



**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΕΙ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

Πτυχιακή εργασία :

Κρουστικά κύματα στη δυναμική αερίων

Επιμέλεια: Τσαφταρίδης Γιώργος

Εισηγητής: Dr. Πλιάκης Δημήτριος

ΧΑΝΙΑ 2015

Περιεχόμενα**II. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΕΡΙΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ.****4****1. Συνεχής ροή ενός ιδεατού μη αγώγιμου αερίου.****4**

§1. Οι εξισώσεις της αεριοδυναμικής.....	4
§2. Οι συντεταγμένες του Lagrange.....	8
§3. Κρουστικά Κύματα	10
§4. Σφαιρικά Κρουστικά Κύματα.....	19
§5. Χαρακτηριστικά	21
§6. Επίπεδη ισεντροπική ροή. Σταθερές του Riemann.....	26
§7. Επίπεδη ισεντροπική ροή του αερίου σε μία περιορισμένη περιοχή.	32
§8. Απλά κύματα	35
§9. Παραμόρφωση της μορφής ενός κινούμενου κύματος με ορισμένο εύρος. Μερικές ιδιότητες των απλών κυμάτων.....	37
§10. Το κύμα αραιώσης.	42
§11. Το κεντρικό κύμα αραιώσης ως παράδειγμα όμοιας κίνησης του αερίου.	48
§12. Όταν δεν υπάρχει πιθανότητα ύπαρξης ενός κεντρικού κύματος συμπίεσης.....	54

2. Κρουστικά κύματα**57**

§13. Εισαγωγή στην αεριοδυναμική των κρουστικών κυμάτων.	57
§14. Οι καμπύλες Hugoniot.....	62
§15. Κρουστικά κύματα σε ένα τέλειο αέριο με συγκεκριμένες σταθερές θερμότητες.	63
§16. Γεωμετρική ερμηνεία των νόμων που διέπουν τα κρούσματα συμπίεσης.....	68
§17. Μηδενική πιθανότητα για ένα κρουστικό κύμα αραιώσης σε ένα ρευστό με φυσιολογικές θερμοδυναμικές ιδιότητες.....	74
§18. Ασθενή κρουστικά κύματα.....	78
§19. Κρουστικά κύματα σε ένα ρευστό με ανώμαλες θερμοδυναμικές ιδιότητες.....	83

3. Ιξώδες και θερμική συμπεριφορά στην αεριοδυναμική.**86**

§20. Εξισώσεις μονοδιάστατης ροής	86
§21. Επισημάνσεις στο δεύτερο συντελεστή ιξώδους	90
§22. Επισημάνσεις στην απορρόφηση του ήχου.....	91
§23. Η δομή και το πάχος του μπροστινού τμήματος ενός ασθενούς κρουστικού κύματος.....	92

4. Διάφορα προβλήματα. 103

§24. Εξάπλωση μίας αυθαίρετης ασυνέχειας.....	103
§25. Ισχυρή έκρηξη σε μία ομοιογενή ατμόσφαιρα.....	114
§26. Κατά προσέγγιση συμπεριφορά μίας ισχυρής έκρηξης	119
§27. Παρατηρήσεις για το σημείο έκρηξης με την αντιπίεση	121
§28. Ξαφνική ισεντροπική εξάπλωση ενός σφαιρικού σύννεφου αερίου σε κενό.....	125
§29. Συνθήκες για την πανομοιότυπη ξαφνική εξάπλωση ενός σύννεφου αερίου στο κενό....	127

II. ΘΕΡΜΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΟΥΜΕΝΗ ΘΕΡΜΙΚΗ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΩΜΑ. 130

§1. Εισαγωγή και βασικές έννοιες	130
§2. Μηχανισμοί της εκπομπής, απορρόφησης και σκεδασμού του φωτός στα αέρια.....	135
§3. Ακτινοβολία ισορροπίας και η έννοια του τέλει μαύρου σώματος	140
§4. Επαγόμενη εκπομπή	143
§4 ^α . Επαγόμενη εκπομπή ακτινοβολίας στην κλασική και κβαντική θεωρία και η επίδραση του λέιζερ.....	147
§5. Η εξίσωση της ακτινικής μεταφοράς	153
§6. Ολοκληρωτικές εκφράσεις για την ένταση της ακτινοβολίας	156
§7. Ακτινοβολία από ένα επίπεδο στρώμα.....	159
§8. Η θερμοκρασία της φωτεινότητας της επιφάνειας σε ένα ανομοιόμορφα θερμαινόμενο σώμα.....	164
§9. Κίνηση ενός ρευστού λαμβάνοντας υπόψη την θερμική ανταλλαγή της ακτινοβολίας.....	168
§10. Η προσέγγιση της διάχυσης	172
§11. Η προσέγγιση «αναστροφής».....	178
§12. Τοπική ισορροπία και η προσέγγιση της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας.....	180
§13. Η σχέση ανάμεσα στη προσέγγιση της διάθλασης και την προσέγγιση της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας.....	182
§14. Ισορροπία της ακτινοβολίας στις αστρικές φωτόσφαιρες	185
§15. Λύση στο πρόβλημα επίπεδης φωτόσφαιρας	190
§16. Απώλειες της ενέργειας της ακτινοβολίας ενός θερμού σώματος	194
§17. Υδροδυναμικές εξισώσεις που υπολογίζουν την ενέργεια της ακτινοβολίας, την πίεση και την ανταλλαγή της θερμότητας της ακτινοβολίας.....	198
§18. Ο αριθμός των φωτονίων ως μία σταθερά του κλασικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ..	203

Η πτυχιακή εργασία αποτελεί μετάφραση των κεφαλαίων:

- I. Elements of gasdynamics and the classical theory of shock waves**
II. Thermal radiation and radiant heat exchange in a medium.

του βιβλίου με τίτλο :

“Physics of high temperature hydrodynamic phenomena”
των Ya. B. Zel’ Dovich, Yu. P. Raizer
εκδότης *Academy press, New York & London, 1966.*

I. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΕΡΙΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ.

1.Συνεχής ροή ενός ιδεατού μη αγώγιμου αερίου.

§1. Οι εξισώσεις της αεριοδυναμικής

Οι υπερβολικά υψηλές θερμοκρασίες μιας σειράς από πολλές ατμόσφαιρες, είναι αναμενόμενο να δημιουργούν μια αισθητή συμπίεση σε υγρά και στερεά. Παρ’ όλα αυτά, κάτω από κανονικές συνθήκες είναι πιθανό να θεωρήσουμε τα υγρά ως μέσα ανεπίδεκτα δυναμικής συμπίεσης. Με μικρές μεταβολές στην πυκνότητα, η ταχύτητα της ροής ενός υγρού στοιχείου είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου· η ταχύτητα του ήχου λειτουργεί ως χαρακτηριστική κλίμακα ένδειξης της ταχύτητας κίνησης των συνεχών μέσων. Με μικρές αλλαγές στην πυκνότητα και με τις ταχύτητες της ροής να είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του ήχου, τα αέρια μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως υγρά ανεπίδεκτα δυναμικής συμπίεσης και η κίνησή τους να περιγραφεί με όρους της υδροδυναμικής για τα ασυμπίεστα ρευστά. Σε αντίθεση με τα ρευστά, αισθητές αλλαγές τόσο στην πυκνότητα όσο και στις ταχύτητες ροής παρόμοιες με την ταχύτητα του ήχου, είναι εύκολο να επιτευχθούν και στα αέρια. Στις περιπτώσεις αυτές η αλλαγή στην πίεση μπορεί να προκληθεί και από την ίδια την πίεση, πχ όταν το αέριο βρίσκεται αρχικά σε ατμοσφαιρική πίεση και έτσι ισχύει ότι $\Delta p \sim 1 \text{atm}$. Υπό αυτές τις συνθήκες είναι απαραίτητο να λαμβάνει κανείς υπ’ όψιν τη δυνατότητα συμπίεσης του μέσου.

Οι εξισώσεις στην αεριοδυναμική διαφέρουν από αυτές της υδροδυναμικής, σε σχέση με τα ρευστά που δεν επιδέχονται συμπίεση, επειδή υπολογίζουν την πιθανότητα μεγάλων αλλαγών στην πυκνότητα.

Η κατάσταση ενός κινούμενου αερίου, του οποίου τα θερμοδυναμικά χαρακτηριστικά είναι γνωστά, μπορεί να οριστεί με βάση την ταχύτητά του, την πυκνότητα και την πίεση ως

λειτουργίες θέσεως και χρόνου.

Αυτές οι λειτουργίες ορίζονται με τη σειρά τους από διαφορετικές εξισώσεις που περιγράφουν τους γενικούς νόμους διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Αυτές οι εξισώσεις παρατίθενται παρακάτω χωρίς απόδειξη και μπορούν να βρεθούν για παράδειγμα στο βιβλίο των Landau και Lifshitz [1].

Ας αγνοήσουμε τις επιδράσεις της βαρύτητας καθώς και την εσωτερική τριβή και την θερμική αγωγιμότητα. Η μερική παράγωγος σε σχέση με μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο χώρο δηλώνεται από την ισότητα $\partial/\partial t$, και η απόλυτη παράγωγος που περιγράφει την αλλαγή χρονικής στιγμής σε οποιαδήποτε ποσότητα ενός κινούμενου ρευστού δηλώνεται από την ισότητα D/Dt . Εάν \mathbf{u} είναι το δυνάμιμα της ταχύτητας ενός ρευστού του οποίου τα συστατικά στοιχεία είναι U_x, U_y και U_z ή U_i , όπου $i=1,2,3$ τότε :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (1.1)$$

Η πρώτη εξίσωση – εξίσωση της συνέχειας – περιγράφει την διατήρηση της μάζας του ρευστού, ή με άλλα λόγια το γεγονός ότι η πυκνότητα σε ένα δεδομένο στοιχείο όγκου αλλάζει εξαιτίας της ροής του ρευστού εντός ή εκτός του στοιχείου αυτού :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0. \quad (1.2)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.1), η εξίσωση της συνέχειας μπορεί να γραφτεί ακολούθως :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.3)$$

Για ένα ρευστό, όπου $\rho = \text{const}$, η εξίσωση είναι :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.4)$$

Η δεύτερη εξίσωση εκφράζει το νόμο του Νεύτωνα και δεν διαφέρει από την σχετική εξίσωση κίνησης για ένα μη συμπιεστό ρευστό (p είναι η πίεση)

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p \quad (1.5)$$

ή με τη μορφή της εξίσωσης του Euler,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.6)$$

Είναι προφανές ότι οι εξισώσεις κίνησης και συνέχειας, όταν συνδυάζονται, είναι ισοδύναμες με το νόμο της διατήρησης της ορμής που εκφράζεται με τρόπο παρόμοιο του (1.2),

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.7)$$

όπου Π_{ik} είναι ο τανυστής που εκφράζει την ορμή της πυκνότητας ροής

$$\Pi_{ik} = \rho u_i u_k + p \delta_{ik}. \quad (1.8)$$

Η εξίσωση (1.7) εκφράζει το γεγονός ότι μία αλλαγή στο i στοιχείο της ορμής σε δεδομένο σημείο του χώρου, σχετίζεται με τη ροή της ορμής έξω (ή μέσα) από ένα μικρό όγκο (ο πρώτος όρος στο (1.8)) καθώς επίσης και με τη δύναμη από το πεδίο πίεσης (δεύτερος όρος)*.

*Η άθροιση στα δεξιά του (1.7) εκτελείται σε σχέση με την υπογεγραμμένη k ($k = 1, 2, 3$); $\delta_{ik} = 1$ for $i = k$ and $\delta_{ik} = 0$ for $i \neq k$.

Η τρίτη εξίσωση είναι ουσιαστικά καινούρια στην υδροδυναμική των μη συμπιεστών ρευστών και είναι ισοδύναμη με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής (πχ. Νόμος της διατήρησης της ενέργειας). Μπορεί να διατυπωθεί όπως παρακάτω: Μία αλλαγή στην εσωτερική ενέργεια ε ενός δεδομένου σωματιδίου είναι αποτέλεσμα της λειτουργίας της συμπίεσης στο συγκεκριμένο αυτό σωματίδιο από το περιβάλλον μέσο, και της ενέργειας που παράγεται από εξωτερικές πηγές

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} + p \frac{DV}{Dt} = Q. \quad (1.9)$$

Η ισότητα $V=1/\rho$ είναι ο συγκεκριμένος όγκος και Q είναι η ενέργεια που παράγεται από εξωτερικές πηγές ανά μονάδα μάζας του υλικού ανά μονάδα χρόνου (Το Q μπορεί να είναι αρνητικό όταν παρεμβάλλονται μη μηχανικές απώλειες ενέργειας, όπως για παράδειγμα απώλειες ραδιενέργειας).

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης και συνέχειας, η εξίσωση της ενέργειας μπορεί να περιοριστεί σε μορφή παρόμοια των (1.2) και (1.7)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \mathbf{u} \right] + \rho Q. \quad (1.10)$$

Με φυσικούς όρους, η εξίσωση αυτή δηλώνει πως κάποια αλλαγή στην συνολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου σε δεδομένο σημείο στο χώρο συμβαίνει εξαιτίας της ροής της ενέργειας (εντός ή εκτός) κατά την κίνηση του ρευστού, της λειτουργίας δυνάμεων πίεσης και της ενέργειας που δημιουργείται από εξωτερικούς παράγοντες.

Οι εξισώσεις της συνέχειας, της κίνησης και της ενέργειας δημιουργούν ένα σύστημα πέντε

εξισώσεων(η εξίσωση της κίνησης είναι διανυσματική και ισοδύναμη με τρεις βαθμωτές εξισώσεις) με πέντε άγνωστες λειτουργίες του χώρου και χρόνου: ρ , u_x , u_y , u_z , και p . Θεωρείται πως οι εξωτερικές πηγές ενέργειας Q είναι γνωστές, και η εσωτερική ενέργεια ϵ μπορεί να εκφραστεί με όρους της πυκνότητας και της πίεσης, αφού τα χαρακτηριστικά θερμοδυναμικής του ρευστού θεωρούνται επίσης γνωστά: $\epsilon = \epsilon(p, \rho)$.

Αν όπως συμβαίνει συνήθως, η ενέργεια δίνεται όχι ως λειτουργία πίεσης και πυκνότητας αλλά ως λειτουργία της θερμοκρασίας T και της πυκνότητας, ή της θερμοκρασίας και της πίεσης, τότε η εξίσωση της κατάστασης $p = f(T, \rho)$ θα πρέπει να ενταχθεί στο σύστημα. Η εξίσωση κατάστασης για ένα τέλειο αέριο είναι

$$pV = RT, \quad p = R\rho T, \quad (1.11)$$

όπου R είναι το συνεχές αέριο ανά μονάδα μάζας*.

Η εξίσωση της ενέργειας (1.9) είναι γενικευμένη και είναι εφαρμόσιμη όταν το ρευστό δεν βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπία.

* $R = \mathcal{R}/\mu_0$, where \mathcal{R} is the universal gas constant and μ_0 is the molecular weight.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση της συγκεκριμένης σημασίας όταν το ρευστό βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφτεί με διαφορετική μορφή βασισμένη στον δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής

$$T dS = d\epsilon + p dV, \quad (1.12)$$

όπου S είναι η συγκεκριμένη εντροπία. Υπό την απουσία εξωτερικών θερμικών πηγών, η τρίτη εξίσωση αεριοδυναμικής είναι ισοδύναμη με την εξίσωση εντροπίας ενός σωματιδίου, που είναι ίδια με την αδιαβατική κατάσταση ροής

$$\frac{DS}{Dt} = 0. \quad (1.13)$$

Η εντροπία ενός τέλειου αερίου με συνεχείς συγκεκριμένες θερμοκρασίες μπορεί να εκφραστεί με απλή μορφή σε σχέση με την πίεση και την πυκνότητα (συγκεκριμένος όγκος)

$$S = c_v \ln pV^\gamma + \text{const}, \quad (1.14)$$

όπου γ είναι ο ισεντροπικός εκθέτης, ίσος με την αναλογία συγκεκριμένων θερμοκρασιών σε συνεχή πίεση και συγκεκριμένο όγκο, $\gamma = C_p/C_v = 1 + R/C_v$. Η εξίσωση της εντροπίας (ή ενέργειας) (1.13) μπορεί σε αυτή την περίπτωση να γραφτεί σαν μια διαφορική εξίσωση σχετική με την πίεση και την πυκνότητα (όγκο)

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \gamma \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = 0. \quad (1.15)$$

Στο σύστημα των εξισώσεων αεροδυναμικής πρέπει να προστεθούν οι κατάλληλες αρχικές και οριακές συνθήκες.

§2. Οι συντεταγμένες του Lagrange

Οι εξισώσεις ροής που αφορούν τις μεταβλητές της αεροδυναμικής ως λειτουργίες των συντεταγμένων του χώρου και του χρόνου, ονομάζονται εξισώσεις του Euler, ή αλλιώς εξισώσεις της ροής στις συντεταγμένες του Euler. Οι συντεταγμένες του Lagrange χρησιμοποιούνται συχνά για να περιγράψουν μονοδιάστατη ροή, ή αλλιώς, ροή επίπεδη και συμμετρική κυλινδρικά και σφαιρικά. Σε αντίθεση με τις συντεταγμένες του Euler, οι συντεταγμένες του Lagrange δεν καθορίζουν ένα δεδομένο σημείο στο χώρο, αλλά ένα δεδομένο ρευστό σωματίδιο. Οι μεταβλητές ροής στην αεροδυναμική που εκφράζονται σύμφωνα με τις συντεταγμένες του Lagrange απεικονίζουν τις αλλαγές στην πυκνότητα, την πίεση και την ταχύτητα του κάθε ρευστού σωματιδίου σε σχέση με τον χρόνο. Οι συντεταγμένες του Lagrange είναι ιδιαίτερα εξηρητικές όταν έχουμε να κάνουμε με εσωτερικές διεργασίες συμπεριλαμβανομένων των ρευστών σωματιδίων ξεχωριστά, όπως για παράδειγμα μια χημική αντίδραση της οποίας η εξέλιξη σε σχέση με τον χρόνο εξαρτάται από τις αλλαγές τόσο της θερμοκρασίας όσο και της πυκνότητας του κάθε σωματιδίου. Ακόμη η χρήση των συντεταγμένων αυτών δίνει περιστασιακά έναν συντομότερο και πιο εύκολο τρόπο ώστε να βρίσκουμε ακριβείς λύσεις στις εξισώσεις της αεροδυναμικής, ή προσφέρει μια πιο βολική αριθμητική ολοκλήρωσή τους. Η παράγωγος σε σχέση με το χρόνο στις συντεταγμένες του Lagrange είναι απλά ισοδύναμη με τη συνολική παράγωγο D/Dt . Το σωματίδιο μπορεί να περιγραφεί είτε αναφορικά με τη μάζα του ρευστού διαχωρίζοντας το από ένα συγκεκριμένο σωματίδιο (στην μονοδιάστατη), είτε αναφορικά με τη θέση του στην αρχική χρονική στιγμή. Η χρήση των συντεταγμένων του Lagrange είναι ιδιαίτερα απλή στην περίπτωση της επίπεδης κίνησης, όταν η ροή είναι λειτουργία μόνο μίας καρτεσιανής συντεταγμένης x . Ας συμβολίσουμε τη συντεταγμένη Euler ενός συγκεκριμένου ρευστού σωματιδίου με x και τη συντεταγμένη ενός σχετικού σωματιδίου με x_1 (ως σχετικό μπορούμε να επιλέξουμε ένα σωματίδιο κοντά σε συμπαγές τείχος ή κοντά σε διασύνδεση αερίου κενού). Ύστερα η μάζα μιας στήλης του ρευστού της ενιαίας τομής ανάμεσα στο σχετικό σωματίδιο και στο συγκεκριμένο ρευστό που μας ενδιαφέρει είναι ισοδύναμη με

$$m = \int_{x_1}^x \rho \, dx. \quad (1.16)$$

Η προσθήκη στη μάζα που προέρχεται από το πέρασμα από ένα σωματίδιο σε ένα γειτονικό του είναι

$$dm = \rho dx. \quad (1.17)$$

Η ποσότητα m μπορεί να επιλεγθεί ως η συντεταγμένη Lagrange. Εάν, όπως συμβαίνει συνήθως, το αέριο είναι αρχικά σε αδράνεια και η αρχική του πυκνότητα είναι συνεχής, $\rho(x,0)=\rho_0$ τότε είναι βολικό να πάρουμε την αρχική συντεταγμένη του σωματιδίου, που θα δηλώσουμε με a , όπως η συντεταγμένη Lagrange. Τότε

$$a = \int_{x_1}^x \frac{\rho}{\rho_0} dx, \quad da = \frac{\rho}{\rho_0} dx. \quad (1.18)$$

Οι εξισώσεις για την επίπεδη κίνηση ενός αερίου στις συντεταγμένες Lagrange παίρνουν απλή μορφή. Η εξίσωση της συνέχειας, γραμμένη σύμφωνα με τον συγκεκριμένο όγκο $V=1/\rho$ και με το συστατικό x της ταχύτητας u είναι

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial m} \quad \text{H} \quad \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial a}. \quad (1.19)$$

Εδώ, όπως στις ακόλουθες εξισώσεις, η παράγωγος σε σχέση με το χρόνο είναι η συνολική παράγωγος D/Dt , αν και είναι καλύτερα να το εκφράσει σε μορφή μερικής παραγωγού $\partial/\partial t$, ώστε να τονίσουμε πως γίνεται με m και $a = \text{σταθερό}$, ή αλλιώς για ένα δεδομένο σωματίδιο με συγκεκριμένη m ή συντεταγμένη a . Η εξίσωση της κίνησης στις συντεταγμένες Lagrange είναι

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial m} \quad \text{H} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial p}{\partial a}. \quad (1.20)$$

Η εξίσωση ενέργειας, γραμμένη είτε με τη μορφή (1.9) είτε με τη μορφή εντροπίας (1.13) κρατάει την ίδια μορφή στην απουσία εξωτερικών πηγών θερμότητας και σκεδαστικών διεργασιών (ρευστότητα και θερμική συμπεριφορά). Εγώ, απλά χρειάζεται να αντικαταστήσουμε το D/Dt με $\partial/\partial t$. Για ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες προκύπτει από το (1.13) ότι

$$pV^\gamma = f[S(m)], \quad (1.21)$$

όπου η λειτουργία f εξαρτάται μόνο από την εντροπία ενός δεδομένου σωματιδίου m . Στη λεγόμενη ισεντροπική ροή, όπου η εντροπία όλων των σωματιδίων είναι εντελώς ίδια και δεν ποικίλλει ανάλογα με τον χρόνο τότε $f = \text{σταθερό}$, στην οποία περίπτωση η εξίσωση $pV^\gamma = \text{σταθερό}$ είναι βάσιμη τόσο στις συντεταγμένες Lagrange όσο και σε αυτές του Euler. Η συντεταγμένη Euler x δεν εντάσσεται στην εξίσωση αποκλειστικά στη μονοδιάστατη (επίπεδη) περίπτωση. Αφού λυθούν οι συντεταγμένες Lagrange και η λειτουργία $V(m,t)$

βρεθεί, η εξάρτηση των μεταβλητών της ροής στη συντεταγμένη Euler μπορεί να απεικονιστεί με την ολοκλήρωση του (1.17)

$$dx = V(m, t) dm, \quad x(m, t) = \int_0^m V(m, t) dm + x_1(t). \quad (1.22)$$

Στις κυλινδρικές και σφαιρικές περιπτώσεις, οι εξισώσεις αεροδυναμικής στις συντεταγμένες Lagrange είναι κάπως πιο περίπλοκες από την επίπεδη περίπτωση. Εδώ, η συντεταγμένη του Euler μπαίνει στις εξισώσεις αποκλειστικά και θα πρέπει να προστεθεί στο σύστημα μία επιπλέον εξίσωση, σχετικά με τις συντεταγμένες Lagrange και Euler. Για παράδειγμα, στην σφαιρική περίπτωση είναι πιθανό να ορίσουμε τη συντεταγμένη Lagrange ως εκείνη η μάζα που περιέχεται μέσα σε έναν σφαιρικό όγκο στο κέντρο της συμμετρίας.

$$m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \quad dm = 4\pi r^2 \rho dr. \quad (1.23)$$

Αν η πυκνότητα του αερίου είναι αρχικά συνεχής, τότε είναι πιθανό να πάρουμε ως συντεταγμένη Lagrange την αρχική ακτίνα r_0 του σωματιδίου, θεωρούμενη ως στοιχειώδης σφαιρικός φλοιός

$$\frac{4\pi r_0^3}{3} \rho_0 = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \quad dr_0 = \frac{r^2}{r_0^2} \frac{\rho}{\rho_0} dr. \quad (1.24)$$

Η εξίσωση της συνέχειας στη σφαιρική συντεταγμένη Lagrange είναι:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial m} 4\pi r^2 u \quad \text{H} \quad \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial r_0} r^2 u. \quad (1.25)$$

Η εξίσωση της κίνησης είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} \quad \text{H} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{r^2}{r_0^2} \frac{\partial p}{\partial r_0}. \quad (1.26)$$

Οι εξισώσεις ενέργειας ή εντροπίας παραμένουν οι ίδιες, όπως και στην επίπεδη περίπτωση. Ως συμπληρωματική εξίσωση, θα πρέπει να προστεθεί στο σύστημα, η διαφορική (ή ολοκληρωτική) σχέση του (1.23) ή (1.24), σχετίζοντας m και r ή r_0 και r . Οι εξισώσεις για τη σφαιρική περίπτωση τίθενται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως εκείνες της σφαιρικής περίπτωσης. Θα πρέπει να σημειωθεί πως στη γενική περίπτωση ροής δύο ή τριών διαστάσεων, η αλλαγή στις συντεταγμένες Lagrange είναι άβολος ως κανόνας, από τη στιγμή που οι εξισώσεις γίνονται αρκετά περίπλοκες.

