (84.16),

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{B}) &= \sigma_{\beta\alpha}^{(s)}(\mathbf{B}) = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}(-\mathbf{B}), \\ \sigma_{\alpha\beta}^{(a)}(\mathbf{B}) &= -\sigma_{\beta\alpha}^{(a)}(\mathbf{B}) = -\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}(-\mathbf{B}). \end{aligned} \right\} \quad (84.18)$$

Τα συστατικά $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ και $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ είναι συνεπώς μονές και ζυγές λειτουργίες του B αντιστοίχα.

Αντί του αντισυμμετρικού ταυνοστή $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διπλό αξονικό φορέα \mathbf{a} που ορίζεται από

$$a_{xy} = a_{zy}, \quad a_{zx} = a_{y}, \quad a_{yz} = a_x.$$

Τα συστατικά της τρέχουσας πυκνότητας του διανύσματος είναι τότε

$$\mathbf{j}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{E}_\beta = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} \mathbf{E}_\beta + (\mathbf{E} \times \mathbf{a})_\alpha. \quad (84.19)$$

Η απαγωγή της ενέργειας όταν το ρεύμα ρέει καθορίζεται μόνο από το συμμετρικό μέρος του ταυνοστή αγωγιμότητα: $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta$. Ο αντίστροφος ταυνοστής $\rho_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(-)}$ μπορεί επίσης να διαχωρίζεται σε συμμετρικά και αντισυμμετρικά μέρη, ο τελευταίος έχει διπλό αξονικό φορέα \mathbf{b} . Τότε \mathbf{E} εκφράζεται σε όρους του \mathbf{j} από

$$\mathbf{E}_\alpha = \rho_{\alpha\beta}^{(s)} \mathbf{j}_\beta + (\mathbf{j} \times \mathbf{b})_\alpha. \quad (84.20)$$

Οι όροι $\mathbf{E} \times \mathbf{a}$ στην τρέχουσα $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$ στο πεδίο αντιπροσωπεύουν το αποτέλεσμα Hall.

§85. Galvanomagnetic φαινόμενα σε δυνατά πεδία. Ειδικές περιπτώσεις

ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

Ας αρχίσουμε με τις περιπτώσεις όπου όλες οι τροχιές ορμής των ηλεκτρονίων (δηλαδή για όλα τα p_z) με μια δεδομένη κατεύθυνση της B είναι κλειστές. Αυτό είναι σωστό για οποιαδήποτε κατεύθυνση B , εάν οι επιφάνειες Fermi είναι κλειστές. Με ανοικτές επιφάνειες Fermi, μπορούν να συμβούν περιπτώσεις όπου οι τροχιές είναι κλειστές για οποιαδήποτε κατεύθυνση B και όπου οι διατομές είναι κλειστές μόνο για συγκεκριμένες κατευθύνσεις (ή ορισμένων σειρών κατευθύνσεων) του πεδίου.

Η κίνηση σε μια κλειστή τροχιά (στο xy -επίπεδο), οι μέσες τιμές των ταχυτήτων στο επίπεδο είναι μηδέν: $\overline{v_x} = \overline{v_y} = 0$, όπως προκύπτει από τις εξισώσεις της κίνησης (84.2) με επιτρεπόμενο όριο για το γεγονός ότι p_x και p_y επιστρέφουν στις αρχικές τιμές τους μετά την διάσχιση ολόκληρης της τροχιάς. Η αξία της $\overline{v_z}$ δεν είναι πάντοτε μηδενική, επειδή η κίνηση της κατεύθυνσης του πεδίου είναι άπειρη. Η πρώτη εξίσωση (84.15) δίνει τώρα

$$\overline{I(C_x^{(0)})} = \overline{I(C_y^{(0)})} = 0,$$

όταν $C_x^{(0)} = C_y^{(0)} = 0$. * Η λύση της (84.14) γίνεται τότε

$$\left. \begin{aligned} g_x &= (c/eB)p_y + C_x^{(1)} + g_x^{(2)} + \dots, \\ g_y &= -(c/eB)p_x + C_y^{(1)} + g_y^{(2)} + \dots, \\ g_z &= C_z^{(0)} + g_z^{(1)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (85.1)$$

το ολοκλήρωμα διεξάγεται μέσω των εξισώσεων (84.2).

Τα συστατικά του τανυστή άγχους υπολογίζεται από την εξίσωση (84.11). Για παράδειγμα,

$$\sigma_{xx} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \oint \frac{dp_y}{d\tau} \left[\frac{c}{eB} p_y + C_x^{(1)} + g_x^{(2)} \right] d\tau dp_z,$$

με u_x και πάλι δίνεται από το (84.2). Αφού $C_x^{(1)}$ είναι ανεξάρτητο από το τ , η ολοκλήρωση ως προς το τ στους δυο πρώτους όρους με εκείνων των παραγώγων $\frac{dp_y}{d\tau}$ και $\frac{dp_z}{d\tau}$ και δίνει μηδέν. Έτσι, η μόνη συνεισφορά του ολοκληρώματος προέρχεται από το $g_x^{(2)}$ όρο, έτσι ώστε $\sigma_{xx} \propto B^{-2}$.

* Δεν υπάρχει λόγος, γιατί η γραμμική ομοιογενής εξίσωση $I(C)=0$ πρέπει να έχει οποιαδήποτε λύση παρά την μηδαμινή $C=0$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$\sigma_{xy} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \oint \frac{dp_y}{d\tau} \left[-\frac{c}{eB} p_x + C_y^{(0)} \right] d\tau dp_z.$$

Η ενσωμάτωση του δεύτερου όρου δίνει και πάλι μηδέν και στο πρώτο όρο

$$\oint p_x \frac{dp_y}{d\tau} d\tau = \int p_x dp_y = \pm S(p_z),$$

όπου $S(p_z)$ είναι το εμβαδόν της διατομής της επιφάνειας Fermi από το επίπεδο $p_z =$ σταθερές. Τα συν και πλην signus αφορούν τις περιπτώσεις, όπου η περίμετρος περικλείει μια περιοχή των μικρότερων και μεγαλύτερων ενεργειών αντίστοιχα, δηλαδή η κλειστή τροχιά είναι ένα ηλεκτρόνιο και μια οπή τροχιάς αντίστοιχα (βλέπε SP 2, §61); Χαρακτηρίζουμε την περιοχή από S_e και S_h σε αυτές τις δύο περιπτώσεις. Η διαφορά στο σημείο οφείλεται σε μια αλλαγή στην κατεύθυνση της διάσχισης της τροχιάς. Η ενσωμάτωση του S σε σχέση με το p_z δίνει τον όγκο Ω στο χώρο ορμής εντός της επιφάνειας Fermi; Εάν οι κλειστές τροχιές είναι σε μια ανοικτή επιφάνεια Fermi, τότε Ω είναι ο όγκος μεταξύ της επιφάνειας και των επιφανειών του αμοιβαίου πλέγματος κυττάρου. Έτσι,

$$\sigma_{xy} = \frac{ec}{B} \frac{2(\Omega_h - \Omega_e)}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{ec}{B} (N_h - N_e), \quad (85.2)$$

όπου Ω_e και Ω_h είναι οι όγκοι του ηλεκτρονίου και οι οπές κοιλοτήτων στην επιφάνεια Fermi. Οι ποσότητες

$$N_e = 2\Omega_e/(2\pi\hbar)^3, \quad N_h = 2\Omega_h/(2\pi\hbar)^3$$

είναι αντίστοιχα οι αριθμοί των ηλεκτρονίων κατεχόμενων καταστάσεων με ενέργειες $e < e_F$ και ελεύθερα κράτη με $e < e_F$ ανά μονάδα όγκου του κρυστάλλου. Για κλειστές επιφάνειες Fermi, αυτές οι έννοιες έχουν μια αρκετά σαφή έννοια; N_e και N_h είναι χαρακτηριστικές του ηλεκτρονικού φάσματος του μετάλλου και ανεξάρτητες από την κατεύθυνση του πεδίου B. Για τις ανοικτές επιφάνειες, η σημασία τους γίνεται όλο και πιο συμβατική, καθώς εξαρτώνται από την κατεύθυνση του B.

Η έκφραση (85.2) είναι μια περιττή συνάρτηση του B και ως εκ τούτου ανήκει στην αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή $\sigma_{\alpha\beta}^*$. Η συνιστώσα $\sigma_{xy}^{(s)}$ του συμμετρικού

τιμήματος δίδεται από τον επόμενο όρο στην επέκταση της σ_{xy} που είναι ανάλογη με το B^{-2} . Η εξάρτηση του B από τις συνιστώσες που παραμένουν $\sigma_{\alpha\beta}$ είναι όμοιο. Για παράδειγμα,

$$\sigma_{zz} = \frac{2e^3 B}{(2\pi\hbar)^3 c} \int \oint v_z C_z^{(0)} d\tau dp_z.$$

Η ολοκλήρωση σε σχέση με το τ φέρνει σε έναν παράγοντα B^{-1} και $C_z^{(0)}$ είναι ανεξάρτητη από το B ; Συνεπώς σ_{zz} είναι επίσης ανεξάρτητο από το B .

Το αποτέλεσμα είναι

$$\sigma_{zz}^{(s)} = \text{constant}, \quad \text{other } \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} \propto B^{-2}, \quad a \propto B^{-1}. \quad (85.3)$$

Όλα τα συστατικά $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ και a εξαρτώνται από το τύπο της σύγκρουσης του ολοκληρώματος, εκτός

$$a_z = (ec/B)(N_h - N_e).$$

Όλα τα $\sigma_{\alpha\beta}$ εκτός σ_{zz} τείνουν στο μηδέν καθώς $B \rightarrow \infty$. Η φυσική αιτία αυτής της συμπεριφοράς είναι ο εντοπισμός των ηλεκτρονίων στις ελλειπτικές τροχιές μικρό σε σύγκριση με τη μέση ελεύθερη διαδρομή; σ_{zz} είναι πεπερασμένο, επειδή η κίνηση των ηλεκτρονίων κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου παραμένει πάντα άπειρο.

