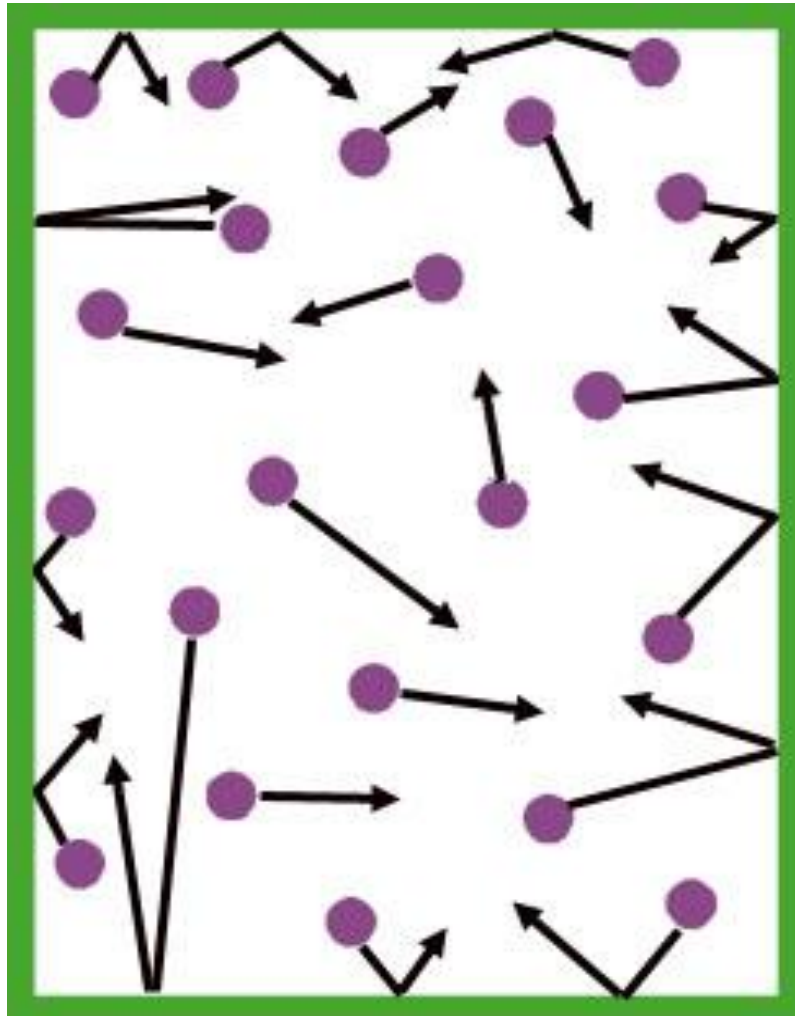


Κινητική Θεωρία των Αερίων



Μετάφραση και επιδιόρθωση βιβλίου

Ρεμεδιάκης Γεώργιος Α.Μ : 4042

Καρτέρης Ιωάννης Α.Μ : 3987

# ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

## §1. Η συνάρτηση κατανομής

Αυτό κεφάλαιο αναφέρεται στην κινητική θεωρία των συνηθισμένων αερίων που αποτελούνται από ηλεκτρικά ουδέτερα άτομα ή μόρια. Η θεωρία εξετάζει τις καταστάσεις μη ισορροπίας και τις διαδικασίες που εμπλέκονται για ένα ιδανικό αέριο. Ένα ιδανικό αέριο, είναι τόσο αραιό όπου κάθε μόριο που βρίσκεται μέσα σε αυτό κινείται ελεύθερα σχεδόν πάντα, και αλληλεπιδρά με άλλα μόρια μόνο κατά την διάρκεια τυχαίων συγκρούσεων. Δηλαδή η μέση απόσταση ανάμεσα στα μόρια  $\sim N^{-1/3}$  ( όπου  $N$  είναι ο αριθμός των μορίων ανά μονάδα όγκου), θεωρείται μεγάλη σε σύγκριση με την έκταση  $d$  των διαμοριακών δυνάμεων. Η μικρή ποσότητα  $Nd^3 \sim (d/\lambda)^3$  αποκαλείται μερικές φορές η παράμετρος αεριοποίησης (gaseousness parameter).

Η στατιστική περιγραφή του αερίου δίνεται από την συνάρτηση κατανομής (distribution function)  $f(t, q, p)$  των μορίων του αερίου στον φασικό τους χώρο. Γενικά είναι μια συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων (τις οποίες επιλέγουμε με κάποιο τρόπο και υποδηλώνουμε από κοινού με  $q$ ) και των αντίστοιχων γενικευμένων ορμών (που υποδηλώνονται από κοινού με  $p$ ), και της μη σταθερής κατάστασης (non-steady state) επίσης του χρόνου  $t$ . Ας υποθέσουμε ότι  $dt = dq dp$  υποδηλώνει ένα στοιχειώδη όγκο στον φασικό χώρο του μορίου. Τα  $dq$  και  $dp$  συμβατικά υποδηλώνουν το γινόμενο των διαφορικών όλων των συντεταγμένων και όλων των ορμών αντίστοιχα. Το γινόμενο  $f dt$  είναι ο μέσος αριθμός μορίων σε ένα δεδομένο στοιχείο  $d_t$  που έχουν τιμές του  $q$  και  $p$  σε δεδομένα εύρη  $dq$  και  $dp$ . Θα επιστρέψουμε αργότερα στον ορισμό του μέσου.

Παρόλο που η συνάρτηση  $f$  θα γίνεται κατανοητή παντού ως η κατανομή πυκνότητας στον φασικό χώρο, υπάρχει ένα πλεονέκτημα αν την εκφράσουμε μέσω κατάλληλα επιλεγμένων μεταβλητών, οι οποίες δεν είναι απαραίτητο να είναι κανονικώς συζυγείς συντεταγμένες και ορμές. Πρώτα από όλα ας αποφασίσουμε ποια επιλογή θα κάνουμε.

Η μεταφραστική κίνηση ενός μορίου είναι πάντα κλασσική, και περιγράφεται από τις συντεταγμένες  $r = (x, y, z)$  του κέντρου της μάζας του και από τις συνιστώσες της ορμής  $p$  (ή της ταχύτητας  $v = p/m$ ) της συνολικής κίνησης του. Σε ένα μονοατομικό αέριο, η κίνηση των σωματιδίων, τα οποία είναι άτομα, είναι καθαρά μεταφραστική. Σε πολυατομικά αέρια, τα μόρια έχουν επίσης περιστροφικούς και δονητικούς βαθμούς ελευθερίας.

Η περιστροφική κίνηση ενός μορίου σε ένα αέριο είναι επίσης σχεδόν κλασσική. Περιγράφεται αρχικά από το διάνυσμα γωνιακής ορμής  $M$  του μορίου. Αυτό αρκεί για ένα διατομικό μόριο. Ένα τέτοιο μόριο είναι ένας στροφέας που περιστρέφεται σε ένα επίπεδο κάθετο στο  $M$ . Σε πραγματικά προβλήματα της φυσικής, η συνάρτηση κατανομής μπορεί να θεωρηθεί ανεξάρτητη της γωνίας  $\phi$  της περιστροφής του άξονα του μορίου σε αυτό το επίπεδο, με όλους τους προσανατολισμούς του μορίου στο επίπεδο εξίσου πιθανούς. Αυτό συμβαίνει επειδή η γωνία  $\phi$  αλλάζει γρήγορα καθώς το μόριο περιστρέφεται, και το αποτέλεσμα γίνεται κατανοητό ως εξής.

Ο ρυθμός της αλλαγής της γωνίας  $\phi$  (η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του μορίου) είναι  $\dot{\phi} = \Omega = M/I$ . Η μέση τιμή της είναι  $\dot{\phi} \sim \Omega$ , όπου  $d$  είναι η μοριακή διάσταση και  $\lambda$  η μέση γραμμική ταχύτητα. Διαφορετικά μόρια έχουν διαφορετικές τιμές  $\Omega$ , οι οποίες κατανέμονται γύρω από το  $\Omega$ . Έτσι, μόρια τα οποία αρχικά είχαν την ίδια  $\phi$  πολύ σύντομα αποκτούν διαφορετικές τιμές  $\phi$  - υπάρχει ταχύτητα «ανάμειξη» ("mixing") όσον αφορά στις γωνίες. Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή των μορίων για γωνία  $\phi = \phi_0$  (σε ένα εύρος από 0 έως  $2\pi$ ) και για  $\Omega$  την αρχική στιγμή  $t = 0$  δίνεται από μια συνάρτηση  $f(\phi_0, \Omega)$ . Ξεχωρίζουμε από αυτήν την μέση τιμή που δεν εξαρτάται από την  $\phi$ :

$$f = \bar{f}(\Omega) + f'(\varphi_0, \Omega),$$

$$\bar{f}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi_0, \Omega) d\varphi_0,$$

ώστε  $f'(\varphi_0, \Omega)$  είναι μια συνάρτηση περιοδική σε  $\varphi_0$  με περίοδο  $2\pi$  και μηδενικό μέσο όρο. Όσο περνάει ο χρόνος, η ελεύθερη περιστροφή των μορίων ( $\varphi = \Omega t + \varphi_0$ ) αλλάζει τη συνάρτηση κατανομής:

$$f(\varphi, \Omega, t) = \bar{f}(\Omega) + f'(\varphi - \Omega t, \Omega);$$

Στο πέρασμα του χρόνου, η  $f'$  γίνεται μια όλο και γρηγορότερα αυξανόμενη ταλαντώμενη συνάρτηση του  $\Omega$ : η χαρακτηριστική περίοδος ταλάντωσης  $\Delta\Omega \sim 2\pi/t$ , και γίνεται μικρή σε σχέση με το ακόμα και κατά την διάρκεια του μέσου ελευθέρου χρόνου των μορίων ανάμεσα στις συγκρούσεις. Παρόλα αυτά, όλες οι παρατηρούμενες φυσικές ποσότητες εμπεριέχουν την εξαγωγή του μέσου όρου της συνάρτησης κατανομής σε σχέση με το  $\Omega$ . Η συνεισφορά της ταχύτητα ταλαντώμενης συνάρτησης  $f'$  σε τέτοιους μέσους όρους είναι αμελητέα. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να αντικαταστήσουμε την κατανομή  $f(\varphi, \Omega)$  με την συνάρτηση  $f(\Omega)$  που εμπεριέχει τους μέσους όρους των γωνιών (angle-averaged function  $(\Omega)$ ).

Τα παραπάνω επιχειρήματα γενικά και εφαρμόζονται σε οποιοσδήποτε ταχύτητα κυμαινόμενες ποσότητες (φάσεις) (phases) που παίρνουν τιμές σε πεπερασμένο εύρος.

Επιτρέποντας στους βαθμούς ελευθερίας περιστροφής των μορίων, ας σημειώσουμε ότι σε πολυατομικά αέρια η συνάρτηση κατανομής ίσως επίσης να βασίζεται στις γωνίες οι οποίες προσδιορίζει ο σταθερός προσανατολισμός των αξόνων των μορίων σε σχέση με το διάνυσμα  $M$ . Για παράδειγμα, στα μόρια τύπου συμμετρικής κορυφής (symmetrical-top type) αυτό αποτελεί την γωνία μετάπτωσης ανάμεσα στο  $M$  και τους άξονες της κορυφής, ενώ η συνάρτηση κατανομής ίσως θεωρηθεί ξανά ως ανεξάρτητη των ταχύτητα κυμαινόμενων γωνιών της περιστροφής της κορυφής γύρω από τον ίδιο της τον άξονα και της προπόρευσης (μετάπτωσης)  $f$  του άξονα γύρω από το  $M$ .

Η δονούμενη κίνηση των ατόμων μέσα στο μόριο είναι πρακτικά πάντα κβαντοποιημένη (quantized), ώστε η δονούμενη κατάσταση του μορίου να προσδιορίζεται από τα κατάλληλα κβαντικά νούμερα. Υπό συνηθισμένες συνθήκες (σε όχι πολύ υψηλές θερμοκρασίες), παρόλαυτα, οι δονήσεις δεν διεγείρονται καθόλου, και τα μόρια βρίσκονται στο κατώτερο επίπεδο δονήσεων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δηλώσουμε με  $\Gamma$  το σύνολο όλων των μεταβλητών στο οποίο βασίζεται η συνάρτηση κατανομής, το οποίο είναι διαφορετικό από τις άλλες συντεταγμένες του μορίου ως σύνολο (και του χρόνου  $t$ ). Ξεχωρίζουμε από το στοιχείο του όγκου φάσης (phase volume element)  $dV$  τον παράγοντα  $dV = dx dy dz$ , και δηλώνουμε με  $d\Gamma$  τον εναπομείναντα παράγοντα σε ότι αφορά τις χρησιμοποιούμενες μεταβλητές (και οι οποίες ενσωματώνονται στις γωνίες από τις οποίες δεν εξαρτάται η  $f$ ). Οι ποσότητες  $\Gamma$  έχουν μια σημαντική κοινή ιδιότητα: είναι ολοκληρώματα της κίνησης, και παραμένουν σταθερά για κάθε μόριο κατά τη διάρκεια της ελεύθερης κίνησης του (απουσία εξωτερικού πεδίου) ανάμεσα σε διαδοχικές συγκρούσεις. Γενικά όμως μεταβάλλονται από κάθε σύγκρουση. Οι συντεταγμένες  $x, y, z$  του μορίου ως σύνολο ποικίλουν, βέβαια, κατά τη διάρκεια της ελεύθερης κίνησής του.

Για ένα μονοατομικό αέριο, οι ποσότητες  $\Gamma$  είναι οι τρεις συνιστώσες της ορμής  $\rho = mv$  του ατόμου, έτσι ώστε  $d\Gamma = d^3\rho$ . Για ένα διατομικό μόριο, το  $\Gamma$  περιλαμβάνει όχι μόνο την ορμή  $\rho$  αλλά επίσης την στροφορμή  $M$ . Επομένως, το  $d\Gamma$  μπορεί να εκφραστεί ως

$$d\Gamma = 2\pi d^3p M dM do_M,$$

όπου  $do_M$  είναι μια στοιχειώδη συμπαγή γωνία ( solid-angle element ) για την διεύθυνση του διανύσματος  $M$ . Για ένα μόριο συμμετρικής κορυφής, οι ποσότητες  $\Gamma$  περιλαμβάνουν επίσης τη γωνία  $\theta$  ανάμεσα στο  $M$  και τον άξονα της κορυφής· συνεπώς

$$d\Gamma = 4\pi^2 d^3p M^2 dM do_M d \cos \theta$$

(ένας παράγοντας του  $2\pi$  προέρχεται από την ολοκλήρωση ως προς την γωνία περιστροφής της κορυφής γύρω από τον άξονα της, και ένας άλλος από την ολοκλήρωση ως προς τη γωνία μετάπτωσης (precessional rotation). Το ολοκλήρωμα

$$f(t, \mathbf{r}, \Gamma)d\Gamma = N(t, \mathbf{r})$$

είναι η πυκνότητα της κατανομής στο χώρο (spatial distribution density) των σωματιδίων του αερίου το  $N dV$  είναι ο μέσος αριθμός των μορίων στο στοιχείο όγκου  $dV$ . Εδώ είναι απαραίτητα τα παρακάτω σχόλια.

Ένα απειροελάχιστο στοιχείο όγκου  $dV$  σημαίνει ότι είναι μικρό όχι από την πλευρά των μαθηματικών αλλά από την πλευρά της φυσικής, π.χ. μια περιοχή του χώρου η οποία είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις χαρακτηριστικές διαστάσεις  $L$  του προβλήματος, αλλά παρόλα αυτά μεγάλη σε σχέση με μοριακές διαστάσεις. Η δήλωση ότι ένα μόριο είναι μέσα σε ένα δεδομένο στοιχείο όγκου το  $dV$  συνεπώς προσδιορίζει την θέση του, στην καλύτερη περίπτωση, μόνο σε αποστάσεις της τάξης των διαστάσεων του. Αυτό έχει μεγάλη σημασία. Αν οι συντεταγμένες των μορίων του αερίου προσδιορίζονταν ακριβώς, τότε το αποτέλεσμα της σύγκρουσης, π.χ. δυο ατόμων ενός μονοατομικού αερίου που κινείται σε συγκεκριμένες κλασσικές διαδρομές (classical paths) θα ήταν επίσης εντελώς συγκεκριμένες. Αν, παρόλα αυτά, η σύγκρουση είναι ανάμεσα σε άτομα με δεδομένο μικρό φυσικό όγκο (όπως συνήθως συμβαίνει στη κινητική θεωρία των αερίων), η αβεβαιότητα στην σχετική θέση των ατόμων σημαίνει ότι το αποτέλεσμα της σύγκρουσης είναι επίσης αβέβαιο και μόνο η πιθανότητα του ενός ή του άλλου αποτελέσματος μπορεί να ληφθεί υπόψη.

Τώρα μπορούμε να πούμε πιο συγκεκριμένα πως η μέση αριθμητική πυκνότητα των μορίων αναφέρεται στην εύρεση του μέσου όρου των όγκων που είναι φυσικά απειροελάχιστα στοιχεία και αντίστοιχα το μέσο όρο πολλαπλάσιο της τάξης που πήραν τα μόρια που διήλθαν μέσα από τέτοια στοιχεία.

Μιας και οι διαστάσεις των στοιχείων όγκου που χρησιμοποιήθηκαν στον προσδιορισμό της συνάρτησης κατανομής είναι μεγάλες σε σχέση με τις διαστάσεις των μορίων  $d$ , οι αποστάσεις  $L$  κατά τις οποίες αυτή η συνάρτηση μεταβάλλεται σημαντικά πρέπει επίσης να είναι πάντα μεγάλες, σε σχέση με το  $d$ . Ο λόγος ανάμεσα στο μέγεθος των φυσικά απειροελάχιστων στοιχείων όγκου και τη μέση διαμοριακή απόσταση μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Υπάρχει, παρόλα αυτά, διαφορά ανάμεσα στη φύση της πυκνότητας  $N$  που προσδιορίζεται από τη συνάρτηση κατανομής, σύμφωνα με την τιμή του λόγου εκείνου. Αν το στοιχείο  $dV$  δεν είναι μεγάλο σε σχέση με το  $d$ , η πυκνότητα  $N$  δεν είναι μακροσκοπική ποσότητα: οι διακυμάνσεις του αριθμού αερίων που υπάρχουν στη  $dV$  είναι συγκρίσιμες με τη μέση τιμή του. Η πυκνότητα  $N$  γίνεται μια μακροσκοπική ποσότητα μόνο αν προσδιοριστεί σε σχέση με όγκους  $dV$  που περιέχουν πολλά σωματίδια. Οι διακυμάνσεις του αριθμού των σωματιδίων σε αυτούς τους όγκους τότε γίνονται σχετικά μικρές. Είναι παρόλα αυτά ξεκάθαρο πως ένας τέτοιος προσδιορισμός είναι πιθανός μόνο αν επίσης οι χαρακτηριστικές διαστάσεις του προβλήματος  $L \gg d$ .

## § 2. Η αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας

Ας θεωρήσουμε τις συγκρούσεις ανάμεσα σε δυο μόρια, από τα οποία ένα έχει τιμές  $\Gamma$  σε ένα δεδομένο εύρος  $d\Gamma$  και το άλλο σε ένα εύρος  $d\Gamma_1$ , και τα οποία αποκτούν κατά την σύγκρουση τιμές μέσα στις περιοχές  $d\Gamma'$  και  $d\Gamma'_1$  αντίστοιχα. Για λόγους συντομίας, θα αναφερθούμε απλά σε μια σύγκρουση μορίων με  $\Gamma$  και  $\Gamma_1$ , που καταλήγει σε  $\Gamma'$  και  $\Gamma'_1$ . Ο συνολικός αριθμός τέτοιων συγκρούσεων ανά μονάδα χρόνου και μονάδα όγκου του αερίου μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο του αριθμού των μορίων ανά μονάδα όγκου,  $f(t, r, \Gamma) d\Gamma$  και την πιθανότητα ενός από αυτών να έχει μια σύγκρουση του τύπου που μας ενδιαφέρει. Αυτή η πιθανότητα είναι πάντα ανάλογη του αριθμού των μορίων  $\Gamma_1$  ανά μονάδα όγκου,  $f(t, r, \Gamma_1) d\Gamma_1$ , και των περιοχών  $d\Gamma'$  and  $d\Gamma'_1$  των τιμών του  $\Gamma$  για τα δυο μόρια μετά τη σύγκρουση. Κατά συνέπεια ο αριθμός των συγκρούσεων  $\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1$  ανά μονάδα χρόνου και όγκου μπορεί να γράφεται ως

$$w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 \quad (2.1)$$

από εδώ και στο εξής, οι προσθήκες στη  $f$  αντιστοιχούν σε εκείνες των ορισμάτων τους  $\Gamma$ :  $f_1 = f(t, r, \Gamma_1)$ ,  $f' = f(t, r, \Gamma')$ , και ουτο καθεξής. Ο συντελεστής  $w$  είναι μια συνάρτηση όλων των τιμών  $\Gamma$ . Ο λόγος του  $w d\Gamma' d\Gamma'_1$  προς την απόλυτη τιμή της σχετικής ταχύτητας  $v - v_1$  των συγκρουόμενων μορίων έχει τις διαστάσεις μιας περιοχής, και είναι η ενεργός διατομή σύγκρουσης (effective collision cross-section):

$$d\sigma = \frac{w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1)}{|v - v_1|} d\Gamma' d\Gamma'_1. \quad (2.2)$$

Η συνάρτηση  $w$  μπορεί να υπολογιστεί μόνο λύνοντας το μηχανικό πρόβλημα της σύγκρουσης σωματιδίων που αλληλεπιδρούν σύμφωνα με κάποιους δεδομένους νόμους. Παρόλα αυτά, κάποιες ιδιότητες αυτής της συνάρτησης μπορούν να διευκρινιστούν από γενικές τιμές.

Η πιθανότητα σύγκρουσης θεωρείται πως έχει μια σημαντική ιδιότητα η οποία πηγάζει από την συμμετρία των νόμων μηχανικής (κλασσικών ή κβαντικών) υπό χρονική αντιστροφή. Ας υποθέσουμε πως το  $\Gamma^T$  υποδηλώνει τις αξίες των ποσοτήτων που πηγάζουν από τη  $\Gamma$  με χρονικά αντιστροφή. Αυτή η λειτουργία αλλάζει τα πρόσημα όλων των γραμμικών και γωνιακών ορμών· κατά συνέπεια, αν  $\Gamma = (p, M)$ , τότε  $\Gamma^T = (-p, -M)$ . Αφού η χρονική αντιστροφή εναλλάσσει τις καταστάσεις "πριν" και "μετα" τη σύγκρουση έχουμε

$$w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) = w(\Gamma^T, \Gamma_1^T; \Gamma'^T, \Gamma_1'^T). \quad (2.3)$$

Αυτή η σχέση υποδηλώνει, ότι σε μια κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, η αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας, σύμφωνα με την οποία ο αριθμός των συγκρούσεων  $\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1$  είναι ίσος, σε κατάσταση ισορροπίας, με τον αριθμό  $\Gamma'^T, \Gamma_1'^T \rightarrow \Gamma^T, \Gamma_1^T$ . Έτσι εκφράζοντας αυτούς τους αριθμούς στην (2.1), παίρνουμε

$$w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f_0 f_{01} d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 = w(\Gamma^T, \Gamma_1^T; \Gamma'^T, \Gamma'_1{}^T) f'_0 f'_{01} d\Gamma^T d\Gamma_1{}^T d\Gamma'^T d\Gamma'_1{}^T,$$

όπου εδώ  $f_0$  είναι η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας (Boltzmann). Το γινόμενο των στοιχειωδών φασικών όγκων (phase volume elements)  $d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1$  παραμένει αμετάβλητο από τη χρονική αντιστροφή. Τα διαφορικά στις δυο πλευρές της παραπάνω εξίσωσης μπορούν συνεπώς να παραληφθούν. Έπειτα, όταν το  $t$  αντικατασταθεί από το  $-t$ , η ενέργεια παραμένει αμετάβλητη:  $\epsilon(\Gamma) = \epsilon(\Gamma^T)$ , όπου  $\epsilon(\Gamma)$  είναι η ενέργεια του μορίου της συναρτήσεως των ποσοτήτων  $\Gamma$ . Αφού η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας (σε ένα αέριο σε κατάσταση ηρεμίας) εξαρτάται μόνο από την ενέργεια,

$$f_0(\Gamma) = \text{constant} \times e^{-\epsilon(\Gamma)/T}, \quad (2.4)$$

όπου  $T$  είναι η θερμοκρασία του αερίου, έχουμε  $f_0(\Gamma) = f_0(\Gamma^T)$ . Τελικά, από το νόμο της διατήρησης της ενέργειας κατά την σύγκρουση δυο μορίων έχουμε  $\epsilon + \epsilon_1 = \epsilon' + \epsilon'_1$ . Συνεπώς

$$f_0 f_{01} = f'_0 f'_{01}, \quad (2.5)$$

και η παραπάνω ελαχιστοποιείται στην (2.3).

Αυτοί οι ισχυρισμοί εξακολουθούν να ισχύουν, βεβαίως, για ένα αέριο που κινείται με μια μακροσκοπική ταχύτητα  $V$ . Η συνάρτηση κατανομής της ισορροπίας τότε είναι

$$f_0(\Gamma) = \text{constant} \times \exp\left(-\frac{\epsilon(\Gamma) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}}{T}\right), \quad (2.6)$$

Και η συνάρτηση (2.5) συνεχίζει να ισχύει εξαιτίας της διατήρησης της ορμής κατά τις συγκρούσεις:  $\rho + \rho_1 = \rho' + \rho'_1$ .

Παρατηρήστε ότι η (2.5) εξαρτάται μόνο από τη μορφή της κατανομής (2.4) ή (2.6) ως συνάρτηση της  $\Gamma$ . Οι παράμετροι  $T$  και  $V$  μπορούν να μεταβάλλονται σε όλο τον όγκο αερίου.

Η αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας μπορεί επίσης να εκφραστεί με διαφορετικό τρόπο. Για να επιτευχθεί αυτό, θα εφαρμόσουμε όχι μόνο χρονική αντιστροφή αλλά και χωρική αναστροφή (spatial inversion), αλλάζοντας έτσι τα πρόσημα όλων των συντεταγμένων, αν τα μόρια δεν είναι αρκετά συμμετρικά, τότε γίνονται τα στερεοϊσομερή τους κατά την αντιστροφή, και δεν μπορούν να συμπίψουν με αυτά με καμία περιστροφή του μορίου συνολικά. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η αναστροφή θα σήμαινε την αντικατάσταση του αερίου από μια ουσιαστικά διαφορετική ουσία, και δεν θα μπορούσαν να εξαχθούν καινούρια συμπεράσματα που να αφορούν τις ιδιότητες τους. Αν, παρόλα αυτά, η συμμετρία του μορίου δεν επιτρέπει στερεοϊσομερισμό, το αέριο παραμένει το ίδιο κατά την αντιστροφή, και οι ποσότητες που περιγράφουν τις ιδιότητες ενός μακροσκοπικά ομοιογενούς αερίου πρέπει να παραμείνουν αμετάβλητες.

Ας υποθέσουμε πως  $\Gamma^{TP}$  υποδηλώνει ένα σύνολο από ποσότητες που παράγονται από το  $\Gamma$  με ταυτόχρονη χρονική και χωρική αντιστροφή. Η αντιστροφή αλλάζει το πρόσημο όλων των συνηθισμένων (πολικών) διανυσμάτων, συμπεριλαμβάνοντας και την ορμή  $p$ , αλλά αφήνει αμετάβλητα τα διανύσματα κατά τον άξονα, συμπεριλαμβάνοντας τη στροφορμή  $M$ . Συνειπώς, αν  $\Gamma = (p, M)$ , τότε  $\Gamma^{TP} = (p, -M)$ . Παράλληλα με την (2.3), έχουμε την εξίσωση

$$w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) = w(\Gamma^{TP}, \Gamma_1^{TP}; \Gamma'^{TP}, \Gamma_1'^{TP}). \quad (2.7)$$

Μεταβάσεις που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις  $w$  πάνω στις δυο πλευρές της (2.3) θεωρούνται αμοιβαία χρονικά αντιστραμμένες. Δεν είναι αυστηρά άμεσες (direct) και αντιστραμμένες (reverse) μεταβάσεις, αφού η  $\Gamma$  και η  $\Gamma^T$  δεν είναι το ίδιο. Για ένα μονοατομικό αέριο, παρόλα αυτά, η αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας επίσης μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με τις άμεσες και αντιστραμμένες μεταβάσεις. Εφόσον οι ποσότητες  $\Gamma$  εδώ είναι μόνο οι τρεις συνιστώσες ορμής του ατόμου, τότε  $\Gamma = \Gamma^{TP} = p$ , και από την (2.7) έχουμε

$$w(p', p'_1; p, p_1) = w(p, p_1; p', p'_1). \quad (2.8)$$

Αυτή είναι κυριολεκτικά λεπτομερής ισορροπία: κάθε μικροσκοπική διαδικασία σύγκρουσης εξισορροπείται από την αντίστροφη διαδικασία.

Η συνάρτηση  $w$  ικανοποιεί μια επιπλέον γενική σχέση η οποία δεν εξαρτάται από τη συμμετρία υπό συνθήκες χρονικής αντιστροφής, και που μπορεί να προέλθει ξεκάθαρα με κβαντομηχανικούς όρους, όπου οι μεταβάσεις θεωρείται ότι λαμβάνουν χώρα ανάμεσα στις καταστάσεις που σχηματίζουν μια διακριτή σειρά. Αυτές είναι καταστάσεις ενός ζεύγους μορίων που κινείται σε ένα δεδομένο πεπερασμένο όγκο. Τα πλάτη της πιθανότητας διαφόρων διαδικασιών σύγκρουσης σχηματίζουν μια μοναδιαία μήτρα, την μήτρα σκέδασης (scattering matrix) ή μήτρα σκέδασης  $S$  (S-matrix). Η μοναδιαία συνθήκη είναι  $\sum_n S_{ni}^* S_{nk} = \delta_{ik}$ , ή, σε άμεση μορφή με τους δείκτες των μητρών οι οποίοι δείχνουν τις διάφορες καταστάσεις,

$$\sum_n S_{in}^* S_{nk} = \sum_n S_{ni}^* S_{nk} = \delta_{ik}.$$

Ειδικότερα, όταν  $i = k$ ,

$$\sum_n |S_{ni}|^2 = 1.$$

Το τετράγωνο  $|S_{ni}|^2$  δίνει τη πιθανότητα μιας σύγκρουσης κατά τη μετάβαση  $i \rightarrow n$  και η παραπάνω εξίσωση είναι απλά η συνθήκη κανονικοποίησης για πιθανότητες: το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλες τις πιθανές μεταβάσεις από μια δεδομένη αρχική κατάσταση αποτελεί μονάδα (unity). Η συνθήκη μοναδικότητας μπορεί επίσης να γραφεί ως  $\sum_n S_{ni}^* S_{nk} = \delta_{ik}$ , με την αντίθετη σειρά των συντελεστών και  $\sum_n S_{ni} S_{nk}^* = \delta_{ik}$ , και όταν  $i = k$

$$\sum_n |S_{in}|^2 = 1,$$

ώστε το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλες τις πιθανές μεταβάσεις σε μια δεδομένη τελική κατάσταση να είναι μονάδα (unity). Αφαιρώντας από κάθε άθροισμα τον ένα όρο με  $n=i$  (μετάβαση χωρίς αλλαγή κατάστασης), μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_n' |S_{ni}|^2 = \sum_n' |S_{in}|^2.$$

Αυτή είναι η απαιτούμενη εξίσωση. Όσον αφορά στις συναρτήσεις  $w$ , αυτή γίνεται

$$\int w(\Gamma', \Gamma'_i; \Gamma, \Gamma_i) d\Gamma' d\Gamma'_i = \int w(\Gamma, \Gamma_i; \Gamma', \Gamma'_i) d\Gamma' d\Gamma'_i. \quad (2.9)$$

### **§3. Η εξίσωση μεταφοράς του Boltzmann (Boltzmann transport equation)**

Ας βρούμε τώρα τη βασική εξίσωση στη κινητική θεωρία των αερίων, η οποία ικανοποιείται από τη συνάρτηση κατανομής  $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$ .

Αν οι συγκρούσεις ανάμεσα στα μόρια ήταν τελείως αμελητέες, κάθε μόριο αερίου θα αποτελούσε ένα κλειστό υποσύστημα, και η εξίσωση κατανομής των μορίων θα υπάκουε στο θεώρημα του Liouville (Liouville's theorem), σύμφωνα με το οποίο

$$df/dt = 0; \quad (3.1)$$

Η ολική παράγωγος εδώ αντιστοιχεί σε διαφοροποίηση κατά μήκος της φασικής διαδρομής του μορίου, η οποία προσδιορίζεται από τις εξισώσεις κίνησης. Το θεώρημα του Liouville (Liouville's theorem) εφαρμόζεται σε μια συνάρτηση κατανομής η οποία προσδιορίζεται ως η πυκνότητα του φασικού χώρου (π.χ. στο χώρο των μεταβλητών που είναι κανονικώς συζυγείς γενικευμένες συντεταγμένες και ορμές. Αυτό βέβαια δεν εμποδίζει το ίδιο το  $f$  να εκφραστεί μεταγενέστερα ως μια οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή.



Αν δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο, οι ποσότητες  $\Gamma$  για ένα ελεύθερα κινούμενο μόριο παραμένουν σταθερές, και μόνο οι συντεταγμένες του,  $r$  μεταβάλλονται τότε έχουμε

$$df/dt = \partial f/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla f. \quad (3.2)$$

Από την άλλη πλευρά, αν το αέριο βρίσκεται π.χ. σε ένα εξωτερικό πεδίο  $U(r)$  το οποίο δρα πάνω στις συντεταγμένες του κέντρου μάζας του μορίου (ας πούμε ένα βαρυτικό πεδίο), τότε

$$df/dt = \partial f/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \partial f/\partial \mathbf{p}, \quad (3.3)$$

όπου  $\mathbf{F} = -\nabla U$  είναι η δύναμη που ασκείται πάνω στο μόριο από το πεδίο.

Όταν οι συγκρούσεις λαμβάνονται υπόψη, η (3.1) δεν ισχύει πλέον, και η συνάρτηση κατανομής δεν είναι πλέον σταθερή κατά μήκος των διαδρομών φάσης (phase paths). Αντί για την Εξ. (3.1), έχουμε

$$df/dt = C(f), \quad (3.4)$$

όπου το  $C(f)$  υποδηλώνει το ρυθμό αλλαγής της συνάρτησης κατανομής εξαιτίας των συγκρούσεων:  $dV/dt C(f)$  είναι η αλλαγή εξαιτίας των συγκρούσεων, ανά μονάδα χρόνου, του αριθμού των μορίων στο φασικό όγκο  $dV/d\Gamma$ . Η εξίσωση (3.4), με τη μορφή

$$\partial f/\partial t = -\mathbf{v} \cdot \nabla f + C(f),$$

όπου το  $df/dt$  το έχουμε πάρει από την Εξ. (3.2), μας δίνει την συνολική μεταβολή στη συνάρτηση κατανομής σε ένα συγκεκριμένο σημείο στο φασικό χώρο. Ο όρος  $dV/d\Gamma \cdot \mathbf{v} \cdot \nabla f$  είναι η μείωση ανά μονάδα χρόνου του αριθμού των μορίων σε αυτό το στοιχειώδη φασικό χώρο εξαιτίας της ελεύθερης κίνησης τους.

Η ποσότητα  $C(f)$  ονομάζεται το ολοκλήρωμα σύγκρουσης (collision integral), και οι εξισώσεις της μορφής της Εξ. (3.4) αναφέρονται ως εξισώσεις μεταφοράς (transport equations). Φυσικά, η εξίσωση μεταφοράς αποκτά νόημα μόνο αν η μορφή της σύγκρουσης έχει εξακριβωθεί. Θα συζητήσουμε τώρα αυτό το θέμα.

Όταν δυο μόρια συγκρούονται, οι τιμές τους όσο αφορά στη  $\Gamma$  αλλάζουν. Συνεπώς κάθε σύγκρουση που θα υποστεί ένα μόριο θα το μεταφέρει έξω από μια συγκεκριμένη περιοχή  $d\Gamma$ , τέτοιες συγκρούσεις αναφέρονται ως 'απώλειες'. Ο συνολικός αριθμός των συγκρούσεων  $\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1$ , με όλες τις πιθανές τιμές των  $\Gamma_1, \Gamma'_1$ , και τη δεδομένη  $\Gamma$ , που συμβαίνουν σε ένα όγκο  $dV$  ανά μονάδα χρόνου, ισούται με το ολοκλήρωμα

$$dV d\Gamma \int w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1.$$

Υπάρχουν επίσης συγκρούσεις ('κέρδη' - "gains") οι οποίες φέρνουν μέσα στη περιοχή  $d\Gamma$  μόρια τα οποία αρχικά είχαν τιμές έξω από αυτή τη περιοχή. Αυτές είναι οι συγκρούσεις  $\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma_1'$ , ξανά με με όλες τις πιθανές  $\Gamma_1, \Gamma_1'$ , και τη δεδομένη  $\Gamma$ . Ο συνολικός αριθμός τέτοιων συγκρούσεων στον όγκο  $dV$  ανά μονάδα χρόνου είναι

$$dV d\Gamma \int w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma_1') f' f_1' d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma_1'.$$

Αφαιρώντας τις απώλειες από τα κέρδη, βρίσκουμε ότι σαν αποτέλεσμα όλων των συγκρούσεων ο σχετικός αριθμός των μορίων αυξάνεται, ανά μονάδα χρόνου, κατά

$$dV d\Gamma \int (w' f' f_1' - w f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma_1',$$

όπου για συντομία

$$w \equiv w(\Gamma', \Gamma_1'; \Gamma, \Gamma_1), \quad w' \equiv w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma_1'). \quad (3.5)$$

Έτσι λοιπόν παίρνουμε την παρακάτω έκφραση για το ολοκλήρωμα σύγκρουσης (collision integral):

$$C(f) = \int (w' f' f_1' - w f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma_1'. \quad (3.6)$$

Στο δεύτερο όρο στη συνάρτηση, η ολοκλήρωση κατά  $d\Gamma' d\Gamma_1'$  συσχετίζεται μόνο με το  $w$ , μιας και η  $f$  και η  $f_1$ , δεν εξαρτώνται από τέτοιες μεταβλητές. Αυτό το μέρος του ολοκληρώματος μπορεί επομένως να μετατραπεί μέσω της σχέσης μοναδικότητας (unitarity relation) (2.9). Το ολοκλήρωμα σύγκρουσης τότε γίνεται

$$C(f) = \int w'(f' f_1' - f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma_1', \quad (3.7)$$

όπου και οι δυο όροι έχουν το συντελεστή  $w'$ .

Έχοντας εξακριβώσει τη μορφή του ολοκληρώματος σύγκρουσης, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση μεταφοράς ως

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \int w'(f' f_1' - f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma_1'. \quad (3.8)$$

Αυτή η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση ονομάζεται επίσης η εξίσωση Boltzmann (Boltzmann equation): πρωτοανακαλύφθηκε από τον Ludwig Boltzmann, τον ιδρυτή της κινητικής θεωρίας, το 1872.

Η στατιστική κατανομή ισορροπίας πρέπει να ικανοποιεί με τον ίδιο τρόπο την εξίσωση μεταφοράς. Όντως, αυτή η συνθήκη ικανοποιείται. Η κατανομή ισορροπίας είναι στατική και (εφόσον δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο) ομοιόμορφη. Το αριστερό μέρος της Εξ. (3.8) είναι συνεπώς παρομοίως μηδέν. Το ολοκλήρωμα σύγκρουσης είναι επίσης μηδέν, αφού η συνάρτηση εξαφανίζεται μέσω της Εξ. (2.5). Έτσι η κατανομή ισορροπίας για ένα αέριο σε ένα εξωτερικό πεδίο ικανοποιεί τη συνάρτηση μεταφοράς, όντως. Χρειάζεται μόνο να θυμόμαστε ότι το αριστερό μέρος της συνάρτησης μεταφοράς είναι η συνολική παράγωγος  $df/dt$ , η οποία είναι παρομοίως μηδέν για κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία

εξαρτάται μόνο από ολοκληρώματα της κίνησης· και η κατανομή ισορροπίας εκφράζεται αποκλειστικά με όρους της συνολικής ενέργειας  $\epsilon(\Gamma)$  του μορίου, η οποία είναι ολοκλήρωμα της κίνησης.

Στο παραπάνω παράγωγο της εξίσωσης μεταφοράς, οι συγκρούσεις θεωρήθηκαν βασικά ως στιγμιαίες και ότι έγιναν σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου. Είναι λοιπόν ξεκάθαρο ότι η εξίσωση μας επιτρέπει στη θεωρία να ακολουθήσουμε τη διακύμανση της συνάρτησης κατανομής μόνο για χρόνους μεγάλους σε σχέση με τη διάρκεια των συγκρούσεων, και για αποστάσεις αρκετά μεγάλες σε σχέση με το μέγεθος της περιοχής στην οποία λαμβάνει χώρα μια σύγκρουση. Αυτές οι αποστάσεις είναι της τάξης της περιοχής δράσης  $d$  των μοριακών δυνάμεων (και για ουδέτερα μόρια, αυτό ισούται με τις διαστάσεις τους)· ο χρόνος σύγκρουσης είναι της τάξης του  $d/v$ . Τέτοιες τιμές δίνουν το κατώτερο όριο αποστάσεων και χρόνων που μπορούν να διαχειρισθούν μέσω της εξίσωσης μεταφοράς· η προέλευση αυτών των περιορισμών θα συζητηθούν στην ενότητα § 16. Στη πράξη, παράλαυτά, της υπάρχει συνήθως ανάγκη (και καμμία δυνατότητα) για μια τόσο λεπτομερή ανάλυση της συμπεριφοράς του συστήματος, η οποία θα απαιτούσε, ιδιαιτέρως, τον προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών (συντεταγμένες και ταχύτητες των μορίων του αερίου) με την ίδια ακρίβεια, η οποία είναι ανεφάρμοστη. Σε πραγματικά προβλήματα φυσικής, υπάρχουν χαρακτηριστικά μήκη  $L$  και χρόνοι  $T$  που επιβάλλονται στο σύστημα από τις συνθήκες του προβλήματος (χαρακτηριστικά μήκη κλίσεως (gradient lengths) για τις μακροσκοπικές ιδιότητες του αερίου, μήκη κύματος και περίοδοι κυμάτων ήχου που διαδίδονται μέσα σε αυτό, και ου το καθεξής). Αρκεί λοιπόν να ακολουθήσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος για αποστάσεις και χρόνους μικρούς σε σύγκριση με αυτά τα  $L$  και  $T$ . Με άλλα λόγια, τα φυσικά απειροελάχιστα στοιχεία όγκου και χρόνου πρέπει να είναι μικρά μόνο σε σχέση με τα  $L$  και  $T$ . Από τις αρχικές καταστάσεις του προβλήματος βγάζουμε το μέσο όρο τους για τέτοια στοιχεία.

Για ένα μονοατομικό αέριο, οι ποσότητες  $\Gamma$  μειώνονται στις τρεις συνιστώσες της ορμής  $p$ , και από την Εξ. (2.8) οι συναρτήσεις  $w'$  στο ολοκλήρωμα σύγκρουσης μπορούν να αντικατασταθούν με  $w = w'(p', p, p_1)$ . Τότε, εκφράζοντας αυτή τη συνάρτηση όσον αφορά τη διαφορική ενεργό διατομή (differential collision cross-section)  $d\sigma$  προς  $w d^3 p' d^3 p_1 = u_{rel} d\sigma$  (όπου  $u_{rel} = |v-v_1|$ ). Βλέπε (2.2)), βρίσκουμε

$$C(f) = \int v_{rel}(f'f'_1 - ff_1) d\sigma d^3 p_1. \quad (3.9)$$

Η συνάρτηση  $w$ , και επομένως η ενεργός διατομή  $d\sigma$  που προσδιορίζεται από την Εξ. (2.2), περιέχει παράγοντες συνάρτησης δέλτα (delta-function factors) οι οποίοι εκφράζουν τους νόμους διατήρησης για την ορμή και την ενέργεια, και εξαιτίας αυτών οι μεταβλητές  $p'$  και  $p_1$  (για μια δεδομένη  $p$ ) δεν είναι στη πραγματικότητα ανεξάρτητες. Παρόλα αυτά, όταν το ολοκλήρωμα σύγκρουσης εκφράζεται με τη μορφή της Εξ.(3.9), μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτές οι συναρτήσεις δέλτα έχουν απομακρυνθεί με κατάλληλες ολοκληρώσεις. Τότε η  $d\sigma$  θα είναι η συνηθισμένη διατομή σκέδασης (scattering cross-section), και εξαρτάται μόνο από την (για ένα δεδομένο  $u_{rel}$ ) γωνία σκέδασης.

Για να το δούμε από την ποιοτική πλευρά των φαινομένων μεταφοράς στα αέρια, το ολοκλήρωμα σύγκρουσης υπολογίζεται πρόχειρα μέσω της μέσης ελεύθερης διαδρομής, η μέση απόσταση που διανύεται από ένα μόριο ανάμεσα σε δυο διαδοχικές συγκρούσεις. Έχει βέβαια, μόνο ποιοτική σημασία· ακόμα και ο προσδιορισμός του ποικίλει σύμφωνα με το ποιο φαινόμενο μεταφοράς εξετάζεται.

Η μέση ελεύθερη διαδρομή μπορεί να εκφραστεί μέσω της ενεργούς διατομής σύγκρουσης  $\sigma$  και την αριθμητική πυκνότητα  $N$  των μορίων στο αέριο. Αν ένα μόριο κινηθεί σε μια μοναδιαία απόσταση της τροχιά του, συγκρούεται με μόρια τα οποία βρίσκονται σε ένα όγκο  $\sigma$  (εκείνο του κυλίνδρου με εμβαδό ενεργούς διατομής  $\sigma$  και μοναδιαίο μήκος (unit length)), ο αριθμός των οποίων είναι  $\sigma N$ .

Συνεπώς

$$l \sim 1/N\sigma. \quad (3.10)$$

Η ενεργός διατομή σύγκρουσης  $\sigma \sim d^2$ , όπου  $d$  είναι η διάσταση του μορίου. Με  $N \sim 1/d^3$ , όπου είναι η μέση απόσταση ανάμεσα στα μόρια, βρίσκουμε

$$l \sim \bar{v}(\bar{v}/d)^2 = d(\bar{v}/d)^3. \quad (3.11)$$

Εφόσον σε ένα αέριο  $l \gg d$ , τότε η μέση ελεύθερη διαδρομή (mean free path)  $l \gg d$ .

Ο λόγος  $\tau \sim l/\bar{v}$  ονομάζεται μέσος ελεύθερος χρόνος (mean free time). Για μια πρόχειρη εκτίμηση της σύγκρουσης, μπορούμε να βάλουμε

$$C(f) \sim - (f - f_0)/\tau \sim - (\bar{v}/l)(f - f_0). \quad (3.12)$$

Γράφοντας τη διαφορά  $f - f_0$  στον αριθμητή έχουμε λάβει υπόψη το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα σύγκρουσης είναι μηδέν για τη συνάρτηση κατανομής ισορροπίας. Το αρνητικό πρόσημο στην (3.12) εκφράζει το γεγονός ότι οι συγκρούσεις είναι ο μηχανισμός για να φτάσουμε σε στατιστική ισορροπία, π.χ. τείνουν να μειώσουν την απόκλιση της συνάρτησης κατανομής από τη μορφή ισορροπίας της. Με αυτή την έννοια, το  $\tau$  δρα σαν χρόνος χαλάρωσης (relaxation time) για να επιτευχθεί ισορροπία σε κάθε στοιχειώδη όγκο του αερίου.

#### **§4. Το θεώρημα H (The H theorem)**

Ένα αέριο που έχει αφεθεί μόνο του, όπως κάθε κλειστό μακροσκοπικό σύστημα, θα τείνει να φτάσει σε μια κατάσταση ισορροπίας. Ανάλογα, η χρονική μεταβολή μιας συνάρτησης κατανομής μη ισορροπίας (non-equilibrium distribution function) σε συμφωνία με την εξίσωση μεταφοράς πρέπει να συνοδεύεται από αύξηση της εντροπίας του αερίου. Θα δείξουμε ότι αυτό συμβαίνει στη πραγματικότητα.

Η εντροπία ενός ιδανικού αερίου σε μια μη ισορροπημένη μακροσκοπική κατάσταση που περιγράφεται από μια συνάρτηση κατανομής  $f$ , είναι

$$S = \int f \log(ef) dV d\Gamma; \quad (4.1)$$

Διαφοροποιώντας αυτή την έκφραση ως προς τον χρόνο, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \int \frac{\partial}{\partial t} \left( f \log \frac{e}{f} \right) dV d\Gamma \\ &= - \int \log f \frac{\partial f}{\partial t} dV d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Μιας και η επίτευξη στατιστικής ισορροπίας σε ένα αέριο επιφέρεται λόγω των συγκρούσεων ανάμεσα στα μόρια, η αύξηση της εντροπίας πρέπει να προέλθει από το συγκρουσιακό μέρος της μεταβολής στη συνάρτηση κατανομής. Η μεταβολή σε αυτή τη συνάρτηση εξαιτίας της ελεύθερης κίνησης των μορίων, από την άλλη πλευρά, δεν μπορεί να προκαλέσει αλλαγή στην εντροπία του αερίου, μιας και αυτό το μέρος της μεταβολής στη συνάρτηση μεταφοράς δίνεται (για ένα αέριο που βρίσκεται σε ένα εξωτερικό πεδίο  $U(r)$ ) από τους δυο πρώτους όρους στο δεξιό μέρος της εξίσωσης

$$\partial f / \partial t = - \mathbf{v} \cdot \nabla f - \mathbf{F} \cdot \partial f / \partial \mathbf{p} + C(f).$$

Η συνεισφορά τους στη παράγωγο  $dS/dt$  είναι

$$- \int \log f [- \mathbf{v} \cdot \partial f / \partial \mathbf{r} - \mathbf{F} \cdot \partial f / \partial \mathbf{p}] dV d\Gamma = \int [\mathbf{v} \cdot \partial / \partial \mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \partial / \partial \mathbf{p}] (f \log f / e) dV d\Gamma.$$

Το ολοκλήρωμα ως προς  $dV$  του όρου που εμπεριέχει τη παράγωγο  $\partial / \partial \mathbf{r}$  μετατρέπεται μέσω του Γκαουσιανού θεωρήματος σε ολοκλήρωμα επιφανείας. Δίνει μηδέν κατά την ολοκλήρωση ως προς το συνολικό όγκο του αερίου, αφού  $f=0$  έξω από τη περιοχή που καταλαμβάνεται από το αέριο. Ομοίως, ο όρος που περιλαμβάνει τη παράγωγο  $\partial / \partial \mathbf{p}$ , κατά την ολοκλήρωση ως προς  $d^3p$ , γίνεται ένα ολοκλήρωμα ως προς μια απείρως μακρινή επιφάνεια στο χώρο ορμής, και παρομοίως δίνει μηδέν.

Η αλλαγή της εντροπίας εκφράζεται συνεπώς από την

$$dS/dt = - \int \log f \cdot C(f) d\Gamma dV. \quad (4.3)$$

Αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να μεταμορφωθεί μέσω μιας διάταξης, προκειμένου να την χρησιμοποιήσουμε και αργότερα σε άλλες εφαρμογές, την οποία θα σχηματίσουμε για το γενικό ολοκλήρωμα  $\int \varphi(\Gamma) C(f) d\Gamma$ , όπου  $\varphi(\Gamma)$  είναι η συνάρτηση των ποσοτήτων  $\Gamma$ . Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα σύγκρουσης με τη μορφή (3.6) μπορούμε να γράψουμε

$$\int \varphi(\Gamma) C(f) d\Gamma = \int \varphi_w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d^4\Gamma - \int \varphi_w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d^4\Gamma,$$

όπου για συντομία  $d^4\Gamma = d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1$ . Αφού η ολοκλήρωση εδώ γίνεται ως προς τις μεταβλητές  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma', \Gamma'_1$ , μπορούμε, χωρίς να μεταβάλλουμε το ολοκλήρωμα, να μετονομάσουμε τις μεταβλητές με οποιοδήποτε τρόπο. Εναλλάσσοντας τις  $\Gamma, \Gamma_1$ , και  $\Gamma', \Gamma'_1$ . Στο δεύτερο ολοκλήρωμα, βρίσκουμε

$$\int \varphi(\Gamma) C(f) d\Gamma = \int (\varphi - \varphi') w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d^4\Gamma$$

Εναλλάσσοντας εδώ τις  $\Gamma, \Gamma'$ , και  $\Gamma_1, \Gamma'_1$ , παίρνοντας το μισό άθροισμα των ολοκληρωμάτων που είχαμε καταλήξει, και παρατηρώντας τη ξεκάθαρη συμμετρία του  $w$  σε σχέση με τα δυο συγκρουόμενα σωματίδια, καταλήγουμε στο κανόνα μετασχηματισμού

$$\int \varphi(\Gamma) C(f) d\Gamma = \frac{1}{2} \int (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) w' f' f'_1 d^4\Gamma. \quad (4.4)$$

Πιο συγκεκριμένα,  $\int C(f) d\Gamma = 0$ : και με την  $C(f)$  εδώ με τη μορφή (3.7), παίρνουμε

$$\int C(f) d\Gamma = \int w'(f' f'_1 - f f_1) d^4\Gamma = 0. \quad (4.5)$$

Εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα (4.3), ο κανόνας (4.4) δίνει

$$\begin{aligned} dS/dt &= \frac{1}{2} \int w' f' f'_1 \log(f' f'_1 / f f_1) d^4\Gamma dV \\ &= \frac{1}{2} \int w' f f_1 x \log x d^4\Gamma dV, \end{aligned}$$

όπου  $x = f' f'_1 / f f_1$ . Αφαιρώντας από την εξίσωση μισό από το μηδενικό ολοκλήρωμα (4.5), παίρνουμε

$$dS/dt = \frac{1}{2} \int w' f f_1 (x \log x - x + 1) d^4\Gamma dV. \quad (4.6)$$

Η συνάρτηση στις παρενθέσεις μέσα στη συνάρτηση είναι μη αρνητική για όλα τα  $x > 0$ : είναι μηδέν όταν  $x = 1$ , και αυξάνεται σε κάθε πλευρά εκείνου του σημείου. Εξ ορισμού, οι παράγοντες  $w', f$  και  $f_1$  στη συνάρτηση είναι επίσης θετικοί. Έτσι λοιπόν παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα,

$$dS/dt \geq 0, \quad (4.7)$$

Εκφράζοντας το νόμο της αύξησης της εντροπίας η ισότητα συμβαίνει στην ισορροπία.

Παρατηρήστε ότι, αφού η συνάρτηση (integrand) στην (4.6) (και επομένως στην (4.3)) είναι μη αρνητική, όχι μόνο το συνολικό ολοκλήρωμα (4.3) ως προς  $d\Gamma dV$  αλλά και επίσης αυτό ως προς  $d\Gamma$  μόνο του είναι θετικό. Συνεπώς, οι συγκρούσεις αυξάνουν την εντροπία σε κάθε στοιχείο όγκου του αερίου. Αυτό βέβαια δεν υπονοεί ότι η εντροπία από μόνη της αυξάνει σε κάθε στοιχείο όγκου, αφού μπορεί να μεταφερθεί από τη μια περιοχή στην άλλη με την ελεύθερη κίνηση των μορίων.

### **§5. Η αλλαγή σε μακροσκοπικές εξισώσεις**

Η εξίσωση μεταφοράς του Boltzmann δίνει μια μικροσκοπική περιγραφή του τρόπου με τον οποίο διαφέρει η κατάσταση ενός αερίου με χρόνο. Θα δείξουμε πως η εξίσωση μεταφοράς μπορεί να μετατραπεί σε συνηθισμένες εξισώσεις στη μηχανική των ρευστών, οι οποίες δίνουν μια λιγότερο αναλυτική μακροσκοπική περιγραφή αυτής της χρονικής διακύμανσης. Η περιγραφή ισχύει όταν οι μακροσκοπικές ιδιότητες του αερίου (θερμοκρασία, πυκνότητα, ταχύτητα, κ.τ.λ.) μεταβάλλονται αρκετά αργά στον όγκο του: οι αποστάσεις  $L$  κατά τις οποίες αλλάζουν αισθητά πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερες από τη μέση ελεύθερη διαδρομή  $l$  των μορίων.

Έχει ήδη αναφερθεί ότι το ολοκλήρωμα

$$N(t, \mathbf{r}) = \int f(t, \mathbf{r}, \Gamma) d\Gamma \quad (5.1)$$

είναι η πυκνότητα της χωρητικής κατανομής των μορίων του αερίου το γινόμενο  $\rho = mN$  αποτελεί αντίστοιχα τη πυκνότητα μάζας του αερίου. Η μακροσκοπική ταχύτητα του αερίου είναι που υποδηλώνεται με  $\mathbf{V}$  (σε αντίθεση με τις μικροσκοπικές ταχύτητες  $\mathbf{v}$  των μορίων).

Ορίζεται ως η μέση

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \int \mathbf{v} f d\Gamma. \quad (5.2)$$

Οι συγκρούσεις δεν αλλοιώνουν ούτε τον αριθμό των συγκρουόμενων σωματιδίων ούτε την συνολική τους ενέργεια και ορμή. Είναι συνεπώς ξεκάθαρο ότι το συγκρουσιακό μέρος της αλλαγής στη συνάρτηση κατανομής επίσης δεν μπορεί να επηρεάσει τις μακροσκοπικές ποσότητες σε κάθε στοιχειώδη όγκο του αερίου—την πυκνότητα του, την εσωτερική του ενέργεια, και την μακροσκοπική του ταχύτητα  $\mathbf{V}$ : τα συγκρουσιακά μέρη της αλλαγής στον συνολικό αριθμό, η ενέργεια και η ορμή των μορίων στη μονάδα όγκου του αερίου δίνονται από τα μηδενικά ολοκληρώματα

$$\int C(f) d\Gamma = 0, \quad \int \epsilon C(f) d\Gamma = 0, \quad \int \mathbf{p} C(f) d\Gamma = 0. \quad (5.3)$$

Αυτές οι εξισώσεις παράγονται εύκολα με την εφαρμογή, του μετασχηματισμού (4.4) με  $\phi = 1$ , και  $\mathbf{p}$  αντίστοιχα, στα ολοκληρώματα το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ομοίως μηδέν, τα άλλα δυο είναι μηδέν εξαιτίας της διατήρησης της ενέργειας και της ορμής στις συγκρούσεις. Ας πάρουμε τώρα τις εξισώσεις μεταφοράς

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha f) = C(f) \quad (5.4)$$

και τις ολοκληρώσουμε ως προς  $d\Gamma$  αφού πρώτα τις πολλαπλασιάσουμε με  $m$ ,  $\rho_\beta$  ή  $\epsilon$ . Σε κάθε περίπτωση, το δεξιό μέρος της είναι μηδέν, και έχουμε τις εξισώσεις

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } \rho \mathbf{V} = 0, \quad (5.5)$$

$$\partial (\rho V_\alpha) / \partial t + \partial \Pi_{\alpha\beta} / \partial x_\beta = 0, \quad (5.6)$$

$$\partial (N\bar{\epsilon}) / \partial t + \text{div } \mathbf{q} = 0. \quad (5.7)$$

Η πρώτη από αυτές είναι η συνηθισμένη εξίσωση συνέχειας της μηχανικής των ρευστών, που εκφράζει τη διατήρηση της μάζας του αερίου. Η δεύτερη εξίσωση εκφράζει τη διατήρηση της ορμής. Ο τανυστής  $\Pi_{\alpha\beta}$  καθορίζεται ως

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int m v_\alpha v_\beta f d\Gamma \quad (5.8)$$

και είναι ο τανυστής ρευστότητας ορμής. Η συνιστώσα του  $\Pi_{\alpha\beta}$  είναι η  $\alpha$ -συνιστώσα της ορμής που μεταφέρεται στη μονάδα χρόνου από μόρια που βρίσκονται σε μια μονάδα περιοχής κάθετη στον  $x_\beta$  άξονα. Τέλος, η (5.7) είναι η εξίσωση της διατήρησης της ενέργειας. Το διάνυσμα  $\mathbf{q}$  καθορίζεται ως

$$\mathbf{q} = \int \epsilon \mathbf{v} f d\Gamma, \quad (5.9)$$

και είναι η ροή ενέργειας στο αέριο

Παρόλα αυτά, για να ελαχιστοποιήσουμε τις Εξ. (5.6) και (5.7) στις συνήθεις εξισώσεις της μηχανικής των ρευστών, πρέπει ακόμα να εκφράσουμε το  $\Pi_{\alpha\beta}$  και το  $\mathbf{q}$  ως μακροσκοπικές ποσότητες. Έχει ήδη αναφερθεί ότι η μακροσκοπική περιγραφή του αερίου προϋποθέτει αρκετά μικρές κλίσεις των μακροσκοπικών του ιδιοτήτων. Τότε μπορούμε να υποθέσουμε, ως αρχική προσέγγιση, ότι η θερμοκρασία ισορροπίας επέρχεται σε κάθε ξεχωριστή περιοχή του αερίου, ενώ το αέριο ως σύνολο δεν βρίσκεται σε ισορροπία. Συνεπώς η συνάρτηση κατανομής  $f$  σε κάθε στοιχειώδη όγκο θεωρείται ότι είναι μια συνάρτηση τοπικής ισορροπίας, ίση με τη συνάρτηση ισορροπίας  $f_0$  για τη πυκνότητα, την θερμοκρασία και την μακροσκοπική ταχύτητα που κυριαρχούν σε εκείνο το στοιχειώδη όγκο. Αυτή η προσέγγιση δείχνει την παράβλεψη όλων των διαδικασιών που προκαλούν εξασθένηση (ιξώδες και θερμική αγωγιμότητα) μέσα στο αέριο. Οι εξισώσεις (5.6) και (5.7) τότε φυσικά ελαχιστοποιούνται σε αυτές των ιδανικών ρευστών· αυτό αποδεικνύεται παρακάτω.

Η συνάρτηση ισορροπίας σε μια περιοχή του αερίου η οποία κινείται συνολικά με ταχύτητα  $\mathbf{V}$  διαφέρει από εκείνη ενός αερίου σε κατάσταση ηρεμίας μόνο κατά ένα Γαλιλαιανό μετασχηματισμό. Αλλάζοντας σε ένα πλαίσιο αναφοράς  $K'$  το οποίο κινείται με το αέριο, παίρνουμε την συνήθη



κατανομή Boltzmann. Οι ταχύτητες  $v'$  των μορίων σε αυτό το πλαίσιο σχετίζονται με εκείνες στο αρχικό πλαίσιο  $K$  κατά  $v = v' + V$ . Γράφουμε

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha\beta} &= mN \langle v_\alpha v_\beta \rangle \\ &= mN \langle (V_\alpha + v'_\alpha)(V_\beta + v'_\beta) \rangle \\ &= mN (V_\alpha V_\beta + \langle v'_\alpha v'_\beta \rangle);\end{aligned}$$

Οι μέσοι όροι των όρων  $V_\alpha v'_\beta$  και  $V_\beta v'_\alpha$  ως προς τις διευθύνσεις των  $v'$  δίνουν μηδέν, αφού όλες οι διευθύνσεις της ταχύτητας ενός μορίου στο πλαίσιο  $K'$  είναι εξ ίσου πιθανές. Για τον ίδιο λόγο,

$$\langle v'_\alpha v'_\beta \rangle = \frac{1}{3} \langle v'^2 \rangle \delta_{\alpha\beta}; \quad (5.10)$$

Η μέση τετραγωνική θερμική ταχύτητα είναι  $\langle v'^2 \rangle = 3T/m$ , όπου  $T$  είναι η θερμοκρασία του αερίου. Τελικά,  $m \langle v'_\alpha v'_\beta \rangle$  και η  $NT$  ισούται με την πίεση του αερίου  $P$ , βρίσκουμε

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta + \delta_{\alpha\beta} P, \quad (5.11)$$

την γνωστή έκφραση για τον τανυστή ροής ορμής σε ένα ιδανικό ρευστό. Με αυτόν τον τανυστή, η (5.6) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση του Euler στη μηχανική των ρευστών. Για να μετασχηματίσουμε το ολοκλήρωμα (5.9), σημειώνουμε ότι η ενέργεια  $\epsilon$  ενός μορίου στο πλαίσιο  $K$  έχει σχέση με την ενέργειά του  $\epsilon'$  στο πλαίσιο  $K'$  μέσω της σχέσης

$$\epsilon = \epsilon' + m \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}' + \frac{1}{2} m V^2.$$

Αντικαθιστώντας αυτή και  $v = v' + V$  στην  $q = \dots$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned}q &= N \mathbf{V} \left[ \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{3} m \overline{v'^2} + \overline{\epsilon'} \right] \\ &= \mathbf{V} \left( \frac{1}{2} \rho V^2 + P + N \overline{\epsilon'} \right),\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (5.10) για να βγάλουμε το μέσο όρο του γινομένου  $v'(V, v')$ . Αλλά η  $\overline{\epsilon'}$  είναι η εσωτερική θερμοδυναμική ενέργεια του αερίου ανά μονάδα όγκου το άθροισμα  $\overline{\epsilon'}$  +  $P$  είναι η συνάρτηση θερμότητας  $W$  του αερίου ανά μονάδα όγκου. Συνεπώς

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} \left( \frac{1}{2} \rho V^2 + W \right), \quad (5.12)$$

που συμφωνεί με τη γνωστή έκφραση για την ροή ενέργειας από τη ρευστοδυναμική ιδανικών ρευστών.

Τέλος, ας λάβουμε υπόψη τον νόμο της διατήρησης της στροφορμής στην εξίσωση μεταφοράς. Αυτός ο νόμος πρέπει να έχει εφαρμογή ακριβώς μόνο στο στη συνολική στροφορμή του αερίου, η οποία αποτελείται από τις τροχιακές στροφορμές των μορίων στη μεταφραζόμενη κίνησή τους και τις εσωτερικές περιστροφικές στροφορμές  $M$ . Η συνολική πυκνότητα στροφορμής δίνεται από το άθροισμα

$$\int \mathbf{r} \times \mathbf{p} f d\Gamma + \int \mathbf{M} f d\Gamma. \quad (5.13)$$

Αυτοί οι δυο όροι, παρόλα αυτά, έχουν διαφορετικές τάξεις μεγέθους. Η περιστροφική στροφορμή της σχετικής κίνησης δυο μορίων που απέχουν μεταξύ τους μια μέση απόσταση είναι της τάξης του  $m$ , αλλά η εσωτερική στροφορμή είναι  $M \sim m d$ , η οποία είναι μικρή σχετικά, μιας και πάντα έχουμε  $d \ll \lambda$ .

Φυσικά, κατά συνέπεια, η εξίσωση μεταφοράς του Boltzmann, η οποία αντιστοιχεί στο πρώτη μη εξαφανιζόμενη προσέγγιση σχετικά με την μικρή ποσότητα  $d/\lambda$ , δεν μπορεί να λάβει υπόψη τις μικρές αλλαγές στην τροχιακή στροφορμή εξαιτίας της ανταλλαγής που γίνεται ανάμεσα στα δυο μέρη της συνολικής στροφορμής (5.13). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η εξίσωση του Boltzmann να διατηρεί τη συνολική τροχιακή στροφορμή του αερίου: η εξίσωση  $\int \mathbf{p} \cdot \mathbf{C}(f) d\Gamma = 0$  η οποία εκφράζει τη διατήρηση της ορμής η αναγκαία υπονοεί ότι

$$\int \mathbf{r} \times \mathbf{p} C(f) d\Gamma = \mathbf{r} \times \int \mathbf{p} C(f) d\Gamma = 0. \quad (5.14)$$

Ο λόγος για αυτή την ιδιότητα είναι προφανής: μιας και, στην εξίσωση Boltzmann, οι συγκρούσεις θεωρούνται ότι συμβαίνουν σε ένα σημείο, το σύνολο των τροχιακών στροφορμών των συγκρουόμενων μορίων διατηρείται, καθώς και το σύνολο των ορμών τους. Για να παραγάγουμε μια εξίσωση για την αλλαγή της τροχιακής στροφορμής, θα ήταν απαραίτητο να λάβουμε υπόψη όλους της επόμενης μεγαλύτερης τάξης στην  $d/\lambda$ , που προκύπτει από το γεγονός ότι η απόσταση μεταξύ των μορίων είναι περασμένη την στιγμή της σύγκρουσης.

Παρόλα αυτά, η πραγματική διαδικασία ανταλλαγής στροφορμής ανάμεσα στους μεταφραζόμενους και περιστροφικούς δεσμούς ελευθερίας μπορεί να περιγραφεί μέσω της εξίσωσης Boltzmann από μια σχέση της μορφής

$$d\mathcal{M}/dt = \int \mathbf{M} C(f) d\Gamma, \quad (5.15)$$

όπου η  $\mathcal{M}$  είναι η πυκνότητα εσωτερικής στροφορμής των μορίων. Αφού το άθροισμα των εσωτερικών στροφορμών των δυο μορίων δεν είναι απαραίτητο να διατηρείται σε μια

σύγκρουση, το ολοκλήρωμα στα αριστερά της (5.15) γενικά δεν είναι μηδέν, και δίνει το ρυθμό αλλαγής της  $\mathcal{M}$ . Αν η μη μηδενική πυκνότητα στροφορμής δημιουργείται στο αέριο μέσω κάποιου τρόπου, η επακόλουθη της χαλάρωση περιγράφεται από την (5.15).

### **§6 Η συνάρτηση μεταφοράς για ένα ελαφρώς ανομοιογενές αέριο**

Για να λάβουμε υπόψη τις διαδικασίες που προκαλούν εξασθένηση (ιξώδες και θερμική αγωγιμότητα) σε ένα ελαφρά ανομοιογενές αέριο, πρέπει να πάμε στην επόμενη προσέγγιση πέρα από αυτή που χρησιμοποιείται στην § 5. Αντί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση κατανομής σε κάθε περιοχή του αερίου ως απλά μια συνάρτηση τοπικής ισορροπίας  $f_0$ , θα επιτρέψουμε μια ελαφριά απόκλιση της  $f$  από την  $f_0$ , θέτοντας

$$f = f_0 + \delta f, \quad \delta f = -(\partial f_0 / \partial \epsilon) \chi(\Gamma) = f_0 \chi / T, \quad (6.1)$$

Όπου η  $\delta f$  είναι μια μικρή διόρθωση ( $\ll f_0$ ). Η τελευταία αντιπροσωπεύεται στο παραπάνω τύπο για λόγους ευκολίας, από τον παράγοντα  $\partial f_0 / \partial \epsilon$  ξεχωριστά. Για την κατανομή Boltzmann, αυτή η παράγωγος διαφέρει από την ίδια την  $f_0$  μόνο κατά ένα συντελεστή  $1 / T$ . Η διόρθωση  $\delta f$  πρέπει θεωρητικά να προσδιοριστεί λύνοντας την εξίσωση μεταφοράς γραμμικοποιημένη σε σχέση με την διόρθωση.