§3. Κρουστικά Κύματα

Η ταχύτητα του ήχου μπαίνει στις εξισώσεις της αεριοδυναμικής όπως η ταχύτητα διάδοσης μικρών διαταραχών. Στην περίπτωση περιορισμού, όπου οι αλλαγές στην πυκνότητα και την πίεση $\Delta\rho$ και Δp που συνοδεύουν την κίνηση του ρευστού είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με τις μέσες τιμές της πυκνότητας και πίεσης ρ_0 και p_0 , και όπου οι ταχύτητες ροής είναι μικρές σε σύγκριση με την ταχύτητα του ήχου c , οι εξισώσεις αεριοδυναμικής γίνονται εξισώσεις ακουστικής που περιγράφουν τη διάδοση των κρουστικών κυμάτων. Ας γράψουμε την πυκνότητα και την πίεση ως $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, $p = p_0 + \Delta p$ και ας θεωρήσουμε πως οι ποσότητες $\Delta\rho$, Δp καθώς επίσης και η ταχύτητα u είναι μικρές. Αγνοώντας δευτερεύοντες ποσότητες και λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο την επίπεδη περίπτωση ενός ομοιογενούς ρευστού ξαναγράφουμε τις εξισώσεις Euler για την κίνηση και τη συνέχεια. Η εξίσωση της συνέχειας είναι ως εξής:

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.27)$$

Η εξίσωση της κίνησης παίρνει την παρακάτω μορφή

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\partial \Delta\rho}{\partial x}. \quad (1.28)$$

Εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το σωματίδιο της κίνησης στο κρουστικό κύμα είναι ισεντροπικό, από όπου μία μικρή αλλαγή στην κίνηση σχετίζεται με μία μικρή αλλαγή στην πυκνότητα της ισεντροπικής παραγώγου, $\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \Delta\rho$. Όπως θα δούμε, αυτή η παράγωγος αντιπροσωπεύει το τετράγωνο της ταχύτητας του ήχου και αναφέρεται στην αδιάσπαστη κατάσταση του ρευστού.

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s, \quad (1.29)$$

Διαφοροποιώντας το (1.27) σε σχέση με το χρόνο και το (1.28) σε σχέση με τη συντεταγμένη του χώρου διαγράφουμε την εγκάρσια παράγωγο $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial x^2}$ και αποκτούμε μία εξίσωση κύματος για την αλλαγή της πυκνότητας

$$\frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial x^2}. \quad (1.30)$$

Η αλλαγή της πίεσης $\Delta p = c^2 \Delta\rho$ (αναλογική στο $\Delta\rho$), η ταχύτητα u και όλες οι υπόλοιπες παράμετροι του ρευστού, όπως η θερμοκρασία, ικανοποιούν μία ανάλογη εξίσωση*. Μία εξίσωση κύματος τύπου (1.30) επιτρέπει δύο ομάδες λύσεων

$$\Delta\rho = \Delta\rho(x - ct), \quad \Delta p = \Delta p(x - ct), \quad u = u(x - ct) \quad (1.31)$$

Και

$$\Delta p = \Delta p(x + ct), \quad \Delta p = \Delta p(x + ct), \quad u = u(x + ct) \quad (1.32)$$

όπου c δηλώνει τη θετική ρίζα $c = + \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) s}$
 Η πρώτη λύση περιγράφει μία διαταραχή που διαδίδεται στη θετική κατεύθυνση x , και η δεύτερη λύση περιγράφει μία παρόμοια κίνηση αλλά στην αντίθετη κατεύθυνση. Στην πρώτη περίπτωση για παράδειγμα, η δεδομένη τιμή της πυκνότητας αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη τιμή του επιχειρήματος $x - ct$, ή αλλιώς, η διαταραχή κινείται με ταχύτητα c στην κατεύθυνση του θετικού x . Άρα, το c εδώ δηλώνει τη διάδοση της ταχύτητας v

κρουστικών κυμάτων. Σημειώνοντας ότι $\frac{\partial u(x \mp ct)}{\partial x} = \mp \left(\frac{1}{c}\right) \partial u(x \mp ct) / \partial t$ και ότι στο ατάραχο αέριο εν όψει του κύματος $u=0$ και $\Delta p=0$, βρίσκουμε από το (1.27) μία σχέση μεταξύ του σωματιδίου ταχύτητας του αερίου (u) και των αλλαγών στην πυκνότητα ή την πίεση

$$u = \pm \frac{c}{\rho_0} \Delta p = \pm \frac{\Delta p}{\rho_0 c}, \quad \Delta p = c^2 \Delta \rho = \pm \rho_0 c u. \quad (1.33)$$

Το πάνω σχήμα αναφέρεται στη διάδοση ενός κύματος στην x θετική κατεύθυνση και το κάτω σχήμα αναφέρεται στη διάδοση ενός κύματος στη x αρνητική κατεύθυνση. Και στις δύο περιπτώσεις το σωματίδιο της ταχύτητας είναι στην κατεύθυνση της διάδοσης του κύματος όπου το ρευστό συμπιέζεται, και στην αντίθετη κατεύθυνση σε σημεία που το ρευστό εξαπλώνεται. Η γενική λύση των εξισώσεων για τα κύματα για Δp και u επινοείται από δύο συγκεκριμένες λύσεις, που σχετίζονται με τη διάδοση των κυμάτων στη θετική και αρνητική x κατεύθυνση. Από το (1.31) ως το (1.33), οι λύσεις για την πυκνότητα και την ταχύτητα είναι :

$$\Delta p = \frac{\rho_0}{c} f_1(x - ct) + \frac{\rho_0}{c} f_2(x + ct), \quad (1.34)$$

$$u = f_1(x - ct) - f_2(x + ct), \quad (1.35)$$

* Για να αποκτήσουμε την εξίσωση κύματος για την ταχύτητα, διαφοροποιούμε το (1.30) σε σχέση με το χρόνο και χρησιμοποιούμε το (1.27) κα (1.28)

$$\frac{\partial^3 \Delta p}{\partial t^3} = c^2 \frac{\partial^3 \Delta p}{\partial x^2 \partial t} = - \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - c^2 \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \partial^2 u / \partial x^2 + f(t)$. Ας σημειωθεί πως $u=0$ στο αδιάσπαστο ρευστό εν όψει του κύματος, προκύπτει ότι $f(t)$ ισούται με 0.

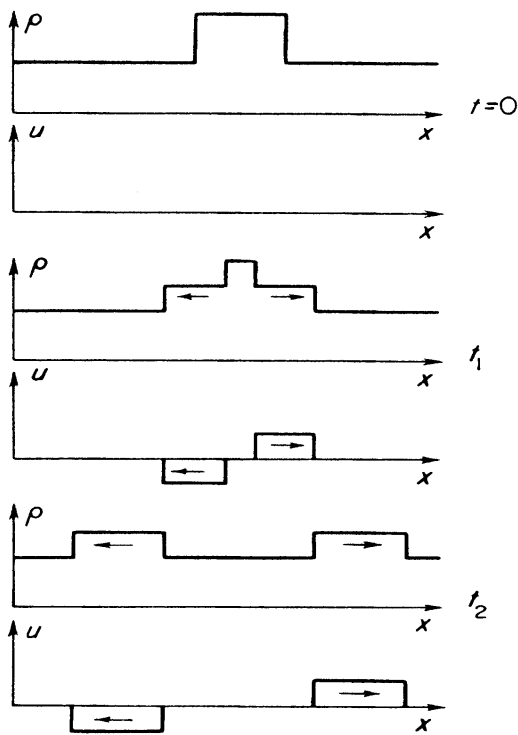
όπου f_1 και f_2 είναι αυθαίρετες λειτουργίες των επιχειρημάτων ,που καθορίζονται από τις αρχικές κατανομές της πυκνότητας και της ταχύτητας.

$$f_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{c}{\rho_0} \Delta \rho(x, 0) + u(x, 0) \right],$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{c}{\rho_0} \Delta \rho(x, 0) - u(x, 0) \right].$$

Για παράδειγμα, αν η αρχική διάσπαση της πυκνότητας είναι ορθογώνια και το αέριο βρίσκεται παντού αδρανές, τότε ορθογώνιες διαταραχές θα διαδοθούν δεξιά και αριστερά ,όπως φαίνεται στο Σχέδιο 1.1. Αν οι κατανομές πυκνότητας και ταχύτητας

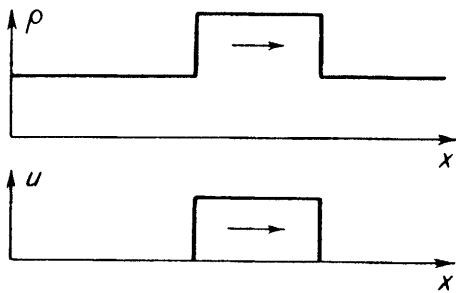
Εικόνα



Σχ.1.1. Διάδοση ενός ορθογώνιου παλμού πυκνότητας και πίεσης

στη γραμμική ακουστική.

Σχ.1.2. Διάδοση ενός ορθογώνιου
Εικόνα



παλμού πυκνότητας και πίεσης
στη γραμμική ακουστική.

έχουν αρχικά τη μορφή του σχήματος 1.2, με $u=(c/\rho_0) \Delta\rho$ ώστε $f_2 = 0$, τότε οι ορθογώνιοι παλμοί θα εξαπλωθούν μόνο προς μια κατεύθυνση. (Μια τέτοια διαταραχή μπορεί να δημιουργεί από ένα έμβολο το οποίο στην αρχική χρονική στιγμή ξεκινάει να κινείται στο αδιάσπαστο αέριο με σταθερή ταχύτητα u , και το οποίο σταματάει 'στιγμιαία' μετά από συγκεκριμένο χρόνο. Αν το μήκος του ορθογώνιου παλμού είναι L , τότε, προφανώς, ο χρόνος στον οποίο το έμβολο δρα στο αέριο είναι $t_1 = L/c$.)

Στην ακουστική ιδιαίτερης σημασίας είναι τα μονοχρωματικά κρουστικά κύματα, στα οποία όλες οι ποσότητες είναι περιοδικές λειτουργίες του χρόνου, τύπου

$$f = A \cos \left(\frac{\omega}{c} x - \omega t \right),$$

ή σε πιο περίπλοκη μορφή

$$f = A \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right].$$

Εδώ $\nu = \omega/2\pi$ είναι η συχνότητα του ήχου και $\lambda = c/\nu$ είναι το μήκος κύματος. Οποιαδήποτε διαταραχή μπορεί να εξαπλωθεί σε ένα ολοκλήρωμα Fourier, δηλαδή, μπορούμε να το αναπαραστήσουμε ως ένα σύνολο μονοχρωματικών κυμάτων διαφορετικών συχνοτήτων.

Οι ήχοι τους οποίους μπορεί να ακούσει ο ανθρώπινο αυτί έχουν μια συχνότητα ν από 20 έως 20000 cps. Τα μήκη κύματος που αντιστοιχούν στη ταχύτητα του ήχου στον ατμοσφαιρικό αέρα ($c = 330\text{m/sec}^*$) ποικίλουν από 15m σε 1.5 cm.

Για να απεικονίσουμε τις αριθμητικές τιμές των διάφορων ποσοτήτων σε ένα κρουστικό κύμα, σημειώνουμε οπτικό εύρος στην αλλαγή της πυκνότητας στον αέρα για το πιο δυνατό ήχο, με ένταση $\dagger 10^5$ φορές όπως το πολύ δυνατό ήχο μιας συμφωνικής ορχήστρας είναι το 0,4% της κανονικής πυκνότητας το εύρος στην αλλαγή της πίεσης είναι το 0,56% της ατμοσφαιρικής πίεσης και το εύρος της ταχύτητας είναι το 0,4% της ταχύτητας του ήχου, ή 1.3m/sec. Το εύρος εκτοπίσματος των σωματιδίων του αέρα Δx είναι της τάξεως $u/2\pi\nu = (u/c) (\lambda/2\pi) \approx 6 \cdot 10^{-4}\lambda$ ($\Delta x \approx 0.036\text{cm}$ για $\nu = 500\text{cps}$).

Ας ορίσουμε την ενέργεια για μια μικρή διαταραχή που διαδίδεται μέσα σε ένα αέριο το οποίο αρχικά είναι αδρανές. Η αύξηση στη συγκεκριμένη εσωτερική ενέργεια του διαταραγμένου ρευστού με ακρίβεια της δεύτερης τάξεως σε σχέση με Δp .

*Η συγκεκριμένη αναλογία θερμότητας για τον αέρα υπό κανονικές συνθήκες είναι

$$\gamma = 1.4, \quad \text{and} \quad c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S^{1/2} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = (\gamma R T_0)^{1/2}$$

(αφού $p \sim \rho^\gamma$ για συνεχές S).

Όπως θα δούμε παρακάτω η ενέργεια ή η ένταση του ήχου είναι ανάλογη με το τετράγωνο του εύρους της αλλαγής στην πίεση ή την πυκνότητα. Η ένταση του ήχου μετριέται σε ντεσιμπέλ σε λογαριθμική κλίμακα. Η μέση ευαισθησία στο ανθρώπινο αυτί υπολογίζεται ως μηδενική. Μια αύξηση στον όγκο από u ντεσιμπέλ αντιστοιχεί σε αύξηση της ενέργειας του ήχου από ένα παράγοντα $10^{u/10}$. Μια αύξηση στον όγκο από το θρόισμα των φύλλων ή από ψίθυρο (~10 decibels) μέχρι τον δυνατότατο ήχο μιας συμφωνικής ορχήστρας (~80 decibels) αντιστοιχεί σε αύξηση της ενέργειας του ήχου από έναν παράγοντα του 10^7 (ή Δp ή u), είναι

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} \right)_0 (\Delta \rho)^2.$$

Από τη στιγμή που η κίνηση είναι ισεντροπική, οι παράγωγοι λαμβάνονται σε συνεχή εντροπία. Μπορούν να εκτιμηθούν από τη θερμοδυναμική σχέση $d\varepsilon = T dS - p dV = (p/\rho^2) d\rho$. Έχουμε

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{p_0}{\rho_0^2} \Delta \rho + \frac{c^2}{2\rho_0^2} (\Delta \rho)^2 - \frac{p_0}{\rho_0^3} (\Delta \rho)^2.$$

Η αύξηση στην εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα όγκου με την ίδια σειρά ακριβείας είναι

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon - \rho_0\varepsilon_0 &= (\rho_0 + \Delta\rho)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 \Delta\rho \\ &= \left(\varepsilon_0 + \frac{p_0}{\rho_0} \right) \Delta\rho + \frac{c^2}{2\rho_0} (\Delta\rho)^2 = h_0 \Delta\rho + \frac{c^2}{2\rho_0} (\Delta\rho)^2, \end{aligned}$$

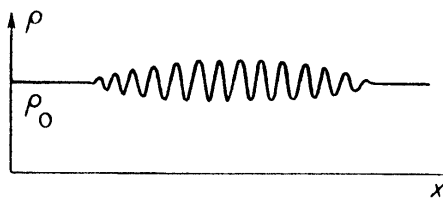
Όπου $h = \varepsilon + p/\rho$ είναι η συγκεκριμένη ενθαλπία που σχετίζεται.

Η πυκνότητα της εσωτερικής ενέργειας με τη διαταραχή είναι, με πρώτη εκτίμηση, ανάλογη στο $\Delta\rho$. Η πυκνότητα της κινητικής ενέργειας $\rho u^2/2 \approx \rho_0 u^2/2$ είναι μία ποσότητα δεύτερης τάξεως. Οι εξισώσεις (1.33) οι οποίες είναι έγκυρες για κύμα αεροπλάνου εν ώρα πτήσης δείχνουν ότι ο όρος δεύτερη τάξη στην έκφραση για την πυκνότητα της εσωτερικής ενέργειας και για τον όρο κινητική ενέργεια είναι ακριβώς ίδιοι. Άρα η συνολική πυκνότητα της ενέργειας διαταραχής είναι

$$E = h_0 \Delta\rho + \frac{c^2}{2\rho_0} (\Delta\rho)^2 + \frac{\rho_0 u^2}{2} = h_0 \Delta\rho + \rho_0 u^2. \quad (1.36)$$

Η αλλαγή πρώτης τάξεως στην παραπάνω διατύπωση σχετίζεται με την αλλαγή στον συνολικό όγκο του αερίου που συνέβη ως αποτέλεσμα της διαταραχής. Εάν η διαταραχή δημιουργήθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε ο συνολικός όγκος να παραμείνει αμετάβλητος, τότε η ενέργεια διαταραχής ολόκληρου του αερίου είναι μία ποσότητα δεύτερης τάξεως στο $\Delta\rho$, αφού ανάλογος όρος στο $\Delta\rho$ εξαφανίζεται κατά την όλη διαδικασία.

Εικόνα



Σχ. 1.3 Ένδειξη της πυκνότητας σε ένα σύνολο κυμάτων

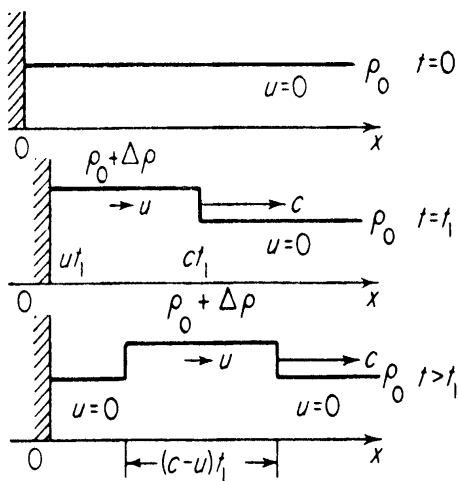
ολοκλήρωσης προς τον όγκο. Αυτή, για παράδειγμα, είναι μία περίπτωση σε ένα σύνολο κυμάτων, η οποία, εκτελείται στο εσωτερικό ενός αερίου καταλαμβάνοντας έναν απειροστικό χώρο και στην οποία το αέριο παραμένει αμετάβλητο. (Σχ.1.3)

Οι αλλαγές που συμβαίνουν στην πυκνότητα στα σημεία εκείνα που ασκείται πίεση αντισταθμίζονται από τις αλλαγές στα σημεία όπου παρατηρείται διαστολή, δεύτερης τάξεως ακρίβεια. Η ενέργεια λοιπόν ενός κρουστικού κύματος είναι μία ποσότητα δεύτερης τάξεως, ανάλογη στο τετράγωνο του εύρους*.

$$E_{sw} = \rho_o u^2. \tag{1.37}$$

Εάν η διαταραχή προκαλέσει κάποια αλλαγή στον όγκο του αερίου, τότε η ενέργεια της διαταραχής θα περιέχει έναν όρο ανάλογο της πρώτης δύναμης του $\Delta\rho$. Όμως, το αρχικό κλάσμα της ενέργειας που είναι ανάλογο σε $\Delta\rho$, μπορεί να «επιστραφεί» από το αέριο, αν η πηγή της διαταραχής επιστρέψει στην αρχική της θέση. Η ενέργεια που παραμένει στο διαταραγμένο αέριο θα είναι μία ποσότητα δεύτερης τάξεως. Ας υποθέσουμε πως στην αρχική χρονική στιγμή ένας φελλός ξεκινάει να κινείται στο ήρεμο αέριο με σταθερή ταχύτητα u (πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου, $u \ll c$). Στην αρχική στιγμή t_1 ο φελλός σταματάει στιγμιαία. Ένας παλμός πίεσης μήκους $(c-u)t_1 \approx ct_1$, του οποίου η ενέργεια είναι ισοδύναμη με τη δράση της εξωτερικής δύναμης κατά την κίνηση του φελλού, $\rho_o u t_1 = (\rho_o + \Delta\rho) u t_1 \approx \rho_o u t_1$ θα περάσει διαμέσου του αερίου.