Η μικρή παράμετρος στην επέκταση είναι ο λόγος r_B/l . Ως εκ τούτου, τα συστατικά $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ που είναι ανάλογα προς B^{-2} μπορεί να εκτιμηθεί σε τάξη μεγέθους ως

$$\sigma^{(s)} \sim \sigma_0 (r_B/l)^2, \quad \sigma_0 \sim Ne^2/l\rho_F.$$

Σημειώστε ότι $\sigma^{(s)} \propto 1/l$; Αυτό σημαίνει ότι, καθώς η μέση ελεύθερη διαδρομή αυξάνεται, η εγκάρσια αγωγιμότητα στο μαγνητικό πεδίο τείνει στο μηδέν και όχι στο άπειρο, όταν το πεδίο είναι απόν.

Τα συστατικά του αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή $\sigma_{\alpha\beta}$ εκτιμάται ως

$$\sigma^{(a)} \sim \sigma_0 r_B/l \sim ecN/B.$$

Πρέπει να τονιστεί ωστόσο, το γεγονός ότι αυτή η εκτίμηση είναι ανεξάρτητη από το

* Είναι σαφές από την εξαγωγή της εξίσωσης μεταφοράς που το B εμφανίζεται σε αυτό όχι ως το μέγεθος του διανύσματος B , αλλά ως συστατικό $B_z = B$. Η αλλαγή $B \rightarrow -B$ απαιτεί ως εκ τούτου, επίσης $B \rightarrow -B$ στον τύπο που δίνεται.

I δεν σημαίνει ότι οι ακριβείς τιμές του $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ (εκτός από $\sigma_{xy}^{(a)}$) είναι ανεξάρτητες από τον συγκεκριμένο τύπο της σύγκρουσης του ολοκληρώματος; Ένας ακριβής υπολογισμός του τανυστή $\sigma_{\alpha\beta}$ θα μπορούσε να απαιτεί έναν πλήρη προσδιορισμό των λειτουργιών $C^{(1)}$ και $g^{(2)}$ με την επίλυση της συγκεκριμένης εξίσωσης μεταφοράς.

Από το (85.3) μπορούμε να βρούμε επίσης και τις περιορισμένες εξαρτήσεις του B για τις συνιστώσες του αντίστροφου τανυστή $\rho_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1}$.^{*} Διατηρώντας μόνο τους όρους της χαμηλότερης σειράς $1/B$ βρίσκουμε

$$\rho_{\alpha\beta}^{(s)} = \text{constant}, \quad b_x, b_y = \text{constant}, \quad b_z \propto B, \quad (85.4)$$

και όλες αυτές οι ποσότητες εξαρτώνται από το τύπο της σύγκρουσης του ολοκληρώματος εκτός

$$b_z \approx -1/a_z = B/ec(N_e - N_h). \quad (85.5)$$

Όλα οι συνιστώσες $\rho_{\alpha\beta}^{(s)}$ τείνουν σε συνεχή όρια ως $B \rightarrow \infty$.

Αλληλοσυμπληρούμενα μέταλλα στα οποία $N_e = N_h$, χρειάζονται ειδική μεταχείριση. Η έκφραση (85.2) είναι τότε μηδέν και η επέκταση του $\sigma_{xy}^{(a)}$ αρχίζει με τον όρο ανάλογο προς B^{-3} . Στην περίπτωση αυτή, ως εκ τούτου,

$$a_x, a_y \propto B^{-1}, \quad a_z \propto B^{-3}; \quad (85.6)$$

η εξάρτηση του $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ στη B είναι όπως πριν. Για τον αντίστροφο τανυστή έχουμε τώρα

$$\left. \begin{aligned} \rho_{zz}^{(s)} = \text{constant}, \quad \rho_{yz}^{(s)}, \rho_{xz}^{(s)} = \text{constant}, \\ \rho_{xy}^{(s)}, \rho_{xx}^{(s)}, \rho_{yy}^{(s)} \propto B^2, \quad \mathbf{b} \propto B. \end{aligned} \right\} \quad (85.7)$$

ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΤΡΟΧΕΙΕΣ

Για μέταλλα με ανοιχτές επιφάνειες Fermi που επιτρέπουν ανοικτές τροχιές,

* Ο αντίστροφος τανυστής πρέπει φυσικά να υπολογιστεί από $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$, και μόνο τότε πρέπει να διαχωριστούν σε συμμετρικά και αντισυμμετρικά μέρη. Στη συνέχεια βρίσκουμε

$$\rho_{\alpha\beta}^{(s)} = \frac{1}{\sigma} \{ \sigma^{(s)-1}{}_{\alpha\beta} \sigma^{(s)} + a_\alpha a_\beta \}, \quad b_\alpha = -\frac{1}{\sigma} \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} a_\beta,$$

όπου $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(a)} a_\alpha a_\beta$ είναι καθοριστικός του $\sigma_{\alpha\beta}$ και $\sigma^{(s)}$ είναι καθοριστικός του συμμετρικού του μέρους;

Βλέπε *ECM*, §21, Πρόβλημα.

αρκετές περιπτώσεις είναι δυνατόν; Θα εξετάσουμε εδώ μόνο μια από αυτές, οι οποίες παρουσιάζουν τα χαρακτηριστικά της κατάστασης.

Ας πάρουμε μια επιφάνεια Fermi του κυματοειδούς-κυλίνδρου περνώντας συνεχώς από το ένα αμοιβαίο πλέγμα του πυρήνα στο επόμενο (Εικόνα 30). Εάν το μαγνητικό πεδίο δεν είναι κάθετο προς τον άξονα του κυλίνδρου, όλες οι διατομές είναι κλειστές και η ασυμπτωτική εξάρτηση της $\sigma_{\alpha\beta}$ στο B δίνεται και πάλι από το (85.3)

Εάν ωστόσο, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο προς τον άξονα του κυλίνδρου, υπάρχουν ανοικτές διατομές. Ως συνήθως, παίρνουμε το z-άξονα παράλληλο προς το πεδίο και το x-άξονα εδώ παράλληλα προς τον άξονα του κυλίνδρου; Η εικόνα 31 δείχνει μια τομή κατά πλάτος του τμήματος της επιφάνειας Fermi σε ένα κύτταρο. Οι τροχιές είναι ανοικτές, όταν $|p_z| < |p_{\parallel}|$ και άπειρες στην κατεύθυνση p_x άξονα. Οι μέσες τιμές ταχύτητας είναι

$$\overline{v_x} = (c/eB) \overline{dp_y/d\tau} = 0, \quad \overline{v_y} = -(c/eB) \overline{dp_x/d\tau} \neq 0,$$

από p_x ποικίλλει χωρίς όριο; όπως πάντα $u_z \neq 0$. Οι μη-μηδενικές συνιστώσες του $C^{(0)}$ στη λύση της εξίσωσης μεταφοράς είναι τώρα $C_y^{(0)}$ and $C_z^{(0)}$; Στο (85.1) η δεύτερη γραμμή αντικαθίσταται επομένως από

$$g_y \approx C_y^{(0)} + g_y^{(1)} + \dots$$

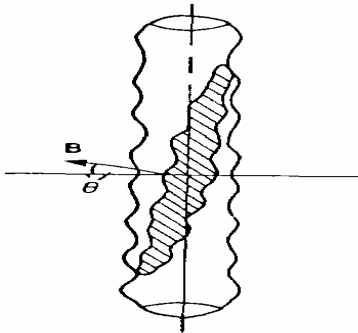


FIG. 30.

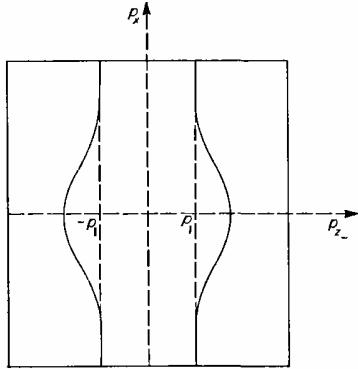


FIG. 31.

Με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω, έχουμε βρει

$$\sigma_{xx}^{(s)} \propto B^{-2} \quad \text{other } \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} \text{ constant}, \quad a_x \propto B^{-3}, \quad a_y, a_z \propto B^{-1}, \quad (85.8)$$

Έτσι, για τον αντίστροφο τανυστή,

$$\rho_{xx}^{(s)} \propto B^2, \quad \text{other } \rho_{\alpha\beta}^{(s)} \text{ constant}, \quad b_x \propto B^{-1}, \quad b_y, b_z \propto B. \quad (85.9)$$

Έτσι υπάρχει μια απότομη ανισοτροπία της αντίστασης στο επίπεδο κάθετα προς το μαγνητικό πεδίο; Η αντίσταση ρ_{yy} κατά μήκος του y -άξονα τείνει σε μια σταθερή, ενώ η κατά μήκος του x -άξονα αυξάνει ως το τετράγωνο του πεδίου.*

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των galvanomagnetic ιδιοτήτων από μέταλλο με ανοιχτή επιφάνεια Fermi είναι σημαντική εξάρτησή τους από την κατεύθυνση ενός ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Εδώ οι αλλαγές λαμβάνουν χώρα καθώς η κατεύθυνση του B πλησιάζει το επίπεδο κάθετα προς τον άξονα του κυλίνδρου και οι σχέσεις (85.3) και (85.4) αντικαθίστανται από (85.8) και (85.9). Όταν B είναι σε μικρή γωνία θ με εκείνο το επίπεδο (Εικόνα 30), η ορμή της τροχιάς του ηλεκτρονίου γίνεται μεγάλη με διαστάσεις της τάξεως των p_F/θ , όπου p_F είναι η αντίστροφη διάσταση της κυλινδρικής επιφάνειας Fermi. Συνεπώς οι τροχιές στο πραγματικό χώρο γίνονται επίσης μεγάλες με διαστάσεις της τάξης του r_B/θ , όπου r_B είναι η ακτίνα Larmor που αντιστοιχεί στην ορμή p_F . Για γωνίες, έτσι ώστε $r_B/\theta \sim 1$, η επέκταση των αρμοδιοτήτων του r_B/l που χρησιμοποιούνται παραπάνω καθίσταται ανεφάρμοστες και είναι σε αυτό το εύρος των γωνιών, όπου το πεδίο εξάρτησης από τον τομέα της αντίστασης αλλάζει.