Η συνάρτηση  $\chi$  πρέπει να ικανοποιεί όχι μόνο την ίδια την εξίσωση μεταφοράς αλλά και συγκεκριμένες επιπρόσθετες συνθήκες. Ο λόγος είναι ότι η  $f_0$  είναι η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας που αντιστοιχεί σε δεδομένες τιμές (μέσα στο υπό ενδιαφέρον στοιχείο όγκου) του αριθμού των σωματιδίων του αερίου, ενέργεια και πυκνότητες ενέργειας και ορμής, π.χ. σε δεδομένες τιμές των ολοκληρωμάτων

$$\int f_0 d\Gamma, \quad \int \epsilon f_0 d\Gamma, \quad \int \mathbf{p} f_0 d\Gamma. \quad (6.2)$$

Η συνάρτηση κατανομής στη μη ισορροπία (6.1) πρέπει να δώσει τις ίδιες τιμές αυτών των ποσοτήτων, π.χ. τα ολοκληρώματα με την  $f$  και την  $f_0$  πρέπει να είναι τα ίδια. Η συνάρτηση  $\chi$  πρέπει συνεπώς να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\int f_0 \chi d\Gamma = 0, \quad \int f_0 \chi \epsilon d\Gamma = 0, \quad \int f_0 \chi \mathbf{p} d\Gamma = 0. \quad (6.3)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η έννοια της θερμοκρασίας σε ένα αέριο σε μη ισορροπία γίνεται ορισμένο μόνο όταν συγκεκριμένες τιμές ανατίθενται στα ολοκληρώματα (6.2). Η έννοια γίνεται εντελώς αυστηρή μόνο όταν το αέριο συνολικά επιτύχει ισορροπία. Για να προσδιορίσουμε την θερμοκρασία σε ένα αέριο σε μη ισορροπία, μια επιπλέον συνθήκη είναι απαραίτητη, η οποία μπορεί να αποτελέσει τον προσδιορισμό αυτών των τιμών. Πρώτα από όλα, μετατρέπουμε το ολοκλήρωμα σύγκρουσης στην εξίσωση μεταφοράς (3.8). Όταν οι συναρτήσεις (6.1) αντικατασταθούν, οι όροι που δεν περιέχουν τη μικρή διόρθωση  $\chi$  απαλείφονται, μιας και η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας μηδενίζει το ολοκλήρωμα σύγκρουσης. Οι όροι πρώτης τάξης δίνουν

$$C(f) = f_0 I(\chi) / T, \quad (6.4)$$

όπου το  $I(\chi)$  υποδηλώνει τον γραμμικό τελεστή ολοκληρώματος (linear integral operator)

$$I(\chi) = \int w' f_{01}(\chi' + \chi'_i - \chi - \chi_i) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_i. \quad (6.5)$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει την εξίσωση  $f_0 f_{01} = f'_0 f'_{01}$  ο παράγοντας  $f_0$  μπορεί να απομακρυνθεί από το ολοκλήρωμα, μιας και δεν υπάρχει ολοκλήρωση προς το  $d\Gamma$ .

Το ολοκλήρωμα (6.5) είναι εξίσου μηδενικό για τις συναρτήσεις

$$\chi = \text{constant}, \quad \chi = \text{constant} \times \epsilon, \quad \chi = \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{V}, \quad (6.6)$$

όπου  $\delta V$  είναι ένα συνεχές διάνυσμα. Αυτό το αποτέλεσμα για την πρώτη και δεύτερη συνάρτηση προκύπτει από την διατήρηση της ενέργειας και της ορμής σε κάθε σύγκρουση. Οι συναρτήσεις (6.6), οι οποίες είναι ανεξάρτητες από το χρόνο και τις συντεταγμένες, συνεπώς ικανοποιούν την συνάρτηση μεταφοράς.

Η πρόελευση αυτών των λύσεων είναι απλή. Η εξίσωση μεταφοράς ικανοποιείται από την συνάρτη μεταφοράς ισορροπίας κατά τον ίδιο τρόπο με οποιαδήποτε (σταθερή) πυκνότητα και θερμοκρασία σωματιδίου. Συνεπώς ικανοποιείται υποχρεωτικά επίσης από τη μικρή διόρθωση

$$\delta f = (\partial f_0 / \partial N) \delta N = f_0 \delta N / N,$$

η οποία προκύπτει όταν η πυκνότητα αλλάζει από την  $\delta N$ . Αυτό δίνει την πρώτη λύση (6.6).

Ομοίως, η εξίσωση ικανοποιείται από την μεταβολή (αύξηση)

$$\delta f = (\partial f_0 / \partial T) \delta T,$$

η οποία προκύπτει όταν η  $T$  αλλάζει κατά μια μικρή σταθερή ποσότητα  $\delta T$ . Η παράγωγος  $\partial f_0 / \partial T$  αποτελείται από ένα όρο σταθερό  $f_0$  (που προκύπτει από την διαφοροποίηση του παράγοντα κανονικοποίησης στην  $f_0$ ) και ένα όρο ανάλογο του  $\epsilon f_0$ . Αυτό δίνει την δεύτερη λύση (6.6). Η τρίτη λύση εκφράζει την αρχή σχετικότητας του Γαλιλέου: η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση μεταφοράς σε οποιαδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα. Όταν μεταβαίνουμε σε

ένα σύστημα που κινείται σε σχέση με το αρχικό με μια μικρή σταθερή ταχύτητα  $\delta V$ , οι ταχύτητες των μορίων  $v$  γίνονται  $v + \delta V$ , και συνεπώς η συνάρτηση κατανομής μεταβάλλεται αυξητικά κατά

$$\delta F = (\partial f_0 / \partial v) \cdot \delta V = -(f_0 / T) p \cdot \delta V,$$

που αντιστοιχεί στη τρίτη λύση (6.6). Οι 'επιπλέον' λύσεις (6.6) αποκλείονται αν εφαρμόσουμε τις τρεις συνθήκες (6.3).

Θα μετασχηματίσουμε το αριστερό μέρος της εξίσωσης μεταφοράς με ένα γενικό τρόπο, ο οποίος καλύπτει και την θερμική αγωγιμότητα και το ιξώδες. Δηλαδή, επιτρέπουμε την παρουσία κλίσεων όλων των μακροσκοπικών ιδιοτήτων του αερίου, συμπεριλαμβανομένης και της μακροσκοπικής ταχύτητας  $V$ .

Η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας σε ένα αέριο σε ηρεμία ( $V = 0$ ) είναι η κατανομή Boltzmann, την οποία γράφουμε ως

$$f_0 = \exp\left(\frac{\mu - \epsilon(\Gamma)}{T}\right), \quad (6.7)$$

όπου  $\mu$  είναι το χημικό δυναμικό του αερίου. Η κατανομή σε ένα κινούμενο αέριο διαφέρει από την (6.7) μόνο κατά ένα Γαλιλιανό μετασχηματισμό της ταχύτητας, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην § 5. Για να γράψουμε την άμεση συνάρτηση, ξεχωρίζουμε από τη συνολική ενέργεια  $\epsilon(\Gamma)$  του μορίου την κινητική ενέργεια της μεταφραστικής κίνησης του:

$$\epsilon(\Gamma) = \frac{1}{2} m v^2 + \epsilon_{int}; \quad (6.8)$$

Η εσωτερική ενέργεια  $\epsilon_{int}$ , συμπεριλαμβάνει την ενέργεια του μορίου λόγω της περιστροφής και της δόνησης του. Αντικαθιστώντας το  $v$  με  $v - V$ , καταλήγουμε στην κατανομή Boltzmann σε ένα κινούμενο αέριο:

$$f_0 = \exp\left(\frac{\mu - \epsilon_{int}}{T}\right) \exp\left(\frac{m(v - V)^2}{2T}\right). \quad (6.9)$$

Σε ένα σχετικά ανομοιογενές αέριο, η  $f_0$  εξαρτάται από τις συντεταγμένες και το χρόνο, ως αποτέλεσμα της μεταβολής σε όλο το αέριο (και καθώς περνάει ο χρόνος) από τις μακροσκοπικές του ιδιότητες: την ταχύτητα  $V$ , την θερμοκρασία  $T$  και την πίεση  $P$  (και συνεπώς και το  $\mu$ ). Μιας και οι κλίσεις αυτών των ποσοτήτων θεωρούνται μικρές, είναι αρκετό (σε αυτή την προσέγγιση) να αντικαταστήσουμε την  $f$  με την  $f_0$  στα αριστερά της εξίσωσης μεταφοράς.

Οι υπολογισμοί μπορούν κατά κάποιο τρόπο να απλοποιηθούν αν παρατηρήσουμε ότι οι κινητικοί συντελεστές, που είναι το θέμα που πραγματικά μας ενδιαφέρει, δεν εξαρτώνται από τη ταχύτητα  $V$ . Συνεπώς αρκεί να θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο μέσα στο αέριο, και να επιλέξουμε το σημείο όπου η  $V$  (αλλά όχι, βέβαια, οι παράγωγοί της) είναι μηδέν.

Διαφορίζοντας την έκφραση (6.9) ως προς τον χρόνο και έπειτα θέτοντας  $V = 0$ , παίρνουμε

$$\frac{T}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial t} = \left[ \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_P - \frac{\mu - \epsilon(\Gamma)}{T} \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T \frac{\partial P}{\partial t} + m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}.$$

Από τους γνωστούς τύπους της θερμοδυναμικής,

$$(\partial \mu / \partial T)_P = -s, \quad (\partial \mu / \partial P)_T = 1/N, \quad \mu = w - Ts,$$

Όπου  $w$ ,  $s$  και  $1/N$  είναι η συνάρτηση θερμότητας, εντροπίας και όγκου ανά μόριο του αερίου. Συνεπώς

$$\frac{T}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\epsilon(\Gamma) - w}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{N} \frac{\partial P}{\partial t} + m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \quad (6.10)$$

Ομοίως έχουμε,

$$\frac{T}{f_0} \mathbf{v} \cdot \nabla f_0 = \frac{\epsilon(\Gamma) - w}{T} \mathbf{v} \cdot \nabla T + \frac{1}{N} \mathbf{v} \cdot \nabla P + m v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta}, \quad (6.11)$$

όπου για συντομία

$$V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \quad V_{\alpha\alpha} = \text{div } \mathbf{V}; \quad (6.12)$$

Στον τελευταίο όρο της (6.11), έχουμε κάνει την ίδια ακριβώς αντικατάσταση

$$v_\alpha v_\beta \partial V_\beta / \partial x_\alpha = v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta}.$$

Το αριστερό μέρος της εξίσωσης μεταφοράς προκύπτει προσθέτοντας τις εκφράσεις (6.10) και (6.11). Όλοι οι παράγωγοι των μακροσκοπικών ποσοτήτων σε σχέση με το χρόνο μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή των χωρικών τους κλίσεων μέσω των συναρτήσεων ενός ιδανικού (μη ιξώδες και θερμικά μη αγώγιμου) μέσου. Η εισαγωγή των όρων που προκαλούν εξασθένηση εδώ είναι θα οδηγούσε σε ποσότητες μιας ανώτερης τάξης μικρότητας (smallness). Στο σημείο όπου  $\mathbf{V} = 0$ , η εξίσωση του Euler δίνει

$$\partial \mathbf{V} / \partial t = - (1/\rho) \nabla P = - (1/Nm) \nabla P. \quad (6.13)$$

Σε αυτό το ίδιο σημείο, η εξίσωση συνέχειας δίνει  $\partial N / \partial t = - N \operatorname{div} \mathbf{V}$ , ή

$$\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (6.14)$$

με την εξίσωση κατάστασης για ένα ιδανικό αέριο,  $N = P/T$ . Τέλικά, η εξίσωση διατήρησης της εντροπίας,  $\partial s / \partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla s = 0$ , δίνει  $\partial s / \partial t = 0$ , ή

$$\frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad (6.15)$$

με τη χρήση του θερμοδυναμικού τύπου

$$(\partial s / \partial T)_P = c_p / T, \quad (\partial s / \partial P)_T = - 1/P,$$

όπου  $c_p$  είναι η συγκεκριμένη θερμότητα, ξανά ανά μόριο. Η δεύτερη από αυτές τις συναρτήσεις σχετίζεται με ένα ιδανικό αέριο. Οι εξισώσεις (6.14) και (6.15) δίνουν

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{1}{c_v} \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{c_p}{c_v} \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (6.16)$$

αφού για ένα ιδανικό αέριο  $c_p - c_v = 1$ .

Ένας απλός υπολογισμός οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_0 = \frac{f_0}{T} \left\{ \frac{\epsilon(\Gamma) - w}{T} \mathbf{v} \cdot \nabla T + m v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta} + \frac{w - T c_p - \epsilon(\Gamma)}{c_v} \operatorname{div} \mathbf{V} \right\}. \quad (6.17)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι καμία συγκεκριμένη υπόθεση δεν έχει γίνει μέχρι τώρα όσον αφορά την θερμοκρασιακή εξάρτηση των θερμοδυναμικών ποσοτήτων. Μόνο η γενική εξίσωση κατάστασης ενός ιδανικού αερίου έχει χρησιμοποιηθεί. Για ένα αέριο με κλασσική περιστροφή των μορίων του, και δονήσεις οι οποίες δεν διεγείρονται, η συγκεκριμένη θερμότητα είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας, και η συνάρτηση θερμοκρασίας είναι

Ο τελευταίος όρος στην (6.17) μπορεί να απλοποιηθεί. Εξισώνοντας τις (6.17) και (6.4), γράφουμε την εξίσωση μεταφοράς στην τελική μορφή

$$\frac{\epsilon(\Gamma) - c_p T}{T} \mathbf{v} \cdot \nabla t + \left[ m v_\alpha v_\beta - \delta_{\alpha\beta} \frac{\epsilon(\Gamma)}{c_v} \right] V_{\alpha\beta} = I(\chi). \quad (6.19)$$

Στις ενότητες §§7  $w = c_p T$ .  
μελετηθεί περαιτέρω  
θερμική αγωγιμότητα και ιξώδες.

(6.18) και 8, αυτή η εξίσωση θα αναφορικά με τη

Από το νόμο της αύξησης της εντροπίας, έπεται ότι η κλίση πίεσης (απουσία των κλίσεων θερμοκρασίας και ταχύτητας) δεν επιφέρει διαδικασίες εξασθένησης. Στην εξίσωση μεταφοράς, αυτή η συνθήκη απαραίτητα ικανοποιείται, όπως φαίνεται από την απουσία της κλίσης της πίεσης στο αριστερό μέρος της (6.19).

### **§7. Θερμική Αγωγιμότητα στο αέριο**

Για να υπολογίσουμε τη θερμική αγωγιμότητα του αερίου, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση μεταφοράς με μια κλίση θερμοκρασίας. Διατηρώντας μόνο τον πρώτο όρο στα αριστερά της (6.19), παίρνουμε

$$\frac{\epsilon(\Gamma) - c_p T}{T} \mathbf{v} \cdot \nabla T = I(\chi). \quad (7.1)$$



Πρέπει να ψάξουμε τη λύση στον τύπο

$$\chi = \mathbf{g} \cdot \nabla T, \quad (7.2)$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{g}$  εξαρτάται μόνο από τις ποσότητες  $\Gamma$ , μιας και ο παράγοντας  $T$  καταλήγει και στις δυο πλευρές της (7.1) όταν γίνει η αντικατάσταση. Μιας και η εξίσωση πρέπει να ισχύει για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{T}$ , οι συντελεστές του και στις δυο πλευρές πρέπει να είναι ίσοι, και έτσι για  $\mathbf{g}$  παίρνουμε την εξίσωση

$$\mathbf{v} \frac{\epsilon(\Gamma) - c_p T}{T} = I(\mathbf{g}), \quad (7.3)$$

η οποία δεν περιέχει  $T$  (ούτε συνεπώς καμία άμεση εξάρτηση από τις συντεταγμένες)

Η συνάρτηση  $I$  πρέπει επίσης να ικανοποιεί τις συνθήκες (6.3). Με το  $\chi$  στη μορφή (7.2), οι πρώτες δυο από αυτές απαραίτητα ικανοποιούνται, όπως φαίνεται από το γεγονός ότι η (7.3) δεν περιέχει καθόλου διανυσματικές παραμέτρους οι οποίες μπορούν να δώσουν την διεύθυνση των σταθερών διανυσματικών ολοκληρωμάτων  $\int_{\Gamma_0} \mathbf{g} \cdot d\Gamma$  και  $\int_{\Gamma_0} \mathbf{g} \cdot d\Gamma$ . Η τρίτη συνθήκη επιβάλλει στην λύση της (7.3) την επιπλέον συνθήκη

$$\int f_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \, d\Gamma = 0. \quad (7.4)$$

αν η εξίσωση μεταφοράς έχει λυθεί και η συνάρτηση  $\chi$  είναι γνωστή, η θερμική αγωγιμότητα μπορεί να προσδιοριστεί υπολογίζοντας την ενεργειακή ροή, ή κατά προτίμηση την το μέρος της εκείνο που προκαλεί εξασθένηση, η οποία δεν οφείλεται απλά στην μεταφορά ενέργειας με συναγωγή, την οποία θα δηλώσουμε με το  $\mathbf{q}'$ . Όταν δε υπάρχει μακροσκοπική κίνηση στο αέριο, η  $\mathbf{q}'$  είναι ίση με το σύνολο της ροής ενέργειας  $\mathbf{q}$  που δίνεται από το ολοκλήρωμα (5.9). Όταν η  $\mathbf{f} = f_0$ , αυτό το ολοκλήρωμα είναι μηδέν κατά όμοιο τρόπο, εξαιτίας της ολοκλήρωσης ως προς τις διευθύνσεις του  $\mathbf{v}$ . Έτσι, κατά την αντικατάσταση της  $\mathbf{f}$  από την (6.1), τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{1}{T} \int \mathbf{v} f_0 \chi \epsilon \, d\Gamma \\ &= \frac{1}{T} \int f_0 \epsilon \mathbf{v} (\mathbf{g} \cdot \nabla T) \, d\Gamma, \end{aligned}$$

ή σε συνιστώσες

$$q_\alpha = -\kappa_{\alpha\beta} \partial T / \partial x_\beta, \quad \kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T} \int f_0 \epsilon v_\alpha g_\beta d\Gamma. \quad (7.5)$$

Μιας και ένα αέριο σε ισορροπίας είναι ισότροπο, δεν υπάρχουν μέσα του προτιμώμενες διευθύνσεις, και ο τανυστής  $\kappa_{\alpha\beta}$  μπορεί να εκφραστεί ως ο μοναδιαίος τανυστής (the unit tensor)  $\delta_{\alpha\beta}$ , π.χ. ελαττώνεται σε ένα βαθμωτό μέγεθος (scalar):

$$\kappa_{\alpha\beta} = \kappa \delta_{\alpha\beta}, \quad \kappa = \frac{1}{3} \kappa_{\alpha\alpha}.$$

Συνεπώς η ροή ενέργειας είναι

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (7.6)$$

Όπου το βαθμωτό μέγεθος της θερμικής αγωγιμότητας είναι

$$\kappa = -\frac{1}{3T} \int f_0 \epsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} d\Gamma. \quad (7.7)$$

Η εξίσωση μεταφοράς υποχρεωτικά κάνει αυτή την ποσότητα θετική : η ροή  $q$  πρέπει να βρίσκεται στην αντίθετη διεύθυνση ως προς την κλίση της θερμοκρασίας.

Σε μονοατομικά αέρια, η ταχύτητα  $v$  είναι το μόνο διάνυσμα από το οποίο εξαρτάται η συνάρτηση  $g$  είναι λοιπόν ξεκάθαρο ότι αυτή η συνάρτηση πρέπει να έχει τη μορφή

$$\mathbf{g} = (\mathbf{v}/v)g(v). \quad (7.8)$$

Σε πολυατομικά αέρια, η  $g$  εξαρτάται από δυο διανύσματα: την ταχύτητα  $v$  και την στροφορμή  $M$ . Αν η συμμετρία των μορίων δεν επιτρέπει στερεο-ισομερισμό, το ολοκλήρωμα σύγκρουσης, και συνεπώς οι εξισώσεις (7.3), παραμένουν αμετάβλητες κατά την αντιστροφή. Η λύση πρέπει να είναι κατά τον ίδιο τρόπο αμετάβλητη. Με άλλα λόγια,  $g = g(v, M)$ .  $T$  πρέπει να είναι ένα πραγματικό βαθμωτό μέγεθος, και, αφού η κλίση  $T$  είναι ένα πραγματικό διάνυσμα, το ίδιο θα ισχύει και για τη συνάρτηση  $g$ . Για παράδειγμα, σε ένα διατομικό αέριο, όπου οι ποσότητες  $\Gamma$  είναι απλά τα διανύσματα  $v$  και  $M$ , η συνάρτηση  $g(\Gamma)$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{g} = v g_1 + \mathbf{M}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}) g_2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{M}) g_3, \quad (7.9)$$

όπου  $g_1, g_2, g_3$  είναι βαθμωτές συναρτήσεις των ορισμάτων  $v^2, M^2, (v \cdot M)^2$ . Αυτή είναι η πιο γενική μορφή ενός πραγματικού διανύσματος που μπορεί να δημιουργηθεί από το πραγματικό διάνυσμα  $M$  και το ψευδοδιάνυσμα  $M$ .

Αν, παρά όλα αυτά, η ουσία είναι στερεοϊσομερής, δεν υπάρχει μεταβολή κατά την αντιστροφή: όπως έχει ήδη αναφερθεί στην §2, η αναστροφή τότε "μεταμορφώνει" το αέριο σε μια ουσιαστικά διαφορετική ουσία. Ακολουθώντας, η συνάρτηση  $x$  μπορεί επίσης να περιέχει ψευδοβαθμωτούς όρους (pseudoscalar terms), και η συνάρτηση  $g$  μπορεί να περιέχει ψευδοδιανυσματικούς όρους (pseudovector terms), π.χ. του τύπου  $g_4 M$ .

Η συνθήκη για να ισχύει η παραπάνω μέθοδος επίλυσης της εξίσωσης μεταφοράς (βασίζόμενοι στην υπόθεση ότι η  $f$  είναι κοντά στην  $f_0$ ) μπορεί να εξακριβωθεί υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα σύγκρουσης από την (3.12). Η μέση ενέργεια ενός μορίου είναι  $\sim T$ , και έτσι ένας υπολογισμός των δυο πλευρών της (7.3) δίνει  $\sim g/\tau \sim g/L$ , από όπου παίρνουμε  $g \sim 1$ . Η συνθήκη  $|T \sim g| \sim T/L \sim 1$  (συνεπώς ίση με την  $\delta f \sim f_0$ ) υποδηλώνει ότι οι αποστάσεις  $L$  για τις οποίες η θερμοκρασία μεταβάλλεται σημαντικά κατά ( $|T| \sim T/L$ ) πρέπει να είναι μεγάλες σε σχέση με την  $L$ . Δηλαδή, μια συνάρτηση με τη μορφή της (6.1) αποτελεί τους μεγιστοβάθμιους όρους σε μια ανάπτυξη της λύσης της εξίσωσης μεταφοράς σε δυνάμεις του μικρού λόγου  $l/L$ . Ένας υπολογισμός της (7.7) με την  $g \sim 1$  δίνει

$$\kappa \sim c N l \bar{v}, \quad (7.10)$$

όπου η  $c$  αποτελεί την συγκεκριμένη θερμότητα ανά μόριο του αερίου. Αυτός είναι ένας γνωστός βασικός τύπος στην κινητική θεωρία των αερίων. Θέτοντας  $1 \sim 1/N\sigma$ ,  $c \sim 1$  και  $\bar{v} \sim \sqrt{T/m}$ , παίρνουμε

$$\kappa \sim (1/\sigma) \sqrt{T/m}. \quad (7.11)$$

Σε αυτό τον υπολογισμό, η ενεργός διατομή  $\sigma$  συνδέεται με τη μέση θερμική ταχύτητα των μορίων, και υπό αυτή την έννοια θεωρείται ως μια συνάρτηση της θερμοκρασίας. Καθώς η ταχύτητα αυξάνεται, η ενεργός διατομή γενικά μειώνεται. Ανάλογα, η  $\sigma$  είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της θερμοκρασίας. Όταν η θερμοκρασία δεν είναι τόσο χαμηλή, τα μόρια του αερίου συμπεριφέρονται ποιοτικά σαν σκληρά ελαστικά σωματίδια τα οποία αλληλεπιδρούν μόνο όταν συγκρούονται. Αυτού του τύπου η αλληλεπίδραση αντιστοιχεί σε μια ενεργό διατομή σύγκρουσης που μεταβάλλεται ελαφρά μόνο με την ταχύτητα (και συνεπώς με την θερμοκρασία). Κάτω από τέτοιες συνθήκες, η  $\kappa$  είναι κατά προσέγγιση ανάλογη της  $T^{-1/2}$ .

Σε μια δεδομένη θερμοκρασία, η θερμική αγωγιμότητα φαίνεται μέσω της (7.11) να είναι ανεξάρτητη της πυκνότητας του αερίου, π.χ. της πίεσης του αερίου. Πρέπει να τονίσουμε ότι αυτή η σημαντική ιδιότητα δεν σχετίζεται με τις υποθέσεις που χρησιμοποιήθηκαν για να γίνει ο υπολογισμός, αλλά είναι μια ακριβής συνέπεια της εξίσωσης μεταφοράς Boltzmann. Προκύπτει επειδή αυτή η εξίσωση λαμβάνει υπόψη μόνο τις συγκρούσεις ανάμεσα σε ζευγάρια μορίων (που είναι ο λόγος για τον οποίο η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι αντιστρόφως ανάλογη της πυκνότητας του αερίου).

## **§ 8. Ιξώδες σε ένα αέριο**

Το ιξώδες ενός αερίου υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης μεταφοράς με το ίδιο τρόπο όπως και η θερμική αγωγιμότητα. Η μόνη διαφορά είναι ότι η απόκλιση από την ισορροπία δεν οφείλεται στη μεταβολή της θερμοκρασίας αλλά στη μη ομοιόμορφη ροή του αερίου όσο αφορά στη μακροσκοπική ταχύτητα  $V$ . Υποθέτουμε ξανά ότι οι χαρακτηριστικές διαστάσεις του προβλήματος είναι  $L \ll \lambda$ .

Όπως γνωρίζουμε, υπάρχουν δυο είδη ιξώδους, με τους αντίστοιχους συντελεστές που συνήθως είναι  $\eta$  και  $\zeta$ . Προσδιορίζονται ως οι συντελεστές στον ιξώδη τανυστή τάσης  $\sigma'_{\alpha\beta}$  ο οποίος σχηματίζει μέρος του τανυστή ρευστότητας ορμής:

$$\Pi_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta} + \rho V_{\alpha} V_{\beta} - \sigma'_{\alpha\beta}, \quad (8.1)$$

$$\sigma'_{\alpha\beta} = 2\eta(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \text{div } \mathbf{V}) + \zeta\delta_{\alpha\beta} \text{div } \mathbf{V}, \quad (8.2)$$

όπου η  $V_{\alpha\beta}$  προσδιορίζεται από την (6.12). Σε ένα ασυμπίεστο ρευστό, μόνο το ιξώδες  $\eta$  υπάρχει. Το 'δεύτερο ιξώδες'  $\zeta$  εμφανίζεται σε κίνηση τέτοια ώστε  $\text{div } \mathbf{V} \neq 0$ . Είναι βολικό να υπολογίσουμε τους δυο συντελεστές ξεχωριστά.

Παραλείποντας τον όρο για τη μεταβολή θερμοκρασίας (temperature-gradient) από την γενική εξίσωση μεταφοράς (6.19), μπορούμε να γράψουμε

$$m v_{\alpha} v_{\beta} (V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \text{div } \mathbf{V}) + [\frac{1}{3}m v^2 - \epsilon(\Gamma)/c_t] \text{div } \mathbf{V} = I(\chi), \quad (8.3)$$

όπου ξεχωρίζουν στο αριστερό μέρος οι όροι που περιέχουν το πρώτο και το δεύτερο ιξώδες. Στον υπολογισμό του πρώτου ιξώδους, πρέπει να υποθέσουμε ότι  $\text{div } \mathbf{V} = 0$ . Η εξίσωση που προκύπτει μπορεί να επαναδιατυπωθεί πανομοιότυπα ως

$$m(v_{\alpha} v_{\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} v^2) V_{\alpha\beta} = I(\chi), \quad (8.4)$$

όπου οι δυο τανυστικοί παράγοντες στα αριστερά έχουν μηδενικό ίχνος (zero trace). Η λύση αυτής της εξίσωσης αναζητείται στον τύπο

$$\chi = g_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}, \quad (8.5)$$

όπου  $g_{\alpha\beta}$  ( $n$  είναι ένας συμμετρικός τανυστής. Μιας και το ίχνος  $g_{\alpha\beta} = 0$ , προσθέτοντας στην  $\delta_{\alpha\beta}$  ένα όρο στο  $g_{\alpha\beta}$  μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι  $g_{\alpha\beta} = 0$ , χωρίς να μεταβάλλουμε το  $\chi$ . Η εξίσωση για το  $g_{\alpha\beta}$  είναι

$$m(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}v^2) = I(g_{\alpha\beta}). \quad (8.6)$$

Οι επιπλέον συνθήκες (6.3) ικανοποιούνται.

Η ροή ορμής υπολογίζεται από τη συνάρτηση κατανομής ως το ολοκλήρωμα (5.8). Το μέρος αυτής που χρειαζόμαστε, δηλαδή ο ιξώδης τανυστής τάσης, είναι

$$\sigma'_{\alpha\beta} = - (m/T) \int v_\alpha v_\beta f_0 \chi d\Gamma = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\gamma\delta}, \quad (8.7)$$

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = - (m/T) \int f_0 v_\alpha v_\beta g_{\gamma\delta} d\Gamma. \quad (8.8)$$

Οι ποσότητες  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$  σχηματίζουν ένα τανυστή τετάρτης τάξης, ο οποίος είναι συμμετρικός στα  $\alpha, \beta$  και  $\gamma, \delta$  και δίνει μηδέν κατά την συστολή (contraction) ως προς το ζεύγος  $\gamma, \delta$ . Επειδή το αέριο είναι ισότροπο, αυτός ο τανυστής μπορεί να εκφραστεί μόνο υπό τη μορφή του μοναδιαίου τανυστή (unit tensor)  $\delta_{\alpha\beta}$ . Μια έκφραση που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες είναι:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta [\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\nu\delta}].$$

Τότε  $\sigma'_{\alpha\beta} = 2\eta V_{\alpha\beta}$ , ώστε  $\eta$  είναι ο απαιτούμενος βαθμωτός συντελεστής ιξώδους (scalar viscosity coefficient). Προσδιορίζεται με την ελάττωση του τανυστή σε σχέση με τα ζεύγη των  $\alpha, \gamma$  και  $\beta, \delta$  :

$$\eta = - (m/10T) \int v_\alpha v_\beta g_{\alpha\beta} f_0 d\Gamma. \quad (8.9)$$

Σε ένα μονοατομικό αέριο,  $\eta_{\alpha\beta}$  είναι μια συνάρτηση μόνο του διανύσματος  $v$ . Ο γενικός τύπος ενός τέτοιου συμμετρικού τανυστή με μηδενικό ίχνος είναι:

$$g_{\alpha\beta} = (v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}v^2)g(v), \quad (8.10)$$

με μια μοναδική βαθμωτή συνάρτηση  $g(v)$ . Στα πολυατομικά αέρια, ο τανυστής  $g_{\alpha\beta}$  αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό μεταβλητών, συμπεριλαμβανόμενων των δυο διανυσμάτων  $v$  και  $M$ . Απουσία στερεοϊσομερισμού,  $\eta_{\alpha\beta}$  μπορεί να συμπεριλάβει μόνο πραγματικούς τανυστικούς όρους. Σε ένα στερεοϊσομερές αέριο (stereoisomeric gas), ψευδοτανυστικοί όροι (pseudotensor terms) είναι επίσης πιθανοί.

Ένας υπολογισμός του συντελεστή ιξώδους (viscosity coefficient), όμοιος με την (7.10) για την θερμική αγωγιμότητα, δίνει ένα γνωστό στοιχειώδη τύπο που υπάρχει στην κινητική θεωρία των αερίων

$$\eta \sim m\bar{v}Nl; \quad (8.11)$$

Η θερμομετρική αγωγιμότητα (thermometric conductivity) και το κινηματικό ιξώδες φαίνεται να είναι της ίδιας τάξης:

$$\kappa/Nc_p \sim \eta/Nm \sim \bar{v}l. \quad (8.12)$$

Θέτοντας στην (8.11)  $l \sim 1/N\sigma$  και  $\bar{v} \sim (T/m)^{1/2}$ , παίρνουμε

$$\eta \sim \sqrt{mT}/\sigma. \quad (8.13)$$

Η περιγραφή της εξάρτησης από τη πίεση και τη θερμοκρασία του  $\kappa$  στην §7 ισχύει και για το ιξώδες "η" επίσης.

Για να υπολογίσουμε τη δεύτερο συντελεστή ιξώδους (second viscosity coefficient), πρέπει να θεωρήσουμε ότι ο δεύτερος όρος στο αριστερό μέρος της εξίσωσης μεταφοράς (8.3) είναι μη μηδενικός:

$$[\frac{1}{2}mv^2 - \epsilon(\Gamma)/c_v] \operatorname{div} \mathbf{V} = I(\chi). \quad (8.14)$$

Θα αναζητήσουμε τη λύση στον τύπο

$$\chi = g \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (8.15)$$

και παίρνουμε για  $g$  την εξίσωση

$$[\frac{1}{2}mv^2 - \epsilon(\Gamma)/c_v] = I(g). \quad (8.16)$$

Υπολογισμός του τανυστή τάσης και σύγκριση με την έκφραση  $\zeta\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}V$  δίνει τον συντελεστή ιξώδους ως

$$\zeta = -(m/3T) \int v^2 g f_0 d\Gamma \quad (8.17)$$

Σε μονοατομικά αέρια  $\epsilon(\Gamma) = -mv^2/2$ ,  $c_1 = 3/2$ , και το αριστερό μέρος της (8.16) είναι μηδέν. Η συνάρτηση  $I(g) = 0$  τότε δείχνει ότι  $g = 0$ , και συνεπώς  $\zeta = 0$ . Συνεπώς καταλήγουμε στο ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι το δεύτερο ιξώδες για τα μονοατομικά αέρια είναι μηδέν.

### **§9. Συμμετρία των κινητικών συντελεστών**

Η θερμική αγωγιμότητα και το ιξώδες βρίσκονται ανάμεσα στις ποσότητες που ελέγχουν την διαδικασία καλάρωσης σε συστήματα που απομακρύνονται ελαφρώς από την ισορροπία. Αυτοί οι κινητικοί συντελεστές (kinetic coefficients) ικανοποιούν την αρχή της συμμετρίας του Onsager (Onsager's symmetry principle), που μπορεί να ορισθεί σε ένα γενικό τύπο χωρίς να συζητήσουμε συγκεκριμένους μηχανισμούς καλάρωσης. Παρόλα αυτά, σε ένα συγκεκριμένο υπολογισμό των κινητικών συντελεστών από την εξίσωση μεταφοράς, η αρχή συμμετρίας δεν παράγει επιπλέον συνθήκες για να χρησιμοποιηθούν στην επίλυση των εξισώσεων. Σε ένα τέτοιο υπολογισμό οι απαιτήσεις της αρχής απαραίτητα ικανοποιούνται.

Είναι χρήσιμο να δούμε πως συμβαίνει αυτό στο γενικό σχηματισμό της αρχής του Onsager (Onsager's principle), εμφανίζεται ένα σύνολο ποσοτήτων  $x_a$  οι οποίες περιγράφουν την απόκλιση του συστήματος από την ισορροπία, και ένα σύνολο ποσοτήτων 'θερμοδυναμικά συζυγείς' ("thermodynamically conjugate") ως προς αυτές,  $X_a = -\partial S/\partial x_a$  (όπου  $S$  είναι η εντροπία του συστήματος). Η διαδικασία καλάρωσης ενός συστήματος που απομακρύνεται ελαφρά από την θέση ισορροπίας περιγράφεται από εξισώσεις οι οποίες καθορίζουν το ρυθμό αλλαγής του  $x_a$  ως γραμμικές συναρτήσεις του  $X_a$ :

$$\dot{x}_a = - \sum_b \gamma_{ab} X_b, \quad (9.1)$$

Όπου οι  $\gamma_{ab}$  είναι οι κινητικοί συντελεστές. Σύμφωνα με την αρχή του Onsager (Onsager's principle), αν  $x_a$  και  $x_b$  συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο κάτω από χρονική αντιστροφή, τότε:

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \quad (9.2)$$

Ο ρυθμός αλλαγής της εντροπίας δίνεται από την τετραγωνικό τύπο:

$$\dot{S} = - \sum_a X_a \dot{x}_a = \sum_{a,b} \gamma_{ab} X_a X_b. \quad (9.3)$$

Η πρώτη από αυτές τις εκφράσεις συνήθως βοηθάει στη καθιέρωση αντιστοιχίας ανάμεσα στο  $x_a$  και το  $X_a$ .

Για τη θερμική αγωγιμότητα, θεωρούμε ως ρυθμό μεταβολής  $\chi$  τις παραμέτρους  $q'_\alpha$  του διανύσματος της εξασθενούμενης ροής της θερμοκρασίας (dissipative heat flux vector) (σε οποιοδήποτε δεδομένο σημείο του μέσου). Ο δείκτης  $\alpha$  τότε είναι ο ίδιος με τον δείκτη  $\alpha$  του διανύσματος. Οι αντίστοιχες ποσότητες  $X_\alpha$  είναι οι παράγωγοι  $T^{-2}\partial T/\partial x_\alpha$ . Οι εξισώσεις (9.1) αντιστοιχούν στην  $q'_\alpha = -\kappa_{\alpha\beta}\partial T/\partial x_\beta$ , ώστε οι κινητικοί συντελεστές  $\gamma_{\alpha\beta}$  να αποτελούν τις ποσότητες  $T^2\kappa_{\alpha\beta}$ . Σύμφωνα με την αρχή του Onsager, πρέπει να έχουμε  $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\beta\alpha}$ .

Ομοίως, για το ιξώδες, θεωρούμε ως  $\chi$  τις παραμέτρους  $\sigma'_{\alpha\beta}$  του τανυστή της ιξώδους ρευστότητας ορμής (viscous momentum flux tensor). Τα αντίστοιχα  $X_\alpha$  είναι  $-V_{\alpha\beta}/T$  (ο δείκτης  $\alpha$  εδώ απαντάει στο ζευγάρι των τανυστικών δεικτών  $\alpha\beta$ ). Οι εξισώσεις (9.1) αντιστοιχούν στην  $\sigma'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}V_{\gamma\delta}$  και οι κινητικοί συντελεστές είναι  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Σύμφωνα με την αρχή του Onsager, πρέπει να έχουμε  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}$ .

Στα προβλήματα θερμικής αγωγιμότητας και ιξώδους αερίων, τα οποία αναφέραμε η συμμετρία των τανυστών  $\kappa_{\alpha\beta}$  και  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$  ήταν μια απαραίτητη συνέπεια της ισοτροπίας του μέσου, ανεξάρτητη από τη λύση της εξίσωσης μεταφοράς. Παρόλα αυτά, θα δείξουμε ότι αυτό θα προέκυπτε επίσης από αυτή της λύση, ανεξάρτητα από την ισοτροπία του αερίου.

Η διαδικασία για προβλήματα θερμικής αγωγιμότητας και ιξώδους σε ένα ελαφρώς ανομοιογενές αέριο ήταν να αναζητούμε τη διόρθωση της συνάρτησης κατανομής ισορροπίας στον τύπο

$$\chi = \sum_\alpha g_\alpha(\Gamma) X_\alpha, \quad (9.4)$$

παίρνοντας από τις συναρτήσεις  $g_\alpha$  εξισώσεις της μορφής

$$L_\alpha = I(g_\alpha). \quad (9.5)$$

Οι ποσότητες  $L_\alpha$  είναι μέρη του διανύσματος

$$T[\epsilon(\Gamma) - c_p T]v_\alpha$$

της θερμικής αγωγιμότητας, ή του ιξώδη τανυστή. Συγκρίνετε (6.19).

$$-T \left[ m v_\alpha v_\beta - \frac{\epsilon(\Gamma)}{c_v} \delta_{\alpha\beta} \right]$$

Οι λύσεις των εξισώσεων (9.5) πρέπει να ικανοποιούν τις επιπλέον συνθήκες

$$\int f_0 g_\alpha d\Gamma = 0, \quad \int f_0 g_\alpha \epsilon d\Gamma = 0, \quad \int f_0 g_\alpha p d\Gamma = 0.$$



Με αυτές τις συνθήκες, οι κινητικοί συντελεστές  $\gamma_{ab}$  μπορούν να γραφτούν ως τα ολοκληρώματα

$$T^2 \gamma_{ab} = - \int f_0 L_{ab} d\Gamma. \quad (9.6)$$

Συνεπώς η απόδειξη της συμμετρίας  $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$  ελαχιστοποιείται στην παρακάτω εξίσωση

$$\int f_0 L_{ab} d\Gamma = \int f_0 L_{ba} d\Gamma. \quad (9.7)$$

Βασίζεται στην ιδιότητα ότι ο γραμμικοποιημένος τελεστής  $I$  είναι αυτοσυζυγής, και μπορεί να βρεθεί όπως φαίνεται παρακάτω. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \int f_0 f_{01} w' \varphi (\psi' + \psi'_1 - \psi - \psi_1) d^4\Gamma,$$

όπου  $\psi(\Gamma)$  και  $\varphi(\Gamma)$  είναι δυο συναρτήσεις των μεταβλητών  $\Gamma$ . Αφού η ολοκλήρωση είναι ως προς τις μεταβλητές  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma', \Gamma'_1$ , μπορούμε να τις μετονομάσουμε με οποιοδήποτε τρόπο αφήνοντας ανεπηρέαστη τη τιμή του ολοκληρώματος. Κάνουμε την αλλαγή  $\Gamma, \Gamma' \leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma'_1$ , και έπειτα τις επιπλέον αλλαγές  $\Gamma, \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma', \Gamma'_1$  στους δυο τύπους που προκύπτουν. Το άθροισμα όλων των τεσσάρων εκφράσεων δίνει

$$\int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \frac{1}{4} \int f_0 f_{01} [w'(\varphi + \varphi_1) - w(\varphi' + \varphi'_1)] [(\psi' + \psi'_1) - (\psi + \psi_1)] d^4\Gamma; \quad (9.8)$$

ο συμβολισμός  $w$  και  $w'$  είναι όπως στην (3.5). Ας θεωρήσουμε τώρα ένα παρόμοιο ολοκλήρωμα στο οποίο  $\psi(\Gamma)$  και  $\varphi(\Gamma)$  αντικαθιστώνται με το  $\varphi(\Gamma^T)$  και  $\psi(\Gamma^T)$  αντίστοιχα (χωρίς να αλλάξουμε το  $w$  και  $w'$ ). Κάνοντας την αλλαγή  $\Gamma^T, \Gamma_1^T \rightarrow \Gamma, \Gamma_1 \dots$  σε αυτό το ολοκλήρωμα, και εφαρμόζοντας την αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας (2.3), παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \int f_0 \psi^T I(\varphi^T) d\Gamma \\ &= \frac{1}{4} \int f_0 f_{01} [w(\psi + \psi_1) - w'(\psi' + \psi'_1)] [(\varphi' + \varphi'_1) - (\varphi + \varphi_1)] d^4\Gamma, \end{aligned} \quad (9.9)$$

όπου η εξίσωση  $f_0(\Gamma^T) = f_0(\Gamma)$  έχει ήδη χρησιμοποιηθεί. Αναπτύσσοντας τις αγκύλες στις (9.8) και (9.9), και συγκρίνοντας αντίστοιχους όρους, παρατηρούμε ότι τα δυο ολοκληρώματα είναι ίσα. Για να γίνει η σύγκριση, είναι απαραίτητο να λάβουμε υπόψη τη σχέση μοναδικότητας (2.9), η οποία δίνει, για παράδειγμα,

$$\int f_0 f_{01} w(\psi + \psi_1)(\varphi + \varphi_1) d^4\Gamma = \int f_0 f_{01} w'(\psi + \psi_1)(\varphi + \varphi_1) d^4\Gamma;$$

Η σχέση (2.9) εφαρμόζεται εδώ στην ολοκλήρωση ως προς τις μεταβλητές  $\Gamma'$  και  $\Gamma'^1$ , από τις οποίες εξαρτώνται μόνο το  $w$  και το  $w'$  στη συνάρτηση. Συνειπώς καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \int f_0 \psi^T I(\varphi^T) d\Gamma. \quad (9.10)$$

Αν η αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας ισχύει στην απλή της μορφή (2.8),  $w = w'$ , τότε η (9.10) ελαχιστοποιείται κυριολεκτικά σε μια αυτοσυσζυγία του τελεστή  $I$ :

$$\int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \int f_0 \psi I(\varphi) d\Gamma, \quad (9.11)$$

όπου και τα δυο ολοκληρώματα περιέχουν συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\psi$  των ίδιων μεταβλητών  $\Gamma$  αυτό φαίνεται αμέσως αν  $w = w'$ , από την έκφραση (9.8).

Επιστρέφοντας στους κινητικούς συντελεστές, κάνουμε την αλλαγή  $\Gamma \rightarrow \Gamma^T$ , στο πρώτο ολοκλήρωμα (9.7) και σημειώνουμε ότι

$$L_a(\Gamma^T) = \pm L_a(\Gamma), \quad (9.12)$$

Τα θετικά και αρνητικά πρόσημα συνδέονται με το ιζώδες και την θερμική ανωγιμότητα αντίστοιχα. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (9.5) και (9.10). Στη τελευταία, μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς  $\Gamma^T$  στη θέση του  $\Gamma$ . Αυτό δεν επηρεάζει τη τιμή του ολοκληρώματος. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int f_0 g_b L_a d\Gamma &= \pm \int f_0 g_b^T I(g_a) d\Gamma^T \\ &= \pm \int f_0 g_a^T I(g_b) d\Gamma^T \\ &= \pm \int f_0 g_a^T L_b(\Gamma) d\Gamma^T. \end{aligned}$$

Τώρα, αλλάζοντας το  $\Gamma^T \rightarrow \Gamma$  στο δεξιό μέρος, και χρησιμοποιώντας την (9.12), παίρνουμε το απαιτούμενο αποτέλεσμα (9.7).

Οι κινητικοί συντελεστές πρέπει επίσης να ικανοποιούν τις συνθήκες που προκύπτουν από το νόμο της αύξησης της εντροπίας και πιο συγκεκριμένα, οι 'διαγώνιοι' συντελεστές ("diagonal" coefficients)  $\gamma_{aa}$  πρέπει να είναι θετικοί. Μιας και η εξίσωση μεταφοράς εγγυάται την αύξηση της εντροπίας, αυτές οι συνθήκες αναγκαία ικανοποιούνται όταν οι κινητικοί συντελεστές υπολογιστούν από εκείνη την εξίσωση.

Η αύξηση της εντροπίας εκφράζεται από την ανισότητα

$$-\int \log f C(f) d\Gamma > 0;$$

Αντικαθιστώντας

$$f = f_0(1 + \chi/T), \quad C(f) = (f_0/T)I(\chi),$$

παίρνουμε

$$-\int \log f_0 C(f) d\Gamma - \frac{1}{T} \int f_0 \log(1 + \chi/T) I(\chi) d\Gamma > 0.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ομοίως μηδέν. Στο δεύτερο ολοκλήρωμα, μιας και το  $\chi$  είναι μικρό, έχουμε  $\log(1 + \chi/T) \approx \chi/T$ , και έτσι βρίσκουμε

$$-\int f_0 \chi I(\chi) d\Gamma > 0. \quad (9.13)$$

Αυτή η ανισότητα εξασφαλίζει τις απαραίτητες ιδιότητες των κινητικών συντελεστών. Πιο συγκεκριμένα, όταν  $\chi = g_a$  αυτό δείχνει πως η  $\gamma_{aa}$  είναι θετική.

## **§ 10. Προσεγγιστική λύση της εξίσωσης μεταφοράς**

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας του νόμου της αλληλεπίδρασης των μορίων (ειδικότερα των πολυατομικών), η οποία καθορίζει την συνάρτηση  $w$  στο ολοκλήρωμα σύγκρουσης, η εξίσωση Boltzmann δεν μπορεί να αποτυπωθεί σε ένα ακριβή τύπο για συγκεκριμένα αέρια. Παρόλα αυτά, ακόμα και με γραμμικοποίηση και με κάποιες υποθέσεις όσον αφορά στη φύση της

μοριακής αλληλεπίδρασης, η πολυπλοκότητα της μαθηματικής δομής της εξίσωσης μεταφοράς

καθιστά αδύνατη την επίλυση της με ένα συγκεκριμένο αναλυτικό τύπο. Συνεπώς, πιο

αποτελεσματικές μέθοδοι για τη προσεγγιστική επίλυση της εξίσωσης Boltzmann έχουν μεγάλη

σημασία στη κινητική θεωρία των αερίων. Η αρχή όπως εφαρμόζεται σε ένα μονοατομικό αέριο

είναι αυτή που θα δείξουμε παρακάτω (S. Chapman 1916).

Ας πάρουμε πρώτα το πρόβλημα της θερμικής αγωγιμότητας. Για ένα μονοατομικό αέριο, η συγκεκριμένη θερμότητα (specific heat) είναι  $c_p = 5/2$ , και η γραμμικοποιημένη εξίσωση (7.3) γίνεται

$$-\mathbf{v} \left( \frac{5}{2} - \beta v^2 \right) = \mathbf{I}(\mathbf{g}), \quad (10.1)$$

όπου  $\beta = m/2T$ . Ο γραμμικός ολοκληρωτικός τελεστής ολοκλήρωσης (linear integral operator)  $\mathbf{I}(\mathbf{g})$  προσδιορίζεται από την συνάρτηση

$$\mathbf{I}(\mathbf{g}) = \int \int v_{\alpha} f_{01}(\mathbf{g}' + \mathbf{g}_1 - \mathbf{g} - \mathbf{g}_1) d^3 p_1 d\sigma, \quad (10.2)$$

που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα σύγκρουσης (collision integral) (3.9), και η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας είναι η εξής

$$f_0(\mathbf{v}) = (N\beta^{3/2}/m^3 \pi^{3/2}) e^{-\beta v^2}. \quad (10.3)$$

Μια αποτελεσματική μέθοδος προσεγγιστικής επίλυσης της εξίσωσης (10.1) βασίζεται στην ανάπτυξη των απαιτούμενων συναρτήσεων με τη μορφή ενός ολοκληρωμένου συνόλου ορθογώνιων συναρτήσεων (mutually orthogonal functions), τις οποίες μπορούμε να θεωρήσουμε ως τα πολυώνυμα Sonine (Sonine polynomials) δίνοντας ιδιαίτερο πλεονέκτημα (D. Burnett 1935). Αυτά προσδιορίζονται από την

$$S_r^s(x) = \frac{1}{s!} e^x x^{-r} \frac{d^s}{dx^s} (e^{-x} x^{r+s}), \quad (10.4)$$

όπου  $r$  είναι ένας οποιοδήποτε αριθμός και  $s$  είναι ένας θετικός ακέραιος ή μηδέν. Πιο συγκεκριμένα,

$$S_r^0 = 1, \quad S_r^1(x) = r + 1 - x. \quad (10.5)$$

Η ιδιότητα ορθογωνιότητας αυτών των πολυωνύμων για ένα δεδομένο  $r$  και διαφορετικό  $s$  είναι

$$\int_0^\infty e^{-x} x^r S_r^s(x) S_r^{s'}(x) dx = \Gamma(r+s+1) \delta_{ss'}/s!. \quad (10.6)$$

Θα αναζητήσουμε τη λύση της (10.1) ως το ανάπτυγμα

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}) = (\beta/N) \mathbf{v} \sum_{r=1}^{\infty} A_r S_{3/2}^r(\beta v^2). \quad (10.7)$$

Παραλείποντας τον όρο με  $s = 0$ , αυτόματα ικανοποιούμε τη συνθήκη (7.4), με το ολοκλήρωμα να είναι μηδέν επειδή τα πολυώνυμα με  $s = 0$  και  $s \neq 0$  είναι ορθογώνια. Η εξίσωση μέσα στις παρενθέσεις στο αριστερό τμήμα της (10.1) είναι το πολυώνυμο  $S_{3/2}(\beta u^2)$ , και συνεπώς αυτή η εξίσωση γίνεται

$$-\mathbf{v} S_{3/2}(\beta v^2) = (\beta/N) \sum_{i=1}^3 A_i I(\mathbf{v} S_{3/2}). \quad (10.8)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τις δυο πλευρές βαθμωτά με  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} S_{3/2}(\beta u^2)$  και ολοκληρώνοντας ως προς  $d^3p$ , παίρνουμε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων

$$\sum_{i=1}^3 a_i A_i = \frac{15}{4} \delta_{1l}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (10.9)$$

με

$$\begin{aligned} a_k &= -(\beta^2/N^2) \int f_0 \mathbf{v} \cdot S_{3/2} I(\mathbf{v} S_{3/2}) d^3p \\ &= (\beta^2/4N^2) \langle \mathbf{v} S_{3/2}, \mathbf{v} S_{3/2} \rangle, \end{aligned} \quad (10.10)$$

ο συμβολισμός είναι

$$\left. \begin{aligned} \{F, G\} &= \int f_0(v) f_0(v_i) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_i| \Delta(F) \Delta(G) d^3p d^3p_i d\sigma, \\ \Delta(F) &= F(\mathbf{v}') + F(\mathbf{v}_i) - F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}_i). \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Δεν υπάρχει εξίσωση με  $l = 0$  στην (10.9), αφού  $a_0 = 0$  επειδή από τη διατήρηση της ορμής:

$\Delta(\mathbf{v} S_{3/2}) = \Delta(\mathbf{v}) = 0$ . Η θερμική αγωγιμότητα υπολογίζεται αντικαθιστώντας την (10.7) στο ολοκλήρωμα (7.7). Η συνθήκη (7.4) δείχνει ότι αυτό το ολοκλήρωμα (με  $\epsilon = -\mu u^2$ ) μπορεί να τεθεί με τη μορφή

$$\kappa = -\frac{1}{3} \int f_0 S_{3/2}(\beta v^2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} d^3p$$

και το αποτέλεσμα είναι

$$\kappa = 5A_1/4. \quad (10.12)$$

Το πλεονέκτημα της ανάπτυξης σε πολυώνυμα Sonine (Sonine polynomials) φαίνεται στην απλοποιημένη μορφή στο αριστερό τμήμα των εξισώσεων (10.9) και την εξίσωση (10.12). Οι υπολογισμοί είναι εντελώς ίδιοι και για το ιξώδες. Η λύση της (8.6) θα αναζητηθεί στην εξίσωση

$$g_{\alpha\beta} = -(\beta^2/N^2)(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}v^2\delta_{\alpha\beta}) \sum_{s=0}^{\infty} B_s S_{s/2}^s(\beta v^2). \quad (10.13)$$

Αντικαταστήνοντας στην (8.6), πολλαπλασιάζοντας με

$$f_0(v) S_{s/2}^s(\beta v^2) (v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}v^2\delta_{\alpha\beta}),$$

και ολοκληρώνοντας ως προς  $d^3p$  οδηγεί σε ένα σύνολο εξισώσεων

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_s B_s = 5\delta_{l0}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.14)$$

$$b_{ls} = (\beta^3/N^2) \{ (v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}v^2\delta_{\alpha\beta}) S_{s/2}^s, (v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}v^2\delta_{\alpha\beta}) S_{s/2}^s \}. \quad (10.15)$$

Το ιξώδες βρίσκεται από την (8.9) και είναι

$$\eta = \frac{1}{4} m B_0. \quad (10.16)$$

Το άπειρο σύνολο των εξισώσεων (10.9) ή (10.14) λύνεται προσεγγιστικά με την διατήρηση των πρώτων όρων στο ανάπτυγμα (10.7) ή (10.13), π.χ. με τεχνικό τερματισμό του συνόλου τους. Η προσέγγιση συγκλίνει ταχύτατα καθώς ο αριθμός των όρων αυξάνει: γενικά, διατηρώντας ένα μόνο όρο παίρνουμε την τιμή του  $\kappa$  ή  $\eta$  με ακρίβεια 1 - 2%.

Θα δείξουμε ότι η προσεγγιστική λύση της γραμμικοποιημένης εξίσωσης μεταφοράς στα μονοατομικά αέρια με τη παραπάνω μέθοδο δίνει τιμές των κινητικών συντελεστών οι οποίες είναι σίγουρα μικρότερες από αυτές που παίρναμε από την ακριβή επίλυση της εξίσωσης. Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφτεί με τη συμβολική μορφή

$$I(g) = L, \quad (10.17)$$

όπου οι συναρτήσεις  $g$  και  $L$  είναι διανύσματα στο πρόβλημα της θερμικής αγωγής, και ταυιστές δεύτερης τάξης στο πρόβλημα του ιξώδους. Ο αντίστοιχος κινητικός συντελεστής προσδιορίζεται από τη συνάρτηση  $g$  και είναι ποσότητα ανάλογη του ολοκληρώματος.

$$- \int f_0 g I(g) d^3 p; \quad (10.18)$$

Η προσεγγιστική συνάρτηση  $g$ , παρόλα αυτά, ικανοποιεί δεν ικανοποιεί την ίδια τη συνάρτηση (10.17) αλλά μόνο τη σχέση ολοκλήρωσης

$$\int f_0 g I(g) d^3 p = \int f_0 L g d^3 p, \quad (10.19)$$

όπως φαίνεται από το τρόπο με τον οποίο προσδιορίζονται οι συντελεστές στα αναπτύγματα του  $g$ .

Η παραπάνω δήλωση είναι επακόλουθο της μεταβολικής αρχής ("variational principle") όπου η λύση της (10.17) δίνει ένα μέγιστο της συνάρτησης (10.18) που είναι της τάξης των συναρτήσεων που ικανοποιούν τη συνθήκη (10.19). Η ισχύς αυτής της αρχής φαίνεται αν θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$- \int f_0 (g - \varphi) I(g - \varphi) d^3 p,$$

Όπου  $g$  είναι η λύση της (10.17), και  $\varphi$  οποιαδήποτε υπό δοκιμή συνάρτηση  $n$  η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (10.19). Αυτό το ολοκλήρωμα είναι θετικό, εξαιτίας της γενικής ιδιότητας (9.13) του τελεστή  $I$ . Αναπτύσσοντας τις παρενθέσεις, γράφουμε

$$- \int f_0 \{g I(g) + \varphi I(\varphi) - \varphi I(g) - g I(\varphi)\} d^3 p.$$

Μιας και η αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας σε ένα μονοατομικό αέριο δίνεται από το τύπο (2.8), ο τελεστής  $I$  έχει την αυτοσυζυγική ιδιότητα (9.11). Συνεπώς τα ολοκληρώματα των δυο τελευταίων όρων που βρίσκονται μέσα στις αγκύλες είναι ίσα μεταξύ τους. Αντικαθιστώντας με  $I(g) = L$  παίρνουμε

$$- \int f_0 \{g I(g) + \varphi I(\varphi) - 2\varphi I(g)\} d^3 p = - \int f_0 \{g I(g) + \varphi I(\varphi) - 2L\varphi\} d^3 p > 0.$$

Τελικά, μετασχηματίζοντας το ολοκλήρωμα του τελευταίου όρου μέσω της (10.19), βρίσκουμε

$$- \int f_0 g I(g) d^3 p > - \int f_0 \varphi I(\varphi) d^3 p,$$

όπως και έπρεπε να αποδειχθεί.

Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα περίπτωση, παρόλο που δεν είναι άμεσης φυσικής σημασίας, δηλαδή στην περίπτωση ενός αερίου με σωματίδια που αλληλεπιδρούν σύμφωνα με την  $U = a/r^4$ . Εδώ υπάρχει η ιδιότητα ότι η ενεργός διατομή σύγκρουσης για τέτοια σωματίδια (όπως καθορίζεται από την κλασική μηχανική) είναι αντιστρόφως ανάλογη της σχετικής ταχύτητας  $u_{rel}$ , και συνεπώς το

γινόμενο  $u_{rel} ds$  το οποίο εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα σύγκρουσης εξαρτάται μόνο από τη γωνία σκέδασης  $\theta$ , όχι από την σχετική ταχύτητα  $u_{rel}$ . Η υπό εξέταση ιδιότητα αποδεικνύεται εύκολα με διαστατικούς παραμέτρους (dimensional arguments): η ενεργός διατομή εξαρτάται μόνο από τρεις παραμέτρους, πιο συγκεκριμένα την σταθερά  $a$ , τη μάζα σωματιδίου  $m$ , και την ταχύτητα  $u_{rel}$ , και από αυτά δεν μπορούμε να σχηματίσουμε αδιάστατο συνδυασμό (no dimensionless combination), και μόνο ένας συνδυασμός  $(a/m)^{1/2}$  μπορεί να σχηματιστεί ο οποίος έχει τις διαστάσεις μια περιοχής, η οποία πρέπει να είναι ανάλογη της διατομής. Η ιδιότητα αυτή της διατομής απλοποιεί αρκετά τη μορφή του ολοκληρώματος σύγκρουσης και γίνεται δυνατή η εύρεση ακριβών λύσεων των γραμμικοποιημένων εξισώσεων μεταφοράς για τα προβλήματα θερμικής αγωγιμότητας (thermal conduction) και ιξώδους. Αυτές οι λύσεις είναι οι πρώτοι όροι στα αναπτύγματα (10.7) και (10.13).

### **§11. Διάχυση ενός ελαφρού αερίου σε ένα βαρύ**

Εδώ θα μελετηθεί το φαινόμενο της διάχυσης σε ένα μίγμα δυο αερίων για κάποιες ιδιαίτερες περιπτώσεις οι οποίες επιτρέπουν εκτενή θεωρητική ανάλυση.

Ας θεωρήσουμε ότι  $N_1$  και  $N_2$  υποδηλώνουν τις αριθμητικές πυκνότητες των σωματιδίων των δυο αερίων του μίγματος, και ότι η συγκέντρωση του μίγματος εκφράζεται από τη λόγο  $c = N_1/N$  όπου  $N = N_1 + N_2$ . Ο συνολική αριθμητική συγκέντρωση των μορίων σχετίζεται με την πίεση και τη θερμοκρασία όπως φαίνεται από τη σχέση  $N = P/T$ . Η πίεση του αερίου είναι σταθερή σε όλο τον όγκο του. Ας θεωρήσουμε ότι η συγκέντρωση και η θερμοκρασία μεταβάλλονται κατά τον  $x$  άξονα (επιτρέποντας μια μεταβολή θερμοκρασίας, συμπεριλαμβανουμε τη θερμική διάχυση στο πρόβλημα).

Ας θεωρήσουμε ότι σε ένα μίγμα αερίων από τα οποία το ένα (το βαρύ αέριο) αποτελείται από μόρια των οποίων η μάζα είναι πολύ μεγαλύτερη από εκείνη των μορίων του άλλου αερίου (το ελαφρύ αέριο). Το δεύτερο θα το θεωρήσουμε μονοατομικό. Μιας και η μέση θερμική ενέργεια της μεταφραζόμενης κίνησης είναι η ίδια για όλα τα μόρια (σε μια δεδομένη θερμοκρασία), η μέση ταχύτητα των βαρέων μορίων είναι πολύ μικρότερη από αυτή των ελαφρύτερων, και κατά προσέγγιση μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι σε ηρεμία. Όταν ένα ελαφρύ μόριο και ένα βαρύ συγκρουστούν, το δεύτερο μπορεί να θεωρηθεί ότι παραμένει σταθερό (ακίνητο), ενώ η ταχύτητα του ελαφριού μορίου αλλάζει διεύθυνση παραμένοντας αμετάβλητη σε μέγεθος.

Σε αυτή την ενότητα θα πάρουμε την περίπτωση όπου η συγκέντρωση του ελαφριού αερίου (αέριο 1) στο μίγμα είναι μικρή. Τότε οι συγκρούσεις ανάμεσα στα άτομα του είναι σχετικά σπάνιες και μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα ελαφρά σωματίδια συγκρούονται μόνο με τα βαριά.

Στη γενική περίπτωση ενός αυθαίρετου μίγματος αερίου, μια ξεχωριστή εξίσωση μεταφοράς πρέπει να δημιουργηθεί για την συνάρτηση κατανομής των μορίων κάθε αερίου, όπου το δεξί τμήμα της θα περιέχει το σύνολο των ολοκληρωμάτων σύγκρουσης ανάμεσα στα μόρια κάθε αερίου και εκείνα αυτού και καθενός άλλου αερίου. Στην συγκεκριμένη περίπτωση που συζητείται, παρόλα αυτά, είναι βολικό να πάρουμε την απλοποιημένη εξίσωση μεταφοράς εξαρχής (ab initio).

Η απαιτούμενη εξίσωση θα προσδιορίσει την συνάρτηση κατανομής για τα σωματίδια του ελαφριού αερίου, την οποία ονομάζουμε  $f(p, x)$ . Με αυτές τις υποθέσεις, οι συγκρούσεις ανάμεσα σε ελαφρά και βαριά σωματίδια δεν επηρεάζουν την κατανομή των δευτέρων, και στο πρόβλημα διάχυσης αυτή η κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί όπως δίνεται.

Ας θεωρήσουμε το  $\theta$  ως τη γωνία ανάμεσα στη διεύθυνση της ορμής  $p = m_1 v$  ενός ελαφρού σωματιδίου και τον  $x$  άξονα. Είναι φανερό από τη συμμετρία των συνθηκών του προβλήματος ότι η συνάρτηση κατανομής θα εξαρτάται μόνο από την  $\theta$  (και από τις μεταβλητές  $p$  και  $x$ ). Θεωρώντας ότι



$d\sigma = F(p, \alpha) d\omega'$  δηλώνει την ενεργό διατομή για συγκρούσεις στις οποίες ένα ελαφρύ σωματίδιο με ορμή  $p$  αποκτάει μια ορμή  $p' = mv'$  που κατευθύνεται στην στοιχειώδη στερεά γωνία  $d\omega'$ . Η  $\alpha$  είναι η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα  $p$  και  $p'$  (των οποίων τα μεγέθη είναι ίσα). Η πιθανότητα ανά μονάδα μήκους διαδρομής στην οποία το σωματίδιο θα υποστεί τέτοια σύγκρουση είναι  $N_2 d\sigma$ , όπου  $N_2$  είναι η αριθμητική πυκνότητα των βαρέων σωματιδίων. Η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου προκύπτει πολλαπλασιάζοντας με την ταχύτητα του σωματιδίου:  $N_2 v d\sigma$ .

Ας θεωρήσουμε μόρια που σε μια δεδομένη μονάδα όγκου έχουν ορμές σε ένα εύρος μεγεθών  $dp$  και κατευθύνονται στην στοιχειώδη στερεά γωνία  $d\omega$ . Ο αριθμός τέτοιων σωματιδίων είναι  $f d^3 p = f(p, \theta, x) p^2 dp d\omega$ . Από αυτά,

$$f(p, \theta, x) p^2 dp d\omega \cdot N_2 v F(p, \alpha) d\omega'$$

σωματίδια ανά μονάδα χρόνου αποκτούν λόγω συγκρούσεων μια ορμή  $p'$  που κατευθύνεται στο  $d\omega'$ . Συνεπώς ο συνολικός αριθμός σωματιδίων των οποίων η ορμή τους αλλάζει κατεύθυνση είναι

$$d^3 p \int N_2 v f(p, \theta, x) F(p, \alpha) d\omega'.$$

Αντιστρόφως, από τα σωματίδια στο  $d^3 p' = p'^2 dp' d\omega'$ ,

$$f(p', \theta', x) p'^2 dp' d\omega' \cdot N_2 v' F(p', \alpha) d\omega$$

αποκτούν μια ταχύτητα κατευθυνόμενα στην  $d\omega$ . Αφού  $p' = p$ , ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων που αποκτούν μια ταχύτητα στην  $d^3 p$  ως αποτέλεσμα των συγκρούσεων είναι

$$d^3 p \int N_2 v' f(p, \theta', x) F(p, \alpha) d\omega'.$$

Συνεπώς η αλλαγή του αριθμού των σωματιδίων στην  $d^3 p$  είναι η διαφορά

$$d^3 p \cdot N_2 v \int F(p, \alpha) [f(p, \theta', x) - f(p, \theta, x)] d\omega'.$$

Αυτός πρέπει να είναι ίσος με την παράγωγο του συνολικού χρόνου

$$d^3 p (df/dt) = d^3 p \mathbf{v} \cdot \nabla f = d^3 p (\partial f / \partial x) v \cos \theta.$$

Εξισώνοντας τις δυο εκφράσεις καταλήγουμε στην απαιτούμενη εξίσωση μεταφοράς

$$v \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} = N_2 v \int F(p, \alpha) [f(p, \theta', x) - f(p, \theta, x)] d\omega' \equiv C(f). \quad (11.1)$$

Το δεξί μέρος είναι μηδέν για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f$  που δεν εξαρτάται από τη κατεύθυνση της  $p$ , και όχι μόνο για τη συνάρτηση Maxwell  $f_0$  όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης Boltzmann. Αυτό οφείλεται στην υπόθεση ότι το μέγεθος της ορμής παραμένει αμετάβλητο κατά τη σκέδαση των ελαφρών σωματιδίων από τα βαριά: τέτοιες συγκρούσεις αφήνουν κάθε κατανομή ενέργειας των ελαφρών σωματιδίων σταθερή. Στην πραγματικότητα, η εξίσωση (11.1) αντιστοιχεί μόνο στην προσέγγιση μηδενικής τάξης σε σχέση με τη μικρή ποσότητα  $m_1/m_2$ , και η χαλάρωση ενέργειας επιτυγχάνεται στην επόμενη προσέγγιση.