Εικόνα



πίεσης που δημιουργείται από την κίνηση

Σχ. 1.4 Μετάδοση ενός παλμού

ενός φελλού μέσα σ' ένα αέριο

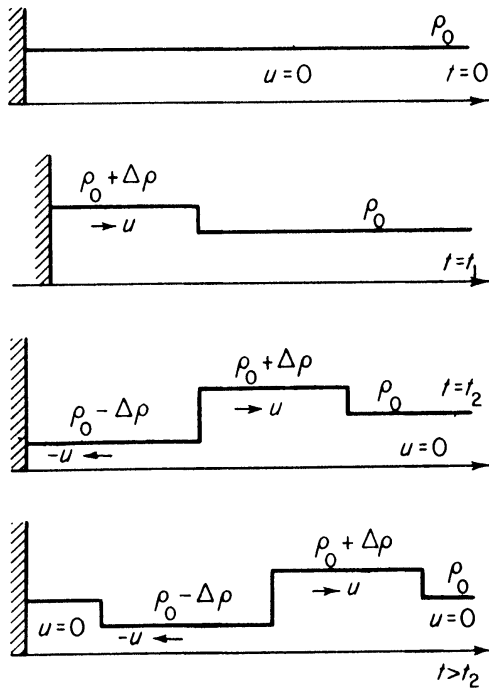
(η περίπτωση αυτή απεικονίζεται στο Σχ.1.4) Η ενέργεια, κατά πρώτη προσέγγιση είναι ανάλογη του εύρους του κύματος u , Δp , Δp , και του χρόνου πίεσης (ή αλλιώς του μήκους της διαταραχής). Ας υποθέσουμε τώρα πως ο φελλός επιστρέφει στην αρχική του θέση με τον ακόλουθο τρόπο: Η ταχύτητα u επιστρέφει «ακαριαία» στη στιγμή t_1 (γίνεται $-u$) και τη χρονική στιγμή $t_2=2t_1$ ο φελλός, αφού έχει ήδη επιστρέψει στην αρχική του θέση, σταματάει ακαριαία. Η διαταραχή θα έχει τώρα τη μορφή που απεικονίζεται στο Σχ.1.5, όπου γίνεται αναπαράσταση στις χρονικές στιγμές $t=0$, t_1 , t_2 , και $t>t_2$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε με ένα γρήγορο υπολογισμό κατά πρώτη προσέγγιση, ότι κατά τη διάρκεια της δεύτερης περιόδου από τη στιγμή t_1 έως τη στιγμή t_2 η δράση του αερίου στο φελλό είναι ισοδύναμη με εκείνη που ο φελλός ασκεί στο αέριο κατά την πρώτη περίοδο από την αρχή (0) ως τη χρονική στιγμή t_1 .

*Ο τύπος (1.37) θα πρέπει να είναι είτε μέσου χώρου είτε μέσου χρόνου

$$E_{sw}=\rho_0 \bar{u}^2 \quad (\bar{u} \sim \Delta p \sim \Delta p = 0, \text{ όταν } u^2 \sim (\Delta p)^2 \sim (\Delta p)^2 > 0).$$

Τα μήκη των αρνητικών και των θετικών σημείων του παλμού, κατά πρώτη προσέγγιση, είναι επίσης ισοδύναμα μεταξύ τους και είναι και τα δύο ισοδύναμα με $ct_1 = c(t_2 - t_1)$. Έτσι, αν προσθέσουμε τις ενέργειες στις περιοχές συμπίεσης και εξάπλωσης του παλμού, οι όροι πρώτης τάξεως ακυρώνονται. Όμως εάν όροι μεγαλύτερης τάξεως παραμένουν.

Εικόνα



Σχ.1.5. Διάδοση παλμών συμπίεσης και αραιώσης που δημιουργούνται από ένα έμβολο που εισχωρεί στο αέριο και ύστερα αποσύρεται στην αρχική θέση.

η ενέργεια θα περιέχει έναν όρο δεύτερης τάξεως και η πυκνότητα της ενέργειας διαταραχής θα αποδοθεί με τη γενική εξίσωση (1.37).

§4. Σφαιρικά Κρουστικά Κύματα

Στην απουσία απορρόφησης (ή αλλιώς, χωρίς να λάβουμε υπόψη την εσωτερική τριβή και τη συμπεριφορά της θερμότητας : βλ. §22), ούτε η αφθονία ούτε η πυκνότητα ενός επίπεδου κύματος μειώνονται με το χρόνο. Για παράδειγμα, οι παλμοί που απεικονίζονται στο Σχ.1.4 και στο Σχ1.5 παραμένουν ως έχουν χωρίς κάποιο είδος αλλαγής ούτε στη μορφή τους ούτε στο εύρος τους.

Αυτό όμως δε συμβαίνει και σε ένα σφαιρικό κύμα. Βάζοντας σε μία σειρά την εξίσωση της συνέχειας στην περίπτωση σφαιρικού συμμετρικού κύματος, έχουμε

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 u.$$

Η γραμμική εξίσωση της κίνησης είναι ίδια με το (1.28)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \Delta\rho}{\partial r}.$$

* Συγκεκριμένα τα μήκη των παλμών της πίεσης και αραιώσης θα διαφέρουν κατά μία ποσότητα $2ut_1$ ($t_2 - t_1 = t_1$).

Συνεπώς, όπως και στην επίπεδη περίπτωση, έχουμε μία εξίσωση κύματος για $\Delta\rho$, της οποίας η λύση, περιγράφοντας ένα κύμα που διαδίδεται από το κέντρο, είναι

$$\Delta\rho = \frac{f(r - ct)}{r}. \quad (1.38)$$

Αν λάβουμε υπόψιν μας σύντομους παλμούς των οποίων τα μεγέθη είναι πολύ μικρότερα από r , μπορούμε να πούμε ότι η μορφή του παλμού όπως δίνεται απ' τη λειτουργία $f(r-ct)$ δεν αλλάζει, και ότι το εύρος του κύματος μειώνεται αφού $1/r$. Αυτό είναι εντελώς φυσιολογικό, και είναι επίσης επακόλουθο των παραγόντων της ενέργειας. Ας υποθέσουμε ότι ένας παλμός ενός ορισμένου πλάτους Δr περνάει μέσα απ' το κέντρο. Όσο ο παλμός εξαπλώνεται / διαδίδεται, η μάζα του ρευστού, που ήδη κινείται και είναι σχεδόν ισοδύναμη με $\rho_0 4\pi r^2 \Delta r$, αυξάνεται σε αναλογία με το r^2 . Η ενέργεια του κρουστικού κύματος ανά μονάδα όγκου είναι ανάλογη με $(\Delta\rho)^2$. Από τη στιγμή που η συνολική ενέργεια διατηρείται, $(\Delta\rho)^2 r^2 = \text{const}$, και το εύρος θα πρέπει να μειωθεί αφού $\Delta\rho \sim 1/r$. Το σφαιρικό κύμα διαφέρει από το επίπεδο κύμα σε ακόμα έναν παράγοντα. Ας εντάξουμε την λύση (1.38) στην εξίσωση της κίνησης.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho_0} \left[\frac{f'(r-ct)}{r} - \frac{f(r-ct)}{r^2} \right],$$

και ας ολοκληρώσουμε την εξίσωση που προκύπτει σε σχέση με το χρόνο. Αποκτούμε την ακόλουθη εξίσωση για την ταχύτητα

$$u = \frac{c}{\rho_0} \left[\frac{f(r-ct)}{r} - \frac{\int_{r-ct}^{r-ct} f(\xi) d\xi}{r^2} \right] = \frac{c}{\rho_0} \left[\Delta\rho - \frac{\varphi(r-ct)}{r^2} \right], \quad (1.39)$$

η οποία διαφέρει από τη λύση του επίπεδου κύματος (1.33) με την παρουσία ενός πρόσθετου όρου. Με ένα επίπεδο κύμα στην περίπτωση που απεικονίζει το Σχ.1.4, το ρευστό μπορεί να συμπιεστεί μόνο στο σημείο της αναταραχής. Αυτό είναι αδύνατον στην περίπτωση σφαιρικού κύματος, και η περιοχή συμπίεσης πρέπει να ακολουθείται από μία περιοχή διαστολής. Πράγματι, έξω από την περιοχή που πραγματοποιείται η αναταραχή $\Delta\rho$ και u γίνονται μηδενικά. Στην περίπτωση επιπέδου κύματος, χάρη στην αναλογία $u \sim \Delta\rho$ αυτή η προϋπόθεση εκτελείται αυτόματα και ανεξάρτητα από τη μορφή του παλμού. Στην περίπτωση ενός σφαιρικού κύματος, όμως, αυτό είναι δυνατό μόνο όταν $\varphi(r-ct)=0$ έξω από το σημείο που πραγματοποιείται η αναταραχή, που σημαίνει ότι η εσωτερική περιοχή της αναταραχής ισούται με μηδέν.

$$\varphi(r-ct) = \int f(\xi) d\xi = \int r \Delta\rho dr = 0.$$

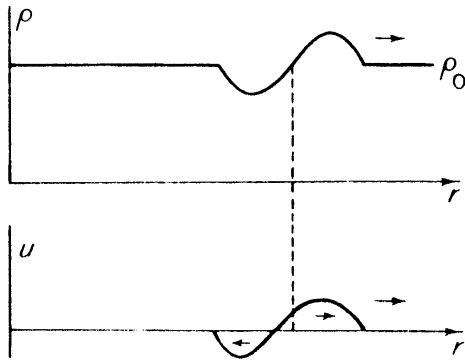
Είναι λοιπόν φανερό πως το $\Delta\rho$ αλλάζει σε ένα σφαιρικό κύμα, και ότι η περιοχή συμπίεσης ακολουθείται από μία περιοχή διαστολής.

Το πρόσθετο ρευστό που συμπεριλαμβάνεται στο κύμα είναι ισοδύναμο με $\int \Delta\rho 4\pi r^2 dr$.

Αφού $\Delta\rho \sim 1/r$, η πρόσθετη μάζα στο κύμα συμπίεσης αυξάνεται και εξαπλώνεται έξω από το κέντρο. Μία αύξηση στην ποσότητα του συμπιεσμένου ρευστού κατά τη διάρκεια της εξαπλώσεως προκαλεί την εμφάνιση ενός μικρότερου κύματος πυκνότητας το οποίο ακολουθεί το μεγαλύτερο κύμα ικανότητας.

Όπως και στην περίπτωση του επίπεδου κύματος, μία αλλαγή στην πίεση μέσα σε ένα σφαιρικό κύμα είναι ανάλογη με την αλλαγή στην πυκνότητα. Η ταχύτητα όμως, όπως απεικονίζεται

Εικόνα



Σχ. 1.6 Διανομή ταχύτητας και πυκνότητας σε ένα σφαιρικό κρουστικό κύμα.

στο (1.39) δεν είναι ανάλογη ούτε στο $\Delta\rho$ ούτε στο Δp . Στην πραγματικότητα, η ταχύτητα και η αλλαγή στην πυκνότητα (αντιστρέφουν τα σημεία τους) σε διαφορετικά σημεία, έτσι ώστε η διανομή της πυκνότητας και της ταχύτητας σε ένα κύμα που ξεκινάει απ' το κέντρο παίρνει τις μορφές που απεικονίζει το σχήμα 1.6.

§5. Χαρακτηριστικά

Αποδείχτηκε στην παράγραφο 3 ότι αν μικρές αναταραχές στην ταχύτητα και την πίεση (ή την πυκνότητα*) δημιουργούνται σε μια αρχική χρονική στιγμή t_0 σε οποιοδήποτε σημείο x_0 ενός στάσιμου αερίου με ομοιογενή πυκνότητα και πίεση, τότε θα ξεκινήσουν από αυτό το σημείο δύο κύματα που θα μεταφέρουν τις αναταραχές αυτές και στις δύο κατευθύνσεις με την ταχύτητα του ήχου. Οι μικρές αλλαγές στις μεταβλητές των κυμάτων, τα οποία διαδίδονται στα δεξιά στην θετική κατεύθυνση x , σχετίζονται με $\dot{\eta}$

$$\Delta_1 u = \frac{\Delta_1 p}{\rho_0 c} = \frac{c}{\rho_0} \Delta_1 \rho = f(x - ct).$$

Για ένα κύμα που διαδίδεται στα αριστερά οι παραπάνω σχέσεις έχουν ως εξής:

$$\Delta_2 u = -\frac{\Delta_2 p}{\rho_0 c} = -\frac{c}{\rho_0} \Delta_2 \rho = -f_2(x + ct).$$

Οι αυθαίρετες διαταραχές Δu και Δp που δημιουργούνται στην αρχική χρονική στιγμή μπορούν πάντα να διαιρεθούν σε δύο στοιχεία $\Delta u = \Delta_1 u + \Delta_2 u$, $\Delta p = \Delta_1 p + \Delta_2 p$ ικανοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, επειδή η αρχική αναταραχή διαδίδεται σε διαφορετικές κατευθύνσεις με τη μορφή δύο κυμάτων γενικά.

*Αφού η ροή είναι ισεντροπική, οι αλλαγές στην πυκνότητα και την πίεση δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά σχετίζονται μεταξύ τους με την θερμοδυναμική σχέση $\Delta p = c^2 \Delta \rho$.

†Εδώ χρησιμοποιούμε το Δu αντί για u για την συνοχή της σημείωσης.

Εάν οι αρχικές αναταραχές Δu και Δp δεν είναι τυχαίες, αλλά συνδέονται με μία από τις παραπάνω σχέσεις, τότε η αναταραχή θα περάσει από μία κατεύθυνση και μόνο (αυτό αντιστοιχεί στην εξαφάνιση μιας από τις λειτουργίες f_1 και f_2).

Εάν το αέριο δεν είναι σταθερό, αλλά κινείται ως μια ολότητα με σταθερή ταχύτητα u , τότε η εικόνα δεν αλλάζει, εκτός από το γεγονός ότι τα κύματα τώρα μεταφέρονται από την ορμή με τέτοιο τρόπο ώστε οι ταχύτητες της διάδοσής τους, σχετικές με έναν σταθερό παρατηρητή, γίνονται ισοδύναμες με $u+c$ (για ένα κύμα που κατευθύνεται “στα δεξιά”) και $u-c$ (για ένα κύμα που κατευθύνεται “στα αριστερά”). Αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχτεί αν τροποποιήσουμε τις εξισώσεις αεροδυναμικής σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων που κινείται με το αέριο με ταχύτητα u .

Ας υποθέσουμε τώρα πως συμβαίνουν αυθαίρετες μικρές αναταραχές στην ταχύτητα και στην πυκνότητα σε χρόνο t_0 και σε ένα σημείο x_0 , σε μία αυθαίρετη ισεντροπική ροή του αερίου που περιγράφεται από τους τύπους $u(x,t)$, $p(x,t)$ (ή $\rho(x,t)$, βλέπε την πρώτη υποσημείωση στην παράγραφο 5).

Αν λάβουμε υπ’ όψιν μια μικρή περιοχή για το σημείο x_0 και μια μικρή χρονική στιγμή για το χρονικό διάστημα, μπορούμε με μια πρώτη προσέγγιση να παραβλέψουμε τις αλλαγές στις ατάραχες λειτουργίες $u(x,t)$ και $p(x,t)$. Συνεπώς, οι αλλαγές στις ιδότητες $\rho(x,t)$ και $c(x,t)$ σε αυτή την περιοχή μπορούν επίσης να παραλειφθούν και οι λειτουργίες μπορούν να θεωρηθούν ως συνεχείς και ισοδύναμες με τις τιμές τους στο σημείο x_0 , t_0 . Τότε, η περιγραφή που δίνεται παραπάνω για τη διάδοση των αναταραχών είναι επίσης απολύτως εφαρμόσιμη σε αυτή την περίπτωση. Εάν οι αναταραχές, $\Delta u(x_0, t_0)$ και $\Delta p(x_0, t_0)$ είναι αυθαίρετες, μπορούν να διασπαστούν σε δύο συστατικά, ένα που θα ξεκινήσει να διαδίδεται “στα δεξιά” με την ταχύτητα $u_0 + c_0$ και ένα άλλο που θα διαδίδεται “στα αριστερά” με ταχύτητα $u_0 - c_0$. Εδώ u_0 και c_0 δηλώνουν τις τοπικές τιμές αυτών των ποσοτήτων στο σημείο x_0 , t_0 . Αφού u και c διαφέρουν από σημείο σε σημείο τότε οι κατευθύνσεις μέσα απ’ τις οποίες διαδίδονται οι αναταραχές στο επίπεδο x , t (που απεικονίζονται με τις εξισώσεις $dx/dt = u+c$ και $dx/dt = u-c$) θα σχηματίζουν καμπύλη για μια μεγάλη χρονική περίοδο. Αυτές οι καμπύλες στο επίπεδο x , t , κατά μήκος των οποίων διαδίδονται οι αναταραχές ονομάζονται χαρακτηριστικές καμπύλες, ή απλώς

χαρακτηριστικά. Στην περίπτωση μιας επίπεδης ισεντροπικής ροής υπάρχουν δύο τέτοιες ομάδες χαρακτηριστικών που απεικονίζονται ως εξής:

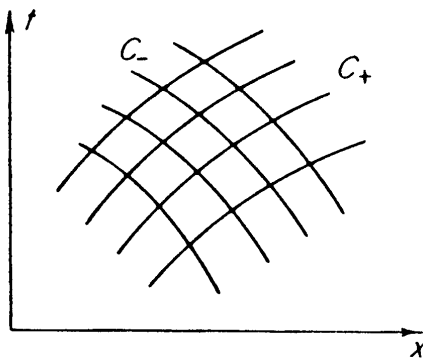
$$\frac{dx}{dt} = u + c, \quad \frac{dx}{dt} = u - c.$$

Ορίζονται ως C_+ και C_- αντίστοιχα. Δύο χαρακτηριστικά που το καθένα ανήκει σε κάθε μία απ' τις ομάδες C_+ και C_- , μπορούν να σχηματιστούν μέσα από κάθε σημείο στο επίπεδο x, t .

*Βάζουμε τη φράση “στα δεξιά” σε εισαγωγικά όταν $u > c$, το κύμα θα περάσει επίσης προς τα δεξιά, πιο αργά από το πρώτο. (Σημείωση του εκδότη. Ανάλογα η φράση στα δεξιά μπαίνει σε εισαγωγικά).

Γενικά τα χαρακτηριστικά σχηματίζουν καμπύλη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.7. Στο σημείο της κανονικής ροής, όπου u, p, c και ρ είναι συνεχή στον χώρο και το χρόνο, τα χαρακτηριστικά και των δύο ομάδων είναι ευθείες γραμμές.

Εικόνα



Εάν η ροή δεν είναι ισεντροπική αλλά μόνο αδιαβατική, που σημαίνει πως η εντροπία διαφορετικών σωματιδίων δεν αλλάζει με το χρόνο αλλά είναι διαφορετική για κάθε σωματίδιο,

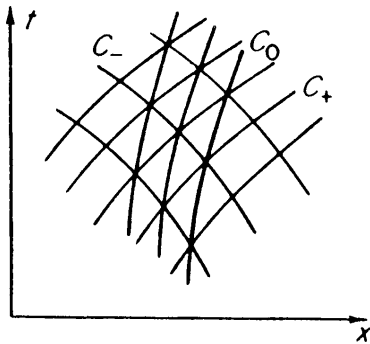
Σχ.1.7. Ένα σύνολο δύο ομάδων χαρακτηριστικών στην ισεντροπική περίπτωση.

τότε αναταραχές στην εντροπία είναι επίσης πιθανές. Από τη στιγμή που η κίνηση είναι αδιαβατική $DS/Dt = 0$, ή αλλιώς αφού κάθε αναταραχή στην εντροπία δεν συνοδεύεται

από κάποια αλλαγή στις άλλες μεταβλητές (p, ρ, u), τότε παραμένει μέσα στο σωματίδιο και εκτοπίζεται μαζί με το σωματίδιο κατά μήκος μιας αεροδυναμικής γραμμής. Συνεπώς, στην περίπτωση μη ισεντροπικής ροής αυτές οι γραμμές είναι επίσης χαρακτηριστικά.

Περιγράφονται από την εξίσωση $dx/dt = u$ και ορίζονται ως χαρακτηριστικά. Στην μη ισεντροπική ροή 3 χαρακτηριστικά περνούν μέσα από κάθε σημείο και το συνολικό επίπεδο x, t καλύπτεται από ένα σύνολο τριών ομάδων χαρακτηριστικών C_+, C_- και C (Σχήμα 1.8).

Εικόνα



Σχ. 1.8 Ένα σύνολο τριών ομάδων χαρακτηριστικών στην περίπτωση μη ισεντροπικής ροής.

Έως τώρα έχουμε συζητήσει τα χαρακτηριστικά ως καμπύλες στο επίπεδο x, t στις οποίες αναπτύσσονται μικρές διαταραχές. Αυτό όμως, δεν καλύπτει απόλυτα την έννοια των χαρακτηριστικών. Οι εξισώσεις της αεροδυναμικής μπορούν να τροποποιηθούν έτσι ώστε να περιέχουν παραγώγους των μεταβλητών της ροής μόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, στην περίπτωση της ισεντροπικής ροής δεν αναπτύσσονται μόνο μικρές διαταραχές κατά μήκος των χαρακτηριστικών αλλά αναπτύσσονται ακόμη συγκεκριμένοι συνδυασμοί των μεταβλητών της ροής.

Είναι γνωστό ότι η λειτουργία f των μεταβλητών x, t μπορεί να διαφοροποιηθεί σε σχέση με το χρόνο κατά μήκος μιας δεδομένης καμπύλης $x = \varphi(t)$ στο επίπεδο x, t . Η παράγωγος του χρόνου της λειτουργίας $f(x, t)$ κατά μήκος μιας αυθαίρετης καμπύλης $x = \varphi(t)$ ορίζεται από τη γωνία ανάμεσα στην εφαπτομένη επί της καμπύλης στο δεδομένο σημείο και του άξονα t $dx/dt = \varphi'$,

και είναι ισοδύναμη με

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_\varphi = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \varphi'.$$

Γνωρίζουμε ήδη τις δύο περιπτώσεις διαφοροποίησης κατά μήκος μίας καμπύλης: την μερική παράγωγο σε σχέση με το χρόνο $\partial/\partial t$ (κατά μήκος μιας καμπύλης $x = \text{const}$, $\varphi' = 0$) και την ολική παράγωγο $D/Dt = (\partial/\partial t) + u(\partial/\partial x)$ (κατά μήκος μιας οδού σε ένα σωματίδιο ή μιας αεροδυναμικής γραμμής $dx/dt = \varphi' = u$).