* Η τροχιά ηλεκτρονίου στο xy -επίπεδο του πραγματικού χώρου διαφέρει από ότι στο $\mathbf{p} \times \mathbf{p}$ επίπεδο του χώρου ορμής μόνο σε κλίμακα και σε μια περιστροφή κατά 90° (SP 2, §57). Στην παρούσα περίπτωση επομένως, η κίνηση των ηλεκτρονίων στο πραγματικό χώρο είναι άπειρη στο y -κατεύθυνση.

Το σύνολο αυτής της συζήτησης σχετίζεται φυσικά με τα μονά κρύσταλλα. Σε πολυκρυστάλλινα υλικά υπάρχει ένας μέσος όρος των ανισότροπων galvanomagnetic ιδιοτήτων ανάλογα με την κατευθυντική κατανομή των κρυσταλλιτών.

Τα θερμομαγνητικά φαινόμενα σε ένα μέταλλο σε ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο θα μπορούσε να συζητηθεί παρομοίως. Ειδικότερα, οι συνιστώσες του ηλεκτρικού θερμικής αγωγιμότητας τανυστή θα μπορούσε να τείνει στο μηδέν, όπως $B \rightarrow \infty$. Υπό τις συνθήκες αυτές, η μεταφορά της θερμότητας από φωτόνια γίνεται σημαντικό. Είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψη η αλληλεπίδραση των ηλεκτρονίων- φωτονίων και ότι η όλη κατάσταση είναι σημαντικά περίπλοκη.

§86. Ανώμαλο αποτέλεσμα του δέρματος.

Είναι γνωστό από την μακροσκοπική ηλεκτροδυναμική ότι ένα εναλλασσόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αποσβένεται εντός ενός αγωγού και όχι μόνο το πεδίο, αλλά επίσης και το προκύπτον ηλεκτρικό ρεύμα συγκεντρώνεται κοντά στην επιφάνεια του αγωγού. Αυτό ονομάζεται *αποτέλεσμα του δέρματος*. Ο παρακάτω τύπος έχει δοθεί στην ECM, §§45 και 46.

Το οιονεί σταθερό-ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο μέταλλο ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell

$$\mathbf{curl} \mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t, \quad (86.1)$$

$$\mathbf{curl} \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}/c, \quad \mathbf{div} \mathbf{B} = 0; \quad (86.2)$$

το μέταλλο θεωρείται μη μαγνητικό, έτσι ώστε $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ σε αυτό. Εδώ βέβαια, θεωρούμε ότι η γενική προϋπόθεση για την εγκυρότητα της μακροσκοπικής εξίσωσης είναι ικανοποιητική: Οι αποστάσεις δ πάνω στις οποίες το πεδίο ποικίλλει σημαντικά είναι μεγάλες σε σύγκριση με το ηλεκτρόνιο αγωγιμότητας μέσης ελεύθερης διαδρομής l , τότε η σχέση μεταξύ της τρέχουσας πυκνότητας \mathbf{j} και του πεδίου \mathbf{E} δίνεται από γραμμικές εκφράσεις που συνδέουν τις τιμές τους σε ένα σημείο του χώρου, $\mathbf{j}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}\mathbf{E}_\beta$, όπου $\sigma_{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής αγωγιμότητας. Η επίδραση του δέρματος στη συνέχεια είναι *φυσιολογική*. Συζητώντας αυτή την περίπτωση θα θεωρήσουμε το μέσο ισότροπο, ή αλλιώς ένα κρύσταλλο με κυβική συμμετρία. Ο τανυστής $\sigma_{\alpha\beta}$ μειώνει στη συνέχεια σε μια μονοδιάστατη και $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$.

Ας πάρουμε μια απλή γεωμετρία στην οποία το μέταλλο καταλαμβάνει το μισό-χώρο $x > 0$ που περιβάλλεται από το επίπεδο $x = 0$. Ένα ομοιόμορφο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο εφαρμόζεται παράλληλα προς την επιφάνεια του μετάλλου και μεταβάλλεται στο χρόνο με συχνότητα ω . Οι εξισώσεις (86.1) και (86.2) γίνονται

$$\mathbf{curl} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}/c, \quad \mathbf{curl} \mathbf{B} = 4\pi\sigma \mathbf{E}/c, \quad \mathbf{div} \mathbf{B} = 0. \quad (86.3)$$

Η συμμετρία του προβλήματος υποδεικνύει, ότι οι κατανομές όλων των ποσοτήτων στο μέταλλο είναι λειτουργίες της συντεταγμένης x μόνο. Η πρώτη εξίσωση (86.3) δείχνει τότε ότι το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} είναι παντού παράλληλο προς το επίπεδο του ορίου. Μπορούμε να ικανοποιήσουμε όλες τις εξισώσεις υποθέτοντας, ότι το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} είναι παντού σε αυτό το επίπεδο. Επίσης, αυτό ικανοποιεί αυτόματα την απαραίτητη οριακή συνθήκη ότι η συνιστώσα του ρεύματος κάθετα προς την επιφάνεια του μετάλλου είναι μηδέν: Από $E_x = 0$ προκύπτει ότι $j_x = 0$ παντού. *

Εξαλείφοντας το \mathbf{B} από τις δύο πρώτες εξισώσεις (86.3) βρίσκουμε

$$\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{E} = \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = 4\pi i\omega\sigma \mathbf{E}/c^2.$$

Για το εφαπτόμενο τομέα, το οποίο εξαρτάται μόνο από το x , $\mathbf{div} \mathbf{E} = 0$ και η εξίσωση γίνεται

$$\mathbf{E}'' = -4\pi i\omega\sigma \mathbf{E}/c^2, \quad (86.4)$$

η αρχή που υποδηλώνει διαφοροποίηση ως προς το x . Η λύση η οποία τείνει στο μηδέν, όπως $x \rightarrow \infty$ είναι

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + (i-1)x/\delta}, \quad (86.5)$$

όπου \mathbf{E}_0 είναι το πλάτος του πεδίου στην επιφάνεια του μετάλλου και

$$\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}. \quad (86.6)$$

Η ποσότητα δ ονομάζεται το βάθος διείσδυσης του πεδίου; Αυτό μειώνει με αυξανόμενη συχνότητα του πεδίου. Το μαγνητικό πεδίο στο μέταλλο μειώνεται σύμφωνα με τον ίδιο νόμο; Όπως προκύπτει από το (86.3) ότι \mathbf{E} και \mathbf{B} παντού σχετίζονται με $\mathbf{E} = \zeta \mathbf{B}$

* Η κατάσταση είναι διαφορετική σε ένα ανισότροπο μέσο. Για να πετύχουμε εκεί αυτή την κατάσταση, ένα ηλεκτρικό πεδίο κάθετο προς την επιφάνεια θα πρέπει να είναι παρών, καθώς και η εφαπτομενική ένα.

x n, όπου n είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς την επιφάνεια και εντός του μετάλλου, δηλαδή στη θετική χ-διεύθυνση με

$$\zeta = (1 - i)\omega\delta/2c = (1 - i)\sqrt{(\omega/8\pi\sigma)}. \quad (86.7)$$

Ειδικότερα, αυτή η σχέση υπάρχει μεταξύ των τιμών των πεδίων στην επιφάνεια του μετάλλου

$$\mathbf{E}_0 = \zeta \mathbf{B}_0 \times \mathbf{n}. \quad (86.8)$$

Η ποσότητα ζ ονομάζεται επιφάνεια αντίστασης του μετάλλου. Το πραγματικό μέρος διέπει την ενεργειακή διάχυση του πεδίου στο μέταλλο (ECM, §67).

Για να μπορέσει η σχέση $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ θα πρέπει να κατέχει μεταξύ του ρεύματος και του πεδίου στο ίδιο σημείο και την ίδια στιγμή το ηλεκτρόνιο μέσης ελεύθερης διαδρομής l και ο μέσος ελεύθερος χρόνος $\tau \sim l/v_F$ πρέπει να πληρούν τις προϋποθέσεις $l \ll \delta$ και $\tau \ll 1/\omega$, δηλαδή θα πρέπει να είναι μικρό σε σύγκριση με τη χαρακτηριστική απόσταση δ πάνω από την οποία το πεδίο μεταβάλλεται και τ μικρό σε σύγκριση με την περίοδο χρόνου. Όταν η πρώτη από αυτές τις προϋποθέσεις δεν επιτυγχάνεται, η σχέση μεταξύ του πεδίου και του ρεύματος δεν είναι πλέον τοπικά και υπάρχει μια χωρική διασπορά της αγωγιμότητας. Όταν η δεύτερη προϋπόθεση δεν πληρείται, υπάρχει μια διασπορά συχνότητας της αγωγιμότητας. Η εξίσωση μεταφοράς τότε απαιτείται για να καθορίσει τη σχέση μεταξύ του ρεύματος και του πεδίου.

Η φύση του αποτελέσματος του δέρματος εξαρτάται συνεπώς από το σχετικό μέγεθος των τριών χαρακτηριστικών διαστάσεων δ , l και v_F/ω . Το κάθετο αποτέλεσμα του δέρματος που περιγράφεται από το (86.5) - (86.8) αντιστοιχεί στο χαμηλότερο εύρος των συχνοτήτων έτσι ώστε

$$l \ll \delta, \quad l \ll v_F/\omega. \quad (86.9)$$

Καθώς η συχνότητα του πεδίου ή η μέση ελεύθερη διαδρομή αυξάνεται (με ελάττωση της θερμοκρασίας του μετάλλου), το βάθος διείσδυσης μειώνεται. Στα μέταλλα, η κατάσταση $l \ll \delta$ είναι συνήθως το πρώτο που παραβιάζεται και η σχέση του τρέχον πεδίου γίνεται μη-τοπικό;. Η επίδραση του δέρματος στη συνέχεια λέγεται ότι είναι ανώμαλη. Σε αυτό το τμήμα, θα θεωρήσουμε την περιορισμένη περίπτωση όπου

$$\delta \ll l, \quad \delta \ll v_F/\omega. \quad (86.10)$$

Μπορεί να υπάρξει οποιαδήποτε σχέση μεταξύ I και v_F/ω . *

Η λύση του προβλήματος του ορίου του αποτελέσματος του δέρματος αρχίζει από το βοηθητικό πρόβλημα της σχέσης σε ένα άπειρο μέταλλο μεταξύ της τρέχουσας και του ηλεκτρικού πεδίου

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

μεταβλητής στο χρόνο και στο χώρο. Το κυματικό δυνάμυσμα του πεδίου θεωρείται ότι ικανοποιεί τις ανισότητες

$$1/k \ll l, \quad 1/k \ll v_F/\omega, \quad (86.11)$$

που αντιστοιχούν στο (86.10). Η αλλαγή στο δn της διανομής ηλεκτρονίου ποικίλλει με τον ίδιο τρόπο όπως στο πεδίο.