Αν οι κλίσεις της συγκέντρωσης και της θερμοκρασίας δεν είναι πολύ μεγάλες (αυτές οι ποσότητες μεταβάλλονται ελαφρά για αποστάσεις της τάξης της μέσης μοναδιαίας διαδρομής), μπορούμε να ψάξουμε να βρούμε την  $f$  ως το άθροισμα

$$f = f_0(p, x) + \delta f(p, \theta, x),$$

Όπου  $\delta f$  είναι μια μικρή διόρθωση στη συνάρτηση κατανομής τοπικής ισορροπίας  $f_0$  και είναι γραμμική στις κλίσεις των  $c$  και  $T$ . Επομένως, ψάχνουμε την  $\delta f$  με την μορφή

$$\delta f = \cos \theta \cdot g(p, x). \quad (11.2)$$

όπου  $g$  είναι μια συνάρτηση των  $p$  και  $x$  μόνο. Κατά την αντικατάσταση στην (11.1), αρκεί να διατηρήσουμε το όρο  $f_0$  στο αριστερό μέρος. Στο ολοκλήρωμα σύγκρουσης, ο όρος  $f_0$  χάνεται:

$$C(f) = g N_2 v \int F(p, \alpha) (\cos \theta' - \cos \theta) d\omega';$$

η συνάρτηση  $g$ , η οποία είναι ανεξάρτητη των γωνιών, έχει βγει έξω από το ολοκλήρωμα. Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να απλοποιηθεί όπως θα δείξουμε παρακάτω. Θεωρούμε την διεύθυνση της ορμής  $p$  ως τον πολικό άξονα για την μέτρηση των γωνιών. Θεωρούμε ότι  $\varphi$  και  $\varphi'$  είναι τα αζιμούθια του άξονα  $x$  και της ορμής  $p'$  σε σχέση με τον πολικό άξονα. Τότε παίρνουμε

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos(\varphi - \varphi').$$

Τότε έχουμε την στοιχειώδη στερεά γωνία  $d\omega' = \sin \alpha da d\varphi'$ , αφού  $\alpha$  είναι η πολική γωνία της ορμής  $p'$ . Το ολοκλήρωμα του όρου στο συννημίτονο  $\cos(\varphi - \varphi')$  δίνει μηδέν από την ολοκλήρωση ως προς  $d\varphi'$ . Έτσι έχουμε

$$C(f) = - N_2 \sigma_1(p) v g \cos \theta = - N_2 \sigma_1(p) v \delta f, \quad (11.3)$$

Όπου

$$\begin{aligned}\sigma_t(p) &= 2\pi \int F(p, \alpha)(1 - \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \\ &= \int (1 - \cos \alpha) \, d\sigma\end{aligned}\quad (11.4)$$

ονομάζεται η ενεργός διατομή μεταφοράς για τις συγκρούσεις (transport cross-section).

Από την (11.1), τώρα βρίσκουμε

$$g(p, x) = -\frac{1}{N_2 \sigma_t} \frac{\partial f_0}{\partial x}. \quad (11.5)$$

Η ροή διάχυσης  $i$  είναι, εξ ορισμού, η ροή των μορίων του ενός στοιχείου του μίγματος (στην περίπτωση αυτή, του ελαφριού). Υπολογίζεται από τη συνάρτηση κατανομής ως το ολοκλήρωμα

$$i = \int f v \, d^3 p, \quad (11.6)$$

ή, μιας και το διάνυσμα  $i$  βρίσκεται κατά μήκος του άξονα  $x$ ,

$$i = \int \cos \theta \cdot f v \, d^3 p = \int \cos^2 \theta \cdot g v \, d^3 p; \quad (11.7)$$

ο όρος  $f_0$  χάνεται κατά την ολοκλήρωση ως προς τις γωνίες. Αντικατάσταση της (11.5) δίνει

$$\begin{aligned}i &= -\frac{1}{N_2} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{f_0 v \cos^2 \theta}{\sigma_t(p)} \, d^3 p \\ &= -\frac{1}{3N_2} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{f_0 v}{\sigma_t} \, d^3 p.\end{aligned}$$

Αυτή η έκφραση μπορεί να γραφτεί ως

$$i = -\frac{1}{3N_2} \frac{\partial}{\partial x} \{N_1 \langle v/\sigma_1 \rangle\},$$

όπου ο μέσος όρος της είναι ως προς την κατανομή Maxwell (Maxwellian distribution). Τελικά, χρησιμοποιούμε τη συγκέντρωση  $c = N_1/N$   $N_1/N_2$  (μιας και ισχύει ότι  $N_2 \gg N_1$  από την υπόθεση), και αντικαθιστώντας το  $N_2$  με το κατά προσέγγιση  $N = P/T$ . Διατηρώντας την πίεση σταθερή, καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} i &= -\frac{1}{3} T \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c}{T} \langle v/\sigma_1 \rangle \right\} \\ &= -\frac{1}{3} \langle v/\sigma_1 \rangle \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{3} c T \frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{1}{T} \langle v/\sigma_1 \rangle \right] \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Αυτό συγκρίνεται με την φαινομενολογική έκφραση για την ροή διάχυσης,

$$i = -ND \left( \nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T \right), \quad (11.9)$$

Η οποία προσδιορίζει τον συντελεστή διάχυσης  $D$  (diffusion coefficient) και τον λόγο θερμικής

διάχυσης  $k_T$  (thermal diffusion ratio). Το γινόμενο  $D_T = Dk_T$ , είναι ο συντελεστής θερμικής διάχυσης (thermal diffusion coefficient). Συνεπώς βρίσκουμε

$$D = (T/3P) \langle v/\sigma_1 \rangle, \quad (11.10)$$

$$k_T = cT \frac{\partial}{\partial T} \log \frac{\langle v/\sigma_1 \rangle}{T}. \quad (11.11)$$

Στην ισορροπία διάχυσης σε ένα ανομοιομορφα θερμαινόμενο αέριο, μια κατανομή συγκέντρωσης σχεδιάζεται στην οποία η ροή διάχυσης  $i = 0$ . Εξισώνοντας την έκφραση μέσα στις αγκύλες της (11.8) με μια σταθερή, παίρνουμε

$$c = \text{constant} \times \frac{T}{\langle v/\sigma_1 \rangle}. \quad (11.12)$$

Υποθέτοντας ότι η ενεργός διατομή  $\sigma_1$ , είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας, και σημειώνοντας ότι  $\langle u \rangle \sim (T/m_1)^{1/2}$ , βρίσκουμε ότι, στην ισορροπία διάχυσης ενός μίγματος με χαμηλή συγκέντρωση του ελαφριού αερίου, ότι η συγκέντρωση είναι ανάλογη του  $\frac{1}{T}$ , π.χ. το ελαφρύ αέριο συγκεντρώνεται στις περιοχές όπου η θερμοκρασία είναι υψηλή. Ο συντελεστής διάχυσης σε σειρά μεγέθους είναι

$$D \sim \bar{v}l, \quad (11.13)$$

όπου  $\bar{v}$  είναι η μέση θερμική ταχύτητα των μορίων του ελαφριού αερίου και  $l \sim 1/N_0$  η μέση ελεύθερη διαδρομή. Υπάρχει μια γνωστή βασική διαφύση αυτού του τύπου. Ο αριθμός των μορίων στο αέριο  $N_1$  που διασχίζουν μια μοναδιαία περιοχή κάθετη στον άξονα  $x$  από τα αριστερά προς τα δεξιά ανά μονάδα χρόνου είναι ίσος σε σειρά μεγέθους με το γινόμενο  $N_1 \bar{v}$ , όπου η πυκνότητα  $N_1$  θεωρείται ότι είναι σε μια απόσταση  $l$  στα αριστερά της περιοχής, π.χ. στα σημεία από όπου τα μόρια φτάνουν εκείνη την περιοχή χωρίς να συγκρουστούν. Ομοίως βρίσκουμε ότι ο αριθμός των μορίων που διασχίζουν την ίδια περιοχή από τα δεξιά προς τα αριστερά, και η διαφορά ανάμεσα στους δυο αριθμούς δίνει την ροή διάχυσης (diffusion flux):

$$i \sim N_1(x-l)\bar{v} - N_1(x+l)\bar{v} \sim -l\bar{v} dN_1/dx,$$

η οποία δίνει την (11.13).

## **§ 12. Διάχυση ενός βαρέος αερίου σε ένα ελαφρύ αέριο**

Ας θεωρήσουμε τώρα την αντίθετη περιοριστική περίπτωση, όπου η συγκέντρωση ενός βαριού αερίου στο μίγμα είναι μικρή. Σε αυτή την περίπτωση, ο συντελεστής διάχυσης μπορεί να υπολογιστεί έμμεσα χωρίς τη χρήση της εξίσωσης μεταφοράς, βρίσκοντας την κινητικότητα (mobility) των σωματιδίων του βαριού αερίου, και θεωρώντας ότι αυτό το αέριο βρίσκεται σε εξωτερικό πεδίο. Η κινητικότητα  $b$  σχετίζεται με τον συντελεστή διάχυσης των ιδίων σωματιδίων μέσω της γνωστής σχέσης του Einstein

$$D = bT; \quad (12.1)$$

Η κινητικότητα είναι, εξ ορισμού, ο συντελεστής αναλογικότητας (proportionality coefficient) ανάμεσα στη μέση ταχύτητα  $V$  που αποκτά ένα σωματίδιο που βρίσκεται στο εξωτερικό πεδίο, και τη δύναμη  $f$  η οποία ασκείται πάνω στο σωματίδιο από το πεδίο:

$$V = bf. \quad (12.2)$$

Η ταχύτητα  $V$  καθορίζεται από τη συνθήκη όπου η δύναμη  $f$  εξισορροπεί την αντίσταση  $f$  που ασκείται πάνω στο κινούμενο βαρύ σωματίδιο από τα ελαφριά σωματίδια. Οι συγκρούσεις ανάμεσα στα βαριά σωματίδια μπορούν να παραλειφθούν, επειδή υπάρχουν σχετικά λίγα

αυτά. Η συνάρτηση κατανομής Maxwell των ελαφριών σωματιδίων είναι:

$$f_0 = \frac{N_1}{(2\pi m_1 T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_1 v^2}{2T}\right),$$

όπου  $m_1$  είναι η μάζα του ελαφριού σωματιδίου.

Ας θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο βαρύ σωματίδιο με ταχύτητα  $V$ , και τις συντεταγμένες πάνω στις οποίες κινείται. Ας θεωρήσουμε ότι το  $v$  υποδηλώνει τις ταχύτητες των ελαφριών σωματιδίων σε αυτές τις συντεταγμένες. Η συνάρτηση μεταφοράς των ελαφριών σωματιδίων για αυτές τις συντεταγμένες είναι  $f_0(v + V)$ . Θεωρώντας ότι το  $V$  είναι μικρό, μπορούμε να γράψουμε

$$f_0(\mathbf{v} + \mathbf{V}) \approx f_0(v)(1 - m_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/T). \quad (12.3)$$

Η απαιτούμενη αντίσταση  $f$ , υπολογίζεται ως το σύνολο των ορμών που μεταφέρονται στο βαρύ σωματίδιο από τα ελαφριά σωματίδια κατά τις συγκρούσεις τους με αυτό ανά μονάδα χρόνου. Το πλαίσιο αναφοράς παραμένει αμετάβλητο κατά τη σύγκρουση. Το ελαφρύ σωματίδιο έχει ορμή  $m_1 v$ . Μετά τη σύγκρουση, κατά την οποία η ορμή του στρέφεται κατά μια γωνία  $\alpha$ , αποβάλλει μια μέση ορμή  $m_1 v \cos \alpha$ . Συνεπώς, η μέση ορμή που μεταφέρεται στο βαρύ σωματίδιο σε μια τέτοια σύγκρουση είναι  $m_1 v(1 - \cos \alpha)$ . Πολλαπλασιάζοντας αυτό με την ροή των ελαφριών σωματιδίων που κινούνται με ταχύτητα  $v$  και με τη διατομή  $da$  για μια τέτοια σύγκρουση, και ολοκληρώνοντας, καταλλήγουμε στην ολική ορμή που μεταφέρεται στο βαρύ σωματίδιο:

$$\mathbf{f}_r = m_1 \int f_0(\mathbf{v} + \mathbf{V}) v v \sigma_i d^3 p,$$

ξανά με την παρατήρηση (11.4). Όταν η  $f_0(\mathbf{v} + \mathbf{V})$  αντικατασταθεί στον τύπο (12.3), ο πρώτος όρος δίνει μηδέν κατά την ολοκλήρωση ως προς τις διευθύνσεις του  $v$ , και αφήνει

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_1^2}{T} \int f_0(v) \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} v \sigma_i d^3 p,$$

ή αν βγάξουμε τον μέσο όρο ως προς τις διευθύνσεις του  $v$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_r &= -\frac{m_1^2}{3T} \mathbf{V} \int f_0(v) \sigma_i v^3 d^3 p \\ &= -N_1 \frac{m_1^2}{3T} \mathbf{V} \langle \sigma_i v^3 \rangle, \end{aligned}$$

όπου οι αγκύλες υποδηλώνουν ξανά τον μέσο όρο που έχει βγει ως προς την συνηθισμένη κατανομή Maxwell. Τέλος, αφού στην περίπτωση αυτή έχουμε  $N_1 = N_2$ , γράφουμε  $N_1 = N = P/T$ , ούτως ώστε

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_i^2 P}{3T^2} \langle \sigma_i v^3 \rangle \mathbf{V}.$$

Εξισώνοντας το άθροισμα της αντίστασης  $f_r$  και της δύναμης του εξωτερικού πεδίου  $f$  με μηδέν, βρίσκουμε από την (12.2) την κινητικότητα  $b$ , και συνεπώς το συντελεστή διάχυσης

$$D = bT = 3T^3/m_i^2 P \langle \sigma_i v^3 \rangle. \quad (12.4)$$

Για να υπολογίσουμε τη θερμική διάχυση σε αυτλή την περίπτωση, θα ήταν απαραίτητο να γνωρίζουμε τη συνάρτηση κατανομής των σωματιδίων του ελαφριού αερίου παρουσία μιας κλίσης θερμοκρασίας. Ο συντελεστής θερμικής διάχυσης συνεπώς μπορεί να υπολογιστεί παίρνοντας μια γενική μορφή εδώ.

Με σειρά μεγέθους  $D \sim \lambda^2 / N\sigma$ , όπου  $\lambda \sim (T/m_i)$  είναι, όπως και την (11,13), η μέση θερμική ταχύτητα των μορίων του ελαφριού αερίου. Συνεπώς η σειρά μεγέθους του συντελεστή διάχυσης είναι η ίδια σε κάθε περίπτωση:

$$D \sim T^{3/2} / \sigma P m_i^{1/2}. \quad (12.5)$$

### **§ 13. Φαινόμενα μεταφοράς σε ένα αέριο που βρίσκεται σε εξωτερικό πεδίο**

Οι βαθμοί ελευθερίας περιστροφής των μορίων δίνουν το μηχανισμό όπου ένα εξωτερικό μαγνητικό ή ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να επηρεάσει τα φαινόμενα μεταφοράς σε ένα αέριο. Η επίδραση είναι της ίδιας φύσης και στην περίπτωση του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση ενός αερίου σε ένα μαγνητικό πεδίο.

Ένα μόριο που περιστρέφεται έχει γενικά μια μαγνητική ροπή, τη μέση τιμή της οποίας (στο επίπεδο της κβαντομηχανικής) θα την δηλώσουμε ως  $\mu$ . Το μαγνητικό πεδίο θα θεωρηθεί τόσο αδύναμο που η  $\mu B$  είναι μικρή σε σχέση με τα μεσοδιαστήματα ανάμεσα στις λεπτές δομές των μοριακών επιπέδων. Μπορούμε να παραβλέψουμε την επίδραση του πεδίου στη κατάσταση του μορίου, ώστε η μαγνητική ροπή να υπολογίζεται για την μη διαταραγμένη κατάσταση. Για σχετικά υψηλές θερμοκρασίες, δηλαδή την περίπτωση που θα θεωρήσουμε, η  $\mu B$  είναι μικρή σε σχέση με την  $T$  επίσης: αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να παραβλέψουμε την επίδραση του πεδίου στην συνάρτηση κατανομής ισορροπίας των μορίων του αερίου.

Η μαγνητική ροπή είναι παράλληλη με την γωνιακή στοφορμή περιστροφής  $M$  του μορίου, και μπορεί να δοθεί ως

$$\mu = \gamma M. \quad (13.1)$$

Η κλασική περιστροφή ενός μορίου αντιστοιχεί σε μεγάλα κβαντικά νούμερα περιστροφής. Τότε μπορούμε να παραβλέψουμε στην  $M$  τη διαφορά ανάμεσα στην ολική στροφορμή και την γωνιακή στροφορμή περιστροφής. Η τιμή του συνεχούς συντελεστή (constant coefficient)  $\gamma$  εξαρτάται από τη φύση του μορίου και τη φύση της μαγνητικής ροπής του. Για παράδειγμα, σε ένα διατομικό μόριο με μη μηδενικό spin  $S$ ,

$$\gamma \approx (2\sigma/M)\mu_B, \quad (13.2)$$

όπου  $\mu_B$  είναι η Μαγνητόνη Bohr (Bohr magneton), και ο αριθμός  $\sigma = J - K$  είναι η διαφορά ανάμεσα στους κβαντικούς αριθμούς  $J$  της ολικής στροφορμής και  $K$  της στροφορμής περιστροφής (το  $\sigma$  παίρνει τις τιμές  $S, S - 1, \dots, -S$ ). Στον παρανομαστή, η διαφορά ανάμεσα στα  $J$  και  $K$  δεν είναι σημαντική:  $M \approx \hbar J \approx \hbar K$ . Στην (13.2) θεωρείται ότι η επίδραση από το spin του άξονα (spin-axis interaction) στο μόριο είναι μικρή σε σχέση με τα μεσοδιαστήματα στην περιστροφική δομή των επιπέδων (rotational structure of the levels) (η περίπτωση Hund b).

Σε ένα μαγνητικό πεδίο  $B$ , το μόριο υποβάλλεται σε μια ροπή στρέψης  $\mu \times B$ . Το διάνυσμα  $M$  τότε δεν είναι συνεχές (constant) κατά τη διάρκεια της "ελεύθερης" κίνησης του μορίου, αλλά μεταβάλλεται σύμφωνα με την

$$dM/dt = \mu \times B = -\gamma B \times M; \quad (13.3)$$

το διάνυσμα  $M$  προπορεύεται γύρω από την διεύθυνση του πεδίου με γωνιακή ταχύτητα  $-\gamma B$ .

Το αριστερό μέρος της εξίσωσης μεταφοράς συνεπώς έχει ένα προστιθέμενο όρο  $(\partial f / \partial M)$ .  $M$ , και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} = C(f). \quad (13.4)$$

Οι μεταβλητές  $\Gamma$  από τις οποίες εξαρτάται η συνάρτηση κατανομής πρέπει επίσης να συμπεριλάβουν τη διακριτή μεταβλητή  $\sigma$ , η οποία καθορίζει την τιμή της μαγνητικής ροπής, αν υπάρχει τέτοια μεταβλητή, όπως στην (13.2).

Σε προβλήματα θερμικής αγωγιμότητας και ιξώδους, πάλι θεωρούμε την κατανομή κοντά σε αυτήν της ισορροπίας, και την εκφράζουμε ως

$$f = f_0(1 + \chi/T). \quad (13.5)$$

Πρώτα θα δείξουμε ότι ένας όρος της  $\partial f_0 / \partial M$  δεν βρίσκεται στη συνάρτηση μεταφοράς. Αφού η  $f_0$  εξαρτάται μόνο από την ενέργεια  $\epsilon(\Gamma)$  του μορίου, και  $\partial \epsilon / \partial M$  ισούται με τη γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$ , έχουμε



$$\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{M}} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} \cdot \Omega \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}. \quad (13.6)$$

Για μόρια του περιστρεφόμενου τύπου και σφαιρικής κορυφής (rotator and spherical-top types), τα  $\mathbf{M}$  και  $\Omega$  είναι παράλληλα, και η έκφραση (13.6) είναι ομοίως μηδέν. Με άλλα λόγια, μηδενίζεται αφού βγει ο μέσος όρος των ταχύτητα μεταβαλλόμενων φάσεων. Όταν μόρια συμμετρικής ή μη συμμετρικής κορυφής περιστρέφονται, υπάρχει γρήγορη μεταβολή και της διεύθυνσης των αξόνων του μορίου και της γωνιακής του ταχύτητας  $\Omega$ . Αφού βγάλουμε τους μέσους όρους όπως αναφέραμε πριν, το  $\Omega$  μπορεί να διατηρήσει μόνο την συνιστώσα  $\Omega_M$  κατά μήκος του συνεχούς διανύσματος  $\mathbf{M}$ , και για αυτή τη συνιστώσα το γινόμενο  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} * \Omega_M = 0$ .

Οι υπόλοιποι όροι στην εξίσωση μεταφοράς μετασχηματίζονται κατά τον ίδιο τρόπο όπως φαίνεται στην ενότητα §7 ή §8. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα θερμικής αγωγιμότητας βρίσκουμε της εξίσωση

$$\frac{\epsilon(\Gamma) - c_p T}{T} \mathbf{v} \cdot \nabla T = - \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{M}} + I(\chi). \quad (13.7)$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης πρέπει να αναζητηθεί ξανά στον τύπο  $\chi = g \cdot T$ , αλλά τώρα υπάρχουν τρία αντί για δυο διανύσματα  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  για να κατασκευάσουμε την διανυσματική συνάρτηση  $g(\Gamma)$ . Το εξωτερικό πεδίο δημιουργεί μια χαρακτηριστική κατεύθυνση μέσα στο αέριο. Συνεπώς η διαδικασία της θερμικής διάδοσης (thermal conduction) γίνεται ανισοτροπική, και ο βαθμωτός συντελεστής (scalar coefficient)  $\kappa$  πρέπει να αντικατασταθεί από ένα τανυστή θερμικής αγωγιμότητας  $\kappa_{\alpha\beta}$ , ο οποίος καθορίζει την θερμοκρασιακή ροή κατά

$$q_\alpha = - \kappa_{\alpha\beta} \partial T / \partial x_\beta. \quad (13.8)$$

Ο τανυστής  $\kappa_{\alpha\beta}$  υπολογίζεται από τη συνάρτηση κατανομής ως το ολοκλήρωμα

$$\kappa_{\alpha\beta} = - \frac{1}{T} \int f_0 \epsilon v_\alpha v_\beta d\Gamma. \quad (13.9)$$

Ο γενικός τύπος ενός τανυστή δεύτερης τάξης που εξαρτάται από το διάνυσμα  $\mathbf{B}$  είναι

$$\kappa_{\alpha\beta} = \kappa \delta_{\alpha\beta} + \kappa_1 b_\alpha b_\beta + \kappa_2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} b_\gamma \quad (13.10)$$

όπου  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  είναι ο μοναδιαίος τανυστής αντισυμμετρίας (antisymmetric unit tensor), και  $\kappa$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  είναι βαθμωτά που εξαρτώνται από τη δύναμη του πεδίου  $B$ . Ο τανυστής (13.10) προφανώς έχει την ιδιότητα

$$\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \kappa_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}). \quad (13.11)$$

Η έκφραση (13.10) αντιστοιχεί στη ροή θερμότητας

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T - \kappa_1 \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla T) - \kappa_2 \nabla T \times \mathbf{b}. \quad (13.12)$$

Ο τελευταίος όρος είναι αυτό που ονομάζεται παράδοξο φαινόμενο (odd effect), και αλλάζει πρόσημο ανάλογα με το πεδίο.

Το ολοκλήρωμα  $I(\mathbf{x})$  στο δεξί τμήμα της (13.7) δίνεται από την (6.5). Το ολοκλήρωμα (integrand) περιέχει την συνάρτηση  $f_0$ , η οποία είναι ανάλογη προς την πυκνότητα  $N$  του αερίου. Διαχωρίζοντας αυτό τον παράγοντα και διαιρώντας και τις δυο πλευρές της εξίσωσης με αυτόν, βρίσκουμε ότι η πυκνότητα  $N$  εμφανίζεται μόνο στους συνδιασμούς  $B/N$  με το πεδίο και  $T/N$  με το βαθμωτό της θερμοκρασίας. Συνεπώς είναι ξεκάθαρο ότι η συνάρτηση  $f_0 \mathbf{x} = f_0 \mathbf{g}$ .  $T$  θα εξαρτάται από τις παραμέτρους  $N$  και  $B$  μόνο μέσω του λόγου  $B/N$ . Τα ολοκληρώματα (13.9) θα εξαρτώνται και αυτά από αυτή την ποσότητα, και κατά συνέπεια και οι συντελεστές  $\kappa$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  στην (13.12). Η πυκνότητα  $N$  είναι ανάλογη (σε μια δεδομένη θερμοκρασία) της πίεσης  $P$  του αερίου. Συνεπώς η θερμική αγωγιμότητα ενός αερίου σε ένα μαγνητικό πεδίο εξαρτάται από το πεδίο και την πίεση μόνο μέσω του λόγου  $B/P$ .

Όταν το  $B$  αυξάνει, ο πρώτος όρος στα δεξιά της (13.7) αυξάνει, αλλά ο δεύτερος όρος παραμένει αμετάβλητος. Είναι λοιπόν ξεκάθαρο πως καθώς το  $B \rightarrow \infty$  η λύση της εξίσωσης πρέπει να είναι μια συνάρτηση που να εξαρτάται μόνο από την κατεύθυνση (όχι το μέγεθος) του πεδίου, και αυτή η συνάρτηση πρέπει να μηδενίζει ομοίως τον όρο  $M^* B \cdot \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{M}$  στην εξίσωση. Παρομοίως, οι συντελεστές  $\kappa$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  τείνουν προς συνεχή όρια (constant limits) ανεξάρτητα του  $B$ , καθώς το  $B \rightarrow \infty$ .

Με τον ίδιο τρόπο μεταχειριζόμαστε το ιξώδες ενός αερίου σε μαγνητικό πεδίο. Η αντίστοιχη εξίσωση μεταφοράς είναι

$$\left( m v_a v_\beta - \frac{\epsilon(\Gamma)}{c_v} \delta_{\alpha\beta} \right) V_{\alpha\beta} = I(\chi) - \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{M}}. \quad (13.13)$$

(σύγκρινε με (6.19)). Η λύση πρέπει να αναζητηθεί στον τύπο  $\chi = g_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}$ . Αντί για δυο συντελεστές ιξώδους  $\eta$  και  $\zeta$ , πρέπει τώρα να χρησιμοποιήσουμε ένα τανυστή  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$  τετάρτης τάξης ο οποίος καθορίζει τον τανυστή τάσης ιξώδους

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\gamma\delta}; \quad (13.14)$$

εξ ορισμού, ο τανυστής  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$  είναι συμμετρικός στα ζεύγη των καταλήξεων  $\alpha, \beta$  και  $\gamma, \delta$ . Μέσω της γνωστής συνάρτησης  $\chi$ , οι συνιστώσες του υπολογίζονται ως

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \int m v_a v_\beta f_0 g_{\gamma\delta} d\Gamma. \quad (13.15)$$

Συνεπώς ο τανυστής ιξώδους που βρήκαμε θα ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{B}) = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}(-\mathbf{B}), \quad (13.16)$$

Η οποία εκφράζει την συμμετρία των κινητικών συντελεστών.

Με το διάνυσμα  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$  (και τους μοναδιαίους τανυστές  $\delta_{\alpha\beta}$  και  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ), μπορούμε να σχηματίσουμε τις παρακάτω ανεξάρτητους συνδυασμούς τανυστών που έχουν τις συμμετρικές ιδιότητες του  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$

$$\left. \begin{aligned} (1) & \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}, \\ (2) & \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}, \\ (3) & \delta_{\alpha\gamma}b_{\beta}b_{\delta} + \delta_{\beta\gamma}b_{\alpha}b_{\delta} + \delta_{\alpha\delta}b_{\beta}b_{\gamma} + \delta_{\beta\delta}b_{\alpha}b_{\gamma}, \\ (4) & \delta_{\alpha\beta}b_{\gamma}b_{\delta} + \delta_{\gamma\delta}b_{\alpha}b_{\beta}, \\ (5) & b_{\alpha}b_{\beta}b_{\gamma}b_{\delta}, \\ (6) & b_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + b_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta} + b_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + b_{\beta\delta}\delta_{\alpha\gamma}, \\ (7) & b_{\alpha\gamma}b_{\beta}b_{\delta} + b_{\beta\gamma}b_{\alpha}b_{\delta} + b_{\alpha\delta}b_{\beta}b_{\gamma} + b_{\beta\delta}b_{\alpha}b_{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

όπου  $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}b_{\gamma}$ . Σε όλους αυτούς τους συνδυασμούς εκτός του (4), η ιδιότητα (13.16) συνεπάγεται (αυτόματα από την συμμετρία σε σχέση με τα ζευγάρια των δεικτών  $\alpha, \beta$  και  $\gamma, \delta$ ). Στην (4), οι δυο όροι συνδιάζονται ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη (13.16).

Σε συμφωνία με τον αριθμό των τανυστών (13.17), ένα αέριο που βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο γενικά έχει επτά ανεξάρτητους συντελεστές ιξώδους. Αυτοί μπορούν να ορισθούν ως οι συντελεστές στην ακόλουθη έκφραση για τον τανυστή ιξώδους τάσης:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\alpha\beta} = & 2\eta(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}) + \zeta\delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} \\ & + \eta_1(2V_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} + \delta_{\alpha\beta}V_{\gamma\delta}b_{\gamma}b_{\delta} - 2V_{\alpha\gamma}b_{\gamma}b_{\beta} \\ & - 2V_{\beta\gamma}b_{\gamma}b_{\alpha} + b_{\alpha}b_{\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} + b_{\alpha}b_{\beta}V_{\gamma\delta}b_{\gamma}b_{\delta}) \\ & + 2\eta_2(V_{\alpha\gamma}b_{\gamma}b_{\beta} + V_{\beta\gamma}b_{\gamma}b_{\alpha} - 2b_{\alpha}b_{\beta}V_{\gamma\delta}b_{\gamma}b_{\delta}) \\ & + \eta_3(V_{\alpha\gamma}b_{\beta\gamma} + V_{\beta\gamma}b_{\alpha\gamma} - V_{\gamma\delta}b_{\alpha\gamma}b_{\beta}b_{\delta} - V_{\gamma\delta}b_{\beta\gamma}b_{\alpha}b_{\delta}) \\ & + 2\eta_4(V_{\gamma\delta}b_{\alpha\gamma}b_{\beta}b_{\delta} + V_{\gamma\delta}b_{\beta\gamma}b_{\alpha}b_{\delta}) + \zeta_1(\delta_{\alpha\beta}V_{\gamma\delta}b_{\gamma}b_{\delta} + b_{\alpha}b_{\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}); \quad (13.18) \end{aligned}$$

Το  $\nu_{\alpha\beta}$  ορίζεται στην (6.12). Αυτό έχει σχηματιστεί έτσι ώστε  $\eta, \eta_1, \dots, \eta_4$  να είναι συντελεστές τανυστών που δίνουν μηδέν κατά την συστολή ως προς τα  $\alpha, \beta$ . Τα  $\zeta$  και  $\zeta_1$  είναι συντελεστές τανυστών με μη μηδενικό ίχνος, και μπορούμε να τα αποκαλέσουμε δευτέρους συντελεστές ιξώδους.

Παρατηρήστε ότι περιέχουν όχι μόνο το βαθμωτό  $\operatorname{div} \mathbf{V}$  αλλά και το  $V_{\gamma\delta}b_{\gamma}b_{\delta}$ . Οι δυο πρώτοι όροι στην (13.18) αντιστοιχούν στη συνηθισμένη έκφραση του τανυστή τάσης, ώστε τα  $\eta$  και  $\zeta$  να είναι οι κοινοί συντελεστές ιξώδους.

Οι τανυστές  $\kappa_{\alpha\beta}$  και  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$  πρέπει να είναι αληθινοί τανυστές, μιας και ικανοποιούν την συνθήκη συμμετρίας σε αντιστροφή. Η εγκατάλειψη αυτής της συνθήκης (για ένα αέριο από στερεοϊσομερές υλικό (stereoisomeric) δεν θα οδηγούσε συνεπώς στην ύπαρξη καινούργιων όρων.

Μια τέτοια εγκατάλειψη, παρόλα αυτά, θα επέφερε καινούργιες επιδράσεις, με μια ροή θερμοκρασίας  $q^{(V)}$  εξαιτίας της κλίσεων της ταχύτητας και των τάσεων ιξώδους  $\sigma^{(T)}$  εξαιτίας της κλίσης της θερμοκρασίας. Αυτές οι αλληλεπιδράσεις περιγράφονται από τους τύπους

$$q_{\gamma}^{(V)} = c_{\gamma, \alpha\beta} V_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(T)} = -a_{\alpha\beta, \gamma} \partial T / \partial x_{\gamma}, \quad (13.19)$$

όπου  $c_{\gamma, \alpha\beta}$  και  $a_{\alpha\beta, \gamma}$  είναι οι τανυστές τρίτης τάξης συμμετρικοί στο ζευγάρι των δεικτών που διαχωρίζονται από το κόμμα. Με τα  $\alpha$  και  $X_{\alpha}$  επιλεγμένα όπως και στην ενότητα §9, οι κινητικοί συντελεστές  $\gamma_{\alpha\beta}$  και  $\gamma_{\beta\alpha}$  είναι  $T_{\gamma, \alpha\beta}$  και  $T^2_{\alpha\beta, \gamma}$ . Συνεπώς, η αρχή του Onsager (Onsager's principle) δείχνει ότι παρουσία μαγνητικού πεδίου πρέπει να έχουμε

$$T_{\alpha\beta, \gamma}(\mathbf{B}) = c_{\gamma, \alpha\beta}(-\mathbf{B}). \quad (13.20)$$

Ο γενικός τύπος τέτοιων τανυστών είναι

$$a_{\alpha\beta, \gamma} = a_1 b_{\alpha} b_{\beta} b_{\gamma} + a_2 b_{\gamma} \delta_{\alpha\beta} + a_3 (b_{\alpha} \delta_{\beta\gamma} + b_{\beta} \delta_{\alpha\gamma}) + a_4 (b_{\alpha\gamma} b_{\beta} + b_{\beta\gamma} b_{\alpha}). \quad (13.21)$$

Όλοι οι όροι εδώ είναι ψευδοτανυστές, και έτσι οι σχέσεις (13.19) που περιέχουν αυτούς τους συντελεστές δεν παραμένουν αμετάβλητοι με την αναστροφή.

Ας δούμε λίγο σύντομα τα φαινόμενα μεταφοράς σε ένα αέριο που βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο. Πάιρνουμε ένα αέριο που αποτελείται από πολικά μόρια (π.χ. που έχουν διπολική ροπή  $d$ ) τύπου συμμετρικής κορυφής. Σε ένα ηλεκτρικό πεδίο, ένα πολικό μόριο δέχεται ροπή στρέψης  $d \times E$ , και συνεπώς η εξίσωση μεταφοράς περιέχει ένα όρο

$$\dot{\mathbf{M}} \cdot \partial f / \partial \mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{E} \cdot \partial f / \partial \mathbf{M}.$$

Η διεύθυνση του  $d$  βρίσκεται κατά μήκος του άξονα του μορίου και δεν έχει σχέση με αυτόν της γωνιακής ορμής λόγω περιστροφής  $M$  (rotational angular momentum). Παρόλα αυτά, μετά που βγάλουμε τον μέσο όρο όσο αφορά την ταχύτατη μετάπτωση του άξονα κορυφής κατά την στρέψη του γύρω από την διεύθυνση του συνεχούς διανύσματος  $M$ , μόνο η συνιστώσα  $d$  κατά μήκος του  $M$  παραμένει στον παραπάνω όρο, και έτσι παίρνουμε

$$\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{E} \cdot \partial f / \partial \mathbf{M}, \quad (13.22)$$

όπου  $\gamma = \sigma d/M$ . Η μεταβλητή  $\sigma$  (το συνημίτονο της γωνίας ανάμεσα στο  $d$  και  $M$ ) τώρα παίρνει μια συνεχή αλληλουχία τιμών από  $-1$  στο  $+1$ . Η έκφραση (13.22) διαφέρει από τον αντίστοιχο όρο της περίπτωση με το μαγνητικό πεδίο μόνο στο ότι το  $B$  αντικαθίσταται από το  $E$ . Συνεπώς όλες οι παραπάνω εξισώσεις μεταφοράς και τα συμπεράσματα που βγάλαμε ισχύουν.

Παρόλα αυτά, υπάρχει μια διαφορά που πηγάζει από το γεγονός ότι το ηλεκτρικό πεδίο  $E$  είναι ένα αληθινό διάνυσμα, όχι ένα ψευδοδιάνυσμα, και παραμένει ανεπηρρέαστο από τη χρονική αντιστροφή. Για αυτό τον λόγο, η αρχή του Onsager για τους ταυστές θερμικής αγωγιμότητας και ιξώδους εδώ εκφράζεται από την

$$\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{E}) = \kappa_{\beta\alpha}(\mathbf{E}), \quad \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{E}) = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}(\mathbf{E}), \quad (13.23)$$

αντί για τους (13.11) και (13.16). Αντίστοιχα,  $\kappa_2 = 0$  και  $\eta_3 = \eta_4 = 0$  στην (13.10) και στην (13.18) (όπου τώρα  $b = E/|\mathbf{E}|$ ). Από την άλλη, αλληλεπιδράσεις είναι πιθανόν να υπάρχουν όχι μόνο σε ένα στερεοισομερές αέριο, για το οποίο η (13.21) έχει πλήρη ισχύ, αλλά επίσης σε ένα αέριο με μόρια μη ατεροισομερή: η έκφραση (13.21) με  $\alpha_4 = 0$  τότε είναι ένας αληθινός ταυστής.

#### **§ 14. Φαινόμενα σε ελαφρώς αραιά αέρια**

Οι δυναμικές εξισώσεις κίνησης ενός αερίου, συμπεριλαμβανομένων της θερμικής διάδοσης (thermal conduction) και της εσωτερικής τριβής, περιέχουν τη ροή θερμοκρασίας  $q'$  (το αποσβεστικό εκείνο μέρος της ροής ενέργειας  $q$ ) (dissipative part of the energy flux) και τον ταυστή ιξώδους τάσης  $\sigma'_{\alpha\beta}$  (το αποσβεστικό μέρος της ροής ορμής  $\Pi_{\alpha\beta}$ ). Αυτές οι εξισώσεις αποκτούν πραγματικό νόημα όταν το  $q'$  και ο  $\sigma'_{\alpha\beta}$  έχουν εκφραστεί σε σχέση με τις κλίσεις θερμοκρασίας και ταχύτητας στο αέριο. Παρόλα αυτά, οι συνήθεις εκφράσεις που είναι γραμμικές σε αυτές τις κλίσεις είναι μόνο οι πρώτοι όροι των αναπτύγμάτων σε δυνάμεις του μικρού λόγου  $l/L$  της μέσης ελεύθερης διαδρομής προς τις χαρακτηριστικές διαστάσεις του προβλήματος (που ονομάζεται ο αριθμός Knudsen  $K$  (Knudsen number)). Αν αυτός ο λόγος δεν είναι πολύ μικρός, ίσως είναι λογικό να κάνουμε διορθώσεις βασιζόμενοι στους όρους της επόμενης μικρής τάξης (smallness) στην  $l/L$ . Τέτοιες διορθώσεις γίνονται και στις εξισώσεις κίνησης και στις οριακές συνθήκες που εφαρμόζονται στις εξισώσεις αυτές για τις επιφάνειες σωμάτων που βρίσκονται στην ροή του αερίου.

Οι διαδοχικοί όροι στα αναπτύγματα των ροών  $q'$  και  $\sigma'_{\alpha\beta}$  εκφράζονται μέσω των χωρικών παραγώγων της θερμοκρασίας, πίεσης και ταχύτητας, διαφόρων τάξεων και αφού τις ανεβάσουμε σε διάφορες δυνάμεις. Αυτοί οι όροι πρέπει στη θεωρία να υπολογιστούν με επιπλέον προσεγγίσεις στην λύση της εξίσωσης μεταφοράς. Η προσέγγιση μηδενικής τάξης αντιστοιχεί στην συνάρτηση κατανομής τοπικής ισορροπίας  $f_0$  και στις δυναμικές εξισώσεις ενός ιδανικού αερίου. Η προσέγγιση πρώτης τάξης αντιστοιχεί στην συνάρτηση κατανομής  $f = f_0(1 + x^{(1)}/T)$  που είδαμε στις ενότητες §§6-8, και στις εξισώσεις Navier-Stokes της δυναμικής των ρευστών, και στην εξίσωση θερμικής διάδοσης (thermal conduction). Στη προσέγγιση δεύτερης τάξης, η συνάρτηση κατανομής πρέπει να αναζητηθεί στον τύπο

$$f = f_0 \left[ 1 + \frac{1}{T} \chi^{(1)} + \frac{1}{T} \chi^{(2)} \right] \quad (14.1)$$

και η εξίσωση μεταφοράς πρέπει να γραμμικοποιηθεί σε σχέση με την διόρθωση δεύτερης τάξης  $\chi^{(2)}$ . Η εξίσωση που προκύπτει είναι

$$\frac{T}{f_0} \left( \frac{\partial_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \frac{f_0 \chi^{(1)}}{T} + \frac{T}{f_0} \frac{\partial_1}{\partial t} f_0 - \frac{1}{T^2} \int w' f_{0i} [\chi^{(1)} \chi_i^{(1)} - \chi^{(1)} \chi_i^{(1)}] d\Gamma_i d\Gamma' d\Gamma_i = \frac{1}{T} I(\chi^{(2)}), \quad (14.2)$$

όπου  $I$  είναι ξανά ο γραμμικός ολοκληρωτικός τελεστής (6.5). Το σύμβολο  $\partial_0/\partial t$  δηλώνει ότι οι παράγωγοι χρόνου των μακροσκοπικών ποσοτήτων που εμφανίζονται ως αποτέλεσμα της διαφοράρισης του  $f_0 \chi^{(1)}/T$  πρέπει να εκφραστούν σε σχέση με τις χωρικές παραγώγους μέσω των εξισώσεων μηδενικής τάξης της δυναμικής των ρευστών (εξισώσεις Euler). Το σύμβολο  $\partial_1/\partial t$  δηλώνει ότι οι χρονικοί παράγωγοι μπορούν επίσης να απαλειφθούν μέσω των όρων πρώτης τάξης στις εξισώσεις Navier-Stokes και στην εξίσωση της θερμικής διάδοσης (thermal conduction) (τους όρους που περιέχουν τα  $\eta$ ,  $\zeta$  και  $\kappa$ ).

Δεν θα σημειώσουμε όλους τους αναρίθμητους όρους που βρίσκονται στην  $q'$  και  $\sigma'_{\alpha\beta}$  που προέρχονται από την δεύτερη προσέγγιση και ονομάζονται όροι Burnett (Burnett terms) (D. Burnett, 1935). Σε πολλές περιπτώσεις αυτοί οι όροι έχουν μια μικρή συνεισφορά στην λύση σε σχέση με τις διορθώσεις στις οριακές συνθήκες (boundary conditions), οι οποίες θα συζητηθούν παρακάτω. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το να συμπεριλάβουμε διορθώσεις στις ίδιες τις εξισώσεις θα ήταν μια αδικαιολόγητη υπερβολή της εφικτής ακρίβειας (attainable accuracy). Απλά θα λάβουμε υπόψη κάποιους τυπικούς διορθωτικούς όρους και θα τους υπολογίσουμε για κινήσεις διαφόρων τύπων.

Πρώτα από όλα, ας θεωρήσουμε ότι η μικρή παράμετρο  $K = 1/L$  συσχετίζεται με συγκεκριμένο τρόπο με δυο παραμέτρους που περιγράφουν την κίνηση του ρευστού, και πιο συγκεκριμένα τον αριθμός Reynolds  $R$  (Reynolds number) και τον αριθμό Mach  $M$  (Mach number). Ο αριθμός Reynolds προσδιορίζεται ως  $R \sim VL/\nu$ , όπου  $V$  είναι η χαρακτηριστική κλίμακα της ταχύτητας της ροής και  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες. Ο αριθμός Mach είναι  $M \sim V/u$ , όπου  $u$  είναι η ταχύτητα του ήχου. Σε ένα αέριο, η τάξη του μεγέθους της ταχύτητας του ήχου είναι η ίδια με τη μέση θερμική ταχύτητα των μορίων, και το κινηματικό ιξώδες  $\nu \sim 1$ . Συνεπώς  $R \sim VL/l$ ,  $M \sim V/l$  και ο αριθμός Knudsen είναι

$$K \sim M/R. \quad (14.3)$$

Συνεπώς είναι ξεκάθαρο ότι η συνθήκη  $K \ll 1$  για να ελέγχεται η ροή από τις γραμμικές εξισώσεις της ρευστοδυναμικής επιβάλλει ένα περιορισμό στη σχετική τάξη μεγέθους του  $R$  και του  $M$ . Ας θεωρήσουμε πρώτα τις "αργές" κινήσεις, με

$$R \approx 1, \quad M \ll 1. \quad (14.4)$$

Ας πάρουμε οποιοδήποτε από τους όρους Burnett του τανυστή τάσης ιζώδους που περιέχει το γινόμενο των δυο πρώτων παραγώγων της ταχύτητας, για παράδειγμα

$$\rho l^2 \frac{\partial V_a}{\partial x_\gamma} \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\gamma}, \quad (14.5)$$

Ο συντελεστής  $\rho l^2$  (όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του αερίου) είναι ένας υπολογισμός τάξης μεγέθους. Αυτός ο όρος δίνει μια συνεισφορά  $\sigma^{(2)} \sim \rho l^2 V^2 / L^2$  στο  $\sigma'_{\alpha\beta}$ . Η τάξη μεγέθους των κύριων όρων (Navier-Stokes) στις τάσεις ιζώδους είναι

$$\sigma^{(1)} \sim \eta \partial V / \partial x \sim \rho l \bar{v} V / L,$$

και ο λόγος

$$\sigma^{(2)} / \sigma^{(1)} \sim l V / L \bar{v} \sim l^2 R / L^2.$$

Αφού  $R \approx 1$ , βλέπουμε ότι οι όροι (14.5) δίνουν μια διόρθωση στις τάσεις του ιζώδους που έχουν σχετική τάξη  $(l/L)^2$ . Η διόρθωση στις οριακές συνθήκες (βλέπε παρακάτω) δίνει πολύ μεγαλύτερες διορθώσεις ( $\sim l/L$ ) στην κίνηση.

Οι διορθώσεις είναι ακόμα μικρότερες και προκύπτουν από όρους του τύπου

$$\frac{\rho l^2}{m^2 \bar{v}^2} \frac{\partial T}{\partial x_a} \frac{\partial T}{\partial x_b}, \quad (14.6)$$

αν οι κλίσεις θερμοκρασίας προκύπτουν από την ίδια την κίνηση. Αυτό προκύπτει εξαιτίας των χαρακτηριστικών διαφορών θερμοκρασίας  $\Delta T \sim T V^2 / u^2$ . Αν, παρόλα αυτά, οι διαφορές θερμοκρασίας επιβληθούν από εξωτερικές αιτίες (π.χ. από σώματα που έχουν θερμανθεί και έχουν εμβαπτισθεί στο αέριο), οι όροι Burnett του τύπου (14.6) μπορούν να προκαλέσουν μια σταθερή κίνηση με χαρακτηριστικές ταχύτητες που προσδιορίζονται από την εξίσωση ισορροπίας

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} (\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}) = \frac{\partial P}{\partial x_\alpha}$$

Ένας υπολογισμός της ταχύτητας αυτής της κίνησης είναι η

$$V \sim l(\Delta T)^3 / Lm\bar{v}T^2 \quad (14.7)$$

(M. N. Kogan, V. S. Galkin και O. G. Fridlender 1970). Για να κάνουμε αυτό τον υπολογισμό, πρέπει να θυμηθούμε ότι το Λαπλασιανό (Laplacian) της θερμοκρασίας μπορεί να εκφραστεί, μέσω της εξίσωσης της θερμικής διάδοσης (thermal conduction)  $\text{div}(\kappa \nabla T) = 0$ , ως το τετράγωνο της κλίσης της θερμοκρασίας, και εκείνο της κίνησης που προκαλείται μόνο από το μη δυναμικό μέρος (non-potential part)  $\partial/\partial x_\beta$  της δύναμης. Το δυναμικό μέρος εξισορροπείται από την πίεση.

Παρόμοιες εκτιμήσεις εφαρμόζονται στην ροή θερμότητας  $q'$ . Είναι αδύνατο να φτιάξουμε ένα διορθωτικό όρο δεύτερης τάξης αποκλειστικά από τα παράγωγα της θερμοκρασίας. Ο πρώτος τέτοιος διορθωτικός όρος (μετά το  $-\kappa \nabla T$ ) είναι η σταθερά  $\kappa \Delta T$  (όπου  $\Delta$  είναι ο τελεστής Laplace), και συνεπώς είναι της τρίτης τάξης. Οι όροι οι οποίοι περιλαμβάνουν παράγωγα της ταχύτητας καθώς και παράγωγα της θερμοκρασίας, όπως

$$(\rho l^2/m) \text{div} \mathbf{V} \cdot \nabla T,$$

δίνουν πάλι διορθώσεις της σχετικής τάξης  $l^2/L^2$ . Ας πάρμε τώρα στις "γρήγορες" κινήσεις, με

$$R \gg 1, \quad M \leq 1. \quad (14.8)$$

Σε τέτοιες περιπτώσεις, η κίνηση του αερίου λαμβάνει χώρα σε δυο περιοχές: τον κύριο όγκο, όπου οι όροι του ιξώδους στην εξίσωση της κίνησης είναι ασήμαντοι, και ένα λεπτό οριακό στρώμα, στο οποίο η ταχύτητα του αερίου αυξάνεται πολύ γρήγορα.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τη ροή του αερίου που περνάει από μια επίπεδη πλάκα, και την διεύθυνση της ροής ως τον άξονα  $x$ . Το πάχος  $\delta$  του οριακού επιπέδου πάνω στην πλάκα είναι

$$\delta \sim (x\nu/V)^{1/2} \sim (x\bar{v}/V)^{1/2},$$

όπου  $x$  είναι η απόσταση από το πρόσθιο άκρο. Η χαρακτηριστική διάσταση για την μεταβολή της ταχύτητας στην διεύθυνση του άξονα  $x$  δίνεται από την ίδια την συντεταγμένη  $x$ , και αυτή στην διεύθυνση του άξονα  $y$  κάθετη στην πλάκα, δίνεται από το πάχος  $\delta$  του οριακού επιπέδου.

Εδώ έχουμε, από τις εξισώσεις συνεχείας,  $V_y \sim V_x \delta/x$ . Ο κύριος όρος στον τανυστή ιξώδους τάσης Navier-Stokes είναι



$$\sigma'_{xy} \sim \rho\nu \partial V_x / \partial y \sim \rho \bar{u} l V / \delta.$$

Ανάμεσα στους όρους Burnett στην  $\sigma'_{xy}$ , παρόλα αυτά, δεν υπάρχει κανένας που να περιέχει το  $(\partial V_x / \partial y)^2$ . Ήδη φαίνεται ότι οι παράγωγοι  $dV \partial V_x / \partial y$  δεν δίνουν τετραγωνική με τανυστή δεύτερης τάξης σε αυτούς των οποίων η συνιστώσα  $xy$  περιέχει εκείνο το τετράγωνο. Οι μεγαλύτεροι όροι στην μπορούν να είναι μόνο της μορφής

$$\rho l^2 (\partial V_x / \partial y) \operatorname{div} \mathbf{V} \sim \rho l^2 V^2 / x \delta.$$

Ο λόγος τους προς το είναι  $\sigma^{(2)} / \sigma^{(1)} \sim lV / x \sim (l/\delta)^2$ , ο οποίος είναι ξανά δεύτερης τάξης.

Τώρα θα δείξουμε ότι οι διορθωτικοί όροι στις συνθήκες των ορίων αερίου-στερεού έχουν επιδράσεις της πρώτης τάξης στην  $l/L$ . Έπεται ότι σημαντικές επιδράσεις λόγω της αραιώσης του αερίου συμβαίνουν κοντά στις στερεές επιφάνειες.

Σε μη αραιά αέρια, η οριακή συνθήκη στην επιφάνεια ενός στερεού είναι ότι οι θερμοκρασίες του αερίου και του στερεού είναι ίσες. Στην πραγματικότητα, παρόλα αυτά, αυτή είναι μια προσεγγιστική συνθήκη, και ισχύει μόνο αν η μέση ελεύθερη διαδρομή μπορεί να θεωρηθεί απειροελάχιστη. Όταν η πεπερασμένη μέση ελεύθερη διαδρομή στην επιφάνεια επαφής ανάμεσα σε ένα στερεό και σε ένα μη ομοιογενώς θερμαινόμενο αέριο ληφθεί υπόψη, υπάρχει διαφορά θερμοκρασιών, η οποία πέφτει στο μηδέν, γενικά, μόνο όταν υπάρχει πλήρη θερμική ισορροπία και η θερμοκρασία του αερίου είναι σταθερή.

Κοντά σε μια στερεά επιφάνεια (σε αποστάσεις από αυτήν που είναι μικρές, αλλά όχι πολύ μικρές), η κλίση της θερμοκρασίας του αερίου μπορεί να θεωρηθεί συνεχής, έτσι ώστε η θερμοκρασία να μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση. Στην άμεσα γειτονική περιοχή του τοιχώματος, παρόλα αυτά, σε αποστάσεις  $l$ , η μεταβολή θερμοκρασίας είναι γενικά πιο πολύπλοκη και η κλίση της δεν είναι σταθερή. Η συνεχής καμπύλη στο σχήμα 1 δείχνει την κατά προσέγγιση μορφή της θερμοκρασίας του αερίου κοντά στην επιφάνεια.

Παρόλα αυτά, αυτή η αληθινή μορφή της θερμοκρασίας κοντά στο τοίχωμα, η οποία σχετίζεται με αποστάσεις συγκρίσιμες με την μέση ελεύθερη διαδρομή, δεν είναι σημαντική όταν λάβουμε υπόψη την κατανομή της θερμοκρασίας σε όλο το αέριο. Όσον αφορά στην κατανομή θερμοκρασίας κοντά σε ένα στερεό τοίχωμα (επιφάνεια), μας ενδιαφέρει κυρίως το ευθύ μέρος της καμπύλης του σχήματος 1, το οποίο εκτείνεται σε αποστάσεις που είναι μεγάλες σε σχέση με

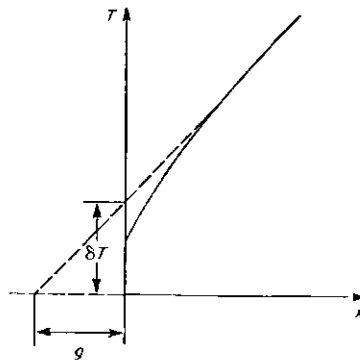


FIG. 1.

τη μέση ελεύθερη διαδρομή. Η εξίσωση αυτής της ευθείας γραμμής καθορίζεται από την κλίση της και από την τομή της με τον άξονα των τεταγμένων ( $y$ ). Συνεπώς δεν μας απασχολεί η πραγματική ασυνέχεια της θερμοκρασίας στο τοίχωμα, αλλά η ασυνέχεια που προκύπτει όταν η κλίση της θερμοκρασίας θεωρείται συνεχής κοντά στο τοίχωμα για όλες τις αποστάσεις μέχρι το μηδέν, όπως φαίνεται στην διακεκομμένη γραμμή του σχήματος 1 (Fig. 1). Ας θεωρήσουμε ότι το  $\delta T$  υποδηλώνει αυτή την ασυνέχεια θερμοκρασίας, που προσδιορίζεται ως η θερμοκρασία του αερίου μείων την θερμοκρασία του τοιχώματος (το τελευταίο θεωρείται αυθαίρετα ως μηδέν στο σχήμα 1 (Fig. 1)).

Όταν η κλίση θερμοκρασίας είναι μηδέν, το ίδιο συμβαίνει και για την ασυνέχεια  $\delta T$ . Συνεπώς, για σχετικά μικρές κλίσεις θερμοκρασίας,

$$\delta T = g \partial T / \partial n; \quad (14.9)$$

Παίρνουμε την παράγωγο κατά μήκος της καθέτου στην επιφάνεια του αερίου. Μπορούμε να ονομάσουμε τον συντελεστή  $g$  συντελεστή ασυνέχειας θερμοκρασίας. Αν η θερμοκρασία του αερίου αυξηθεί στον όγκο ( $\partial T / \partial n > 0$ ), πρέπει να έχουμε επίσης  $\delta T > 0$ , και έτσι ο συντελεστής  $g$  είναι θετικός.

Παρόμοια φαινόμενα συμβαίνουν στο όριο ανάμεσα σε ένα στερεό τοίχωμα και ένα κινούμενο αέριο. Ένα αραιό αέριο, αντί να "κολλήσει" εντελώς στην επιφάνεια, διατηρεί μια μικρή αλλά πεπερασμένη ταχύτητα κοντά του, και γλιστρά κατά μήκος της επιφανείας του. Όπως και στην (14.9), η ταχύτητα με την οποία γλιστρά είναι

$$u_0 = \xi \partial V_1 / \partial n, \quad (14.10)$$

όπου  $V_1$ , είναι η εφαιπομενική συνιστώσα της ταχύτητας του αερίου κοντά στο τοίχωμα. Όπως και το  $g$ , ο συντελεστής γλιστρήματος  $\xi$  (slip coefficient) είναι θετικός. Τα ίδια σχόλια που κάναμε σχετικά με ασυνέχεια θερμοκρασίας  $\delta T$  που δίνεται από την (14.9) ισχύουν και για το  $u_0$ . Αυτή η ταχύτητα δεν είναι η πραγματική ταχύτητα του αερίου στο τοίχωμα, αλλά η ταχύτητα που υπολογίσαμε υποθέτοντας ότι η κλίση  $\partial V_1 / \partial n$  είναι σταθερή στο στρώμα του αερίου κατά μήκος του τοιχώματος.

Οι συντελεστές  $g$  και  $\xi$  είναι μεγέθη μήκους, και έχουν την ίδια τάξη μεγέθους με τη μέση ελεύθερη διαδρομή:

$$g \sim l, \quad \xi \sim l. \quad (14.11)$$

Συνεπώς, η ασυνέχεια θερμοκρασίας και η ταχύτητα γλιστρήματος είναι ποσότητες πρώτης τάξης στην  $1/L$ . Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $g$  και  $\xi$ , θα ήταν απαραίτητο να λύσουμε την εξίσωση μεταφοράς για την συνάρτηση κατανομής των μορίων του αερίου κοντά στην επιφάνεια. Αυτή η εξίσωση θα έπρεπε να λάβει υπόψη τις συγκρούσεις ανάμεσα στα μόρια του αερίου και το τοίχωμα, και τότε θα ήταν απαραίτητο να γνωρίζουμε το νόμο που διέπει την σκέδασή τους σε τέτοιες συγκρούσεις.

Αν η διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 1 συνεχίσει και τμήσει τον άξονα των τεταγμένων, δίνει μια τιμή μήκους  $g$ . Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι η κατανομή θερμοκρασίας όταν υπάρχει μια ασυνέχεια θερμοκρασίας είναι η ίδια όπως και αν δεν υπήρχε ασυνέχεια αλλά το τοίχωμα είχε μετακινηθεί πίσω κατά μια απόσταση  $g$ . Το ίδιο ισχύει και για το γλιστρήμα, με το τοίχωμα να έχει μετακινηθεί πίσω κατά μια απόσταση  $\xi$ . Βέβαια, με αυτές τις αλλαγές μόνο οι όροι πρώτης τάξης στην  $g$  ή  $\xi$  θα έπρεπε να διατηρηθούν στις λύσεις των προβλημάτων της ρευστομηχανικής. Αφού το ότι λαμβάνουμε υπόψη τις ασυνέχειες θερμοκρασίας ή της ταχύτητας ισοδυναμεί με μετακίνηση των ορίων σε αποστάσεις της τάξης του  $l$ , οι διορθώσεις στις οποίες καταλήγουμε στις εξισώσεις είναι της τάξης του  $l \partial / \partial x \sim 1/L$ , π.χ. της πρώτης τάξης στην  $l/L$ .

Όπως και με τις παραπάνω διορθώσεις στις οριακές συνθήκες, υπάρχουν και άλλες επιδράσεις της ίδιας τάξης στην  $l/L$ , οι οποίες σε πολλές περιπτώσεις είναι πιο σημαντικές, αφού συμβαίνουν κάποια καινούργια ποιοτικά φαινόμενα.

Ένα από αυτά είναι η κίνηση αερίου κοντά σε μια μη ομοιόμορφα θερμαινόμενη στερεά επιφάνεια, που ονομάζεται θερμικό γλίστρημα (thermal slip). Είναι κάπως ανάλογο με την θερμική διάχυση σε ένα μίγμα αερίων. Όπως οι συγκρούσεις με τα μόρια του άλλου αερίου προκαλούν μια ροή σωματιδίων όταν υπάρχει μια κλίση θερμοκρασίας σε ένα μίγμα αερίων, έτσι και σε αυτή την περίπτωση έχουμε μια ροή ως αποτέλεσμα των συγκρούσεων των μορίων του λεπτού στρώματος αερίου κοντά στο τοίχωμα πάχους  $\sim l$ , με το μη ομοιόμορφα θερμαινόμενο τοίχωμα.

Ας θεωρήσουμε ότι  $V_1$  υποδηλώνει την εφαπτομενική ταχύτητα που απέκτησε το αέριο κοντά στο τοίχωμα ως αποτέλεσμα του θερμικού γλίστρηματος, και  $\nabla T$  είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της κλίσης της θερμοκρασίας. Στην πρώτη μας προσέγγιση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η  $V_1$  είναι ανάλογη της  $\nabla T$ , π.χ. για μια ισότροπη επιφάνεια

$$\mathbf{V}_t = \mu \nabla_t T. \quad (14.12)$$

Ο συντελεστής  $\mu$  πρέπει να είναι ανάλογος με τη μέση ελεύθερη διαδρομή, αφού οφείλεται σε σωματίδια που βρίσκονται σε ένα στρώμα αερίου αυτού του πάχους. Τότε ξεκάθαρα, από τα ορίσματα διαστάσεων,  $\mu \sim l/m$ . Εκκράζοντας τη μέση ελεύθερη διαδρομή μέσω της διατομής σύγκρουσης και της πυκνότητας αερίου, παίρνουμε  $l \sim 1/N\sigma \sim T/\sigma P$ , και τελικά,

$$\mu \sim \frac{l}{\sigma P} \sqrt{\frac{T}{m}}. \quad (14.13)$$

Το πρόσημο του  $\mu$  δεν καθορίζεται από τις θερμοδυναμικές απαιτήσεις. Αποτελέσματα από πειράματα δείχνουν ότι συνήθως το  $\mu > 0$ .

Μια επιπλέον επίδραση πρώτης τάξης είναι η παρουσία σε ένα κινούμενο αέριο μιας επιπρόσθετης ροής θερμότητας επιφάνειας (π.χ. που περιορίζεται σε ένα στρώμα στο τοίχωμα με πάχος  $l'_{\text{surf}}$ , ανάλογο του κάθετου διανύσματος κλίσης της εφαπτομενικής ταχύτητας:

$$\mathbf{q}'_{\text{surf}} = \phi \nabla_t T / \partial n, \quad (14.14)$$

με τις διαστάσεις ενέργειας/μήκους x time (energy/length x time).

Οι συντελεστές  $\mu$  και  $\phi$  συνδέονται με μια σχέση που πηγάζει από την αρχή του Onsager. Για να την υπολογίσουμε, ας πάρουμε εκείνο το τμήμα "επιφάνειας" του λόγου της αύξησης της εντροπίας  $S_{\text{surf}}$ , που οφείλεται στην κίνηση του αερίου στο τοίχωμα ανά μονάδα επιφάνειας του τοιχώματος. Αυτή η ποσότητα αποτελείται από δυο μέρη. Η παρουσία της ροής θερμοκρασίας  $q_{\text{surf}}$  συνεισφέρει  $-T^{-2} g_{\text{surf}} \nabla T$ . Σύγκρινε την αντίστοιχη έκφραση για τον λόγο της αύξησης της εντροπίας που οφείλεται σε ένα όγκο (μιας μεγάλης) ροής θερμοκρασίας (bulk heat flux). Δεύτερον, στο τοίχωμα πάνω στο οποίο ρέει το αέριο αναπτύσσεται μια δύναμη τριβής  $-\eta \nabla V_1 / \partial n$  ανά μονάδα επιφάνειας. Η πτώση της

ενέργειας ανά μονάδα χρόνου είναι ίση με το έργο που παράγεται από αυτή την δύναμη,  $-\eta \nabla V_1 / \theta n V_1$  και διαιρώντας με  $T$  δίνει την συνεισφορά στο λόγο της αύξησης της εντροπίας. Έτσι παίρνουμε

$$\dot{S}_{\text{surf}} = -\frac{1}{T^2} \mathbf{q}'_{\text{surf}} \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \eta \mathbf{V}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial n}. \quad (14.15)$$

Τώρα παίρνουμε ως το  $X_a$ , στην γενική μορφή της αρχής του Onsager (§9), τα διανύσματα

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{T^2} \nabla T, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{1}{T} \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial n}.$$

Συγκρίνοντας την (14.15) με τις εκφράσεις (9.3) μπορούμε να δούμε ότι οι αντίστοιχες ποσότητες  $x_a$  είναι τα διανύσματα

$$\dot{x}_1 = \mathbf{q}'_{\text{surf}}, \quad \dot{x}_2 = \eta \mathbf{V}_1.$$

"Οι συναρτήσεις κίνησης" (9.1) είναι οι σχέσεις (14.12) και (14.14). Αν τις γράψουμε ως

$$\dot{x}_1 = T\varphi \mathbf{X}_2, \quad \dot{x}_2 = \eta \mu T^2 \mathbf{X}_1,$$

Παίρνουμε την απαιτούμενη σχέση

$$\varphi = T\eta\mu \quad (14.16)$$

(L. Waldmann 1967).

### **§ 15. Φαινόμενα σε πολύ αραιά αέρια**

Τα φαινόμενα που συζητήθηκαν στην §14 δεν είναι τίποτα άλλο παρά διορθώσεις που συνδέονται με μεγαλύτερες δυνάμεις του λόγου της μέσης ελεύθερης διαδρομής  $l$  προς τις χαρακτηριστικές διαστάσεις  $L$  του προβλήματος. Είχαμε υποθέσει ότι αυτός ο λόγος ήταν ακόμα μικρός. Αν το αέριο είναι τόσο αραιό, ή οι διαστάσεις  $L$  είναι τόσο μικρές, ώστε  $l/L \ll 1$ , οι εξισώσεις ρευστοδυναμικής δεν εφαρμόζονται, ακόμα και με διορθωμένες οριακές συνθήκες.

Στη γενική περίπτωση που έχουμε ένα οποιοδήποτε  $l/L$ , είναι θεωρητικά απαραίτητο να λύσουμε την εξίσωση μεταφοράς με οριακές συνθήκες που έχουμε προσδιορίσει για στερεές επιφάνειες

που βρίσκονται σε επαφή με το αέριο. Αυτές οι συνθήκες εξαρτώνται από την αλληλεπίδραση ανάμεσα στα μόρια του αερίου και την επιφάνεια, και συσχετίζουν τη συνάρτηση κατανομής για των σωματιδίων που προσπίπτουν στην επιφάνεια με εκείνη για τα σωματίδια που απομακρύνονται από αυτήν. Αν αυτή η αλληλεπίδραση ισοδυναμεί με διάχυση των μορίων χωρίς χημικές μεταμορφώσεις, ιονισμό, ή απορρόφηση από την επιφάνεια, περιγράφεται από την πιθανότητα  $w(\Gamma, \Gamma')$  που έχει ένα μόριο με δεδομένες τιμές του  $\Gamma$  να χτυπήσει την επιφάνεια και να ανακλαστεί σε ένα δεδομένο εύρος  $d\Gamma'$ . Η συνάρτηση  $w$  κανονικοποιήτε από τη συνθήκη

$$\int w(\Gamma', \Gamma) d\Gamma' = 1. \quad (15.1)$$

Με αυτή τη συνάρτηση, η οριακή συνθήκη για τη συνθήκη κατανομής  $f(\Gamma)$  γίνεται

$$\int_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} < 0} w(\Gamma', \Gamma) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} f(\Gamma) d\Gamma = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}' f(\Gamma') \quad \text{with} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}' > 0. \quad (15.2)$$

Το ολοκλήρωμα στα αριστερά πολλαπλασιασμένο με  $d\Gamma'$  είναι ο αριθμός των μορίων που προσπίπτουν σε μια μοναδιαία επιφάνεια της επιφανείας ανά μονάδα χρόνου και σκεδάζονται σε ένα δεδομένο εύρος  $d\Gamma'$ . Η ολοκλήρωση γίνεται ως προς το εύρος των τιμών της  $\Gamma$  που αντιστοιχούν σε μόρια που κινούνται προς την επιφάνεια (όπου  $\mathbf{n}$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της εξωτερικής καθέτου στην επιφάνεια του σώματος). Η έκφραση στο δεξιό μέρος της (15.2) είναι ο αριθμός των μορίων που αφήνουν την μοναδιαία επιφάνεια της επιφανείας ανά μονάδα χρόνου. Οι τιμές της  $\Gamma'$  σε κάθε πλευρά της εξίσωσης πρέπει να αντιστοιχεί στα μόρια που απομακρύνονται από την επιφάνεια.

Σε ισορροπία, όταν η θερμοκρασία του αερίου είναι η ίδια με αυτήν του σώματος, η συνάρτηση κατανομής πρέπει να έχει την μορφή του Boltzmann και για τα προσπίπτοντα και για τα ανακλώμενα σωματίδια. Συνεπώς έπεται ότι η συνάρτηση  $w$  πρέπει ομοίως να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\int_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} < 0} w(\Gamma', \Gamma) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} e^{-\epsilon/T_1} d\Gamma = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}' e^{-\epsilon'/T_1}, \quad (15.3)$$

την οποία παίρνουμε αντικαθιστώντας στην (15.2)  $f(\Gamma) = \text{constant} \times \exp(-\epsilon/T_1)$ , με  $T_1$  την θερμοκρασία του σώματος.

Στην γενική μορφή που περιγράψαμε, η λύση του προβλήματος της ροής σε αρκετά αραιά αέρια είναι βέβαια δύσκολη. Παρόλα αυτά, το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί πιο απλά στην περίπτωση περιορισμού όπου το αέριο είναι τόσο πολύ αραιό ώστε  $1/L \ll 1$ .

Μια μεγάλη κατηγορία τέτοιων προβλημάτων συνδέεται με καταστάσεις όπου μια σημαντική μάζα αερίου καταλαμβάνει ένα όγκο μεγάλο σε σχέση με τις διαστάσεις  $L$  των στερεών σωμάτων που τοποθετούνται (βυθίζονται) μέσα στο αέριο, και επίσης σε σύγκριση με την μέση ελεύθερη διαδρομή  $l$ . Τότε οι συγκρούσεις των μορίων με στερεές επιφάνειες είναι σχετικά σπάνιες, και δεν έχουν σημασία σε σχέση με τις συγκρούσεις ανάμεσα σε μόρια. Αν το αέριο το ίδιο βρίσκεται σε ισορροπία, με θερμοκρασία  $T_2$ , μπορούμε να υποθέσουμε κάτω από αυτές τις συνθήκες ότι η ισορροπία δεν καταστρέφεται από το σώμα που τοποθετείται (βυθίζεται σε αυτό). Μπορεί να υπάρχει οποιαδήποτε θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στο αέριο και το σώμα. Το ίδιο ισχύει και για τις μακροσκοπικές ταχύτητες.