Ας τροποποιήσουμε τώρα τις εξισώσεις της επίπεδης αδιαβατικής κίνησης έτσι, ώστε να περιέχουν παραγώγους των μεταβλητών ροής κατά μήκος των χαρακτηριστικών μόνο. Για να γίνει αυτό διαγράφουμε από την εξίσωση της συνέχειας την παράγωγο της πυκνότητας και την αντικαθιστούμε με την πίεση.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Από τη στιγμή που η πυκνότητα σχετίζεται με την πίεση και την εντροπία από τη θερμοδυναμική σχέσης $\rho = \rho(p, S)$, και αφού $DS/Dt = 0$, τότε προκύπτει ότι

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S \frac{Dp}{Dt} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_p \frac{DS}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt}.$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην εξίσωση και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας επί c/ρ , βρίσκουμε

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Προσθέτουμε αυτό στην εξίσωση της κίνησης και έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Και βρίσκουμε

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{1}{\rho c} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial p}{\partial x}\right] = 0.$$

Αφαιρώντας τη μία εξίσωση από την άλλη, βρίσκουμε ανάλογα,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{1}{\rho c} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial p}{\partial x}\right] = 0.$$

Η πρώτη από τις παραπάνω εξισώσεις περιέχει παραγώγους μόνο κατά μήκος της καμπύλης C_+ , και η δεύτερη μόνο κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης C_- .

Παρατηρώντας πως η αδιαβατική κατάσταση $DS/Dt = 0$ μπορεί να θεωρηθεί ως εξίσωση κατά μήκος των χαρακτηριστικών C_0 , μπορούμε να γράψουμε τις αεροδυναμικές εξισώσεις ως εξής:

$$du + \frac{1}{\rho c} dp = 0 \quad \text{along } C_+ : \frac{dx}{dt} = u + c, \quad (1.40)$$

$$du - \frac{1}{\rho c} dp = 0 \quad \text{along } C_- : \frac{dx}{dt} = u - c, \quad (1.41)$$

$$dS = 0 \quad \text{along } C_0 : \frac{dx}{dt} = u. \quad (1.42)$$

Στις συντεταγμένες του Lagrange οι εξισώσεις για τα χαρακτηριστικά γίνονται ως εξής: (βλέπε (1.18))

$$C_+ : \frac{da}{dt} = \frac{\rho c}{\rho_0}; \quad C_- : \frac{da}{dt} = -\frac{\rho c}{\rho_0}; \quad C_0 : \frac{da}{dt} = 0.$$

Οι εξισώσεις κατά μήκος των χαρακτηριστικών είναι ίδιες όπως (1.40)-(1.42).

Στη ροή που είναι σφαιρικά συμμετρική, οι εξισώσεις για τα χαρακτηριστικά με βάση τις συντεταγμένες του Euler είναι οι ίδιες όπως και στην περίπτωση επίπεδης ροής (χρειάζεται μόνο να αντικατασταθεί η συντεταγμένη x από την ακτίνα r). Οι εξισώσεις κατά μήκος των χαρακτηριστικών C_{\pm} , όμως περιέχουν πρόσθετους όρους που εξαρτώνται από τις ίδιες τις λειτουργίες και όχι από τις παραγώγους τους.

$$du \pm \frac{1}{\rho c} dp = \mp \frac{2uc}{r} dt \quad \text{along } C_{\pm} : \frac{dr}{dt} = u \pm c.$$

Σε πολλές περιπτώσεις οι εξισώσεις της αεροδυναμικής γραμμένες κατά μήκος των χαρακτηριστικών είναι περισσότερο βολικές για αριθμητική ολοκλήρωση από την συνηθισμένη μορφή τους.

§6. Επίπεδη ισεντροπική ροή. Σταθερές του Riemann.

Στην ισεντροπική ροή η εντροπία, ούσα συνεχής στο χώρο και το χρόνο, εξαφανίζεται εντελώς από τις εξισώσεις. Η ροή μπορεί να περιγραφεί από δύο λειτουργίες, την ταχύτητα $u(x,t)$ και από οποιαδήποτε θερμοδυναμική μεταβλητή:

$\rho(x,t)$, $p(x,t)$ ή $c(x,t)$. Οι τελευταίες μεταβλητές σχετίζονται μοναδικά μεταξύ τους σε

οποιοδήποτε σημείο από τις καθαρά θερμοδυναμικές σχέσεις: $\rho = \rho(p)$, $c = c(\rho)$ ή $p = p(\rho)$, $c = c(\rho)$; $c^2 = dp/d\rho$.

Οι διαφορετικές εκφράσεις $du + dp/\rho c$ και $du - dp/\rho c$ αντικαθιστούν τις συνολικές διαφορικές τιμές των ποσοτήτων.

$$\begin{aligned} J_+ &= u + \int \frac{dp}{\rho c} = u + \int c \frac{d\rho}{\rho}, \\ J_- &= u - \int \frac{dp}{\rho c} = u - \int c \frac{d\rho}{\rho}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

Οι οποίες ονομάζονται αμετάβλητες του Riemann (βλέπε, παρ [14])

Σύμφωνα με τις θερμοδυναμικές σχέσεις οι ολοκληρωτικές ποσότητες $\int \frac{dp}{\rho c} = \int \frac{c d\rho}{\rho}$ μπορούν να εκφραστούν με βάση των θερμοδυναμικών μεταβλητών, όπως την ταχύτητα του ήχου c . Για παράδειγμα, σε ένα τέλειο αέριο με συγκεκριμένες συνεχείς θερμότητας, έχουμε:

$$P = \text{const } \rho^\gamma, \quad c^2 = \gamma \text{const } \rho^{\gamma-1}$$

και

$$J_\pm = u \pm \frac{2}{\gamma - 1} c. \quad (1.44)$$

Οι αμετάβλητες του Riemann προσδιορίζονται μέσα σε μία αυθαίρετη σταθερά, η οποία μπορεί πάντα να χρησιμοποιείται για ευκολία, όπως έγινε παραπάνω (1.44)

Οι εξισώσεις (1.40) και (1.41) δείχνουν ότι στην ισηντροπική ροή οι αμετάβλητες Riemann είναι σταθερές κατά μήκος των χαρακτηριστικών.

$$\begin{aligned} dJ_+ &= 0, \quad J_+ = \text{const} \quad \text{along } C_+ : \frac{dx}{dt} = u + c; \\ dJ_- &= 0, \quad J_- = \text{const} \quad \text{along } C_- : \frac{dx}{dt} = u - c. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση των σχέσεων που επικρατούν στην περίπτωση των κρουστικών κυμάτων τα οποία εξαπλώνονται μέσα σ' ένα αέριο με σταθερή ταχύτητα, πυκνότητα και πίεση. Αυτές οι σχέσεις μπορούν να προκύψουν από τις γενικές εκφράσεις για τις αμετάβλητες ως μια πρώτη προσέγγιση, θέτοντας την ισότητα $u = u_0 + \Delta u$, $p = p_0 + \Delta p$, προκύπτει με πρώτη προσέγγιση ότι

$$J_\pm = u_0 + \Delta u \pm \int \frac{d \Delta p}{\rho_0 c_0} = \Delta u \pm \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} + \text{const}. \quad (1.46)$$

Οι εξισώσεις των χαρακτηριστικών δίνονται με πρώτη προσέγγιση από την παρακάτω ισότητα

$$\frac{dx}{dt} = u_0 \pm c_0, \quad x = (u_0 \pm c_0)t + \text{const.}$$

Έτσι, η ποσότητα $\Delta u + \Delta p / \rho_0 c_0$ διατηρείται κατά μήκος της οδού $x = (u_0 + c_0)t + \text{const.}$ Αυτό δείχνει πως μπορεί να αναπαρασταθεί ως μία λειτουργία της σταθεράς στην εξίσωση $x = (u_0 + c_0)t + \text{const}$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\Delta u + \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} = 2f_1[x - (u_0 + c_0)t].$$

*Στη μη ισεντροπική ροή τα p και c είναι λειτουργίες των δύο μεταβλητών p και S , και οι εκφράσεις $du + dp / \rho c$ δεν είναι πια εντελώς διαφορικές. Σε αυτή την περίπτωση οι συνδυασμοί (1.43) δεν έχουν μια συγκεκριμένη φυσική έννοια.

Κατά μήκος της οδού $x = (u_0 - c_0)t + \text{const}$ η ποσότητα διατηρείται.

$$\Delta u - \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} = -2f_2[x - (u_0 - c_0)t]$$

Οι αλλαγές στην ταχύτητα και την πίεση αναπαρίστανται ως υπερίσχυση των δύο κυμάτων f_1 και f_2 που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις $\Delta u = f_1 - f_2$, $\Delta p = \rho_0 c_0 (f_1 + f_2)$, όπου οι μεταβλητές σε κάθε εξίσωση συσχετίζονται από τις σχέσεις που δόθηκαν προωτέρω.

$$\Delta_1 u = \frac{\Delta_1 p}{\rho_0 c_0} = f_1, \quad \Delta_2 u = -\frac{\Delta_2 p}{\rho_0 c_0} = -f_2.$$

Οι αμετάβλητες Riemann J_+ και J_- μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν την κίνηση ενός αερίου στη θέση των παλιών μεταβλητών – την ταχύτητα u και μιας από τις θερμοδυναμικές ποσότητες (πχ. την ταχύτητα του ήχου c). Συνδέονται μοναδικά με τις μεταβλητές u και c από τις εξισώσεις του (1.43). Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις για u και c , μπορούμε να τροποποιήσουμε από τις λειτουργίες J_+ και J_- στις λειτουργίες u και c . Για παράδειγμα, για ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες, έχουμε από το (1.44),

$$u = \frac{J_+ + J_-}{2}; \quad c = \frac{\gamma - 1}{4} (J_+ - J_-).$$

Θεωρώντας τις αμετάβλητες ως λειτουργίες των ανεξαρτήτων μεταβλητών x και t , οι εξισώσεις των χαρακτηριστικών μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$C_+ : \frac{dx}{dt} = F_+(J_+, J_-); \quad C_- : \frac{dx}{dt} = F_-(J_+, J_-). \quad (1.47)$$

Εδώ F_+ και F_- είναι γνωστές λειτουργίες των οποίων η μορφή καθορίζεται μόνο από τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού. Για ένα τέλειο αέριο με συγκεκριμένες σταθερές θερμότητες, έχουμε

$$F_+ = \frac{\gamma + 1}{4} J_+ + \frac{3 - \gamma}{4} J_- ; \quad F_- = \frac{3 - \gamma}{4} J_+ + \frac{\gamma + 1}{4} J_-.$$

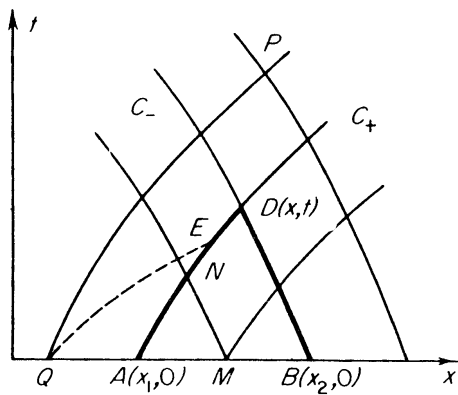
Οι εξισώσεις (1.45) δείχνουν ότι τα χαρακτηριστικά έχουν μια ιδιότητα που τους επιτρέπει να διατηρούν μία σταθερή τιμή μιας μεταβλητής. Αφού $J_+ = \text{const}$ κατά μήκος μιας συγκεκριμένης C_+ καμπύλης, μια αλλαγή στην κλίση της καμπύλης καθορίζεται μόνο από την αλλαγή στην αμετάβλητη J_- . Παρομοίως, το J_- είναι συνεχές κατά μήκος μιας C_- καμπύλης και η αλλαγή στην κλίση, στην πορεία από ένα σημείο στο επίπεδο x, t σε ένα άλλο σημείο καθορίζεται μόνο από την αλλαγή στην αμετάβλητη J_+ .

Οι εξισώσεις ροής όταν είναι διατυπωμένες σε μορφή χαρακτηριστικών κάνουν ιδιαίτερα φανερή την αιτιακή σχέση των φαινομένων στην αεριοδυναμική. Ας λάβουμε τώρα υπ' όψιν κάθε επίπεδη ισεντροπική ροή αερίου σε αόριστο χώρο.

Θεωρούμε ότι στην αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, οι αναταραχές στις μεταβλητές της ροής καθορίζονται κατά μήκος της συντεταγμένης x : $u(x, 0)$ και $c(x, 0)$ ή ισοδύναμα, καθορίζονται οι αναταραχές των μεταβλητών $J_+(x, 0)$ και $J_-(x, 0)$.

Ένα σύνολο από χαρακτηριστικά C_+ και C_- , προέρχονται από διαφορετικά σημεία του άξονα x , υπάρχει στο επίπεδο x, t (Σχήμα 1.9)*. Οι τιμές των μεταβλητών της ροής σε οποιοδήποτε σημείο $D(x, t)$

Εικόνα



Σχ.1.9 Ένα διάγραμμα x, t , απεικονίζει το πεδίο της εξάρτησης.

(το σημείο x της συντεταγμένης σε χρόνο t)

καθορίζεται μόνο από τις τιμές των ποσοτήτων στα αρχικά σημεία $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$:

$$J_+(x, t) = J_+(x_1, 0); \quad J_-(x, t) = J_-(x_2, 0).$$

Για παράδειγμα, λύνοντας αυτές τις εξισώσεις για u και c για ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμοότητες, μπορούμε να γράψουμε τις φυσικές μεταβλητές στο σημείο D αναλυτικά.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{c_1 - c_2}{2}, \\ c(x, t) &= \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_1 - u_2}{2}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

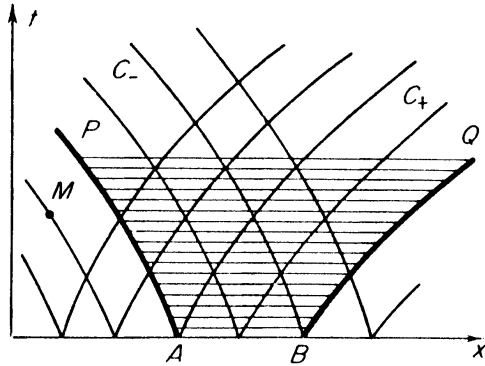
όπου u_1 και c_1 είναι τιμές στο σημείο $A(x_1, 0)$ και u_2 και c_2 αναφέρονται στο σημείο $B(x_2, 0)$.

Προφανώς, δεν μπορούμε να υποστηρίξουμε πως η κατάσταση του αερίου στο σημείο D εξαρτάται αποκλειστικά από τις δεδομένες αρχικές συνθήκες A και B , επειδή η θέση του σημείου D όπως και το σημείο τομής των χαρακτηριστικών C_+ και C_- , προερχόμενα από τα σημεία A και B , εξαρτάται από τα paths αυτών των χαρακτηριστικών. Αυτά τα **paths** καθορίζονται με το να επιβάλλουμε τις αρχικές συνθήκες κατά μήκος του συνολικού τμήματος AB του άξονα x . Για παράδειγμα, η κλίση της C_+ καμπύλης AD στο ενδιάμεσο σημείο N (βλέπε σχήμα 1.9) δεν καθορίζεται μόνο από τη σταθερά $J_+(A)$, αλλά επίσης από την τιμή της $J_-(M)$ που έχει περάσει στο σημείο N από το ενδιάμεσο σημείο M του τμήματος AB .

*Ένα τέτοιο σύνολο καμπύλων μπορεί να δημιουργηθεί μόνο αφού το πρόβλημα λυθεί.

Η κατάσταση του αερίου στο σημείο όμως, καθορίζεται αποκλειστικά από τις αρχικές συνθήκες στο τμήμα AB του άξονα x και είναι εντελώς ανεξάρτητα από τις αρχικές τιμές εκτός του τμήματος. Μια μικρή αλλαγή στις αρχικές συνθήκες στο σημείο Q δεν θα έχει επίπτωση στην κατάσταση του αερίου στο σημείο D επειδή πολύ απλά η διαταραχή που δημιουργείται από αυτή την αλλαγή δεν θα μπορεί να φτάσει ως το σημείο x στη χρονική στιγμή t . Θα φτάσει στο σημείο αυτό μεταγενέστερα (στο σημείο P κατά μήκος της C_+ χαρακτηριστικής καμπύλης QP). Με τον ίδιο τρόπο, η αρχική κατάσταση του αερίου κατά μήκος του τμήματος AB του άξονα x μπορεί να επηρεάσει την κατάσταση του αερίου σε ακόλουθες χρονικές στιγμές μόνο σε αυτά τα σημεία της περιοχής που συνδέονται με την C_+ καμπύλη AP και την C_- καμπύλη BQ (Σχήμα 1.10).

Εικόνα



Σχήμα 1.10. Ένα διάγραμμα x, t που απεικονίζει την περιοχή επίδρασης.

Δεν υπάρχει επίπτωση στην κατάσταση του αερίου στο σημείο M , αφού τα “σήματα” από τις αρχικές συνθήκες στο τμήμα AB δεν μπορούν να φτάσουν ως το σημείο X_M τη χρονική στιγμή t_M .

Ας τονίσουμε όμως πως η παραπάνω ανάλυση τα αιτιότητας των φαινομένων της αεροδυναμικής είναι έγκυρη μόνο όταν οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας δεν τέμνονται μεταξύ τους.

Για παράδειγμα, αν η C_+ καμπύλη που προέρχεται από το σημείο Q (Σχήμα 1.9) διασχίσει τη διαδρομή QE , όπως απεικονίζεται από τη διακεκομμένη γραμμή, τότε η κατάσταση του αερίου στο σημείο Q θα επηρέαζε την κατάσταση στο σημείο D .

Όμως, στις περιοχές συνεχόμενης ροής οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ίδιας ομάδας δεν τέμνονται ποτέ μεταξύ τους, αφού μία τέτοια τομή θα οδηγούσε σε μη μοναδικότητα των μεταβλητών της ροής. Η σταθερά J_+ θα είχε δύο διαφορετικές τιμές στο σημείο τομής των δύο C_+ χαρακτηριστικών, αντίστοιχες των τιμών του J_+ που συνδέονται και με τις δύο χαρακτηριστικές καμπύλες. Από την άλλη πλευρά, σε οποιοδήποτε σημείο στο επίπεδο x, t μπορεί να υπάρξει μόνο μια τιμή των J_+

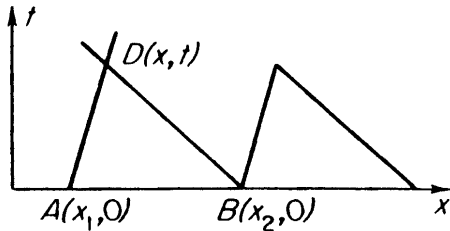
και J_- που προκύπτει από τις μοναδικές τιμές της ταχύτητας του ήχου στο σημείο αυτό.

Όπως θα δούμε και παρακάτω, η τομή μεταξύ των χαρακτηριστικών της ίδιας οικογένειας οδηγεί σε διακοπή της συνέχειας της ροής και στη δημιουργία ασυνεχειών στις μεταβλητές ροής που ονομάζονται κρουστικά κύματα.

Είναι πιθανόν να σχηματίσουμε χαρακτηριστικές καμπύλες σε ολόκληρο το επίπεδο x, t μόνο εάν είναι γνωστή η λύση του αεροδυναμικού προβλήματος. Εάν η λύση δεν μας είναι γνωστή, τότε δεν είναι εφικτό να δώσουμε την ακριβή θέση του σημείου D στο σχήμα 1.9, ως σημείο τομής των δύο χαρακτηριστικών που προέρχονται από τα σημεία A και B .

Είναι όμως εφικτό να βρούμε στο περίπου το σημείο της τομής αν αντικαταστήσουμε τα καμπυλωτά μονοπάτια AD και BD με ευθείες γραμμές των οποίων οι κλίσεις συνδέονται με τις αρχικές τιμές u_1, c_1 και u_2, c_2 στα σημεία A και B (ή $J_+(A), J_-(B)$). (Σχήμα 1.11). Έχοντας επιλέξει τα σημεία A και B αρκετά κοντά μεταξύ τους

Εικόνα



Σχ.1.11. Τοπική προσέγγιση των χαρακτηριστικών με ευθείες γραμμές.

ώστε η απόκλιση από την αντικατάσταση των πραγματικών καμπυλών με ευθείες γραμμές να είναι μικρή, μπορούμε να βρούμε τη θέση του σημείου τομής από τους τύπους:

$$x - x_1 = (u_1 + c_1)t, \quad x - x_2 = (u_2 - c_2)t.$$

Οι τιμές των u και c στο σημείο της τομής καθορίζονται από το (1.48). Αυτή η διαδικασία είναι στην ουσία η πιο απλή μέθοδος για την αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων (1.45). Ας καλύψουμε το επίπεδο x, t με ένα πλέγμα από τρίγωνα παρόμοια με το ADB είναι πιθανόν να περάσουμε διαδοχικά μέσα από τη λύση των εξισώσεων σε σχέση με το χρόνο, ξεκινώντας με τις αρχικές συνθήκες $u(x, 0), c(x, 0)$, ή $J_+(x, 0), J_-(x, 0)$.

§7. Επίπεδη ισεντροπική ροή του αερίου σε μία περιορισμένη περιοχή.

Ας εξετάσουμε τώρα κάθε επίπεδη ισεντροπική ροή ενός αερίου σε μία περιορισμένη περιοχή. Ας υποθέσουμε πως το αέριο καταλαμβάνει το χώρο ανάμεσα σε δύο επίπεδες επιφάνειες – έμβολα – των οποίων οι κινήσεις περιγράφονται από τις ισότητες $x_1 = \psi_1(t)$ και $x_2 = \psi_2(t)$. Οι συντεταγμένες των εμβόλων στην αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ είναι x_{10}

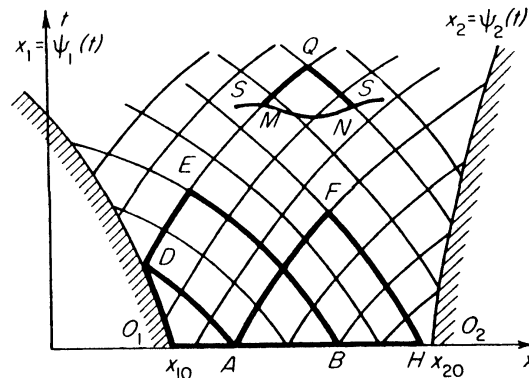
και x_{20} . Οι διαταραχές στην ταχύτητα u και της θερμοδυναμικής μεταβλητής c κατά μήκος της συντεταγμένης x στο διάστημα $x_{10} < x < x_{20}$ στην αρχική χρονική στιγμή $u(x, 0)$ και $c(x, 0)$ συγκεκριμενοποιούνται ή ισοδύναμα, οι διαταραχές των σταθερών $J_+(x, 0)$ και $J_-(x, 0)$ είναι δεδομένες.