Από το $v_F k \gg v_F l \sim 1/\tau$, η σύγκρουση του ολοκληρώματος $C(n) \sim \delta n/\tau$ στην εξίσωση μεταφοράς μπορεί να αγνοηθεί σε σχέση με το χωρικό παράγωγο όρο $\mathbf{v} \cdot \partial n / \partial \mathbf{r} \sim v_F k \delta n$. Επειδή $k v_F \gg \omega$, μπορούμε επίσης να αγνοήσουμε το παράγωγο του χρόνου $\partial n / \partial t \sim \omega \delta n$.

Με τη τελευταία προσέγγιση, η εξίσωση μεταφοράς για τα οιονεί σωματίδια σε ένα υγρό ηλεκτρόνιο Fermi μειώνει και πάλι την εξίσωση για ένα αέριο, όταν η συνάρτηση κατανομής επαναπροσδιορίζεται, δη αντικαθίσταται από $\delta \bar{n}$ από (74.13). Στην προκειμένη περίπτωση, αυτές οι προσεγγίσεις φέρνουν την εξίσωση μεταφοράς στον απλό τύπο

$$\mathbf{v} \cdot \partial \delta \bar{n} / \partial \mathbf{r} - e \mathbf{E} \cdot \partial n_0 / \partial \mathbf{p} = 0.$$

Βάζοντας

$$\partial \delta \bar{n} / \partial \mathbf{r} = i \mathbf{k} \delta \bar{n}, \quad \partial n_0 / \partial \mathbf{p} = \mathbf{v} \partial n_0 / \partial \epsilon,$$

στη συνέχεια βρίσκουμε

$$\delta \bar{n} = -i (e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} / \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \partial n_0 / \partial \epsilon. \quad (86.12)$$

Αυτή η έκφραση έχει ένα πόλο στον $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$. Για τον υπολογισμό της τρέχουσας

$$\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta \bar{n} \cdot 2d^3 p / (2\pi \hbar)^3,$$

* Η ισότητα $\delta \sim l$ επιτυγχάνεται όταν $\omega \sim c^2 / \sigma l^2$, δηλαδή (με την εκτίμηση $\sigma \sim 1e^2 N / p_F$) όταν $\omega \sim c^2 p_F / e^2 l^3 N$. Αυτό είναι συγκρίσιμο με την ανισότητα $\delta \sim l \ll v_F / \omega$ εάν $l \gg c / \Omega$, όπου $\Omega \sim (N e^2 / m^*)^{1/2}$ είναι η συχνότητα του πλάσματος του μετάλλου ($m^* \sim p_F / v_F$ είναι η αποτελεσματική μάζα των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας). Για συνηθισμένα μέταλλα $\Omega \sim 10^{15} - 10^{16} \text{ s}^{-1}$.

αυτός ο πόλος θα πρέπει να αποφευχθεί γράφοντας $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i0$:*

$$\mathbf{j} = ie^2 \int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i0} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (86.13)$$

Παραμελώντας ως συνήθως, τη θερμική θόλωση της συνάρτησης κατανομής ισορροπίας, γράφουμε $\partial n_0 / \partial \epsilon = -\delta(\epsilon - \epsilon_F)$ και μετατρέπουμε το ολοκλήρωμα στο d^3p πάνω από την επιφάνεια Fermi από το (74.20). Σύμφωνα με το συνήθη τύπο της διαφορικής γεωμετρίας, το στοιχείο της περιοχής είναι $dS = d\omega_\nu K$, όπου $d\omega_\nu$ είναι ένα στερεό-γωνίας στοιχείο για την κατεύθυνση της κανονικής ν προς την επιφάνεια και K είναι η καμπυλότητα Gaussian της επιφάνειας, δηλαδή $K = 1/R_1 R_2$, το αμοιβαίο του προϊόντος των κάθε αρχικών ακτινών καμπυλότητας στο εν λόγω σημείο. Σημειώνοντας επίσης ότι η κατεύθυνση του φυσιολογικού σε οποιοδήποτε σημείο επί της επιφάνειας Fermi είναι το ίδιο με εκείνο της ταχύτητας $\mathbf{v} = \partial \epsilon / \partial \mathbf{p}$, βρίσκουμε

$$\mathbf{j} = -\frac{2ie^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})}{K(\nu)} \frac{d\omega_\nu}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i0} \quad (86.14)$$

Εάν η κατεύθυνση της ν είναι καθορισμένη από την *azimuthal* και πολικές γωνίες ϕ και θ σε σχέση προς την κατεύθυνση της \mathbf{k} όπως ο πολικός άξονας, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = k \cos \theta$ και $d\omega_\nu = \sin \theta d\phi d\theta$.

Η ενσωμάτωση στο (86.14) σε σχέση με το μεταβλητή $\mu = \cos \theta$ λαμβάνεται πάνω από το τμήμα $-1 \leq \mu \leq 1$ του πραγματικού άξονα που περνά κατά μήκος κάτω από ένα ημικύκλιο του πόλου $\mu = 0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το ολοκλήρωμα κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων (δηλαδή η κύρια αξία) είναι τότε μηδέν αφήνοντας μόνο την συνεισφορά του ημικύκλιου. Για να αποδειχθεί αυτό, σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $\epsilon(\mathbf{p})$ είναι άρτια και επομένως η επιφάνεια Fermi $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ παραμένει αμετάβλητη, όταν $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$; δεδομένου ότι η αλλαγή στο σημείο του \mathbf{p} αλλάζει το σημείο του κανονικού διανύσματος ν , συνάγεται ότι $K(-\nu) = K(\nu)$. Το ολοκλήρωμα στο (86.14) μπορεί λοιπόν να γραφεί ως

$$\frac{1}{2} \left\{ \int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) d\omega_\nu}{K(\nu)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i0)} - \int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) d\omega_\nu}{K(\nu)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0)} \right\},$$

όπου οι δεσμοί περιέχουν το άθροισμα των ολοκληρωμάτων που λαμβάνονται από το καθένα από την αλλαγή του μεταβλητή ολοκλήρωσης $\nu \rightarrow -\nu$; Η παραπάνω δήλωση είναι

* Αυτό αντιστοιχεί στα συνήθη $\omega \rightarrow \omega + i0$ in $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$.

τότε προφανής.

Στο πόλο του ολοκληρώματος, $k \cdot v = k \cos \theta = 0$, δηλαδή η κανονική v είναι κάθετη προς τη δεδομένη κατεύθυνση του διανύσματος του κύματος k . Το υπόλοιπο σε σχέση με το μεταβλητή \cos είναι επομένως το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{v(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})}{kK(v)} d\varphi$$

που λαμβάνεται κατά μήκος του γεωμετρικού τόπου των σημείων επί της επιφάνειας Fermi για το οποίο $v \perp k$.

Έτσι έχουμε τελικά τη σχέση μεταξύ του τρέχοντος και του τομέα με το τύπο

$$\mathbf{j}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \mathbf{E}_\beta, \quad (86.15)$$

όπου

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = 2\pi e^2 A_{\alpha\beta} / (2\pi\hbar)^3 k, \quad A_{\alpha\beta} = \int_0^{2\pi} [v_\alpha v_\beta / K(\varphi)] d\varphi \quad (86.16)$$

είναι ένας πραγματικός τανυστής στο επίπεδο κάθετο προς k ; Εάν η κατεύθυνση του k λαμβάνεται σαν x -άξονα, α και β λαμβάνουν τις τιμές y και z . Το διάνυσμα j βρίσκεται σ' αυτό το επίπεδο και είναι συνεπώς εγκάρσιο προς το k .

Η συμβολή στην τρέχουσα προέρχεται μόνο από ηλεκτρόνια με $v \cdot k = 0$, δηλαδή κινείται κάθετα προς το διάνυσμα κύματος. Αυτό είναι μια φυσική συνέπεια μιας προσέγγισης στην οποία η μέση ελεύθερη διαδρομή θεωρείται απεριόριστα μακριά: σε κίνηση σε μία γωνία έως k , το ηλεκτρόνιο διέρχεται μέσω ενός πεδίου ταλάντωσης στο χώρο και αυτές οι ταλαντώσεις μειώνουν στο μηδέν τη συνολική δράση του πεδίου του ηλεκτρονίου. Στην επόμενη προσέγγιση, όταν η πεπερασμένη τιμή της kl ληφθεί υπόψη, υπάρχει μια συνεισφορά στο ρεύμα από ηλεκτρόνια που κινούνται σε ένα μικρό εύρος γωνιών $\sim 1/kl$ στο επίπεδο κάθετα προς k .

Ας πάμε τώρα στο θέμα της διεύθυνσης του πεδίου στο ανώμαλο φαινόμενο του δέρματος. Αυτό είναι ένα μισό πρόβλημα χώρου να επιλυθεί με τις οριακές συνθήκες στην επιφάνεια του μετάλλου. Αυτές οι συνθήκες για την συνάρτηση κατανομής εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες της επιφάνειας σε σχέση με το περιστατικό των ηλεκτρονίων σε αυτό. Είναι σημαντικό ωστόσο, ότι στην περίπτωση αυτή το ρεύμα οφείλεται ουσιαστικά μόνο στα ηλεκτρόνια που μετακινούνται σχεδόν παράλληλα προς στην επιφάνεια του μετάλλου. Γι' αυτούς, ο νόμος της αντανάκλασης είναι αρκετά ανεξάρτητος από το βαθμό της τελειότητας της μεταλλικής επιφάνειας και προσεγγίζει

σε κατοπτρική αντανάκλαση τα ηλεκτρόνια που αντανακλώνται με αντίστροφες συνιστώσες της ταχύτητας v κάθετα προς την επιφάνεια, αλλά αμετάβλητες εφαπτομενικές συνιστώσες; Για να μην διακοπεί η συζήτηση, μια πιο λεπτομερής επεξεργασία αυτού θα πρέπει να αναβληθεί για το τέλος της ενότητας.