Ας υποθέσουμε ότι  $\tau = T_2 - T_1$  είναι η διαφορά ανάμεσα στην θερμοκρασία του αερίου και εκείνη κάποιου τμήματος  $df$  της επιφανείας του σώματος, και  $V$  η ταχύτητα του αερίου σε σχέση με το σώμα. Για μη μηδενικά  $\tau$  και  $V$  υπάρχει ανταλλαγή θερμοκρασίας ανάμεσα στο αέριο και το σώμα, και

μια δύναμη ασκείται πάνω στο σώμα από το αέριο. Ας θεωρήσουμε ότι  $q$  είναι η εξασθένιση της ροής θερμοκρασίας (dissipative heat flux) από το αέριο στο σώμα, και το  $F - P_n$  υποδηλώνει την δύναμη ανά μοναδιαία επιφάνεια που δρα κατά μήκος της εξωτερικής καθέτου  $n$  σε κάθε σημείο πάνω στην επιφάνεια του σώματος. Ο δεύτερος όρος εδώ είναι η συνηθισμένη πίεση αερίου. Η  $F$  είναι η επιπρόσθετη δύναμη που θεωρούμε εδώ, που οφείλεται στα  $\tau$  και  $V$ . Αυτές οι ποσότητες  $q$  και  $F$  είναι συναρτήσεις των  $\tau$  και  $V$ , και είναι μηδέν όταν και αυτές είναι μηδέν.

Αν  $\tau$  και  $V$  είναι αρκετά μικρά (το  $\tau$  σε σχέση με τις ίδιες τις θερμοκρασίες του αερίου και του στερεού, το  $V$  σε σχέση με την θερμική ταχύτητα των μορίων του αερίου), τότε  $q$  και  $F$  μπορούν να αναπτυχθούν σε δυνάμεις των  $\tau$  και  $V$  μέχρι τους γραμμικούς όρους. Ας θεωρήσουμε ότι  $F_n$  και  $V_n$  υποδηλώνουν τις συνιστώσες των  $F$  και  $V$  κατά μήκος της καθέτου  $n$ . Τα  $F_t$  και  $u_t$  είναι τα εφαπτομενικά τους μέρη, τα οποία είναι διανύσματα που έχουν δυο ανεξάρτητες συνιστώσες. Τότε τα αναπτύγματα που αναφέραμε είναι

$$q = \alpha\tau + \beta V_n, \quad F_n = \gamma\tau + \delta V_n, \quad F_t = \theta V_t, \quad (15.4)$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$  είναι σταθερές (η ακόμα καλύτερα συναρτήσεις της θερμότητας και της πίεσης), χαρακτηριστικές οποιουδήποτε αερίου και στερεού υλικού. Οι βαθμωτές ποσότητες  $q$  και  $F_n$  δεν μπορούν, λόγω συμμετρίας, να περιέχουν όρους που θα είναι γραμμικοί στο διάνυσμα  $V$ . Για τον ίδιο λόγο, το ανάπτυγμα του διανύσματος  $F$ , δεν περιέχει όρους γραμμικούς στα "βαθμωτά"  $\tau$  και  $V_n$ .

Οι ποσότητες  $\alpha, \delta$  και  $\theta$  είναι θετικές. Για παράδειγμα, αν η θερμοκρασία του αερίου υπερβεί τη θερμοκρασία του σώματος ( $t > 0$ ), θερμότητα θα περάσει από το αέριο στο σώμα, και το αντίστοιχο μέρος της ροής  $q$  είναι θετικό, συνεπώς  $\alpha > 0$ . Έπειτα, οι δυνάμεις  $F_n$  και  $F$ , εξαιτίας της ροής του αερίου σε σχέση με το σώμα πρέπει να είναι στην ίδια κατεύθυνση με το  $V_n$  και  $V$ . Συνεπώς θα έχουμε  $\delta > 0$  και  $\theta > 0$ . Το πρόσημο των συντελεστών  $\beta$  και  $\gamma$  δεν είναι συνέπεια των γενικών θερμοδυναμικών υποθέσεων, παρόλο που στη πράξη εμφανίζονται να είναι συνήθως θετικοί. Υπάρχει μια απλή σχέση ανάμεσα τους η οποία είναι συνέπεια της συμμετρίας των κινητικών συντελεστών.

Για να βρούμε αυτή τη σχέση, υπολογίζουμε τη χρονική παράγωγο της συνολικής εντροπίας του συστήματος που περιέχει το αέριο και το σώμα. Μια ποσότητα θερμότητας  $q df$  μεταφέρεται από το αέριο στο σώμα ανά μονάδα χρόνου μέσω της στοιχειώδους επιφάνειας  $df$ . Η αύξηση της εντροπίας  $S_1$  του σώματος είναι

$$\dot{S}_1 = \oint (q/T_1) df,$$

όπου η ολοκλήρωση είναι ως προς τη συνολική επιφάνεια του σώματος.

Για να υπολογίσουμε την αύξηση της εντροπίας του αερίου, παίρνουμε τέτοιες συντεταγμένες όπου το αέριο βρίσκεται σε ηρεμία στη θέση που βρίσκεται το σώμα. Τότε η ταχύτητα κάθε σημείου πάνω στην επιφάνεια είναι  $-V$ . Για να δείξουμε την απαιτούμενη σχέση, θα υποθέσουμε ότι το σχήμα του σώματος μπορεί να μεταβάλλεται κατά την κίνηση του. Τότε οι ταχύτητες  $V$  διαφόρων σημείων πάνω στην επιφάνεια του είναι αυθαίρετες ανεξάρτητες μεταβλητές. Από τη θερμοδυναμική σχέση  $dE = TdS - PdV$ , η μεταβολή της εντροπίας του αερίου στη μονάδα χρόνου είναι

$$\dot{S}_2 = (\dot{E}_2 + P_2 \dot{V}_2)/T_2,$$

όπου οι ποσότητες με τον δείκτη 2 σχετίζονται με το αέριο. Η παράγωγος  $E_2$  είναι, λόγω της διατήρησης της ολικής ενέργειας του συστήματος, μειωμένη κατά την μεταβολή της ενέργειας του σώματος. Αυτή η μεταβολή αποτελείται από τη ποσότητα της θερμότητας  $\phi$   $df$  και το έργο  $\phi - V \cdot (F - Pn) df$  που προκαλείται πάνω στο σώμα. Συνειπώς βρίσκουμε την παρακάτω μεταβολή της ενέργειας του αερίου

$$\dot{E}_2 = \oint (-q + F_n V_n + \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{V}_t - P_2 V_n) df.$$

Η μεταβολή του όγκου του αερίου είναι μείων τη μεταβολή του όγκου του σώματος:

$$\dot{V}_2 = \oint V_n df.$$

Η μεταβολή της εντροπίας του αερίου είναι συνεπώς

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{T_2} \oint (-q + F_n V_n + \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{V}_t) df.$$

Προσθέτοντας τις παραγώγους των  $S_1$  και  $S_2$ , και θέτοντας (για μικρό  $\tau$ )  $T_1 \approx T_2 \equiv T$ , παίρνουμε τον λόγο μεταβολής της συνολικής εντροπίας του συστήματος

$$\dot{S} = \int \left[ \frac{q\tau}{T^2} + \frac{F_n V_n}{T} + \frac{\mathbf{F}_t \cdot \mathbf{V}_t}{T} \right] df. \quad (15.5)$$

Θέτουμε στις ποσότητες  $x_1, x_2, x_3, x_4$  στον γενικό τύπο της αρχής του Onsager (§9), αντίστοιχα  $q$ ,  $F_n$  και τις δυο συνιστώσες του διανύσματος  $F_t$  σε κάθε δεδομένο σημείο στην επιφάνεια του σώματος. Για να βρούμε τις αντίστοιχες ποσότητες  $X_a$ , συγκρίνουμε την (15.5) με την γενική έκφραση (9.3) για τον λόγο μεταβολής της εντροπίας, και παρατηρούμε ότι  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$  είναι αντίστοιχα  $-\tau/T^2$ ,  $-V_n/T$  και οι δυο συνιστώσες του διανύσματος  $-V_t/T$  στο ίδιο σημείο. Οι κινητικοί συντελεστές (π.χ. εκείνοι στις σχέσεις (9.1)) είναι

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \alpha T^2, & \gamma_{22} &= \delta T, & \gamma_{33} &= \gamma_{44} = \theta T, \\ \gamma_{12} &= \beta T, & \gamma_{21} &= \gamma T^2. \end{aligned}$$

Συνειπώς η συμμετρία  $\gamma_{12} = \gamma_{21}$  δίνει την απαιτούμενη σχέση:

$$\beta = \gamma T. \quad (15.6)$$

Επιπλέον, από την συνθήκη που μας δίνει την τετραγωνική μορφή (9.3) ( $S > 0$ ), έχουμε τις ανισότητες  $\alpha, \beta, \theta > 0$  που έχουμε ήδη αναφέρει, και επίσης την ανισότητα

$$T\alpha\delta > \beta^2.$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές στην (15.4), πρέπει να γνωρίζουμε το συγκεκριμένο τύπο του νόμου σκέδασης μορίων αερίου από την επιφάνεια του σώματος, που εκφράζεται από τη συνάρτηση  $w(\Gamma', \Gamma)$  που προσδιορίσαμε παραπάνω. Σαν παράδειγμα, ας δημιουργήσουμε ένα τύπο ο οποίος θεωρητικά επιτρέπει τον υπολογισμό του  $\alpha$ . Η ροή ενέργειας από το αέριο προς το σώμα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$q = \int (\epsilon - \epsilon') |v_x| w(\Gamma', \Gamma) f(\Gamma) d\Gamma d\Gamma', \quad (15.7)$$

προς τα διαστήματα  $u_x < 0, v'_x > 0$ , αφού μια ποσότητα ενέργειας  $\epsilon - \epsilon'$  μεταφέρεται στο τοίχωμα με κάθε σύγκρουση του μορίου με το τοίχωμα.

Ας μετασχηματίσουμε αυτή την έκφραση μέσω της αρχής της λεπτομερούς ισορροπίας, σύμφωνα με την οποία, σε ισορροπία, ο αριθμός των μεταβάσεων  $\Gamma \rightarrow \Gamma'$  που αφορά τις σκεδάσεις των μορίων από το τοίχωμα ισούται με τον αριθμό των μεταβάσεων  $\Gamma'^T \rightarrow \Gamma^T$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$w(\Gamma', \Gamma) |v_x| \exp\left(\frac{\mu - \epsilon}{T_1}\right) = w(\Gamma'^T, \Gamma^T) |v'_x| \exp\left(\frac{\mu - \epsilon'}{T_1}\right); \quad (15.8)$$

σε ισορροπία, οι θερμοκρασίες του αερίου και του τοιχώματος είναι ίσες.

Στην εξίσωση (15.7) ονομάζουμε τις μεταβλητές ολοκλήρωσης ως:  $\Gamma \rightarrow \Gamma^T, \Gamma' \rightarrow \Gamma'^T$ . Το ημίαθροισμα των δυο εκφράσεων που προκύπτουν μας δίνει

$$q = \frac{1}{2} \int (\epsilon - \epsilon') e^{\mu/T_2} [w(\Gamma', \Gamma) |v_x| e^{-\epsilon/T_2} - w(\Gamma'^T, \Gamma^T) |v'_x| e^{-\epsilon'/T_2}] d\Gamma d\Gamma'.$$

Τέλος, αντικαθιστώντας  $w(\Gamma^T, \Gamma'^T)$  από την (15.8) και έπειτα αναπτύσσοντας τη συνάρτηση (integrand) σε δυνάμεις της διαφοράς  $\tau = T_2 - T_1$ , βρίσκουμε ότι  $q = \alpha\tau$ , όπου

$$\alpha = \frac{1}{2T^2} \int (\epsilon - \epsilon')^2 |v_x| w(\Gamma', \Gamma) \exp\left(\frac{\mu - \epsilon(\Gamma)}{T}\right) d\Gamma d\Gamma' \quad (v_x < 0, v'_x > 0); \quad (15.9)$$



ο κάτω δείκτης παραλείπεται στις θερμοκρασίες  $T_1 \approx T_2$ .

Η συνάρτηση κατανομής για τα μόρια που έχουν υποστεί σκέδαση από το τοίχωμα εξαρτάται από την φύση της αλληλεπίδρασης με το τοίχωμα. Θεωρείται ότι υπάρχει πλήρη προσαρμογή (complete accommodation) αν τα μόρια που αντανακλώνται από κάθε στοιχειώδη επιφάνεια του σώματος έχουν (όποιο κι αν ήταν το μέγεθός και η κατεύθυνση της ταχύτητας τους πριν την σύγκρουση) την ίδια κατανομή όπως και σε μια δέση που δημιουργείται από μια οπή σε ένα δοχείο που περιέχει αέριο σε θερμοκρασία ίση με αυτή του σώματος. Έτσι, με πλήρη προσαρμογή, το αέριο που σκεδάζεται από το τοίχωμα φτάνει θερμική ισορροπία μαζί με αυτό.

Οι τιμές των συντελεστών στην (15.4) μπορεί να συγκριθεί με εκείνες για την πλήρη προσαρμογή. Ειδικότερα, η ανταλλαγή ενέργειας ανάμεσα στα μόρια του αερίου και το συμπαγές τοίχωμα συνήθως περιγράφεται από τον συντελεστή προσαρμογής (accommodation coefficient), που προσδιορίζεται από το λόγο  $\alpha/\alpha_0$ , όπου  $\alpha_0$  αντιστοιχεί σε πλήρη προσαρμογή. Σε πραγματικές περιπτώσεις δεν επιτυγχάνεται πλήρης προσαρμογή συνήθως και ο συντελεστής προσαρμογής είναι μικρότερος της μονάδας.

Το γεγονός ότι  $\alpha_0$  είναι στην πραγματικότητα η μεγαλύτερη δυνατή τιμή φαίνεται πολύ εύκολα από τα παρακάτω. Ας δούμε τη εντροπία  $S$  στην (15.5) κάπως διαφορετικά: όχι ως την συνολική εντροπία του σώματος και του αερίου μαζί, αλλά ως την εντροπία του σώματος μαζί με μόνο τα μόρια του αερίου που φτάνουν την επιφάνεια του σώματος σε ένα χρόνο  $\Delta t$ . Για αυτό το σύστημα, η ανάκλαση των μορίων με πλήρη προσαρμογή υποδηλώνει μετάβαση σε κατάσταση πλήρους ισορροπίας, και συνεπώς η εντροπία του παίρνει την μέγιστη δυνατή τιμή.† Ομοίως, η αλλαγή της εντροπίας  $\Delta S =$  που συνοδεύει αυτή τη μετάβαση θα είναι επίσης μέγιστη. Δηλαδή, για πλήρη προσαρμογή ο τετραγωνικός τύπος (9.3) πρέπει να είναι μέγιστος για κάθε τιμή του  $X_a$  (π.χ. του  $\tau$ ,  $V_n$  και του  $V_i$ ). Δηλώνοντας τις αντίστοιχες τιμές των συντελεστών  $\gamma_{\alpha\beta}$  με τον δείκτη μηδέν, μπορούμε να γράψουμε αυτή τη συνθήκη ως

$$\frac{\alpha_0 - \alpha}{T^2} \tau^2 + \frac{2(\beta_0 - \beta)}{T^2} \tau V_n + \frac{\delta_0 - \delta}{T} V_n^2 + \frac{\theta_0 - \theta}{T} V_i^2 > 0.$$

Από αυτό έπονται οι ανισότητες

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 > \alpha, \quad \delta_0 > \delta, \quad \theta_0 > \theta, \\ T(\alpha_0 - \alpha)(\delta_0 - \delta) > (\beta_0 - \beta)^2. \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

Ας εξετάσουμε την εκροή ενός πολύ αραιωμένου αερίου από μια μικρή οπή με γραμμικές διαστάσεις  $L$ . Στο όριο  $l/L \ll 1$ , αυτή η διαδικασία είναι πολύ απλή. Τα μόρια θα βγαίνουν από το δοχείο ανεξάρτητα, δημιουργώντας μια μοριακή δέση στην οποία κάθε μόριο κινείται με την ταχύτητα εκείνη την οποία είχε όταν έφτασε την οπή. Ο αριθμός των μορίων που εξέρχονται από την οπή ανά μονάδα χρόνου ισούται με τον αριθμό των συγκρούσεων ανά μονάδα χρόνου ανάμεσα στα μόρια και την επιφάνεια με εμβαδόν  $s$  που είναι ίσο με αυτό της οπής. Ο αριθμός των συγκρούσεων ανά μοναδιαίο εμβαδό τοιχώματος είναι  $P/(2\pi mT)^{1/2}$ , όπου  $P$  είναι η πίεση του αερίου και  $m$  η μάζα ενός μορίου. Συνεπώς η μάζα του αερίου που εξέρχεται ανά μονάδα χρόνου είναι

$$Q = sP\sqrt{m/2\pi T}. \quad (15.11)$$

Αν δυο δοχεία που περιέχουν αέριο ενωθούν μέσω μιας οπής, για  $l \ll L$  σε μηχανική ισορροπία οι πιέσεις  $P_1$  και  $P_2$  των αερίων στα δυο δοχεία είναι ίσες, όποιες κι αν είναι η θερμοκρασίες τους  $T_1$  και  $T_2$ . Αν  $l > L$ , η συνθήκη για μηχανική ισορροπία είναι ότι οι αριθμοί των μορίων που περνούν μέσα από την οπή σε κάθε κατεύθυνση είναι ίσοι. Από την (15.11), παίρνουμε

$$P_1/\sqrt{T_1} = P_2/\sqrt{T_2}. \quad (15.12)$$

Έτσι οι πιέσεις των αραιωμένων αερίων σε δυο επικοινωνούντα δοχεία θα είναι διαφορετικές, και ανάλογες των τετραγωνικών ριζών των θερμοκρασιών (το φαινόμενο Knudsen).

Μέχρι τώρα έχουμε συζητήσει φαινόμενα σε μεγάλη μάζα πολύ αραιωμένου αερίου σε ισορροπία. Ας συζητήσουμε τώρα σύντομα φαινόμενα ενός άλλου τύπου, όπου το αέριο δεν βρίσκεται σε ισορροπία, για παράδειγμα την μεταφορά θερμότητας ανάμεσα σε δυο στερεές πλάκες που βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες και είναι μέσα σε ένα αραιωμένο αέριο, με αρκετά μικρή απόσταση ανάμεσα τους σε σχέση με την μέση ελεύθερη διαδρομή. Μόρια τα οποία κινούνται στο χώρο ανάμεσα στις πλάκες δεν παθαίνουν καμιά σχεδόν σύγκρουση με ένα άλλο. Μετά από ανάκλαση από την μια άλλη πλάκα, μετακινούνται ελεύθερα μέχρι να χτυπήσουν την άλλη. Όταν σκεδάζονται από την πιο ζεστή πλάκα, τα μόρια αποκτούν κάποια ενέργεια από αυτή, και έπειτα μεταφέρουν ένα μέρος από αυτήν στη πλάκα με την χαμηλότερη θερμοκρασία όταν την φτάσουν. Συνεπώς ο μηχανισμός μεταφοράς θερμότητας σε αυτή την περίπτωση διαφέρει σημαντικά από εκείνον της συνηθισμένης αγωγιμότητας σε ένα μη αραιωμένο αέριο. Μπορεί να περιγραφεί από ένα συντελεστή μεταφοράς θερμότητας  $\kappa$ , ο οποίος προσδιορίζεται (σε αναλογία με την συνηθισμένη αγωγιμότητα) έτσι ώστε

$$q = \kappa(T_2 - T_1)/L, \quad (15.13)$$

όπου  $q$  είναι η ποσότητα της θερμότητας που μεταφέρεται ανά μονάδα επιφάνειας των πλακών στη μονάδα χρόνου,  $T_1$  και  $T_2$  οι θερμοκρασίες των πλακών και  $L$  η απόσταση ανάμεσα τους. Η αξία του  $\kappa$  μπορεί να υπολογιστεί σε τάξη μεγέθους μέσω της (7.10). Αφού οι συγκρούσεις μεταξύ των μορίων έχουν τώρα αντικατασταθεί από τις συγκρούσεις των μορίων με τις πλάκες, η μέση ελεύθερη διαδρομή  $l$  πρέπει να αντικατασταθεί από την απόσταση  $L$  ανάμεσα στις πλάκες. Έτσι έχουμε

$$\kappa \sim L\bar{n} \sim PL/\sqrt{mT}. \quad (15.14)$$

Ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας σε ένα πολύ αραιωμένο αέριο είναι ανάλογος της πίεσης, αντίθετα με την αγωγιμότητα σε ένα μη αραιωμένο αέριο, που είναι ανεξάρτητη από πίεση. Πρέπει να τονιστεί, παρόλα αυτά, ότι το  $\kappa$  εδώ δεν μια ιδιότητα του αερίου από μόνη της: εξαρτάται επίσης από τις συγκεκριμένες συνθήκες του προβλήματος, και συγκεκριμένα την απόσταση  $L$  ανάμεσα στις πλάκες.

Ένα παρόμοιο φαινόμενο είναι το " ιζώδες" ενός πολύ αραιωμένου αερίου, που συμβαίνει, για παράδειγμα, σε μια σχετική κίνηση των δυο πλακών που βρίσκονται μέσα σε αυτό (ξανά με  $l \ll L$ ). Ο συντελεστής ιζώδους  $\eta$  πρέπει να προσδιοριστεί έτσι ώστε

$$F = \eta V/L, \quad (15.15)$$

όπου  $F$  είναι η δύναμη τριβής ανά μονάδα επιφανείας πάνω στην κινούμενη πλάκα και  $V$  η σχετική ταχύτητα των πλακών. Αντικαθιστώντας τη μέση ελεύθερη διαδρομή  $l$  στην (8.11) με την απόσταση  $L$ , παίρνουμε

$$\eta \sim m\bar{v}NL \sim LP\sqrt{m/T}, \quad (15.16)$$

π.χ. το ιξώδες ενός αραιωμένου αερίου είναι παρομοίως ανάλογο της πίεσης.

### **§16. Δυναμική εξαγωγή της συνάρτησης μεταφοράς**

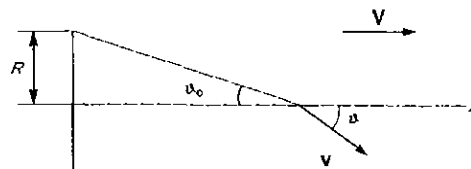


Fig. 4.

Παρόλο που η εξαγωγή της συνάρτησης μεταφοράς στην §3 είναι ικανοποιητική από την πλευρά της φυσικής, υπάρχει ωστόσο σημαντικό ενδιαφέρον στο να εξακριβώσουμε πως η εξίσωση μπορεί να εξαχθεί αναλυτικά με τον μαθηματικό φορμαλισμό της θεωρίας, π.χ. από τις εξισώσεις της κίνησης των σωματιδίων του αερίου. Τέτοια εξαγωγή έχει δοθεί από τον N. N. Bogolyubov (1946). Η τιμή της μεθόδου βασίζεται επίσης στο γεγονός ότι προσφέρει μια κανονική διαδικασία για να εξάγουμε θεωρητικά όχι μόνο την συνάρτηση Boltzmann αλλά επίσης τις διορθώσεις σε αυτήν, π.χ. οι όροι μεγαλύτερης τάξης στη μικρή 'παράμετρο αεριοποίησης' ("gaseousness parameter")—ο λόγος  $(d/l)^3$  όπου  $d$  είναι η μοριακή διάσταση (περιοχή δράσης των μοριακών δυνάμεων) και  $l$  η μέση απόσταση ανάμεσα στα μόρια. Ο υπολογισμός που δίνεται παρακάτω έχει σχέση με ένα μονοατομικό αέριο με καθαρά κλασσικούς όρους, π.χ. με την υπόθεση η κλασσική μηχανική δεν περιγράφει μόνο την ελεύθερη κίνηση αλλά επίσης τις συγκρούσεις των σωματιδίων του αερίου.

Ξεκινάμε με το θεώρημα του Liouville που αφορά την συνάρτηση κατανομής για το αέριο συνολικά, ως σύστημα  $N$  σωματιδίων. Αυτή η συνάρτηση, στον  $6N$ - διαστάσεων φασικό χώρο (dimensional phase space), υποδηλώνεται με το  $f^{(N)}(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ , όπου  $\tau_a$  είναι ένα σύνολο συντεταγμένων και των συνιστωσών ορμής για το  $a$ th σωματίδιο:  $\tau_a = (r_a, p_a)$ . Η συνάρτηση θεωρείται ότι είναι κανονικοποιημένη ως προς τη μονάδα:

$$\int f^{(N)}(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) d\tau_1 \dots d\tau_N = 1, \quad d\tau_a = d^3x_a d^3p_a.$$

Η συνάρτηση κατανομής 'ως προς ένα σωματίδιο' η οποία εμφανίζεται στην εξίσωση Boltzmann εξαγεται ολοκληρώνοντας  $f^{(N)}$  ως δια:

$$f^{(1)}(t, \tau_1) = \int f^{(N)} d\tau_2 \dots d\tau_N; \quad (16.1)$$

η συνάρτηση  $f^{(1)}$  κανονικοποιείται επίσης ως προς την μονάδα, και θα διατηρήσουμε τον συμβολισμό  $f$  (χωρίς άνω δείκτη) για την συνάρτηση κατανομής που έχει κανονικοποιηθεί ως προς τον συνολικό αριθμό των σωματιδίων:  $f = Nf^{(1)}$ .

Έχει ήδη τονιστεί στην SP 1, §3, ότι το θεώρημα Liouville προκύπτει ως συνέπεια της εξίσωσης της συνέχειας του φασικού χώρου η οποία πρέπει να ικανοποιείται από την συνάρτηση κατανομής για ένα κλειστό σύστημα:

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{a=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} (f^{(N)} \dot{\mathbf{r}}_a) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_a} (f^{(N)} \dot{\mathbf{p}}_a) \right\} = 0. \quad (16.2)$$

Με τις εξισώσεις του Hamilton

$$\dot{\mathbf{r}}_a = \partial H / \partial \mathbf{p}_a, \quad \dot{\mathbf{p}}_a = - \partial H / \partial \mathbf{r}_a, \quad (16.3)$$

αυτό δίνει

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{a=1}^N \left\{ \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \dot{\mathbf{r}}_a + \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_a} \cdot \dot{\mathbf{p}}_a \right\} = \frac{df^{(N)}}{dt} = 0, \quad (16.4)$$

όπου τα  $\mathbf{r}_a = \mathbf{v}_a$  και  $\mathbf{p}_a$  θεωρούνται ότι εκφράζονται ως  $\tau_1, \tau_2, \dots$  μέσω των εξισώσεων (16.3). Η εξίσωση (16.4) εκφράζει το περιεχόμενο του θεωρήματος Liouville.

Γράφουμε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση για ένα μονατομικό αέριο με τη μορφή

$$H = \sum_{a \leq N} \frac{p_a^2}{2m} + \sum_{b, c \leq N} U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|). \quad (16.5)$$

Εδώ θεωρείται ότι δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο, και ότι η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα σωματίδια του αερίου μειώνει το άθροισμα των αλληλεπιδράσεων των ζευγών. Η εξίσωση (16.4) τότε γίνεται

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{a=1}^N \left\{ \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \mathbf{v}_a - \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_a} \cdot \sum_{b < a} \frac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a} \right\} = 0, \quad (16.6)$$

όπου  $U_{ab}$  ( $a, b$ ) υποδηλώνει  $U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)$ .

Ας ολοκληρώσουμε τώρα αυτή την εξίσωση ως προς  $dt_2 \dots dt_N$ . Τότε, από όλους τους όρους του αθροίσματος στην (16.6), απομένουν μόνο αυτοί που εμπεριέχουν διαφοροποίηση ως προς το  $\mathbf{p}_1$  ή  $\mathbf{r}_1$ . Τα ολοκληρώματα των άλλων όρων μετασχηματίζονται σε ολοκληρώματα ως προς άπειρες επιφάνειες στο χώρο ορμής η συντεταγμένων, και είναι μηδέν. Συνεπώς έχουμε

$$\frac{\partial f^{(1)}(t, \tau_1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f^{(1)}(t, \tau_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = N \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)}{\partial \mathbf{p}_1} d\tau_2, \quad (16.7)$$

όπου  $f^{(2)}$  είναι η συνάρτηση κατανομής για δυο σωματίδια κανονικοποιημένη ως προς τη μονάδα, π.κ. το ολοκλήρωμα

$$f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) = \int f^{(N)} d\tau_3 \dots d\tau_N; \quad (16.8)$$

ο παράγοντας  $N$  στην (16.7) λαμβάνει υπόψη όρους οι οποίοι διαφέρουν μόνο στην ονοματολογία των μεταβλητών ολοκλήρωσης. Ο αριθμός τέτοιων όρων είναι  $N - 1$ , αλλά αυτός είναι πολύ μεγάλος και μπορεί να αντικατασταθεί από το  $N$ .

Ομοίως, ολοκληρώνοντας την (16.6) ως προς  $dt_3 \dots dt_N$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \cdot \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_2} \\ = N \int \left[ \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \frac{\partial U_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_2} \cdot \frac{\partial U_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} \right] d\tau_3, \end{aligned} \quad (16.9)$$

όπου  $f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$  είναι η συνάρτηση κατανομής για τρία σωματίδια.

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, θα πρέπει να βρούμε μια σχεδόν άπειρη (το  $N$  είναι πολύ μεγάλο) ακολουθία από εξισώσεις, που η κάθε μια θα εκφράζεται  $f^{(n)}$  ως προς  $f^{(n+1)}$ . Όλες αυτές οι εξισώσεις είναι ακριβής εννοώντας ότι δεν έχει γίνει καμία υπόθεση σε αυτούς όσο αφορά στην αραιώση του αερίου. Για να πάρουμε ένα κλειστό σύνολο εξισώσεων, η σειρά πρέπει να τερματισθεί με κάποιο τρόπο κάνοντας χρήση της συνθήκης ότι το αέριο είναι αραιωμένο. Ειδικότερα, η πρώτη προσέγγιση σε αυτή την μέθοδο αντιστοιχεί στον τερματισμό της σειράς που υπάρχει ήδη στην πρώτη εξίσωση, (16.7), όπου η εξίσωση που αναφέρεται σε δυο σωματίδια  $f^{(2)}$  εκφράζεται κατά προσέγγιση μέσω  $f^{(1)}$ . Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την αραιώση του αερίου. Μέσω της εξίσωσης (16.9).

Επιτρέποντας στην εξίσωση αυτή, πρώτα από όλα θα δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα στην δεξιά πλευρά είναι μικρό. Η συνάρτηση  $U(r)$  είναι αισθητά διαφορετική του μηδενός μόνο μέσα στην περιοχική δράσης των δυνάμεων, π.χ. όταν  $r \sim d$ . Συνεπώς, και στα δυο μέρη του ολοκληρώματος στην (16.9), οι ολοκληρώσεις ως προς τις συντεταγμένες είναι πρακτικά μόνο ως προς την περιοχική  $|r_3 - r_1| \sim d$  ή  $|r_3 - r_2| \sim d$ , π.χ. ως προς ένα όγκο  $\sim d^3$ . Αφού σε μια ολοκλήρωση ως προς τον συνολικό όγκο του αερίου,  $V \sim N^{-3}$ , θα πρέπει να έχουμε  $\int f^{(3)} d\tau_3 = f^{(2)}$  και παίρνουμε τον υπολογισμό

$$\int_V \frac{\partial f^{(3)}}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial U_{13}}{\partial r_1} d\tau_3 \sim \frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial p_1} \frac{d^3}{r^3}.$$

Από αυτό βλέπουμε ότι η δεξιά πλευρά της (16.9) είναι μικρή στον λόγο  $(d/\lambda)^3$  σχετικά με τους όρους που περιέχουν  $\partial U/\partial r$  στα αριστερά, και μπορούν συνεπώς να παραλειφθούν. Οι όροι στα αριστερά αποτελούν την συνολική παράγωγο  $df^{(2)}/dt$ , στην οποία  $r_1, r_2, p_1, p_2$ : θεωρούνται ως συναρτήσεις χρόνου οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις κίνησης (16.3) με την Χαμιλτονιανή που αφορά δυο σώματα

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + U(|r_1 - r_2|).$$

Συνεπώς έχουμε

$$df^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)/dt = 0. \tag{16.10}$$

Μέχρι στιγμής, όλοι οι μετασχηματισμοί των εξισώσεων είναι καθαρά μηχανικοί. Για να εξάγουμε την εξίσωση μεταφοράς, κάποια στατιστική υπόθεση είναι επίσης απαραίτητη. Αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως η στατιστική ανεξαρτησία κάθε ζευγαριού που συγκρούονται, την οποία έχουμε βασικά υποθέσει κατά την εξαγωγή της εξίσωσης μεταφοράς στην §3 (όπου η πιθανότητα σύγκρουσης ήταν γραμμένη με την μορφή (2.1), ανάλογη του γινομένου  $ff_1$ ). Στην μέθοδο που συζητάμε, αυτή η δήλωση λειτουργεί ως η αρχική συνθήκη για την διαφορική εξίσωση (16.10). Δημιουργεί την ασυμμετρία σε σχέση με τις δυο διευθύνσεις του χρόνου, και σαν αποτέλεσμα η μη αναστρέψιμη εξίσωση μεταφοράς εξάγεται από τις εξισώσεις της μηχανικής που είναι αμετάβλητες κατά την χρονική αντιστροφή. Η συσχέτιση ανάμεσα στις θέσεις και τις ορμές των σωματιδίων του αερίου προκύπτει μόνο σαν αποτέλεσμα των συγκρούσεων τους και εκτείνεται σε αποστάσεις  $\sim d$ . Συνεπώς η υπόθεση της στατιστικής ανεξαρτησίας των συγκρουόμενων σωματιδίων είναι επίσης η πηγή των βασικών περιορισμών όσο αφορά στις διαστάσεις και τα χρονικά διαστήματα που επιτρέπει η εξίσωση μεταφοράς, που έχουμε ήδη συζητήσει στην §3.

Ας θεωρήσουμε μια χρονική στιγμή  $t_0$  πριν τη σύγκρουση, όταν τα δυο σωματίδια είναι ακόμα μακριά ( $|r_{10} - r_{20}| \gg d$ , όπου ο μηδενικός δείκτης υποδηλώνει τις τιμές των ποσοτήτων εκείνη τη

στιγμή). Η στατιστική ανεξαρτησία των συγκρουόμενων σωματιδίων σημαίνει ότι σε μια τέτοια στιγμή το η συνάρτηση κατανομής για τα δυο σωματίδια είναι το προϊόν δυο συναρτήσεων  $f^{(1)}$  που αφορούν σε ένα σωματίδιο. Συνεπώς η ολοκλήρωση της (16.10) από  $t_0$  έως  $t$  δίνει

$$f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) = f^{(1)}(t_0, \tau_{10})f^{(1)}(t_0, \tau_{20}). \quad (16.11)$$

Εδώ  $\tau_{10} = (r_{10}, p_{10})$  και  $\tau_{20} = (r_{20}, p_{20})$  είναι εκείνες οι τιμές των συντεταγμένων και ορμών που πρέπει να έχουν τα σωματίδια την στιγμή  $t_0$  ώστε να αποκτήσουν τις απαραίτητες τιμές  $\tau_1 = (r_1, p_1)$  και  $\tau_2 = (r_2, p_2)$  τη στιγμή  $t$ . Υπό αυτή την έννοια,  $\tau_{10}$  και  $\tau_{20}$  είναι συναρτήσεις των  $\tau_1, \tau_2$  και  $t - t_0$  (μόνο το  $r_{10}$  και το  $r_{20}$  εξαρτώνται από το  $t - t_0$ ). Οι τιμές των  $p_{10}$  και  $p_{20}$  σχετίζονται με τα σωματίδια που κινούνται ελεύθερα πριν την σύγκρουση, και δεν εξαρτώνται από την επιλογή του  $t - t_0$ .

Ας επιστρέψουμε τώρα στην (16.7), που πρόκειται να γίνει η εξίσωση μεταφοράς. Το αριστερό μέρος έχει ήδη την απαιτούμενη μορφή. Τώρα θα συζητήσουμε το ολοκλήρωμα στα δεξιά, το οποίο τελικά θα γίνει ένα ολοκλήρωμα σύγκρουσης στην εξίσωση Boltzmann. Αντικαθιστώντας σε αυτό το  $f^{(2)}$  από την (16.11) και αλλάζοντας από  $f^{(1)}$  σε  $f = Nf^{(1)}$  και στις δυο πλευρές, παίρνουμε

$$\frac{\partial f(t, \tau_1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f(t, \tau_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = C(f),$$

όπου

$$C(f) = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{f(t_0, \tau_{10})f(t_0, \tau_{20})\} d\tau_2. \quad (16.12)$$

Μόνο το εύρος περιοχής  $|r_2 - r_1| \sim d$ , π.χ. η περιοχή στην οποία η σύγκρουση λαμβάνει χώρα, είναι σημαντικό στο ολοκλήρωμα (16.12). Σε αυτό το εύρος, παρόλα αυτά, μπορούμε να αγνοήσουμε (στην πρώτη προσέγγιση, την οποία λαμβάνουμε υπόψη εδώ) η εξάρτηση συντεταγμένων της  $f$ , η οποία μεταβάλλεται σημαντικά μόνο για τις αποστάσεις  $L$ , τις χαρακτηριστικές διαστάσεις του προβλήματος, οι οποίες είναι μεγάλες σε σχέση με το  $d$ . Η τελική μορφή του ολοκληρώματος σύγκρουσης θα παραμείνει συνεπώς αμετάβλητη αν, για να απλοποιήσουμε κάπως την ανάλυση και τους τύπους, πάρουμε την περίπτωση της χωρικής ομογένειας, π.χ. υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι ανεξάρτητη από τις συντεταγμένες. Μπορούμε να παρατηρήσουμε αμέσως ότι η άμεση (αναλυμένη) χρονική εξάρτηση μέσω του  $r_{10}(t)$  και του  $r_{20}(t)$  τότε εξαφανίζεται από τις συναρτήσεις  $f(t_0, p_{10})$  και  $f(t_0, p_{20})$ .

Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την ολοκληρωματική συνάρτηση στην (16.12) χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η έκφραση στα άγκιστρα είναι ένα ολοκλήρωμα κίνησης (και έτσι εμφανίστηκε στην (16.11)). Ανεξάρτητα από αυτό, είναι φανερό ότι η  $p_{10}$  και η  $p_{20}$ , οι τιμές των ορμών σε μια συγκεκριμένη στιγμή  $t_0$ , είναι εξ ορισμού ολοκληρώματα της κίνησης. Χρησιμοποιώντας επίσης το γεγονός που αναφέραμε πιο πάνω ότι δεν περιέχουν καμιά άμεση χρονική εξάρτηση ως προς τη χρονική στιγμή  $t$ , παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} f(t_0, \mathbf{p}_{10}) f(t_0, \mathbf{p}_{20}) = \left( \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f(t_0, \mathbf{p}_{10}) f(t_0, \mathbf{p}_{20}) = 0. \quad (16.13)$$

Από αυτό, εκφράζουμε την παράγωγο σε σχέση με την  $p_1$  μέσω αυτών που σχετίζονται με τα  $r_1, r_2$  και  $p_2$ , και αντικαθιστούμε στην (16.12). Ο όρος που περιέχει την παράγωγο  $\partial/\partial p_2$  εξαφανίζεται όταν το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε ολοκλήρωμα της επιφανείας στον χώρο της ορμής. Τότε βρίσκουμε

$$C(f(t, \mathbf{p}_i)) = \int \mathbf{v}_{rel} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{f(t_0, \mathbf{p}_{10}) f(t_0, \mathbf{p}_{20})\} d^3x d^3p_2, \quad (16.14)$$

με τη σχετική ταχύτητα των μορίων  $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ , και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι  $p_{10}$  και  $p_{20}$  (και συνεπώς η συνολική έκφραση στα άγκιστρα) εξαρτώνται από το  $r_1$  και  $r_2$  μόνο μέσω της διαφοράς  $r = r_1 - r_2$ . Αντικαθιστώντας το  $r = (x, y, z)$  με τις κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες  $z, \rho, \varphi$  με τον άξονα  $z$  κατά μήκος της  $\mathbf{v}_{rel}$ , παίρνουμε  $\mathbf{v}_{rel} \cdot \partial/\partial \mathbf{r} = u_{rel} \partial/\partial z$ , και η ολοκλήρωση ως προς  $dz$  μετατρέπει την (16.14) σε

$$C(f(t, \mathbf{p}_i)) = \int [f(t_0, \mathbf{p}_{10}) f(t_0, \mathbf{p}_{20})]_{z=-\infty}^{z=+\infty} v_{rel} \rho d\rho d\varphi d^3p_2. \quad (16.15)$$

Τώρα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι  $p_{10}$  και  $p_{20}$  είναι οι αρχικές (τη στιγμή  $t_0$ ) ορμές των σωματιδίων τα οποία την τελική στιγμή  $t$  έχουν ορμές  $p_1$  και  $p_2$ . Αν την τελική στιγμή  $z = z_1 - z_2 = -$  είναι ξεκάθαρο ότι την αρχική στιγμή τα μόρια ήταν ακόμα πιο απομακρυσμένα, π.χ. δεν έχει γίνει ακόμα σύγκρουση. Σε αυτή την περίπτωση, παρόλα αυτά, οι αρχικές και τελικές ορμές είναι ίδιες:

$$\mathbf{p}_{10} = \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}_2 \quad \text{for} \quad z = -\infty.$$

Αν  $z = +$ ,  $p_{10}$  και  $p_{20}$  δρουν ως οι αρχικές ορμές για την σύγκρουση η οποία δίνει στα σωματίδια ορμές  $p_1$  και  $p_2$ . Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε

$$\mathbf{p}_{10} = \mathbf{p}'_1(\rho), \quad \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}'_2(\rho) \quad \text{for} \quad z = +\infty.$$

Αυτές είναι οι συναρτήσεις των συντεταγμένων  $\rho$ , που δρα ως η παράμετρος κρούσης για την σύγκρουση. Το γινόμενο



$$\rho d\rho d\varphi = d\sigma$$

είναι η κλασσική ενεργός διατομή σύγκρουσης.

Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι η άμεση εξάρτηση των συναρτήσεων  $f(t_0, p_{10})$  και  $f(t_0, p_{20})$  από την  $t_0$  μπορεί να αντικατασταθεί σε αυτή την προσέγγιση από μια παρόμοια εξάρτηση με το  $t$ . Η εγκυρότητα της (16.11) απαιτεί μόνο να ικανοποιείται η ανισότητα  $t - t_0 \ll d$ : την στιγμή  $t_0$ , η απόσταση ανάμεσα στα σωματίδια πρέπει να είναι μεγάλη σε σχέση με την απόσταση  $d$  των δυνάμεων. Η διαφορά  $t - t_0$ , παρόλα αυτά, μπορεί να είναι έτσι επιλεγμένη ώστε να ικανοποιεί την συνθήκη  $t - t_0 \ll l$ , όπου  $l$  είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή. Ο λόγος  $l/d$ , που είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή, είναι απλά η χαρακτηριστική ποσότητα που καθορίζει τις περιόδους πιθανής χρονικής μεταβολής της συνάρτησης κατανομής. Η αλλαγή σε αυτή την συνάρτηση κατά τη χρονική περίοδο  $t - t_0$  θα είναι τότε σχετικά μικρή και μπορεί να αγνοηθεί.

Μέσω αυτών των υποθέσεων, παίρνουμε την τελική μορφή του ολοκληρώματος (16.15):

$$C(f(t, \mathbf{p}_1)) = \int \{f(t, \mathbf{p}'_1)f(t, \mathbf{p}'_2) - f(t, \mathbf{p}_1)f(t, \mathbf{p}_2)\} v_{rel} d\sigma d^3p_2, \quad (16.16)$$

Το οποίο συμφωνεί με το ολοκλήρωμα σύγκρουσης Boltzmann (3.9).

### **§ 17. Η συνάρτηση μεταφοράς που περιλαμβάνει συγκρούσεις ανάμεσα σε τρία σωματίδια**

Για να βρούμε τους πρώτους διορθωτικούς όρους της εξίσωσης Boltzmann, πρέπει να πάμε πίσω στα σημεία της § 16 όπου οι όροι είχαν παραβλεφθεί, και να αυξήσουμε την ακρίβεια των υπολογισμών κατά μια παραπάνω τάξη μεγέθους σχετικά με την παράμετρο αερώδους κατάστασης (gaseousness parameter). Πρώτα από όλα, όροι που περιέχουν την τριπλή συσχέτιση  $f^{(3)}$  παραλήφθηκαν στην (16.9), και συγκρούσεις που έχουν να κάνουν με τρία άτομα είχαν παραληφθεί από την υπόθεση. Επιπλέον, κατά την διάρκεια της μετατροπής του ολοκληρώματος σύγκρουσης (16.12) στην τελική μορφή (16.16), παραβλέψαμε την μεταβολή της συνάρτησης κατανομής ως προς τις αποστάσεις  $\sim d$  και των χρόνων  $\sim d/v$ . Οι συγκρούσεις ανά ζευγάρια με αυτόν τον τρόπο θεωρήθηκαν ως "τοπικά" γεγονότα που συμβαίνουν σε ένα σημείο. Πρέπει τώρα να λάβουμε υπόψη και τις δυο αυτές διορθώσεις: συγκρούσεις ανάμεσα σε τρία σωματίδια, και τη μη τοπικότητα "μη τοπικότητα" ("non-localness") των συγκρούσεων ανά ζεύγη.

Στην πρώτη προσέγγιση, η ακολουθία των εξισώσεων τερματίστηκε στην δεύτερη εξίσωση, η οποία συσχετίζει την  $f^{(2)}$  και την  $f^{(3)}$ . Στην δεύτερη προσέγγιση, πρέπει να πάμε στην Τρίτη εξίσωση, η οποία συσχετίζει την  $f^{(2)}$  και την  $f^{(3)}$ , παραλείποντας τους όρους  $f^{(4)}$  κατά τον ίδιο τρόπο όπως οι όροι παραλείφθηκαν στην (16.9) κατά την πρώτη προσέγγιση. Η εξίσωση τότε γίνεται

$$df^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)/dt = 0, \quad (17.1)$$

και αντιστοιχεί στην προηγούμενη εξίσωση (16.10) για την  $f^{(2)}$ . Οι μεταβλητές  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  στην (17.1) θεωρούνται ότι μεταβάλλονται να με το χρόνο σύμφωνα με τις εξισώσεις της κίνησης στο πρόβλημα με τα τρία σώματα (three-body problem). Θεωρούμε πάλι την αλληλεπίδραση ανάμεσα σε ένα ζεύγος σωματιδίων. Παίρνοντας την στατιστική ανεξαρτησία των σωματιδίων πριν την σύγκρουση, η λύση της (17.1) είναι

$$f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = f^{(1)}(t_0, \tau_{10})f^{(1)}(t_0, \tau_{20})f^{(1)}(t_0, \tau_{30}). \quad (17.2)$$

Οι ποσότητες  $f_0, \tau_{a0}$  ( $a = 1,2,3$ ) εδώ έχουν την ίδια έννοια όπως και στην (16.11).  $\tau_{a0} = \tau_{0a}(t_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$  είναι οι τιμές των συντεταγμένων και ορμών που πρέπει να έχουν τα σωματίδια την στιγμή  $f_0$  για να φτάσουν στα ορισμένα σημεία  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  του φασικού χώρου την στιγμή  $t$ . Η μόνη διαφορά με την (16.11) είναι ότι τα  $\tau_{a0} = (\mathbf{r}_{a0}, \mathbf{p}_{a0})$  είναι τώρα οι αρχικές συντεταγμένες και ορμές σε ένα πρόβλημα με τρία σώματα, όπου θα θεωρηθούν θεωρητικά επιλυμένες.

Για να γράψουμε και να μετασχηματίσουμε τους επακόλουθους τύπους, είναι βολικό να προσδιορίσουμε ένα τελεστή  $S_{123}$  του οποίου η λειτουργία στην συνάρτηση των μεταβλητών  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  (που αφορούν στα τρία σωματίδια στο πρόβλημα με τα τρία σώματα) είναι να αλλάξει αυτές τις μεταβλητές σύμφωνα με τα

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_a &\rightarrow \bar{\mathbf{r}}_a = \mathbf{r}_{a0} + (\mathbf{p}_{a0}/m)(t - t_0), \\ \mathbf{p}_a &\rightarrow \bar{\mathbf{p}}_a = \mathbf{p}_{a0}. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Ομοίως, ο τελεστής  $S_{12}$  θα επιφέρει αυτή την αλλαγή στις συναρτήσεις των μεταβλητών  $\tau_1$  και  $\tau_2$  που αφορά στα δυο σωματίδια στο πρόβλημα με τα δυο σώματα. Μια σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού (17.3) είναι ότι για χρόνους  $t-t_0 \gg d/v$  δεν εξαρτάται από τον χρόνο: για τέτοιους  $t-t_0$ , τα μόρια είναι πολύ μακριά και κινούνται ελεύθερα με σταθερές ταχύτητες  $v_{a0} = p_{a0}/m$ , οι τιμές των  $\mathbf{r}_{a0}$  μεταβάλλονται με τον χρόνο ως η σταθερά  $-v_{a0}(t-t_0)$ , και η χρονική εξάρτηση στην (17.3) εξαφανίζεται. Επιπλέον, αν δεν υπήρχαν καθόλου αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα σωματίδια, ο μετασχηματισμός (17.3) θα ελαχιστοποιούνταν σε μια ταυτότητα: σε μια ελεύθερη κίνηση, οι δεξιές πλευρές είναι πανομοιότυπα ίσες με αυτές στα αριστερά. Για τον ίδιο λόγο, αν ένα από τα δυο σωματίδια, ας πούμε το σωματίδιο 1, δεν αλληλεπιδρά με τα σωματίδια 2 και 3, τότε  $S_{123} = S_{23}$ . Οι τελεστές  $S_{12}$  και  $S_{13}$  τότε ελαχιστοποιούνται σε μονάδα. Είναι συνεπώς προφανές ότι ο τελεστής

$$\hat{G}_{123} = \hat{S}_{123} - \hat{S}_{12} - \hat{S}_{13} - \hat{S}_{23} + 2 \quad (17.4)$$

είναι μηδέν αν ένα από τα τρία σωματίδια δεν αλληλεπιδρά με τα άλλα δυο, π.χ. αυτός ο τελεστής διαχωρίζει στις συναρτήσεις το μέρος που οφείλεται στην αλληλεπίδραση όλων των τριών σωματιδίων (ενώ το πρόβλημα με τα τρία σώματα περιλαμβάνει επίσης, ως συγκριμένες περιπτώσεις, αλληλεπιδράσεις ζευγών, με το τρίτο σωματίδιο σε ελεύθερη κίνηση).

Με τον τελεστή  $S_{123}$ , η (17.2) γίνεται

$$f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \hat{S}_{123} \bar{f}^{(3)}(t, t_0, \tau_1) \bar{f}^{(3)}(t, t_0, \tau_2) \bar{f}^{(3)}(t, t_0, \tau_3), \quad (17.5)$$

$$\bar{f}^{(3)}(t, t_0, \tau) = f^{(1)}(t_0, \mathbf{r} - \mathbf{p}(t - t_0)/m, \mathbf{p}); \quad (17.6)$$

η μετατόπιση (shift) του ορίσματος  $\mathbf{r}$  στην  $f^{(1)}$  αντισταθμίζει εκείνο εξαιτίας του τελεστή  $S_{123}$ . Η κατανομή για τα δυο σωματίδια  $f^{(2)}$  προκύπτει ολοκληρώνοντας την συνάρτηση  $f^{(3)}$  σε σχέση με τις μεταβλητές  $t_3$ , και αφού ολοκληρώσουμε σε σχέση με τα  $t_2$  και  $t_3$  παίρνουμε την συνάρτηση κατανομής  $f^{(1)}$ :

$$f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) = \int f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_3, \quad (17.7)$$

$$f^{(1)}(t, \tau_1) = \int f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_2 d\tau_3. \quad (17.8)$$

Ο στόχος των επακόλουθων υπολογισμών είναι να απαλείψουμε την  $f^{(1)}$  από αυτές τις δυο εξισώσεις, με την  $f^{(3)}$  από την (17.5), και έτσι εκφράσουμε την  $f^{(2)}$  με την απαραίτητη ακρίβεια μέσω  $f^{(1)}$ . Έπειτα, αντικαθιστώντας την έκφραση στην (16.7), η οποία είναι από μόνη της ακριβής, φτάνουμε στην εξίσωση μεταφοράς που αναζητούμε.

Για να εκτελέσουμε αυτό το πρόγραμμα, πρώτα από όλα μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα (17.8), εκφράζοντας τον τελεστή  $S_{123}$  στην (17.5) μέσω της  $G_{123}$  μέσω της (17.4). Με τις εξισώσεις

$$\int \bar{f}^{(1)}(t, t_0, \tau) d\tau = \int f^{(1)}(t_0, \tau) d\tau = 1,$$

$$\int \hat{S}_{12} \bar{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) \bar{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = 1,$$

στις οποίες είναι ολοφάνερη η διατήρηση του συνολικού αριθμού των μορίων, παίρνουμε

$$f^{(1)}(t, \tau_1) = \bar{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) + 2 \int \{(\hat{S}_{12} - 1) \bar{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) \bar{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_2)\} d\tau_2$$

$$+ \int \{\hat{G}_{123} \bar{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) \bar{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_2) \bar{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_3)\} d\tau_2 d\tau_3. \quad (17.9)$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί για την  $f^{(1)}$  με διαδοχικές προσεγγίσεις, έχοντας υπόψη ότι  $f^{(1)}$  είναι της πρώτης τάξης μικρότητας, και  $f^{(2)}$  της δεύτερης τάξης. Συγκρίνετε τον υπολογισμό που προκύπτει από την δεξιά πλευρά της (16.9). Στην προσέγγιση μηδενικής τάξης,  $f^{(1)}(t, t_0, t_1) = f^{(1)}(t, t_1)$ . Στις επόμενες δυο προσεγγίσεις,

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, t_1) &= f^{(1)}(t, t_1) - 2 \int \{(\hat{S}_{12} - 1)f^{(1)}(t, \tau_1)f^{(1)}(t, \tau_2)\} d\tau_2 \\ &\quad - \int \{\hat{G}_{123} - 4(\hat{S}_{12} - 1)(\hat{S}_{13} + \hat{S}_{23} - 2)f^{(1)}(t, \tau_1)f^{(1)}(t, \tau_2)f^{(1)}(t, \tau_3)\} d\tau_2 d\tau_3. \end{aligned}$$

Τώρα απομένει να αντικαταστήσουμε αυτή την έκφραση στην (17.5) και έπειτα στην (17.7), διατηρώντας μόνο τους όρους που δεν ξεπερνούν την δεύτερη τάξη μικρότητας,  $\sim (t_2 - t_1)^2$  ή  $\sim t_{23}$ . Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) = \hat{S}_{12}f^{(1)}(t, \tau_1)f^{(1)}(t, \tau_2) + \int \{\hat{R}_{123}f^{(1)}(t, \tau_1)f^{(1)}(t, \tau_2)f^{(1)}(t, \tau_3)\} d\tau_3, \quad (17.10)$$

$$\hat{R}_{123} = \hat{S}_{123} - \hat{S}_{12}\hat{S}_{13} - \hat{S}_{12}\hat{S}_{23} + \hat{S}_{12}. \quad (17.11)$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι η τάξη των τελεστών  $S$  στα γινόμενα τους είναι σημαντική. Ο τελεστής  $\hat{S}_{12} \hat{S}_{23}$ , για παράδειγμα, πρώτα αλλάζει τις μεταβλητές  $t_1, t_2, t_3 \rightarrow t_1, 2(t_2, t_3), 3(t_2, t_3)$ , οι συναρτήσεις  $2, 3(t_2, t_3)$  προσδιορίζονται από τις εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων που αλληλεπιδρούν 2 και 3. Οι μεταβλητές  $t_1, t_2, t_3$  υπόκεινται στο μετασχηματισμό  $t_1, t_2, t_3 \rightarrow 1(t_1, t_2), 2(t_1, t_2), t_3$ , όπου τώρα οι συναρτήσεις  $1, 2(t_1, t_2)$  προσδιορίζονται από το πρόβλημα της κίνησης ενός ζεύγους σωματιδίων 1 και 2 που αλληλεπιδρούν,

Έπειτα, αντικαθιστώντας την (17.10) στην (16.7) και αλλάζοντας παντού στις συναρτήσεις το  $f^{(1)}$  σε  $f = N f^{(1)}$ , παίρνουμε την εξίσωση μεταφοράς με τη μορφή

$$\frac{\partial f(t, \tau_1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f(t, \tau_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = C^{(2)}(f) + C^{(3)}(f), \quad (17.12)$$

$$C^{(2)}(f(t, \tau_1)) = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{\hat{S}_{12}f(t, \tau_1)f(t, \tau_2)\} d\tau_2, \quad (17.13)$$

$$C^{(3)}(f(t, \tau_1)) = \frac{1}{N} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{\hat{R}_{123}f(t, \tau_1)f(t, \tau_2)f(t, \tau_3)\} d\tau_2 d\tau_3. \quad (17.14)$$

Η πρώτη από αυτές είναι το ολοκλήρωμα σύγκρουσης για το ζεύγος, και η δεύτερη είναι το ολοκλήρωμα για τις συγκρούσεις των τριών σωμάτων. Ας δούμε την δομή τους πιο αναλυτικά.

Και στα δυο ολοκληρώματα, οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις εμπεριέχουν συναρτήσεις  $f$  που έχουμε πάρει σε διάφορα σημεία του χώρου. Στο ολοκλήρωμα σύγκρουσης του ζεύγους, η επίδραση της μη

"τοπικότητας" ("non-localness") πρέπει να διαχωριστεί ως διόρθωση στο συνηθισμένο ολοκλήρωμα (Boltzmann). Για να γίνει αυτό, αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις  $f$ , οι οποίες μεταβάλλονται μόνο αργά (ως προς τις αποστάσεις  $\sim d$ ), σε δυνάμεις του  $r_2 - r_1$ .

Μιας και σε αυτές τις συναρτήσεις υπάρχει ο τελεστής  $\hat{S}_{12}$  πριν τις προ ολοκλήρωση συναρτήσεις, ας δούμε τις ποσότητες  $\hat{S}_{12}r_1$  και  $\hat{S}_{12}r_2$  στις οποίες εκείνος ο τελεστής μετασχηματίζει τις μεταβλητές  $r_1$  και  $r_2$ . Το κέντρο μάζας  $-(r_1 + r_2)$  των δυο σωματιδίων μετακινείται ομοιόμορφα στο πρόβλημα με τα δυο σώματα. Ο τελεστής  $\hat{S}_{12}$  συνεπώς αφήνει αυτό το άθροισμα ανέπαφο. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\hat{S}_{12}r_1 &= \hat{S}_{12}\left(\frac{1}{2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2}(r_1 - r_2)\right) \\ &= r_1 + \frac{1}{2}(r_2 - r_1) - \frac{1}{2}\hat{S}_{12}(r_2 - r_1), \\ \hat{S}_{12}r_2 &= r_1 + \frac{1}{2}(r_2 - r_1) + \frac{1}{2}\hat{S}_{12}(r_2 - r_1).\end{aligned}$$

Τώρα, αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned}\hat{S}_{12}f(t, r_1, p_1) &= f(t, \hat{S}_{12}r_1, p_{10}), \\ \hat{S}_{12}f(t, r_2, p_2) &= f(t, \hat{S}_{12}r_2, p_{20})\end{aligned}$$

σε δυνάμεις του  $r_2 - r_1$  μέχρι και τους όρους πρώτης τάξης, παίρνουμε

$$C^{(2)}(f) = C_0^{(2)}(f) + C_1^{(2)}(f), \quad (17.15)$$

$$C_0^{(2)}(f(t, r_1, p_1)) = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} \{f(t, r_1, p_{10})f(t, r_2, p_{20})\} d\tau_2, \quad (17.16)$$

$$\begin{aligned}C_1^{(2)}(f(t, r_1, p_1)) &= \frac{1}{2} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} \left\{ (r_2 - r_1) \cdot \frac{\partial}{\partial r_1} f(t, r_1, p_{10})f(t, r_2, p_{20}) \right. \\ &\quad \left. + \left[ f(t, r_1, p_{10}) \frac{\partial}{\partial r_1} f(t, r_2, p_{20}) - f(t, r_1, p_{20}) \frac{\partial}{\partial r_1} f(t, r_1, p_{10}) \right] \cdot \hat{S}_{12}(r_2 - r_1) \right\} d\tau_2;\end{aligned} \quad (17.17)$$

Η διαφοροποίηση ως προς το  $r_1$  γίνεται στις σταθερές  $p_{10}$  ή  $p_{20}$ .

Το ολοκλήρωμα (17.16) είναι το ίδιο με το (16.12). Έχουμε δείξει στην §16 πως αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να ελαχιστοποιηθεί στην συνηθισμένη μορφή του Boltzmann εκτελώντας μια από τις τρεις ολοκληρώσεις σε σχέση με τις χωρικές συντεταγμένες.

Ας δούμε τώρα το ολοκλήρωμα σύγκρουσης τριών σωμάτων (17.14). Για να συμπεριλάβουμε τη "μη τοπικότητα" ("non-localness") σε αυτό το ολοκλήρωμα θα έπρεπε να πάμε πέρα από την ακρίβεια που υποθέσαμε, μιας και το ολοκλήρωμα αποτελεί από μόνο του μια μικρή διόρθωση. Συνεπώς, στα ορίσματα των τριών συναρτήσεων  $f$ , όλες οι διανυσματικές ακτίνες  $r_1, r_2, r_3$  θα θεωρηθούν

ως η ίδια  $r_1$ , και επιπλέον πρέπει να υποθέσουμε ότι ο τελεστής  $\hat{R}_{123}$  δεν δρα σε αυτές τις μεταβλητές καθόλου:

$$C^{(3)}(f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)) = \frac{1}{N} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{ \hat{R}_{123} f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2) f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_3) \} d\tau_2 d\tau_3. \quad (17.18)$$

Ας εξετάσουμε με παραπάνω λεπτομέρειες την δομή του τελεστή  $\hat{R}_{123}$ , ώστε να διευκρινίσουμε τη φύση των διαδικασιών που περιλαμβάνουν οι συγκρούσεις που καλύπτονται από το ολοκλήρωμα (17.18).

Πρώτα από όλα, ο τελεστής  $\hat{R}_{123}$ , όπως ο  $\hat{R}_{12}$  στην (17.4), είναι μηδενικός αν ένα από τα τρία σωματίδια δεν αλληλεπιδρά με τα άλλα. Παρόλα αυτά, οι διαδικασίες για τις οποίες  $\hat{R}_{123} \neq 0$  συμπεριλαμβάνουν όχι μόνο συγκρούσεις με τρία σώματα με την κυριολεκτική έννοια, αλλά επίσης συνδυασμούς διαφόρων συγκρούσεων ζευγών.

Σε αυθεντικές συγκρούσεις τριών σωμάτων, τα τρία σωματίδια έρχονται ταυτόχρονα στην "σφαίρα αλληλεπίδρασης" ("sphere of interaction"), όπως φαίνεται από τα διαγράμματα στο σχήμα 5a. Αλλά ο τελεστής  $\hat{R}_{123}$  είναι επίσης διαφορετικός του μηδενός για τις "αλληλεπιδράσεις των τριών σωμάτων" οι οποίες αποτελούνται από τρεις διαδοχικές συγκρούσεις ζευγών, με ένα ζεύγος να συγκρούεται δυο φορές. Το σχήμα 5b δείχνει διαγραμματικά ένα τέτοιο παράδειγμα, όπου  $\hat{R}_{13} = 1$ , ώστε  $\hat{R}_{123} = \hat{R}_{12} - \hat{R}_{13} \hat{R}_{23}$ .

Επιπλέον, ο τελεστής  $\hat{R}_{123}$  λαμβάνει υπόψη επίσης υποθέσεις όπου μια (ή περισσότερες) από τις συγκρούσεις είναι "φανταστική", π.χ. συμβαίνει μόνο αν αγνοήσουμε την επίδραση μιας από τις πραγματικές συγκρούσεις που έχει στην τροχιά των σωματιδίων. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 5c,

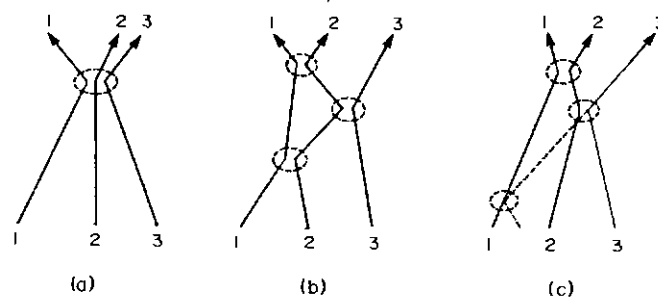


Fig. 5.

όπου η σύγκρουση 1-3 θα συνέβαινε μόνο αν η διαδρομή του σωματιδίου 3 παρέμενε ανέπαφη από την σύγκρουση του με το σωματίδιο 2. Σε αυτή τη διαδικασία,  $\hat{R}_{123} = \hat{R}_{12} \hat{R}_{23}$  αλλά  $\hat{R}_{13} \neq 1$ , ώστε  $\hat{R}_{123} = -\hat{R}_{12} \hat{R}_{13} + \hat{R}_{12}$ .

Με τον ίδιο τρόπο που μετασχηματίστηκε το ολοκλήρωμα στην ενότητα § 16, μπορούν να γίνουν έξι ολοκληρώσεις όσο αφορά στις συντεταγμένες του ολοκληρώματος σύγκρουσης στη σύγκρουση τριών σωμάτων. Το δυναμικό αλληλεπίδρασης  $U_{12}$  τότε δεν είναι φανερό στους τύπους.

### **§ 18. Η ανάπτυξη των κινητικών συντελεστών κατά virial**

Δείξαμε στις ενότητες §§7 και 8 ότι η θερμική αγωγιμότητα και το ιξώδες ήταν ανεξάρτητα της πυκνότητας του αερίου (ή της πίεσης) γιατί μόνο λάβαμε υπόψη μόνο συγκρούσεις ζευγών μορίων. Για τέτοιες συγκρούσεις, η συχνότητα σύγκρουσης, π.χ. ο αριθμός των συγκρούσεων που θα υποστεί ένα δεδομένο μόριο στη μονάδα χρόνου, είναι ανάλογος της πυκνότητας  $N$ , της μέσης ελεύθερης διαδρομής  $l \propto 1/N$ , και μιας και η  $\kappa$  και  $\eta$  είναι ανάλογα του  $Nl$  είναι ανεξάρτητα του  $N$ . Συνεπώς οι τιμές  $\eta_0$  και  $\kappa_0$  που βρίσκουμε εδώ είναι, βέβαια, μόνο οι πρώτοι όροι στα αναπτύγματα αυτών των ποσοτήτων σε δυνάμεις της πυκνότητας, τα οποία ονομάζονται αναπτύγματα virial (virial expansions). Στην επόμενη προσέγγιση, υπάρχει ήδη μια εξάρτηση από την πυκνότητα του τύπου

$$\kappa = \kappa_0(1 + \alpha Nd^3), \quad \eta = \eta_0(1 + \beta Nd^3), \quad (18.1)$$

όπου  $d$  είναι μια παράμετρος της τάξης των μοριακών διαστάσεων, και  $\alpha$  και  $\beta$  είναι σταθερές χωρίς διαστάσεις. Αυτές οι πρώτες διορθώσεις έχουν διπλή προέλευση που αντανακλά στους διορθωτικούς όρους  $C^{(3)}$  και της εξίσωσης μεταφοράς. Οι συγκρούσεις τριών σωμάτων (των οποίων η συχνότητα είναι ανάλογη του  $N^2$  μειώνουν την μέση ελεύθερη διαδρομή. Η μη τοπικότητα των συγκρούσεων ζευγών καθιστά δυνατή την μεταφορά ορμής και ενέργειας πάνω σε μια επιφάνεια χωρίς καν αυτή να την διασχίσουν τα συγκρουόμενα σωματίδια: τα σωματίδια πλησιάζουν σε μια απόσταση  $\sim d$  και έπειτα χωρίζουν, παραμένοντας στις αντίθετες πλευρές της επιφάνειας. Αυτή η επίδραση αυξάνει τις ροές ορμής και ενέργειας.

Η λύση του προβλήματος θερμικής αγωγιμότητας ή ιξώδους με την πιο ακριβή εξίσωση μεταφοράς (17.12) πρέπει να βασιστεί στην διαδικασία που περιγράψαμε πριν στις ενότητες §§6-8. Ψάχνουμε να βρούμε τις συναρτήσεις κατανομής της μορφής  $f = f_0(1 + x/T)$ , όπου  $f_0$  είναι η συνάρτηση τοπικής ισορροπίας, και  $x/T \sim 1/L$  είναι μια μικρή διόρθωση. Το ολοκλήρωμα των συγκρούσεων τριών σωμάτων  $C^{(3)}$ , όπως και το είναι μηδέν για την συνάρτηση  $f_0$ . Πρέπει συνεπώς να διατηρήσουμε τον όρο  $x$  σε αυτήν, και έτσι το ολοκλήρωμα  $C^{(3)}$  είναι, σχετικό με το ολοκλήρωμα Boltzmann  $C^{(2)}$ , μια διόρθωση σχετικής τάξης  $\sim (d/L)^3$ . Στο ολοκλήρωμα, παρόλα αυτά, το οποίο περιέχει χωρικές παραγώγους της συνάρτησης κατανομής, αρκεί να πάρουμε  $f = f_0$ , και υπό αυτή την έννοια ο όρος θα πρέπει να μεταφερθεί στο αριστερό μέρος της εξίσωσης, όπου δίνει την διόρθωση της ίδιας σχετικής τάξης  $\sim (d/L)^3$ . Συνεπώς οι δυο επιπρόσθετοι όροι  $C^{(3)}$  και στην εξίσωση μεταφοράς συμβάλουν με την ίδια τάξη.

Αναφορικά, τα αποτελέσματα της επίλυσης της πιο ακριβούς εξίσωσης μεταφοράς για την θερμική αγωγιμότητα και το ιξώδες του αερίου, με το μοντέλο των σκληρών σφαιρών (διαμέτρου  $d$ ) είναι

$$\kappa = \kappa_0(1 + 1.2Nd^3), \quad \eta = \eta_0(1 + 0.35Nd^3), \quad (18.2)$$

όπου  $\kappa_0$  και  $\eta_0$  είναι οι τιμές που βρήκαμε στην ενότητα § 10.

Κάνοντας περαιτέρω διορθώσεις στην εξίσωση μεταφοράς (που προκύπτει από συγκρούσεις τεσσάρων σωμάτων, κ.τ.λ.), θεωρητικά θα ήταν δυνατόν να καθορίσουμε τους επόμενους όρους στο ανάπτυγμα των κινητικών συντελεστών. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε, παρόλα αυτά, ότι αυτοί οι όροι θα εμπλέκουν μη ολοκληρωτικές δυνάμεις (non-integral powers) του  $N$ . Οι συναρτήσεις  $\kappa(N)$  και  $\eta(N)$  βρίσκονται να είναι μη αναλυτικές (non-analytic) στο σημείο  $N = 0$ . Για να διευκρινίσουμε την πρόβλεψη αυτής της συμπεριφοράς, ας θεωρήσουμε υπάρχει σύγκλιση των ολοκληρωμάτων στην θεωρία (E. G. D. Cohen, J. R. Dorfman and J. Weinstock 1963).