Στο σχήμα 1.12 απεικονίζεται το πλέγμα των χαρακτηριστικών καμπυλών καθώς και τα σύνορα των εμβόλων στο επίπεδο x, t . Σημεία όπως το F , μέσα απ' τα οποία περνούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες C_+ και C_- που προέρχονται από σημεία εντός του διαστήματος $O_1 O_2$ του άξονα x , δεν διαφέρουν από τα σημεία ενός αερίου σε ένα μη περιορισμένο μέσο. Όπως συζητήθηκε παραπάνω, οι αρχικές τιμές των αμετάβλητων J_+ και J_- μεταφέρονται σε αυτά τα σημεία. Ας εξετάσουμε τώρα ένα σημείο στο σύνορο ενός εμβόλου, για παράδειγμα το σημείο D στο αριστερό έμβολο. Μόνο μία σταθερά J_- μεταφέρεται στο σημείο D από το "past" μεταφέρεται κατά μήκος της C_- χαρακτηριστικής καμπύλης που προέρχεται από το σημείο A του αρχικού τμήματος $O_1 O_2$ με τέτοιο τρόπο ώστε $J_-(D) = J_-(A)$.

Το δεύτερο αμετάβλητο J_+ δεν μεταφέρεται στο σημείο D επειδή η χαρακτηριστική καμπύλη C_+ δεν φτάνει ως το σημείο D (από το "past").

Αντίθετα, μία C_+ χαρακτηριστική καμπύλη ξεκινά από το σημείο D (μελλοντικά) φέρνοντας μαζί της την τιμή της σταθεράς J_+ που παράγεται στο σημείο αυτό. Η κατάσταση του αερίου στο σημείο D καθορίζεται από την τιμή της μεταβλητής J_- .

και από μία άλλη ποσότητα. Η άλλη ποσότητα, είναι η ταχύτητα u , η οποία χάρη στις συνθήκες των ορίων συμπίπτει στο



Σχήμα 1.12. Σχήμα των χαρακτηριστικών για μία επίπεδη ισεντροπική ροή ρευστού ανάμεσα σε δύο έμβολα.

σημείο D με τη γνωστή ταχύτητα του αριστερού εμβόλου $u_1(D)$. Αυτό το ζευγάρι των ποσοτήτων $J_-(D) = J_-(A)$ και $u = u_1(D)$ αντικαθιστά τώρα το ζευγάρι των ποσοτήτων J_+ και J_- , που φτάνει στα σημεία του αερίου που βρίσκονται σε επαφή με τα έμβολα. Στο σημείο D η δεύτερη μεταβλητή J_+ καθορίζεται από τις ποσότητες $J_-(D)$ και $u_1(D)$ ακολουθώντας τη σχέση $J_+(D) = 2u_1(D) - J_-(D)$.

Αυτή η μεταβλητή μεταφέρεται από τη χαρακτηριστική καμπύλη C_+ . Τώρα, για παράδειγμα η χαρακτηριστική καμπύλη C_- που φτάνει στο σημείο E ξεκινά από το σημείο B του αρχικού τμήματος του άξονα x και φέρνει μαζί της τη μεταβλητή $J_-(B)$, έτσι ώστε $J_-(E) = J_-(B)$. Από την άλλη, η χαρακτηριστική καμπύλη C_+ που φτάνει από το σημείο D στα σύνορα του εμβόλου φέρνει μαζί της τη σταθερά J_+ ισοδύναμο του $J_+(D)$, έτσι ώστε $J_+(E) = J_+(D)$.

Επομένως, η κατάσταση του αερίου στο σημείο E εξαρτάται μόνο από τις ιδότητες $J_-(B)$, $u_1(D)$ και $J_-(A)$, κατά τις συνθήκες που επικρατούν στα σημεία A , B και D . Όμως η τοποθεσία του σημείου E εξαρτάται από τα διαστήματα O_1D , O_2B . Καταλήγουμε ότι στην περίπτωση της ροής ενός αερίου σε περιορισμένη περιοχή, η κατάσταση του αερίου σε οποιοδήποτε σημείο δεν εξαρτάται μόνο από τις αρχικές συνθήκες, αλλά επίσης από τις οριακές συνθήκες.

Γενικά, η κατάσταση του αερίου σε ένα αυθαίρετο σημείο του επιπέδου χ , t καθορίζεται από τον ορισμό των τιμών u και c ή αλλιώς των J_+ και J_- σε ένα τμήμα μιας αυθαίρετης καμπύλης η οποία απομονώνεται από τις χαρακτηριστικές καμπύλες C_+ και C_- που περνούν από το σημείο που εξετάζεται. Για παράδειγμα, η κατάσταση στο σημείο Q καθορίζεται από την κατάσταση στο τμήμα MN της καμπύλης S (βλέπε σχήμα 1.12).

Με παρόμοιο τρόπο η σταθερά J_+ μεταφέρεται από το “*past*” στο δεξί έμβολο κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης C_+ και η C_- καμπύλη ξεκινάει από τα σημεία του εμβόλου και μεταφέρει στο “μέλλον” τη σταθερά J_- . Οι τιμές της σταθεράς J_- καθορίζονται από τις τιμές της σταθεράς J_+ και τις τιμές της ταχύτητας u του εμβόλου (που ισοδυναμεί με την ταχύτητα του επιπέδου του αερίου που είναι προσκείμενο στο έμβολο).

Η πίεση στο έμβολο καθορίζεται αποκλειστικά από τη μία εκ των σταθερών και από την ταχύτητα του εμβόλου. Ας εξετάσουμε τώρα για παράδειγμα, το σημείο D στο αριστερό έμβολο. Υποθέτουμε πως το αέριο είναι τέλει με σταθερές συγκεκριμένες θερμοότητες. Η αρχική ταχύτητα του αερίου και η ταχύτητα του ήχου στο σημείο A δηλώνονται από το u_A και c_A , αντίστοιχα και η ταχύτητα του εμβόλου στο σημείο D δηλώνεται από το u_{1D} . Η επιτάχυνση ταχύτητα του αερίου και η ταχύτητα του ήχου στο σημείο D προκύπτουν από

$$u_D = u_{1D}, \quad J_- = u_D - \frac{2}{\gamma - 1} c_D = u_A - \frac{2}{\gamma - 1} c_A,$$

από όπου προκύπτει

$$c_D = c_A + \frac{\gamma - 1}{2} (u_{10} - u_A)$$

ή σύμφωνα με τη σταθερά

$$c_D = \frac{\gamma - 1}{2} [u_{10} - J_-(A)].$$

Η πίεση στο έμβολο p_0 σχετίζεται με την ταχύτητα του ήχου c_D με έναν καθαρά θερμοδυναμικό τρόπο όπου $p_D = \text{const } c_D^{2\gamma/(\gamma-1)}$.

Για όλα τα παραπάνω μπορούμε να δώσουμε ένα καθαρά φυσικό νόημα στις σταθερές του Riemann. Ας εξετάσουμε το ακόλουθο πείραμα.

Σε χρόνο t και σε ένα σημείο x εισάγουμε ένα επίπεδο πιάτο παράλληλα στην επιφάνεια του εμβόλου. Ύστερα τοποθετούμε ένα μανόμετρο στην αριστερή πλευρά του πιάτου που είναι ευαίσθητο στις αλλαγές της πίεσης του αερίου σε αυτή την πλευρά.

Η σταθερή καμπύλη $J_+ = u + \int dp/\rho c = u + w(p)$ φτάνει στα αριστερά του μανόμετρου τη χρονική στιγμή t στο σημείο χ . Εδώ u και p είναι η ταχύτητα και η πίεση στο αέριο που δεν

μεταβάλλονται από το πιάτο ($w(p)$ είναι μια λειτουργία της πίεσης που εξαρτάται μόνο από τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του αερίου και από την εντροπία του). Τη χρονική στιγμή t το αέριο κινείται πιο αργά κοντά στο δίσκο και σταματά, αφού ο δίσκος είναι σε αδράνεια.

Η νέα πίεση στα αριστερά του *plate*, που συνδέεται με το αδρανές αέριο ($u = 0$), δηλώνεται με p_1 . Τότε $J_+ = u + w(p) = (p_1)$.

Το μανόμετρο θα υπολογίσει την πίεση p_1 . Αφού η λειτουργία w είναι γνωστή, η κλίμακα του μονόμετρου μπορεί να υπολογιστεί να δώσει αμέσως την τιμή της σταθεράς J_+ . Με παρόμοιο τρόπο, ένα μανόμετρο τοποθετημένο στη δεξιά πλευρά του δίσκου θα μετρήσει τη σταθερά J_- που έρχεται από τα δεξιά.

Εάν τοποθετήσουμε ένα πολύ λεπτό πιάτο κάθετα στην επιφάνεια του εμβόλου και παράλληλα στην κατεύθυνση της ταχύτητας της ροής έτσι ώστε το αέριο να περνά ελεύθερα δίπλα από το πιάτο χωρίς καμία αλλαγή στην ταχύτητά του, το μανόμετρο τότε θα υπολογίσει την πίεση p της ατάραχης ροής. Ρυθμίζοντας το μανόμετρο να δώσει κατευθείαν την τιμή του $w(p)$, τότε θα μετρήσει το συνδυασμό των σταθερών

$$w(p) = \frac{1}{2}(J_+ - J_-).$$

§8. Απλά κύματα

Η εξίσωση (1.46) που περιγράφει τη διάδοση μικρών διαταραχών (ακουστικά κύματα) σε ένα αέριο δείχνει ότι αν το κύμα διαδίδεται μόνο προς μία κατεύθυνση, τότε μία από τις σταθερές είναι συνεχής και στο χρόνο και στο χώρο. Έτσι, αν το κύμα κινείται στα δεξιά και $\Delta u = (x,t) = \Delta p(x,t) / \rho_0 c_0 = f_1[x - (u_0 + c_0)t]$, τότε η σταθερά J_- είναι συνεχής:

$$J_- = \Delta u - \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} + \text{const} = \text{const}.$$

Εάν το κύμα κινείται προς τα αριστερά, τότε η σταθερά J_+ είναι συνεχής.

Θα αποδείξουμε ότι η ύπαρξη κυμάτων που κινούνται προς μία κατεύθυνση δεν είναι περιορισμένη σε αυτές τις περιπτώσεις στις οποίες το εύρος των κυμάτων είναι μικρό, για το οποίο έχουμε δει πως μία από τις σταθερές του Riemann παραμένει συνεχής. Πρώτα παρατηρούμε πως είναι δυνατόν να επιτευχθεί πρακτικά η συνέχεια μίας από τις σταθερές, για παράδειγμα της J_- . Εάν το αέριο καταλαμβάνει μία μη περιορισμένη περιοχή, είναι αρκετό να δώσουμε τις αρχικές διαταραχές $u(x, 0)$ και $c(x, 0)$ με τέτοιο τρόπο ώστε $J_-(x, 0) = \text{const}$ στην αρχική χρονική στιγμή. Αφού αυτή η σταθερή τιμή του J_- μεταφέρεται κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης C_- που ξεκινά από όλα τα σημεία του άξονα x , η σταθερά J_- επίσης παραμένει συνεχής σε ακόλουθες χρονικές στιγμές. Επομένως, $J_-(x, t) = \text{const}$.

Ας υποθέσουμε πως το αέριο καταλαμβάνει το μισό χώρο που στα αριστερά συνδέεται με ένα έμβολο που κινείται σύμφωνα με την εξίσωση $x_1 = \psi_1(t)$. Εάν, την αρχική χρονική στιγμή ισχύει ότι $J_-(x, 0) = \text{const}$ σε όλη την περιοχή που καταλαμβάνεται από το αέριο, $x > x_{10}$ (x_{10} είναι η αρχική συντεταγμένη του εμβόλου), τότε στις ακόλουθες χρονικές στιγμές το J_- θα παραμείνει σταθερό σε όλη την περιοχή που περιβάλλεται από το έμβολο $x > x_1 = \psi_1(t)$. Το αριστερό έμβολο, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, επηρεάζει μόνο την χαρακτηριστική καμπύλη C_+ η καμπύλη C_- φτάνει από το “*past*” στα όρια με το έμβολο

και τελειοποιούν την ύπαρξή τους εκεί, επειδή το έμβολο στέλνει στο “μέλλον” μόνο τη σταθερά J_+ και όχι την J_- . Οι τιμές της σταθεράς J_- σε όλη την περιοχή του επιπέδου x, t που σχετίζεται με το αέριο (αυτή η περιοχή συνδέεται με το όριο του εμβόλου $x_1 = \psi_1(t)$), καθορίζονται από τις αρχικές τιμές του J_- στον άξονα x , ή αλλιώς είναι σταθερές. Από την άλλη, αν το αέριο καταλαμβάνει το μισό χώρο που περιβάλλεται στα δεξιά από ένα κινούμενο έμβολο (το όριο του εμβόλου είναι $x_2 = \psi_2(t)$, $x_{20} = \psi_2(0)$), και την αρχική στιγμή ισχύει ότι $J_+(x, 0) = \text{const.}$, για $x < x_{20}$, τότε η σταθερά J_+ είναι συνεχής στο σημείο εκείνο του επιπέδου x, t όπου $x < x_2 = \psi_2(t)$.

Επιστρέφουμε τώρα στο αρχικό πρόβλημα, υποθέτοντας πως $J_-(x, t) = \text{const.}$

Προκύπτει λοιπόν από την εξίσωση για τις χαρακτηριστικές καμπύλες, με τη μορφή του (1.47), ότι η καμπύλη C_+ απαρτίζεται από ευθείες γραμμές ($F_+ = \text{const}$ επειδή $J_+ = \text{const}$ κατά μήκος της καμπύλης και $J_- = \text{const}$ γενικά). Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις για την καμπύλη C_+ μπορούμε να γράψουμε

$$x = F_+(J_+, J_-)t + \varphi(J_+), \quad (1.49)$$

όπου $\varphi(J_+)$ είναι μία σταθερά της ολοκλήρωσης που θεωρείται ως μια λειτουργία της τιμής του J_+ που διαδίδεται κατά μήκος της καμπύλης. Αυτή η σταθερά καθορίζεται από τις αρχικές και ομαδικές συνθήκες του προβλήματος. Για παράδειγμα, εάν η δεδομένη καμπύλη προέρχεται από το αρχικό διάστημα του άξονα x , τότε φ είναι η συντεταγμένη αυτού του σημείου στον άξονα x απ' το οποίο ξεκινά η καμπύλη και για το οποίο η τιμή του J_+ που προσδιορίζει το φ έχει δοθεί. Η εξίσωση (1.49), μαζί με την επιβεβλημένη συνθήκη

$$J_-(x, t) = \text{const}, \quad (1.50)$$

αντιπροσωπεύει τη γενική λύση των εξισώσεων αεριοδυναμικής για την περίπτωση που εξετάζουμε. Η εξίσωση (1.49) καθορίζει εμμέσως την άλλη επιθυμητή λειτουργία $J_+(x, t)$ (θυμόμαστε ότι η λειτουργία F_+ καθορίζεται από τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού που θεωρούνται γνωστές).

Οι λύσεις (1.49) και (1.50) μπορούν να γραφτούν με τη μορφή των εξισώσεων περιλαμβάνοντας τις συνηθισμένες μεταβλητές αεριοδυναμικής, την επιτάχυνση του αερίου και την ταχύτητα του ήχου. Προκύπτει από το (1.50) ότι

$$J_- = u - \int \frac{dp}{\rho c} = \text{const}$$

ότι η ταχύτητα του ήχου ή οποιαδήποτε άλλη θερμοδυναμική μεταβλητή, ας πούμε η πίεση, είναι μια λειτουργία της επιτάχυνσης u , με $c = c(u)$ και $p = p(u)$, και δεν περιέχει τις ανεξάρτητα μεταβλητές x και t . Η εξίσωση (1.49) είναι ισοδύναμη με

$$x = [u + c(u)]t + \varphi(u), \quad (1.51)$$

όπου η σταθερά φ της ολοκλήρωσης εκφράζεται ως λειτουργία του u . Αυτή η εξίσωση καθορίζει την επιτάχυνση u ως μια λειτουργία των x και t . Είναι προφανές από το (1.51) ότι οι δεδομένες τιμές των u και $c(u)$ μεταφέρονται μέσα απ' το αέριο κατά μήκος του

άξονα x με σταθερή επιτάχυνση $u + c(u)$. Με άλλα λόγια, η λύση είναι ένα κύμα, που κατευθύνεται προς τα δεξιά, το οποίο ορίζεται από την λειτουργική σχέση

$$u = f\{x - [u + c(u)]t\}, \quad c = g\{x - [u + c(u)]t\}.$$

Εδώ η μορφή των λειτουργιών f και g καθορίζεται από το όριο και τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Σε αντίθεση όμως με ένα κύμα που κινείται και έχει μικρό εύρος, διαφορετικές τιμές της επιτάχυνσης του αερίου και των θερμοδυναμικών μεταβλητών προκύπτουν με διαφορετικές ταχύτητες, έτσι ώστε οι αρχικές όψεις των $u(x,0)$ και $c(x,0)$ να αλλάζουν / μεταβάλλονται με το χρόνο. Αυτό είναι αποτέλεσμα της μη γραμμικότητας των εξισώσεων αεριοδυναμικής. Η λύση στην οποία φτάσαμε με τη μορφή ενός κινούμενου κύματος ονομάζεται απλό κύμα. Ένα απλό κύμα που κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση μπορεί να επιτευχθεί με παρόμοιο τρόπο. Έχει μία σταθερά J_+ , και τα C -χαρακτηριστικά είναι ευθείες γραμμές. Η γενική λύση στην περίπτωση αυτή είναι

$$J_+ = \text{const}, \quad x = F_-(J_+, J_-)t + \varphi_1(J_-)$$

ή

$$J_+ = u + \int \frac{dp}{\rho c} = \text{const}, \quad x = [u - c(u)]t + \varphi_1(u),$$

$$u = f_1\{x + [c(u) - u]t\}, \quad c = g_1\{x + [c(u) - u]t\}.$$

Σημειώνουμε ότι η λύση του απλού κύματος είναι μια συγκεκριμένη λύση των εξισώσεων μονοδιάστατης ισεντροπικής ροής. Είναι πιθανόν να βρεθεί ένα γενικό ολοκλήρωμα αυτών των εξισώσεων για μία αυθαίρετη ροή (βλέπε [1]). Η συγκεκριμένη λύση δεν ενσωματώνεται απ' ευθείας στην γενική λύση.

§9. Παραμόρφωση της μορφής ενός κινούμενου κύματος με ορισμένο εύρος. Μερικές ιδιότητες των απλών κυμάτων.

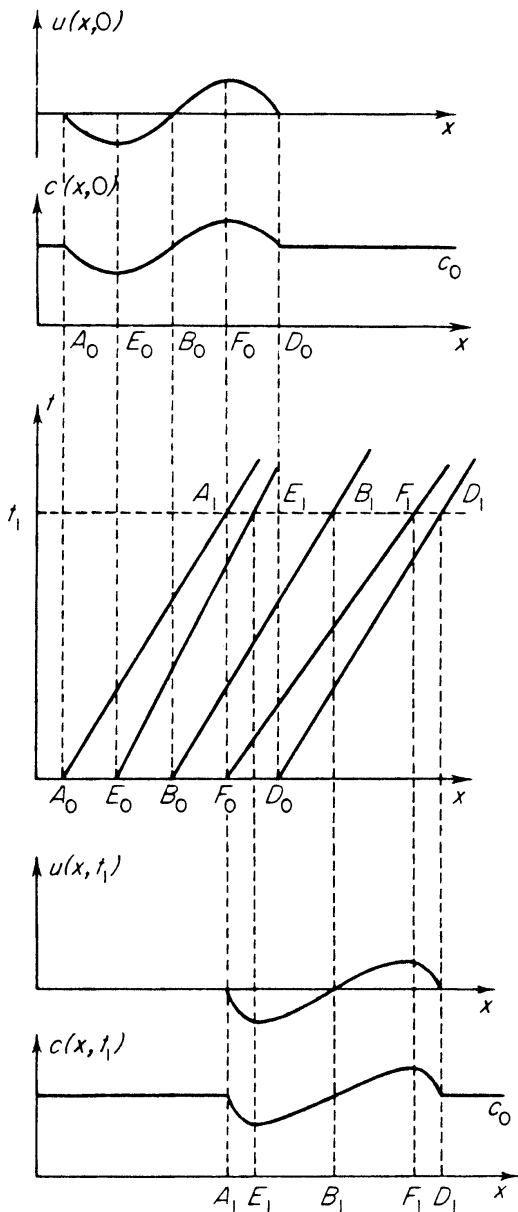
Θα χρησιμοποιήσουμε τη λύση που βρήκαμε για το απλό κύμα, για να εξηγήσουμε τι συμβαίνει με ένα κύμα ακουστικής μορφής εάν δεν περιοριστούμε στην πρώτη προσέγγιση, όπως κάναμε στην §3, αλλά αντί γι' αυτό να ξεκινήσουμε με τις ακριβείς αεριοδυναμικές εξισώσεις. Δεν θα παρουσιάσουμε εδώ μία αναλυτική λύση, αλλά θα εξηγήσουμε τον ποιοτικό χαρακτήρα των φαινομένων με γραφική μορφή. Το αέριο θα θεωρηθεί πως είναι ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμοότητες. Ας αφήσουμε τις τιμές της επιτάχυνσης και της ταχύτητας του ήχου $u(x,0)$ και $c(x,0)$ όπως εμφανίζονται στο Σχήμα 1.13 και επιπλέον τις μεταβλητές να συνδέονται μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει ότι: $J_-(x, 0) = \text{const}$ (εξετάζουμε ένα κύμα που κατευθύνεται προς τα δεξιά). Σύμφωνα με το (1.44) έχουμε $c = 1/2(\gamma - 1)u + c_0$, όπου η σταθερή τιμή της σταθεράς J_- έχει επιλεγεί σύμφωνα με την προϋπόθεση ότι: $u = 0$ και $c = c_0$ στο τέλειο αέριο. Αφού $\rho \sim c^{2/(\gamma - 1)}$, $p \sim c^{2\gamma/(\gamma - 1)}$ (για $c = c_0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$) και η πίεση και η πυκνότητα είναι

εντελώς παρόμοιες ποιοτικά με την ταχύτητα του χρόνου.

Η σταθερά $J(x,t)$, που αρχικά είναι σταθερή, παραμένει αναλλοίωτη κατά τη διάρκεια όλου του χρόνου που ακολουθεί, έτσι ώστε η κίνηση να είναι ένα απλό κύμα που κατευθύνεται προς τα δεξιά.

Τα χαρακτηριστικά της ομάδας C_+ είναι ευθείες γραμμές $dx/dt = u + c = 1/2(\gamma+1)u + c_0$. Απεικονίζονται στο Σχήμα 1.13. Αναδύονται παράλληλα μεταξύ τους από τα σημεία A_0, B_0 και D_0 , όπου $u = 0$ ώστε $dx/dt = c_0$ (και επίσης παράλληλα στα χαρακτηριστικά C_+ , που ξεκινούν απ' τα σημεία του άξονα x και ανταποκρίνονται / συνδέονται με την ατάραχη περιοχή).