Κατοπτρική αντανάκλαση αντιστοιχεί στην ακόλουθη οριακή συνθήκη για την συνάρτηση κατανομής

$$\delta\bar{n}(v_x, v_y, v_z) = \delta\bar{n}(-v_x, v_y, v_z) \quad \text{for } x = 0. \quad (86.17)$$

Με αυτή την προϋπόθεση, το ημι-χώρο πρόβλημα είναι ισοδύναμο με εκείνο ενός άπειρου μέσου, στο οποίο η κατανομή του πεδίου είναι συμμετρικό γύρω από το επίπεδο $x=0$; $E(t,x)=E(t,-x)$. Τα ηλεκτρόνια αντανακλώνται από το όριο στο μισό-χώρο πρόβλημα ($x>0$) αντιστοιχούν σε ηλεκτρόνια που περνούν ελεύθερα μέσα από το επίπεδο $x=0$ από την πλευρά $x = 0$ στο άπειρο μέσο πρόβλημα.

Στο πρόβλημα του ακραίου φαινομένου τον ανώμαλου δέρματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πεδίο E (το οποίο εξαρτάται μόνο από τη μια συντεταγμένη x) είναι παντού παράλληλο στο επίπεδο $x=0$. Σύμφωνα με (86.15) το τρέχον διάνυσμα j βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο και έτσι η κατάσταση της μηδενικής συνιστώσας του ρεύματος κάθετα προς την επιφάνεια του μετάλλου σε όλα τα σημεία στην επιφάνεια είναι αναγκαστικά ικανοποιητικό. *

Χωρίς την παραδοχή ότι $j=\sigma E$ έχουμε για το δισδιάστατο φορέα E στη θέση του (86.4)

$$\mathbf{E}'' = -4\pi i\omega \mathbf{j}/c^2. \quad (86.18)$$

Θα πρέπει να εγκαταλείψουμε τον χρόνο παράγοντα $e^{-i\omega t}$ απεριόριστο στους επόμενους τύπους, έτσι ώστε E, j , κλπ., θα είναι μόνο λειτουργίες x .

Η συνάρτηση $E(x)$ συνέχισε συμμετρικά μέσα στο εύρος $x<0$, είναι συνεχής στο $x = 0$, αλλά το παράγωγο $E'(x)$ είναι μία περιττή συνάρτηση του x και έχει μια ασυνέχεια εκεί, αλλάζοντας πρόσημο ως x που περνά από το μηδέν. Σύμφωνα με το (86.1), αυτά τα παράγωγα σχετίζονται με το μαγνητικό πεδίο κατά

$$\mathbf{E}' = i\omega \mathbf{B} \times \mathbf{u}/c,$$

* Σε μεταγενέστερες προσεγγίσεις, όταν το πεπερασμένο της αναλογίας δ/t λαμβάνεται υπόψη, υπάρχουν συνιστώσες σ_{ax} και σ_{yx} στον τανυστή αγωγιμότητα καθώς και $\sigma_{\alpha\beta}$. Για να ικανοποιήσουμε την οριακή συνθήκη $j_x=0$ πρέπει στη συνέχεια να περιλαμβάνεται το πεδίο E_x κάθετο προς την επιφάνεια, όπως έχει ήδη σημειωθεί στην πρώτη υποσημείωση αυτής της ενότητας.

όπου \mathbf{u} είναι και πάλι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στη x -κατεύθυνση. Στο πρόβλημα ημι-χώρου, ο όρος στο $x = 0$ θα ήταν επομένως $E' = i\omega B_0 \times \mathbf{u}/c$, όπου B_0 είναι το πεδίο στο όριο του μετάλλου. Στο άπειρο μέσο πρόβλημα, αυτό αντιστοιχεί σε

$$\mathbf{E}' = i\omega \mathbf{B} \times \mathbf{u}/c,$$

Έχουμε πολλαπλασιάσει και τις δύο πλευρές του (86.18) με e^{-ikx} και ενσωματώνουμε σε σχέση με x από $-\infty$ σε ∞ .* Από την αριστερή πλευρά, γράφουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}' e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^0 (\mathbf{E}' e^{-ikx})' dx + \int_0^{\infty} (\mathbf{E}' e^{-ikx})' dx + ik \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}' e^{-ikx} dx.$$

Επειδή το πεδίο $E(x)$ είναι μηδέν στο άπειρο, τα δύο πρώτα ολοκληρώματα δίνουν απλά τη διαφορά $E'(-0) - E'(0)$. Στον τελευταίο όρο μπορούμε απλά να ενσωματώσουμε κατά μέρη, δεδομένου ότι $E(x)$ είναι συνεχής. Το αποτέλεσμα είναι

$$2i\omega \mathbf{B}_0 \times \mathbf{u}/c + k^2 \mathbf{E}(k) = 4\pi i\omega \mathbf{j}(k)/c^2,$$

όπου $E(k)$ και $\mathbf{j}(k)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $E(x)$ και $\mathbf{j}(x)$.

Σύμφωνα με το (86.15) αυτοί οι μετασχηματισμοί σχετίζονται με $\mathbf{j}_\alpha(k) = \sigma_{\alpha\beta}(k) E_\beta(k)$. Στη συνέχεια βρίσκουμε την έκφραση

$$E_\alpha(k) = \zeta_{\alpha\beta}(k) (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{u})_\beta, \quad (86.19)$$

όπου $\zeta_{\alpha\beta}(k)$ είναι δύο διαστάσεων τανυστή που ορίζεται με τη βοήθεια του αντίστροφού του

$$\zeta^{-1}_{\alpha\beta}(k) = -\frac{c}{2i\omega} \left[k^2 \delta_{\alpha\beta} - \frac{4\pi i\omega}{c^2} \sigma_{\alpha\beta}(|k|) \right]. \quad (86.20)$$

Το επιχείρημα του $\sigma_{\alpha\beta}$ όπως είναι γραμμένο $|k|$ ως μια υπενθύμιση ότι αυτό είναι το μέγεθος του διανύσματος k .

Η ίδια η συνάρτηση $E(x)$ λαμβάνεται από το (86.19) για πολλαπλασιασμό με e^{ikx} ενσωματώνοντας πάνω $dk/2\pi$. Αφού $\zeta_{\alpha\beta}(k)$ είναι άρτιο, έχουμε

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta_{\alpha\beta}(k) \cos kx dk \cdot (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{u})_\beta. \quad (86.21)$$

Πιο συγκεκριμένα, το πεδίο στο όριο του μετάλλου είναι

* Οι ακόλουθοι υπολογισμοί είναι τυπικά πανομοιότυποι με εκείνους για το πρόβλημα του μαγνητικού πεδίου διείσδυση σε υπεραγωγό (SP 2, §52).

$$E_{0\alpha} = \zeta_{\alpha\beta} (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{n})_\beta, \quad \zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta_{\alpha\beta}(k) dk. \quad (86.22)$$

Για πραγματικό υπολογισμό της αντίστασης της επιφανείας, παίρνουμε τους κύριους άξονες του συμμετρικού τανυστή $\sigma_{\alpha\beta}(k)$ ως το y και z άξονες. Ο τανυστής $\zeta_{\alpha\beta}$ φέρεται στους κύριους άξονες μαζί με $\sigma_{\alpha\beta}$ και κύριες αξίες της είναι

$$\zeta^{(\alpha)} = -\frac{2i\omega}{\pi c} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 - i\mathbf{b}^{(\alpha)}/k}, \quad \mathbf{b}^{(\alpha)} = \frac{\omega e^2 \mathbf{A}^{(\alpha)}}{\pi c^2 \hbar^3},$$

όπου το $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ είναι οι κύριες αξίες του τανυστή $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$. Η ενσωμάτωση δίνει*

$$\zeta^{(\alpha)} = (1 - i\sqrt{3}) \frac{2\pi^{1/3} \hbar}{3^{3/2}} \left(\frac{\omega^2}{c e^2 \mathbf{A}^{(\alpha)}} \right)^{1/3}. \quad (86.23)$$

Οι ποσότητες $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ εξαρτάται μόνο από το σχήμα και το μέγεθος της επιφάνειας Fermi. Η αντίσταση (86.23) δεν εξαρτάται καθόλου από το ηλεκτρόνιο της μέσης ελεύθερης διαδρομής. Για μία εκτίμηση τάξης μεγέθους, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ακτίνες καμπυλότητας της επιφάνειας Fermi είναι $\sim p_F$; Τότε $\mathbf{A} \sim p_F^2$ και

$$\zeta \sim (\hbar^3 \omega^2 / c e^2 p_F^2)^{1/3}. \quad (86.24)$$

Το πραγματικό μέρος της αντίστασης καθορίζει την απαγωγή της ενέργειας του πεδίου στο μέταλλο. Στην προσέγγιση που εξετάζεται (όπου οι συγκρούσεις του ηλεκτρονίου αγνοούνται) αυτή η διάχυση είναι του τύπου Landau -απόσβεση **

* Το περίγραμμα της ολοκλήρωσης (το δεξί ήμισυ του πραγματικού άξονα) μπορεί να μετατραπεί μέσω $-\pi/6$ στο σύμπλεγμα k-επίπεδο χωρίς τη διέλευση στους πόλους του ολοκληρώματος. Ολοκλήρωση κατά μήκος της γραμμής $\bar{k} = u e^{-i\pi/6}$ δίνει

$$I \equiv \int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 - ib} = e^{i\pi/6} \int_0^\infty \frac{u du}{u^2 + b},$$

και για αντικατάσταση $u^2 + b = b/\xi$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^{i\pi/6}}{3b^{1/3}} \int_0^1 \xi^{-2/3} (1-\xi)^{-1/3} d\xi \\ &= \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}{3b^{1/3}\Gamma(1)} e^{i\pi/6} \\ &= \frac{\pi(\sqrt{3}+i)}{3^{3/2}b^{1/3}}. \end{aligned}$$

** Τα φαινόμενα που είναι η ουσία στο ανώμαλο φαινόμενο του δέρματος για πρώτη φορά σημειώνεται από τον H. London (1940). Η ποιοτική θεωρία της επίδρασης οφείλεται στον A.B.Pippard (1947) και η ποσοτική θεωρία που δίνεται εδώ οφείλεται στους G.E.H. Reuter και E. H. Sondheimer (1948).