Παίρνουμε πρώτα το ολοκλήρωμα στην (17.10), η οποία καθορίζει την συνεισφορά των συγκρούσεων τριών σωμάτων στην συνάρτηση κατανομής των δυο σωμάτων. Ο τύπος σύγκλισης του ολοκληρώματος διαφέρει για τους διάφορους τύπους διαδικασιών συγκρούσεων που καλύπτονται από τον τελεστή 123. Ας πάρουμε σαν παράδειγμα την διαδικασία όπως στο Σχήμα. 5b.

Η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τον φασικό όγκο  $dr_3$  με δεδομένα φασικά σημεία  $\tau_1$  και  $\tau_2$ . Ως μεταβλητή στην τελευταία ολοκλήρωση αφήνουμε την απόσταση  $r_3$  του σωματιδίου 3 (στον χρόνο  $t$ ) από το σημείο όπου η σύγκρουση 2-3 συνέβη. Πριν την τελευταία ολοκλήρωση, η συνάρτηση προς ολοκλήρωση θα περιέχει τους παρακάτω παράγοντες: (1) Τον στοιχειώδη όγκο  $dr_3$  για τη μεταβλητή  $r_3$ . (2) Αν ακολουθήσουμε την κίνηση του σωματιδίου 3 προς τα πίσω στον χρόνο, θα είναι ξεκάθαρο ότι η διεύθυνση της ορμής του,  $p_3$  πρέπει να βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη στοιχειώδη στερεά γωνία για να συμβεί η σύγκρουση 3-2, συγκεκριμένα η γωνία που βαίνει στην περιοχική της σύγκρουσης στην απόσταση  $r_3$ , που δίνει ένα παράγοντα  $d^2/$ . (3)

Ένας άλλος τέτοιος παράγοντας προκύπτει από τον περαιτέρω περιορισμό στις πιθανές διευθύνσεις της ορμής  $p_3$  που επιβάλλεται από την συνθήκη που θέλει το σωματίδιο 2 που αναπηδά να εισέρχεται στην σφαίρα της σύγκρουσης με το σωματίδιο 1. Συνεπώς παίρνουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής  $\int dr_3/$ , το οποίο πρέπει να πάρουμε από  $r_3 \sim d$  έως  $r_3 \sim d$ , και βλέπουμε ότι συγκλίνει. Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι για διαδικασίες συγκρούσεων άλλων τύπων η σύγκλιση του ολοκληρώματος είναι ακόμα ταχύτερη.

Η συνεισφορά των συγκρούσεων τεσσάρων σωμάτων θα εκφραζόταν στην (17.10) από ένα ολοκλήρωμα παρόμοιου τύπου, που το παίρνουμε ως προς τον φασικό χώρο των σωματιδίων 3 και 4, ξανά για δεδομένα  $\tau_1$  και  $\tau_2$ .

Ας θεωρήσουμε μια σύγκρουση τεσσάρων σωμάτων του είδους που δείχνει το Σχήμα. 6. Αφήνουμε σαν τελευταία μεταβλητή της ολοκλήρωσης την απόσταση  $r_4$  από το σωματίδιο 4 (στον χρόνο  $t$ ) μέχρι το σημείο σύγκρουσης 4-3. Η διαφορά από τον προηγούμενο υπολογισμό προκύπτει επειδή το φασικό σημείο  $\tau_3$  (στον χρόνο  $t$ ) δεν είναι προσδιορισμένο, σε αντίθεση με το σημείο  $\tau_2$  του ολοκληρώματος που αντιστοιχεί στο Σχήμα. 5b. Η θέση της σύγκρουσης 4-3 είναι συνεπώς επίσης μη σταθερό. Μπορεί να προκύψει οπουδήποτε σε μια κυλινδρική περιοχική με διάμετρο  $\sim d$  και άξονα κατά μήκος του  $p_3$  (όπως φαίνεται από τις διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα. 6). Ανάλογα, η στερεά γωνία που βαίνει την περιοχική σε μια απόσταση  $r_4$  είναι  $\sim d/r_4$ , αντί για  $d^2/$  όπως στην προηγούμενη περίπτωση. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα είναι της μορφής  $\int dr_4/r_4$ , και έτσι αποκλίνει λογαριθμικά στο ανώτερο όριο. Αποκόπτοντας το ολοκλήρωμα σε μια απόσταση  $\Lambda$ , βρίσκουμε μια συνεισφορά στην συνάρτηση



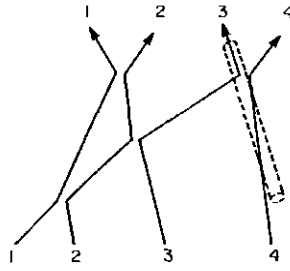


FIG. 6.

$f^{(2)}$  η οποία περιέχει τον μεγάλο λογάριθμο  $\log(\Lambda/d)$ . Αυτός ο λογάριθμος εμφανίζεται αντίστοιχα στην διόρθωση των συντελεστών μεταφοράς, οι οποίοι είναι ανάλογοι όχι του  $(Nd^3)^2$  αλλά του  $(Nd^3)^2 \log(\Lambda/d)$ .

Η παρουσία των αποκλινοσών όρων σηματοδοτεί ότι οι συγκρούσεις τεσσάρων σωμάτων δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί ξεχωριστά από εκείνους όλων των ψηλότερων τάξεων (πέντε σωμάτων, κ.τ.λ.). Επειδή η απόκλιση δείχνει ότι μεγάλα  $r_4$  είναι σημαντικά, αλλά ακόμα κι όταν  $r_4 \sim 1$ , το σωματίδιο 4 μπορεί να συγκρουστεί με κάποιο σωματίδιο 5, και ου το καθεξής. Ο τρόπος να αφαιρέσουμε την απόκλιση είναι συνεπώς ξεκάθαρος: στην έκφραση για την  $f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)$  πρέπει να λάβουμε υπόψη όρους που συνδέονται με συγκρούσεις όλων των τάξεων, διατηρώντας σε κάθε τάξη την ολοκληρώματα με την μεγαλύτερη απόκλιση. Τέτοια άθροιση μπορεί να γίνει, και έχει ένα προβλέψιμο αποτέλεσμα: η αυθαίρετα μεγάλη παράμετρος  $\Lambda$  στον λογάριθμο αντικαθίσταται από την τάξη μεγέθους της μέσης ελεύθερης διαδρομής,  $l \sim 1/Nd^2$ .

Συνοπώς η ανάπτυξη των συντελεστών μεταφοράς έχει την μορφή

$$\kappa = \kappa_0 [1 + \alpha_1 Nd^3 + \alpha_2 (Nd^3)^2 \log(l/Nd^3) + \dots], \quad (18.3)$$

### **§ 19. Διακυμάνσεις της συνάρτησης κατανομής σε ένα αέριο σε κατάσταση ισορροπίας**

Η συνάρτηση κατανομής που καθορίζεται από την συνάρτηση μεταφοράς, η οποία υποδηλώνεται με το  $\Gamma$  στις ενότητες §§ 19 και 20, δίνει τους μέσους αριθμούς μορίων στο στοιχειώδη φασικό όγκο  $d^3d\Gamma$ . Για ένα αέριο σε στατιστική ισορροπία,  $\Gamma$  είναι η συνάρτηση κατανομής Boltzmann  $f_0$  (6.7), ανεξάρτητη του χρόνου και (αν δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο) των συντεταγμένων  $r$ . Είναι φυσικό να ερευνήσουμε τις διακυμάνσεις της ακριβούς συνάρτησης μικροσκοπικής κατανομής  $f(t, r, \Gamma)$  καθώς μεταβάλλεται με το χρόνο κατά την κίνηση των σωματιδίων του αερίου όπως καθορίζονται από τις ακριβείς εξισώσεις της κίνησης.

Προσδιορίζουμε την συνάρτηση συσχετισμού (correlation function) των διακυμάνσεων ως

$$\langle \delta f(t_1, \mathbf{r}_1, \Gamma_1) \delta f(t_2, \mathbf{r}_2, \Gamma_2) \rangle, \quad (19.1)$$

όπου  $\delta f = f - \bar{f}$ . Σε ένα αέριο σε κατάσταση ισορροπίας, αυτή η λειτουργία εξαρτάται μόνο από την χρονική διαφορά  $t = t_1 - t_2$ . Ο μέσος όρος βγαίνει σε σχέση με έναν από τους χρόνους  $t_1$  και  $t_2$ , για μια σταθερή τιμή της διαφοράς τους. Αφού το αέριο είναι ομοιογενές, οι συντεταγμένες  $\mathbf{r}_1$  και  $\mathbf{r}_2$  βρίσκονται στην συνάρτηση συσχετισμού ως η διαφορά  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Συνεπώς μπορούμε αυθαίρετα να θεωρήσουμε τα  $t_2$  και  $\mathbf{r}_2$  μηδέν, και να γράψουμε την συνάρτηση συσχετισμού ως

$$\langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle. \quad (19.2)$$

Μιας και το αέριο είναι ισοτροπικό, η εξάρτηση αυτής της συνάρτησης από το  $\mathbf{r}$  στην πραγματικότητα μειώνεται σε εξάρτηση από το μέγεθος  $r$ .

Αν η συνάρτηση (19.2) είναι γνωστή, η ολοκλήρωσή της δίνει την συνάρτηση συσχετισμού για την αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων:

$$\langle \delta N(t, \mathbf{r}) \delta N(0, 0) \rangle = \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle d\Gamma_1 d\Gamma_2. \quad (19.3)$$

Για αποστάσεις  $r$  οι οποίες είναι μεγάλες σε σχέση με τη μέση ελεύθερη διαδρομή  $l$ , η συνάρτηση συσχετισμού πυκνότητας μπορεί να υπολογιστεί από την υδροδυναμική θεωρία των μεταβολών (hydrodynamic theory of fluctuations), αλλά σε αποστάσεις  $r \ll l$  χρειάζεται να αντιμετωπιστεί από την πλευρά της κινητικής.

Αμέσως φαίνεται από τον ορισμό (19.1) ότι

$$\langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle = \langle \delta f(-t, -\mathbf{r}, \Gamma_2) \delta f(0, 0, \Gamma_1) \rangle. \quad (19.4)$$

Η συνάρτηση συσχετισμού επίσης έχει μια πιο βαθιά συμμετρία η οποία αντιστοιχεί σε αυτήν της κατάστασης ισορροπίας του συστήματος υπό χρονική αντιστροφή. Η τελευταία διαδικασία αντικαθιστά μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή  $t$  από μια πιο προγενέστερη  $-t$ , και επίσης αντικαθιστά τις τιμές της  $\Gamma$  με τις χρονικά αντιστραμμένες  $\Gamma^T$ . Η ζητούμενη συμμετρία συνεπώς εκφράζεται από την

$$\langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle = \langle \delta f(-t, \mathbf{r}, \Gamma_1^T) \delta f(0, 0, \Gamma_2^T) \rangle. \quad (19.5)$$

Όταν  $t = 0$ , η συνάρτηση (19.2) συσχετίζει τις μεταβολές που γίνονται στα διάφορα σημεία του φασικού χώρου την ίδια χρονική στιγμή. Αλλά οι συσχετισμοί ανάμεσα σε ταυτόχρονες μεταβολές διαδίδονται μόνο σε αποστάσεις της τάξης της περιοχής των μοριακών δυνάμεων, ενώ στην θεωρία που εξετάζουμε τέτοιες αποστάσεις θεωρούνται μηδενικές, και έτσι η συνάρτηση του ταυτόχρονου συσχετισμού (simultaneous-correlation function) εξαφανίζεται. Πρέπει να τονιστεί ότι αυτό το αποτέλεσμα οφείλεται στην φύση της ισορροπίας της κατάστασης ως προς την οποία θεωρήσαμε τις

μεταβολές. Θα δούμε στην ενότητα §20 ότι υπάρχει επίσης συσχετισμός ταυτόχρονων μεταβολών στην περίπτωση της μη ισορροπίας.

Όταν δεν υπάρχει συσχετισμός σε μη μηδενικές αποστάσεις, η συνάρτηση ταυτόχρονου συσχετισμού (simultaneous-correlation function) μειώνεται σε συναρτήσεις δέλτα (delta functions), των οποίων ο συντελεστής είναι η μέση τετραγωνική μεταβολή σε ένα σημείο του φασικού χώρου. Σε ένα ιδανικό αέριο σε ισορροπία, η μέση τετραγωνική μεταβολή της συνάρτησης κατανομής ισούται με τη μέση τιμή της συνάρτησης. Συνεπώς

$$\langle \delta f(\mathbf{0}, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \Gamma_2) \rangle = \bar{f}(\Gamma_1) \delta(\mathbf{r}) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (19.6)$$

Η μη ταυτόχρονη συσχέτιση μεταβολών ανάμεσα στα διάφορα σημεία γίνεται ακόμη και στην θεωρία η οποία παραβλέπει τις μοριακές διαστάσεις. Το ότι υποχρεωτικά προκύπτει αυτή η συσχέτιση φαίνεται από το γεγονός ότι σωματίδια τα οποία συμμετέχουν σε μεταβολές που γίνονται σε μια συγκεκριμένη στιγμή σε κάποιο σημείο του φασικού χώρου θα γίνονται και σε άλλα σημεία σε οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή.

Το πρόβλημα υπολογισμού της συνάρτησης συσχετισμού για  $t > 0$  δεν μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας μια γενική μορφή, αλλά μπορεί να ελαχιστοποιηθεί στην επίλυση συγκεκριμένων εξισώσεων. Για να γίνει αυτό, είναι απαραίτητη μια πρόταση από την γενική θεωρία των ψευδοσταθερών μεταβολών.

Ας θεωρήσουμε ποσότητες μεταβαλλόμενες  $x_a(t)$  (με μηδενικές μέσες τιμές). Θεωρείται ότι, αν το σύστημα είναι σε κατάσταση μη ισορροπίας με τιμές του  $x_a$  πέρα των ορίων των μέσων μεταβολών τους (αλλά ακόμα μικρές), η διαδικασία της χαλάρωσης του συστήματος

για να φτάσει σε ισορροπία περιγράφεται από γραμμικές "εξισώσεις της κίνησης"

$$\dot{x}_a = - \sum_b \lambda_{ab} x_b \quad (19.7)$$

με συνεχείς συντελεστές  $\lambda_{ab}$ . Τότε μπορούμε να πούμε ότι οι συναρτήσεις συσχέτισης του  $x_a$  ικανοποιούν παρόμοιες εξισώσεις

$$\frac{d}{dt} \langle x_a(t) x_c(0) \rangle = - \sum_b \lambda_{ab} \langle x_b(t) x_c(0) \rangle, \quad t > 0, \quad (19.8)$$

με το  $c$  να είναι ένας ελεύθερος δείκτης. Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις ως προς  $t > 0$ , βρίσκουμε τις τιμές των συναρτήσεων για  $t < 0$  από την ιδιότητα της συμμετρίας

$$\langle x_a(t) x_b(0) \rangle = \langle x_b(-t) x_a(0) \rangle, \quad (19.9)$$

η οποία συνεπάγεται από τον ορισμό των συναρτήσεων συσχέτισης.

Στην παρούσα κατάσταση, οι εξισώσεις κίνησης (19.7) αντιπροσωπεύονται από την γραμμικοποιημένη εξίσωση Boltzmann για την μικρή προσθήκη  $\delta f$  στην συνάρτηση κατανομής

ισοροπίας . Συνεπώς η συνάρτηση συσχετισμού της συνάρτησης κατανομής πρέπει να ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \hat{I}_1\right) \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle = 0 \quad \text{for } t > 0, \quad (19.10)$$

$$\hat{I}_1 g(\Gamma_1) = \int w(\Gamma_1, \Gamma; \Gamma'_1, \Gamma') [\bar{f}'_1 g'_1 + \bar{f}'_1 g'_1 - \bar{f}_1 g_1 - \bar{f}_1 g_1] d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma'. \quad (19.11)$$

όπου  $\hat{I}_1$ , είναι ένας γραμμικός τελεστής ολοκλήρωσης που δρα στις μεταβλητές  $\Gamma_1$  στην συνάρτηση που τον ακολουθεί:

Οι μεταβλητές  $\Gamma_2$  στην (19.10) είναι ελεύθερες μεταβλητές. Η αρχική συνθήκη για την εξίσωση είναι η τιμή (19.6) της συνάρτησης συσχετισμού για  $t = 0$ . Αυτό για  $f < 0$  τότε δίνεται από την (19.4), και η συνθήκη (19.5) αυτόματα ικανοποιείται από το αποτέλεσμα. Οι τύποι (19.10), (19.11) και (19.4) αποτελούν ένα σύνολο εξισώσεων οι οποίες θεωρητικά αρκούν για ένα πλήρη προσδιορισμό της συνάρτησης συσχετίσεως.

Αυτό που συνήθως είναι ενδιαφέρον δεν είναι η ίδια η συνάρτηση συσχετίσεως αλλά ο μετασχηματισμός Fourier αυτής ως προς τις συντεταγμένες και τον χρόνο, που υποδηλώνεται με το  $(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}}$ . όπου οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στα ορίσματα  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$ :

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{x}, \quad (19.12)$$

η φασματική συνάρτηση (spectral function) ή η φασματική συσχετίσεως (spectral correlation function) των μεταβολών. Α μια μεταβαλλόμενη συνάρτηση αναπτυχθεί ως ολοκλήρωμα Fourier ως προς τον χρόνο και τις συντεταγμένες, η μέση τιμή των γινομένων των Fourier συνιστωσών της σχετίζεται με την φασματική συνάρτηση συσχετίσεως με την

$$\langle \delta f_{\omega \mathbf{k}}(\Gamma_1) \delta f_{\omega' \mathbf{k}'}(\Gamma_2) \rangle = (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') (\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}}; \quad (19.13)$$

Είναι εύκολο να αντλήσουμε μια εξίσωση η οποία θεωρητικά επιτρέπει τον καθορισμό της φασματικής συνάρτησης των μεταβολών χωρίς προηγούμενους υπολογισμούς της χώρο-χρονικής συνάρτησης συσχετισμού. Μοιράζοντας σε δυο μέρη την περιοχική ολοκλήρωση σε σχέση με το  $t$  στην (19.12), από  $-\infty$  έως 0 και από 0 έως  $\infty$  και χρησιμοποιώντας την (19.4), παίρνουμε

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}} = (\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} + (\delta f_2 \delta f_1)_{-\omega - \mathbf{k}}^{(-)}, \quad (19.14)$$

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} = \int_0^{\infty} dt \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 \mathbf{x}. \quad (19.15)$$

Στην εξίσωση (19.10) εφαρμόζουμε τον μονομερή μετασχηματισμό Fourier (19.15). Οι όροι που περιέχουν παραγώγους σε σχέση με το  $t$  και  $\mathbf{r}$  ολοκληρώνονται από μέρη, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση συσχετισμού πρέπει να τείνει στο μηδέν καθώς το  $r \rightarrow \infty$  και καθώς το  $t \rightarrow \pm\infty$ , και πρέπει να δίνονται από την (19.6) όταν  $t = 0$ . Η απαιτούμενη εξίσωση τότε είναι

$$[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 - \omega) - \hat{f}_1](\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} = \bar{f}(\Gamma_1) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (19.16)$$

Αν μας ενδιαφέρουν οι μεταβολές της πυκνότητας του αερίου, και όχι εκείνες της συνάρτησης κατανομής, επιτρέπεται να ολοκληρώσουμε την εξίσωση (19.16) ως προς  $d\Gamma_2$ :

$$[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) - \hat{f}](\delta f(\Gamma) \delta N)_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} = \bar{f}(\Gamma). \quad (19.17)$$

Η φασματική συνάρτηση  $(\delta N^2)_{\omega \mathbf{k}}$  την οποία αναζητούμε βρίσκεται από την επίλυση αυτής της εξίσωσης με μια μόνο ολοκλήρωση, όχι μια διπλή όπως στην (19.3).

Μια άλλη μέθοδος να βρούμε την  $(\delta N^2)_{\omega \mathbf{k}}$  βασίζεται στην σχέση ανάμεσα στην συνάρτηση συσχετισμού πυκνότητας και της γενικευμένης επιδεκτικότητας ως προς ένα ασθενές εξωτερικό πεδίο του τύπου

$$U(t, \mathbf{r}) = U_{\omega \mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}; \quad (19.18)$$

$$\delta N_{\omega \mathbf{k}} = \alpha(\omega, \mathbf{k}) U_{\omega \mathbf{k}}, \quad (19.19)$$

τότε η φασματική συνάρτηση συσχετισμού της πυκνότητας είναι, στο κλασσικό όριο,

$$(\delta N^2)_{\omega \mathbf{k}} = (2T/\omega) \text{Im } \alpha(\omega, \mathbf{k}). \quad (19.20)$$

Ας θεωρήσουμε ότι  $\delta f(t, \mathbf{r})$  είναι η μεταβολή στην συνάρτηση κατανομής εξαιτίας του ίδιου πεδίου. Αυτό ικανοποιεί την εξίσωση μεταφοράς

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta f - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{v}} = \hat{f} \delta f.$$

Οι συνιστώσες Fourier της  $\delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$  γράφονται

$$f_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma) = \chi_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma) U_{\omega\mathbf{k}},$$

στην οποία το εξωτερικό πεδίο διαχωρίζεται ως παράγοντας. Τότε η εξίσωση για  $x_{\omega\mathbf{k}}$  είναι

$$[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) - \hat{I}] \chi_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma) = i\mathbf{k} \cdot \partial \bar{f} / \partial \mathbf{v}. \quad (19.21)$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης δίνει την απαιτούμενη φασματική συνάρτηση συσχετίσεως που προέρχεται από μονή ολοκλήρωση:

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}} = (2T/\omega) \text{im} \int \chi_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma) d\Gamma \quad (19.22)$$

## **§20. Μεταβολές της συνάρτησης κατανομής σε ένα αέριο σε μη ισορροπία**

Ας υποθέσουμε ότι ένα αέριο σε μια σταθερή κατάσταση αλλά όχι σε κατάσταση μη ισορροπίας με συνάρτηση κατανομής  $f(\mathbf{r}, \Gamma)$  η οποία ικανοποιεί την εξίσωση μεταφοράς

$$\mathbf{v} \cdot \partial \bar{f} / \partial \mathbf{r} = C(\bar{f}); \quad (20.1)$$

η συνάρτηση  $f_0$  ίσως αποκλίνει αρκετά από την συνάρτηση κατανομής ισορροπίας  $f_0$ , και έτσι το ολοκλήρωμα σύγκρουσης  $C(f)$  δεν θεωρείται γραμμικοποιημένο σε σχέση με την διαφορά  $f - f_0$ .

Η σταθερή κατάσταση μη ισορροπίας πρέπει να διατηρηθεί στο αέριο μέσω εξωτερικών αλληλεπιδράσεων: το αέριο ίσως, για παράδειγμα, περιέχει μια κλίση θερμοκρασίας που οφείλεται σε εξωτερικές πηγές, ή μπορεί να εκτελεί μια σταθερή κίνηση (η οποία δεν συνιστά την κίνηση συνολικά του αερίου).

Ας ψάξουμε να υπολογίσουμε τις μεταβολές της κατανομής  $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$  σχετικά με την  $f_0(\mathbf{r}, \Gamma)$ . Αυτές οι μεταβολές θα περιγράφονται ξανά από μια συνάρτηση συσχετίσεως (19.1), στην οποία βρίσκουμε τον μέσο όρο με τον συνηθισμένο τρόπο ως προς τον χρόνο για μια δεδομένη διαφορά  $t = t_1 - t_2$ , και η συνάρτηση συσχετίσεως εξαρτάται μόνο από το  $t$ . Παρόλα αυτά, αφού η κατανομή  $f_0(\mathbf{r}, \Gamma)$  δεν είναι ομοιόμορφη, η συνάρτηση συσχετίσεως τώρα εξαρτάται από τις συντεταγμένες  $r_1$  και  $r_2$  ξεχωριστά, και όχι μόνο από τη διαφορά τους. Η ιδιότητα (19.4) γίνεται

$$\langle \delta f_1(t) \delta f_2(0) \rangle = \langle \delta f_2(-t) \delta f_1(0) \rangle, \quad (20.2)$$

$$f_1(t) = f(t, \mathbf{r}_1, \Gamma_1), f_2(0) = f(0, \mathbf{r}_2, \Gamma_2).$$

Η σχέση (19.5) που περιέχει την χρονική αναστροφή δεν έχει γενικά εφαρμογή στην περίπτωση της μη ισορροπίας.

Η συνάρτηση συσχέτισης της συνάρτησης κατανομής ξανά ικανοποιεί την εξίσωση (19.10):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} - \hat{I}_1 \right) \langle \delta f_1(t) \delta f_2(0) \rangle = 0, \quad (20.3)$$

όπου  $\hat{I}_1$  είναι ο γραμμικός τελεστής ολοκλήρωσης (19.11), ο οποίος δρα στις μεταβλητές  $\Gamma_1$ .

Το πρόβλημα της αρχικής κατάστασης σε αυτή την εξίσωση, π.χ. ο τύπος της μονο-χρονικής συνάρτησης συσχέτισης, είναι σημαντικά πολυπλοκότερος από ότι στην περίπτωση ισορροπίας, όπου δίνονταν απλά από την (19.6). Σε ένα αέριο σε μη ισορροπία, η μονο-χρονική συνάρτηση συσχέτισης (single-time correlation function) καθορίζεται καθαυτή από μια εξίσωση μεταφοράς της οποίας η μορφή μπορεί να βρεθεί με την χρήση της σχέσης ανάμεσα στην συνάρτηση συσχέτισης και την συνάρτηση κατανομής για δυο σωματίδια <sup>(2)</sup> όπως προσδιορίστηκε στην ενότητα § 16. Σε μια σταθερή κατάσταση η συνάρτηση <sup>(2)</sup> ( $\mathbf{r}_1, \Gamma_1; \mathbf{r}_2, \Gamma_2$ ), όπως και η <sup>(2)</sup> ( $\mathbf{r}, \Gamma$ ), δεν εξαρτάται φανερά από τον χρόνο.

Για να φτάσουμε σε αυτή την συνάρτηση, σημειώνουμε ότι, αφού ο όγκος  $dt = d^3x d\Gamma$  είναι απειροελάχιστος, δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από ένα σωματίδια σε μια χρονική στιγμή. Συνεπώς ο μέσος αριθμός  $\frac{1}{dt}$  εκφράζει επίσης την πιθανότητα ένα σωματίδιο να είναι σε ένα στοιχείο  $dt$  (η πιθανότητα να υπάρχουν δυο σωματίδια σε αυτό ταυτόχρονα είναι μεγαλύτερης τάξης ποσότητα μικρότητα). Συνεπάγεται ότι η μέση τιμή του γινομένου των αριθμών των σωματιδίων σε δυο στοιχεία  $dt_1$ , και  $dt_2$  ισούται με την πιθανότητα να βρούμε ταυτόχρονα ένα σωματίδιο σε καθένα από αυτά. Για ένα δεδομένο ζεύγος σωματιδίων αυτό είναι το γινόμενο  $dt_1, dt_2$ , από τον ορισμό της συνάρτησης κατανομής για δυο σωματίδια. Αφού ένα ζεύγος σωματιδίων μπορεί να επιλεγεί από το (πολύ μεγάλο) συνολικό αριθμό των σωματιδίων με  $N(N-1) \approx N^2$  τρόπους, παίρνουμε

$$\langle f_1 dt_1 \cdot f_2 dt_2 \rangle = N^2 \bar{f}_2^{(2)} dt_1 dt_2.$$

Συνεπώς η εξίσωση που βρίσκουμε  $\langle f_1 f_2 \rangle = N^2$  σχετίζεται, παρόλα αυτά, μόνο με διαφορετικά σημεία στον φασικό χώρο. Το πέρασμα στο όριο  $\mathbf{r}_1, \Gamma_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, \Gamma_2$  καθιστά αναγκαίο να λάβουμε υπόψη ότι, αν  $dt_1$  και  $dt_2$  συμπίπτουν, ένα άτομο στο  $dt_1$  βρίσκεται επίσης στο  $dt_2$ . Μια σχέση που το επιτρέπει αυτό είναι

$$\langle f_1 f_2 \rangle = N^2 \bar{f}_2^{(2)} + \bar{f}_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2); \quad (20.4)$$

όταν πολλαπλασιαστεί με  $dt_1 dt_2$  και ολοκληρωθεί ως προς ένα μικρό όγκο  $\Delta t$ , ο πρώτος όρος στα δεξιά δίνει μια μικρή ποσότητα δεύτερης τάξης,  $(\Delta t)^2$ , και ο όρος που περιέχει τις συναρτήσεις δέλτα (delta functions) δίνει  $\Delta t$ , μια ποσότητα πρώτης τάξης. Έτσι έχουμε

$$\left\langle \left( \int_{\Delta\tau} f d\tau \right) \right\rangle = \bar{f} \Delta\tau,$$

όπως και πρέπει να είναι, αφού όσο αφορά στις ποσότητες πρώτης τάξης μπορούν να υπάρξουν μόνο ένα σωματίδιο ή κανένα στο μικρό όγκο  $\Delta\tau$ .

Αντικαθιστώντας την (20.4) στον ορισμό της μονο-χρονικής συνάρτησης συσχετίσεως

$$\langle \delta f_1(0) \delta f_2(0) \rangle = \langle f_1(0) f_2(0) \rangle - \bar{f}_1 \bar{f}_2,$$

παίρνουμε την απαιτούμενη σχέση ανάμεσα σε αυτήν και την συνάρτηση κατανομής για δυο σωματίδια:

$$\langle \delta f_1(0) \delta f_2(0) \rangle = N^2 \bar{f}_1^{(2)} - \bar{f}_1 \bar{f}_2 + \bar{f}_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (20.5)$$

Σε ένα ιδανικό αέριο σε ισορροπία, η συνάρτηση κατανομής για δυο σωματίδια ελαχιστοποιείται στο γινόμενο  $\bar{f}_1 \bar{f}_2 / N^2$  και η (20.5) ελαχιστοποιείται στην (19.6). Σε κάθε περίπτωση, η  $\bar{f}_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2)$  τείνει σε αυτό το γινόμενο καθώς η απόσταση ανάμεσα στα σημεία 1 και 2 αυξάνει, ώστε

$$\langle \delta f_1(0) \delta f_2(0) \rangle \rightarrow 0 \text{ as } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty. \quad (20.6)$$

Η συνάρτηση κατανομής για δυο σωματίδια ικανοποιεί την εξίσωση μεταφοράς με τρόπο ανάλογο με αυτόν της εξίσωσης Boltzmann, που θα μπορούσε να προκύψει από την εξίσωση (16.9) για <sup>(2)</sup> με τον ίδιο τρόπο όπως η εξίσωση για την συνάρτηση κατανομής για ένα σωματίδιο προέκυψε από την (16.7). Εδώ, παρόλα αυτά, θα παράγουμε την εξίσωση για <sup>(2)</sup> με ανάλογο τρόπο που δημιουργήσαμε την εξίσωση Boltzmann στην §3, βασιζόμενοι σε εύληπτα επιχειρήματα της φυσικής.

Θα θεωρήσουμε ως άγνωστη συνάρτηση όχι την ίδια την <sup>(2)</sup> αλλά την διαφορά

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \Gamma_1; \mathbf{r}_2, \Gamma_2) = N^2 \bar{f}_1^{(2)} - \bar{f}_1 \bar{f}_2, \quad (20.7)$$

η οποία τείνει στο μηδέν καθώς το  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$ . Είναι η συνάρτηση συσχετισμού (20.5) χωρίς τον τελευταίο όρο. Αυτή η ποσότητα είναι μικρή με την συνηθισμένη έννοια της θεωρίας της διακύμανσης (fluctuation theory), ειδικότερα της τάξης του  $1/N$  σε σύγκριση με  $\bar{f}_1 \bar{f}_2$ .



Αν δεν υπάρχουν συγκρούσεις, η συνάρτηση  $\varphi$  ικανοποιεί μια εξίσωση η οποία απλά εκφράζει το θεώρημα Liouville — η σταθερότητα της <sup>(2)</sup> σε όλη την φασική τροχιά ενός ζεύγους σωματιδίων:

$$\frac{d\bar{f}^{(2)}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_2} = 0. \quad (20.8)$$

Η μεταβολή του  $\varphi$  ως αποτέλεσμα των συγκρούσεων οφείλεται σε δυο τύπους διαδικασιών.

Συγκρούσεις των σωματιδίων 1 και 2 με οποιαδήποτε άλλα σωματίδια, αλλά όχι μεταξύ τους, προκαλούν την εμφάνιση, στα δεξιά της (20.8), όρων  $\mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_2}$ , όπου  $\mathbf{v}_1$ , και  $\mathbf{v}_2$  είναι οι γραμμικοί ολοκληρωτικοί τελεστές (19.11) που επιδρούν στις μεταβλητές  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  αντιστοίχως.

Οι συγκρούσεις ανάμεσα στα σωματίδια 1 και 2 έχουν σημαντικό ρόλο, προκαλώντας ένα ταυτόχρονο "άλμα" και των δυο σωματιδίων από ένα ζεύγος σημείων του φασικού χώρου σε ένα άλλο ζεύγος. Ακριβώς τα ίδια ορίσματα που είχαν χρησιμοποιηθεί για να προκύψει η (3.7) δίνουν στα δεξιά της (20.8) ένα όρο  $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) C_{12}(\bar{f})$  όπου

$$C_{12}(\bar{f}) = \int w(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma'_1, \Gamma'_2) (\bar{f}'_1 \bar{f}'_2 - \bar{f}_1 \bar{f}_2) d\Gamma'_1 d\Gamma'_2; \quad (20.9)$$

σε αυτό το ολοκλήρωμα, οι διακυμάνσεις μπορούν να παραβλεφθούν. Ο παράγοντας  $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  εκφράζει το γεγονός ότι σωματίδια που συγκρούονται είναι στο ίδιο σημείο στον χώρο.

Συνεπώς έχουμε τελικά την εξίσωση

$$\mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_2} - \hat{I}_1 \varphi - \hat{I}_2 \varphi = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) C_{12}(\bar{f}). \quad (20.10)$$

Η επίλυση αυτής της εξίσωσης δίνει, σε συμφωνία με την (20.5), την συνάρτηση η οποία δρα ως η αρχική συνθήκη για την εξίσωση (20.3) για  $t = 0$ .

Χωρίς το δεξιό μέρος, η ομογενής εξίσωση (20.10) έχει την εξής λύση

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= f_{01} \Delta f_{02} + f_{02} \Delta f_{01}, \\ \Delta f_0 &= \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{N}} \Delta \mathcal{N} + \frac{\partial f_0}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \cdot \Delta \mathbf{V}, \end{aligned} \right\} \quad (20.11)$$

που αντιστοιχεί σε αυθαίρετες μικρές αλλαγές του αριθμού των σωματιδίων, της θερμοκρασίας, και της μακροσκοπικής ταχύτητας στην κατανομή ισορροπίας  $f_0$ .

Αυτή η "ψευδής" ("spurious") λύση, παρόλα αυτά, αποκλείεται από την συνθήκη όπου η  $\varphi \rightarrow 0$  καθώς  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$ . Συνεπώς, στην περίπτωση της ισορροπίας, όταν το ολοκλήρωμα  $C_{12}$  είναι ομοίως μηδέν, η εξίσωση (20.10) δίνει  $\varphi = 0$ , και επιστρέφουμε στην αρχική συνθήκη (19.6).

Το δεξί μέρος της (20.10), π.χ. οι συγκρούσεις ζευγών ανάμεσα σε σωματίδια στις δεδομένες καταστάσεις  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$ , μπορεί να θεωρηθεί ως η πηγή της μονο-χρονικής συσχέτισης των διακυμάνσεων σε ένα αέριο σε μη ισορροπία. Προκαλώντας ταυτόχρονη μεταβολή στους αριθμούς κατάληψης των δυο καταστάσεων, οι συγκρούσεις ζευγών προκαλούν μια συσχέτιση ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς. Στην κατάσταση ισορροπίας, εξαιτίας της ακριβούς αντιστάθμισης των άμεσων και αντίστροφων συγκρούσεων ζευγών, αυτός ο μηχανισμός δεν έχει επίδραση και δεν υπάρχουν μονο-χρονικές συσχετίσεις.

Αν η κατανομή δεν εξαρτάται από τις συνεταγμένες  $r$  (όπως ίσως συμβαίνει όταν η απόκλιση από την εξίσωση διατηρείται μέσω ενός εξωτερικού πεδίου), μπορούμε να θεωρήσουμε τους μέσους όρους διακυμάνσεων της συνάρτησης κατανομής ως προς τον συνολικό όγκο του αερίου, π.χ. της συνάρτησης

$$f(t, \Gamma) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int f(t, \mathbf{r}, \Gamma) d^3x, \quad (20.12)$$

την οποία υποδηλώνουμε με το ίδιο γράμμα  $f$  αλλά χωρίς το όρισμα  $r$ . Η αντίστοιχη συνάρτηση συσχετισμού ικανοποιεί μια εξίσωση που διαφέρει από την (20.3) στο ότι δεν έχει ένα όρο που να περιέχει την παράγωγο ως προς τις συνεταγμένες:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \hat{f}_1 \right) \langle \delta f(t, \Gamma_1) \delta f(0, \Gamma_2) \rangle = 0 \quad \text{for } t > 0; \quad (20.13)$$

στο αριστερό μέρος, ένας όρος έχει προστεθεί που προκύπτει από την δύναμη  $F$  που δρα πάνω στα σωματίδια που βρίσκονται στο εξωτερικό πεδίο. Η μόνη χρονική συνάρτηση συσχετισμού

$$\begin{aligned} \langle \delta f(0, \Gamma_1) \delta f(0, \Gamma_2) \rangle &= \mathcal{N}^2 \bar{f}^{(2)}(\Gamma_1, \Gamma_2) - \bar{f}(\Gamma_1) \bar{f}(\Gamma_2) + \frac{\bar{f}(\Gamma_1)}{\mathcal{V}} \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) \\ &\equiv \varphi(\Gamma_1, \Gamma_2) + \frac{\bar{f}(\Gamma_1)}{\mathcal{V}} \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) \end{aligned} \quad (20.14)$$

ικανοποιεί την εξίσωση

$$\left[ \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} - (\hat{f}_1 + \hat{f}_2) \right] \varphi(\Gamma_1, \Gamma_2) = C_{12}(\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2)). \quad (20.15)$$

Αν το αέριο βρίσκεται σε ένα κλειστό δοχείο, αυτή η εξίσωση πρέπει να λυθεί με την επιπρόσθετη συνθήκη οποία εκφράζει μια συγκεκριμένη τιμή (χωρίς διακυμάνσεις) του συνολικού αριθμού των σωματιδίων που βρίσκονται στο αέριο:

$$\int \langle \delta f(0, \Gamma_1) \delta f(0, \Gamma_2) \rangle d\Gamma_1 = \int \langle \delta f(0, \Gamma_1) \delta f(0, \Gamma_2) \rangle d\Gamma_2 = 0. \quad (20.16)$$

Αυτή η συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται στην περίπτωση της ισορροπίας επίσης, αλλά δεν ικανοποιείται από την έκφραση  $[\Gamma_1/V] \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2)$  η οποία αντιστοιχεί στην συνάρτηση συσχετίσεως (19.6). Η σωστή έκφραση προκύπτει κάνοντας χρήση της αυθαίρετης επιλογής (20.11). Με την κατάλληλη τιμή της παραμέτρου  $\Delta N$ ,

$$\langle \delta f(0, \Gamma_1) \delta f(0, \Gamma_2) \rangle = \frac{1}{V} \bar{f}(\Gamma_1) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) - \frac{1}{N} \bar{f}(\Gamma_1) \bar{f}(\Gamma_2). \quad (20.17)$$

Αυτή η συνάρτηση συσχετισμού περιλαμβάνει ένα όρο ο οποίος δεν περιέχει συνάρτηση δέλτα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

### Η προσέγγιση της διάχυσης

#### §21. Η εξίσωση Fokker-Planck

Μια σημαντική κατηγορία φαινομένων μεταφοράς αποτελείται από διαδικασίες στις οποίες οι μέσες μεταβολές των ποσοτήτων (από τις οποίες εξαρτάται η συνάρτηση κατανομής) σε κάθε συμβάν είναι μικρές σε σύγκριση με τις χαρακτηριστικές τιμές τους. Οι χρόνοι καλάρωσης για τέτοιες διαδικασίες είναι μεγάλοι σε σχέση με τους χρόνους των μεμονωμένων συμβάντων τα οποία αποτελούν τους μικροσκοπικούς μηχανισμούς. Υπό αυτή την έννοια, μπορούμε να τις αποκαλέσουμε αργές διαδικασίες.

Ένα τυπικό παράδειγμα είναι το πρόβλημα της καλάρωσης της ορμής μιας μικρής πρόσμιξης ενός βαρέως αερίου μέσα σε ένα ελαφρύ αέριο, όπου το δεύτερο θεωρείται από μόνο του σε κατάσταση ισορροπίας.

Εξαιτίας της χαμηλής συγκέντρωσης βαρέων σωματιδίων, οι συγκρούσεις μεταξύ τους μπορούν να παραβλεφθούν, και μόνο να ληφθούν υπόψη μόνο αυτές με τα σωματίδια του ελαφριού αερίου. Όταν ένα βαρύ σωματίδιο συγκρούεται με τα ελαφριά, παρόλα αυτά, η ορμή του υπόκειται σε σχετικά πολύ μικρή μεταβολή.

Θα αναφερθούμε σε αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα, και θα εξάγουμε την εξίσωση μεταφοράς που ικανοποιείται σε τέτοιες περιπτώσεις από την συνάρτηση κατανομής της ορμής  $f(t, p)$  των σωματιδίων που προέκυψαν από την πρόσμιξη.

Ας θεωρήσουμε ότι  $w(p, q)d^3q$  υποδηλώνει την πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου μιας μεταβολής  $p \rightarrow p-q$  στην ορμή ενός βαρέως σωματιδίου σε μια μεμονωμένη σύγκρουση με ένα ελαφρύ σωματίδιο. Τότε η εξίσωση μεταφοράς για την συνάρτηση  $f(t, p)$  είναι

$$\partial f(t, \mathbf{p}) / \partial t = \int \{w(\mathbf{p} + \mathbf{q})f(t, \mathbf{p} + \mathbf{q}) - w(\mathbf{p}, \mathbf{q})f(t, \mathbf{p})\} d^3 q, \quad (21.1)$$

όπου το δεξί μέρος είναι η διαφορά ανάμεσα στους αριθμούς των σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου που εισέρχονται και αφήνουν μια ένα συγκεκριμένο στοιχειώδη χώρο ορμής  $d^3 p$ . Σύμφωνα με τις υποθέσεις που χρησιμοποιήθηκαν, η συνάρτηση  $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  μειώνεται όταν αυξάνεται το  $q$ , και έτσι οι πιο σημαντικές τιμές του  $q$  στο ολοκλήρωμα είναι εκείνες που είναι μικρές σε σχέση με την μέση ορμή των σωματιδίων. Αυτό επιτρέπει την χρήση του επόμενου αναπτύγματος να χρησιμοποιηθεί στην συνάρτηση προς ολοκλήρωση:

$$w(\mathbf{p} + \mathbf{q})f(t, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \approx w(\mathbf{p}, \mathbf{q})f(t, \mathbf{p}) + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} w(\mathbf{p}, \mathbf{q})f(t, \mathbf{p}) + \frac{1}{2} q_\alpha q_\beta \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} w(\mathbf{p}, \mathbf{q})f(t, \mathbf{p}).$$

The transport equation then becomes

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left\{ \tilde{A}_\alpha f + \frac{\partial}{\partial p_\beta} (B_{\alpha\beta} f) \right\}, \quad (21.2)$$

89

Όπου:

$$\tilde{A}_\alpha = \int q_\alpha w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3 q, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_\alpha q_\beta w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3 q. \quad (21.3)$$

Συνοπώς η εξίσωση μεταφοράς είναι τώρα μια διαφορική εξίσωση. Οι ποσότητες  $\tilde{A}_\alpha$  και  $B_{\alpha\beta}$  μπορούν να γραφτούν συμβολικά όπως παρακάτω για να δείξουμε την σημαντικότητα πιο ξεκάθαρα:

$$\tilde{A}_\alpha = \sum q_\alpha / \delta t, \quad B_{\alpha\beta} = \sum q_\alpha q_\beta / 2\delta t, \quad (21.4)$$

όπου οι προσθέσεις είναι ως προς τον (μεγάλο) αριθμό των συγκρούσεων που συμβαίνουν στον χρόνο  $\delta t$ .

Η έκφραση στο δεξί μέρος της (21.2) είναι η απόκλιση του χώρου ορμής,  $-\partial s_\alpha / \partial p_\alpha$ , του διανύσματος:

$$\left. \begin{aligned} s_\alpha &= -\tilde{A}_\alpha f - \frac{\partial}{\partial p_\beta} (B_{\alpha\beta} f) \\ &= -A_\alpha f - B_{\alpha\beta} \partial f / \partial p_\beta, \\ A_\alpha &= \tilde{A}_\alpha + \partial B_{\alpha\beta} / \partial p_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (21.5)$$

Συνοπώς η εξίσωση (21.2) είναι, όπως κι όφειλε να είναι, μια εξίσωση συνεχείας στον χώρο ορμής, και έτσι ο αριθμός σωματιδίων αυτόματα διατηρείται στην διαδικασία. Το διάνυσμα  $s$  αποτελεί την πυκνότητα ροής του σωματιδίου στον χώρο της ορμής.

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (21.4), οι συντελεστές στην εξίσωση μεταφοράς εκφράζονται με την μορφή των μέσων χαρακτηριστικών των συγκρούσεων, και κατά αυτή την έννοια ο υπολογισμός του αποτελεί ένα καθαρά μηχανικό πρόβλημα. Στην πραγματικότητα, παρόλα αυτά, δεν υπάρχει ανάγκη να υπολογίσουμε τα  $A_{\alpha}$  και  $B_{\alpha\beta}$  μεμονωμένα, μπορούν να εκφραστούν το ένα μέσω του άλλου μέσω της συνθήκης που θέλει την ροή να είναι μηδέν στην στατιστική ισορροπία. Στην παρούσα κατάσταση, η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας είναι:

$$f = \text{constant} \times \exp(-\mathbf{p}^2/2MT),$$

όπου  $M$  είναι η μάζα των σωματιδίων του βαρέως αερίου και  $T$  η θερμοκρασία του ελαφριού αερίου. Αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην εξίσωση  $s = 0$  δίνει:

$$MTA_{\alpha} = B_{\alpha\beta}p_{\beta}. \quad (21.6)$$

Συνεπώς οι εξισώσεις μεταφοράς γίνονται:

$$\frac{\partial f(\mathbf{t}, \mathbf{p})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \left[ B_{\alpha\beta} \left( \frac{p_{\beta}}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial p_{\beta}} \right) \right]. \quad (21.7)$$

Οι συντελεστές στους δυο πρώτους όρους του αναπτύγματος του ολοκληρώματος σύγκρουσης είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Ο λόγος είναι ότι ο μέσος όρος των πρώτων δυνάμεων των ποσοτήτων στην (21.4), των οποίων το πρόσημο είναι μεταβλητό, εμπεριέχει ένα μεγαλύτερο βαθμό ακύρωσης από ότι ο μέσος όρος των τετραγωνικών εκφράσεων. Οι τελευταίοι όροι του αναπτύγματος είναι όλοι μικροί σε σχέση με τους δυο πρώτους.

Το μόνο διάνυσμα από το οποίο μπορούν να εξαρτώνται οι συντελεστές  $B_{\alpha\beta}$  είναι η ορμή  $\mathbf{p}$  των βαρέων σωματιδίων. Αν οι ταχύτητες  $\mathbf{p}/M$  αυτών των σωματιδίων είναι κατά μέσο όρο μικρές σε σχέση με αυτές των ελαφριών σωματιδίων, μπορούν να θεωρηθούν ως ακίνητα κατά τις συγκρούσεις. Σε αυτή την προσέγγιση, οι  $B_{\alpha\beta}$  είναι ανεξάρτητες του  $\mathbf{p}$ .

Συνεπώς ο τανυστής  $B_{\alpha\beta}$  ελαχιστοποιείται σε ένα σταθερό βαθμωτό μέγεθος  $B$ :

$$B_{\alpha\beta} = B\delta_{\alpha\beta}, \quad B = \frac{1}{6} \int q^2 w(\mathbf{0}, \mathbf{q}) d^3q, \quad (21.8)$$

και η εξίσωση (21.7) γίνεται:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = B \frac{\partial}{\partial p} \cdot \left( \frac{p}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial p} \right). \quad (21.9)$$

Υπάρχει μια επίσημη ομοιότητα ανάμεσα στην (21.7) και στην εξίσωση της διάχυσης σε ένα εξωτερικό πεδίο, η οποία είναι αρκετά εμφανές από τον τύπο (21.9).

Η εξίσωση διάχυσης είναι:

$$\partial c / \partial t = \text{div}(D \nabla c - bcF),$$

όπου  $c$  είναι η συγκέντρωση πρόσμιξης,  $F$  είναι η δύναμη που ασκείται πάνω στα σωματίδια από το

εξωτερικό πεδίο,  $D$  ο συντελεστής διάχυσης, και  $b$  η κινητικότητα. Οι διαδικασίες που περιγράφονται από την (21.9) μπορούν να αναφερθούν ως διάχυση στον χώρο ορμής, με το  $B$  να δρα ως ο συντελεστής διάχυσης.

Η σχέση ανάμεσα στους συντελεστές στους δυο όρους στο δεξί μέρος της (21.9) είναι ανάλογη της γνωστής σχέσης του Einstein  $D = bT$  ανάμεσα στον συντελεστή διάχυσης και την κινητικότητα.

Η συνάρτηση μεταφοράς με την μορφή (21.2), με τους συντελεστές που προσδιορίστηκαν μέσω των μέσων όρων των χαρακτηριστικών των στοιχειωδών συμβάντων μέσω της (21.4), ονομάζεται εξίσωση Fokker-Planck (A. D. Fokker 1914; M. Planck 1917). Οι συγκεκριμένες ιδιότητες των μεταβλητών είναι οι ορμές των σωματιδίων που δεν έχουν κανένα ρόλο στην εξαγωγή που δίνεται. Είναι λοιπόν ξεκάθαρο ότι μια εξίσωση του ίδιου τύπου είναι έγκυρη και για την συνάρτηση κατανομής  $f$  σε σχέση με τις άλλες μεταβλητές, με την προϋπόθεση ότι οι συνθήκες από τις οποίες εξαρτάται η απόδειξη ικανοποιούνται: η σχετική μικρότητα της μεταβολής των ποσοτήτων σε κάθε συμβάν, και την γραμμικότητα σε σχέση με την  $f$  του ολοκληρωματικού τελεστή ο οποίος εκφράζει την μεταβολή στην συνάρτηση που προκύπτει από αυτά τα συμβάντα.

Σαν παράδειγμα, ας πάρουμε την περίπτωση ενός ελαφριού αερίου που σχηματίζει μια μικρή πρόσμιξη σε βαρύ αέριο. Σε συγκρούσεις με βαριά σωματίδια, η διεύθυνση της ορμής ενός ελαφριού σωματιδίου μεταβάλλεται αρκετά ενώ το μέγεθός της πολύ λίγο. Παρόλο που η (21.7) δεν ισχύει κάτω από αυτές τις συνθήκες για την συνάρτηση κατανομής των σωματιδίων του αερίου υπό πρόσμιξη ως προς το διάνυσμα ορμής  $p$ , μια παρόμοια εξίσωση μπορεί να δημιουργηθεί για την κατανομή ως προς το μέγεθος  $p$  μόνο. Αν πάρουμε την συνάρτηση κατανομής, όπως πριν, σε σχέση με τον στοιχειώδη χώρο ορμής  $d^3p$ , έτσι ώστε ο αριθμός σωματιδίων που έχει την τιμή  $p$  σε ένα διάστημα  $dp$  είναι  $f(t,p) \cdot 4\pi p^2 dp$  η εξίσωση Fokker-Planck ισχύει για την συνάρτηση  $4\pi p^2 f$  σε σχέση με την  $dp$ :

$$\frac{\partial (f p^2)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \left\{ f p^2 A + B \frac{\partial}{\partial p} f p^2 \right\},$$

ογ

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left\{ f A + \frac{B}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} f p^2 \right\}, \quad (21.10)$$

where

$$B = \frac{1}{2} \sum (\delta p)^2 / \delta t. \quad (21.11)$$

Η έκφραση μέσα στα άγκιστρα είναι η ακτινική ροή  $s$  στον χώρο ορμής. Πρέπει να μειώσει στο μηδέν την περίπτωση της κατανομής ισορροπίας:

$$f = \text{constant} \times \exp(-p^2/2mT),$$

οπου m είναι η μάζα ενός ελαφριού σωματιδίου και T η θερμοκρασία του βαρέως αερίου. Αυτή η συνθήκη δίνει την σχέση ανάμεσα στα A και B, και την εξίσωση μεταφοράς (21.10) και συνεπώς γίνεται:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{p^2} \frac{\partial(p^2 s)}{\partial p}, \quad s = -B \left( \frac{p}{mT} f + \frac{\partial f}{\partial p} \right). \quad (21.12)$$

## **§22. Ένα ασθενές ιονισμένο αέριο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο**

Ας υποθέσουμε ότι ένα ιονισμένο αέριο βρίσκεται μέσα σε ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο E. Αυτό το πεδίο διαταράσσει την κατανομή ισορροπίας των ελευθέρων ηλεκτρονίων μέσα στο αέριο και έχουμε την εμφάνιση ενός ηλεκτρικού ρεύματος μέσα σε αυτό. Θα εξάγουμε την εξίσωση μεταφοράς η οποία διέπει την κατανομή των ηλεκτρονίων.

Αν ο ιονισμός είναι ασθενής, η πυκνότητα ηλεκτρονίων και ιόντων στο αέριο είναι μικρή. Συνεπώς μόνο οι συγκρούσεις ανάμεσα στα ηλεκτρόνια και τα ουδέτερα μόρια έχουν σημασία. Εκείνες ανάμεσα στα ηλεκτρόνια και τα ιόντα ή άλλα ηλεκτρόνια μπορούν να παραβλεφθούν. Επίσης θα υποθέσουμε ότι η μέση ενέργεια που αποκτούν τα ηλεκτρόνια μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι (ακόμα και σε δυνατό πεδίο: βλέπε παρακάτω) αρκετή να διεγείρει ή να ιονίσει τα μόρια. Οι συγκρούσεις ανάμεσα στα ηλεκτρόνια και τα μόρια μπορούν τότε να θεωρηθούν ελαστικές.

Εξαιτίας της μεγάλης διαφοράς ανάμεσα στην μάζα του ηλεκτρονίου m και την μάζα του μορίου M, η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι πολύ μεγαλύτερη από εκείνη των μορίων. Για τον ίδιο λόγο, η ορμή του ηλεκτρονίου μεταβάλλει την διεύθυνση του σημαντικά σε μια σύγκρουση, αλλά πολύ λίγο το μέγεθος της. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, το ολοκλήρωμα σύγκρουσης στην εξίσωση μεταφοράς υπόκειται στο άθροισμα δύο τμημάτων που αντιπροσωπεύουν τις μεταβολές του αριθμού των σωματιδίων σε ένα δεδομένο στοιχείο του χώρου της ορμής εξαιτίας της μεταβολής του μεγέθους και της διεύθυνσης των ορμών. Το πρώτο μέρος μπορεί να εκφραστεί με την διαφορική μορφή Fokker-Planck .

Εξαιτίας της συμμετρίας ως προς την διεύθυνση του πεδίου, η συνάρτηση κατανομής εξαρτάται μόνο από δυο μεταβλητές (πέρα του χρόνου): το μέγεθος ρ της ορμής, και την γωνία θ ανάμεσα στο ρ = mv και την διεύθυνση του E (την οποία θεωρούμε ότι βρίσκεται στον άξονα z).

Η εξίσωση μεταφοράς για την συνάρτηση f(t, ρ, θ) έχει την μορφή:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - eE \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 s) + Nv \int [f(t, p, \theta') - f(t, p, \theta)] d\sigma, \quad (22.1)$$

where

$$s = -B \left( \frac{v}{T} f + \frac{\partial f}{\partial p} \right), \quad B = \frac{1}{2} \sum (\Delta p)^2 / \delta t.$$



Ο πρώτος όρος στο δεξί μέρος της (22.1) αντιστοιχεί στο δεξί μέρος της εξίσωσης Fokker-Planck (21.12). Ο δεύτερος όρος είναι το ολοκλήρωμα σύγκρουσης ως προς την μεταβολή της διεύθυνσης της ορμής. Σε αυτό το ολοκλήρωμα, τα μόρια μπορούν να θεωρηθούν ως ακίνητα (όπου  $N$  είναι η αριθμητική πυκνότητα). Ο αριθμός των συγκρούσεων που υφίσταται ένα ηλεκτρόνιο ανά μονάδα χρόνου και προκαλείται αλλαγή της διεύθυνσης της ορμής από  $\theta$  σε  $\theta'$  (ή και αντίστροφα) είναι  $Nv d\sigma$ , όπου  $d\sigma$  είναι η διατομή σκέδασης ενός ηλεκτρονίου από ένα μόριο σε ηρεμία, η οποία εξαρτάται από το  $\rho$  και από την γωνία  $\alpha$  ανάμεσα στο  $\rho$  και  $\rho'$ . Θεωρούμε ότι η διατομή είναι ήδη ο μέσος όρος της ως προς τους προσανατολισμούς του μορίου.

Θα θεωρήσουμε μια σταθερή κατάσταση με μια συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητη του χρόνου, και κατά συνέπεια ο όρος  $\partial f/\partial t$  στην (22.1) θα απαλειφθεί. Για να υπολογίσουμε το  $B$ , χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 = (\mathbf{v}' - \mathbf{V}')^2,$$

η οποία εκφράζει το σταθερό μέγεθος της σχετικής ταχύτητας των δυο σωματιδίων σε μια ελαστική σύγκρουση,  $v$ ,  $V$  και  $v'$ ,  $V'$  είναι οι αρχικές και τελικές ταχύτητες του ηλεκτρονίου και του μορίου. Η μεταβολή της ταχύτητας του μορίου είναι μικρή σε σύγκριση με εκείνη του ηλεκτρονίου ( $\Delta V = -m\Delta v/M$ ).

Συνεπώς, αφού αναπτύξουμε την παραπάνω εξίσωση, μπορούμε να θέσουμε  $\Delta V = -m\Delta v/M$ . Τότε:

$$2\mathbf{V} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}') = v^2 - v'^2 \approx 2v\Delta v,$$

όπου  $\Delta v$  είναι μια μικρή ποσότητα. Συνεπώς:

$$(\Delta p)^2 = m^2(\Delta v)^2 = (m^2/v^2)[(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{V}' \cdot \mathbf{v}')^2 - 2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{V}' \cdot \mathbf{v}')].$$

Βγάζουμε τον μέσο όρο αυτής της έκφρασης σε δυο στάδια. Πρώτα, βγάζουμε τον μέσο όρο ως προς την κατανομή (Maxwell) των μοριακών ταχυτήτων  $V$ . Εξαιτίας της ισοτροπίας αυτής της κατανομής, έχουμε  $\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} \rangle = 0$  και  $\langle V^2 \rangle = 3T/M$ . Συνεπώς παίρνουμε:

$$(\Delta p)^2 = (m^2T/Mv^2)(v^2 + v'^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') \approx (2m^2T/M)(1 - \cos \alpha). \quad (22.2)$$

Πρέπει τα ώρα να βγάλουμε το μέσο όρο ως προς τις συγκρούσεις που υφίστανται το ηλεκτρόνιο. Αυτό γίνεται ολοκληρώνοντας ως προς  $\alpha$ . Το αποτέλεσμα είναι:

$$B = Nm^2v\sigma_r T/M = \rho mT/Ml, \quad (22.3)$$

όπου  $l$  είναι η διατομή μεταφοράς, και  $l$  η μέση ελεύθερη διαδρομή που προσδιορίζεται ως:

$$l = 1/N\sigma_{\theta} \quad (22.4)$$

$$s = -\frac{mp}{Ml} \left( v f + T \frac{\partial f}{\partial p} \right). \quad (22.5)$$

Παρατηρήστε ότι, σύμφωνα με την (22.2), η μεταβολή της ενέργειας του ηλεκτρονίου κατά την σύγκρουση είναι  $\sim \frac{1}{\bar{u}}$ . Συνεπώς μια σημαντική μεταβολή της ενέργειας συμβαίνει μόνο μετά από  $\sim M/m$  συγκρούσεις, ενώ η διεύθυνση της ορμής του ηλεκτρονίου μεταβάλλεται σημαντικά ακόμα και με μια σύγκρουση. Δηλαδή, ο χρόνος της καλάρωσης της ενέργειας του ηλεκτρονίου είναι  $\sim M/m$ , όπου  $\sim 1/\bar{u}$  είναι ο χρόνος καλάρωσης της διεύθυνσης της ορμής. Το αριστερό μέρος της (22.1) πρέπει επίσης να μετασχηματισθεί στις μεταβλητές  $\rho$  και  $\theta$ :

$$e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = eE \frac{\partial f}{\partial p_z} = eE \left[ \cos \theta \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\sin^2 \theta}{p} \frac{\partial f}{\partial \cos \theta} \right]. \quad (22.6)$$

Η λύση που εξάγαμε για την συνάρτηση μεταφοράς συνεπώς μπορεί να αναζητηθεί ως ένα ανάπτυγμα των πολυωνύμων Legendre:

$$f(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\rho) P_n(\cos \theta). \quad (22.7)$$

Θα δούμε αργότερα ότι οι διαδοχικοί όροι σε αυτό το ανάπτυγμα μειώνονται ταχύτατα στην  $n$  τάξη μεγέθους. Συνεπώς αρκεί στην πράξη να πάρουμε μόνο τους δυο πρώτους όρους του αναπτύγματος:

$$f(\rho, \theta) = f_0(\rho) + f_1(\rho) \cos \theta. \quad (22.8)$$

Αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα (22.8) στην (22.1) έχουμε:

$$\int [f(\rho, \theta') - f(\rho, \theta)] d\sigma = -f_1 \sigma \cos \theta;$$

Συγκρίνετε το μετασχηματισμό ενός παρόμοιου ολοκληρώματος στην (11.1). Η εξίσωση μεταφοράς τότε γίνεται:

$$-eE \left[ f_1 \cos \theta + \left( \frac{1}{p} \right) \sin^2 \theta \right] + (l/p^2) (p^2)' + (u/l) f_1 \cos \theta = 0,$$

όπου ο πρώτος όρος υποδηλώνει διαφορά ως προς  $p$ . Ο όρος  $\frac{1}{lM}(p^2 f_0 + mpTf_0) - \frac{1}{3}eEf_1$  έχει παραληφθεί. Είναι βέβαια μικρός (στο λόγο  $\sim \pi/M$ ) σε σύγκριση με τον όρο  $f_0$  και είναι οι εκφράσεις (22.5) με  $\theta$  ή στην θέση της  $f$ ). Πολλαπλασιάζοντας αυτή την εξίσωση με  $\frac{1}{p}$  ή  $\cos \theta$  και ολοκληρώνοντας ως προς  $d \cos \theta$ , παίρνουμε δυο εξισώσεις:

$$(1/p^2)(p^2 S)' = 0, \quad S = -\frac{1}{lM}(p^2 f_0 + mpTf_0) - \frac{1}{3}eEf_1, \quad (22.9)$$

$$f_1 = (eEl/v)f_0 \quad (22.10)$$

Η έκφραση  $S$  αντιπροσωπεύει την ροή σωματιδίων στον χώρο ορμής που έχει τροποποιηθεί λόγω του ηλεκτρικού πεδίου. Συνειπάγεται από την (22.9) ότι  $S = \text{constant}/p^2$ . Η ροή  $S$  πρέπει, παρόλα αυτά, να είναι πεπερασμένη για όλα τα  $p$ , και συνεπώς η σταθερά είναι μηδέν. Τώρα αντικαθιστώντας την  $f_1$  από την (22.10) στην εξίσωση  $S = 0$ , βρίσκουμε μια εξίσωση που προσδιορίζει την  $f_0(p)$ :

$$\left[ pT + \frac{(eEl)^2 M}{3p} \right] f_0' + \frac{p^2}{m} f_0 = 0. \quad (22.11)$$

Μέχρι τώρα δεν έχουμε κάνει καμία υπόθεση για την μορφή της συνάρτησης  $l(p)$ , και το ολοκλήρωμα της εξίσωσης πρώτης τάξης (22.11) μπορεί να γραφτεί για οποιοδήποτε  $l(p)$ . Για να βρούμε πιο συγκεκριμένα αποτελέσματα, θα υποθέσουμε ότι  $l = \text{σταθερή}$ , το οποίο είναι το ίδιο με το να υποθέσουμε ότι η διατομή  $\sigma$  είναι ανεξάρτητη της ορμής.

Η ολοκλήρωση της (22.11) δίνει:

$$f_0(p) = \text{constant} \times \left( \frac{\epsilon}{T} + \frac{\gamma^2}{6} \right)^{r^2/6} e^{-\epsilon T}, \quad (22.12)$$

where

$$\gamma = (eEl/T)\sqrt{(M/m)}. \quad (22.13)$$

Για την συνάρτηση  $f_1$ , παίρνουμε από την (22.10) και (22.12)

$$f_1 = -f_0 \sqrt{\left( \frac{m}{M} \right)} \frac{\gamma \epsilon / T}{\epsilon / T + \gamma^2 / 6}. \quad (22.14)$$

Η ποσότητα  $\gamma$  είναι η παράμετρος που περιγράφει πόσο το πεδίο επηρεάζει την κατανομή ηλεκτρονίων. Η περιοριστική περίπτωση αδύναμων πεδίων αντιστοιχεί στο  $\gamma \ll 1$ . Στην πρώτη προσέγγιση,  $f_0(p)$  τότε μειώνεται στην αδιατάρακτη κατανομή Maxwell:  $f_0(p) \propto e^{-\epsilon T}$ , και έχουμε:

$$f_1 = -(eE/T)f_0, \quad \gamma \ll 1. \quad (22.15)$$

Το ηλεκτρικό ρεύμα που δημιουργείται στο αέριο καθορίζεται από την κινητικότητα των ηλεκτρονίων:

$$b = \frac{\bar{v}_z}{-eE} = \frac{1}{-eEN_e} \int v \cos \theta \cdot f d^3p = -\frac{1}{3eEN_e} \int v f_1 d^3p, \quad (22.16)$$

όπου  $N_e$  είναι η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων. Ένας απλός υπολογισμός με την από την (22.15) δίνει για την κινητικότητα σε ένα ασθενές πεδίο:

$$b_0 = 2^{3/2} / (3\pi^{1/2} (mT)^{1/2}). \quad (22.17)$$

Αυτή η έκφραση ικανοποιεί, όπως και θα έπρεπε, την σχέση του Einstein  $D = bT$ , όπου  $D$  είναι ο συντελεστής διάχυσης (11.10).

Η σημαντικότητα της ανισότητας  $\gamma \ll 1$  ως κριτήριο για ένα ασθενές πεδίο μπορεί να γίνει κατανοητή με τα παρακάτω απλά επιχειρήματα. Είναι φανερό ότι η επίδραση του πεδίου στην κατανομή των ηλεκτρονίων θα είναι ασθενής δεδομένου ότι η ενέργεια που αποκτάται από ένα ηλεκτρόνιο στην μέση ελεύθερη διαδρομή του είναι μικρή σε σύγκριση με αυτή που χάνει κατά την σύγκρουση με ένα άτομο. Η προηγούμενη ενέργεια είναι  $eEl$ , και η τελευταία είναι:

$$\delta\epsilon \sim V\delta P \sim Vp \sim \sqrt{(T/M)}\sqrt{(Tm)},$$

όπου  $P$  και  $V$  είναι η ορμή και η ταχύτητα του ατόμου. Η αλλαγή  $\delta P$  είναι της τάξης της ορμής του ηλεκτρονίου. Έπεται το κριτήριο από την σύγκριση των δυο εκφράσεων.

Στην αντίθετη περίπτωση που έχουμε ισχυρά πεδία ( $\gamma \gg 1$ ), βρίσκουμε ότι :

$$\left. \begin{aligned} f_0(p) &= A \exp(-3\epsilon^2/\gamma^2 T^2), \\ A &= 3^{3/4} N_e / (2^{3/2} \pi \Gamma(3/2) (m\gamma T)^{3/2}), \end{aligned} \right\} \quad (22.18)$$

$$f_1 = -6\sqrt{(m/M)}\epsilon f_0 / T\gamma. \quad (22.19)$$

Η μέση ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι:

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\left(\frac{2M}{3m}\right)} \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) eEl = 0.43eL\sqrt{(M/m)}, \quad (22.20)$$

και η κινητικότητα των ηλεκτρονίων είναι:

$$b = 4\Gamma(\frac{3}{2})l^{1/2}/3^{3/4}\pi^{1/2}(mM)^{1/4}(eE)^{1/2}. \quad (22.21)$$

Απομένει να εξακριβώσουμε την συνθήκη ώστε το ανάπτυγμα (22.7) να συγκλίνει. Για αυτό τον λόγο, παρατηρούμε ότι οι διαδοχικοί του όροι συνδέονται ως προς την τάξη μεγέθους μέσω της:

$$eEf_{n-1}/mv \sim v f_n/l: \quad (22.22)$$

αφού αντικαταστήσουμε την (22.7), και πολλαπλασιάσουμε με  $\cos\theta$ , και ολοκληρώσουμε ως προς  $d\cos\theta$ , ο όρος στην  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\cos\theta$ , παραμένει στο αριστερό μέρος της εξίσωσης μεταφοράς, και ο όρος στην  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta d\cos\theta$  στο ολοκλήρωμα σύγκρουσης. Όταν  $\gamma \ll 1$ , η μέση ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι  $\sim T$ , και παίρνουμε από την (22.22)

$$f_n/f_{n-1} \sim eEl/T \ll (m/M)^{1/2} \ll 1.$$

Σε ισχυρά πεδία, με  $\gamma \gg 1$ , η μέση ενέργεια είναι  $\sim eEl$  - ώστε ξανά έχουμε:

$$f_n/f_{n-1} \sim (m/M)^{1/2} \ll 1.$$

Συνεπώς το ανάπτυγμα είναι συγκλίνον, αφού ο λόγος  $m/M$  είναι μικρός.

### **§23. Διακυμάνσεις σε ένα ασθενώς ιονισμένο αέριο σε μη ισορροπία**

Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε τις διακυμάνσεις της συνάρτησης κατανομής των ηλεκτρονίων σε ένα ασθενώς ιονισμένο αέριο που βρίσκεται σε μια σταθερή κατάσταση μη ισορροπίας το οποίο είναι χωρικά ομογενής και βρίσκεται μέσα σε ένα σταθερό και ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο  $E$ .