Εικόνα



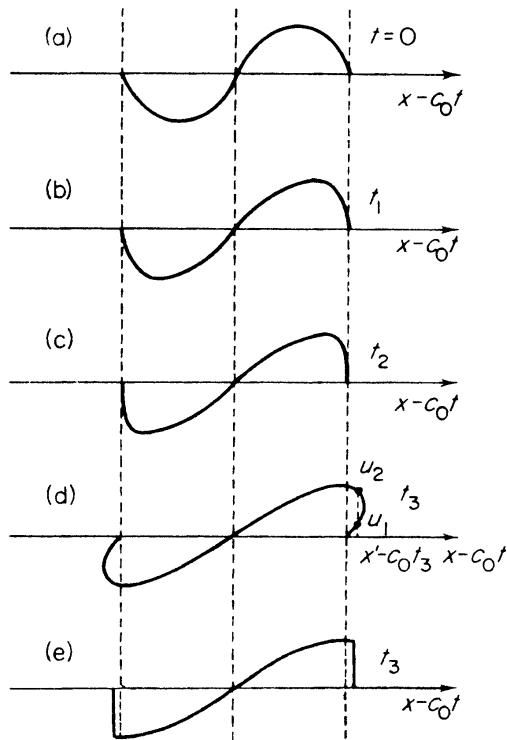
Σχήμα 1.13. Διάδοση ενός κύματος που κατευθύνεται προς τα δεξιά. Μία γραφική κατασκευή η οποία επιτρέπει τον καθορισμό της παραμόρφωσης της κυματικής μορφής. Επάνω είναι οι αρχικές όψεις της επιτάχυνσης και της ταχύτητας του ήχου. Κάτω είναι οι όψεις παραμορφωμένες στο χρόνο t_1 . Στο κέντρο βλέπουμε το σχεδιασμό των C_+ χαρακτηριστικών.

Για να μην κάνουμε πολύπλοκο το Σχήμα 1.13 σχεδιάζουμε μόνο δύο επιπλέον C_+ χαρακτηριστικά, αυτά από τα σημεία E_0 και F_0 που ανταποκρίνονται στο ελάχιστο και το μέγιστο των αρχικών διαταραχών των $u(x, 0)$ και $c(x, 0)$.

Τώρα διαμορφώνουμε τις όψεις της επιτάχυνσης και της ταχύτητας του ήχου, $u(x, t_1)$ και $c(x, t_1)$ στη χρονική στιγμή t_1 . Αφού οι τιμές u και c είναι σταθερές κατά μήκος των C_+ χαρακτηριστικών, οι τιμές u και c στα σημεία A_1, E_1 κ.λ.π. είναι ίσες με τις τιμές στα σημεία A_0, E_0 κ.λ.π. Μεταφέροντας τη γραφική κατασκευή όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.13, βρίσκουμε τις όψεις u και c τη στιγμή t_1 . Βλέπουμε πως η “κεφαλή” (D) και η “ουρά” (A) του κύματος, προσκείμενες στις ατάραχες περιοχές όπου $u = 0$ και $c = c_0$, έχουν μετατοπιστεί κατά μήκος του άξονα x μέσα από αποστάσεις ίσες με $c_0 t_1$ (έχουν διαδοθεί κατά μήκος των $D_0 D_1$ και $A_0 A_1$, στο επίπεδο x, t). Τα ύψη των ελάχιστων και μέγιστων u και c δεν έχουν αλλάξει, αλλά οι σχετικές θέσεις των ελάχιστων και των μέγιστων είναι διαφορετικές και οι όψεις έχουν παραμορφωθεί.

Στην ακουστική, όπου οι αεροδυναμικές εξισώσεις παρουσιάζουν γραμμικότητα, τέτοια παραμόρφωση δεν συμβαίνει και οι όψεις μετατοπίζονται σαν μια “παγωμένη εικόνα”. Η παραμόρφωση της μορφής των κυμάτων είναι ένα αποτέλεσμα της μη γραμμικότητας των αεροδυναμικών εξισώσεων. Το φυσικό αίτιο της παραμόρφωσης έγκειται στο γεγονός ότι τα κύματα (crests) κινούνται σχετικά γρηγορότερα, λόγω της υψηλότερης επιτάχυνσης με την οποία διαδίδονται μέσα στο ρευστό (υψηλότερη ταχύτητα του ήχου) καθώς επίσης εξαιτίας του γεγονότος ότι μεταφέρονται γρηγορότερα μαζί με το ρευστό (μεγαλύτερη επιτάχυνση του αερίου). Από την άλλη, οι ροές (valleys) κινούνται πιο αργά, αφού η περιοχή και στις δύο επιταχύνσεις είναι χαμηλότερη.

Εικόνα



Σχήμα 1.14. Διάγραμμα που δείχνει την κλίση και υπέρβαση ενός κύματος ορισμένου εύρους στη μη γραμμική θεωρία. Το σχήμα δείχνει τις όψεις της επιτάχυνσης σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Για να συγκρίνουμε αυτά τα κύματα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές ο συνδυασμός $x - c_0 t$ έχει σχεδιαστεί κατά μήκος του άξονα. Η μορφή του κύματος (d) ανταποκρίνεται σε μια φυσική μη ρεαλιστική κατάσταση. Βασικά, το κύμα έχει τη μορφή (e) με ασυνέχειες στη χρονική στιγμή t_3 .

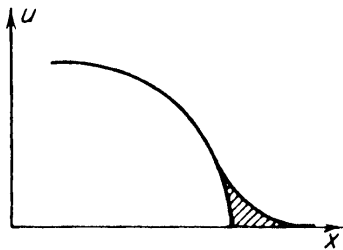
Το σχήμα 1.14 δείχνει ότι οι κυματικές μορφές παραμορφώνονται αυξανόμενα με το χρόνο. Εάν επεκτείνουμε την αναλυτική λύση σε μια ικανοποιητικά μεγάλη περίοδο, τότε μια “υπέρβαση” του κύματος, θα συμβεί, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.14d. Αυτή η εικόνα δεν έχει φυσικό νόημα όμως, αφού δεν μας δίνει μία μοναδική λύση. Για παράδειγμα, στο σημείο $\chi = \chi'$ τρεις τιμές της επιτάχυνσης $u = 0$, u_1 και u_2 υπάρχουν

ταυτόχρονα. Αυτή η μη μοναδικότητα μπορεί να αποδοθεί μαθηματικά στην τομή των χαρακτηριστικών της ίδιας ομάδας (C_+). Μια τέτοια τάση μπορεί να φανεί αν εξετάσουμε το Σχήμα 1.13. Στην πραγματικότητα η “υπέρβαση” δεν συμβαίνει, και όταν το μπροστινό και οπίσθιο τμήμα του κύματος γίνονται άκρως καμπυλωτά, δημιουργούνται ασυνέχειες (π.χ. κρουστικά κύματα) όπως φαίνεται στο σχήμα 1.14e (θα συζητηθεί παρακάτω). Άρα, η λύση στη μορφή του απλού κύματος είναι, στην περίπτωση αυτή, έγκυρη μόνο για μια περιορισμένη περίοδο, μέχρι τη στιγμή του χρόνου που δημιουργούνται οι ασυνέχειες. Η λύση είναι πάντοτε έγκυρη οποτεδήποτε το κύμα έχει το χαρακτήρα κύματος αραιώσης μέσα την περιοχή, ή αλλιώς, οποτεδήποτε δεν υπάρχουν τμήματα όπου η επιτάχυνση, η πίεση και η πυκνότητα του αερίου μειώνονται στην κατεύθυνση στην οποία το κύμα εξαπλώνεται. Τα τμήματα AE και FD που φαίνονται στο Σχήμα 1.13 συνιστούν κύματα συμπίεσης. Το απλό κύμα αραιώσης θα εξετασθεί στην επόμενη ενότητα.

Ας σημειώσουμε εδώ μία σημαντική ιδιότητα του απλού κύματος που φαίνεται και στο παραπάνω παράδειγμα.

Η αρχή ενός απλού κύματος διαδίδεται πάντα κατά μήκος ενός χαρακτηριστικού (στο παράδειγμά μας του χαρακτηριστικού $D_0 D_1$). Οι ποσότητες u και c είναι διαρκείς στο εμπρόσθιο άκρο του απλού κύματος στο σημείο D , αλλά τα παράγωγά τους σε σχέση με το x είναι ασυνεχή (αυτό γίνεται φανερό από το Σχήμα 1.13, όπου οι όψεις των u και c εμφανίζουν διακοπές). Μία ασυνέχεια στην οποία οι ίδιες οι ποσότητες είναι συνεχείς αλλά τα παράγωγά τους δεν είναι ονομάζεται μία ασθενής ασυνέχεια. Μία ασθενής ασυνέχεια μπορεί να εκληφθεί ως μια μικρή διαταραχή στην συνεχή πρόοδο των μεταβλητών της ροής. Αυτό φαίνεται από το Σχήμα 1.15 το οποίο δείχνει δύο μορφές κυματικές, μία ομαλή και μία άλλη με μία ασυνέχεια στο παράγωγό της.

Εικόνα



Σχήμα 1.15 Απεικόνιση μίας ασθενούς

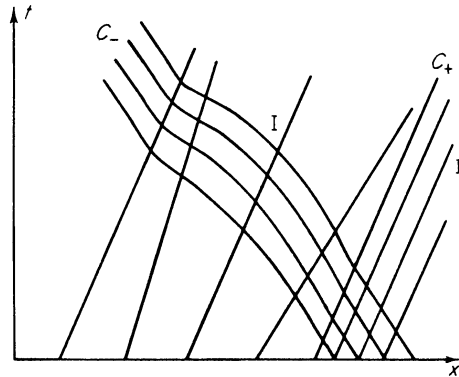
ασυνέχειας.

Το επισκιασμένο τμήμα μπορεί να θεωρηθεί ως μια μικρή διαταραχή. Γνωρίζουμε, όμως, ότι οι μικρές διαταραχές διαδίδονται με ένα μέσο με την ταχύτητα του ήχου. Επομένως οι ασθενείς ασυνέχειες εξαπλώνονται πάντα κατά μήκος των χαρακτηριστικών.

Εάν η ισεντροπική ροή έχει κοινό σύνορο με μία περιοχή ομοιόμορφης ροής, τότε αυτή η ροή είναι απαραίτητα ένα απλό κύμα και αντίστροφα, μόνο ένα απλό κύμα μπορεί να έχει

κοινό σύνορο με μία περιοχή ομοιόμορφης ροής. Τα χαρακτηριστικά C_+ και C_- στην περιοχή όπου η ροή είναι ομοιόμορφη αντιπροσωπεύουν ομάδες από ευθείες γραμμές και οι σταθερές $J_+(x, t)$ και $J_-(x, t)$ είναι αναλλοίωτες. Ένα από τα χαρακτηριστικά (ας πούμε ένα C_+) λειτουργεί ως σημείο επαφής μίας περιοχής ισηντροπικής ροής I με μία περιοχή ομοιόμορφης ροής II (Σχήμα 1.16).

Τότε τα C_- χαρακτηριστικά που εξαπλώνονται από την περιοχή II στην περιοχή I μεταφέρουν την σταθερή τιμή J_- , ώστε $J_-(x, t) = \text{const}$ επίσης στην περιοχή I. Επομένως, αυτή η περιοχή είναι ένα απλό κύμα που κατευθύνεται προς τα δεξιά.



Σχ. 1.16. Απεικόνιση των δύο ομάδων από χαρακτηριστικά για το κύμα που φαίνεται στο Σχ. 1.13.

Το Σχήμα 1.16 απεικονίζει τα χαρακτηριστικά για την περίπτωση παλμού ενός μήκους κύματος που χρησιμοποιείται ως παράδειγμα για τις παραπάνω αναλύσεις.

§10. Το κύμα αραιώσης.

Ας εξετάσουμε τώρα την κίνηση ενός αερίου με τη δράση ενός εμβόλου που υποχωρεί. Ας υποθέσουμε πως το αέριο αρχικά έχει σταθερή πυκνότητα, πίεση και ταχύτητα του ήχου ρ_0 , p_0 , c_0 και καταλαμβάνει ένα μισό χώρο $x > 0$, ο οποίος είναι δεμένος στα αριστερά με ένα ακίνητο έμβολο, του οποίου η αρχική θέση είναι $x = 0$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το έμβολο ξεκινά να κινείται προς τα αριστερά, σταδιακά να επιταχύνει από μηδενική ταχύτητα σε μία σταθερή συγκεκριμένη ταχύτητα u . Η εξίσωση της κίνησης του εμβόλου είναι $x = \chi(t)$. Όταν η ταχύτητα του εμβόλου γίνει σταθερή, η γραμμή $\chi(t)$ γίνεται μία ευθεία γραμμή που αποδίδεται ως εξής:

$$X(t) = -Ut + \text{const}$$

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η κίνηση ενός αερίου για $t > 0$ είναι ένα απλό

κύμα κατευθυνόμενο προς τα δεξιά. Η κεφαλή του κύματος, ή αλλιώς η αρχική διαταραχή που προκαλείται από το έμβολο, διαδίδεται στα δεξιά με την ταχύτητα του ήχου κατά μήκος της C_+ χαρακτηριστικής OA , η διαδρομή της οποίας είναι $x = c_0 t$ (Σχ. 1.17). Επίσης φαίνονται στο Σχ. 1.17 η διαδρομή $\chi(t)$ του εμβόλου και τα χαρακτηριστικά των ομάδων C_+ και C_- . Το αέριο που περιέχεται στην περιοχή I ανάμεσα στον άξονα x και τη C_+ χαρακτηριστική OA παραμένει ατάραχο.

Σε αυτή την περιοχή τα χαρακτηριστικά είναι ευθείες γραμμές των οποίων οι κλίσεις είναι $(dx/dt)_+ = c_0$ και $(dx/dt)_- = -c_0$.

Τέμνοντας την ευθεία OA , τα χαρακτηριστικά C_- επεκτείνονται στο στοιχείο του εμβόλου, όπου και τερματίζουν. Για λόγους απλούστευσης θα θεωρήσουμε πως το αέριο είναι ένα τέλειο αέριο με σταθερές και συγκεκριμένες θερμοότητες.

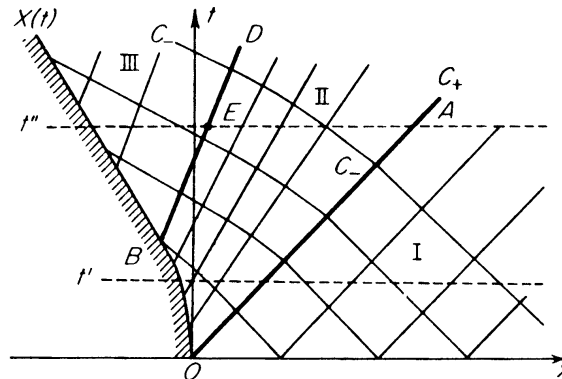
Πρέπει, όμως, να τονίσουμε ότι ποιοτικά η εικόνα παραμένει η ίδια για ένα αέριο με άλλες θερμοδυναμικές ιδιότητες. Η σταθερά J_- είναι αναλλοίωτη σε όλο το φυσικό τμήμα του επιπέδου x, t και είναι ισοδύναμη με:

$$J_- = u - \frac{2}{\gamma - 1} c = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0.$$

Από αυτό προκύπτει ότι

$$u = -\frac{2}{\gamma - 1} (c_0 - c), \quad c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} u.$$

Κατά την διεπαφή αερίου και εμβόλου η επιτάχυνση του αερίου είναι ίδια με αυτήν του εμβόλου $w(t)$, που είναι αρνητική. Έτσι η ταχύτητα του ήχου και επίσης η πίεση και η πυκνότητα του αερίου στο έμβολο έχουν τιμές χαμηλότερες από τις αρχικές τους. Επιπλέον, μειώνονται σε αναλογία με την αύξηση στην ταχύτητα του εμβόλου.



Σχήμα 1.17. Ένα διάγραμμα x, t με ένα σύνολο χαρακτηριστικών για ένα κύμα αραιώσης που ξεκινά από την κίνηση ενός εμβόλου που υποχωρεί το οποίο αρχικά επιταχύνει και ύστερα κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Οι κλίσεις των χαρακτηριστικών C_+ , που είναι ευθείες γραμμές που πηγάζουν από τη διαδρομή του εμβόλου, δίνονται από:

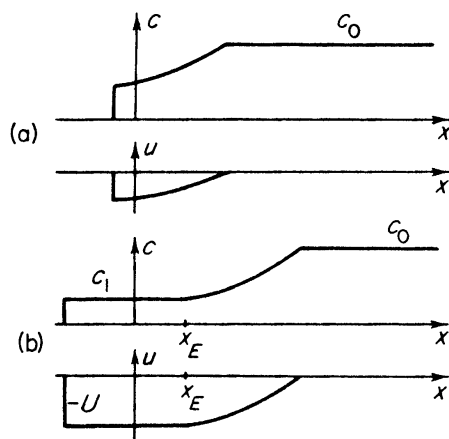
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = u + c = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} u = c_0 - \frac{\gamma + 1}{2} |w|.$$

Αφού το έμβολο επιταχύνει μόνο και δεν επιβραδύνει, όλες οι C_+ χαρακτηριστικές που πηγάζουν από τη διαδρομή του εμβόλου είναι αποκλίνουσες, όπως μας δείχνει το Σχ. 1.17. Οι C_+ χαρακτηριστικές που προέρχονται από το τμήμα της διαδρομής του εμβόλου όπου το έμβολο έχει ήδη αναπτύξει μια σταθερή ταχύτητα έχουν τις ίδιες κλίσεις $(dx/dt)_+ = c_0 - 1/2(\gamma + 1)U$, έτσι ώστε να είναι παράλληλες μεταξύ τους. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα, ότι ξεκινώντας τη χρονική στιγμή t_1 (το σημείο B στη διαδρομή του εμβόλου) η ταχύτητα του εμβόλου γίνεται απαραίτητως σταθερή και ίση με $w = -U$ ($U > 0$). Στην περιοχή III του επιπέδου χ, t , που συνδέεται με τη διαδρομή του εμβόλου και την C_+ χαρακτηριστική BD όλες οι μεταβλητές ροής είναι σταθερές με $u = -U$, $c = c_0 - 1/2(\gamma - 1)U = c_1^*$. Στην περιοχή αυτή το J_- είναι σταθερό λόγω της γενικής του σταθερότητας και το J_+ είναι σταθερό επειδή η ταχύτητα του αερίου στη διαδρομή του εμβόλου του εμβόλου, απ' την οποία ξεκινούν όλες οι C_+ χαρακτηριστικές, είναι η ίδια σε όλα τα σημεία, και έτσι έχουμε:

$$J_+ = u + \frac{2}{\gamma - 1} c = \frac{2}{\gamma - 1} c_0 + 2u = \frac{2}{\gamma - 1} c_0 - 2U.$$

Οι μεταβλητές ροής στην περιοχή II μεταξύ των C_+ χαρακτηριστικών OA και BD και του τμήματος OB της διαδρομής του εμβόλου είναι οι ίδιες λειτουργίες των χ, t για το απλό κύμα. Τα χαρακτηριστικά C_+ που ξεκινούν από το τμήμα OB της διαδρομής του εμβόλου μεταφέρουν μαζί με τον αυξανόμενο χρόνο και τις μειωμένες τιμές της ταχύτητας του ήχου και του αερίου (αυξανόμενες απόλυτες τιμές της ταχύτητας του αερίου). Έτσι, η κατανομή των u και c στο αέριο σε οποιαδήποτε δεδομένη χρονική στιγμή $t' < t_1$ (που συνδέεται με την οριζόντια γραμμή $t = \text{const} = t'$ στο επίπεδο χ, t) είναι αυτή που δείχνει το Σχήμα 1.18a.

Εικόνα



Σχήμα 1.18

Κατανομή της ταχύτητας του ήχου και του αερίου σε ένα κύμα αραιώσης που ξεκινά από την κίνηση ενός εμβόλου (βλ. 1.17) : (α) μέχρι τη στιγμή που η ταχύτητα του εμβόλου γίνεται σταθερή $t' < t_1$ (β) αφού η ταχύτητα του εμβόλου γίνει σταθερή $t' > t_1$.

Λόγω της άμεσης σχέσης μεταξύ των p , ρ και c οι κατανομές της πυκνότητας και της πίεσης είναι σχετικά όμοιες με την κατανομή της ταχύτητας του ήχου. Οι κατανομές των μεταβλητών ροής σε μεταγενέστερο χρόνο $t'' > t_1$ (η γραμμή $t = \text{const} = t''$ στο επίπεδο x, t) φαίνονται στο Σχ. 1.18β. Στην περίπτωση αυτή μία περιοχή ομοιόμορφης ροής $u = -U$, $c = c_1$ είναι εφαιπτόμενη στο έμβολο. Η συντεταγμένη x_E του σημείου που χωρίζει περιοχές σταθερής και μεταβλητής ροής III και II συνδέεται με το σημείο E στη χαρακτηριστική BD. Ξεκινώντας με ένα σαφές παράδειγμα μίας σχέσης που καθορίζει την κίνηση ενός εμβόλου, μπορούμε να βρούμε τη λύση στο πρόβλημα με αναλυτική μορφή.

* Οι εξισώσεις είναι έγκυρες μόνο εάν το c_1 είναι μια θετική ποσότητα αυτό επιβάλλει ένα περιορισμό στην τελική ταχύτητα του εμβόλου, $U < [2 / (\gamma - 1)] c_0$. Η περίπτωση όπου $U > [2 / (\gamma - 1)] c_0$ θα εξεταστεί στην παράγραφο §11.

Ας υποθέσουμε πως η ταχύτητα του εμβόλου ποικίλει με το χρόνο σύμφωνα με:

$$w = -U(1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau > 0$$

και πλησιάζει την σταθερή τιμή $-U$ ασυμπτωτικά για $t \rightarrow \infty$. Η διαδρομή του εμβόλου περιγράφεται ως εξής:

$$X(t) = \int_0^t w dt = -U\tau \left[\frac{t}{\tau} - (1 - e^{-t/\tau}) \right],$$

και ασυμπτωτικά προσεγγίζει την ευθεία $X = -U(t - \tau)$. Η επιθυμητή λύση βρίσκεται αν

εφαρμόσουμε την οριακή συνθήκη $u = w(t)$ για $x = X(t)$ στην γενική λύση (1.51). Η συνθήκη αυτή ορίζει την αυθαίρετη λειτουργία $\varphi(u)$ ως εξής:

$$\varphi(w) = X(t) - [w + c(w)]t,$$

όπου

$$c(w) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}w \quad \text{και} \quad w = w(t)$$

Βάζοντας το $X(t)$ μέσα σε αυτή την εξίσωση και εκφράζοντας το χρόνο με βάση το w από την εξίσωση της κίνησης του εμβόλου $t = -\tau \ln(1 + w/U)$, βρίσκουμε τη μορφή της λειτουργίας φ να έχει ως εξής:

$$\varphi(w) = -w\tau + \tau \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2}w + U \right) \ln \left(1 + \frac{w}{U} \right).$$

Η κατανομή της ταχύτητας σε σχέση με x σε διαφορετικές χρονικές στιγμές δίνεται από την ευνοούμενη λειτουργία

$$x = \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2}u \right)t - ut + \tau \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2}u + U \right) \ln \left(1 + \frac{u}{U} \right),$$

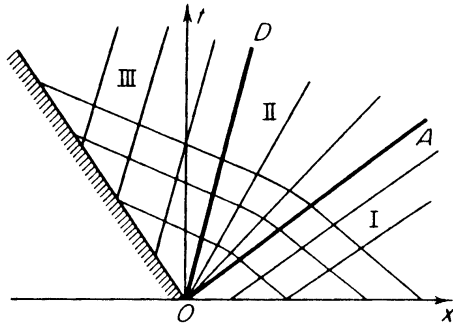
που είναι έγκυρη στο μεσοδιάστημα $x(t) < x < c_0t$.