Ο νόμος της απόσβεσης του ηλεκτρικού πεδίου εντός του μετάλλου στο ανώμαλο φαινόμενο του δέρματος δεν είναι εκθετικός και έτσι η έννοια του βάθους διείσδυσης δεν έχει την ίδια κυριολεκτική σημασία όπως στο (86.5). Επειδή το ολοκλήρωμα στο (86.21) περιέχει το ταλαντούμενο παράγοντα $\cos kx$, το ολοκλήρωμα για οποιοδήποτε δεδομένο x διέπεται κυρίως από την περιοχή $k \sim 1/x$. Μια σημαντική μείωση της συνάρτησης $E(x)$ συμβαίνει όταν $k \gg b^{1/3}$. * Η διείσδυση βάθους δ είναι επομένως της τάξεως του $b^{-1/3}$, ή

$$\delta \sim (c^2 \hbar^3 / \omega e^2 A)^{1/3} \sim (c^2 \hbar^3 / \omega e^2 p_F^2)^{1/3}. \quad (86.25)$$

Καθώς η συχνότητα αυξάνεται, αυτό το βάθος συνεχίζει να μειώνεται, αλλά πιο αργά από ό, τι για το κανονικό αποτέλεσμα. Οι τιμές που δίνονται από το (86.6) και (86.25), τα οποία συμβολίζουμε με δ_n και δ_a είναι συγκρίσιμα σε τάξη μεγέθους, όταν $\delta \sim l$. Δεδομένου ότι ένας από αυτούς μειώνεται καθώς $\omega^{-1/2}$ και το άλλο ως $\omega^{-1/3}$ είναι σαφές ότι, για μια δεδομένη τιμή του ω έχουμε $\delta_a^3 \sim \delta_n^2 l$.

Τέλος, μερικά σχόλια σχετικά με τη φύση της αντανάκλασης του ηλεκτρονίου από το όριο του μετάλλου. Εάν η επιφάνεια είναι ιδανική (ελεύθερη από ελαττώματα) και συμπίπτει με ένα κρυσταλλογραφικό επίπεδο, η σύνθεση των ατόμων σε αυτήν έχει την περιοδικότητα που αντιστοιχεί στην μεταφραστική συμμετρία του κρυσταλλικού πλέγματος. Σε αυτή την περίπτωση, η αντανάκλαση ενός ηλεκτρονίου εξοικονομεί όχι μόνο την ενέργεια, αλλά επίσης τις εφαπτομενικές συνιστώσες p_y και p_z της οιονεί ορμής του ηλεκτρονίου H κανονική συνιστώσα p'_x της οιονεί ορμής του αντανακλώμενου ηλεκτρονίου προσδιορίζεται από την τιμή p_x για το συμβάν του ηλεκτρονίου μέσω της εξίσωσης

$$\epsilon(p'_x, p_y, p_z) = \epsilon(p_x, p_y, p_z), \quad (86.26)$$

και πρέπει να έχουμε $v'_x = \partial \epsilon / \partial p'_x > 0$, το αντανακλώμενο ηλεκτρόνιο που κινείται μακριά από το όριο (η ταχύτητα του συμβάντος ηλεκτρονίου είναι $v_x = \partial \epsilon / \partial p_x < 0$). Εξίσωση (86.26) μπορεί να έχει αρκετές τέτοιες λύσεις και σε γενικές γραμμές $v'_x \neq -v_x$.

* Όταν $x \gg \delta$, το ολοκλήρωμα (86.21) διέπεται από $k \ll b^{1/3}$. Τότε $\zeta(k) \sim k$ και το πεδίο $E(x)$ μειώνεται ως x^{-2} .

Για ηλεκτρόνια σε αντανακλώμενη συχνότητα, τα διαλύματα αυτά περιλαμβάνουν πάντα ένα που αντιστοιχεί σε μια μικρή αλλαγή στην οιονεί ορμή με $v_x' = -v_x$ (δηλ. η αντανάκλαση είναι κυριολεκτικά κατοπτρική) η κίνηση ενός ηλεκτρονίου σχεδόν παράλληλο στο όριο έχει ένα μικρό $v_x = \partial \epsilon / \partial p_x$, και αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρόνιο αντιστοιχεί σε ένα σημείο P στην επιφάνεια της συνεχούς ενέργειας στο p-χώρο που βρίσκεται κοντά στο extremum του ϵ σαν μία συνάρτηση του p_x . Κοντά σε ένα τέτοιο σημείο, από την άλλη πλευρά του extremum, υπάρχει πάντα ένα σημείο P' όπου το παράγωγο $\partial \epsilon / \partial p$ διαφέρει μόνο στο σημείο από την αξία του κατά P.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ότι η αντανάκλαση ενός τέτοιου ηλεκτρονίου λαμβάνει χώρα με πολύ μεγάλη πιθανότητα με αυτή την αλλαγή της οιονεί ορμής. Επιπλέον, η κατάσταση εξακολουθεί να ισχύει και για αντανάκλαση από μια ατελή επιφάνεια με τραχύτητα ατομικών διαστάσεων όταν υπάρχει, για να κυριολεκτήσουμε, μη διατήρηση των εφαπτομενικών συνιστώσεων της οιονεί ορμής. Μια ενστικτώδη εξήγηση είναι ότι η συνάρτηση του κύματος του ηλεκτρονίου μεταβάλλεται σιγά-σιγά στη x-κατεύθυνση και έτσι δεν «αντιλαμβάνεται» την ατομική ανώμαλη της επιφάνειας.*

Είναι αξιοσημείωτο ότι η τιμή της αντίστασης της επιφανείας στο εξαιρετικά ανώμαλο αποτέλεσμα του δέρματος είναι στην πραγματικότητα αρκετά ευαίσθητη στη φύση της αντανάκλασης του ηλεκτρονίου. Για παράδειγμα, στη διάχυτη αντανάκλαση (όταν όλες οι κατευθύνσεις του αντανακλώμενου ηλεκτρονίου είναι εξίσου πιθανό, ανεξάρτητα από τη γωνία πρόσπτωσης), η τιμή της αντίστασης του διαφέρει από το (86.23) μόνο κατά ένα παράγοντα 9/8. Η οριακή συνθήκη για διάχυτη αντανάκλαση από μία επίπεδη επιφάνεια είναι $\delta \vec{n} \cdot (\vec{v}_x > 0, v_y, v_z) = 0$ για $x=0$. Εδώ όμως, η μέθοδος Fourier είναι ακατάλληλη και το πρόβλημα πρέπει να λυθεί με την επονομαζόμενη Wiener-Hopf μέθοδο.**

* Αυτές οι δηλώσεις αποδείχθηκαν στην αναθεώρηση του άρθρου από A. F. Andreev, *Soviet Physics Uspekhi* 14,609, 1972

** Βλέπε G.E.H. Reuter και E.H. Sondheimer. *Proceedings of the Royal Society A*. 195, 336, 1948.

§87. Αποτελέσμα του δέρματος στο υπέρυθρο φάσμα.

Έχουμε τώρα δύο περιοριστικές περιπτώσεις του δέρματος αποτελέσματος: η φυσιολογική επίδραση, όταν η μέση ελεύθερη διαδρομή l είναι η μικρότερη από τις τρεις χαρακτηριστικές αποστάσεις δ , l και v_F/ω και το ανώμαλο φαινόμενο, όταν το βάθος διείσδυσης δ είναι η μικρότερη. Ας ρίξουμε τώρα μια τρίτη υπόθεση, στην οποία το μικρότερο είναι

$$v_F/\omega \ll \delta, \quad v_F/\omega \ll l. \quad (87.1)$$

Αυτό επιτυγχάνεται με φυσικό τρόπο από το ανώμαλο φαινόμενο με περεταίρω την αύξηση της συχνότητας; Αν και το βάθος διείσδυσης στη συνέχεια μειώνεται, το προϊόν $\omega\delta$ αυξάνει ως $\omega^{2/3}$. Για τα απλά μέταλλα, οι συνθήκες (87.1) ικανοποιούνται στο υπέρυθρο φάσμα.

Αυτές οι συνθήκες θέτουν ένα κατώτερο όριο για τη συχνότητα. Ωστόσο, η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων παρακάτω, οι οποίες βασίζονται στη θεωρία των υγρών Fermi είναι επίσης αντικείμενο σε ανώτατο όριο της συχνότητας: $\hbar\omega \ll \epsilon_F$. Αν αυτό δεν είναι ικανοποιητικό, τα οιονεί σωματίδια εξάπτονται από το βάθος της κατανομής Fermi και αυτά δεν έχουν κανένα νόημα στη θεωρία υγρών Fermi.

Για να προσδιοριστεί η σχέση μεταξύ του ρεύματος και του ηλεκτρικού πεδίου, θα πρέπει και πάλι να επιστρέψουμε στην εξίσωση μεταφοράς. Τώρα όμως, λόγω της κατάστασης $\omega \gg v_F/\delta$, ο όρος περιέχει το παράγωγο του χρόνου που είναι μεγάλος σε σύγκριση με τον όρο που περιέχει χωρικά παράγωγα και λόγω της κατάστασης $\omega \gg v_F/l$ είναι επίσης μεγάλος σε σύγκριση με το ολοκλήρωμα σύγκρουσης.