Θα θεωρήσουμε μόνο τη χρονική συσχέτιση των διακυμάνσεων, και όχι τη χωρική τους. Τότε είναι κατάλληλο να χρησιμοποιήσουμε, στην θέση της ακριβούς (κυμαινόμενης) συνάρτησης κατανομής μεταβαλλόμενη ως προς το χώρο  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ , τον μέσο όρο της συνάρτησης ως προς τον συνολικό όγκο του αερίου,

$$f(t, \mathbf{p}) = \frac{1}{V} \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3x, \quad (23.1)$$

που υποδηλώνεται σε αυτή την ενότητα με το ίδιο γράμμα  $f$  αλλά χωρίς το όρισμα  $\mathbf{r}$ . Διακυμαίνεται μόνο ως προς το χρόνο. Η συνάρτηση σε σχέση με την οποία η  $f$  μεταβάλλεται είναι η κατανομή (22.8) που βρέθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Όσο αφορά στο σύστημα που ερευνάμε, είναι πολύ ενδιαφέρον να βρούμε όχι τις διακυμάνσεις (μεταβολές) της ίδιας της συνάρτησης κατανομής αλλά τις διακυμάνσεις (μεταβολές) της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος  $\mathbf{j}$  που έχουν σχέση με αυτήν. Οι συναρτήσεις συσχετίσεως για αυτές τις ποσότητες συνδέονται με τον προφανή τύπο:

$$\langle \delta j_a(t) \delta j_b(0) \rangle = e^2 \int \langle \delta f(t, \mathbf{p}) \delta f(0, \mathbf{p}') \rangle v_a v'_b d^3p d^3p', \quad (23.2)$$

όπου βέβαια  $\delta j$  είναι ο μέσος όρος της διακύμανσης (μεταβολής) της πυκνότητας του ρεύματος ως προς τον όγκο του αερίου.

Η λύση του προβλήματος για ένα αέριο σε μη ισορροπία βασίζεται στην γενική μέθοδο που δίνεται στην ενότητα §20. Η συνάρτηση συσχετισμού ικανοποιεί (σε σχέση με τις μεταβλητές  $t$  και  $\mathbf{p}$ ) την εξίσωση μεταφοράς (22.1), η οποία εδώ αντιστοιχεί στην εξίσωση (20.13) της γενικής μεθόδου. Μια παρόμοια εξίσωση ικανοποιείται από την συνάρτηση

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{p}) = \int \langle \delta f(t, \mathbf{p}) \delta f(0, \mathbf{p}') \rangle \mathbf{v}' d^3p', \quad (23.3)$$

και η απαιτούμενη συνάρτηση συσχετίσεως του ρεύματος μπορεί να εκφραστεί μέσω αυτής:

$$\langle \delta j_a(t) \delta j_b(0) \rangle = e^2 \int g_b(t, \mathbf{p}) v_a d^3p. \quad (23.4)$$

Συνεπώς καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - e \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \mathbf{g} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 B \left( \frac{v}{T} \mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial p} \right) \right] - N v \int [\mathbf{g}(t, p, \theta) - \mathbf{g}(t, p, \theta')] d\sigma, \quad (23.5)$$

με το  $B$  να δίνεται από την (22.3).

Η εξίσωση μεταφοράς (22.1) λαμβάνει υπόψη τις συγκρούσεις των ηλεκτρονίων μόνο με τα μόρια, όχι με τα άλλα ηλεκτρόνια. Συνεπώς δεν υπάρχει μηχανισμός εδώ να καθιερώσει ένα μονο-χρονικό συσχετισμό ανάμεσα στα ηλεκτρόνια με διαφορετικές ορμές, και η "αρχική" συνθήκη για την συνάρτηση είναι η ίδια όπως στην κατάσταση ισορροπίας. Αφού μας ενδιαφέρει η διακύμανση του μέσου όρου ως προς τον συνολικό όγκο του αερίου της συνάρτησης κατανομής, η σταθερότητα του αριθμού των σωματιδίων (ηλεκτρονίων) πρέπει να ληφθεί υπόψη.

Σύμφωνα με την (20.17), τότε θα έχουμε:

$$\langle \delta f(0, \mathbf{p}) \delta f(0, \mathbf{p}') \rangle = \frac{1}{\bar{v}} [\bar{f}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{1}{N_e} \bar{f}(\mathbf{p}) \bar{f}(\mathbf{p}')] ]$$

(όπου είναι η πυκνότητα των ηλεκτρονίων), και συνεπώς για την αρχική συνάρτηση έχουμε

$$\mathbf{g}(0, \mathbf{p}) = \frac{1}{\bar{v}} \bar{f}(\mathbf{p})(\mathbf{v} - \mathbf{V}), \quad (23.6)$$

όπου είναι η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων της κατάστασης που έχει την κατανομή ). Αυτή η ταχύτητα είναι βέβαια παράλληλη στο πεδίο E. Μπορούμε να την γράψουμε ως:

$$\mathbf{V} = -eb\mathbf{E}, \quad (23.7)$$

όπου b είναι η κινητικότητα. Η σταθερότητα του συνολικού αριθμού των ηλεκτρονίων δείχνει δηλώνει ότι και συνεπώς:

$$\int \mathbf{g}(t, \mathbf{p}) d^3p = 0. \quad (23.8)$$

Ακολουθώντας τη μέθοδο που περιγράψαμε στην ενότητα § 19, παίρνουμε τον μονόπλευρη μετασχηματισμό Fourier της (23.5), πολλαπλασιάζουμε με και ολοκληρώνουμε σε σχέση με t από 0 έως ∞. Ο όρος ολοκληρώνεται με τμήματα χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη (23.6) και την συνθήκη Το αποτέλεσμα είναι:

$$-i\omega \mathbf{g}^{(+)} - e(\mathbf{E} \cdot \partial/\partial \mathbf{p}) \mathbf{g}^{(+)} - \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{mT p^3}{Ml} \left( \frac{\mathbf{v}}{T} \mathbf{g}^{(+)} + \frac{\partial \mathbf{g}^{(+)}}{\partial p} \right) \right] + N_e v \int [\mathbf{g}^{(+)}(\mathbf{p}) - \mathbf{g}^{(+)}(\mathbf{p}')] d\sigma = \frac{1}{\bar{v}} \bar{f}(\mathbf{p})(\mathbf{v} - \mathbf{V}), \quad (23.9)$$

where

$$\mathbf{g}^{(+)}(\omega, \mathbf{p}) = \int_0^\infty e^{i\omega t} \mathbf{g}(t, \mathbf{p}) dt. \quad (23.10)$$

Από την (23.8), αυτή η εξίσωση πρέπει να λυθεί με την επιπρόσθετη συνθήκη:

$$\int \mathbf{g}^+(\omega, \mathbf{p}) d^3p = 0. \quad (23.11)$$

Αν η λύση της (23.9) είναι γνωστή, η απαιτούμενη φασματική ανάπτυξη της συνάρτησης της συσχετίσεως του ρεύματος μπορεί να βρεθεί με απλή ολοκλήρωση: γράφουμε:

$$(\mathbf{j}_\alpha \mathbf{j}_\beta)_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int e^{i\omega t} (\delta f(t, \mathbf{p}) \delta f(0, \mathbf{p}')) v_\alpha v'_\beta d^3 p d^3 p'$$

και προχωράμε ακριβώς όπως και στην περίπτωση της εξαγωγής της (19.14), παίρνοντας:

$$(\mathbf{j}_\alpha \mathbf{j}_\beta)_\omega = e^2 \int \{g_\beta^{(+)}(\omega, \mathbf{p}) v_\alpha + g_\alpha^{(+)}(-\omega, \mathbf{p}) v_\beta\} d^3 p. \quad (23.12)$$

Θα πάρουμε την συγκεκριμένη περίπτωση μιας σταθερής μέσης ελεύθερης διαδρομής  $l$ . Στην κατάσταση ισορροπίας, χωρίς ηλεκτρικό πεδίο, η συνάρτηση είναι η κατανομή ισορροπίας Maxwell. Η λύση της συνάρτησης (23.9) είναι τότε:

$$\mathbf{g}^{(+)} = \frac{\mathbf{p} f_0(\mathbf{p})}{p} \frac{l}{\mathcal{V} (1 - i\omega l/v)}, \quad (23.13)$$

as is easily seen, since

$$\int (\mathbf{p} - \mathbf{p}') d\sigma = \sigma \mathbf{p}. \quad (23.14)$$

Αν  $\omega \tau_p \ll 1$  (όπου  $\tau_p \sim l/v$  είναι ο χρόνος καλάρωσης όσο αφορά στην διεύθυνση της ορμής), μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο  $-i\omega l/v$  στον παρονομαστή της (23.13). Ένας υπολογισμός του ολοκληρώματος (23.12) τότε οδηγεί στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$(\mathbf{j}_\alpha \mathbf{j}_\beta)_\omega = (2T\sigma/\mathcal{V}) \delta_{\alpha\beta}, \quad (23.15)$$

όπου είναι η αγωγιμότητα του αερίου που βρίσκεται σε ένα ασθενές πεδίου, και η κινητικότητα σε ένα ασθενές πεδίο, που δίνεται από την (22.17). Το αποτέλεσμα (23.15) είναι σε συμφωνία με τον γενικό τύπο Nyquist για διακυμάνσεις της ισορροπίας του ρεύματος. Ας θεωρήσουμε ένα κυλινδρικό όγκο αερίου παράλληλο με τον άξονα  $x$ . Αφού η πυκνότητα του ρεύματος είναι ήδη ως προς τον μέσο όρο του όγκου (volume-averaged), το συνολικό ρεύμα είναι  $I = \sigma S \mathcal{V}$ , όπου  $S$  είναι το εμβαδό διατομής του κυλίνδρου. Από την (23.15), τότε παίρνουμε:

$$(\mathbf{J}^2)_\omega = 2T\sigma S^2/\mathcal{V} = 2T\sigma S/L = 2T/R, \quad (23.16)$$

όπου είναι το μήκος του δείγματος, και η αντίστασή του.



Όταν  $\mathbf{E} \neq 0$ , η εξίσωση (23.9) επιλύεται με διαδοχική προσέγγιση, κατά τον ίδιο τρόπο όπως και η (22.6), αλλά ενώ η τελευταία εξίσωση καθόριζε μια βαθμωτή συνάρτηση, η (23.9) περιγράφει διανυσματική συνάρτηση. Οι πρώτοι όροι στο ανάπτυγμα μια τέτοιας συνάρτησης (που βασίζονται στο σταθερό διάνυσμα  $\mathbf{E}$  και το μεταβλητό διάνυσμα  $\mathbf{p}$ ) μπορούν να γραφτούν ως:

$$\mathbf{g}^{(1)}(\omega, \mathbf{p}) = \mathbf{h}(\omega, \mathbf{p})\mathbf{n} + \mathbf{e}\{g_0(\omega, \mathbf{p}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}g_1(\omega, \mathbf{p})\}, \quad (23.17)$$

με  $\mathbf{h}(\omega, \mathbf{p}) = \frac{1}{\mathcal{V}} \left\{ \mathbf{f}_0(\mathbf{p}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}f_1(\mathbf{p}) \right\}$ . Εδώ το  $\mathbf{f}_0(\mathbf{p})$  είναι:

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}f_1(\mathbf{p}), \quad (23.18)$$

με  $f_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathcal{V}} \left\{ \mathbf{h}(\mathbf{p}) + g_1(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} \right\} - \mathbf{e} \cdot \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \mathbf{e} E = f_0 \mathcal{V}$ ; /u όπως υπολογίσαμε στην ενότητα §22.

Αντικαθιστούμε τις (23.17)-(23.18) στην (23.9) και διαχωρίζουμε τους όρους περριτούς και ζυγούς σε σχέση με το  $\mathbf{p}$ . Ξανά θεωρώντας ότι  $\omega \tau_p \ll 1$  βρίσκουμε, συγκεντρώνοντας τους περριτούς όρους,

$$(\mathbf{v}/l) \{ \mathbf{h}\mathbf{n} + g_1 \mathbf{e}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \} - \mathbf{e} \cdot \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \mathbf{e} E = f_0 \mathcal{V};$$

Όροι οι οποίοι είναι βέβαια μικροί (στον λόγο  $m/M$ ) σε σύγκριση με εκείνους που δίνονται παραλείπονται. Συνεπώς:

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{p})/\mathcal{V}, \quad g_1(\omega, \mathbf{p}) = (eElm/p) \partial g_0(\omega, \mathbf{p})/\partial \mathbf{p}. \quad (23.19)$$

Ακόμα και οι όροι στην  $\mathbf{p}$  πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση (23.9) μόνο αφού βγάλουμε το μέσο όρο ως προς τις διευθύνσεις του  $\mathbf{p}$ , σε συμφωνία με το γεγονός ότι η (23.17) δίνει μόνο τους πρώτους όρους στο ανάπτυγμα της συνάρτησης που ψάχνουμε. Ένας ευθύς υπολογισμός που χρησιμοποιεί τις εκφράσεις (23.19) οδηγεί στις παρακάτω εξισώσεις για την συνάρτηση  $S(\omega, \mathbf{p})$ :

$$-i\omega g_0 + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (p^2 S) = \frac{1}{\mathcal{V}} \left\{ eEb f_0 + \frac{2eEl}{3p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (p f_0) \right\}, \quad (23.20)$$

where

$$S = -\frac{1}{lM} \left( p^2 g_0 + mpT \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{e^2 E^2 lm}{3p} \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{p}}.$$

Αυτή πρέπει να λυθεί με την επιπρόσθετη συνθήκη

$$\int g_0(\omega, p) d^3p = 0, \quad (23.21)$$

την οποία ελαχιστοποιείται η (23.11) μετά από αντικατάσταση της (23.17).

Όταν η συνάρτηση  $g^{(+)}$  είναι γνωστή, η απαιτούμενη συνάρτηση συσχετίσεως του ρεύματος βρίσκεται μέσω της (23.12). Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα (23.17) και κάνοντας ένα απλό μετασχηματισμό με την χρήση της (23.19), παίρνουμε:

$$(\dot{j}_{\alpha\beta})_{\omega} = \delta_{\alpha\beta} \frac{2e^2 l}{3\gamma^2} \int v f_0 d^3p - E_{\alpha} E_{\beta} \frac{2le^3}{3E} \int [g_0(\omega, p) + g_0(-\omega, p)] \frac{d^3p}{p}. \quad (23.22)$$

Ο όρος  $-i\omega g_0$  στην (23.20) γίνεται σημαντικός όταν  $\omega \sim \mu/Ml$ , π.χ. όταν  $\omega \sim 1$ , όπου είναι ο χρόνος χαλάρωσης όσο αφορά στην ενέργεια του ηλεκτρονίου. Συνεπώς η διάχυση των διακυμάνσεων του ρεύματος ξεκινάει σε αυτές τις συχνότητες.

Στην γενική περίπτωση, η συνάρτηση (23.20) είναι πολύ πολύπλοκη. Σαν παράδειγμα, ας πάρουμε την περίπτωση χαμηλών συχνοτήτων ( $\omega \ll 1$ ) και ισχυρά πεδία που ικανοποιούν την συνθήκη  $\gamma \gg 1$ , όπου  $\gamma$  είναι η παράμετρος (22.13). Εξαιτίας της τελευταίας συνθήκης, η συνάρτηση  $g_0(p)$  δίνεται από τη έκφραση (22.18). Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος του πρώτου όρου στην (23.22) δίνει

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{2^{3/2}}{3^{3/4} \Gamma(3/4)} \frac{N_e e^2 l}{\gamma^2} \left( \frac{eEl}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{M}{m} \right)^{1/4}.$$

Στον δεύτερο όρο στην (23.22), θα κάνουμε μόνο ένα υπολογισμό χωρίς αριθμητικούς παράγοντες. Η εξίσωση (23.20) (χωρίς τον όρο  $-i\omega g_0$ ) δίνει:

$$g_0 \sim (eEl^2 M / \gamma p^2) f_0.$$

Το ολοκλήρωμα τότε μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$e^3 l E (g_0/p) p^3.$$

Η προκύπτουσα έκφραση για την συνάρτηση συσχετίσεως του ρεύματος είναι:

$$(\dot{j}_{\alpha\beta})_{\omega} = \frac{N_e e^2 l}{\gamma^2} \left( \frac{eEl}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{M}{m} \right)^{1/4} \left[ 0.6 \delta_{\alpha\beta} - \beta \frac{E_{\alpha} E_{\beta}}{E^2} \right], \quad (23.23)$$

όπου  $\beta \sim 1$  είναι μια αριθμητική σταθερά.

### **§24. Επανασύνδεση και ιονισμός.**

Ο βαθμός ισορροπίας ιονισμού σε ένα μερικώς ιονισμένο αέριο αποδεικνύεται με διάφορα συγκρουσιακά συμβάντα ιονισμού και τα αντίστροφα συμβάντα επανασύνδεσης ανάμεσα σε συγκρουόμενα φορτισμένα σωματίδια. Στην απλή περίπτωση όπου το αέριο περιέχει, εκτός από ηλεκτρόνια, μόνο ένα τύπο ιόντος, η διαδικασία επίτευξης ισορροπίας ιονισμού περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής:

$$dN_i/dt = \beta - \alpha N_e N_i, \quad (24.1)$$

όπου  $\beta$  είναι ο αριθμός των ηλεκτρονίων που σχηματίζονται ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα χρόνου σε συγκρούσεις ουδέτερων ατόμων ή μέσω φωτοιονισμού των ατόμων. Αυτός ο αριθμός είναι ανεξάρτητος της πυκνότητας των ηλεκτρονίων  $N_e$  και της πυκνότητας των ιόντων  $N_i$  που υπάρχουν. Ο δεύτερος όρος δίνει την μείωση του αριθμού των ηλεκτρονίων λόγω ανασυνδυασμού με ιόντα. Το  $\alpha$  ονομάζεται ο συντελεστής ανασυνδυασμού.

Η διαδικασία επανασύνδεσης είναι συνήθως πολύ αργή σε σύγκριση με τις άλλες διαδικασίες επίτευξης ισορροπίας σε ένα πλάσμα. Αυτό συμβαίνει επειδή η δημιουργία ενός ουδέτερου ατόμου κατά την διάρκεια μιας σύγκρουσης ιόντος και ηλεκτρονίου απαιτεί την απομάκρυνση της ενέργειας που απελευθερώνεται (την ενέργεια συνδέσεως ενός ηλεκτρονίου στο άτομο). Η ενέργεια μπορεί να εκπεμφθεί ως φωτόνιο στην ακτινοβολούσα επανασύνδεση ή βραδύτητα της διαδικασίας οφείλεται τότε στην μικρή πιθανότητα κβαντικής-ηλεκτροδυναμικής εκπομπής. Η ενέργεια που απελευθερώνεται μπορεί επίσης να μεταφερθεί σε ένα τρίτο σωματίδιο, ένα ουδέτερο άτομο. Η βραδύτητα της διαδικασίας οφείλεται τότε στη μικρή πιθανότητα των συγκρούσεων που αφορούν τρία σώματα. Το αποτέλεσμα είναι ότι συχνά είναι λογικό να λαμβάνουμε υπόψη την επανασύνδεση σε συνθήκες όπου η κατανομή όλων των σωματιδίων μπορεί να θεωρηθεί Μαξγουελιανή.

Σε ισορροπία, η παράγωγος  $d/dt$  είναι μηδέν. Έπεται ότι οι ποσότητες  $\alpha$  και  $\beta$  στην (24.1) συσχετίζονται μέσω της:

$$\beta = \alpha N_e N_i, \quad (24.2)$$

όπου  $N_e$  και  $N_i$  είναι οι πυκνότητες ηλεκτρονίων και ιόντων σε ισορροπία που δίνονται από τους κατάλληλους τύπους θερμοδυναμικής.

Ο συντελεστής ακτινοβολούσας επανασύνδεσης υπολογίζεται κατευθείαν από την διατομή επανασύνδεσης μιας σύγκρουσης ανάμεσα σε ένα ηλεκτρόνιο και ένα ιόν σε κατάσταση ηρεμίας (η ταχύτητα του ιόντος είναι αμελητέα σε σύγκριση με εκείνη του ηλεκτρονίου):

$$\alpha = \langle v_e \sigma_{rel} \rangle, \quad (24.3)$$

όπου ο μέσος όρος βγαίνει ως προς την Μαξγουελιανή κατανομή των ταχυτήτων των ηλεκτρονίων .

Η ακτινοβολούσα επανασύνδεση είναι, παρόλα αυτά, σημαντική μόνο σε ένα αρκετά αραιό αέριο, όταν οι συγκρούσεις ανάμεσα σε τρία σώματα είναι εντελώς αμελητέες. Σε ένα λιγότερο αραιό αέριο, ο κύριος μηχανισμός είναι η επανασύνδεση που εμπλέκει ένα τρίτο σωματίδιο, με ένα ουδέτερο άτομο, και είναι αυτός ο μηχανισμός που θα ερευνήσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες.

Σε συγκρούσεις με άτομα, η ενέργεια του ηλεκτρονίου αλλάζει κατά μικρές ποσότητες. Η διαδικασία επανασύνδεσης ξεκινάει συνεπώς με τον σχηματισμό ενός αρκετά διεγερμένου ατόμου, και το ηλεκτρόνιο σταδιακά μεταβαίνει σε όλο και χαμηλότερα επίπεδα σε περαιτέρω συγκρούσεις αυτού του ατόμου.

Αυτού του είδους η διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως "διάχυση ενέργειας" του συλληφθέντος ηλεκτρονίου, και έτσι η εξίσωση Fokker-Planck μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτήν (L. P. Pitaevskii, 1962).

Ας ερευνήσουμε την συνάρτηση κατανομής των συλληφθέντων ηλεκτρονίων σε σχέση με τις (αρνητικές) ενέργειες τους  $\epsilon$ . Η πιο σημαντική "διάχυση" είναι φυσικά στο ενεργειακό πεδίο  $|\epsilon| \sim T$ . Η θερμοκρασία εδώ πρέπει πάντα να θεωρείται χαμηλή σε σύγκριση με το δυναμικό ιονισμού  $I$  των ατόμων. Όταν  $T \sim I$ , το αέριο είναι σχεδόν πλήρως ιονισμένο (Σύγκριση SP 1, §104). Η εξίσωση Fokker-Planck είναι:

$$\partial f / \partial t = -\partial s / \partial \epsilon, \quad s = -B \partial f / \partial \epsilon - A f. \quad (24.4)$$

Ως συνήθως, ο συντελεστής  $A$  μπορεί να εκφραστεί ως  $B$  μέσω της συνθήκης που λέει ότι  $\partial f / \partial t = 0$  όταν  $\partial s / \partial \epsilon = 0$ , όπου  $f_0$  είναι η κατανομή ισορροπίας. Η ροή  $S$  τότε γίνεται:

$$s = -B f_0 \frac{\partial}{\partial \epsilon} (f / f_0). \quad (24.5)$$

Ο "συντελεστής διάχυσης"  $B(\epsilon)$  καθορίζεται από τον γενικό κανόνα ως:

$$B(\epsilon) = \frac{1}{2} \sum (\Delta \epsilon)^2 / \delta t, \quad (24.6)$$

όπου  $\Delta \epsilon$  είναι η μεταβολή της ενέργειας διέγερσης του ατόμου σε μια σύγκρουση με ένα άτομο μη διεγερμένο. Ο υπολογισμός του  $B(\epsilon)$  από τον τύπο εμπεριέχει την επίλυση του μηχανικού προβλήματος της σύγκρουσης και έπειτα την εύρεση του μέσου όρου σε σχέση με την ταχύτητα του μη διεγερμένου ατόμου.

Για να βρεθεί η συνάρτηση  $B(\epsilon)$ , παρατηρούμε ότι η κατανομή ισορροπίας σε σχέση με τις ορμές και τις συντεταγμένες για ένα ηλεκτρόνιο στο πεδίο Coulomb για ένα φορτίο  $Ze$  (το φορτίο του ιόντος) δίνεται από τον τύπο του Boltzmann:

$$f_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (2\pi m T)^{-3/2} e^{-\epsilon / T}, \quad \epsilon = p^2 / 2m - ze^2 / r \quad (24.7)$$

(Βλέπε παρακάτω ότι αφορά την κανονικοποίηση της). Η κίνηση του ηλεκτρονίου με είναι ψευδο-κλασική, και αυτό επιτρέπει την χρήση της κλασικής έκφρασης για την ενέργεια  $\epsilon$ . Η συνάρτηση κατανομής σε σχέση με το  $\epsilon$  είναι συνεπώς:

$$f_0(\epsilon) d\epsilon = (2\pi m T)^{-3/2} e^{\epsilon/kT} \tau(\epsilon) d\epsilon, \quad (24.8)$$

όπου είναι ο όγκος στον φασικό χώρο που αντιστοιχεί στο πεδίο :

$$\tau(\epsilon) = \int \delta\left(|\epsilon| + \frac{p^2}{2m} - \frac{ze^2}{r}\right) d^3x d^3p. \quad (24.9)$$

Αντικαθιστώντας το και ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε:

$$\tau(\epsilon) = \sqrt{2\pi^3 (ze^2)^3 m^{3/2}} |\epsilon|^{3/2}. \quad (24.10)$$

Για να δημιουργήσουμε τις συνθήκες που καθορίζουν την κατάλληλη επίλυση των εξισώσεων (24.4) και (24.5), είναι βολικό να υποθέσουμε ότι η πυκνότητα ηλεκτρονίων που υπάρχει στο αέριο είναι .

Τότε μπορούμε να παραβλέψουμε τον λόγο ιονισμού  $\beta$  στην (24.1), ώστε η μείωση της να οφείλεται μόνο στην επανασύνδεση. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η σταθερή τιμή της ροής  $s$  στην στατική κατάσταση της (24.4) δίνει κατευθείαν την τιμή του συντελεστή επανασύνδεσης ( $s = \text{constant}(\text{σταθερή}) = -a$ ) αν  $f(\epsilon)$  είναι κατάλληλα κανονικοποιημένη: στα υψηλότερα επίπεδα ( $|\epsilon| \ll T$ ) τα ηλεκτρόνια είναι σε ισορροπία με τα ελεύθερα ηλεκτρόνια, και αυτό σημαίνει ότι πρέπει να έχουμε:

$$f(\epsilon)/f_0(\epsilon) \rightarrow 1 \text{ as } |\epsilon| \rightarrow 0, \quad (24.11)$$

και η κανονικοποίηση της  $f(\epsilon)$  πρέπει να αντιστοιχεί σε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο ανά μονάδα όγκου, όπως έχει επιβεβαιωθεί από την (24.7).

Για να βρούμε την δεύτερη οριακή συνθήκη (καθώς παρατηρούμε ότι η κατανομή σε βαθιά επίπεδα του διεγερμένου ατόμου δεν διαταράσσεται από την παρουσία ελευθέρων ηλεκτρονίων, και είναι ανεξάρτητη του αριθμού τους: είναι ανάλογη του αριθμού ισορροπίας και όχι του πραγματικού αριθμού). Όταν , αυτή η κατάσταση εκφράζεται από την οριακή συνθήκη:

$$f(\epsilon)/f_0(\epsilon) \rightarrow 0 \text{ as } |\epsilon| \rightarrow \infty. \quad (24.12)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση  $s = \text{constant}$  με την οριακή συνθήκη (24.11), παίρνουμε:

$$f/f_0 = \text{constant} \times \int_0^{|\epsilon|} \frac{d|\epsilon|}{Bf_0} + 1.$$

Η constant είναι -α αν καθορισθεί έτσι ώστε να ικανοποιεί την συνθήκη (24.12). Συνεπώς βρίσκουμε ως τελικό αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{d|\epsilon|}{Bf_0} = \frac{2T^{3/2}}{\pi^{3/2}(ze^2)^3} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k|\epsilon|/T} |\epsilon|^{5/2}}{B(-|\epsilon|)} d|\epsilon|. \quad (24.13)$$

Αυτός ο τύπος σχετίζεται με μια διαδικασία στην οποία το "τρίτο σώμα" είναι ένα μη διεγερμένο άτομο. Αν το αέριο είναι πολύ ιονισμένο (το οποίο είναι συμβατό με την συνθήκη  $T \ll \lambda$ ) και αρκετά πυκνό, η επανασύνδεση με ένα δεύτερο ηλεκτρόνιο ως το τρίτο σώμα μπορεί να αποτελέσει την κύρια διαδικασία. Ο λόγος/ρυθμός επανασύνδεσης τότε γίνεται ανάλογος του  $\alpha$  ώστε ο συντελεστής επανασύνδεσης ο ίδιος, όπως προσδιορίστηκε πριν από την (24.1), να είναι ανάλογος του  $\alpha$ . Αφού η χαλάρωση ενέργειας στις συγκρούσεις ηλεκτρονίων είναι γρήγορη, η μέθοδος που περιγράψαμε πιο πριν για τον υπολογισμό του συντελεστή επανασύνδεσης δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτή την περίπτωση.

## §25. Αμφιπολική διάχυση

Ας ερευνήσουμε την διάχυση φορτισμένων σωματιδίων σε ένα ασθενώς ιονισμένο αέριο. Όπως και στην ενότητα §22, ο βαθμός ιονισμού θεωρείται τόσο μικρός ώστε οι συγκρούσεις ανάμεσα στα φορτισμένα σωματίδια μπορούν να παραβλεφθούν σε σχέση με εκείνες ανάμεσα σε φορτισμένα σωματίδια και ουδέτερα άτομα. Ακόμα και κάτω από αυτές τις συνθήκες, η διάχυση των δυο τύπων φορτισμένων σωματιδίων (ηλεκτρόνια και ιόντα) δεν είναι ανεξάρτητη, επειδή ένα ηλεκτρικό πεδίο προκύπτει κατά την διαδικασία διάχυσης (W. Schottky, 1924).

Οι εξισώσεις διάχυσης είναι οι εξισώσεις της συνέχειας για τα ηλεκτρόνια (e) και τα ιόντα (i) :

$$\left. \begin{aligned} \partial N_e / \partial t + \text{div } i_e &= 0, \\ \partial N_i / \partial t + \text{div } i_i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

οι ροές εκφράζονται ως αριθμητικές πυκνοτητές των σωματιδίων και των κλίσεων τους μέσω των:

$$\left. \begin{aligned} i_e &= -N_e b_e e E - D_e \nabla N_e, \\ i_i &= N_i b_i e E - D_i \nabla N_i, \end{aligned} \right\} \quad (25.2)$$

όπου  $D_e$  και  $D_i$  είναι οι συντελεστές διάχυσης και  $b_e$  και  $b_i$  οι κινητικότητες των ηλεκτρονίων και των ιόντων.

$$D_e = T b_e, \quad D_i = T b_i, \quad (25.3)$$

Αυτές σχετίζονται με τους τύπους του Einstein που εκφράζουν την συνθήκη που θέλει τις ροές (25.2) να είναι μηδέν στην ισορροπία. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις και εκφράζοντας το πεδίο υπό τη μορφή του δυναμικού του μέσω της  $E = -\nabla\varphi$  μπορούμε να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις (25.1) ως:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e \operatorname{div}[\nabla N_e - (eN_e/T)\nabla\varphi], \quad (25.4)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = D_i \operatorname{div}[\nabla N_i + (eN_i/T)\nabla\varphi]. \quad (25.5)$$

Σε αυτές πρέπει να προσθέσουμε την εξίσωση Poisson για το δυναμικό:

$$\Delta\varphi = -4\pi e(N_i - N_e). \quad (25.6)$$

Οι εξισώσεις (25.4)—(25.6) απλοποιούνται σημαντικά αν οι πυκνότητες  $N_e$  και  $N_i$  έχουν σχεδόν ομογενείς κατανομές. Τότε μπορούμε να θέσουμε  $N_e \approx N_i \approx \text{constant} = N_0$  στους συντελεστές του  $\nabla\varphi$  στην (25.4) και (25.5), και να απαλείψουμε την  $\varphi$  μέσω της (25.6). Το αποτέλεσμα είναι:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e \left[ \Delta N_e - \frac{N_e - N_i}{a^2} \right], \quad (25.7)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = D_i \left[ \Delta N_i + \frac{N_e - N_i}{a^2} \right], \quad (25.8)$$

όπου  $a = \sqrt{4\pi e^2 N_0 / T}$ , και  $a$  είναι το μήκος Debye (Debye length) για τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα.

Παρόλο που οι διατομές σκέδασης των ηλεκτρονίων και των ιόντων είναι γενικά της ίδιας τάξης μεγέθους, οι συντελεστές διάχυσης είναι αρκετά διαφορετικοί, εξαιτίας της διαφοράς των μέσων θερμικών ταχυτήτων τους :

$$D_e / D_i \sim v_{Te} / v_{Ti} \sim \sqrt{M/m}, \quad (25.9)$$

ώστε  $D_e \gg D_i$ . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα κάποια ασυνήθιστα χαρακτηριστικά της διαδικασίας της διάχυσης.

Ας εξετάσουμε την μεταβολή με τον χρόνο μιας μικρής διαταραχής της πυκνότητας των ηλεκτρονίων και των ιόντων, που έχουν χαρακτηριστικές διαστάσεις  $L \gg a$ . Στο αρχικό στάδιο της διαδικασίας, όταν τα μεταβαλλόμενα μέρη των πυκνοτήτων είναι  $|\delta N_e| \sim |\delta N_i| \sim |\delta N_e - \delta N_i|$ , οι πρώτοι όροι στο δεξιό μέρος των εξισώσεων (25.7) και (25.8) είναι μικροί σε σύγκριση με τους δεύτερους όρους:

$$\Delta N_e \sim \delta N_e / L^2 \ll (\delta N_e - \delta N_i) / a^2. \quad (25.10)$$

Σημειώνοντας επίσης ότι από (25.9)  $|\partial N_i / \partial t| \ll |\partial N_e / \partial t|$ , έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta N_e - \delta N_i) = -(D_e / a^2) (\delta N_e - \delta N_i),$$

whence

$$\delta N_e - \delta N_i = (\delta N_e - \delta N_i)_0 \exp(-D_e t / a^2). \quad (25.11)$$

Από αυτό, βλέπουμε ότι σε ένα χρόνο  $\tau_e \sim a^2 / D_e$  η διαφορά  $|\delta N_e - \delta N_i|$  γίνεται μικρή σε σύγκριση με τα  $\delta N_e$  και  $\delta N_i$  καθαυτά, π.χ. το αέριο γίνεται ψευδο-ουδέτερο. Το επόμενο στάδιο της διαδικασίας αποτελεί την ανάπτυξη της κατανομής των ηλεκτρονίων για να φτάσουμε στη μορφή ισορροπίας (για μια δεδομένη κατανομή ιόντων), καθορισμένη από την συνθήκη ώστε το δεξί μέρος της (25.7) να είναι μηδέν:

$$\delta N_e - \delta N_i = a^2 \Delta N_e \approx a^2 \Delta N_i \sim (a^2 / L^2) \delta N_i. \quad (25.12)$$

Αυτό το στάδιο ακολουθεί την εξίσωση διάχυσης (25.7), με τον χαρακτηριστικό χρόνο  $\sim L^2 / D_e$ , ο οποίος είναι μικρός σε σύγκριση με τον χαρακτηριστικό χρόνο διάχυσης των ιόντων  $\tau_i \sim L^2 / D_i$ . Η κατανομή των ιόντων μπορεί συνεπώς μερικές φορές να θεωρηθεί αμετάβλητη.

Η τελική χαλάρωση των διαταραχών της ηλεκτρονικής και ιοντικής πυκνότητας γίνεται σύμφωνα με την (25.8) η οποία μετά από την αντικατάσταση της (25.12) γίνεται:

$$\partial N_i / \partial t = 2 D_i \Delta N_i. \quad (25.13)$$

Συνεπώς, κατά την διάρκεια του χρόνου  $\sim \tau_i$  τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα διαχέονται μαζί ( $\delta N_e \approx \delta N_i$ ) με διπλάσιο συντελεστή διάχυσης από εκείνο των ιόντων. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται αμφιπολική διάχυση. Ο συντελεστής οφείλεται κατά το ένα ήμισυ στις εσωτερική διάχυση των ιόντων, και κατά το άλλο ήμισυ στο ηλεκτρικό πεδίο που προκύπτει από τα επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια.

Τέλος, ας τονίσουμε ότι η εξίσωση (25.13) έχει μεγαλύτερο εύρος εφαρμογής από ότι προκύπτει από την απόδειξη που έχει δοθεί. Ακόμα και αν η διαταραχή δεν είναι ασθενής, η κίνηση των ηλεκτρονίων γρήγορα τους δίνει μια κατανομή Boltzmann στο πεδίο και εξισώνει τις ηλεκτρονικές και ιοντικές πυκνότητες, π.χ. οδηγεί σε ψευδο-ουδετερότητα. Τότε έχουμε:

$$N_e = N_i = N_0 e^{e\phi / T}, \quad e\phi = T \log(N_i / N_0). \quad (25.14)$$

Αντικατάσταση της (25.14) στην (25.5) ξανά δίνει (25.13), αλλά χωρίς την υπόθεση ότι η διαταραχή είναι μικρή.



## §26. Ιοντική κινητικότητα στις διαλύματα ισχυρών ηλεκτρολυτών

Οι εξισώσεις που δίνονται στην ενότητα §25 γενικεύονται πολύ εύκολα στην περίπτωση εκείνη όπου έχουμε την παρουσία διαφόρων τύπων ιόντων. Μπορούν επίσης να εφαρμοστούν στις κινήσεις των ιόντων σε διαλύματα ισχυρών ηλεκτρολυτών. Στο όριο άπειρης αραιώσης ενός διαλύματος (π.χ. καθώς η συγκέντρωση του τείνει στο μηδέν), η κινητικότητα κάθε τύπου  $a$  των ιόντων τείνει σε ένα σταθερό όριο και ο συντελεστής διάχυσης τείνει αντίστοιχα στην:

$$D_a^{(0)} = T b_a^{(0)}. \quad (26.1)$$

Η παρούσα ενότητα αναφέρεται στον υπολογισμό των διορθωτικών όρων της πρώτης τάξης (σε σχέση με την μικρή συγκέντρωση) για τις κινητικότητες των ιόντων σε ένα ασθενές διάλυμα. Αυτό επίσης δίνει τους διορθωτικούς όρους για την αγωγιμότητα του διαλύματος. Σε ένα ηλεκτρικό πεδίο  $E$ , μια δύναμη  $e E$  δρα πάνω σε κάθε ιόν, και αποκτάει μια προσανατολισμένη ταχύτητα  $e E$ . Η πυκνότητα του ρεύματος στο διάλυμα είναι κατά συνέπεια:

$$\mathbf{j} = E \sum_a e z_a N_a \cdot b_a e z_a,$$

όπου είναι η συγκέντρωση (ο αριθμός ανά μονάδα όγκου) των ιόντων τύπου  $a$ .

Συνεπώς η αγωγιμότητα είναι:

$$\sigma = e^2 \sum_a N_a z_a^2 b_a. \quad (26.2)$$

Η θεωρία που δίνεται παρακάτω βασίζεται στις ίδιες ιδέες όπως και οι θερμοδυναμικές ιδιότητες των πλασμάτων και των ισχυρών ηλεκτρολυτών, και συγκεκριμένα ότι γύρω από ένα ιόν σχηματίζεται μια ανομοιογενής κατανομή φορτίων (ένα νέφος ιόντων), που καλύπτει το πεδίο των ιόντος. Οι αντίστοιχοι τύποι έχουν εξαχθεί για το πλάσμα στην SP 1, §§78 και 79. Οι τύποι για ένα διάλυμα ισχυρού ηλεκτρολύτη διαφέρουν μόνο ως προς την παρουσία μιας διαπερατότητας  $\epsilon \neq 1$  του διαλύτη, και θα δοθούν παρακάτω.

Το καλύπτων νέφος μεταβάλλει την κινητικότητα των ιόντων εξαιτίας δυο διαφορετικών φαινομένων/επιδράσεων. Πρώτα, η κίνηση του ιόντος μέσα στο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλει την κατανομή του φορτίου μέσα στο νέφος, και αυτό προκαλεί ένα επιπλέον πεδίο που δρα πάνω στο ιόν.

Δεύτερον, η κίνηση του νέφους προκαλεί μια κίνηση του υγρού και συνεπώς μια ολίσθηση του ιόντος. Οι δυο διορθώσεις ονομάζονται αντίστοιχα χαλάρωση και ηλεκτροφορητική.

### Διόρθωση καλάρωσης:

Ας υπολογίσουμε πρώτα τις διορθώσεις του πρώτου τύπου. Αφού το καλύπτων νέφος προκύπτει από την ύπαρξη μιας συσχετίσεως ανάμεσα στις θέσεις των διαφόρων ιόντων, τότε έχει να κάνει με την επίδραση του εξωτερικού πεδίου  $E$  πάνω στις συναρτήσεις συσχετίσεως.

Θα προσδιορίσουμε την συνάρτηση συσχετίσεως του ζεύγους έτσι ώστε  $N_a(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) dV_a$  να είναι ο αριθμός των ιόντων τύπου  $a$  σε ένα όγκο  $dV_a$  γύρω από το σημείο  $\mathbf{r}_a$ , αν υπάρχει ένα ιόν τύπου  $b$  στο σημείο  $\mathbf{r}_b$ . Οι τύποι  $a$  και  $b$  μπορεί να είναι ίδιοι ή διαφορετικοί. Προφανώς τότε:

$$w_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = w_{ba}(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a), \quad (26.3)$$

και  $w_{ab} \rightarrow 1$  καθώς  $|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b| \rightarrow \infty$ . Σε ισορροπία, οι συναρτήσεις εξαρτώνται μόνο από τις αποστάσεις  $|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$ . Σε ένα εξωτερικό πεδίο, αυτό είναι έτσι.

Οι συναρτήσεις συσχετίσεως, όπως κάθε συνάρτηση κατανομής, ικανοποιούν εξισώσεις με την μορφή εξισώσεων συνέχειας στον κατάλληλο χώρο, τον χώρο διάταξης των δυο σωματιδίων:

$$\partial w_{ab} / \partial t + \text{div}_a \mathbf{j}_a + \text{div}_b \mathbf{j}_b = 0, \quad (26.4)$$

όπου  $\mathbf{j}_a$  είναι οι πιθανότητες ροής για τα σωματίδια  $a$  και  $b$ , και οι δείκτες των  $\text{div}$  δείχνουν τις μεταβλητές ( $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b$ ) σε σχέση με τις οποίες έχει γίνει η διαφοροποίηση.

$$\mathbf{j}_a = -T b_a^{(0)} \nabla_a w_{ab} + b_a^{(0)} z_a e w_{ab} (\mathbf{E} - \nabla_a \phi_b), \quad (26.5)$$

Η ροή  $\mathbf{j}_a$  είναι και  $\mathbf{j}_b$  είναι η ίδια αλλά με τους δείκτες  $a$  και  $b$  να έχουν εναλλαχθεί. Ο πρώτος όρος στην (26.5) περιγράφει την κίνηση (διάχυση) των ιόντων τύπου  $a$ , που υπάρχει ακόμα και απουσία εξωτερικού πεδίου. Ο δεύτερος όρος είναι η πυκνότητα ροής του ιόντος εξαιτίας των δυνάμεων που ασκούνται από το εξωτερικό πεδίο  $E$  και από το πεδίο  $\phi_b$  στο σημείο  $\mathbf{r}_a$  που προκύπτει από το τροποποιημένο νέφος, με την προϋπόθεση ότι ένα ιόν τύπου  $b$  βρίσκεται στο σημείο  $\mathbf{r}_b$ . Το δυναμικό του τελευταίου πεδίου ικανοποιεί την εξίσωση Poisson:

$$\Delta_a \phi_b(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = -(4\pi/\epsilon) \left[ \sum_c z_c N_c w_{cb}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) + z_b \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \right]. \quad (26.6)$$

Ο πρώτος όρος στις αγκύλες είναι η μέση πυκνότητα φορτίου των ιόντων όλων των τύπων στο νέφος, ο δεύτερος όρος είναι η τοπική πυκνότητα φορτίου (όπως επιβάλλει η συνθήκη) στο σημείο  $\mathbf{r}_a$ . Ο παράγοντας  $1/\epsilon$  δίνει την μείωση του πεδίου στον διηλεκτρικό διαλύτη.

$$\omega_{ab} = w_{ab} - 1 \quad (26.7)$$

Θεωρώντας ότι το διάλυμα είναι αρκετά αραιό, παραλείπουμε τριπλές συσχετίσεις ανάμεσα στις θέσεις των ιόντων. Σε εκείνη την προσέγγιση, οι συναρτήσεις συσχετίσεως ζευγών είναι σχεδόν μονάδα, και οι ποσότητες είναι μικρές. Τα δυναμικά  $\varphi_a$  είναι της ίδιας τάξης μικρότητας. Παραλείποντας όρους δεύτερης τάξης, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (26.5) ως:

$$\mathbf{j}_a = b_a^{(0)}[-T\nabla_a\omega_{ab} + ez_a(1 + \omega_{ab})\mathbf{E} - ez_a\nabla_a\varphi_b]. \quad (26.8)$$

Στην εξίσωση (26.6), μπορούμε απλά να αντικαταστήσουμε το με αφού το διάλυμα είναι ηλεκτρικά ουδέτερο κατά μέσο όρο ( $\sum e = 0$ ):

$$\Delta_a\varphi_b(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = -(4\pi/\epsilon) \left[ \sum_c ez_c N_c \omega_{cb}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) + ez_b \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \right]. \quad (26.9)$$

Σε ένα ομοιόμορφο συνεχές πεδίο  $\mathbf{E}$ , οι συναρτήσεις είναι ανεξάρτητες του χρόνου, και εμπεριέχουν τις συντεταγμένες των δυο σημείων μόνο στον τύπο , με . Αντικατάσταση της από την (26.8) και της από την ανάλογη έκφραση στην (26.4) τώρα δίνει:

$$\begin{aligned} T(b_a^{(0)} + b_b^{(0)})\Delta\omega_{ab}(\mathbf{r}) + ez_a b_a^{(0)}\Delta\varphi_b(\mathbf{r}) + ez_b b_b^{(0)}\Delta\varphi_a(-\mathbf{r}) \\ = (z_a b_a^{(0)} - z_b b_b^{(0)})e\mathbf{E} \cdot \nabla\omega_{ab}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (26.10)$$

όπου όλοι οι παράγωγοι είναι σε σχέση με το  $\mathbf{r}$ .

Θεωρώντας το εξωτερικό πεδίο ασθενές, μπορούμε να λύσουμε τα πρόβλημα με διαδοχική προσέγγιση σε σχέση με το  $\mathbf{E}$ . Στο προσέγγιση μηδενικής τάξης, όταν  $\mathbf{E} = 0$ , τα μηδενικά  $(\mathbf{r})$  είναι άρτιες συναρτήσεις του  $\mathbf{r}$ . Αφού όλες οι συναρτήσεις και πρέπει να τείνουν στο μηδέν βρίσκουμε τότε από την (26.10):

$$T(b_a^{(0)} + b_b^{(0)})\omega_{ab}^{(0)} + e(b_a^{(0)}z_a\varphi_b^{(0)} + b_b^{(0)}z_b\varphi_a^{(0)}) = 0. \quad (26.11)$$

Θα αναζητήσουμε την λύση στον τύπο:

$$\omega_{ab}^{(0)}(\mathbf{r}) = z_a z_b \omega^{(0)}(\mathbf{r}), \quad e\varphi_a^{(0)}(\mathbf{r}) = -Tz_a \omega^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (26.12)$$

Τότε η εξίσωση (26.11) ικανοποιείται κατά τον ίδιο τρόπο, και από την (26.9) για  $(\mathbf{r})$  καταλήγουμε σε:

$$\Delta\omega^{(0)}(\mathbf{r}) - \omega^{(0)}(\mathbf{r})/a^2 = (4\pi e^2/\epsilon T)\delta(\mathbf{r}), \quad (26.13)$$

$$a^{-2} = (4\pi e^2/\epsilon T)\sum_c N_c z_c^2. \quad (26.14)$$

Η λύση της δίνει:

$$\omega^{(0)}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{\epsilon T} \frac{e^{-r/a}}{r}. \quad (26.15)$$

Η ποσότητα  $a$  είναι η απόσταση Debye στο διάλυμα του ηλεκτρολύτη.

Στην επόμενη προσέγγιση, θέτουμε:

$$\Delta\varphi_a^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi e}{\epsilon} z_a N_a \omega_a^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (26.18)$$

$$\varphi_a = \varphi_a^{(0)} + \varphi_a^{(1)}, \quad \omega_{ab} = \omega_{ab}^{(0)} + \omega_{ab}^{(1)}, \quad (26.16)$$

όπου ο δείκτης (1) δηλώνει μικρές διορθώσεις στις τιμές μηδενικής τάξης. Καθώς είναι βαθμωτά μεγέθη, όλες αυτές οι διορθώσεις έχουν την μορφή  $E \cdot r f(r)$ , όπου  $f(r)$  είναι συναρτήσεις μόνο του μεγέθους  $r$ . Συνεπώς όλα τα και είναι περιττές συναρτήσεις του  $r$ . Αφού, από την (26.3):

$$\omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r}) = \omega_{ba}^{(1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \equiv \omega_{ba}^{(1)}(-\mathbf{r}),$$

$$\omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r}) \equiv -\omega_{ba}^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (26.17)$$

αν θυμηθούμε ότι παντού  $r = |\mathbf{r}|$ . Αν τα ιόντα  $a$  και  $b$  είναι του ίδιου τύπου, η αντιμετάθεση των δεικτών δεν μπορεί να μεταβάλλει την συνάρτηση  $\omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r})$ , και συνεπώς η (26.17) δείχνει ότι τέτοια  $\omega_{ab}^{(1)} = 0$ . Συνεπώς οι διορθώσεις γίνονται μόνο για τις συναρτήσεις συσχετισσεως ζευγών διαφορετικών ιόντων.

Για να απλοποιήσουμε τις επακόλουθες εξισώσεις, θα πάρουμε την περίπτωση ενός ηλεκτρολύτη με ιόντα μόνο δύο τύπων. Τότε μια συνάρτηση  $\omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\omega_{ba}^{(1)}(\mathbf{r})$  είναι μη μηδενική, και αντικατάσταση της (26.16) στην εξίσωση Poisson (26.9) δίνει

όπου  $\mathbf{r} = \dots$ . Χρησιμοποιώντας την συνθήκη της ηλεκτρικής ουδετερότητας του διαλύματος, και τις ιδιότητες της συμμετρίας των συναρτήσεων που αναφέραμε πιο πάνω, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το δυναμικό  $\phi(\mathbf{r})$  ικανοποιεί μια παρόμοια εξίσωση, και συνεπώς  $\dots$ .

Κατά την αντικατάσταση της (26.16) στην (26.10), διατηρούμε μόνο τον όρο  $\dots$  στο δεξί μέρος, και παίρνουμε:

$$T(b_1^{(0)} + b_2^{(0)})\Delta\omega_{12}^{(0)}(\mathbf{r}) + e(b_1^{(0)}z_1 - b_2^{(0)}z_2)\Delta\phi_2^{(0)}(\mathbf{r}) = (b_1^{(0)}z_1 - b_2^{(0)}z_2)e z_1 z_2 \mathbf{E} \cdot \nabla\omega^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (26.19)$$

Οι εξισώσεις (26.18) και (26.19) επιλύονται με ανάλυση Fourier. Παίρνουμε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων για τις συνιστώσες Fourier  $\omega_{\mathbf{k}}^{(0)}$  και  $\phi_{\mathbf{k}}^{(0)}$ , που διαφέρουν από την (26.18) και (26.19) έχοντας αλλάξει τους τελεστές  $\Delta \rightarrow -k^2$ ,  $\Delta \rightarrow -k^2 - 1/a^2$ . Οι συνιστώσες Fourier της εξίσωσης (26.15) στο αριστερό μέρος της (26.19) είναι:

$$\omega_{\mathbf{k}}^{(0)} = -\frac{e^2}{\epsilon T} \frac{4\pi}{k^2 + 1/a^2}$$

$$\phi_{\mathbf{k}}^{(0)} = \frac{4\pi e^2 z_1 z_2 q}{\epsilon T a^2} \frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}}{k^2(k^2 + 1/a^2)(k^2 + q/a^2)} \quad (26.20)$$

$$q = \frac{b_1^{(0)}z_1 - b_2^{(0)}z_2}{(z_1 - z_2)(b_1^{(0)} + b_2^{(0)})} \quad (26.21)$$

Αφού τα  $\omega_{\mathbf{k}}^{(0)}$  και  $\phi_{\mathbf{k}}^{(0)}$ , έχουν αντίθετα πρόσημα, είναι φανερό ότι  $0 < q < 1$ .

Η συνάρτηση  $\phi_2^{(0)}(\mathbf{r})$  είναι το επιπρόσθετο πρόβλημα στο σημείο  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$  όταν υπάρχει ένα ιόν 2 στο  $\mathbf{r}_2$ . Η αντίστοιχη ένταση του πεδίου είναι:

$$\mathbf{E}_2^{(0)}(\mathbf{r}) = -\nabla_1 \phi_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\nabla \phi_2^{(0)}(\mathbf{r}).$$

Η τιμή του για  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$  (π.χ.  $\mathbf{r} = 0$ ) δίνει το απαιτούμενο πεδίο το οποίο δρα πάνω στο ίδιο το ιόν 2 και κατά συνέπεια μεταβάλλει την κινητικότητα του.

Εδώ η συνιστώσα Fourier  $\phi_{\mathbf{k}}^{(0)} = -ik \dots$ . Συνεπώς:

$$\mathbf{E}_2^{(0)}(0) = \left[ -\int i\mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}}^{(0)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \right]_{\mathbf{r}=0} = -\int i\mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}}^{(0)} d^3k / (2\pi)^3.$$

Αντικατάσταση της (26.20) εδώ οδηγεί στο ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{I} = \int \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{k^2(k^2 + 1/a^2)(k^2 + q/a^2)(2\pi)^3} d^3k$$

Βγάζοντας τον μέσο όρο ως προς τις διευθύνσεις του  $\mathbf{k}$  οδηγούμαστε στην αντικατάσταση του  $\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$  από  $1/3 \mathbf{E}$ , και τότε το ολοκλήρωμα σε σχέση με το  $k$  υπολογίζεται από τα υπόλοιπα των συναρτήσεων προς ολοκλήρωση στους πόλους  $k = i/a$  και  $k = i \sqrt{1+q}$ :

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}a/12\pi(1 + \sqrt{q}).$$

Συνεπώς το συνολικό πεδίο που δρα πάνω στο ιόν 2 είναι

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_2^{(0)}(0) = \left[ 1 - \frac{e^2 |z_1 z_2| q}{3\epsilon T a (1 + \sqrt{q})} \right] \mathbf{E}. \quad (26.22)$$

Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα επιτυγχάνεται για το πεδίο που δρα πάνω στο ιόν 1, όπως φαίνεται από την συμμετρία της έκφρασης (26.22) σε σχέση με τους δείκτες 1 και 2. Πολλαπλασιάζοντας το πεδίο (26.22) με  $\mathbf{e}z$ , βρίσκουμε την ταχύτητα που αποκτά το ιόν, και αν αυτό γραφτεί με την μορφή  $b\mathbf{e}z$  συνεπάγεται ότι η έκφραση στις αγκύλες δίνει τον λόγο  $b/$ . Συνεπώς η απαιτούμενη διόρθωση στην καλάρωση της κινητικότητας του ιόντος είναι:

$$b_{ei} = -b \frac{e^2 |z_1 z_2| q}{3\epsilon T a (1 + \sqrt{q})}. \quad (26.23)$$

Αυτή η επίδραση μειώνει την κινητικότητα.

### Ηλεκτροφορητική διόρθωση

Ας προχωρήσουμε και ας υπολογίσουμε την διόρθωση που οφείλεται στην κίνηση του διαλύτη, που διαμορφώνει το πρόβλημα όπως φαίνεται παρακάτω. Θεωρούμε ένα συγκεκριμένο ιόν στο διάλυμα, μαζί με το περιβάλλον νέφος γύρω από αυτό. Αυτό το νέφος έχει μια πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου  $\delta\rho = E\epsilon$ , όπου  $\epsilon$  είναι η διαφορά ανάμεσα στην πυκνότητα των ιόντων τύπου  $a$  που βρίσκονται στο νέφος και την μέση τιμή στο διάλυμα. Συνεπώς δυνάμεις με πυκνότητα όγκου  $f = E\delta\rho$  δρουν πάνω στο υγρό που φέρει αυτό το νέφος, παρουσία ηλεκτρικού πεδίου  $E$ . Αυτές οι δυνάμεις προκαλούν την κίνηση του υγρού, το οποίο με την σειρά του μεταφέρει το κεντρικό ιόν το οποίο εξετάζουμε:

$$\delta N_a = N_a [e^{-z_a e \phi / T} - 1] \approx -z_a e \phi N_a / T.$$

Η κατανομή των ιόντων στο νέφος συνδέεται με το δυναμικό του πεδίου  $\phi$  εκεί μέσω του τύπου Boltzmann:

$$\varphi = (ez_b/r)e^{-\eta a},$$

Αφού το πεδίο  $E$  είναι ασθενές, μπορούμε να παραβλέψουμε την παραμόρφωση του νέφους του ιόντος στο παρόν πρόβλημα. Σε ένα σφαιρικά συμμετρικό νέφος, το δυναμικό είναι όπου  $ez_b$  είναι το φορτίο του κεντρικού ιόντος, και το  $a$  καθορίζεται από την (26.14). Η συνολική πυκνότητα φορτίου στο νέφος είναι συνεπώς:

$$\delta\rho = -\frac{e^2\varphi}{T} \sum_a N_a z_a^2 = -\frac{ez_b}{4\pi a^2} \frac{e^{-\eta a}}{r}. \quad (26.24)$$

Αφού η κίνηση που προκαλείται από το πεδίο  $E$  είναι μικρή, το υγρό μπορεί να θεωρηθεί ως ασυμπιεστο, και συνεπώς:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (26.25)$$

Για τον ίδιο λόγο, ο τετραγωνικός όρος που χρησιμοποιείται στην ταχύτητα μπορεί να παραβλεφθεί από την εξίσωση Navier-Stokes, η οποία τότε ελαχιστοποιείται (για μια σταθερή κίνηση) σε:

$$\eta \Delta \mathbf{v} - \nabla P + \mathbf{f} = 0, \quad (26.26)$$

όπου  $P$  είναι η πίεση και  $\eta$  είναι το ιξώδες του διαλύτη.

Παίρνοντας τις συνιστώσες Fourier της (26.25) και της (26.26), έχουμε:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_k = 0, \quad -\eta k^2 \mathbf{v}_k - i\mathbf{k} P_k + \mathbf{E} \delta\rho_k = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με την δεύτερη εξίσωση βαθμωτά με το  $i\mathbf{k}$ , βρίσκουμε  $P_k = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \delta\rho_k / k^2$ , και συνεπώς:

$$\mathbf{v}_k = \frac{\delta\rho_k k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{\eta k^4}. \quad (26.27)$$

Η συνιστώσα Fourier της πυκνότητας φορτίου (26.24) είναι:

$$\delta\rho_k = -ez_b/(a^2 k^2 + 1). \quad (26.28)$$

Η απαιτούμενη ταχύτητα του υγρού στο σημείο  $r = 0$ , όπου το βρίσκεται το κεντρικό ιόν, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{v}(0) = \int \mathbf{v}_k d^3k / (2\pi)^3.$$

Αντικατάσταση του από την (26.27) και την (26.28), και ολοκλήρωση ως προς την διεύθυνση του  $\mathbf{k}$ , δίνει:

$$v(0) = -E \frac{ez_0}{(2\pi)^3 \eta} \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 a^2 + 1}$$

$$v(0) = -(ez_0/6\pi\eta a)E.$$

Αυτή η ταχύτητα προστίθεται στην ταχύτητα  $e$  που αποκτά το ιόν μέσω της άμεσης επίδρασης του πεδίου. Είναι συνεπώς ξεκάθαρο ότι η απαιτούμενη ηλεκτροφορητική διόρθωση της κινητικότητας είναι:

$$b_{cl-ph} = -1/6\pi a \eta, \quad (26.29)$$

η ίδια για ιόντα όλων των τύπων. Η συνολική διόρθωση δίνεται από το άθροισμα των δυο εκφράσεων της (26.23) και της (26.29). Και οι δυο είναι αρνητικές, και μέσω του παράγοντα  $1/a$  είναι ανάλογες της τετραγωνικής ρίζας της συγκέντρωσης.



**ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ**  
**ΠΛΑΣΜΑΤΑ ΑΝΕΥ ΣΥΓΚΡΟΥΣΕΩΝ**

**§27. Το αυτοσυντηρούμενο πεδίο**

Υπάρχει ένα ευρύ πεδίο εφαρμογών της θεωρίας μεταφοράς (transport theory) όσον αφορά στα πλάσματα (plasmas), ένας όρος που σημαίνει πλήρως ιονισμένα αέρια. Η θερμοδυναμική θεωρία της κατάστασης ισορροπίας των πλασμάτων έχει συζητηθεί στην SP 1, §§78-80 και SP 2, §85. Τα κεφάλαια ΙΙΙ—V θα αφιερωθούν στις ιδιότητες μεταφοράς των πλασμάτων. Προς αποφυγή πολυπλοκότητας, θα θεωρήσουμε (όπου είναι απαραίτητο) ότι το πλάσμα έχει μόνο δυο στοιχεία: ηλεκτρόνια με φορτίο  $-e$ , και θετικά ιόντα ενός τύπου με φορτίο  $ze$ .

Όπως και στα συνηθισμένα αέρια, το πλάσμα πρέπει να είναι επαρκώς αραιωμένο εάν θέλουμε η εξίσωση μεταφοράς να έχει εφαρμογή σε αυτό. αέριο πρέπει να είναι σχεδόν ιδανικό. Παρόλα αυτά, επειδή οι δυνάμεις Coulomb υπόκεινται μόνο σε αργή μείωση, αυτή η συνθήκη είναι πιο αυστηρή για ένα πλάσμα παρά για ένα αέριο που αποτελείται από ουδέτερα σωματίδια. Επί του παρόντος δεν θα κάνουμε καμία διάκριση ανάμεσα σε σωματίδια με διαφορετικά φορτία, και έτσι μπορούμε να γράψουμε την συνθήκη που θέλει το πλάσμα σχεδόν ιδανικό ως:

$$T \gg e^2/\bar{r} \sim e^2 N^{1/3}, \quad (27.1)$$

όπου  $T$  είναι η θερμοκρασία του πλάσματος, συνολικός αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα όγκου και η μέση απόσταση ανάμεσά τους. Αυτή η συνθήκη δηλώνει ότι η μέση ενέργεια αλληλεπίδρασης των δυο ιόντων είναι μικρή σε σύγκριση με την μέση κινητική τους ενέργεια. Μπορεί να εκφραστεί διαφορετικά χρησιμοποιώντας το μήκος Debye (Debye length)  $a$  του πλάσματος, και προσδιορίζεται ως:

$$1/a^2 = (4\pi/T) \sum_a N_a (z_a e)^2, \quad (27.2)$$

όπου η πρόσθεση είναι ως προς όλους τους τύπους ιόντων. Μπορεί να σημειωθεί ότι (Βλέπε SP 1, §78) το  $a$  καθορίζει την απόσταση στην οποία το πεδίο Coulomb ενός φορτίου μέσα στο πλάσμα βρίσκεται μέσα στη σφαίρα (screened).

---

Με  $a \sim (T/4\pi N)^{1/2}$  στην (27.1), παίρνουμε:

$$e^2 N^{1/3} / T \sim r^2 / 4\pi a^2 \ll 1; \quad (27.3)$$

σε ένα αραιωμένο πλάσμα, η μέση απόσταση ανάμεσα στα σωματίδια πρέπει να είναι μικρή σε σύγκριση με το μήκος Debye, π.χ. το νέφος ιόντων γύρω από το φορτίο πρέπει στην πραγματικότητα να περιέχει πολλά σωματίδια. Ο μικρός λόγος (27.3) λειτουργεί ως παράμετρος αεριοποίησης (gaseousness parameter) για το πλάσμα.

Το πλάσμα θα θεωρηθεί ως κλασσικό. Αυτό υπονοεί την τήρηση μιας μόνο ασθενούς συνθήκης: η θερμοκρασία πλάσματος πρέπει να είναι υψηλή σε σχέση με την θερμοκρασία εκφυλισμού των ηλεκτρονίων που το αποτελούν:

$$T \gg \hbar^2 N^{2/3} / m, \quad (27.4)$$

όπου  $m$  είναι η μάζα του ηλεκτρονίου.

Η συνάρτηση μεταφοράς για κάθε τύπο σωματιδίου στο πλάσμα (ηλεκτρόνια και ιόντα) είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = C(f), \quad (27.5)$$

όπου  $f$  είναι η συνάρτηση κατανομής συντεταγμένων και ορμής των σωματιδίων που μας ενδιαφέρουν, και  $C$  είναι το συγκρουσιακό τους ολοκλήρωμα (με σωματίδια οποιουδήποτε τύπου). Η παράγωγος  $p$  καθορίζεται από την δύναμη που δρα πάνω στο σωματίδιο. Αυτή η δύναμη εκφράζεται μέσω του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, εξαιτίας της παρουσίας όλων των άλλων σωματιδίων, στη θέση του σωματιδίου που εξετάζουμε. Ωστόσο, προκύπτει το παρακάτω ζήτημα.

Υπάρχουν αξιοσημείωτες μεταβολές στην κίνηση ουδετέρων σωματιδίων (άτομα ή μόρια), εξαιτίας της ταχύτατης μείωσης των αλληλεπιδρώντων δυνάμεων, οι οποίες ερμηνεύονται ως συγκρούσεις, μόνο για μικρές παραμέτρους κρούσεων/προσέγγισης (small impact parameters), της τάξης των ατομικών διαστάσεων. Στον ενδιάμεσο χρόνο, ανάμεσα σε αυτές τις συγκρούσεις, τα σωματίδια κινούνται σαν να είναι ελεύθερα. Για αυτό τον λόγο, θεωρείται ότι  $p = 0$  στο αριστερό μέρος της εξίσωσης μεταφοράς για συνηθισμένα αέρια. Σε ένα πλάσμα, παρόλα αυτά, εξαιτίας του μεγάλου εύρους των δυνάμεων Coulomb (long-range Coulomb forces), συμβαίνει μια αξιοσημείωτη αλλαγή στην κίνηση των σωματιδίων ακόμα και για μεγάλες παραμέτρους κρούσεων-προσέγγισης (large impact parameters). Οι δυνάμεις Coulomb "καλύπτονται" (screened) στο πλάσμα μόνο για αποστάσεις  $\sim a$ , οι οποίες σύμφωνα με τη συνθήκη (27.3) είναι μεγάλες ακόμα και σε σύγκριση με τις αποστάσεις ανάμεσα στα σωματίδια. Παρόλα αυτά, δεν ερμηνεύονται όλες οι περιπτώσεις αυτού του τύπου ως συγκρούσεις στην εξίσωση μεταφοράς.

Στην θεωρία μεταφοράς, τυχαίες συγκρούσεις είναι ο μηχανισμός που προκαλεί την προσέγγιση στην κατάσταση ισορροπίας, με μια αντίστοιχη αύξηση της εντροπίας του συστήματος. Αλλά συγκρούσεις για μεγάλες παραμέτρους κρούσεων-προσέγγισης ( $\gg a$ ) δεν μπορούν να λειτουργήσουν ως τέτοιος μηχανισμός καλάρωσης. Ο λόγος είναι ότι η αλληλεπίδραση δυο φορτισμένων σωματιδίων σε τέτοιες αποστάσεις είναι συνήθως το συλλογικό αποτέλεσμα πολλών σωματιδίων. Αντίστοιχα, το πεδίο το οποίο μπορεί να περιγράψει αυτή την αλληλεπίδραση δημιουργείται επίσης από ένα μεγάλο αριθμό σωματιδίων, π.χ. είναι μακροσκοπικό. Η όλη διαδικασία τότε είναι μακροσκοπικά βέβαια και όχι τυχαία.

Τέτοιες διαδικασίες δεν μπορούν να προκαλέσουν αύξηση της εντροπίας του συστήματος. Συνεπώς πρέπει να εξαιρεθούν από το πεδίο του όρου "συγκρούσεις" όπως αυτός εφαρμόζεται στο δεξί μέρος των εξισώσεων μεταφοράς.

Αυτή η διάκριση απεικονίζει τις ακριβής μικροσκοπικές τιμές του ηλεκτρικού πεδίου  $e$  και του μαγνητικού πεδίου  $h$ , που δρουν πάνω σε ένα σωματίδιο μέσα στο πλάσμα, ως :

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} + \mathbf{e}', \quad \mathbf{h} = \mathbf{B} + \mathbf{h}', \quad (27.6)$$

όπου  $E$  και  $B$  είναι τα οι μέσοι όροι των πεδίων ως προς περιοχές που περιέχουν πολλά σωματίδια και που έχουν διαστάσεις μεγάλες σε σχέση με τις διαστάσεις ανάμεσα στα σωματίδια αλλά μικρές σε σχέση με το μήκος Debye (Debye length). Οι όροι  $e'$  και  $h'$  τότε περιγράφουν τις τυχαίες διακυμάνσεις των πεδίων, οι οποίες προκαλούν τυχαίες μεταβολές στην κίνηση των σωματιδίων, π.χ. συγκρούσεις.

Στην (27.6), η ακριβής σημασία των  $E$  και  $B$  είναι ότι είναι τα μέσα πεδία στη θέση ενός δεδομένου σωματιδίου. Μιας και το πλάσμα θεωρείται αραιό, η συσχέτιση ανάμεσα στις ταυτόχρονες θέσεις των σωματιδίων μέσα σε αυτό μπορεί να παραβλεφθεί. Τότε η θέση κάθε δεδομένου σωματιδίου δεν είναι σε καμιά περίπτωση ξεχωριστή, και έτσι τα  $E$  και  $B$  μπορούν να θεωρηθούν ως οι μέσοι όροι με την συνήθη έννοια της μακροσκοπικής ηλεκτροδυναμικής των πεδίων. Αυτά τα πεδία καθορίζουν την δύναμη Lorentz που αντικαθιστά το  $\rho$  στην (27.5).