Ας υποθέσουμε ξανά πως η ταχύτητα του εμβόλου γίνεται απόλυτα σταθερή σε μία συγκεκριμένη στιγμή t_1 . Καθορίζουμε τη σταθερή τιμή της τελικής ταχύτητας $-U$ του εμβόλου θεωρούμε πως η αρχική επιτάχυνση του εμβόλου γίνεται όλο και μεγαλύτερη, ενώ η τελική σταθερή ταχύτητα προσεγγίζεται όλο και πιο γρήγορα ($t_1 \rightarrow 0$). Το τμήμα OB της διαδρομής του εμβόλου όπου η ταχύτητα δεν είναι σταθερή γίνεται όλο και πιο μικρό (βλέπε Σχήμα 1.17). Τα σημεία O και B όπου τα C_+ χαρακτηριστικά BD και OA που συνδέουν την περιοχή Π μεταβλητής ροής, θα πλησιάσουν το ένα με το άλλο. Στο όριο $t_1 = 0$ όπου τα σημεία B και O συμπίπτουν

(αφού το έμβολο φτάσει στη σταθερή ταχύτητα $w = -U$ ακαριαία) και οι δύο χαρακτηριστικές γραμμές BD και OA ξεκινούν από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων $x = 0$ και $t = 0$ στο επίπεδο x, t .

Όλες οι άλλες C_+ χαρακτηριστικές γραμμές που καλύπτουν την περιοχή Π μεταβλητής ροής, προέρχονται απ' το σημείο O . Έτσι, στην οριακή περίπτωση που το έμβολο αρχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα $w = -U$ τη στιγμή $t = 0$, τη εικόνα στο επίπεδο x, t παίρνει τη μορφή που βλέπουμε στο Σχήμα 1.19.

Εικόνα



Σχ. 1.19. Ένα x, t διάγραμμα που απεικονίζει τις χαρακτηριστικές γραμμές για ένα κεντρικό κύμα αραιώσης.

Οι τρεις ιδιαίτερες γραμμές, η γραμμή OA της “κεφαλής” του κύματος η OD του τελευταίου τμήματος του κύματος στην οποία οι παράμετροι της ροής παίρνουν τις σταθερές τελικές τους τιμές, καθώς και η διαδρομή του εμβόλου, όλες ξεκινούν από το “κέντρο” O . Όλες οι C_+ χαρακτηριστικές γραμμές, που βρίσκονται μεταξύ των C_+ χαρακτηριστικών OA και OD επίσης προέρχονται από το “κέντρο”. Αυτό το είδος κύματος ονομάζεται κεντρικό απλό κύμα. Αφού όλες οι C_+ χαρακτηριστικές σε ένα κεντρικό απλό κύμα, εκείνες στην περιοχή μεταβλητής ροής II , ξεκινούν από το σημείο $x = 0, t = 0$, η λειτουργία $\varphi(u)$ δεν θα είναι μέσα στη λύση (1.51) αυτή η λύση είναι ταυτόχρονα η εξίσωση για αυτές τις χαρακτηριστικές γραμμές. Η λύση για το κεντρικό τμήμα έχει την παρακάτω μορφή

$$x = [u + c(u)]t. \quad (1.52)$$

Αυτή η λύση μπορεί επίσης να προκύψει αν πάρουμε το όριο $\tau \rightarrow 0$ στο παράδειγμα που είδαμε παραπάνω. Η λειτουργία φ είναι ανάλογη στο τ , έτσι ώστε για $\tau \rightarrow 0$ τότε $\varphi(u) \rightarrow 0$. Ας γράψουμε μία ρητή λύση για το κεντρικό κύμα αραιώσης για την περίπτωση ενός τέλει αερίου με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες. Η σχέση μεταξύ των θερμοδυναμικών μεταβλητών και η ταχύτητα u του αερίου δίνεται από το αποτέλεσμα που προέκυψε νωρίτερα από τη σταθερότητα του J .

$$c = c_0 - \frac{\gamma - 1}{2} |u|, \quad u < 0. \quad (1.53)$$

Αφού $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$, $c^2 = \gamma p/\rho = c_0^2(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}$, έχουμε

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{|u|}{c_0} \right]^{2/(\gamma-1)}, \quad (1.54)$$

$$p = p_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{|u|}{c_0} \right]^{2\gamma/(\gamma-1)}. \quad (1.55)$$

Για να εκφράσουμε αυτές τις ποσότητες ως λειτουργίες των χ και t , είναι απαραίτητο να συμπεριλάβουμε εδώ την τιμή $|u|$ που βρήκαμε με την εξαίρεση του c μεταξύ (1.52) και (1.53), ή αλλιώς:

$$|u| = \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_0 - \frac{x}{t} \right). \quad (1.56)$$

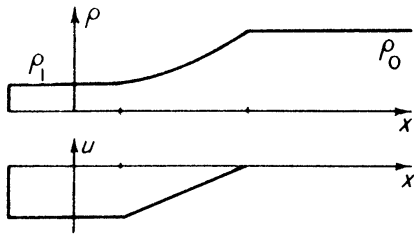
Η ταχύτητα του αερίου σε ένα κεντρικό κύμα αραιώσης είναι επομένως μία γραμμική λειτουργία του χ . Η “κεφαλή” του κύματος, όπου $u = 0$, κινείται κατά μήκος της γραμμής $x = c_0 t$, ενώ η κατάληξη του κύματος, όπου $u = w = -U$, κινείται κατά μήκος της γραμμής $x = (c_1 - U)t = (c_0 - 1/2(\gamma + 1) U)t$. Η πυκνότητα και η ταχύτητα φαίνονται στο Σχήμα 1.20.

§11. Το κεντρικό κύμα αραιώσης ως παράδειγμα όμοιας κίνησης του αερίου.

Η μονοδιάστατη επίπεδη ροή ενός αερίου που εξετάστηκε στην προηγούμενη ενότητα και που προκύπτει από τον επηρεασμό ενός εμβόλου που υποχωρεί με σταθερή ταχύτητα επιδεικνύει μία ιδιαίτερη ιδιότητα. Όλες οι μεταβλητές ροής που περιγράφουν την κίνηση $u(\chi, t)$, $c(\chi, t)$, $\rho(\chi, t)$ και $p(\chi, t)$ δεν εξαρτώνται από τη συντεταγμένη χ και το χρόνο ξεχωριστά αλλά είναι λειτουργίες αποκλειστικά του συνδυασμού χ/t . Για την περιοχή II, όπου αυτές οι ποσότητες αλλάζουν, αυτό γίνεται φανερό από τα (1.53) – (1.56).

Αυτό επίσης ισχύει και για τις περιοχές ομοιόμορφης ροής I και III που συνδέονται στο επίπεδο χ, t με τις ευθείες $\chi/t = c_0 = \text{const}$ (περιοχή I) και $\chi/t = w \text{ const}$, $\chi/t = w + c_1 = \text{const}$ (περιοχή III), οι οποίες περιγράφονται επίσης από τις εξισώσεις που περιέχουν τις τιμές χ και t μόνο ως συνδυασμό χ/t . Με άλλα λόγια, οι κατανομές όλων των ποσοτήτων στη συντεταγμένη χ , τους φαίνονται στο Σχήμα 1.20, αλλάζουν με το χρόνο χωρίς να αλλάζει η μορφή τους.

Εικόνα



Σχήμα 1.20.

Όψεις της πυκνότητας και της ταχύτητας σε ένα κεντρικό κύμα αραιώσης.

παραμένουν όμοιες. Εάν έπρεπε να απεικονίσουμε τις κατανομές των τιμών u , c , ρ και p χρησιμοποιώντας ως τετμημένη όχι τη x αλλά την αναλογία x/t (ή μία από τις αδιάστατες ποσότητες x/cot , x/ct) θα προέκυπτε μία “παγωμένη” εικόνα, που δεν ποικίλει ανά το χρόνο. Αυτή η κίνηση στην οποία οι κατανομές των μεταβλητών ροής παραμένουν όμοιες με το χρόνο και ποικίλουν μόνο ως αποτέλεσμα των αλλαγών την κλίμακα, λέγεται όμοια. (Στην περίπτωση που εξετάσαμε η κλίμακα είναι το μήκος cot ή ct). Στην §25 θα εξετάσουμε ένα πιο σύνθετο παράδειγμα όμοιας κίνησης, όπου όχι μόνο το μήκος της κλίμακας αλλά και οι κλίμακες των μεταβλητών ροής αλλάζουν.

Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή ομοιότητας έχει πιο γενική μορφή $\xi = \alpha t^2$ όπου $\alpha = \text{const}$. Το κεντρικό κύμα αραιώσης είναι ένα βασικό παράδειγμα όμοιας κίνησης, όπου $\alpha = -1$, $\xi = x/t$, και οι κλίμακες των μεταβλητών ροής παραμένουν σταθερές. Με το χρόνο οι παράγοντες της ροής $u(x, t)$ και $c(x, t)$ κινούνται με όμοιο τρόπο σε σχέση με την τετμημένη αλλά δεν αλλάζουν σε σχέση με την τεταγμένη (οι κλίμακες u , c , ρ και p παραμένουν αμετάβλητες).

Το φυσικό αίτιο για τον όμοιο χαρακτήρα ενός κεντρικού κύματος αραιώσης μπορεί να εξηγηθεί με διαστατές θεωρήσεις. Εάν παραλείψουμε τις στατικές διαδικασίες που συνδέονται με τη συμπεριφορά του ιζώδους και της θερμότητας, τότε οι αεριοδυναμικές εξισώσεις και επίσης οι σχέσεις που περιγράφουν τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού δεν περιέχουν κανένα χαρακτηριστικό μήκος ή χρονικές κλίμακες. Το μόνο μήκος και χρονική κλίμακα στο αέριο είναι το μήκος και ο χρόνος είναι μια μέση ελεύθερη διαδρομή μοριακής κίνησης, με την οποία σχετίζονται οι σταθερές του ιζώδους και της θερμικής συμπεριφοράς. Όμως αυτές οι κλίμακες χαρακτηρίζουν μόνο τις μικροδιαδικασίες, οι οποίες συμβαίνουν στις αποστάσεις και σε χρονικές στιγμές της τάξεως εκείνων της μέσης ελεύθερης διαδρομής των μορίων, αλλά όχι της μακροσκοπικής κίνησης. Τα ρευστά έχουν μία διαστατική ιδιότητα, την ταχύτητα του ήχου, η οποία μαζί με την ταχύτητα του ρευστού εντάσσεται στην περιγραφή της ροής του ρευστού. Έτσι, αν οι οριακές και οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος δεν περιέχουν κανένα χαρακτηριστικό μήκος ή χρονικές

κλίμακες, τότε η ροή μπορεί να εξαρτηθεί από τη συντεταγμένη και το χρόνο μόνο στην περίπτωση συνδυασμού αυτών των δύο χ/t , που έχει την διάσταση της ταχύτητας. Αυτό είναι κυρίως το πρόβλημα του κύματος αραιώσης το οποίο προκύπτει από την κίνηση ενός εμβόλου που υποχωρεί με σταθερή ταχύτητα. Οι αρχικές και οριακές συνθήκες εισάγουν μόνο τις κλίμακες ταχύτητας c_0 και w (και προφανώς, επίσης τις κλίμακες της πυκνότητας ρ_0 και της πίεσης p_0 , αλλά όχι τις κλίμακες μήκους και χρόνου)*.

Η όμοια κίνηση δεν είναι ιδιαίτερης σημασίας στην αεριοδυναμική. Στην περίπτωση αυτή οι μεταβλητές ροής δεν εξαρτώνται από τις συντεταγμένες και το χρόνο ξεχωριστά, αλλά εξαρτώνται μόνο από συγκεκριμένους συνδυασμούς αυτών. Αυτό μειώνει στο ελάχιστο τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών στο σύστημα των εξισώσεων. Συγκεκριμένα, για μονοδιάστατες κινήσεις, μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή ($\xi = \chi / t$ στο πρόβλημά μας) εμφανίζεται αντί για δύο μεταβλητές χ και t (ή r και t στην περίπτωση σφαιρικής ή κυλινδρικής συμμετρίας).

* Εάν η ταχύτητα του εμβόλου δεν είναι σταθερή αλλά είναι μια λειτουργία του χρόνου, τότε, οι χρονικές κλίμακες ή οι κλίμακες μήκους θα εμφανιστούν αμέσως. Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα του κύματος αραιώσης δεν θα είναι πλέον ομοιόμορφο. Αυτό προκύπτει μαθηματικά από το (1.51): αν $\varphi(u) \neq 0$, τότε το u γίνεται λειτουργία των χ και t ξεχωριστά. Όμως, αν η ταχύτητα του εμβόλου, παραμένει σταθερή με το χρόνο όπως στο πρόβλημα που εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, τότε η ακριβής λύση θα πλησιάσει ασυμπτωτικά τη λύση ομοιότητας. Για $t \gg \tau$ ($t/\tau \rightarrow \infty$), η λειτουργία $\varphi(u) \sim \tau$ μπορεί να εξαιρεθεί από τη λύση. Αυτό βασίζεται στο γεγονός ότι η παράμετρος τ μικραίνει σε σύγκριση με το χαρακτηριστικό χρόνο t του προβλήματος και ο ρόλος της γίνεται όλο και πιο μικρός. Για μια ευρύτερη ανάλυση της ασυμπτωτικής προσέγγισης των ακριβών λύσεων στις λύσεις ομοιότητας, βλέπε Κεφάλαιο X και XII.

Επομένως, η ροή μπορεί να περιγραφεί από συνηθισμένες και όχι από διαφορικές εξισώσεις, και αυτό κάνει το πρόβλημα πιο απλό από μαθηματικής άποψης. Όσο για τη σημασία των όμοιων ροών, την οποίων το κεντρικό απλό κύμα εμφανίζεται ως παράδειγμα, λύνουμε ξανά το πρόβλημα του εμβόλου, χρησιμοποιώντας το γενικό σύστημα των εξισώσεων ροής και έχοντας το όφελος της πιθανότητας της μείωσης του αριθμού των ανεξάρτητων μεταβλητών. Για να γίνει αυτό εκφράζουμε τις εξισώσεις του Euler με μια νέα ανεξάρτητη μεταβλητή $\xi = \chi / t$. Αν $f(\chi, t)$ είναι κάποια λειτουργία των χ και t που εξαρτάται μόνο απ' την αναλογία $\xi = \chi / t$ τότε έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{df}{d\xi},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} \frac{df}{d\xi} = -\frac{\xi}{t} \frac{df}{d\xi},$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{u - \xi}{t} \frac{df}{d\xi}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις μπορούμε να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις της συνέχειας, της κίνησης και της εντροπίας για μια επίπεδη περίπτωση ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow (u - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} = -\rho \frac{du}{d\xi}, \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow (u - \xi)\rho \frac{du}{d\xi} = -\frac{dp}{d\xi}, \\ \frac{DS}{Dt} &= 0 \rightarrow (u - \xi) \frac{dS}{d\xi} = 0.\end{aligned}\tag{1.57}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, οι μεταβλητές χ και t διαγράφονται από τις εξισώσεις. Με αυτή τη μορφή οι εξισώσεις αμέσως αποδίδουν την εύκολη λύση $u = \text{const}$, $p = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ και $s = \text{const}$ που ανταποκρίνεται σε μια ομοιόμορφη ροή του αερίου. Για να έχουμε μία δύσκολη λύση, διαγράφουμε το $du/d\xi$ από το πρώτο ζευγάρι εξισώσεων και σημειώνουμε πως η τρίτη εξίσωση δίνει $s = \text{const}^*$ άρα, η όμοια ροή είναι ισεντροπική.

Αντικαθιστώντας στο (1.57) την παράγωγο της πίεσης με την παράγωγο της πυκνότητας $dp/d\xi = (dp/d\rho)(d\rho/d\xi) = c^2 d\rho/d\xi$ (αφού η ροή είναι ισεντροπική $dp/d\rho = (\partial p/\partial \rho)_s = c^2$), έχουμε:

$$[(u - \xi)^2 - c^2] \frac{d\rho}{d\xi} = 0,$$

*Η υπόθεση ότι $u - \xi = 0$ παρά ότι $dS/d\xi = 0$ αντικρούει την πρώτη εξίσωση του (1.57).

απ' όπου

$$u - \xi = \pm c, \quad \xi = \frac{x}{t} = u \mp c.\tag{1.58}$$

Εντάσσοντας αυτή τη σχέση στις εξισώσεις (1.57), βρίσκουμε:

$$du \pm c \frac{d\rho}{\rho} = du \pm \frac{dp}{\rho c} = 0$$

ή

$$J_{\pm} = u \pm \int \frac{dp}{\rho c} = \text{const}.\tag{1.59}$$

Έχουμε φτάσει λοιπόν στη λύση που βρήκαμε πιο πριν για το πρόβλημα ενός κεντρικού κύματος αραιώσης. Το χαμηλότερο σήμα στο (1.58) και (1.59) αναφέρεται σε κύματα που κατευθύνονται προς τα δεξιά, ενώ το σήμα ανόδου αναφέρεται σε κύματα που κατευθύνονται προς τα αριστερά. Ξανά, όλη η εικόνα μπορεί να δημιουργηθεί από τις λύσεις (1.58) και (1.59) και από την εύκολη λύση $u = \text{const}$, $c = \text{const}$, που επίσης

ικανοποιεί τις εξισώσεις ομοιότητας. Οι λύσεις πρέπει να συνδυάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούν την οριακή συνθήκη $u = w$ στο έμβολο.

Ας εξετάσουμε συγκεκριμένες ιδιότητες του κύματος αραίωσης κάπως πιο αναλυτικά. Ο χαρακτήρας της λύσης δείχνει ότι παραμένει έγκυρη ακόμα και αν το αέριο δεν επεκτείνεται πέρα από το έμβολο, $\chi \rightarrow \infty$. Η παρουσία του ορίου δεν επηρεάζει τη ροή με κανένα τρόπο μέχρι μια τέτοια χρονική στιγμή καθώς η αρχή του κύματος αραίωσης (που κατευθύνεται μέσα από το ήρεμο αέριο προ τα δεξιά με την ταχύτητα του ήχου c_0) φτάνει το δεξί όριο του αερίου $x = x_1 > 0$ ή αλλιώς, μέχρι $t_1 = x_1 / c_0^*$. Επομένως, η λύση που βρήκαμε πάντα θα περιγράφει το αρχικό στάδιο της κίνησης του αερίου που προκαλείται από ένα έμβολο που υποχωρεί, ακόμα και όταν το αέριο καταλαμβάνει μία ορισμένη περιοχή.

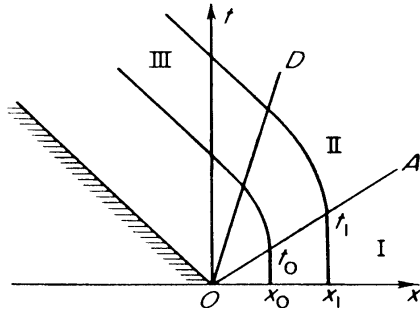
Ας ακολουθήσουμε ένα σωματίδιο αερίου του οποίου η αρχική συντεταγμένη είναι, ας πούμε, χ_0 . Το σωματίδιο είναι σε αδράνεια μέχρι τη χρονική στιγμή $t = t_0 = \chi_0 / c_0$, ή αλλιώς, πριν την άφιξη ενός κύματος αραίωσης. Τότε το σωματίδιο αρχίζει να κινείται προς τα αριστερά, επιταχύνοντας καθώς εξαπλώνεται ταυτόχρονα. Αφού η πυκνότητα του σωματιδίου μειωθεί στην οριακή τιμή της ρ_1 και η ταχύτητά του γίνει ίση με την ταχύτητα του εμβόλου w , σταματάει η παραπάνω επιτάχυνση και εξαπλωση και τότε το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα w .

Μερικές διαδρομές του σωματιδίου στο επίπεδο χ, t απεικονίζονται στο Σχήμα 1.21. Οι εξισώσεις αυτών των γραμμών στην περιοχή εξαπλώσης II μπορούν εύκολα να βρεθούν με την ολοκλήρωση $dx / dt = u = [2 / (\gamma - 1) \times (c_0 - \chi / t)]$ με την αρχική συνθήκη $\chi = \chi_0$ τη στιγμή $t = t_0 = \chi_0 / c_0$.

*Εδώ αναφέρουμε ξανά την ανάλυση για τις περιοχές επίδρασης στην §6.

Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει με όλο και μεγαλύτερες τιμές της ταχύτητας του εμβόλου $|w|$. Είναι φανερό από το (1.53) – (1.56) ότι η μεγαλύτερη είναι η $|w|$, οι μικρότερες είναι η ταχύτητα του ήχου η πυκνότητα, η πίεση και η θερμοκρασία ($T \sim \sqrt{c}$) του αερίου στην τελική φάση ($c_1 = c(w)$, $\rho_1 = \rho(w)$, κ.λ.π.). Τελικά, στη συγκεκριμένη ταχύτητα του εμβόλου $|w|_m = [2 / (\gamma - 1)] c_0$, οι τελικές τιμές των c_1 , ρ_1 , και p_1 γίνονται μηδενικές. Εάν το έμβολο υποχωρεί ακόμα πιο γρήγορα, τότε οι λύσεις (1.53) – (1.56) χάνουν το νόημά τους, επειδή για $|u| > |w|_m$ η τιμή του c_1 είναι αρνητική,

Εικόνα



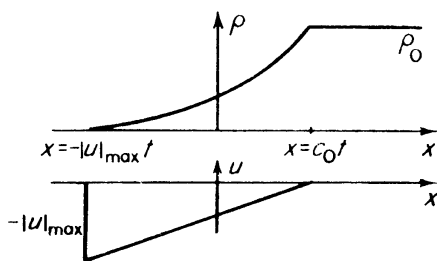
Σχήμα 1.21.