Παραμελώντας αυτούς τους όρους, έχουμε την εξίσωση μεταφοράς με το τύπο

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} - e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} = 0.$$

Βάζοντας $\partial \delta n / \partial t = -i\omega \delta n$, παίρνουμε από αυτό

$$\delta n = -(\partial n_0 / \partial \epsilon) \psi, \quad \psi = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} / i\omega. \quad (87.2)$$

Η απουσία του όρου που περιέχει τα συντεταγμένα παράγωγα σημαίνει, ότι δεν υπάρχει χωρική διασπορά. Υπό την έννοια αυτή η επίδραση του δέρματος είναι κανονική και πάλι. Η παρουσία του παραγώγου του χρόνου του όρου ωστόσο, προκαλεί διασπορά συχνότητας της αγωγιμότητας. Η κατάσταση εδώ είναι παρόμοια με εκείνη για τον υπολογισμό της διαπερατότητας ενός collisionless πλάσματος. Η μόνη διαφορά

έγκειται στην ανισοτροπία του μετάλλου και στα αποτελέσματα του υγρού Fermi. Τα τελευταία έχουν το αποτέλεσμα ότι η πυκνότητα του ρεύματος δίδεται από ένα ολοκλήρωμα που εξαρτάται όχι μόνο από τη συνάρτηση κατανομής δn , αλλά επίσης από την συνάρτηση αλληλεπίδρασης $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ των οιονεί σωματιδίων (τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι λόγω της παρουσίας του όρου $\delta n/\partial t$ στην εξίσωση μεταφοράς, δεν είναι δυνατόν να εξαιρεθεί εδώ η αλληλεπίδραση των οιονεί σωματιδίων χρησιμοποιώντας την αποτελεσματική συνάρτηση διανομής $\delta \bar{n}$.

Σύμφωνα με (74.21) και (74.22) η πυκνότητα του ρεύματος εκφράζεται σε όρους της διόρθωσης στη συνάρτηση κατανομής του ηλεκτρονίου με

$$\mathbf{j} = -e \int \nu \left[\psi(\mathbf{p}_F) + \int f(\mathbf{p}_F, \mathbf{p}') \psi(\mathbf{p}') \frac{dS'_F}{v'_F (2\pi\hbar)^3} \right] \frac{2dS_F}{(2\pi\hbar)^3}.$$

όπου ν είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ταχύτητας v_F , το οποίο είναι το ίδιο όπως με το κανονική φορέα προς την επιφάνεια Fermi. Αντικαθιστώντας το ψ από (87.2), βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ του ρεύματος και του πεδίου με τη μορφή $\bar{j}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}(\omega) \bar{E}_\beta$, με το τανυστή αγωγιμότητας

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= -(e^2/i\omega m) N_{\alpha\beta}^{(\text{eff})}, \\ N_{\alpha\beta}^{(\text{eff})} &= \int \nu_\alpha \left[v_F \nu_\beta + \int f(\mathbf{p}_F, \mathbf{p}') \nu'_\beta \frac{dS'_F}{(2\pi\hbar)^3} \right] \frac{2dS_F}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (87.3)$$

Η συμμετρία του τανυστή $N_{\alpha\beta}^{(\text{eff})}$ προσδιορίζεται από εκείνο του κρυστάλλου και δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση του πεδίου, όπως στο (86.15). Σε ένα κρύσταλλο με κυβική συμμετρία, η οποία θα υποθέσουμε χάριν της απλότητας αυτόν τον τανυστή και επομένως $\sigma_{\alpha\beta}$ μειώνει σε βαθμίδα $N_{\alpha\beta}^{(\text{eff})} = N^{(\text{eff})} \delta_{\alpha\beta}$, και

$$\sigma(\omega) = -(e^2/im\omega) N^{(\text{eff})}. \quad (87.4)$$

Η περιγραφή των ιδιοτήτων του μετάλλου με τη βοήθεια αυτής της αγωγιμότητας μπορεί να αντικατασταθεί με το συνήθη τρόπο από μια περιγραφή όσον αφορά την διηλεκτρική

$$\epsilon(\omega) = 1 + i \cdot 4\pi\sigma(\omega)/\omega = 1 - 4\pi e^2 N^{(\text{eff})}/m\omega^2. \quad (87.5)$$

Ο συμβολισμός $N_{\alpha\beta}^{(\text{eff})}$ χρησιμοποιείται κατά αναλογία με τον περιορισμό της έκφρασης (ECM, §59) για την διηλεκτρική σε πολύ υψηλές συχνότητες: $\epsilon = 1 - 4\pi e^2 \bar{N}/m\omega^2$, όπου \bar{N} είναι ο συνολικός αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου της ουσίας. Έτσι, $N_{\alpha\beta}^{(\text{eff})}$ στις υπέρυθρες οπτικά των μετάλλων αντιπροσωπεύει το πραγματικό αριθμό των

ηλεκτρονίων; Εξαρτάται από την λειτουργία αλληλεπίδρασης τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας.

Μαζί με $N_{\alpha\beta}^{(eff)}$ είναι χρήσιμο να καθορίζουμε επίσης την πραγματική συχνότητα του πλάσματος

$$\Omega = (4\pi e^2 N^{(eff)}/m)^{1/2}. \quad (87.6)$$

Η αγωγιμότητα

$$\sigma = i\Omega^2/4\pi\omega. \quad (87.7)$$

Η τιμή του Ω προσδιορίζεται μόνο από τις παραμέτρους του φάσματος ηλεκτρονίου του μετάλλου; Με μια πρόχειρη εκτίμηση ως εκ τούτου, είναι ίσο με ϵ_F/\hbar , η Fermi περιορισμένη ενέργεια. Δεδομένου ότι η παρούσα θεωρία περιορίζεται από την κατάσταση $\hbar\omega \ll \epsilon_F$, έχουμε $\Omega \gg \omega$.

Η διεύθυνση του πεδίου εντός του μετάλλου περιγράφεται από την εξίσωση (86.4), η οποία από την αντικατάσταση του σ από (87.7) γίνεται

$$\mathbf{E}'' - (\Omega^2/c^2)\mathbf{E} = 0.$$

Η λύση η οποία τείνει να μηδέν ως $x \rightarrow \infty$ είναι

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-x/\delta}, \quad \delta = c/\Omega; \quad (87.8)$$

για τυπικά μέταλλα, $c/\Omega \sim 10^{-5}$ cm. Το πεδίο είναι επομένως αποσβένει εκθετικά, το βάθος διεύθυνσης που είναι ανεξάρτητο από τη συχνότητα. Η σχέση μεταξύ των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων είναι πλέον δεδομένη (όπως είναι εύκολο αν φανεί με τη βοήθεια της πρώτης εξίσωσης (86.3) από (86.8)) με αντίσταση

$$\zeta = -i\omega\delta/c = -i\omega/\Omega. \quad (87.9)$$

Η καθαρά φανταστική αντίσταση υποδηλώνει ολική αντανάκλαση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος από την επιφάνεια του μετάλλου χωρίς διάχυση. Αυτό είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι η προσέγγιση που χρησιμοποιείται δεν έχει λάβει υπόψη της, τις συγκρούσεις των ηλεκτρονίων, οι οποίες είναι η αιτία της διασποράς.

Με (87.7) οι βασικές προϋποθέσεις για τη θεωρία αυτή για να είναι έγκυρη μπορεί να γραφτεί

$$\Omega \gg \omega \gg \Omega v_F/c. \quad (87.10)$$

Η αριστερή ανισότητα είναι συνήθως συμβατή με $\hbar\omega \gg \Theta$, όπου Θ είναι η θερμοκρασία Debye. Η παράμετρος Fermi μ_F και η συνάρτηση f στο (87.3) θα πρέπει τότε να

λαμβάνεται υπόψη όχι στην επιφάνεια Fermi, αλλά για $|\epsilon - \epsilon_F| \gg \Theta$. Έχει αποδειχθεί στο SP 2, §65 ότι η αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-φωτονίου έχει το αποτέλεσμα ότι u_F σε αυτή τη περιοχή διαφέρει από αυτήν στην περιοχή $|\epsilon - \epsilon_F| \ll \Theta$ (η οποία είναι σημαντική, για παράδειγμα, όσον αφορά τις στατικές ιδιότητες του μετάλλου σε χαμηλές θερμοκρασίες); Το ίδιο είναι αλήθεια της συνάρτησης αλληλεπίδρασης του οιονεί σωματιδίου f .

§88. Κύματα Helicon σε μέταλλα

Το γεγονός ότι ένα εξωτερικό εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο δεν διεισδύει μέσα σε ένα μέταλλο σημαίνει ότι τα αποσβεννόμενα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με συχνότητες έως τη συχνότητα ($\omega \sim \Omega$) του πλάσματος δεν μπορεί να διαδοθεί σε ένα μέταλλο.

Η κατάσταση είναι εντελώς διαφορετική με την παρουσία όμως ενός στατικού μαγνητικού πεδίου B . Το πεδίο αυτό μεταβάλλει την κίνηση των ηλεκτρονίων και επομένως επηρεάζει σημαντικά τις ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες του μετάλλου. Είναι σημαντικό ότι η κίνηση γίνεται πεπερασμένη σε επίπεδο κάθετο με το πεδίο. Σε ισχυρά πεδία, όταν η ακτίνα $L_{\text{armor}} \sim r_B \sim c\hbar/eB$ της τροχιάς γίνεται μικρή σε σύγκριση με τη μέση ελεύθερη διαδρομή

$$r_B \ll l, \quad (88.1)$$

ή (ισοδύναμα) $\omega_B \tau \gg 1$, όπου $\omega_B \sim v_F/r_B \sim eB/m^*c$ είναι η συχνότητα L_{armor} και $\tau \sim \hbar/v_F$ ο μέσος ελεύθερος χρόνος, η ηλεκτρική αγωγιμότητα σε κατευθύνσεις εγκάρσιες στο πεδίο μειώνονται σημαντικά τείνοντας στο μηδέν καθώς $B \rightarrow \infty$. Μπορούμε να πούμε ότι σε αυτές τις κατευθύνσεις το μέταλλο συμπεριφέρεται σαν μονωτής και έτσι η διάλυση ενέργειας μειώνεται σε κύματα των οποίων το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολωμένο στο επίπεδο κάθετο προς B . Η διάδοση τέτοιων κυμάτων χωρίς απόσβεση (στην πρώτη προσέγγιση) καθίσταται δυνατή. Οι επιτρεπόμενες συχνότητες κυμάτων περιορίζονται από την κατάσταση

$$\omega \ll \omega_B; \quad (88.2)$$

μόνο εάν αυτό ικανοποιείται μπορούν οι τροχιές ηλεκτρονίων να υφίστανται αισθητή καμπυλότητα κατά την περίοδο του πεδίου μεταβάλλοντας έτσι τις ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες του μετάλλου σε σχέση με αυτές τις συχνότητες.