Σε αυτή την μελέτη, τα φαινόμενα που θα συζητηθούν θα είναι αυτά όπου οι συγκρούσεις ανάμεσα σε σωματίδια πλάσματος δεν έχουν σημασία. Ένα τέτοιο πλάσμα θεωρείται ως πλάσμα άνευ συγκρούσεων (collisionless). Οι ακριβείς συνθήκες για να θεωρηθούν οι συγκρούσεις αμελητέες εξαρτώνται γενικά από την συγκεκριμένη διαμόρφωση του προβλήματος, αλλά μια απαραίτητη συνθήκη συνήθως είναι ότι η 'αποτελεσματική' συχνότητα σύγκρουσης (effective collision frequency)  $\nu$  (το αντίστοιχο του μέσου ελεύθερου χρόνου ενός σωματιδίου) πρέπει να είναι μικρή σε σχέση με την συχνότητα  $\omega$  της μεταβολής των μακροσκοπικών πεδίων  $E$  και  $B$  στην διαδικασία που μας ενδιαφέρει:

$$\nu \ll \omega. \quad (27.7)$$

Εξαιτίας αυτής της συνθήκης, το συγκρουσιακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης μεταφοράς είναι μικρό σε σύγκριση με το . Οι συγκρούσεις μπορεί να παραβλεφθούν ακόμα και όταν η μέση ελεύθερη διαδρομή του σωματιδίου  $l \sim \bar{v}/\nu$  είναι μεγάλη σε σχέση με την απόσταση  $L$  κατά την οποία το πεδίο μεταβάλλεται (το μήκος κύματος του πεδίου ("wavelength")). Θέτοντας  $1/L \sim k$ , μπορούμε να γράψουμε αυτή τη συνθήκη ως:

$$\nu \ll k\bar{v}. \quad (27.8)$$

Το συγκρουσιακό ολοκλήρωμα είναι μικρό σε σύγκριση με τον όρο  $\nu \nabla f$  στο αριστερό μέρος της εξίσωσης μεταφοράς.

Όταν το συγκρουσιακό ολοκλήρωμα παραβλεφθεί, οι εξισώσεις μεταφοράς για τις συναρτήσεις κατανομής των ηλεκτρονίων και των ιόντων και γίνονται:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} &= 0, \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + ze \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27.9)$$

Σε αυτές πρέπει να προστεθούν και οι μέσοι όροι των εξισώσεων Maxwell:

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{curl } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (27.10)$$

όπου  $\rho$  και  $\mathbf{j}$  είναι η μέση πυκνότητα φορτίου και η μέση πυκνότητα ρεύματος, που μπορούν να εκφραστούν μέσω των συναρτήσεων κατανομής από τους τύπους:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= e \int (zf_i - f_e) d^3p, \\ \mathbf{j} &= e \int (zf_i - f_e) \mathbf{v} d^3p. \end{aligned} \right\} \quad (27.11)$$

Οι εξισώσεις (27.9)—(27.11) σχηματίζουν ένα συζευγμένο σύνολο εξισώσεων για τον ταυτόχρονο προσδιορισμό των συναρτήσεων κατανομής, και των πεδίων  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ . Συνεπώς καθορισμένα πεδία θεωρούνται αυτοσυντηρούμενα (self-consistent). Το αυτοσυντηρούμενο πεδίο εισήχθη στις εξισώσεις μεταφοράς από τον A. A. Vlasov (1937). Οι εξισώσεις (27.9)—(27.11) ονομάζονται εξισώσεις Vlasov.

Σε συμφωνία με την παραπάνω συζήτηση, η μεταβολή του χρόνου των συναρτήσεων κατανομής σε πλάσμα άνευ συγκρούσεων (collisionless plasma) με αυτοσυντηρούμενο πεδίο (self-consistent field) δεν συνδέεται με αύξηση της εντροπίας, και συνεπώς δεν μπορεί από μόνο του να επιφέρει στατιστική ισορροπία. Αυτό φαίνεται επίσης άμεσα από τον τύπο των εξισώσεων (27.9), στις οποίες  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$  υπάρχουν επίσημα μόνο ως εξωτερικά πεδία που επιδρούν στο πλάσμα.

Κάθε μια από τις εξισώσεις μεταφοράς (27.9) έχει τη μορφή:

$$df/dt = 0, \quad (27.12)$$

όπου η συνολική παράγωγος δείχνει διαφοροποίηση στις διαδρομές των σωματιδίων. Η γενική λύση μιας τέτοιας εξίσωσης είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση όλων των ολοκληρωμάτων της κίνησης ενός σωματιδίου στα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$ .

### **§28. Χωρική διασπορά σε πλάσματα**

Μπορούμε να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις (27.10) με ένα πιο συνηθισμένο τύπο της μακροσκοπικής ηλεκτροδυναμικής, με το να συμπεριλάβουμε την ηλεκτρική επαγωγή  $\mathbf{D}$  καθώς και το πεδίο  $\mathbf{E}$ . Προσδιορίζουμε το διάνυσμα ηλεκτρικής πόλωσης  $\mathbf{P}$  με τις σχέσεις:

$$\partial \mathbf{P} / \partial t = \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{P} = -\rho; \quad (28.1)$$

η συμβατότητα τους εξασφαλίζεται από την εξίσωση της συνέχειας  $\text{div } \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$  (θα συζητήσουμε τον ορισμό αυτό περισσότερο παρακάτω σε αυτή την ενότητα). Τότε οι συναρτήσεις (27.10) γίνονται, με  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ ,

$$\left. \begin{aligned} \text{curl } \mathbf{E} &= -(1/c)\partial \mathbf{B}/\partial t, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{curl } \mathbf{B} &= (1/c)\partial \mathbf{D}/\partial t, & \text{div } \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28.2)$$

Σε ασθενή πεδία, η σχέση ανάμεσα στην επαγωγή  $\mathbf{D}$  και το πεδίο  $\mathbf{E}$  είναι γραμμική, αλλά ακόμα και σε συνηθισμένα μέσα η σχέση δεν είναι στιγμιαία (instantaneous): η τιμή της  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$  σε χρόνο  $t$  εξαρτάται γενικά από τις τιμές του  $\mathbf{E}(t', \mathbf{r}')$  όχι μόνο σε εκείνη τη στιγμή αλλά επίσης και σε όλες τις προηγούμενες στιγμές. Σε ένα πλάσμα, είναι επίσης και μια μη τοπική σχέση (non-local relation): η τιμή του  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$  στο σημείο  $\mathbf{r}$  εξαρτάται από τις τιμές του  $\mathbf{E}(t', \mathbf{r}')$  όχι μόνο σε εκείνο το σημείο αλλά γενικά και σε όλο το πλάσμα. Αυτό συμβαίνει επειδή η "ελεύθερη" (π.χ. άνευ συγκρούσεων - collisionless) κίνηση των σωματιδίων στο πλάσμα ελέγχεται από τις τιμές του πεδίου σε όλες τις τροχιές τους.

Η γενική γραμμική σχέση ανάμεσα στις συναρτήσεις  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$  και  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  μπορεί να γραφτεί ως (υποθέτοντας ότι το μη διαταραγμένο πλάσμα βρίσκεται σε μια σταθερή κατάσταση):

$$D_\alpha(t, \mathbf{r}) = E_\alpha(t, \mathbf{r}) + \int_{-\infty}^t \int K_{\alpha\beta}(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_\beta(t', \mathbf{r}') d^3x' dt'$$

Για ένα ομογενές στο χώρο πλάσμα, ο πυρήνας του ολοκληρωτικού τελεστή εξαρτάται μόνο από την διαφορά  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  των ορισμάτων (arguments).

Γράφοντας  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}$ ,  $t - t' = \tau$ , μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση ως:

$$D_\alpha(t, \mathbf{r}) = E_\alpha(t, \mathbf{r}) + \int_0^\infty \int K_{\alpha\beta}(\tau, \boldsymbol{\rho}) E_\beta(t - \tau, \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d^3\rho d\tau. \quad (28.3)$$

Με τον συνηθισμένο τρόπο, μια ανάπτυξη σαν σειρά του Fourier ή ολοκλήρωμα επιτρέπει την απεικόνιση πεδίου από ένα σύνολο επίπεδων κυμάτων στα οποία το  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{D}$  είναι ανάλογα του

. Για τέτοια κύματα, η σχέση ανάμεσα στο  $\mathbf{D}$  και  $\mathbf{E}$  γίνεται:

$$D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\beta, \quad (28.4)$$

όπου τανυστής διαπερατότητας (permittivity tensor) είναι:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \int_0^\infty \int K_{\alpha\beta}(\tau, \boldsymbol{\rho}) e^{i(\omega\tau - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho})} d^3\rho d\tau. \quad (28.5)$$

Από αυτόν τον ορισμό έπεται ότι:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}) = \epsilon_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{k}). \quad (28.6)$$

Συνοπώς η μη τοπικότητα της σχέσης ανάμεσα στο  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{D}$  έχει σαν αποτέλεσμα η διαπερατότητα του πλάσματος να εξαρτάται από το διάνυσμα του κύματος καθώς και από την συχνότητα. Αυτό αναφέρεται ως χωρική διασπορά (spatial dispersion), κατά τον ίδιο τρόπο που η

εξάρτηση της συχνότητας ονομάζεται χρονική διασπορά (time dispersion) ή διασπορά συχνότητας (frequency dispersion).

Επιστρέφοντας στις εξισώσεις (28.1) και (28.2), μπορούμε να θυμηθούμε ότι κατά τον σχηματισμό των εξισώσεων του Maxwell για μεταβλητά πεδία σε συνηθισμένα μέσα η εισαγωγή της διηλεκτρικής πόλωσης  $P$  συνοδεύεται από αυτή του μαγνητισμού  $M$ , με το μέσο μικροσκοπικό ρεύμα να διαιρείται σε δυο μέρη  $P/\epsilon_0$  και  $c \text{ curl } M$ . Σε ένα επίπεδο κύμα, αυτά γίνονται  $-i\omega P$  και  $ick \times M$ . Παρουσία χωρικής διασποράς, παρόλα αυτά, όταν όλες οι ποσότητες εξαρτώνται από το  $k$  σε κάθε περίπτωση, δεν είναι αποδεκτή αυτή η διαίρεση.

Αν το ρεύμα  $j$  και η πυκνότητα φορτίου  $\rho$  περιληφθούν πλήρως στον ορισμό της πόλωσης  $P$ , όπως στην (28.1), το δεύτερο γενικά εξαρτάται και από τα ηλεκτρικό πεδίο  $E$  και από το μαγνητικό πεδίο  $B$ . Το πεδίο  $B$  μπορεί να εκφραστεί μέσω του  $E$  με το πρώτο ζεύγος των εξισώσεων του Maxwell (28.2), οι οποίες περιέχουν μόνο αυτές τις δυο ποσότητες, π.χ. (για ένα επίπεδο κύμα) από  $k \times E = \omega B/c$  και  $k \cdot B = 0$ . Η πόλωση  $P$  με αυτό τον τρόπο εκφράζεται μόνο μέσω του  $E$ , όπως υπονοεί ο ορισμός του  $\epsilon_{\alpha\beta}$  στις (28.3)–(28.5).

Η εξάρτηση στο διάνυσμα του κύματος δημιουργεί μια ξεκάθαρη διεύθυνση στην συνάρτηση  $\epsilon(\omega, k)$ , δηλαδή αυτή του ορίσματος της  $k$ . Συνεπώς, όταν υπάρχει χωρική διασπορά, η ηλεκτρική διαπερατότητα είναι ένας τανυστής ακόμα και σε ένα ισοτροπικό μέσο. Ο γενικός τύπος ενός τέτοιου τανυστή μπορεί να γραφεί ως:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k) = \epsilon_i(\omega, k)(\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2) + \epsilon_t(\omega, k)k_\alpha k_\beta / k^2. \quad (28.7)$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $k_\alpha$ , ο πρώτος όρος στην (28.7) δίνει μια συνεισφορά στην επαγωγή  $D$  που είναι κάθετη στο διάνυσμα του κύματος, και ο δεύτερος όρος δίνει μια συνεισφορά που είναι παράλληλη με το  $k$ . Για πεδία  $E$  κάθετα στο ή παράλληλα με το  $k$ , η σχέση ανάμεσα στο  $D$  και  $E$  ελαχιστοποιείται αντίστοιχα σε  $D = \epsilon_t E$  ή  $D = \epsilon_i E$ . Η βαθμωτές συναρτήσεις  $\epsilon_i$  και  $\epsilon_t$  ονομάζονται εγκάρσια και διαμήκης ηλεκτρική διαπερατότητα. Εξαρτώνται από δυο ανεξάρτητες μεταβλητές: την συχνότητα  $\omega$ , και το μέγεθος  $k$  του διανύσματος του κύματος. Όταν το  $k \rightarrow 0$ , η ξεκάθαρη διεύθυνση εξαφανίζεται, και ο τανυστής πρέπει τότε να μειωθεί στη μορφή  $\epsilon(\omega)$ , όπου  $\epsilon(\omega)$  είναι η συνηθισμένη βαθμωτή ηλεκτρική διαπερατότητα, η οποία λαμβάνει υπόψη μόνο την διασπορά συχνότητας. Αντίστοιχα, οι περιοριστικές τιμές των συναρτήσεων  $\epsilon_i$  και  $\epsilon_t$  είναι:

$$\epsilon_i(\omega, 0) = \epsilon_t(\omega, 0) = \epsilon(\omega). \quad (28.8)$$

Σύμφωνα με την (28.6), οι βαθμωτές συναρτήσεις  $\epsilon_i$  και  $\epsilon_t$ , έχουν την ιδιότητα:

$$\epsilon_i(-\omega, k) = \epsilon_i^*(\omega, k), \quad \epsilon_t(-\omega, k) = \epsilon_t^*(\omega, k). \quad (28.9)$$

Η χωρική διασπορά δεν επηρεάζει τις ιδιότητες του  $\epsilon_i$  και  $\epsilon_t$  ως συναρτήσεις της πολύπλοκης μεταβλητής  $\omega$ . Όλα τα αποτελέσματα για την ηλεκτρική διαπερατότητα  $\epsilon(\omega)$  των συνηθισμένων μέσων χωρίς χωρική διασπορά ισχύουν για αυτές τις συναρτήσεις.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ερευνήσουμε μόνο ισοτροπικά πλάσματα. Πρέπει να τονίσουμε ότι αυτό δεν υπονοεί μόνο την απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, αλλά επίσης και την ισοτροπία της κατανομής της ορμής των σωματιδίων (σε ένα αδιατάρακτο από ένα πεδίο). Αλλιώς, επιπλέον ξεχωριστές διευθύνσεις εμφανίζονται, και η δομή του ταυυστή είναι πιο περίπλοκη.

Έχει ήδη αναφερθεί ότι η προέλευση της χωρικής διασποράς στο πλάσμα συνδέεται με την εξάρτηση της "ελεύθερης" κίνησης των σωματιδίων στις πεδιακές τιμές κατά μήκος των τροχιών. Στην πράξη, βέβαια, η κίνηση ενός σωματιδίου σε οποιοδήποτε σημείο επηρεάζεται σημαντικά από τις πεδιακές τιμές όχι κατά μήκος όλης της τροχιάς αλλά μόνο σε σχετικά μικρά τμήματα της. Η τάξη μεγέθους αυτών των μηκών ελέγχεται από δυο διαδικασίες: συγκρούσεις, οι οποίες διαταράσσουν την ελεύθερη κίνηση κατά μήκος της τροχιάς, και η εύρεση του μέσου όρου του ταλαντωμένου πεδίου κατά την διάρκεια της πτήσης του σωματιδίου. Η χαρακτηριστική απόσταση για την πρώτη διαδικασία είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή  $l \sim v/\nu$  του σωματιδίου, και εκείνη για την δεύτερη διαδικασία είναι η απόσταση  $v/\omega$  την οποία διανύει ένα σωματίδιο σε μια περίοδο του πεδίου κινούμενο με μέση ταχύτητα  $v$ .

Στην έκφραση (28.3), το εύρος συσχέτισης ανάμεσα στις τιμές των D και E σε διαφορετικά σημεία του χώρου αντιστοιχεί στις αποστάσεις  $r_{cor}$  ως προς τις οποίες η συνάρτηση  $\epsilon(\tau, \rho)$  μειώνεται σημαντικά. Μπορούμε συνεπώς να πούμε ότι η τάξη μεγέθους αυτών των αποστάσεων δίνεται από την μικρότερη των  $l$  και  $v/\omega$ , που έχουμε πάρει για τα σωματίδια (ηλεκτρόνια και ιόντα) που έχουν την υψηλότερη τιμή της  $v$ . Αν  $v \ll \omega v$ , τότε  $v/\omega$ , είναι η μικρότερη, και:

$$r_{cor} \sim v/\omega. \quad (28.10)$$

Θεωρείται ότι υπάρχει σημαντική χωρική διασπορά όταν  $kr_{cor} \geq 1$ , και εξαφανίζεται όταν  $kr_{cor} \ll 1$ . Στην τελευταία περίπτωση,  $kr_{cor} \approx 1$  στην (28.5), και το ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται πια από το k. Συνεπώς με το  $r_{cor}$  από την (28.10), βρίσκουμε ότι η χωρική διασπορά είναι σημαντική για κύματα των οποίων η φασική ταχύτητα  $\omega/k$  είναι συγκρίσιμη με ή μικρότερη της μέσης ταχύτητας των σωματιδίων στο πλάσμα. Στην αντίθετη περίπτωση περιορισμού με:

$$\omega \gg kv, \quad (28.11)$$

η χωρική διασπορά δεν είναι σημαντική.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι τιμές της  $r_{cor}$  στα πλάσματα μπορεί να είναι μεγάλες σε σύγκριση με τις μέσες αποστάσεις ( $\sim l$ ) ανάμεσα στα σωματίδια. Αυτή είναι συνθήκη που κάνει δυνατή την μακροσκοπική περιγραφή της χωρικής διασποράς σε ότι αφορά την ηλεκτρική διαπερατότητα ακόμα και όταν η ηλεκτρική διαπερατότητα είναι σημαντική. Σε συνηθισμένα μέσα το μήκος συσχέτισης αντιπροσωπεύεται από τις ατομικές διαστάσεις, και συνεπώς η συνθήκη για να εφαρμοστεί η μακροσκοπική θεωρία ήδη απαιτεί να ικανοποιείται η ανισότητα  $kr_{cor} \ll 1$  (το μήκος κύματος πρέπει να είναι μεγάλο σε σχέση με τις ατομικές διαστάσεις). Για αυτό τον λόγο, η χωρική διασπορά σε τέτοια μέσα (όπως εκδηλώνεται, για παράδειγμα, στην φυσική οπτική ενεργότητα) δεν είναι κάτι περισσότερο από μια μικρή διόρθωση.

## **§29. Η ηλεκτρική διαπερατότητα σε ένα πλάσμα άνευ συγκρούσεων**

Στην γενική περίπτωση της αυθαίρετης  $\mathbf{k}$ , όταν η χωρική διασπορά παίζει σημαντικό ρόλο, ο υπολογισμός της ηλεκτρικής διαπερατότητας απαιτεί την χρήση της εξίσωσης μεταφοράς. Αυτό θα εφαρμόσουμε με τις υποθέσεις ότι η ηλεκτρική πόλωση του πλάσματος εμπλέκει μόνο ηλεκτρόνια, και ότι η κίνηση των ιόντων δεν είναι σημαντική (αυτό ονομάζεται πλάσμα ηλεκτρονίων (electron plasma)). Η συνθήκη για να γίνουν δεκτές τέτοιες υποθέσεις, και να μπορέσουν να γενικευτούν τα αποτελέσματα, θα συζητηθούν στην ενότητα §31.

Για ένα ασθενές πεδίο, ψάχνουμε να βρούμε την συνάρτηση κατανομής των ηλεκτρονίων με τη μορφή  $f = f_0 + \delta f$ , όπου  $f_0$  είναι η στατική ισότροπη ομογενής συνάρτηση κατανομής που δεν διαταράσσεται από το πεδίο (stationary isotropic homogeneous distribution function), και  $\delta f$  η αλλαγή που συμβαίνει σε αυτήν εξαιτίας του πεδίου. Αμελώντας τους όρους δεύτερης τάξης στην εξίσωση μεταφοράς, παίρνουμε:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}$$

Σε ένα ισότροπο πλάσμα, η συνάρτηση κατανομής εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της ορμής. Για μια τέτοια συνάρτηση, η διεύθυνση του διανύσματος  $f_0 / \rho$  είναι η ίδια με αυτήν του  $\rho = mv$ , και το βαθμωτό γινόμενο του με  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  είναι μηδέν. Στη γραμμική προσέγγιση, συνεπώς, το μαγνητικό πεδίο δεν επηρεάζει την συνάρτηση κατανομής. Η συνάρτηση που προκύπτει για  $\delta f$  είναι:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} = e \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \quad (29.1)$$

Η συνάρτηση  $\delta f$  θεωρείται υποτίθεται ότι είναι ανάλογη με  $\exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ , όπως και το πεδίο  $\mathbf{E}$ . Στη συνέχεια (29.1) δίνει:

$$\delta f = \frac{e \mathbf{E}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \quad (29.2)$$

Η συνθήκη για να είναι μικρό το πεδίο προκύπτει από την ανάγκη η  $\delta f$  να είναι μικρή σε σύγκριση με την  $f_0$ . Ο συντελεστής  $f_0 / \rho$  στην (29.2) είναι το πλάτος της ορμής που αποκτά το ηλεκτρόνιο στο πεδίο  $\mathbf{E}$ . Αυτό πρέπει να είναι μικρό σε σχέση με την μέση ορμή  $mv$  που καθορίζεται ασύμφωνα με την κατανομή  $f_0$ .

Σε ένα μη διαταραγμένο πλάσμα (unperturbed plasma), η ηλεκτρονική πυκνότητα φορτίου εξισορροπείται κάθε σημείο από τα ιοντικά φορτία, και η πυκνότητα του ρεύματος είναι ομοίως μηδέν, αφού το πλάσμα είναι ισότροπο. Η πυκνότητα φορτίου και η πυκνότητα ρεύματος στο πλάσμα που διαταράσσεται από το πεδίο είναι:

$$\rho = -e \int \delta f d^3 p, \quad \mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta f d^3 p. \quad (29.3)$$



Αυτές οι ποσότητες, όπως η  $\delta f$ , είναι ανάλογες του  $\exp[i(kr - \omega t)]$ , και σύμφωνα με την (28.1) η σχέση τους με την διηλεκτρική πόλωση δίνεται από:

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} = -\rho, \quad -i\omega\mathbf{P} = \mathbf{j}. \quad (29.4)$$

Η μέθοδος όπου παίρνουμε τα ολοκληρώματα στην (29.3) απαιτεί πιο ακριβή προσδιορισμό, παρόλα αυτά, αφού η συνάρτηση  $\delta f$  έχει ένα πόλο στο:

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}. \quad (29.5)$$

Για να δώσουμε νόημα στο ολοκλήρωμα, θα θεωρήσουμε ότι ένα αυστηρά αρμονικό πεδίο harmonic field ( ) αλλά ένα το οποίο εφαρμόζεται με άπειρη βραδύτητα από  $t = -\infty$  και πάνω. Αυτή η περιγραφή του πεδίου αντιστοιχεί με την προσθήκη ενός απειροελάχιστου θετικού φανταστικού μέρους στην συχνότητα του, π.χ. αντικαθιστώντας το  $\omega$  με  $\omega + i\delta$  όπου  $\delta > 0$ : τότε παίρνουμε  $E$

καθώς  $t \rightarrow -\infty$ , και η απειρίοριστη αύξηση του πεδίου που προκαλείται από τον παράγοντα

δεν έχει σημασία καθώς  $t \rightarrow -\infty$ , αφού η αρχή της αιτιότητας δείχνει ότι δεν μπορεί να επηρεάσει αυτό που παρατηρείται σε πεπερασμένους χρόνους  $t$  (ενώ με  $\delta < 0$  το πεδίο θα ήταν μεγάλο στο παρελθόν, και αυτό θα απέτρεπε την χρήση της προσέγγισης που είναι γραμμική στο πεδίο). Συνεπώς ο κανόνας για να αποφύγουμε τους πόλους (29.5) εκφράζεται από τη:

$$\omega \rightarrow \omega + i\delta; \quad (29.6)$$

Αυτό καθιερώθηκε πρώτη φορά από τον L. D. Landau (1946).

Μπορούμε να φτάσουμε στον κανόνα (29.6) από μια διαφορετική προσέγγιση, συμπεριλαμβάνοντας στην εξίσωση μεταφοράς ένα απειροελάχιστο συγκρουσιακό ολοκλήρωμα  $C(f) = -\nu \delta f$ . Η προσθήκη ενός τέτοιου όρου στο δεξί μέρος της (29.1) ισοδυναμεί με την αλλαγή του  $\omega \rightarrow \omega + i\nu$  στον όρο  $\delta f / t = -i\omega \delta f$ . Τότε, καθώς το  $\nu \rightarrow 0$ , έχουμε ξανά τον κανόνα (29.6). Οι ολοκληρώσεις που χρησιμοποιούν τον κανόνα (29.6) εμπλέκουν ολοκληρώματα του τύπου:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z) dz}{z - i\delta}, \quad \delta > 0.$$

Σε ένα τέτοιο ολοκλήρωμα, η διαδρομή ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο στον  $z$  άξονα περνάει κάτω από το σημείο  $z = i\delta$ . Καθώς  $\delta \rightarrow 0$ , αυτό ισοδυναμεί με ολοκλήρωση κατά μήκος του πραγματικού άξονα αλλά περνώντας κατά μήκος ενός απειροελάχιστου ημικύκλιου κάτω από τον πόλο  $z = 0$ . Η συμβολή στο ολοκλήρωμα από αυτό το ημικύκλιο δίνεται από το ήμισυ του υπολοίπου της συνάρτησης προς ολοκλήρωση (integrand), και το αποτέλεσμα είναι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z - i\delta} dz = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z} dz + i\pi f(0), \quad (29.7)$$

όπου το  $P$  δηλώνει την κύρια τιμή του ολοκληρώματος. Αυτό μπορεί επίσης να γραφτεί συμβολικά ως:

$$\frac{1}{z - i\delta} = P \frac{1}{z} + i\pi\delta(z), \quad (29.8)$$

όπου τώρα το P δηλώνει οι κύριες τιμές υπολογίζονται σε μεταγενέστερες ολοκληρώσεις.

Ας υπολογίσουμε το διαμήκη μέρος της ηλεκτρικής διαπερατότητας του πλάσματος, χρησιμοποιώντας την πρώτη σχέση (29.4), στην οποία αντικαθιστούμε το  $\delta\rho$  από (29.3) και (29.2):

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} = -e^2 \mathbf{E} \cdot \int \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{d^3 p}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega - i0)}$$

Ας θεωρήσουμε ότι το πεδίο E, και συνεπώς το P, είναι παράλληλα με το k. Τότε  $4\pi\mathbf{P} = (-1)\mathbf{E}$ . Συνεπώς φτάνουμε στον παρακάτω τύπο για την διαμήκη ηλεκτρική διαπερατότητα ενός πλάσματος που έχει οποιαδήποτε στατική συνάρτηση κατανομής  $f(\mathbf{p})$  (ο δείκτης 0 στην  $f$  θα παραληφθεί):

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{d^3 p}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega - i0} \quad (29.9)$$

Θεωρούμε τον x άξονα στην διεύθυνση του k. Μόνο το  $f$  στη συνάρτηση προς ολοκλήρωση στην (29.9) εξαρτάται από τα  $p_x$  και  $p_y$ . Συνεπώς ο τύπος μπορεί να γραφτεί διαφορετικά χρησιμοποιώντας την συνάρτηση κατανομής μόνο σε σχέση με το  $p_x = m v_x$ :

$$f(p_x) = \int f(\mathbf{p}) dp_y dp_z$$

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{4\pi e^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(p_x)}{dp_x} \frac{dp_x}{k v_x - \omega - i0} \quad (29.10)$$

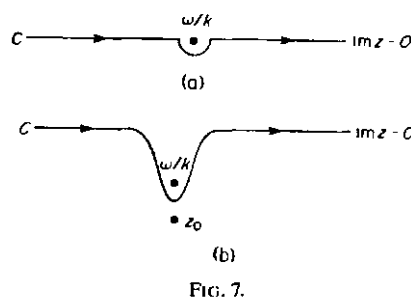
Σε ένα ισότροπο πλάσμα, η  $f(p_x)$  είναι μια άρτια συνάρτηση.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα μπορεί να σημειωθεί αμέσως. Η ηλεκτρική διαπερατότητα ενός πλάσματος άνευ συγκρούσεων είναι μια σύνθετη ποσότητα. Το φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος (29.10) καθορίζεται από την (29.7). Αυτό το σημαντικό αποτέλεσμα θα συζητηθεί περισσότερο στην ενότητα § 30. Εδώ, θα λάβουμε υπόψη τις αναλυτικές ιδιότητες της συνάρτησης της συχνότητας  $\omega$  που προσδιορίζεται από το ολοκλήρωμα (29.10). Είναι γνωστό από τις γενικές ιδιότητες της ηλεκτρικής διαπερατότητας ότι αυτή η συνάρτηση μπορεί να έχει ανωμαλίες μόνο στο κατώτερο μιγαδικό ημιεπίπεδο του  $\omega$ . Αυτή είναι μια συνέπεια που προκύπτει από τον ορισμό (28.5). Παρόλα αυτά είναι χρήσιμο να δούμε επίσης πως προκύπτει άμεσα από την (29.10), και να διευκρινίσουμε την σχέση ανάμεσα σε αυτές τις ανωμαλίες και τις ιδιότητες των συναρτήσεων κατανομής  $f(p_x)$ .

Αλλάζοντας τον συμβολισμό της μεταβλητής της ολοκλήρωσης, μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα στην (29.10) ως:

$$\int_C \frac{df(z)}{dz} \frac{dz}{z - \omega/k} \quad (29.11)$$

Ολοκληρώνουμε κατά μήκος του πραγματικού άξονα στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ , αλλά περνώντας κάτω από το σημείο  $z = \omega/k$  (Σχήμα 7a). Το ολοκλήρωμα (29.11) τότε προσδιορίζει μια αναλυτική συνάρτηση στο άνω ημιεπίπεδο του  $\omega$  επίσης: για οποιοδήποτε τέτοιο  $\omega$  ο πόλος  $z = \omega/k$  περνιέται από κάτω, όπως και πρέπει. Στην αναλυτική συνέχεια αυτής της συνάρτησης προς το κάτω ημιεπίπεδο, παρόλα αυτά, η ανάγκη να περάσει κάτω από τον πόλο απαιτεί μια κατάλληλη αλλαγή της επικαμπύλιας ολοκλήρωσης (Σχήμα 7b). Αλλά η συνάρτηση  $df(z)/dz$ , η οποία είναι ομαλή για το πραγματικό  $z$ , γενικά έχει ανωμαλίες για το μιγαδικό  $z$  (ας πούμε στο  $z_0$ ), μερικές από τις οποίες βρίσκονται στο κάτω ημιεπίπεδο. Είναι αδύνατο να φέρουμε την καμπύλη ολοκλήρωσης  $C$  μακριά από τον πόλο  $z = \omega/k$  όταν αυτός ο πόλος περνάει κοντά από μια από τις ανωμαλίες  $z_0$ , και η  $C$  βρίσκεται στριγωμένη ανάμεσα στα δυο σημεία. Συνεπώς η συνάρτηση (29.11) έχει ανωμαλίες στο κάτω ημιεπίπεδο του  $\omega$  στις τιμές του  $\omega/k$  οι οποίες συμπίπτουν με τις ανωμαλίες του  $df(z)/dz$ .



### **§30. Απόσβεση Landau (Landau damping)**

Έχει ήδη σημειωθεί ότι η ηλεκτρική διαπερατότητα ενός πλάσματος άνευ συγκρούσεων είναι μια μιγαδική ποσότητα  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ . Ξεχωρίζοντας το φανταστικό μέρος μέσω της (29.8), έχουμε:

$$\epsilon'' = -4\pi^2 e^2 \int \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k^2} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3 p, \quad (30.1)$$

ή

$$\epsilon'' = -\frac{4\pi^2 e^2 m}{k^2} \left[ \frac{df(p_x)}{dp_x} \right]_{v_x = \omega/k}. \quad (30.2)$$

Η μιγαδική ηλεκτρική διαπερατότητα δείχνει ότι υπάρχει διάχυση της ηλεκτρικής ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου στο μέσο. Οι τύποι για την μέση ενέργεια  $Q$  ενός μονοχρωματικού ηλεκτρικού πεδίου που διαχέεται ανά μονάδα χρόνου και όγκου δίνονται παρακάτω. Αν αυτό το πεδίο είναι γραμμικό στη μιγαδική μορφή:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

τότε στην γενική περίπτωση ενός ανισότροπου μέσου:

$$Q = \frac{i\omega}{8\pi} \cdot \frac{1}{2} [\epsilon_{\beta\alpha}^*(\omega, \mathbf{k}) - \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})] E_{\alpha}^* E_{\beta}; \quad (30.3)$$

η διάχυση ελέγχεται από το αντι-ερμιτιανό (anti-Hermitian) μέρος του τανυστή  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . Αν αυτός ο τανυστής είναι συμμετρικός, το μέρος που ερευνάμε είναι απλά το φανταστικό μέρος:

$$Q = (\omega/8\pi) \epsilon_{\alpha\beta}''(\omega, \mathbf{k}) E_{\alpha} E_{\beta}^*. \quad (30.4)$$

Στην περίπτωση ενός διαμήκους πεδίου, μόνο το φανταστικό μέρος της διαμήκους ηλεκτρικής διαπερατότητας παραμένει:

$$Q = (\omega/8\pi) \epsilon_{\parallel}'' |\mathbf{E}|^2. \quad (30.5)$$

Αντικατάσταση της (30.2) τότε δίνει:

$$Q = -|\mathbf{E}|^2 \frac{\pi m e^2 \omega}{2k^2} \left[ \frac{df(p_x)}{dp_x} \right]_{v_x = \omega/k}. \quad (30.6)$$

Συνεπώς η διάχυση συμβαίνει ακόμα και σε ένα πλάσμα άνευ συγκρούσεων, ένα φαινόμενο που προβλέφθηκε από τον L. D. Landau (1946) και γνωστό ως απόσβεση Landau (Landau damping). Καθώς είναι ανεξάρτητο των συγκρούσεων, είναι βασικά διαφορετικό από την διάχυση σε συνηθισμένα απορροφητικά μέσα: η διάχυση χωρίς συγκρούσεις δεν εμπεριέχει αύξηση της εντροπίας και συνεπώς είναι μια θερμοδυναμικά αναστρέψιμη διαδικασία, πράγμα στο οποίο θα αναφερθούμε ξανά στην ενότητα §35.

Ο μηχανισμός της απόσβεσης Landau είναι στενά συνδεδεμένος με την χωρική διασπορά.

Όπως φαίνεται από την (30.6), η διάχυση (dissipation) οφείλεται στα ηλεκτρόνια των οποίων η ταχύτητα που βρίσκεται στην διεύθυνση της μετάδοσης του ηλεκτρικού κύματος ισούται με την φασική ταχύτητα του κύματος,  $v_x = \omega/k$ . Τέτοια ηλεκτρόνια κινούνται με την ίδια φάση που έχει το κύμα. Το πεδίο είναι σταθερό σε σχέση με αυτά τα ηλεκτρόνια, και μπορεί να παράγει έργο πάνω τους το οποίο είναι διάφορο του μηδενός όταν βγάλουμε το μέσο όρο ως προς τον χρόνο όπως ισχύει και για άλλα ηλεκτρόνια σε σχέση με τα οποία το πεδίο ταλαντώνεται. Θα μας διαφωτίσει να εξετάσουμε τον

μηχανισμό πιο προσεκτικά, με άμεση εξαγωγή της (30.6) η οποία δεν χρησιμοποιεί την εξίσωση μεταφοράς.

Ας θεωρήσουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο κινείται κατά μήκος του  $x$  άξονα σε ένα ασθενές ηλεκτρικό πεδίο προς εκείνη την κατεύθυνση.

$$E(t, x) = \text{re}\{E_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{i\delta}\} \quad (30.7)$$

Ο παράγοντας περιγράφει την αργή εφαρμογή του πεδίου που ξεκινάει στον χρόνο  $t = -\infty$ . Θα ψάξουμε να βρούμε την ταχύτητα  $w = \dot{x}$  και την συντεταγμένη  $x$  του κινούμενου ηλεκτρονίου με την μορφή:

$$w = w_0 + \delta w, \quad x = x_0 + \delta x,$$

όπου  $\delta w$  και  $\delta x$  είναι οι διορθώσεις στην αδιατάρακτη κίνηση  $w = \dot{x}$  με σταθερή ταχύτητα. Η εξίσωση της κίνησης του ηλεκτρονίου, γραμμικοποιημένη ως προς μικρές ποσότητες, είναι:

$$\begin{aligned} m \frac{d\delta w}{dt} &= -eE(t, x_0) \\ &= -e \text{re}\{E_0 e^{i(kx_0 - \omega t)} e^{i\delta}\}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta w &= -\frac{e}{m} \text{re} \frac{E(t, x_0)}{ik(w_0 - \omega/k) + \delta}, \\ \delta x &= -\frac{e}{m} \text{re} \frac{E(t, x_0)}{[ik(w_0 - \omega/k) + \delta]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (30.8)$$

Το μέσο έργο του πεδίου πάνω στο ηλεκτρόνιο ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$\begin{aligned} q &= -e \langle w E(t, x) \rangle \\ &= -e \langle (w_0 + \delta w) E(t, x_0 + \delta x) \rangle \\ &\approx -e w_0 \left\langle \frac{\partial E}{\partial x_0} \delta x \right\rangle - e \langle \delta w \cdot E(t, x_0) \rangle, \\ q &= -\frac{1}{2} e \text{re}\{w_0 \delta x \partial E^* / \partial x_0 + \delta w \cdot E^*\}. \end{aligned}$$

Αντικατάσταση του  $E$ ,  $\delta x$  και  $\delta w$  από τις (30.7) και (30.8) δίνει, μετά από απλοποίηση:

$$q = \frac{e^2}{2m} |E|^2 \frac{d}{d\omega} \frac{\omega \delta}{\delta^2 + k^2(\omega_0 - \omega/k)^2}$$

Τώρα απομένει να αθροίσουμε το  $q$  των ηλεκτρονίων με όλες τις αρχικές ορμές  $=m$

$$Q = \int \dots$$

(με ολοκλήρωση κατά παράγοντες). Το πέρασμα στο όριο γίνεται μέσω του τύπου:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\delta^2 + z^2} = \pi \delta(z) \quad (30.9)$$

και οδηγεί κατευθείαν στην (30.6).

Σε συμφωνία με την αντιστρεψιμότητα της διάχυσης άνευ συγκρούσεων (collisionless dissipation), οι θερμοδυναμικές συνθήκες δεν απαιτούν το  $Q$  να είναι θετικό όπως στην πραγματική διάχυση (true dissipation). Η έκφραση (30.6) είναι πάντα θετική όταν η κατανομή  $f(p)$  είναι ισότροπη. Για ανισότροπες κατανομές, παρόλα αυτά, το  $Q$  μπορεί να είναι αρνητικό: τα ηλεκτρόνια τότε μεταφέρουν ενέργεια προς στο κύμα κατά μέσο όρο, και όχι από αυτό. Τέτοιες περιπτώσεις είναι στενά συνδεδεμένες με την πιθανή αστάθεια του πλάσματος. Η συνθήκη  $Q > 0$  (και συνεπώς  $\nu > 0$ ) είναι το αποτέλεσμα της μόνο της σταθερότητας της κατάστασης του πλάσματος.

Από τη προαναφερθείσα θέση της απόσβεσης Landau, η παρουσία της παραγώγου στην (30.6) μπορεί εύληπτα να ερμηνευθεί όπως παρακάτω. Η ανταλλαγή ενέργειας με το πεδίο προϋποθέτει σωματίδια με ταχύτητες  $u_x$  κοντά στο  $\omega/k$ . Αυτά με  $u_x < \omega/k$  αποκτούν ενέργεια από το κύμα, ενώ εκείνα με  $u_x > \omega/k$  χάνουν ενέργεια προς αυτό. Το κύμα χάνει ενέργεια αν τα πρώτα είναι σχετικά πιο πολυάριθμα από τα τελευταία.

### **§31. Ηλεκτρική διαπερατότητα ενός Μαξγουελιανού πλάσματος (Maxwellian plasma)**

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο (29.10) δε ένα πλάσμα ηλεκτρονίων με κατανομή ισορροπίας (Μαξγουελιανή) ηλεκτρονίων:

$$f(p_x) = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m T_e}\right), \quad (31.1)$$

όπου  $T_e$  είναι η θερμοκρασία του αερίου ηλεκτρονίων. Δίνουμε τον δείκτη  $e$  στις ποσότητες που αφορούν τα ηλεκτρόνια με σκοπό την τελευταία θεώρηση της συνιστώσας του ιόντος επίσης. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\epsilon_1(\omega, k) = 1 + \frac{1}{(ka_e)^2} \left[ 1 + F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2k v_{Te}}}\right) \right], \quad (31.2)$$

όπου η συνάρτηση  $F(x)$  καθορίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2} dz}{z-x-i0} \\ &= \frac{x}{\sqrt{\pi}} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2} dz}{z-x} + i\sqrt{\pi} x e^{-x^2} \end{aligned} \quad (31.3)$$

και οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι:

$$v_{Te} = \sqrt{T_d/m}, \quad a_e = \sqrt{T_d/4\pi N_e e^2}. \quad (31.4)$$

Η ποσότητα  $u_{Te}$  είναι η μέση θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων. Το  $\lambda_D$  είναι το μήκος Debye (Debye length), που καθορίζεται από το φορτίο τους, την θερμοκρασία τους και την πυκνότητα τους.

Οι εκφράσεις περιορισμού για την συνάρτηση  $F(x)$  για μεγάλα και μικρά  $x$  βρίσκονται εύκολα κατευθείαν από τον ορισμό (31.3). Για  $x > 1$ , γράφουμε:

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2} dz}{z-x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \left( 1 + \frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2} + \dots \right) dz.$$

Τα όρια των όρων που είναι περιττοί στο  $x$  είναι μηδέν. Οι υπόλοιποι δίνουν :

$$F(x) + 1 \approx -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz + i\sqrt{\pi} x e^{-x^2} \quad (31.5)$$

Για  $x \ll 1$ , πρώτα κάνουμε την αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης  $z = u + x$ , και έπειτα αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{\pi}} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2} dz}{z-x} &= \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2-2ux}}{u} du \\ &\approx \frac{x}{\sqrt{\pi}} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \left( \frac{1}{u} - 2x \right) du. \end{aligned}$$

Η κύρια τιμή του ολοκληρώματος του πρώτου όρου (περιττός στο  $u$ ) είναι μηδέν, και η δεύτερη τιμή δίνει:

$$F(x) \approx -2x^2 + i\sqrt{\pi}x, \quad x \ll 1. \quad (31.6)$$

Αυτοί οι τύποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να γράψουμε εκφράσεις περιορισμού για την ηλεκτρική διαπερατότητα. Σε υψηλές συχνότητες, έχουμε:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \Omega_e^2}{(k v_{Te})^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right) \quad \text{for } \omega/kv_{Te} \gg 1. \quad (31.7)$$

Η παράμετρος:

$$\Omega_e = v_{Te}/a_e = \sqrt{(4\pi N_e e^2/m)} \quad (31.8)$$

είναι η συχνότητα πλάσματος (plasma frequency) ή συχνότητα Langmuir (Langmuir frequency) για ηλεκτρόνια. Στην  $\omega/k \gg 1$  περίπτωση όπου η χωρική διασπορά οδηγεί, όπως και πρέπει, σε μικρές μόνο διορθώσεις της ηλεκτρικής διαπερατότητας, και το μικρό φανταστικό μέρος του είναι εκθετικά μικρό, αφού σε μια Μαξγουελιανή κατανομή μόνο ένα εκθετικά μικρό μέρος των ηλεκτρονίων έχει ταχύτητες  $v > \omega/k$ . Η τιμή περιορισμού της ηλεκτρικής διαπερατότητας, η οποία είναι ανεξάρτητη του  $k$ , είναι:

$$\epsilon(\omega) = 1 - (\Omega_e/\omega)^2. \quad (31.9)$$

Αυτή η έκφραση εφαρμόζεται και στην διαμήκη και στην εγκάρσια ηλεκτρική διαπερατότητα. Εξάγεται εύκολα από ξεκάθαρα ορίσματα χωρίς την χρήση της εξίσωσης μεταφοράς. Όσο το  $k \rightarrow 0$ , το πεδίο του κύματος μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφο και η εξίσωση της κίνησης των ηλεκτρονίων  $m\dot{v} = -eE$  τότε δίνει  $v = eE/i\omega$  ώστε η πυκνότητα του ρεύματος που οφείλεται στα ηλεκτρόνια είναι:

$$\mathbf{j} = - (e^2 N_e / i m \omega) \mathbf{E}.$$

$$\mathbf{j} = - i \omega \mathbf{P} = - i \omega \frac{\epsilon(\omega) - 1}{4\pi} \mathbf{E}.$$

Σύγκριση των δυο εκφράσεων δίνει τον τύπο (31.9). Στην αντίθετη περίπτωση περιορισμού των χαμηλών συχνοτήτων:

$$\epsilon_r = 1 + \left( \frac{\Omega_e}{k v_{Te}} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{k v_{Te}} \right)^2 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \right] \quad \text{for } \omega/kv_{Te} \ll 1. \quad (31.10)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η χωρική διασπορά εξαλείφει τον πόλο στο  $\omega = 0$  της ηλεκτρικής διαπερατότητας σε ένα συνηθισμένο αγωγίμο μέσο, και ότι το φανταστικό μέρος της ηλεκτρικής διαπερατότητας είναι σχετικά μικρό (αν και όχι εκθετικά μικρό) στις χαμηλές συχνότητες επίσης, σε αυτή την περίπτωση εξαιτίας της μικρότητας του φασικού όγκου των ηλεκτρονίων στην οποία η συνθήκη  $k \cdot v = \omega$  ικανοποιείται. Έχουμε δείξει στην §29 ότι η συνάρτηση  $\epsilon(\omega)$  που προσδιορίζεται από το ολοκλήρωμα (29.10) δεν έχει καμία ανωμαλία στο ανώτερο ημιεπίπεδο του  $\omega$ , και οι ανωμαλίες της στο κάτω ημιεπίπεδο καθορίζονται από εκείνες της  $df(p_x)/dp_x$  ως συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $p_x$ . Για μια Μαξγουελιανή κατανομή, παρόλα αυτά, η συνάρτηση:

$$df(p_x)/dp_x \propto p_x \exp(-p_x^2/2mT)$$

δεν έχει ανωμαλία σε πεπερασμένη απόσταση οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο, π.χ. είναι μια ακεραία συνάρτηση. Συνεπώς η ηλεκτρική διαπερατότητα ενός Μαξγουελιανού πλάσματος άνευ συγκρούσεων (collisionless plasma) είναι επίσης μια ακεραία συνάρτηση του  $\omega$ , που δεν έχει καμία



ανωμαλία για πεπερασμένο  $\omega$ . Μέχρι τώρα, έχουμε ερευνήσει μόνο την συνεισφορά της ηλεκτρικής διαπερατότητας από τα ηλεκτρόνια του πλάσματος. Η συνεισφορά από τα ιόντα υπολογίζεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο, και οι συνεισφορές στο  $\epsilon - 1$  απλά προστίθενται. Συνεπώς παίρνουμε την γενίκευση της (31.2):

$$\epsilon - 1 = \frac{1}{(ka_e)^2} \left[ F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kv_{Te}}\right) + 1 \right] + \frac{1}{(ka_i)^2} \left[ F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kv_{Ti}}\right) + 1 \right]. \quad (31.11)$$

Οι δείκτες  $e$  και  $i$  δηλώνουν ποσότητες σχετικές με τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα

$$\left. \begin{aligned} v_{Ti} &= (T_i/M)^{1/2}, & a_i &= v_{Ti}/\Omega_i = [T_i/4\pi N_i(z_e)^2]^{1/2}, \\ \Omega_i^2 &= 4\pi N_i(z_e)^2/M, \end{aligned} \right\} \quad (31.12)$$

όπου  $M$  και  $z_e$  είναι η μάζα και το φορτίο των ιόντων. Η έκφραση (31.11) αφορά ένα πλάσμα με 'δύο θερμοκρασίες' ("two-temperature" plasma), στο οποίο η κάθε συνιστώσα έχει την κατανομή ισορροπίας αλλά με διαφορετική θερμοκρασία, ώστε τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα να μην βρίσκονται σε ισορροπία μεταξύ τους. Αυτό συμβαίνει φυσικά, λαμβάνοντα υπόψη εμποδίζει την ανταλλαγή ενέργειας στις συγκρούσεις ηλεκτρονίων - ιόντων.

Η πιο συνηθισμένη κατάσταση είναι ότι όπου  $\omega > kv_{Te}$  και  $\omega > kv_{Ti}$ . Αφού επίσης έχουμε πάντα  $\Omega_i > kv_{Ti}$   $\Omega_e > kv_{Te}$  είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι όταν  $\omega \gg k v_{Te} > k v_{Ti}$  η συνεισφορά των ιόντων είναι αμελητέα και έτσι ο τύπος (31.7) ισχύει. Στην αντίθετη περίπτωση περιορισμού, έχουμε:

$$\epsilon_i - 1 = \frac{1}{(ka_e)^2} + \frac{1}{(ka_i)^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{(ka_i)^2 kv_{Ti}}, \quad (31.13)$$

$$\omega \ll kv_{Ti} \ll kv_{Te}.$$

Η περίπτωση όπου  $k v_{Ti} < \omega < k v_{Te}$  θα συζητηθεί στην ενότητα §32. Όλοι οι υπολογισμοί στις §§30 και 31 έχουν γίνει για το διαμήκη μέρος της ηλεκτρικής διαπερατότητας. Ο υπολογισμός της εγκάρσιας διαπερατότητας έχει μικρότερο ενδιαφέρον, επειδή το εγκάρσιο πεδίο συνήθως μειώνεται σε συνηθισμένα ηλεκτρομαγνητικά κύματα για τα οποία η συχνότητα και ο αριθμός κυμάτων συνδέονται μεταξύ τους με  $\omega/k = c$ . Τότε  $\omega/k \gg c \gg kv_{Te}$ , π.χ.  $\omega \gg kv_{Te}$ , ώστε η χωρική διασπορά να είναι μικρή και η ηλεκτρική διαπερατότητα δίνεται από την (31.9). Για αυτά τα κύματα δεν υπάρχει επίσης απόσβεση Landau (Landau damping). Αφού η βασική ταχύτητα του κύματος ξεπέρα την ταχύτητα του φωτός, το πλάσμα δεν περιέχει καθόλου σωματίδια που είναι ικανά να κινούνται σε φάση με το κύμα. (Η απόδειξη αυτής της δήλωσης απαιτεί σχετικιστική αντιμετώπιση (a relativistic treatment)).

### §32. Διαμήκη κύματα πλάσματος (Longitudinal plasma waves)

Η χωρική διασπορά καθιστά δυνατή την διάδοση διαμήκων ηλεκτρικών κυμάτων στο πλάσμα. Η εξάρτηση της συχνότητας από τον αριθμό των κυμάτων (η σχέση διασποράς - dispersion relation) για αυτά τα κύματα δίνεται από την εξίσωση

$$\epsilon_l(\omega, k) = 0. \quad (32.1)$$

Επειδή, όταν  $\omega = 0$ , το διαμήκη ηλεκτρικό πεδίο  $E$  έχει  $D = 0$ . Θέτοντας επίσης  $B = 0$ , ικανοποιούμε ομοίως το δεύτερο ζεύγος των εξισώσεων Maxwell (28.2). Απομένει από το πρώτο ζεύγος ο στροβιλισμός  $\text{curl } E = 0$ , ο οποίος ικανοποιείται επειδή το πεδίο είναι διαμήκη: στροβιλισμός  $\text{curl } E = ik \times E = 0$ . Οι ρίζες (32.1) είναι μιγαδικές ( $\omega = \omega' + i\omega''$ ). Αν το φανταστικό μέρος της ηλεκτρικής διαπερατότητας

$\epsilon''_1 > 0$ , βρίσκεται στο κατώτερο μιγαδικό ημιεπίπεδο του  $\omega$ , π.χ.  $\omega'' < 0$ . Η ποσότητα  $\gamma = -\omega''$  είναι ο ρυθμός απόσβεσης του κύματος, αφού η απόσβεση είναι ανάλογη του  $e^{-\gamma t}$ . Βέβαια, ένα διαδιδόμενο κύμα υπάρχει μόνο αν  $\gamma < \omega'$ . Ο ρυθμός απόσβεσης πρέπει να είναι πολύ μικρότερος από την συχνότητα. Μια τέτοια ρίζα της εξίσωσης (32.1) προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι

$$\omega \gg kv_{Te} \gg kv_{Ti} \quad (32.2)$$

Τότε οι ταλαντώσεις εμπλέκουν μόνο τα ηλεκτρόνια, και η συνάρτηση  $\epsilon_r(\omega, k)$  δίνεται από την (31.7). Η συνάρτηση  $\epsilon_r=0$  επιλύεται με διαδοχικές προσεγγίσεις. Στην πρώτη προσέγγιση, απαλείφοντας όλους τους όρους που εξαρτώνται από το  $k$ , βρίσκουμε ότι

$$\omega = \Omega_e \quad (32.3)$$

π.χ. τα κύματα έχουν μια σταθερή συχνότητα ανεξάρτητη του  $k$ . Αυτά ονομάζονται κύματα πλάσματος (plasma waves) ή κύματα Langmuir (Langmuir waves) (I. Langmuir and L. Tonks 1926). Είναι μακρά κύματα, με την έννοια ότι

$$ka_e \ll 1, \quad (32.4)$$

όπως συνεπάγεται από την (32.2) με  $\omega = \Omega_e$ .

Για να καθορίσουμε την εξαρτώμενη από το  $k$  διόρθωση στο πραγματικό μέρος της συχνότητας, αρκεί να θέσουμε  $\omega = \Omega_e$  στον διορθωτικό όρο της (32.1). Τότε

$$\omega = \Omega_e \left( 1 + \frac{1}{2} k^2 a_e^2 \right) \quad (32.5)$$

(A.A. Vlasov, 1938).

Το φανταστικό μέρος της συχνότητας σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\omega'' = -\frac{1}{2} \Omega_e \epsilon''(\omega, k), \quad (32.6)$$

και είναι εκθετικά μικρό με την  $ka_e$ . Για να το προσδιορίσουμε (και επίσης τον συντελεστή της εκθετικής), πρέπει να αντικαταστήσουμε στην (32.6) την ήδη διορθωμένη τιμή (32.5), καταλήγοντας στην

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\Omega_e}{(ka_e)^3} \exp\left[-\frac{1}{2(ka_e)^2} - \frac{3}{2}\right] \quad (32.7)$$

(L. D. Landau, 1946). Αφού  $ka_e \ll 1$ , ο ρυθμός απόσβεσης για τα κύματα πλάσματος βρίσκεται ότι είναι στην πραγματικότητα εκθετικά μικρός. Αυξάνει καθώς το μήκος κύματος μειώνεται, και για  $ka_e \sim 1$  (όταν ο τύπος (32.7) δεν ισχύει πλέον) γίνεται της ίδιας τάξης μεγέθους όπως και η συχνότητα, και έτσι η έννοια της διάδοσης κυμάτων πλάσματος παύει να έχει νόημα. Η παραπάνω αντιμετώπιση συνδέεται μόνο με ένα ισότροπο πλάσμα, όπου ο ταυιστής ηλεκτρικής διαπερατότητας μειώνεται, κατά την (28.7), σε δυο βαθμωτές ποσότητες  $\epsilon \perp$  και  $\epsilon \parallel$ . Σε ένα ανισότροπο πλάσμα, π.χ. όταν η συνάρτηση κατανομής  $f(p)$  εξαρτάται από την διεύθυνση του  $p$ , δεν υπάρχουν αυστηρά διαμήκη κύματα. Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, παρόλα αυτά, τα "σχεδόν διαμήκη" ("almost longitudinal") κύματα μπορούν να διαδοθούν, στα οποία η συνιστώσα  $E^{(l)}$  του πεδίου κάθετη στο  $k$  είναι μικρή σε σύγκριση με την διαμήκη συνιστώσα  $E^{(l)}$ :

$$E^{(1)} \ll E^{(0)} \quad (32.8)$$

Για να εξακριβώσουμε αυτές τις συνθήκες, σημειώνουμε πρώτα από όλα ότι, όταν το  $E^{(0)}$  παραβλέπεται, η συνάρτηση  $\text{div } D = 0$  δίνει

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} \approx k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta^{(0)} = k_\alpha k_\beta \epsilon_{\alpha\beta} E^{(0)} / k = 0.$$

Αυτό καθορίζει την σχέση διασποράς για τα κύματα, και μπορεί να ξαναγραφτεί με τη μορφή (32.1) αν η "διαμήκης" ηλεκτρική διαπερατότητα προσδιοριστεί ως

$$\epsilon_i = k_\alpha k_\beta \epsilon_{\alpha\beta} / k^2; \quad (32.9)$$

Τώρα εξαρτάται από την διεύθυνση του  $\mathbf{k}$ . Παρόλα αυτά, το  $\epsilon_1 = 0$  δεν σημαίνει ότι  $D = 0$ . Η ποσότητα

$$D_\alpha \approx \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta^{(0)} = \epsilon_{\alpha\beta} k_\beta E^{(0)} / k \equiv \epsilon_\alpha E^{(0)}$$

δεν είναι μηδενική (ενώ σε ένα ανισότροπο πλάσμα  $\epsilon_0 = 0$  όταν  $\epsilon_1 = 0$ ). Έπειτα, από την εξίσωση του Maxwell (στροβιλισμός)  $\text{curl } \mathbf{B} = (1/c) \text{grad } D / t$  υπολογίζουμε το μαγνητικό πεδίο του κύμα και βρίσκουμε

$$\mathbf{B} \sim (\omega / ck) \epsilon \mathbf{E}^{(0)},$$

και έπειτα από την εξίσωση (στροβιλισμός)  $\text{curl } \mathbf{E} = -(1/c) \text{grad } B / t$  βρίσκουμε ένα υπολογισμό του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου:

$$\mathbf{E}^{(1)} \sim (\omega / ck) \mathbf{B} \sim (\omega / ck)^2 \epsilon \mathbf{E}^{(0)}. \quad (32.10)$$

Συνεπώς η συνθήκη (32.8) για να είναι το κύμα "σχεδόν διαμήκη" ικανοποιείται αν το κύμα είναι "αργό" με την έννοια ότι

$$\omega / k \ll c / \sqrt{\epsilon}. \quad (32.11)$$

Τέλος, μπορεί να σημειωθεί ότι η (29.10) παραμένει σε ισχύ για  $\epsilon_1 > 1$ , όπως προσδιορίζεται από την (32.9) σε ένα ανισότροπο πλάσμα, όπως φαίνεται από την εξαγωγή της από την έκφραση

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} = (k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) / 4\pi$$

με ένα διαμήκη πεδίο  $\mathbf{E}$ . Είναι σημαντικό εδώ ότι η δύναμη Lorentz  $e\mathbf{v} \times \mathbf{B} / c$  στην εξίσωση μεταφοράς μπορεί να παραβλεφθεί σε σύγκριση με την  $e\mathbf{E}$  (παρόλο που το γινόμενο της με  $f / p$  δεν είναι ομοίως μηδέν για μια ανισότροπη συνάρτηση  $f(p)$ ): ο υπολογισμός (32.10) δίνει

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| / c E^{(0)} \sim \omega \epsilon_i / kc^2 \ll 1.$$

Αυτός ο λόγος είναι μικρός όπως προκύπτει και από την συνθήκη (32.11) για ένα "αργό" κύμα και από την ανισότητα  $v \ll c$ .

### **§33. Ακουστικά κύματα ιόντων (Ion-sound waves)**

Όπως τα κύματα πλάσματος συνδέονται με τις ταλαντώσεις ηλεκτρονίων, μπορούν επίσης να διαδοθούν σε ένα πλάσμα κύματα στα οποία και η ηλεκτρονική πυκνότητα και η ιοντική πυκνότητα ταλαντώνονται σημαντικά. Αυτό το σκέλος του φάσματος ταλάντωσης έχει ασθενή απόσβεση (ώστε η έννοια της διάδοσης κύματος αποκτά νόημα) όταν η θερμοκρασία του ιόντων του αερίου στο πλάσμα είναι μικρή σε σύγκριση με την θερμοκρασία των ηλεκτρονίων:

$$T_i \ll T_e \quad (33.1)$$

Θα επιβεβαιωθεί εκ του αποτελέσματος του υπολογισμού ότι η φασική ταχύτητα αυτών των κυμάτων ικανοποιεί τις ανισότητες

$$v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te} \quad (33.2)$$

Το μικρό μέγεθος της απόσβεσης Landau κάτω από αυτές τις συνθήκες είναι φανερό από την αρχή: αφού η φασική ταχύτητα βρίσκεται έξω από τα κύρια εύρη των θερμικών ταχυτήτων και για τα ιόνια και για τα ηλεκτρόνια, μόνο ένα μικρό κλάσμα των σωματιδίων μπορεί να κινηθεί σε φάση με το κύμα και συνεπώς να συμμετάσχει στην ανταλλαγή ενέργειας με αυτό.

Η συνεισφορά των ηλεκτρονίων στην ηλεκτρική διαπερατότητα κάτω από τις συνθήκες της (33.2) δίνεται από τύπο περιορισμού (31.10), και εκείνη των ιόντων από την (31.7) με τις ποσότητες των ηλεκτρονίων να έχουν αντικατασταθεί από αυτές των ιόντων. Για να υπάρχει η απαραίτητη ακρίβεια έχουμε

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} + \frac{1}{(ka_e)^2} \left[ 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \right]. \quad (33.3)$$

Παραβλέποντας αρχικά το σχετικά μικρό φανταστικό μέρος, βρίσκουμε από την εξίσωση  $\epsilon_1 = 0$

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \frac{k^2 a_e^2}{1 + k^2 a_e^2} = \frac{z T_e}{M} \frac{k^2}{1 + k^2 a_e^2}; \quad (33.4)$$

στην τελευταία έκφραση έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι  $N_e = z N_i$ .

Για τα πιο μακρά κύματα, με την συνθήκη  $ka_e < 1$ , η σχέση διασποράς (33.4) μειώνεται στην

$$\omega = k \sqrt{(z T_e / M)}, \quad ka_e \ll 1. \quad (33.5)$$

Η συχνότητα είναι ανάλογη του αριθμού των κυμάτων, όπως στα συνηθισμένα ηχητικά κύματα. Τα κύματα που έχουν αυτή τη σχέση διασποράς ονομάζονται ακουστικά κύματα ιόντων (ion-sound waves). Η φασική ταχύτητα τέτοιων κυμάτων είναι  $\omega/k \sim (T_e/M)^{1/2}$ , ώστε η συνθήκη (33.2) να ικανοποιείται. Λαμβάνοντας υπόψη το φανταστικό μέρος της  $\epsilon_1$  στην επόμενη προσέγγιση, βρίσκουμε εύκολα τον ρυθμό απόσβεσης:

$$\gamma = \omega \sqrt{(\pi z m / 8 M)}. \quad (33.6)$$

Αυτή η απόσβεση οφείλεται στα ηλεκτρόνια. Η συνεισφορά των ιόντων στο  $\gamma$  είναι εκθετικά μικρή, και περιέχει τον παράγοντα  $\exp(-z T_e / 2 T_i)$ . Για πιο βραχέα μήκη κύματος, στο εύρος  $1/a_e < k < 1/a_1$ , (το οποίο υπάρχει εξαιτίας της διατυπωμένης ανισότητας (33.1)), παίρνουμε από την (33.4) απλά

$$\omega \approx \Omega_i. \quad (33.7)$$

Αυτά είναι κύματα ιόντων ανάλογα των ηλεκτρονικών κυμάτων πλάσματος. Εύκολα επαληθεύεται ότι εδώ οι συνθήκες (33.2) ικανοποιούνται, και η απόσβεση είναι μικρή. Καθώς το μήκος κύματος μειώνεται περισσότερο, παρόλα αυτά, η απόσβεση μειώνεται, και για  $ka_1 \gg 1$  η συνεισφορά των ιόντων στον ρυθμό απόσβεσης γίνεται συγκρίσιμη με την συχνότητα, ώστε η διάδοση κύματος παύει να έχει σημασία. Το σχήμα 8 δείχνει διαγραμματικά το φάσμα (σχέση διασποράς) για τις ταλαντώσεις χαμηλής συχνότητας που εξετάσαμε εδώ (η κάτω καμπύλη), σε σύγκριση με το φάσμα υψηλών συχνοτήτων των κυμάτων πλάσματος ηλεκτρονίων (η άνω καμπύλη). Οι περιοχές όπου η απόσβεση γίνεται μεγάλη σημειώνεται με διακεκομμένες γραμμές.

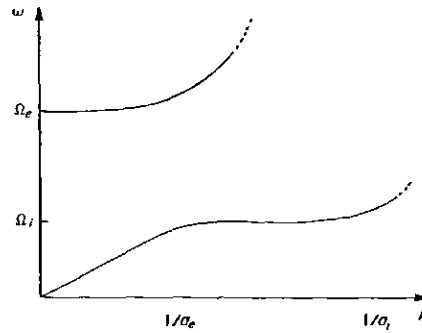


FIG. 8.

### **§34. Χαλάρωση της αρχικής διαταραχής (Relaxation of the initial perturbation)**

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα όπου λύνουμε την εξίσωση μεταφοράς όπου υπάρχει ένα αυτοσυντηρούμενο πεδίο (self-consistent field) για δεδομένες αρχικές συνθήκες (L. D. Landau, 1946). Θα πάρουμε μόνο την περίπτωση ενός καθαρά ηλεκτρικού πεδίου ( $E = -\nabla\phi$ ) και μηδενικού μαγνητικού πεδίου, υποθέτοντας ότι μόνο η κατανομή ηλεκτρονίων έχει διαταραχθεί (η ιοντική κατανομή έχει παραμείνει αμετάβλητη). Επίσης θα υποθέσουμε ότι η αρχική διαταραχή είναι μικρή: η αρχική συνάρτηση κατανομής ηλεκτρονίων είναι

$$f(0, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) + g(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (34.1)$$

όπου  $f_0(\mathbf{p})$  είναι η κατανομή ισορροπίας (Maxwell), και  $g \ll f_0$ . Η διαταραχή παραμένει μικρή στις επόμενες στιγμές, βεβαίως, ώστε οι εξισώσεις μπορούν να γραμμικοποιηθούν. Θα αναζητήσουμε την συνάρτηση κατανομής με την μορφή

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) + \delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (34.2)$$

Για την μικρή διόρθωση  $\delta f$  και το δυναμικό  $\phi(t, \mathbf{r})$  του αυτοσυντηρούμενου πεδίου (self-consistent field) (μια ποσότητα της ίδιας τάξης μικρότητας) βρίσκουμε ένα σύνολο εξισώσεων που αποτελούν την εξίσωση μεταφοράς

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} + e \nabla \phi \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (34.3)$$

και την εξίσωση Poisson

$$\Delta \phi = 4\pi e \int \delta f d^3p \quad (34.4)$$

(το φορτίο ηλεκτρονίων στην ισορροπία αντισταθμίζεται από το φορτίο των ιόντων).

Αφού αυτές οι εξισώσεις είναι γραμμικές και δεν περιλαμβάνουν ξεκάθαρα τις συντεταγμένες, οι απαιτούμενες συναρτήσεις  $\delta f$  και  $\varphi$  μπορούν να αναπτυχθούν σαν ολοκληρώματα Fourier ως προς τις συντεταγμένες, και οι εξισώσεις μπορούν να γραφτούν ξεχωριστά για κάθε συνιστώσα Fourier. Δηλαδή, αρκεί να εξετάσει λύσεις που έχουν τη μορφή

$$\left. \begin{aligned} \delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) &= f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ \varphi(t, \mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \right\} \quad (34.5)$$

Για τέτοιες λύσεις, οι εξισώσεις (34.3) και (34.4) γίνονται

$$\partial f_{\mathbf{k}} / \partial t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} f_{\mathbf{k}} + i e \varphi_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \partial f_0 / \partial \mathbf{p} = 0, \quad (34.6)$$

$$k^2 \varphi_{\mathbf{k}} = -4\pi e \int f_{\mathbf{k}} d^3 p. \quad (34.7)$$

Για να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε ένα μονόπλευρο μετασχηματισμό Fourier, ο μετασχηματισμός  $f_{\omega \mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p})$  της συνάρτησης  $f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p})$  είναι προσδιορισμένος ως

$$f_{\omega \mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p}) dt. \quad (34.8)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από την

$$f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p}) = \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} e^{-i\omega t} f_{\omega \mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (34.9)$$

όπου το ολοκλήρωμα παίρνεται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής στο μιγαδικό πεδίο  $\omega$ , παράλληλα με και πάνω από τον πραγματικό άξονα ( $\sigma > 0$ ), και επίσης περνάει πάνω από όλες τις ανωμαλίες της  $f_{\omega \mathbf{k}}$ .

Πολλαπλασιάζουμε και τις δυο πλευρές της (34.6) με  $e^{-i\omega t}$  και ολοκληρώνουμε ως προς το  $t$ . Σημειώνοντας ότι

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} e^{i\omega t} dt &= [f_{\mathbf{k}} e^{i\omega t}]_0^{\infty} - i\omega \int_0^{\infty} f_{\mathbf{k}} e^{i\omega t} dt \\ &= -g_{\mathbf{k}} - i\omega f_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} \end{aligned}$$

όπου  $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = f_{\mathbf{k}}(0, \mathbf{p})$ , και διαιρώντας και τις δυο πλευρές της εξίσωσης με  $i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)$ , βρίσκουμε

$$f_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} = \frac{1}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \left( g_{\mathbf{k}} - i e \varphi_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (34.10)$$

Ομοίως, από (34.7),

$$k^2 \varphi_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} = -4\pi e \int f_{\omega \mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}) d^3 p. \quad (34.11)$$

Αντικατάσταση της  $\epsilon_1$  από την (34.10) στην (34.11) δίνει μια εξίσωση μόνο για  $\varphi_{\omega k}^{(+)}$ , η οποία δίνει το αποτέλεσμα

$$\varphi_{\omega k}^{(+)} = -\frac{4\pi e}{k^2 \epsilon_1(\omega, k)} \int \frac{g_k(\mathbf{p}) d^3p}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \quad (34.12)$$

με την ηλεκτρική διαπερατότητα  $\epsilon_1$  από την (29.9). Ξανά, χρησιμοποιώντας την συνιστώσα ορμής  $p_x = mv_x$  κατά μήκος του  $k$ , όπως στην § 29, μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτό τον τύπο ως

$$\varphi_{\omega k}^{(+)} = -\frac{4\pi e}{k^2 \epsilon_1(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_k(p_x) dp_x}{i(kv_x - \omega)} \quad (34.13)$$

$$g_k(p_x) = \int g_k(\mathbf{p}) dp_y dp_z$$

Για να καθορίσουμε την χρονική εξάρτηση του δυναμικού όσον αφορά τον τύπο της αναστροφής

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} e^{i\omega t} \varphi_{\omega k}^{(+)} d\omega, \quad (34.14)$$

είναι απαραίτητο πρώτα να καθιερώσουμε τις αναλυτικές ιδιότητες της  $\varphi_{\omega k}$  ως μια συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $\omega$ .

Μια έκφραση της μορφής

$$\varphi_{\omega k}^{(+)} = \int_0^{\infty} \varphi_k(t) e^{i\omega t} dt$$

ως συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $\omega$  έχει σημασία μόνο στο άνω ημιεπίπεδο. Το ίδιο ισχύει αντίστοιχα για την έκφραση (34.13), όπου η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος μια καμπύλης (ο πραγματικός άξονας  $p$ ) η οποία περνάει κάτω από τον πόλο  $p_x = m\omega/k$ . Έχουμε δει στην §29 ότι η συνάρτηση της μεταβλητής  $\omega$  που προσδιορίζεται από ένα τέτοιο ολοκλήρωμα, όταν συνεχίσει αναλυτικά στο κάτω ημιεπίπεδο, έχει ανωμαλίες μόνο στις ανωμαλίες της  $g_k(p_x)$ . Θα υποθέσουμε ότι  $g_k(p_x)$  σαν συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $p_x$  είναι μια πλήρη συνάρτηση (π.χ. δεν έχει ανωμαλίες στο πεπερασμένο  $p_x$ ). Τότε το ολοκλήρωμα που λάβαμε υπόψη επίσης προσδιορίζει μια πλήρη συνάρτηση του  $\omega$ .

Έχει σημειωθεί στην §31 ότι η ηλεκτρική διαπερατότητα  $\epsilon_1$  ενός Μαξγουελιανού πλάσματος είναι μια πλήρη συνάρτηση του  $\omega$ . Συνεπώς η συνάρτηση  $\varphi_{\omega k}$  αναλυτική σε όλο το επίπεδο  $\omega$ , είναι ο λόγος των δυο πλήρων συναρτήσεων. Συνεπώς έπεται ότι οι μόνες ανωμαλίες (πόλοι) της  $\varphi_{\omega k}$  είναι τα μηδενικά στον παρανομαστή της, π.χ. της  $\epsilon_1(\omega, k)$ .

Αυτά τα ορίσματα οδηγούν στην ασυμπτωτική μορφή στην οποία το δυναμικό  $\varphi_k(t)$  μειώνεται για μεγάλες τιμές του χρόνου  $t$ . Στον τύπο αντιστροφής (34.14), η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος μια οριζόντιας γραμμής στο επίπεδο  $\omega$ . Παρόλα αυτά, αν  $\varphi_{\omega k}$  θεωρηθεί ότι είναι η αναλυτική συνάρτηση και συνεπώς προσδιορίζεται σε όλο το επίπεδο, μπορούμε να μετακινήσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο κάτω ημιεπίπεδο με τέτοιο τρόπο ώστε να μην περάσει από κανένα από τους πόλους της συναρτήσεως. Ας θεωρήσουμε ότι  $\omega_k = \omega'_k + i\omega''_k$  είναι η ρίζα της  $\epsilon_1(\omega, k) = 0$  που έχει το μικρότερο (σε μέγεθος) φανταστικό μέρος, π.χ. που βρίσκεται πιο κοντά στον πραγματικό άξονα. Το ολοκλήρωμα (34.14) παίρνεται κατά ήκος μιας καμπύλης αρκετά μακριά κάτω από το σημείο  $\omega = \omega_k$  και περνάει γύρω από αυτό το σημείο (και γύρω από άλλους πόλους που βρίσκονται γύρω του) με τον τρόπο που δείχνει το Σχήμα. 9. Τότε μόνο το υπόλοιπο στον πόλο  $\omega_k$  έχει σημασία στο ολοκλήρωμα (όταν  $t$  είναι μεγάλο). Τα εναπομείναντα μέρη του ολοκληρώματος, συμπεριλαμβανομένου και εκείνου κατά μήκος του οριζόντιου τμήματος της καμπύλης, είναι εκθετικά μικρά σε σύγκριση με εκείνο το υπόλοιπο,

αφού το ολοκλήρωμα περιέχει ένα παράγοντα  $e^{-i\omega t}$  ο οποίος μειώνεται ταχύτητα καθώς αυξάνεται το  $|\text{Im } \omega|$ . Συνεπώς ο ασυμπτωτικός νόμος της μείωσης του δυναμικού δίνεται από

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) \propto e^{-i\omega_k t} e^{-|\omega_k| t}, \quad (34.15)$$

π.χ. η διαταραχή του πεδίου είναι εκθετικά αποσβενούμενη καθώς περνά ο χρόνος, με ρυθμό απόσβεσης  $\gamma_{\mathbf{k}} = |\text{Im } \omega_{\mathbf{k}}|$ .

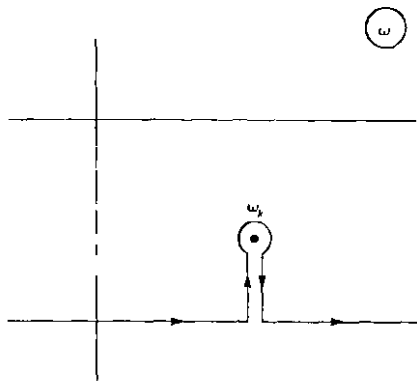


FIG. 9.

Για διαταραχές μεγάλου μήκους κύματος ( $ka_e \gg 1$ ), η συχνότητα  $\omega_{\mathbf{k}}$  και ο ρυθμός απόσβεσης  $\gamma_{\mathbf{k}}$  είναι ίδιοι όπως και για τα κύματα πλάσματος, και δίνονται από τις (32.5) και (32.6). Ο ρυθμός απόσβεσης για τέτοιες διαταραχές είναι εκθετικά μικρός. Στην αντίθετη περίπτωση διαταραχών μικρού μήκους κύματος, όταν  $ka_e \sim 1$ , η απόσβεση δεν είναι ισχυρή, και το  $\gamma_{\mathbf{k}}$  μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερο από  $\omega_{\mathbf{k}}$ .

Τέλος, ας θεωρήσουμε τις ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής των ηλεκτρονίων. Η απαραίτητη συνάρτηση  $f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p})$  βρίσκεται αντικαθιστώντας την (34.10) στο ολοκλήρωμα (34.9). Εκτός από τους πόλους στο κάτω ημιεπίπεδο που προκύπτουν από την  $\varphi_{\omega_{\mathbf{k}}}$ , η συνάρτηση προς ολοκλήρωση (integrand) έχει ένα πόλο στο σημείο  $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  στον πραγματικό άξονα. Αυτός ο πόλος καθορίζει την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος για μεγάλο  $t$ . Το υπόλοιπο εκεί δίνει

$$f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p}) \propto e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} t}. \quad (34.16)$$

Συνεπώς η διαταραχή της συνάρτησης κατανομής δεν αποσβένεται με το πέρασμα του χρόνου, αλλά η κατανομή γίνεται μια όλο και περισσότερο ταλαντώμενη συνάρτηση της ταχύτητας, με περίοδο ταλάντωσης  $1/kt$ . Συνεπώς η πυκνότητα διαταραχής, π.χ. το ολοκλήρωμα  $\int_{\mathbf{k}} d^3p$  αποσβένεται, όπως και το δυναμικό  $\varphi_{\mathbf{k}}$ .

Η μεταβολή της συνάρτησης κατανομής σε συμφωνία με την (34.16) αφορά χρόνους όπου το πεδίο μπορεί να θεωρηθεί αποσβεσμένο. Αυτός ο τύπος αντιστοιχεί απλά στην ελεύθερη διάχυση των σωματιδίων, όπου το καθένα είναι με την σταθερή ταχύτητα του. Μια συνάρτηση του τύπου

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = g(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} t} \quad (34.17)$$

είναι η λύση της εξίσωσης μεταφοράς των ελευθέρων σωματιδίων

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (34.18)$$



με μια δεδομένη αρχική ( $t = 0$ ) κατανομή ταχύτητας και μια περιοδική ( $e^{ik \cdot r}$ ) συντεταγμένη.

### §35. Ηχώ πλάσματος (Plasma echoes)

Η θερμοδυναμική αντιστρεψιμότητα της απόσβεσης Landau εκδηλώνεται με κάποια ασυνήθιστα μη-γραμμικά φαινόμενα που ονομάζονται ηχώ πλάσματος (plasma echoes). Προκύπτουν από τις μη αποσβεσμένες ταλαντώσεις της συνάρτησης μεταφοράς (34.16) οι οποίες παραμένουν μετά την άνευ συγκρούσεων χαλάρωση (collisionless relaxation) των διαταραχών της πυκνότητας (και του πεδίου) στο πλάσμα. Είναι ουσιαστικά κινηματικής προέλευσης, και δεν συνδέονται με την ύπαρξη αυτοσυντηρούμενου ηλεκτρικού πεδίου (self-consistent electric field) στο πλάσμα. Αυτό πρώτα από όλα θα διευκρινιστεί με ένα παράδειγμα όπου ένα αέριο περιέχει αφόρτιστα σωματίδια όπου δεν υπάρχουν συγκρούσεις.

Ας θεωρήσουμε ότι η διαταραχή στο αέριο γίνεται την αρχική στιγμή, έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς, που παραμένει Μαξγουελιανή σε σχέση με τις ταχύτητες σε κάθε σημείο στον χώρο, να μεταβάλλεται περιοδικά στην  $x$  διεύθυνση.

$$\delta f = A_1 \cos k_1 x \cdot f_0(p) \quad \text{at } t = 0; \quad (35.1)$$

Σε αυτή την ενότητα,  $p = mu$  δηλώνει την συνιστώσα  $x$  της ορμής, και η συνάρτηση κατανομής θεωρείται ήδη ολοκληρωμένη ως προς  $p_y$  και  $p_z$ . Η διαταραχή της πυκνότητας του αερίου, π.χ. το ολοκλήρωμα  $\int \delta f \cdot dp$ , μεταβάλλεται κατά τον ίδιο τρόπο στην  $x$  διεύθυνση για  $t = 0$ . Η διαταραχή της συνάρτησης κατανομής μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο

$$\delta f = A_1 \cos k_1(x - vt) \cdot f_0(p), \quad (35.2)$$

που αντιστοιχεί στην ελεύθερη κίνηση κάθε σωματιδίου στην  $x$  διεύθυνση με την δική του ταχύτητα  $u$ . Η διαταραχή πυκνότητας, παρόλα αυτά, αποσβένεται (σε χρόνο  $\sim 1/k_1 u_T$ ) επειδή το ολοκλήρωμα  $\int \delta f dp$  γίνεται μικρό από τον παράγοντα ταλάντωσης της ταχύτητας (speed-oscillatory factor)  $\cos k_1(x - ut)$  στην συνάρτηση ολοκλήρωσης. Η ασυμπτωτική μορφή της απόσβεσης στις χρονικές στιγμές  $t \sim 1/k_1 u_T$  δίνεται από την

$$\delta N = \int \delta f dp \propto \exp(-\frac{1}{2} k_1^2 v_T^2 t^2), \quad (35.3)$$

με το ολοκλήρωμα να υπολογίζεται από την μέθοδο σαρμαροειδούς σημείου (saddle-point method).

Τώρα ας θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση κατανομής διαμορφώνεται πάλι την χρονική στιγμή  $t = \tau \sim 1/k_1 u_T$ , με πλάτος  $A$  και ένα καινούριο κυματριθμό  $k_2 > k_1$ . Η προκύπτουσα διαταραχή πυκνότητας είναι και αυτή με την σειρά της αποσβεσμένη (σε χρόνο  $\sim 1/k_2 u_T$ ), αλλά επανεμφανίζεται σε χρόνο

$$\tau' = k_2 \tau / (k_2 - k_1), \quad (35.4)$$

αφού η δεύτερη διαμόρφωση δημιουργεί στην συνάρτηση κατανομής για  $t = \tau$  μια δευτέρας τάξης όρο της μορφής

$$\delta f^{(2)} = A_1 A_2 \cos(k_1 x - k_1 v \tau) \cos k_2 x \cdot f_0(p), \quad (35.5)$$

του οποίου με επιπλέον ανάπτυξη στο  $t > \tau$  αλλάζει σε

$$\begin{aligned} \delta f^{(2)} &= A_1 A_2 f_0(p) \cos[k_1 x - k_1 v t] \cos[k_2 x - k_2 v(t - \tau)] \\ &= \frac{1}{2} A_1 A_2 f_0(p) \{ \cos[(k_2 - k_1)x - (k_2 - k_1)v t + k_2 v \tau] \\ &\quad + \cos[(k_2 + k_1)x - (k_2 + k_1)v t + k_2 v \tau] \}. \end{aligned}$$

Τώρα βλέπουμε ότι στο  $t = \tau$  η εξάρτηση του πρώτου όρου στη  $u$  από την ταλάντωση εξαφανίζεται, έτσι ώστε αυτός ο όρος έχει πεπερασμένη συνεισφορά στην διαταραχή της πυκνότητας του αερίου με αριθμό κυμάτων (wave number)  $k_2 - k_1$ . Η προκύπτουσα ηχώ (echo) τότε αποσβένεται σε χρόνο  $\sim 1/v\tau (k_2 - k_1)$ , και το τελικό στάδιο αυτής της απόσβεσης ακολουθεί ένας νόμος όμοιος με τον (35.3).

Ας θεωρήσουμε τώρα αυτή την επίδραση σε ένα πλάσμα ηλεκτρονίων (R. W. Gould, T. M. O'Neil και J. H. Malmberg, 1967). Ο μηχανισμός είναι όπως και πριν, αλλά ο συγκεκριμένος νόμος απόσβεσης έχει μεταβληθεί λόγω της επίδρασης του αυτοσυντηρούμενου πεδίου (self-consistent field).

Θα υποθέσουμε ότι οι διαταραχές προκαλούνται από παλμούς από ένα εξωτερικό δυναμικό  $\varphi^{ex}$ , εξαιτίας "εξωτερικών" φορτίων ("extrinsic" charges), που εφαρμόζονται στο πλάσμα σε χρόνους  $t = 0$  και  $\tau$ :

$$\varphi^{ex} = \varphi_1 \delta(t) \cos k_1 x + \varphi_2 \delta(t - \tau) \cos k_2 x; \quad (35.6)$$

Εδώ θεωρείται ότι  $k_2 > k_1$  και  $\tau < 1/k_1 v_T, 1/\gamma(k_1)$  με  $\gamma(k)$  τον ρυθμό απόσβεσης Landau.

Η διαταραχή της συνάρτησης κατανομής ( $f = f_0 + \delta f$ ) ικανοποιεί την άνευ συγκρούσεων εξίσωση μεταφοράς (collisionless transport equation), η οποία με τον όρο δεύτερης τάξης είναι

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v \frac{\partial \delta f}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{df_0}{dp} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta f}{\partial p}. \quad (35.7)$$

Το δυναμικό  $\varphi$  του πεδίου που αναπτύσσεται στο πλάσμα, συμπεριλαμβανομένου του "εξωτερικού" μέρους ("extrinsic" part)  $\varphi^{ex}$ , ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta(\varphi - \varphi^{ex}) = 4\pi e \int \delta f dp. \quad (35.8)$$

Θα αναζητήσουμε την λύση αυτών των εξισώσεων ως ολοκληρώματα Fourier:

$$\begin{aligned} \delta f &= \int f_{\omega' k'} e^{i(k' x - \omega' t)} \frac{d\omega' dk'}{(2\pi)^2}, \\ \varphi &= \int \varphi_{\omega'' k''} e^{i(k'' x - \omega'' t)} \frac{d\omega'' dk''}{(2\pi)^2}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις, πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις με  $e^{-i(kx - \omega t)}$  και ολοκληρώνοντας ως προς  $dx dt$ , παίρνουμε

$$(k\nu - \omega)f_{\omega k} + ek\varphi_{\omega k} df_0/dp = -e \int (k - k')\varphi_{\omega - \omega', k - k'} \frac{df_{\omega' k'}}{dp} \frac{d\omega' dk'}{(2\pi)^2}, \quad (35.9)$$

$$-k^2\varphi_{\omega k} = 4\pi e \int f_{\omega k} dp - k^2\varphi_{\omega k}^{\text{ex}}, \quad (35.10)$$

όπου

$$\varphi_{\omega k}^{\text{ex}} = \pi\varphi_1[\delta(k + k_1) + \delta(k - k_1)] + \pi\varphi_2[\delta(k + k_2) + \delta(k - k_2)]e^{i\omega\tau}$$

Στην γραμμική προσέγγιση, π.χ. όταν το δεξιό μέλος της (35.9) παραβλέπεται, η λύση αυτών των εξισώσεων είναι

$$f_{\omega k}^{(1)} = -e \frac{df_0}{dp} \frac{k}{k\nu - \omega} \varphi_{\omega k}^{(1)}, \quad \varphi_{\omega k}^{(1)} = \varphi_{\omega k}^{\text{ex}}/\epsilon_1(\omega, k), \quad (35.11)$$

όπου  $\epsilon_1$  είναι η ηλεκτρική διαπερατότητα (29.10). Αυτή η λύση αντιστοιχεί σε διαταραχές που αποσβένονται από  $t = 0$  και  $t = \tau$ , με αντίστοιχους ρυθμούς απόσβεσης  $\gamma(k_1)$  και  $\gamma(k_2)$ .

Στην δεύτερη προσέγγιση, πρέπει να αντικαταστήσουμε την (35.11) στο αριστερό μέρος της (35.9), καταλήγοντας για τους όρους δεύτερης τάξης στις διαταραχές της συνάρτησης κατανομής και του δυναμικού στις εξισώσεις

$$(k\nu - \omega)f_{\omega k}^{(2)} + ek\varphi_{\omega k}^{(2)} df_0/dp = dI_{\omega k}/dp, \quad (35.12)$$

$$k^2\varphi_{\omega k}^{(2)} = -4\pi e \int f_{\omega k}^{(2)} dp, \quad (35.13)$$

$$I_{\omega k} = -e \int (k - k')\varphi_{\omega - \omega', k - k'}^{(1)} f_{\omega' k'}^{(1)} d\omega' dk'/(2\pi)^2. \quad (35.14)$$

Η εν λόγω επίδραση, δηλαδή η ηχώ (echo) με αριθμό κυμάτων (wave number)  $k_2 - k_1$ , θα περιλαμβάνεται στους όρους στ δεξιό μέλος της (35.12) το οποίο εμπλέκει την  $\delta(k - (k_2 - k_1))$ . Ας μαζέψουμε τους όρους αυτού του τύπου στην  $I_{\omega k}$ . Στο χρόνο  $t = \tau$ , η διαταραχή  $\varphi$  που οφείλεται στον παλμό  $\varphi_1$  που εφαρμόζεται την χρονική στιγμή  $t = 0$  είναι ήδη αποσβεσμένη. Είναι συνεπώς φανερό ότι, κατά την αντικατάσταση της (35.11) στην (35.14), πρέπει να λάβουμε υπόψη μόνο τον όρο  $\varphi_2$  στον όρο

Οι σχετικοί όροι της μορφής

$$I_{\omega k} = I_{\omega}(k_1, k_2)\delta(k - k_2 + k_1) + I_{\omega}(-k_1, -k_2)\delta(k + k_2 - k_1), \quad (35.15)$$

προκύπτουν από τους όρους στην  $I_{\omega k}$  που περιέχει το  $\varphi_1$ . Αφού πραγματοποιήσουμε την ολοκλήρωση ως προς  $dk'$  στην (35.14), βρίσκουμε ως αποτέλεσμα

$$I_{\omega}(k_1, k_2) = \frac{1}{4} e^2 \varphi_1 \varphi_2 k_1 k_2 \frac{df_0}{dp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega - \omega')\tau} d\omega'}{(k_1\nu + \omega')\epsilon_1(\omega', k_1)\epsilon_1(\omega - \omega', k_2)}, \quad (35.16)$$

όπου η μεταβλητή ολοκλήρωσης  $\omega'$  πρέπει να γίνει κατανοητή ως συνήθως ως  $\omega' + i0$ .

Το ολοκλήρωμα (35.16) μπορεί να υπολογιστεί βασιζόμενοι στην υπόθεση ότι το  $\tau$  είναι μεγάλο ( $\tau \gg 1/k_1\tau, 1/\gamma$ ). Για να γίνει αυτό μετακινούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο κάτω μιγαδικό ημιεπίπεδο  $\omega'$ . Η καμπύλη πρέπει πάλι να περάσει πάνω από τους πόλους και συνεπώς δημιουργεί βρόγχο γύρω από αυτούς ("looped round"). Αυτά είναι τα μηδενικά των συναρτήσεων  $\epsilon_1$  και στο σημείο  $\omega' = -k_1u - i0$ . Τα πρώτα έχουν ένα μη μηδενικό αρνητικό μέρος  $-\gamma(k_1)$  ή  $-\gamma(k_2)$ , και η κατανομή τους στο ολοκλήρωμα (τα υπόλοιπα στους πόλους) αποσβένονται καθώς έχουμε  $e^{-\gamma\tau}$  όσο αυξάνεται το  $\tau$ . Μια μη αποσβεσμένη συνεισφορά προέρχεται μόνο από τον πραγματικό πόλο  $\omega' = -k_1u - i0$ . Συνεπώς έχουμε

$$I_{\omega}(k_1, k_2) = -e^2 \cdot \frac{1}{2} i\pi \frac{df_0}{dp} \frac{\varphi_1 \varphi_2 k_1 k_2 e^{i(\omega + k_1)\tau}}{\epsilon_1(-k_1v, k_1)\epsilon_1(\omega + k_1v, k_2)} \quad (35.17)$$

Επιστρέφοντας στις εξισώσεις (35.12) και (35.13), και αντικαθιστώντας από την πρώτη στην δεύτερη, βρίσκουμε

$$\varphi_{\omega k}^{(2)} = -\frac{4\pi e}{k^2 \epsilon_1(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI_{\omega k}}{dp} \frac{dp}{kv - \omega - i0} \quad (35.18)$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο  $dI_{\omega k}/dp$ , μόνο ο εκθετικός παράγοντας στην (35.17) θα διαφοριστεί, αφού  $k_1u\tau \gg 1$ .

Τώρα συλλέγοντας τις εκφράσεις (35.15)-(35.18) και εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, βρίσκουμε το απαραίτητο δυναμικό ηχούς (echo potential) με κυματριθμό  $k_3 = k_2 - k_1$ :

$$\varphi^{(2)}(t, x) = \text{re}\{A(t)e^{ik_3x}\}. \quad (35.19)$$

Το πλάτος  $A(t)$  θα γραφτεί στο ασυμπτωτικό όριο ως  $t - \tau \rightarrow \infty$ . Σε εκείνο το όριο, το ολοκλήρωμα σε σχέση με το  $\omega$  καθορίζεται μόνο από το υπόλοιπο της συνάρτησης που ολοκληρώνεται στους πόλους  $\omega = k_3u - i0$ . Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$A(t) = -i\pi e^3 \varphi_1 \varphi_2 \tau \frac{k_1^2 k_2}{k_3^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0}{dp} \frac{e^{-i(k_3(t-\tau'))} dp}{\epsilon_1(k_3v, k_3)\epsilon_1(-k_1v, k_1)\epsilon_1(k_2v, k_2)}, \quad (35.20)$$

όπου  $\tau' = k_2\tau/k_3$ .

Αυτή η έκφραση, το πλάτος ηχούς (echo amplitude), είναι μέγιστη στο  $t = \tau'$ , και η μέγιστη τιμή της είναι ανάλογη του  $\tau$ , τον χρονικό διάστημα ανάμεσα στους δυο παλμούς. Το  $A(t)$  μειώνεται και στις δυο πλευρές του μεγίστου, αλλά με διαφορετικό τρόπο. Στο όριο καθώς το  $t - \tau' \rightarrow \infty$ , το ολοκλήρωμα (35.20) καθορίζεται από το υπόλοιπο της συνάρτησης που ολοκληρώνεται (integrand) στους πόλους με το αρνητικό φανταστικό μέρος με την μικρότερη τιμή μεγέθους, το οποίο βρίσκεται στο  $\epsilon_1(k_3u, k_3) = 0$ , με το φανταστικό μέρος να είναι  $\text{im } u = -\gamma(k_3)/k_3$ . Στην άλλη πλευρά του μεγίστου, με το  $t - \tau' \rightarrow -\infty$ , το ολοκλήρωμα καθορίζεται από το υπόλοιπο στους πόλους στο  $\epsilon_1(-k_1u, k_1) = 0$ , για το οποίο  $\text{im } u = \gamma(k_1)/k_1$ . Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρέπει να μετακινηθεί τότε στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο του  $u$ . Το αποτέλεσμα είναι

$$\left. \begin{aligned} A(t) &\propto \exp[-\gamma(k_3)(t - \tau')] \quad \text{as } t - \tau' \rightarrow \infty, \\ A(t) &\propto \exp[-(k_3/k_1)\gamma(k_1)(\tau' - t)] \quad \text{as } t - \tau' \rightarrow -\infty. \end{aligned} \right\} \quad (35.21)$$

Συνεπώς το πλάτος της ηχούς (echo amplitude), πριν να φτάσει το μέγιστό της, αυξάνει με ρυθμό αύξησης  $k_3\gamma(k_1)/k_1$ , και πέρα του μεγίστου μειώνεται με ρυθμό  $\gamma(k_3)$ . Το σχήμα 10 απεικονίζει αυτή την συμπεριφορά. Οι πρώτες δυο καμπύλες δείχνουν την μεταβολή του δυναμικού των δυο παλμών που εφαρμόζονται στα  $t = 0$  και  $t = \tau$ . Η τρίτη καμπύλη απεικονίζει την μορφή της ηχούς. Δίπλα στις καμπύλες σημειώνονται οι αντίστοιχοι ρυθμοί αύξησης και μείωσης.

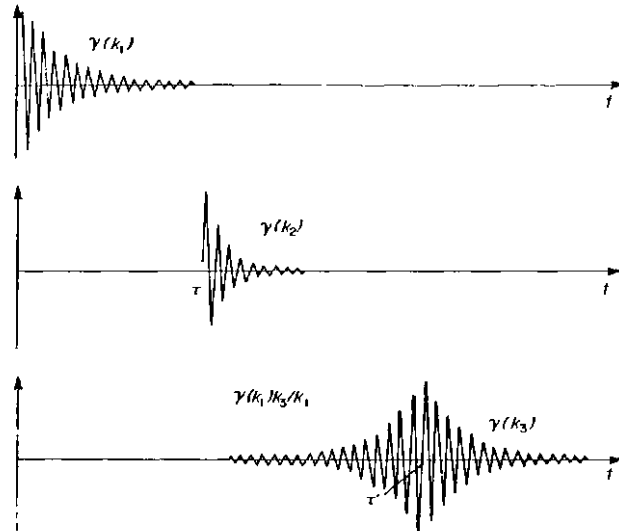


Fig. 10.

Αυτοί οι υπολογισμοί έχουν αμελητέες συγκρούσεις. Συνεπώς η συνθήκη για να ισχύει ο ποσοτικός τύπος (35.20) είναι ότι σε μια δεδομένη στιγμή  $t$  οι ταλαντώσεις της συνάρτησης μεταφοράς δεν έχουν ακόμα αποσβεστεί λόγω των συγκρούσεων. Μέσω των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν στην §41. Πρόβλημα, μπορούμε να σχηματίσουμε την συνθήκη ως

$$v(v_T)(kv_T)^2 t^3 \ll 1,$$

όπου  $v(u_1)$  είναι η μέση συχνότητα των συγκρούσεων Coulomb για ένα ηλεκτρόνιο.

### **§36. Αδιαβατική σύλληψη ηλεκτρονίων (Adiabatic electron capture)**

Ας ερευνήσουμε την κατανομή των ηλεκτρονίων του πλάσματος σε ένα αργά εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Ας θεωρήσουμε ότι  $L$  είναι η τάξη μεγέθους της έκτασης του πεδίου και  $\tau$  ο χαρακτηριστικός χρόνος της μεταβολής του πεδίου. Θα υποθέσουμε ότι

$$\tau \gg L/\bar{v}_e, \quad (36.1)$$

και επίσης ότι το  $\tau$  είναι μικρό σε σχέση με τον μέσο ελεύθερο χρόνο των ηλεκτρονίων, ώστε το πλάσμα να είναι ξανά άνευ συγκρούσεων.

Εξαιτίας της συνθήκης (36.1), το πεδίο μπορεί να θεωρηθεί στατικό όταν περνάει ένα ηλεκτρόνιο μέσα από αυτό. Για την ίδια ακρίβεια, η συνάρτηση κατανομής των ηλεκτρονίων στο πεδίο είναι στατική. Έχουμε παρατηρήσει στο τέλος της ενότητας §27 ότι η λύση της άνευ συγκρούσεων εξίσωσης μεταφοράς (collisionless transport equation) εξαρτάται μόνο από το ολοκλήρωμα της

κίνησης του σωματιδίου. Για μια στατική κατανομή, αυτές μπορούν να είναι μόνο αυτές που δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο.

Θα πάρουμε μόνο την μονοδιάστατη περίπτωση, στην οποία το δυναμικό πεδίου  $\varphi$  εξαρτάται μόνο από την συντεταγμένη  $x$ . Αφού η κίνηση στις  $y$  και  $z$  διευθύνσεις τότε δεν έχουν σημασία, θα θεωρήσουμε μόνο την συνάρτηση κατανομής  $f$  αναφορικά με την ορμή  $p_x$  (και την  $x$  συντεταγμένη).

Στην μονοδιάστατη περίπτωση, η εξίσωση της κίνησης έχει δυο ολοκληρώματα, από τα οποία μόνο το ένα εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο (σε ένα σταθερό πεδίο), συγκεκριμένα η ηλεκτρονική ενέργεια

$$\epsilon = p_x^2/2m + U(x), \quad (36.2)$$

όπου  $U(x) = -e\varphi(x)$ . Συνεπώς η στατική συνάρτηση κατανομής θα εξαρτάται από τα  $p_x$  και  $x$  μόνο στον συνδυασμό (36.2):

$$f = f[\epsilon(x, p_x)]. \quad (36.3)$$

Η μορφή της συνάρτησης  $f(\ )$  εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες .

Ας θεωρήσουμε ότι το πεδίο  $U(x)$  σχηματίζει ένα φράγμα δυναμικού (Σχήμα. 11b). Η συνάρτηση  $f(\ )$  τότε καθορίζεται από την κατανομή των ηλεκτρονίων που φτάνουν στο φράγμα από το άπειρο. Για παράδειγμα, αν τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται μακριά από το φράγμα και στις δυο κατευθύνσεις έχουν κατανομή ισορροπίας, ομοιόμορφη στον χώρο, με θερμοκρασία  $T_e$ , τότε η κατανομή Boltzmann εμφανίζεται σε όλο τον χώρο:

$$f = \frac{N_0}{(2\pi m T_e)^{1/2}} \exp(-\epsilon/T_e). \quad (36.4)$$

Η πυκνότητα του αερίου από ηλεκτρόνια κατανέμεται παντού σύμφωνα με τον τύπο

$$N_e(x) = N_0 \exp[-U(x)/T_e], \quad (36.5)$$

όπου  $N_0$  είναι η πυκνότητα μακριά από το φράγμα.

Επειτα ας υποθέσουμε ότι το πεδίο είναι ένα πηγάδι δυναμικού (Σχήμα. 11b). Τότε, η κατανομή των ηλεκτρονίων με θετική ενέργεια , προσδιορίζεται ξανά από εκείνη των σωματιδίων που έρχονται από το άπειρο. Με κατανομή ισορροπίας στο άπειρο, τα ηλεκτρόνια με  $\epsilon > 0$  έχουν κατανομή Boltzmann σε όλο το χώρο. Αλλά σε αυτή την περίπτωση, όπως και τέτοια σωματίδια, υπάρχουν κάποια με  $\epsilon < 0$ , τα οποία εκτελούν μια πεπερασμένη κίνηση στο πηγάδι δυναμικού. Είναι παγιδευμένα. Στο άπειρο δεν υπάρχουν σωματίδια με  $\epsilon < 0$ , και έτσι τα προηγούμενα ορίσματα (arguments) στα οποία η ενέργεια θεωρούνταν αυστηρά μια διατηρημένη ποσότητα δεν αρκούν να δώσουν την κατανομή των παγιδευμένων σωματιδίων. Πρέπει επίσης να λάβουμε υπόψη την μεταβολή της ενέργειας σε ένα πεδίο που δεν είναι αυστηρά στατικό, και συνεπώς αυτή η κατανομή βρίσκεται να εξαρτάται γενικά από τα προηγούμενα συμβάντα, συγκεκριμένα από τον τρόπο που έχει εφαρμοστεί το πεδίο (A. V. Gurevich, 1967).

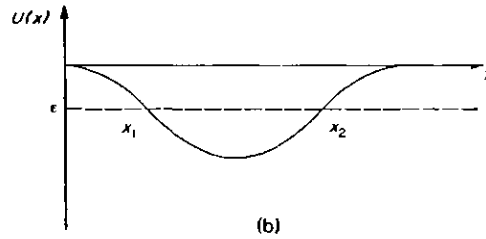
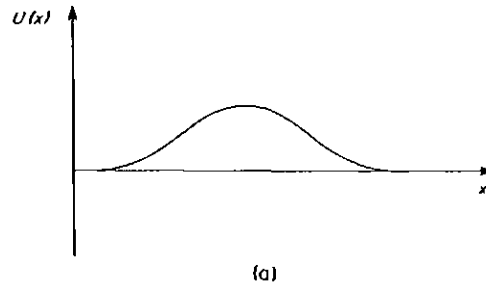


FIG. 11.

Από την συνθήκη (36.1), το πεδίο μεταβάλλεται μόνο ελαφρά κατά την διάρκεια της πεπερασμένης κίνησης των παγιδευμένων σωματιδίων. Σε τέτοιες περιπτώσεις υπάρχει διατηρημένη αδιαβατική αναλλοίωτη (adiabatic invariant), το ολοκλήρωμα

$$I(t, \epsilon) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_{x_1}^{x_2} [2m(\epsilon - U(t, x))]^{1/2} dx, \quad (36.6)$$

που έχει παρθεί ανάμεσα στα όρια της κίνησης (για δεδομένα  $\epsilon$  και  $t$ ). Αυτή η ποσότητα δρα εδώ ως ένα ολοκλήρωμα κίνησης, με το οποίο θα εκφραστεί η συνάρτηση κατανομής των παγιδευμένων σωματιδίων

$$f_{tr} = f_{tr}(I(t, \epsilon)), \quad (36.7)$$

η ενέργεια  $\epsilon$  με την σειρά της που υποθέτουμε εκφράζεται μέσω των  $x$  και  $p_x$  από την (36.2). Η μορφή της συνάρτησης (36.7) καθορίζεται από το γεγονός ότι η συνάρτηση κατανομής είναι μια συνεχής συνάρτηση του  $\epsilon$  όταν το πεδίο εφαρμόζεται αργά. Συνεπώς, για την τιμή περιορισμού της ενέργειας των παγιδευμένων σωματιδίων, η συνάρτηση  $f_{tr}(I)$  πρέπει να είναι η συνάρτηση κατανομής για σωματίδια που εκτελούν μια άπειρη κίνηση πάνω από το παραπάνω πηγάδι.

Η περίπτωση του πηγαδιού δυναμικού όπως φαίνεται στο Σχήμα 11b είναι, παρόλα αυτά, ιδιαίτερα απλή επειδή η ενέργεια περιορισμού έχει την συνεχή τιμή μηδέν αν το πεδίο εφαρμόζεται σταδιακά. Τότε έπεται από την οριακή συνθήκη που έχουμε δηλώσει ότι η  $f_{tr}$  μειώνεται σε μια σταθερά:

$$f_{tr} = f(0), \quad (36.8)$$

όπου  $f(\epsilon)$  είναι η συνάρτηση κατανομής για σωματίδια πάνω από το πηγάδι. Τώρα θα προσδιορίσουμε την χωρική κατανομή των ηλεκτρονίων σε αυτή την περίπτωση αν  $f(\epsilon)$  είναι η συνάρτηση Boltzmann (36.4).

Προσθέτοντας τους αριθμούς των ηλεκτρονίων με  $\epsilon > 0$  και  $\epsilon < 0$  μας δίνει

$$N_e = 2 \int_{p_1}^{\infty} f(\epsilon) dp_x + 2 \int_0^{p_1} f(0) dp_x,$$

$$p_1 = (2m|U|)^{1/2};$$

οι παράγοντες 2 λαμβάνουν υπόψη σωματίδια με  $p_x > 0$  και  $p_x < 0$ . Αντικαθιστώντας  $f(\epsilon)$  από την (36.4) παίρνουμε

$$N_e(t, x) = N_0 \{ e^{U/T_e} [1 - \Phi(\sqrt{|U|/T_e})] + 2\sqrt{|U|/\pi T_e} \}, \quad (36.9)$$

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-u^2} du. \quad (36.10)$$

Όταν  $\xi \gg 1$ , αναπτύσσοντας την συνάρτηση προς ολοκλήρωση στην (36.10) σε δυνάμεις του  $u$ , βρίσκουμε

$$\Phi(\xi) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \xi - \frac{1}{3}\xi^3 \right).$$

Η κατανομή των ηλεκτρονίων που παγιδεύονται σε ένα ρηχό πηγάδι ( $|U| \ll T_e$ ) συνεπώς είναι

$$N_e = N_0 \left[ 1 + \frac{|U|}{T_e} - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left( \frac{|U|}{T_e} \right)^{3/2} \right]. \quad (36.11)$$

Ο πρώτος διορθωτικός όρος είναι ο ίδιος όπως θα προέκυπτε από τον τύπο Boltzmann (36.5), αλλά η επόμενη διόρθωση είναι ήδη διαφορετική από την μορφή Boltzmann. Όταν  $\xi \ll 1$ , η διαφορά  $1 - \Phi(\xi)$  είναι εκθετικά μικρή,  $\approx \exp(-\xi^2)$ . Συνεπώς, για ένα βαθύ πηγάδι ( $|U| \gg T_e$ ) μόνο ο δεύτερος όρος στις αγκύλες της (36.9) είναι σημαντικός, και

$$N_e(t, x) = 2N_0(|U|/\pi T_e)^{1/2}. \quad (36.12)$$

Καθώς το  $|U|$  αυξάνει, η πυκνότητα αυξάνει ακόμα περισσότερο αργά από ότι θα επακολουθούσε από τον τύπο του Boltzmann.

### **§37. Ψευδο-ουδέτερα πλάσματα (Quasi-neutral plasmas)**

Οι εξισώσεις της δυναμικής του πλάσματος επιτρέπουν σημαντική απλοποίηση ενός συνόλου φαινομένων στα οποία οι χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους και χρόνου ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες. (1) Η χαρακτηριστική διάσταση  $L$  των ανομοιογενειών στο πλάσμα θεωρείται μεγάλη σε σχέση με το μήκος Debye των ηλεκτρονίων:

$$a_d/L \ll 1. \quad (37.1)$$

(2) Ο ρυθμός της διαδικασίας θεωρείται ότι ελέγχεται από την κίνηση των ιόντων, ώστε η χαρακτηριστική κλίμακα ταχύτητας να δίνεται από την  $u_i$ , η οποία είναι μικρή σε σύγκριση με τις ηλεκτρονικές ταχύτητες. (3) Η κίνηση των ιόντων προκαλεί μια μικρή αλλαγή στο ηλεκτρικό δυναμικό που ακολουθείται αδιαβατικά από την κατανομή ηλεκτρονίων.



Ας πούμε ότι  $\delta N_e$  και  $\delta N_i$  είναι οι αλλαγές των πυκνοτήτων ηλεκτρονίων και ιόντων στο διαταραγμένο πλάσμα. Αυτές οι μεταβολές παράγουν μια μέση μη αντισταθμισμένη πυκνότητα φορτίου  $\delta\rho = e(z\delta N_i - \delta N_e)$  στο πλάσμα. Το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στις μεταβολές καθορίζεται από την εξίσωση Poisson,

$$\Delta\varphi = -4\pi e(z\delta N_i - \delta N_e). \quad (37.2)$$

$$\left| \frac{z\delta N_i - \delta N_e}{\delta N_e} \right| \sim \frac{l}{4\pi e L^2} \left| \frac{\varphi}{\delta N_e} \right|. \quad (37.3)$$

$$\delta N_e \sim e\varphi N_e / T_e$$

$$\left| \frac{z\delta N_i - \delta N_e}{\delta N_e} \right| \sim \frac{a_e^2}{L^2} \ll 1. \quad (37.4)$$

Αυτή η ανισότητα παραμένει σε ισχύ για μια μεγάλη διαταραχή, με  $e\varphi \sim T_e$ : τότε  $\delta N_e \sim N_e$  και η (37.4) προκύπτει από την (37.3).

Συνεπώς η μη αντισταθμισμένη πυκνότητα φορτίου που οφείλεται στην διαταραχή είναι μικρή σε σύγκριση με τις διαταραχές των πυκνοτήτων των φορτίων των ηλεκτρονίων και ιόντων ξεχωριστά. Τέτοιο πλάσμα λέγεται ότι είναι ψευδο-ουδέτερο (quasi-neutral). Για τα φαινόμενα που αναφέραμε, αυτή η ιδιότητα επιτρέπει τον προσδιορισμό της κατανομής δυναμικού στο πλάσμα απλά από την εξίσωση της ψευδο-ουδετερότητας ("equation of quasi-neutrality"),

$$N_e = zN_i, \quad (37.5)$$

μαζί με την εξίσωση μεταφοράς για τα ιόντα και την εξίσωση που δίνει την αδιαβατική κατανομή των ηλεκτρονίων.

Στην αρχική στιγμή, βέβαια, (αν έχουμε ένα πρόβλημα με αρχικές καταστάσεις) οι πυκνότητες των ηλεκτρονίων μπορούν να προσδιοριστούν αυθαίρετα και δεν χρειάζεται να ικανοποιούν την ανισότητα (37.4). Το προκύπτον δυνατό ηλεκτρικό πεδίο, παρόλα αυτά, προκαλεί μια κίνηση του πλάσματος των ηλεκτρονίων, το οποίο αποκαθιστά ταχύτητα (στους χαρακτηριστικούς ηλεκτρονικούς χρόνους) την ψευδο-ουδετερότητα. Αυτή η διαδικασία στην περίπτωση της διάχυσης έχει αναλυθεί στην ενότητα §25.

Το πέρασμα από την ηλεκτροδυναμική εξίσωση (electrodynamic equation) (37.2) στην συνθήκη (37.5) δεν σημαίνει μόνο μια σημαντική απλοποίηση των εξισώσεων της δυναμικής του πλάσματος αλλά επίσης και μια θεμελιώδη αλλαγή στην δομή της διαστατικότητας τους: το δυναμικό  $\varphi$  εμφανίζεται στην εξίσωση μεταφοράς και στην κατανομή των ηλεκτρονίων μόνο ως γινόμενο με φορτίο  $e$ , και το φορτίο δεν υπάρχει καθόλου στην κατάσταση (37.5), σε αντίθεση με την εξίσωση (37.2). Συνεπώς, με την αλλαγή

$$e\varphi \rightarrow \psi, \quad (37.6)$$

το φορτίο  $e$  απαλείφεται τελείως από τις εξισώσεις, και η παράμετρος μήκους (το Debye μήκος  $a_e$ ) εξαφανίζεται με αυτό.

Μιας και οι εξισώσεις δεν περιέχουν καμία παράμετρο μήκους, αυτό-όμοιες κινήσεις του πλάσματος είναι δυνατές. Αυτές συμβαίνουν όταν δεν υπάρχουν οι παράμετροι μήκους στις αρχική και

οριακή κατάσταση, στην οποία περίπτωση όλες οι συναρτήσεις μπορούν να εξαρτώνται από τις συντεταγμένες και τον χρόνο μόνο στο συνδυασμό  $r/t$ . Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι το πλάσμα περιορίζεται αρχικά ημικώρο (half-space)  $x < 0$ . Στο χρόνο  $t = 0$ , ο περιορισμός απομακρύνεται, και το πλάσμα αρχίζει να διαστέλλεται μέσα σε ένα κενό. Τα ηλεκτρόνια αρχίζουν να κινούνται πρώτα, ώστε η πυκνότητα των ηλεκτρονίων σχηματίζει ένα μεταβατικό στρώμα κοντά στο όριο, με χαρακτηριστικό πλάτος  $\sim a_e$ . Μετά από χρόνο  $t_1 \sim a_e/uTe$ , η κίνηση των ηλεκτρονίων αποσβένεται και η ηλεκτρονική πυκνότητα ακολουθεί το δυναμικό αδιαβατικά σύμφωνα με τον τύπο Boltzmann formula. Η μεταβολή όλων των ποσοτήτων τότε ελέγχεται από την κίνηση των ιόντων. Συνεπώς, σε χρόνο  $t_2 \sim a_e/uTi$ , το όριο απλώνεται σε αποστάσεις που είναι μεγάλες σε σύγκριση με το  $a_e$ . Το πλάσμα γίνεται ψευδο-ουδέτερο, και η κίνηση είναι αυτο-όμοια (self-similar).

Μπορούμε να γράψουμε τις δυναμικές εξισώσεις για το ψευδο-ουδέτερο πλάσμα σε αναπτυγμένη μορφή, παίρνοντας την ειδική περίπτωση στην οποία η πυκνότητα ηλεκτρονίων παντού έχει κατανομή Boltzmann:

$$N_e = N_0 e^{\psi/T_e}; \quad (37.7)$$

Όπως φαίνεται στην ενότητα §36, αυτή η κατανομή δεν επηρεάζεται από ένα αργά μεταβαλλόμενο πεδίο, αν το πεδίο δεν έχει καθόλου πηγάδια δυναμικού. Από τις (37.7) και (37.5), το δυναμικό μπορεί να εκφραστεί κατευθείαν μέσω της συνάρτησης κατανομής ιόντων:

$$\begin{aligned} \psi &= T_e \log(zN_i/N_0) \\ &= T_e \log \left[ (z/N_0) \int f_i d^3p \right]. \end{aligned} \quad (37.8)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση στην εξίσωση μεταφοράς για τα ιόντα (με αυτοσυντηρούμενο πεδίο (self-consistent)  $E = -\nabla\phi$ , βρίσκουμε

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} - zT_e \frac{\partial f_i}{\partial p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \log \int f_i d^3p = 0. \quad (37.9)$$

Παρόλο που αυτή η εξίσωση είναι μη γραμμική, η λύση της δεν εξαρτάται από την μέση πυκνότητα πλάσματος: αν  $f_1(t, r)$  είναι η λύση, το ίδιο είναι και η  $Cf_1$ , με οποιοδήποτε σταθερό παράγοντα  $C$ .

### **§38. Η θεωρία των ρευστών για πλάσμα με δυο θερμοκρασίες**

Η θεωρητική αντιμετώπιση είναι ιδιαίτερα απλή για ένα πλάσμα με δυο θερμοκρασίες (a two-temperature plasma) με

$$T_e \gg T_i. \quad (38.1)$$

Έχουμε ήδη δει στην ενότητα §33 ότι σε αυτή την περίπτωση μη αποσβεσμένα κύματα ιονικά ακουστικά κύματα (ion-sound waves) μπορούν να διαδοθούν στο πλάσμα, με ταχύτητα  $\sim (T_e/M)^{1/2}$ . Αυτή η ταχύτητα είναι χαρακτηριστική της διάδοσης των διαταραχών σε πλάσματα. Μιας και είναι μεγάλη σε σύγκριση με τις θερμικές ταχύτητες των ιόντων, μέσω της (38.1), η θερμική διάδοση (thermal spread) των ταχυτήτων των ιόντων μπορεί να παραβλεφθεί στα περισσότερα προβλήματα κίνησης του πλάσματος. Η κίνηση της συνισταμένης των ιόντων του πλάσματος περιγράφεται τότε στην προσέγγιση για ένα ρευστό (one-fluid approximation) μέσω της ταχύτητας  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$ , η οποία είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση θέσης στο χώρο (και του χρόνου), και ικανοποιεί την εξίσωση

$$M \frac{dv}{dt} = ezE.$$

ή

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (ez/M) \mathbf{E}. \quad (38.2)$$

Αυτή πρέπει να συνδυαστεί με την εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \text{div}(N_i \mathbf{v}) = 0 \quad (38.3)$$

και τις εξισώσεις Poisson, οι οποίες καθορίζουν το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου  $\varphi$  (και συνεπώς το πεδίο  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ):

$$\Delta\varphi = -4\pi e(zN_i - N_e). \quad (38.4)$$

Η κατανομή ηλεκτρονίων ακολουθεί αδιαβατικά την κατανομή του πεδίου στις κινήσεις του πλάσματος με ταχύτητες  $v \ll (T_e/M)^{1/2}$  υπε. Όπως έχουμε δει στην ενότητα §36, η συγκεκριμένη έκφραση για την πυκνότητα των ηλεκτρονίων  $N_e$  τότε εξαρτάται σημαντικά από την φύση του πεδίου. Για ένα πεδίο χωρίς πηγές δυναμικού, δίνεται απλά από τον τύπο Boltzmann (37.7), ώστε η (38.4) γίνεται

$$\Delta\varphi = -4\pi e N_0 (zN_i/N_0 - e^{e\varphi/T_e}). \quad (38.5)$$

Οι εξισώσεις (38.2), (38.3) και (38.5) σχηματίζουν ένα πλήρη σύνολο για τις συναρτήσεις  $\mathbf{v}$ ,  $N$  και  $\varphi$ . Μπορούν να απλοποιηθούν περαιτέρω για ένα ψευδο-ουδέτερο πλάσμα: σε αυτή την περίπτωση, η (37.8) δίνει

$$e\varphi = T_e \log(zN_i/N_0), \quad e\mathbf{E} = -(T_e/N_i) \nabla N_i, \quad (38.6)$$

και η (38.2) μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{zT_e}{M} \frac{\nabla N_i}{N_i}. \quad (38.7)$$

Οι εξισώσεις (38.3) και (38.7) είναι πανομοιότυπες με τις μηχανικές εξισώσεις για ένα ισοθερμικό ιδανικό αέριο που έχει μάζα σωματιδίων  $M$  και θερμοκρασία  $zT_e$ . Η ταχύτητα του ήχου σε ένα τέτοιο αέριο είναι  $(zT_e/M)^{1/2}$ , σύμφωνα με την έκφραση (33.5) για την ταχύτητα των ακουστικών ιοντικών κυμάτων (ion-sound waves). Σε αυτή την προσέγγιση, δεν υπάρχει διάχυση των κυμάτων.

Η παραπάνω αναλογία με την ρευστομηχανική χρειάζεται μια σημαντική επιφύλαξη. Οι εξισώσεις της ρευστομηχανικής έχουν πάντα λύσεις πάντα συνεχείς στο χώρο. Η απουσία συνεχούς λύσης στη συνηθισμένη ρευστομηχανική δείχνει τον σχηματισμό κρουστικών κυμάτων (shock waves), π.χ. επιφάνειες στις οποίες οι φυσικές ποσότητες είναι ασυνεχείς. Στην ρευστομηχανική άνευ συγκρούσεων (collisionless fluid mechanics), δεν υπάρχουν κρουστικά κύματα, αφού οφείλεται ουσιαστικά στην διάχυση ενέργειας (energy dissipation), που σε αυτή την περίπτωση δεν συμβαίνει. Η απουσία συνεχών λύσεων τότε σημαίνει ότι η υπόθεση ενός ψευδο-ουδέτερου πλάσματος (quasi-neutral plasma) παραβιάζεται σε κάποιες περιοχές του χώρου. Σε τέτοιες περιοχές (συμβατικά ονομάζονται άνευ συγκρούσεων κρουστικά κύματα - collisionless shock waves), η εξάρτηση των φυσικών ποσοτήτων από τις συντεταγμένες και το χρόνο είναι ταλαντευόμενη (oscillatory), και το

χαρακτηριστικό μήκος κύματος αυτών των ταλαντώσεων δεν καθορίζεται μόνο από τις χαρακτηριστικές διαστάσεις του προβλήματος αλλά και από τις εσωτερικές ιδιότητες του πλάσματος, συγκεκριμένα την ακτίνα Debye (Debye radius) ( $R, Z, Sagdeev 1964$ ).

Ας επιστρέψουμε τώρα στις πιο γενικές εξισώσεις (38.2)-(38.4), οι οποίες δεν αφορούν σε ένα ψευδο-ουδέτερο πλάσμα. Μια σημαντική ιδιότητα αυτών των εξισώσεων είναι ότι έχουν μονοδιάστατες λύσεις, στις οποίες όλες οι ποσότητες εξαρτώνται από τις μεταβλητές  $t$  και  $x$  μόνο στον συνδυασμό  $\xi = x - ut$  με συνεχές  $u$ . Τέτοιες λύσεις περιγράφουν κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα  $u$  και χωρίς μεταβολή προφίλ. Αν πάμε σε ένα άλλο πλαίσιο αναφοράς όπου κινούνται με ταχύτητα  $u$  σχετικά με το αρχικό πλαίσιο αναφοράς, η κίνηση του πλάσματος γίνεται στατική. οι πιο ενδιαφέροντες λύσεις αυτού του τύπου είναι εκείνες οι περιοδικές στον χώρο και εκείνες που μειώνονται στο άπειρο και στις δυο διευθύνσεις. Οι δεύτερες είναι γνωστές ως μονήρη κύματα (solitary waves) ή σολιτόνια (solitons) (A. A. Vedenov, E. P. Velikhov and R. Z. Sagdeev 1961),

Αν ο διαφορισμός σε σχέση με το  $\xi$  υποδηλώνεται με ένα κύριο, έχουμε από την (38.2) και (38.3)

$$(v - u)v' = -(e/M)\varphi', \quad (N_1 v)' - uN_1' = 0;$$

για λόγους απλότητας, παίρνουμε  $z = 1$ . Ολοκληρώνοντας αυτές τις εξισώσεις με τις οριακές συνθήκες  $\varphi = 0, u = 0, N_1 = N_0$  καθώς  $\xi \rightarrow \infty$  βρίσκουμε

$$(e/M)\varphi = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}(u - v)^2, \quad (38.8)$$

$$N_1 = N_0 u / (u - v) = N_0 u / [u^2 - 2e\varphi/M]^{1/2}. \quad (38.9)$$

Η εξίσωση (38.4) δίνει  $\varphi'' = -4\pi e(N_1 - N_e)$  ή, μετά από πολλαπλασιασμό με  $2\varphi'$  και ολοκλήρωση.

$$\varphi'^2 = -8\pi e \int_0^\varphi [N_1(\varphi) - N_e(\varphi)] d\varphi. \quad (38.10)$$

Την συνάρτηση  $N_1(\varphi)$  την παίρνουμε από την (38.9), και η  $N_e(\varphi)$  δίνεται από τον τύπο στην ενότητα §36. Στο κύμα που θεωρήσαμε, έχουμε παντού  $\varphi > 0$ , όπως φαίνεται από την (38.8). Η ενέργεια δυναμικού του ηλεκτρονίου σε ένα τέτοιο πεδίο είναι  $U = -e\varphi < 0$ , π.χ. το πεδίο σχηματίζει ένα πηγάδι δυναμικού από ηλεκτρόνια.

Η εξίσωση (38.10) ελαχιστοποιεί το πρόβλημα καθορισμού του προφίλ του κύματος  $\varphi(\xi)$  σε αριθμητικές ολοκληρώσεις (quadratures). Η ταχύτητα  $u$  είναι άμεσα συνδεδεμένη με το πλάτος του κύματος, π.χ. η μέγιστη τιμή του  $\varphi(\xi)$ , υποδηλώνεται με το  $\varphi_m$ . Όταν  $\varphi = \varphi_m$ , πρέπει να έχουμε  $\varphi' = 0$ . Εξισώνοντας με το μηδέν το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (38.10) (και ολοκληρώνοντας τον πρώτο όρο), παίρνουμε

$$\frac{Mu^2}{e} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2e}{Mu^2} \varphi_m \right)^{1/2} \right] = \frac{1}{N_0} \int_0^{\varphi_m} N_e(\varphi) d\varphi, \quad (38.11)$$

η οποία στην θεωρία προσδιορίζει το  $u$  σαν συνάρτηση του  $\varphi_m$ . Εδώ είναι φανερό ότι πρέπει να έχουμε

$$2e\varphi_m / Mu^2 < 1. \quad (38.12)$$

Αυτή η συνθήκη γενικά θέτει ένα ανώτερο όριο στις πιθανές τιμές του πλάτους του κύματος και συνεπώς και της ταχύτητας  $u$ . Για να είναι οι συγκρούσεις αμελητέες, είναι απαραίτητο η συχνότητα  $\omega$  του πεδίου να είναι μεγάλη σε σύγκριση με τις χαρακτηριστικές συχνότητες των συγκρούσεων τόσο των ηλεκτρονίων ( $\omega_e$ ) όσο και των ιόντων ( $\omega_i$ ). Αφού  $v_e \sim (M/m)^{1/2} u_i$   $u_i$  (βλέπε §43), μια κατάσταση μπορεί να υπάρξει στην οποία  $\omega_e \ll \omega_i$ . Τότε οι συγκρούσεις ξανά δεν έχουν καμία επίδραση στην κίνηση των ιόντων και μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν μια κατανομή Boltzmann ακόμα και αν υπάρχουν πηγάδια δυναμικών.

### §39. Σολιτόνια σε ένα ασθενώς διαχεόμενο μέσο

Η ύπαρξη (σε ένα μέσο όπου δεν υπάρχει εξασθένηση) μη γραμμικών κυμάτων με στατικό προφίλ είναι στενά συνδεδεμένη με την παρουσία διάχυσης. Σε ένα μέσο χωρίς διασπορά (non-dispersing medium), το κύμα δεν μπορεί να είναι στατικό εάν η μη γραμμικότητα ληφθεί υπόψη, ο ρυθμός διάδοσης διαφόρων σημείων του προφίλ εξαρτάται από το πλάτος σε εκείνα τα σημεία, πράγμα που προκαλεί παραμόρφωση του προφίλ. Για παράδειγμα, στην δυναμική ενός ιδανικού συμπιεστού ρευστού, μη γραμμικές επιδράσεις προκαλούν βαθμιαία αύξηση στην κλίση του πρόσθιου μετώπου του κύματος. Η διασπορά, σε ότι το αφορά, προκαλεί βαθμιαία εξομάλυνση του προφίλ, και οι δυο επιδράσεις αλληλοαναιρούνται, αφήνοντας ένα στατικό προφίλ.

Σε αυτή την ενότητα, τα φαινόμενα που αναφέραμε θα ερευνηθούν γενικά για μια ευρεία κατηγορία περιπτώσεων διάδοσης κυμάτων σε μέσα χωρίς εξασθένηση και ελαφριά διασποράς και συμπεριλαμβάνοντας ελαφριά μη γραμμικότητα.

Ας θεωρήσουμε ότι  $u_0$  είναι ο ρυθμός διάδοσης του κύματος στην μη γραμμική προσέγγιση, όταν η διασπορά είναι αμελητέα. Σε αυτή την προσέγγιση, για ένα μονοδιάστατο κύμα που διαδίδεται προ μια διεύθυνση παράλληλη στον  $x$  άξονα, όλες οι ποσότητες εξαρτώνται από το  $x$  και  $t$  μόνο στον συνδυασμό  $\xi = x - u_0 t$ . Αυτή η ιδιότητα μπορεί να εκφραστεί με διαφορική μορφή ως

$$\partial b / \partial t + u_0 \partial b / \partial x = 0,$$

όπου  $b$  δηλώνει μια ποσότητα που ταλαντώνεται στο κύμα.

Μια σταθερή ταχύτητα  $u_0$  αντιστοιχεί σε μια σχέση διασποράς κύματος  $\omega = u_0 k$ . Σε ένα μέσο με διάδοση (dispersive medium), αυτή η σχέση είναι απλά ο πρώτος όρος στο ανάπτυγμα της συνάρτησης  $\omega(k)$  σε δυνάμεις της μικρής ποσότητας  $k$ . Συμπεριλαμβάνοντας τον επόμενο όρο, έχουμε

$$\omega = u_0 k - \beta k^3, \quad (39.1)$$

όπου  $\beta$  είναι μια σταθερά που στην θεωρία μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική.

Η διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει (στην γραμμική προσέγγιση) την διάδοση, σε μια διεύθυνση, ενός κύματος με τέτοια διασπορά είναι

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial b}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} = 0,$$

αφού αυτό δίνει (39.1) για ένα κύμα στο οποίο  $b = \exp(-i\omega t + ikx)$ .

Τέλος, η συμπεριληψη της μη γραμμικότητας κάνει τους όρους μεγαλύτερης τάξης στο  $b$  να εμφανίζονται στην εξίσωση. Αυτοί οι όροι πρέπει σίγουρα να ικανοποιούν την συνθήκη μηδενισμού για μια σταθερά  $b$  (ανεξάρτητη του  $x$ ), που αντιστοιχεί απλά σε ένα ομογενές μέσο. Αν θεωρήσουμε μόνο τον όρο που περιέχει την παράγωγο χαμηλότερης τάξης (το  $k$  είναι μικρό), γράφουμε την εξίσωση διάδοσης ενός ελαφρώς μη γραμμικού κύματος ως

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial b}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} + \alpha b \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \quad (39.2)$$

όπου  $\alpha$  είναι μια σταθερή παράμετρος η οποία ξανά μπορεί θεωρητικά να έχει οποιοδήποτε πρόσημο.

Για να απλοποιήσουμε αυτή την εξίσωση, αντικαθιστούμε το  $x$  με μια νέα μεταβλητή  $\xi$  και την  $b$  με μια άγνωστη συνάρτηση  $a$ , που προσδιορίζεται από την

$$\xi = x - u_0 t, \quad a = \alpha b. \quad (39.3)$$

Αυτό δίνει :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial a}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 a}{\partial \xi^3} = 0, \quad (39.4)$$

η εξίσωση Korteweg-de Vries. Θα πάρουμε πρώτα από όλα την ειδική περίπτωση όπου  $\beta > 0$ .

Θα ψάξουμε για λύσεις που περιγράφουν κύματα με στατικό προφίλ. Σε τέτοιες λύσεις, η συνάρτηση  $a(t, \xi)$  εξαρτάται μόνο από την διαφορά  $\xi - t$  με μια σταθερά  $u_0$ :

$$a = a(\xi - v_0 t), \quad (39.5)$$

και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

$$u = u_0 + v_0. \quad (39.6)$$

Αντικαθιστώντας την (39.5) στην (39.4) και υποδηλώνοντας την διαφορά σε σχέση με το  $f$  μέσω ενός κυρίου  $\zeta$ , καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\beta a''' + a a' - v_0 a' = 0. \quad (39.7)$$

Αυτή παραμένει αναλλοίωτη με την αλλαγή

$$a \rightarrow a + V, \quad v_0 \rightarrow v_0 + V \quad (39.8)$$

με οποιαδήποτε σταθερά  $V$ .

Το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (39.7) είναι

$$\beta a'' + \frac{1}{2} a^2 - v_0 a = \frac{1}{2} c_1.$$

Πολλαπλασιασμός με  $2a'$  και άλλη μια ολοκλήρωση δίνει

$$\beta a'^2 = -\frac{1}{3} a^3 + v_0 a^2 + c_1 a + c_2. \quad (39.9)$$

Αντί για τις τρεις σταθερές  $u_0, c_1, c_2$  είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τις τρεις ρίζες της κυβικής στο δεξί μέρος της (39.9). Αν αυτές τις δηλώσουμε με  $a_1, a_2, a_3$ , τότε

$$\beta a'^2 = -\frac{1}{3}(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3). \quad (39.10)$$

Η σταθερά  $u_0$  συνδέεται με τις νέες σταθερές με την σχέση

$$u_0 = \frac{1}{3} (a_1 + a_2 + a_3) \quad (39.11)$$

Θα αναλογιστούμε τέτοιες λύσεις της (39.10) που το  $|a(\xi)|$  θα είναι φραγμένο. Μια απεριόριστη αύξηση του  $|a|$  θα έρχονταν σε αντίθεση με την υπόθεση της ελαφριάς μη γραμμικότητας. Είναι εύκολο να δούμε πως αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται αν οι ρίζες  $a_1, a_2, a_3$  δεν είναι όλες πραγματικές. Ας υποθέσουμε ότι  $a_1$  και  $a_2$  ( $=a$ ) είναι μιγαδικοί; τότε το δεξί μέρος της (39.10) γίνεται  $\frac{1}{3} |a - a_1|^2 (a_3 - a)$  και δεν υπάρχει τίποτα να εμποδίσει την  $a$  να τείνει στο  $-\infty$ .

Συνεπώς, οι σταθερές  $a_1, a_2, a_3$  πρέπει να είναι πραγματικές. Ας υποθέσουμε ότι  $a_1 > a_2 > a_3$ . Αφού η έκφραση στο δεξί μέρος της (39.10) πρέπει να είναι θετική, η συνάρτηση  $a(\xi)$  μπορεί να

μεταβάλλεται μόνο στο εύρος  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ . Μπορούμε να θέσουμε  $a_3 = 0$  χωρίς απώλεια της γενικότητας. Αυτό μπορεί πάντα να επιτευχθεί με ένα μετασχηματισμό του τύπου (39.8). Με αυτή την επιλογή, ξαναγράφουμε την (39.10) ως

$$\beta a'^2 = \frac{1}{3}(a_1 - a)(a - a_2)a. \quad (39.12)$$

Η φύση της λύσης εξαρτάται από το αν το  $a_2$  είναι μηδέν. Αν  $a_2 = 0$ ,  $a_1 > 0$ , με ολοκλήρωση έχουμε

$$a(\xi) = a_1 \cosh^{-2}(\frac{1}{3}\xi\sqrt{(a_1/3\beta)}); \quad (39.13)$$

το μηδέν της  $\xi$  το παίρνουμε στο μέγιστο της συνάρτησης. (Εδώ και από εδώ και στο εξής, για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, γράφουμε το προφίλ του κύματος ως συνάρτηση του  $\xi = x$  σε μια δεδομένη στιγμή  $t = 0$ .) Αυτή η λύση περιγράφει ένα μονήρες κύμα (solitary wave), ή σολιτόνιο: η  $\xi \rightarrow$

καθώς η συνάρτηση  $a(\xi)$  μηδενίζεται, μαζί με τις παραγώγους της. Η σταθερά  $a_1$ , δίνει το πλάτος του σολιτόνιου, και το πλάτος αυξάνει καθώς αυξάνει το πλάτος του  $a_1^{-1/2}$ . Σύμφωνα με την (39.11), έχουμε  $u_0 = 1/3 a_1$ , και συνεπώς η ταχύτητα του σολιτόνιου είναι

$$u = u_0 + \frac{1}{3}a_1. \quad (39.14)$$

Αυτό ξεπερνά την  $u_0$ , και αυξάνει με το πλάτος. Η μη γραμμικότητα, ξαναθυμίζουμε ότι θεωρείται μικρή/ελαφριά για διαδικασίες που περιγράφονται από την εξίσωση του Korteweg-de Vries. Η συνθήκη έχει προφανή σημασία: για παράδειγμα, αν  $a$  είναι η μεταβολή της πυκνότητας του μέσου, αυτή η μεταβολή πρέπει να είναι μικρή σε σχέση με την αδιατάρακτη πυκνότητα. Την ίδια στιγμή, ο βαθμός μη γραμμικότητας αυτών των διαδικασιών εκφράζεται από μια επιπλέον αδιάστατη παράμετρο  $L(a_1/\beta)^{1/2}$ , όπου  $L$  είναι το χαρακτηριστικό μήκος και  $a_1$  το πλάτος της διαταραχής. Αυτή η παράμετρος καθορίζει την σχετική σημασία της μη γραμμικότητας και της διασποράς, και μπορεί να είναι είτε μικρή (αν κυριαρχεί η διασπορά) ή μεγάλη (αν κυριαρχεί η μη γραμμικότητα). Για ένα σολιτόνιο, με πλάτος  $L \sim (\beta/a_1)^{1/2}$ , η παράμετρος είναι της τάξης της μονάδας.

Ας πάρουμε τώρα την περίπτωση όπου  $a_2 = 0$ . Η λύση της (39.12) τότε περιγράφει ένα κύμα απείρου εκτάσεως, περιοδικό στο χώρο. Ολοκλήρωση της εξίσωσης δίνει

$$\xi = \int_a^{a_1} \frac{\sqrt{(3\beta)} da}{[a(a_1 - a)(a - a_2)]^{3/2}} = (12\beta/a_1)^{1/2} F(s, \varphi), \quad (39.15)$$

$$F(s, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - s^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad (39.16)$$

με

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{a_1 - a}{a_1 - a_2}}, \quad s = \sqrt{1 - \frac{a_2}{a_1}}; \quad (39.17)$$

το μηδενικό της  $\xi$  παίρνεται σε ένα από τα μέγιστα της συνάρτησης  $a(\xi)$ . Αντιστρέφοντας τον τύπο (39.15) μέσω της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi (Jacobi elliptic function), έχουμε

$$a = a_1 \operatorname{dn}^2(\sqrt{(a_1/12\beta)}\xi, s). \quad (39.18)$$

Αυτή είναι μια περιοδική συνάρτηση, τη οποίας η περίοδος (μήκος κύματος) στην συντεταγμένη του  $x$  είναι

$$\lambda = 4\sqrt{(3\beta/a_1)F(\frac{1}{2}\pi, s)} = 4\sqrt{(3\beta/a_1)K(s)}, \quad (39.19)$$

όπου το  $K(s)$  είναι ένα πλήρως ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους. Η μέση τιμή σε μια περίοδο της (39.18) είναι

$$\bar{a} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda a(\xi) d\xi = a_1 E(s)/K(s), \quad (39.20)$$

όπου  $E(s)$  είναι ένα πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους. Είναι φυσικό να θεωρήσουμε ένα περιοδικό κύμα στο οποίο η μέση τιμή της ταλαντούμενης ποσότητας είναι μηδέν. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της μεταμόρφωσης (39.8), αφαιρώντας την ποσότητα (39.20) από την συνάρτηση (39.18). Η ταχύτητα διάδοσης τότε είναι

$$u = u_0 + [\frac{1}{2}(a_1 + a_2) - a_1 E(s)/K(s)]. \quad (39.21)$$

Τα μικρά πλάτη ταλάντωσης  $a_1 - a_2$  αντιστοιχούν σε τιμές της παραμέτρου  $s \ll 1$ . Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση

$$\operatorname{dn}(z, s) \approx 1 - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^2 \cos 2z, \quad s \ll 1,$$

βρίσκουμε ότι η λύση (39.18) γίνεται σε αυτή την περίπτωση, όπως και πρέπει, το αρμονικό κύμα

$$a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(a_1 - a_2) \cos kx, \quad k = \sqrt{(a_1/3\beta)}.$$

Η ταχύτητα (39.21) γίνεται  $u = u_0 - a_1 = u_0 - \beta k^2$  σε συμφωνία με την (39.1). Η αντίθετη περίπτωση περιορισμού μεγάλων πλατών (στο μοντέλο κυμάτων που συζητάμε) αντιστοιχεί σε  $a_2 \rightarrow 0$  and  $s \rightarrow 1$ . Με την έκφραση περιορισμού

$$K(s) \approx \frac{1}{2} \log[16/(1-s^2)], \quad s^2 \rightarrow 1,$$

βρίσκουμε ότι σε αυτό το όριο το μήκος κύματος αυξάνει λογαριθμικά:

$$\lambda = \sqrt{(12\beta/a_1) \log(16a_1/a_2)}. \quad (39.22)$$