Η πεπερασμένη κίνηση του ηλεκτρονίου (σε επίπεδο κάθετο προς B) προϋποθέτει ότι η τροχιά της ορμής, μία εγκάρσια τομή της επιφάνειας Fermi είναι επίσης πεπερασμένη. Η παραπάνω συζήτηση εφαρμόζεται συνεπώς σε μέταλλα με κλειστές επιφάνειες Fermi για οποιαδήποτε κατεύθυνση B, αλλά σε εκείνες με ανοικτές επιφάνειες μόνο για τις διευθύνσεις B που οι διατομές είναι κλειστές. Με ανοιχτές διατομές, η κίνηση του ηλεκτρονίου παραμένει άπειρο στο μαγνητικό πεδίο, η αγωγιμότητα δεν μειώνεται και η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στις σχετικές κατευθύνσεις δεν μπορούν να συμβούν.

Χωρίς απόσβεση ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε ένα μέταλλο μπορεί να θεωρηθεί ως Bose διακλαδώσεις του φάσματος ενέργειας του υγρού Fermi ηλεκτρονίου. Η μακροσκοπική φύση αυτών των κυμάτων φαίνεται από το μήκος κύματος, το οποίο είναι μεγάλο σε σχέση με τη σταθερά πλέγματος. Για το λόγο αυτό, οι διεγέρσεις αντιστοιχούν σε ένα μόνο πολύ μικρό σχετικό όγκο φάσης και η συμβολή τους στις θερμοδυναμικές ποσότητες στο μέταλλο είναι αμελητέα.

Γράφουμε πάλι εξισώσεις Maxwell:

$$\text{curl } \bar{\mathbf{B}} = 4\pi\mathbf{j}/c, \quad \text{curl } \mathbf{E} = -(1/c)\partial\bar{\mathbf{B}}/\partial t, \quad (88.3)$$

όπου το $\bar{\mathbf{B}}$ δηλώνει το ασθενές μαγνητικό εναλλασσόμενο πεδίο του κύματος, σε αντίθεση με το συνεχή B. Εξαλείφοντας το $\bar{\mathbf{B}}$ από τις εξισώσεις αυτές δίνει

$$\begin{aligned} \text{curl curl } \mathbf{E} &= \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} \\ &= -(4\pi/c^2)\partial\mathbf{j}/\partial t. \end{aligned}$$

Για ένα μονοχρωματικό επιπέδου κύματος, αυτό γίνεται

$$(-k_\alpha k_\gamma + k^2 \delta_{\alpha\gamma})E_\gamma = 4\pi i \omega \mathbf{j}_\alpha / c^2. \quad (88.4)$$

Το πεδίο E εκφράζεται σε όρους της τρέχουσας κατά $E_\alpha = \rho_{\alpha\beta} j_\beta$, όπου $\rho_{\alpha\beta} = \sigma^{-1}_{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής αντίστασης. Τότε αποκτάμε ένα σύνολο γραμμικών ομοιογενών εξισώσεων,

$$[k^2 \rho_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\gamma \rho_{\gamma\beta} - 4\pi i \omega \delta_{\alpha\beta} / c^2] j_\beta = 0. \quad (88.5)$$

Η ορίζουσα αυτών των αποδόσεων η σχέση διασποράς για τα κύματα. Στις §§84 και 85 έχουμε παράγει τον τανυστή αγωγιμότητας για ένα μέταλλο (εναπομένουσα αντοχή

εύρους) σε ένα δυνατό μαγνητικό πεδίο για την στατική περίπτωση. Ας δούμε τώρα πώς τα αποτελέσματα θα πρέπει να τροποποιηθούν στη μη σταθερή περίπτωση.

Η περιοδικότητα του ηλεκτρικού πεδίου στο χρόνο και στο χώρο (και συνεπώς εκείνη του εναλλασσόμενου μέρους της συνάρτησης κατανομής ηλεκτρονίου) προκαλεί την παρουσία όρων

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta \bar{n}}{\partial \mathbf{r}} = -i\omega \delta n + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \delta \bar{n}$$

αριστερά της εξίσωσης μεταφοράς; cf. (74.25). Όπως και στην περίπτωση (84.7), βάζουμε δn στο τύπο

$$\delta n = (\partial n_0 / \partial \epsilon) e \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}, \quad \delta \bar{n} = (\partial n_0 / \partial \epsilon) e \mathbf{E} \cdot \mathbf{g}.$$

Σύμφωνα με (74.21) οι συναρτήσεις \mathbf{h} και \mathbf{g} σχετίζονται με το γραμμικό ολοκλήρωμα έκφρασης

$$\mathbf{g} = \mathbf{h} + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \mathbf{h}' dS_{\mathbf{p}'/v} / (2\pi\hbar)^3 \equiv \hat{L} \mathbf{h}.$$

Η εξίσωση μεταφοράς γίνεται τότε

$$\partial \mathbf{g} / \partial t - [I(\mathbf{g}) + i\omega \hat{L}^{-1} \mathbf{g} - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{g}] = \mathbf{v}. \quad (88.6)$$

Διαφέρει από το (84.10) από το ότι $I(\mathbf{g})$ αντικαθίσταται από την έκφραση στις αγκύλες, οι οποίες εξαρτώνται όχι μόνο από τη φύση της διασκόρπισης του ηλεκτρονίου από άτομα πρόσμιξης, αλλά επίσης και από την αλληλεπίδραση μεταξύ των ηλεκτρονίων.

Εξαιτίας της κατάστασης $r_B \ll l$, ο όρος $I(\mathbf{g})$ στο (88.6) είναι πολύ μικρότερος από $\partial \mathbf{g} / \partial t$ όπως ήταν στο (84.10). Εξαιτίας της κατάστασης $\bar{\omega} \ll \omega_B$, ο όρος $i\omega \hat{L}^{-1} \mathbf{g} \sim i\omega \mathbf{g}$ είναι επίσης μικρός. Θα πρέπει επίσης να επιβάλουμε μια κατάσταση σχετικά με τον αριθμό κύματος, $k_{VF} \ll \omega_B$, δηλαδή

$$k r_B \ll 1: \quad (88.7)$$

το μήκος κύματος πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα Larmor. Στη συνέχεια, ο τελευταίος όρος στις αγκύλες (88.6) είναι επίσης μικρός. Η μέθοδος για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς με διαδοχική προσέγγιση (§84) εξακολουθεί να ισχύει και ως εκ τούτου το ίδιο κάνουν και τα αποτελέσματα που βρέθηκαν εκεί για τους κορυφαίους όρους στην επέκταση του τανυστή αγωγιμότητας σε δυνάμεις του $1/B$. Ωστόσο, επειδή η παρουσία του ω και \mathbf{k} στο (88.6) θα είναι γενικά η συχνότητα και η χωρική διασπορά της αγωγιμότητας.

Η παρουσία αρκετών χαρακτηριστικών παραμέτρων του μήκους και του χρόνου και της ποικιλίας των γεωμετρικών ιδιοτήτων των επιφανειών Fermi, προκαλεί μια πολλαπλότητα των φαινομένων που σχετίζονται με τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε μέταλλα. Θα εξετάσουμε στις §§88 και 89 μόνο μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

Ας πάρουμε την περίπτωση ενός μετάλλου μη αποζημιωμένο με μια κλειστή επιφάνεια Fermi. Σύμφωνα με (85.4) και (85.5), η μεγαλύτερη συνιστώσα του τανυστή αντίστασης είναι

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = B/ec(N_e - N_h); \quad (88.8)$$

αυτό ανήκει στο μέρος τη μη-διάλυσης (αντι-Hermitian) του τανυστή. Αυτό το συστατικό είναι εντελώς ανεξάρτητο από τη μορφή της σύγκρουσης του ολοκληρώματος και συνεπώς από τη μορφή της έκφρασης μέσα στις τετραγωνισμένες αγκύλες (88.6). Ο τύπος (88.8) εξακολουθεί να ισχύει στον τομέα του κύματος.

Η περιγραφή του μέσου με τη βοήθεια της αντίστασης του τανυστή $\rho_{\alpha\beta}$ (ή ο τανυστής αγωγιμότητας $\sigma_{\alpha\beta}$) είναι ισοδύναμος με την χρήση του τανυστή διηλεκτρικής

$$\epsilon_{\alpha\beta} = 4\pi i \sigma_{\alpha\beta} / \omega, \quad \epsilon^{-1}_{\alpha\beta} = \omega \rho_{\alpha\beta} / 4\pi i.$$

Ο τανυστής $\epsilon^{-1}_{\alpha\beta}$ έχει εδώ μόνο τα συνιστώσες

$$\epsilon^{-1}_{xy} = -\epsilon^{-1}_{yx} = \omega B / 4\pi i c e (N_e - N_h).$$

Αυτό είναι το ίδιο όπως εκείνο που βρέθηκε στη §56 για τα κύματα στο πλάσμα, εκτός το ότι η πυκνότητα ηλεκτρονίου N_e αντικαθίσταται από τη διαφορά $N_e - N_h$. Τα αποτελέσματα της §56 μπορεί συνεπώς να εφαρμοστεί αμέσως σε αυτά κύματα σε μέταλλα, τα οποία ονομάζονται ομοίως κύματα ελικών.*

Η σχέση διασποράς για αυτά είναι

$$\omega = cB |\cos \theta| / 4\pi e |N_e - N_h|, \quad (88.9)$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ k και B . Το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος είναι ελλειπτικά πολωμένο στο επίπεδο που είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο B . Λαμβάνοντας την κατεύθυνση του B ως z -άξονα (όπως στη §56) και το επίπεδο που διέρχεται από το k και

* Η πιθανότητα της διάδοσης σε τέτοια κύματα σε μέταλλα σημειώθηκε από τον O.V.Konstantinov και V.I.Perel (1960).

Β ως xz-επίπεδο, βρίσκουμε το ηλεκτρικό πεδίο

$$E_y = \pm i |\cos \theta| E_x, \quad (88.10)$$

τα άνω και κάτω σημεία που σχετίζονται με τις περιπτώσεις $N_e > N_h$ και $N_e < N_h$ αντίστοιχα.