Διαδρομές του σωματιδίου στο διάγραμμα x, t για ένα κεντρικό κύμα αραιώσης το OA είναι η κεφαλή του κύματος και το OD η κατάληξή του.

, ενώ οι p_1 και p_0 είναι σύνθετες . Αυτό σημαίνει πως μία κενή περιοχή δημιουργείται ανάμεσα στο έμβολο και στο αριστερό όριο του αερίου όταν $|w| > |w|_m$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα λειτουργεί σαν να αποσυρόταν το έμβολο την αρχική στιγμή $t = 0$, και σαν να εισχωρούσε το αέριο στο κενό που απομένει. Το αέριο εξαπλώνεται μέχρι η πυκνότητά του, η πίεση και η θερμοκρασία (ταχύτητα του ήχου) γίνουν μηδενικές, και το όριο του μετακινηθεί στα αριστερά με την ταχύτητα

$$u = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0, \quad |u|_{\max} = \frac{2}{\gamma - 1} c_0. \quad (1.60)$$

Εικόνα



Οι όψεις της ταχύτητας και της πυκνότητας για μια ασταθή ροή σε ένα κενό φαίνονται στο Σχ. 1.22. Για παράδειγμα, για αέρα στις συνηθισμένες θερμοκρασίες $\gamma = 7/5$ και $|u|_{\max} = 5c_0$.

Σχήμα 1.22.

Οι όψεις της ταχύτητας και της πυκνότητας σε επίπεδο ασταθές αέριο μέσα σε κενό.

Αυτή η τιμή είναι παραπάνω από δύο φορές η οριακή ταχύτητα για μία σταθερή ροή από ένα μεγάλο ρεζερβουάρ σε ένα κενό εδώ η εξίσωση Bernoulli: $h + u^2/2 = h_0 = c_0^2/(\gamma - 1)$ διατηρείται και $U_{max} = [2/(\gamma - 1)]^{1/2}c_0 \approx 2.2c_0$ για $\gamma = 1.4$ (το h δηλώνει τη συγκεκριμένη ενθαλπία, $h = \varepsilon + p/\rho$). Στην σταθερή ροή το σωματίδιο μόνο αποκτά μία κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του $u_{max}^2/2$ ίση με την αρχική ενθαλπία h_0 .

Στην περίπτωση ασταθούς ροής σε ένα κενό, η κινητική ενέργεια είναι μεγαλύτερη από την αρχική ενθαλπία h_0 . Η πρόσθετη κινητική ενέργεια αποκτάται στην απώλεια θερμικής ενέργειας στα γειτονικά σωματίδια. Η συνολική ενέργεια, ίση με το σύνολο των κινητικών και εσωτερικών ενεργειών στην περιοχή που καταλαμβάνεται από το κύμα αραιώσης, διατηρείται και είναι ίση με την αρχική εσωτερική ενέργεια στην περιοχή αυτή. Τα σφαιρικά ή κυλινδρικά κύματα αραιώσης, που δημιουργούνται όταν “σφαιρικά” ή “κυλινδρικά” έμβολα αποσύρονται ξαφνικά από ένα αέριο που καταλαμβάνει το χώρο $r > r_0$ ή $r < r_0$, μπορούν να εξεταστούν με τρόπο ανάλογο με την επίπεδη περίπτωση. Ένα κύμα αραιώσης, του οποίου η κεφαλή περνά μέσα απ’ το ήρεμο αέριο με την ταχύτητα του ήχου c_0 , σχηματίζεται επίσης σε αυτή την περίπτωση. Όμως, σε αυτές τις περιπτώσεις, οι περιοχές ανάμεσα στο έμβολο και το τελικό τμήμα του κύματος αραιώσης δεν είναι ομοιόμορφης ροής. Σημειώνουμε ότι τα σφαιρικά και κυλινδρικά κύματα αραιώσης, σε αντίθεση με τα επίπεδα αντίστοιχά τους, δεν είναι πανομοιότυπα σε αυτό το πρόβλημα υπάρχει μια χαρακτηριστική κλίμακα μήκους – η αρχική ακτίνα του εμβόλου r_0 .

§12. Όταν δεν υπάρχει πιθανότητα ύπαρξης ενός κεντρικού κύματος συμπίεσης.

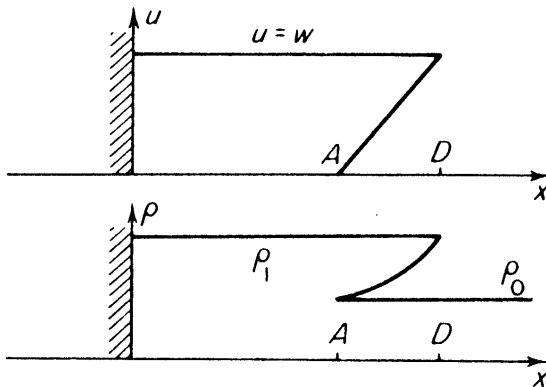
Ίσως φαίνεται πως η λύση του προβλήματος ενός εμβόλου που κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι ισοδύναμα εφαρμόσιμη ασχέτως εάν το έμβολο σπρώχνεται μέσα ή αποσύρεται από το αέριο, είτε προκαλεί εξάπλωση είτε προκαλεί συμπίεση. Οι κινήσεις με εξάπλωση είναι όμοιες και οι λύσεις τους μπορούν να δημιουργηθούν από τις περιοχές της ομοιόμορφης ροής και από μία περιοχή που συνδέεται με ένα απλό κεντρικό κύμα. Ας προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε επίσημα μία συνεχή λύση για ένα όμοιο κύμα συμπίεσης που δημιουργείται από ένα έμβολο το οποίο σπρώχνεται μέσα στο αέριο με σταθερή αρχική ταχύτητα $w > 0$ (το αέριο βρίσκεται στα δεξιά του εμβόλου). Η κεφαλή του κύματος περνά μέσα από το αέριο με την ταχύτητα του ήχου c_0 κατά μήκος της γραμμής $x =$

$c_0 t$ στο επίπεδο x, t . Το έμβολο είναι εφραπτόμενο στην περιοχή ομοιόμορφης ροής όπου $u = w$ και $c = c_1$, και οι δύο περιοχές ομοιόμορφης ροής (I και III σε σχέση με την ορολογία που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη ενότητα) χωρίζονται από την περιοχή κεντρικού απλού κύματος II, όπου $J = u - [2 / (\gamma - 1)] c = \text{const} = - [2 / (\gamma - 1)] c_0$. Ακολουθεί ότι $c_1 = c_0 + 1/2 (\gamma - 1) w$, έτσι ώστε το τελικό τμήμα του κύματος περνά κατά μήκος της γραμμής $x = (w + c_1) t = [1/2 (\gamma + 1) w + c_0] t$. Η κατανομή της ταχύτητας σε σχέση με τη συντεταγμένη x στην περιοχή II περιγράφεται από μία εξίσωση παρόμοια με την (1.56).

$$u = \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right).$$

Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ότι το τελικό τμήμα του κύματος διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα από την κεφαλή του κύματος, με $1/2(\gamma + 1) w + c_0 > c_0$ και ότι οι όψεις της ταχύτητας και της πυκνότητας είναι σχηματικά όπως φαίνονται στο Σχήμα 1.23. Αυτό το αποτέλεσμα δεν έχει φυσικό νόημα και η λύση δεν είναι μίας τιμής στην περιοχή II. Όμως, αυτή είναι η μόνη συνεχής λύση που προκύπτει από τις εξισώσεις αεριοδυναμικής. Επομένως, μία συνεχής λύση για τη δεδομένη περίπτωση απλά δεν υπάρχει. Από ιστορικής άποψης, αυτή η δυσκολία ήταν η αφετηρία για την εξέλιξη των ασυνεχών λύσεων στις εξισώσεις της αεριοδυναμικής, ή αλλιώς, για την εξέλιξη της θεωρίας των κρουστικών κυμάτων.

Εικόνα

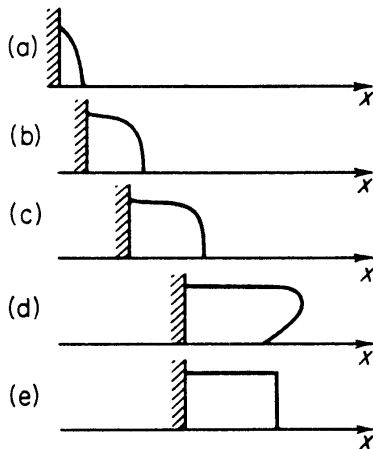


Σχήμα 1.23.
 Όψεις της ταχύτητας και της πυκνότητας που ανταποκρίνονται σε μια συνεχή λύση για ένα όμοιο (κεντρικό) κύμα συμπίεσης. A είναι η κεφαλή του κύματος και D το τελικό του τμήμα. Η λύση δεν είναι μίας τιμής και δεν έχει

φυσικό νόημα.

Σημειώνουμε ότι το έμβολο, αντί να κινείται μέσα στο αέριο με μία σταθερή ταχύτητα, σταδιακά επιταχύνει από την αδράνεια, είναι πιθανόν να βρούμε μία συνεχή λύση για ένα απλό (αλλά όχι πλέον κεντρικό) κύμα συμπίεσης η οποία περιγράφει το αρχικό στάδιο της κίνησης. Η κατάσταση στην περίπτωση αυτή είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν των κρουστικών κυμάτων ορισμένου εύρους (βλ. § 7). Τα χαρακτηριστικά της ομάδας C_+ (εάν το έμβολο βρίσκεται στα αριστερά του αερίου) πλησιάζονται μεταξύ τους και τείνουν να τέμνονται. Η κλίση του κύματος συμπίεσης αυξάνεται με το χρόνο (Σχήμα 1.24) και σε μια στιγμή συγκεκριμένη συμβαίνει η “υπέρβαση” και η λύση γίνεται λύση πολλών – τιμών με τρόπο ανάλογο με εκείνον που περιγράψαμε παραπάνω και στην §7. Αυτό σημαίνει ότι έχει δημιουργηθεί μια ασυνέχεια, π.χ. ένα κρουστικό κύμα.

Εικόνα



Σχ.1.24. Απότομη κλίση σταδιακά της ταχύτητας σε ένα κύμα συμπίεσης που προκαλείται από ένα επιταχυνόμενο έμβολο.

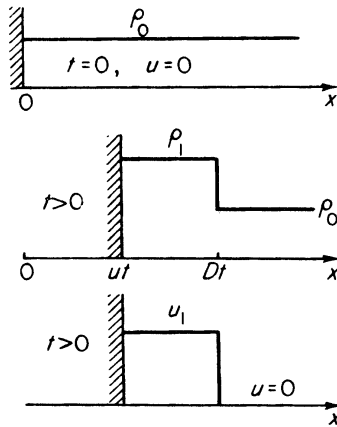
2. Κρουστικά κύματα

§13. Εισαγωγή στην αεριοδυναμική των κρουστικών κυμάτων.

Ας εξετάσουμε ένα αέριο αδρανές αρχικά, με σταθερή πυκνότητα και πίεση ρ_0, p_0 , δεμένο στα αριστερά με ένα επίπεδο έμβολο.

Ας υποθέσουμε ότι το αέριο συμπιέζεται σε μία αρχική στιγμή από ένα έμβολο που εισχωρεί στο αέριο με σταθερή ταχύτητα, την οποία θα δηλώσουμε με u . Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, μία προσπάθεια να βρούμε μία σταθερή λύση στο πρόβλημα αυτό οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα φυσικά ανούσιο. Αφού το πρόβλημα είναι όμοιο, η μόνη λύση ικανοποιητική ως προς τις εξισώσεις της αεριοδυναμικής είναι οι εύκολες λύσεις, στις οποίες οι ποσότητες u, ρ και p είναι σταθερές, καθώς επίσης και η λύση του κεντρικού απλού κύματος. Έτσι, απομένει μόνο μια πιθανότητα δημιουργίας μιας λύσης που θα μπορούσε να σταθεί ικανοποιητικά για τις οριακές συνθήκες του προβλήματος στο ατάραχο αέριο, $u = 0, p = p_0$ και $\rho = \rho_0$ έχοντας παράλληλα στην περιοχή δίπλα στο έμβολο την ταχύτητα του αερίου ίση με την ταχύτητα του εμβόλου. Αυτή η λύση ακυρώνει την μη πραγματική περιοχή II και συνδέει τις περιοχές ομοιόμορφης ροής I και III με την υπόθεση ότι οι μεταβλητές ροής είναι ασυνεχείς στο όριο μεταξύ των περιοχών αυτών η λύση φαίνεται στο Σχήμα 1.25.

Σχήμα 1.25. Όψεις της ταχύτητας και της Εικόνα



πυκνότητας σε ένα κρουστικό κύμα. Το κύμα δημιουργείται από ένα έμβολο που εισχωρεί στο αέριο με σταθερή αρχική ταχύτητα. Το σχέδιο επάνω δείχνει την αρχική κατάσταση.

Γενικότερα, οι νόμοι της συντήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας που διαμορφώνουν τη βάση για τις εξισώσεις της ιζώδους ροής, ενός μη αγώγιμου αερίου δεν εκφράζουν απαραίτητα τη συνέχεια των μεταβλητών ροής. Αυτοί οι νόμοι αρχικά σχηματίστηκαν με τη μορφή διαφορικών εξισώσεων απλά επειδή θεωρούνταν στην αρχή πως η ροή είναι συνεχής. Αυτοί οι νόμοι, όμως, μπορούν επίσης να εφαρμοστούν σε εκείνες τις περιοχές ροής όπου οι μεταβλητές περνούν μια ασυνεχή αλλαγή. Από μαθηματικής πλευράς, μία ασυνέχεια μπορεί να θεωρηθεί ως η οριακή περίπτωση πολύ μεγάλων αλλά οριστικών κλίσεων στις μεταβλητές ροής προς ένα στρώμα του οποίου το πάχος τείνει να μηδενίζεται.

Αφού στη δυναμική ενός ιζώδους και μη αγώγιμου αερίου (με αγνοούμενη μοριακή δομή) δεν υπάρχουν χαρακτηριστικά μήκη και η πιθανότητα ύπαρξης στρωμάτων αυθαίρετα λεπτής μεταφοράς δεν αποκλείεται. Στο όριο απώλειας του πάχους αυτά τα στρώματα εμφανίζουν σε ασυνέχειες. Τέτοιες ασυνέχειες αντιπροσωπεύουν τα κρουστικά τμήματα. Ας εφαρμόσουμε τους γενικούς νόμους διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας για να βρούμε τις άγνωστες ποσότητες: την πυκνότητα ρ_1 και την πίεση p_1 στην συμπιεσμένη περιοχή, καθώς και την διάδοση της ταχύτητας, της ασυνέχειας μέσα από ένα ήρεμο αέριο D . Οι παράμετροι του ήρεμου αερίου ρ_0 και p_0 και η ταχύτητα του εμβόλου u (η οποία είναι ίση με την ταχύτητα του αερίου) θεωρούνται γνωστές. Μία μάζα αερίου ίση με $\rho_0 Dt$ που περιέχεται σε μία στήλη διατμηματικής περιοχής τίθεται σε κίνηση τη στιγμή t . Αυτή η μάζα καταλαμβάνει όγκο $(D - u) t$, ή αλλιώς, η πυκνότητα του συμπιεσμένου αερίου ρ_1 είναι σύμφωνα με την συνθήκη

$$\rho_1 (D - u) t = \rho_0 Dt.$$

Η μάζα $\rho_0 Dt$ αποκτά ορμή $\rho_0 Dt \cdot u$ η οποία, σύμφωνα με το Νόμο του Νεύτωνα, είναι ίση εξαιτίας των δυνάμεων που προκαλούν πίεση με την παρόρμηση (παλμώθηση). Η συνισταμένη δύναμη που δρα στο συμπιεσμένο αέριο είναι ίση με τη διαφορά ανάμεσα στην πίεση που ασκείται στην πλευρά του εμβόλου και στην πλευρά του ήρεμου ρευστού, ή αλλιώς,

$$\rho_0 D u t = (p_1 - p_0) t.$$

Τελικά, η αύξηση στο σύνολο των εσωτερικών και κινητικών ενεργειών του συμπιεσμένου αερίου ισούται με τη λειτουργία που κάνει η εξωτερική δύναμη που δρα στο έμβολο, $p_1 u t$,

$$\rho_0 D t \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \frac{u^2}{2} \right) = p_1 u t.$$

Χωρίζοντας αυτές τις εξισώσεις με t , προκύπτει ένα σύστημα τριών αλγεβρικών παραστάσεων (/ εξισώσεων) που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσουμε τις 3 άγνωστες ποσότητες p_1 , ρ_1 και D με όρους των γνωστών ποσοτήτων u , ρ_0 και p_0 (η θερμοδυναμική σχέση $\varepsilon(p, \rho)$ θεωρείται γνωστή).

Ας επαναδιατυπώσουμε αυτές τις εξισώσεις ώστε οι δεξιές πλευρές να περιέχουν μόνο εκείνες τις ποσότητες που ανήκουν στην περιοχή μπροστά από την ασυνέχεια, και στις αριστερές πλευρές μόνο εκείνες τις ποσότητες που ανήκουν στην περιοχή πίσω από την ασυνέχεια. Σημειώνουμε ότι αν D είναι η διάδοση της ταχύτητας της ασυνέχειας μέσα από ένα αέριο, τότε $u_0 = -D$ είναι η ταχύτητα στην οποία το ήρεμο αέριο περνά μέσα απ' την ασυνέχεια.

Παρομοίως, $D - u$ είναι η διάδοση της ταχύτητας της ασυνέχειας σε σχέση με το αέριο που κινείται πίσω και $u_1 = -(D - u)$ είναι η ταχύτητα του αερίου που ρέει έξω από τη συνέχεια. Με τη σημείωση αυτή μπορούμε να ξαναγράψουμε το νόμο διατήρησης της μάζας ως εξής:

$$\rho_1 u_1 = \rho_0 u_0 \quad (1.61)$$

Χρησιμοποιώντας το (1.61), ο νόμος διατήρησης της ορμής παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_0 + \rho_0 u_0^2. \quad (1.62)$$

Χρησιμοποιώντας το (1.61) και (1.62), ο νόμος διατήρησης της ενέργειας γίνεται:

$$\varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \varepsilon_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{u_0^2}{2}. \quad (1.63)$$

Εισάγοντας τη συγκεκριμένη ενθαλπία $h = \varepsilon + p / \rho$, μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτή την εξίσωση ως εξής:

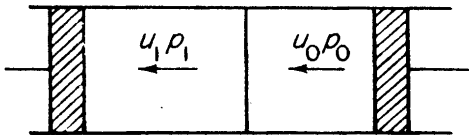
$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_0 + \frac{u_0^2}{2}. \quad (1.64)$$

Αυτές οι εξισώσεις, που εκφράσαμε παραπάνω στην πιο απλή τους μορφή, σχετίζονται με τις μεταβλητές ροής στην επιφάνεια της ασυνέχειας στην οποία το αέριο ρέει φυσιολογικά στην

επιφάνεια. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι αυτές οι εξισώσεις δεν απαιτούν καμία υπόθεση σχετικά με τις ιδιότητες του ρευστού και πως εκφράζουν μόνο τους γενικούς νόμους της διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Οι εξισώσεις (1.61) – (1.63) μπορούν επίσης να προκύψουν αμέσως εάν θέσουμε την ασυνέχεια σε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα είναι στατική. Από τη στιγμή που η ασυνέχεια είναι απειροελάχιστα λεπτή, δεν μπορεί να υπάρξει συσσώρευση μάζας, ορμής ή ενέργειας στο εσωτερικό της. Επομένως, οι ροές αυτών των ποσοτήτων και στις δύο πλευρές της ασυνέχειας είναι ισοδύναμες. Εάν ένα αέριο με πυκνότητα ρ_0 και ταχύτητα u_0 ρέει φυσιολογικά στην επιφάνεια, τότε η μαζική ροή ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου μέσα στην ασυνέχεια είναι ίση με $\rho_0 u_0$ και είναι επίσης ίση με τη μαζική ροή $\rho_1 u_1$ στην άλλη πλευρά της ασυνέχειας. Άρα προκύπτει το αποτέλεσμα (1.61). Η ορμή της μαζικής ροής $\rho_1 u_1$ ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου είναι $\rho_1 u_1^2$. Η αύξηση στην ορμή ύστερα από το πέρασμα μέσα απ' την ασυνέχεια $\rho_1 u_1^2 - \rho_0 u_0^2$ είναι ίση με την ώθηση εξαιτίας της δύναμης της πίεσης ανά μονάδα χρόνου $p_0 - p_1$ ή αντίστοιχα, οι ροές της ορμής $p + \rho u^2$ είναι ίσες στην κάθε πλευρά της ασυνέχειας (το γεγονός ότι η ποσότητα $p + \rho u^2$ είναι η πυκνότητα της ροής ορμής για επίπεδη κίνηση είναι φανερό από τα (1.7) και (1.8)). Έτσι λοιπόν προκύπτει το αποτέλεσμα (1.62).

Η αύξηση στην συνολική ενέργεια (εσωτερική και κινητική) του αερίου που ρέει ανά μονάδα επιφάνειας της επιφάνειας της ασυνέχειας ανά μονάδα χρόνο $\rho_0 u_0 [(e_1 + 1/2 u_1^2) - (e_0 + 1/2 u_0^2)]$ είναι ίση με τη λειτουργία που γίνεται από τις δυνάμεις πίεσης ανά μονάδα επιφάνειας της ίδια επιφάνειας ανά μονάδα χρόνο. Αυτή η λειτουργία ισούται με $p_0 u_0 - p_1 u_1$. Για να ξεκαθαρίσουμε την παραγωγή της τελευταίας ποσότητας ας φανταστούμε ένα αέριο που ρέει από τα δεξιά προς τα αριστερά μέσα από ένα σωλήνα και περνά μέσα από μία ασυνέχεια κάπου στη μέση του σωλήνα (Σχ. 1.26).

Εικόνα



Σχ. 1.26.

Πείραμα για να ξεκαθαρίσουμε την παραγωγή της λειτουργίας της εξίσωσης.

Τα έμβολα που είναι τοποθετημένα στην κάθε πλευρά του σωλήνα κινούνται με ταχύτητες u_0 και u_1 με τέτοιο τρόπο ώστε η επιφάνεια ασυνέχειας να βρίσκεται σε αδράνεια. Η πίεση στο δεξί έμβολο p_0 σπρώχνει το αέριο μέσα στο σωλήνα, κάνοντας τη λειτουργία $\rho_0 u_0$ ανά μονάδα χρόνο ανά μονάδα επιφάνειας. Η λειτουργία που γίνεται από το αέριο στο αριστερό έμβολο είναι η $p_1 u_1$ (το έμβολο εκτελεί αρνητική λειτουργία $-p_1 u_1$ στο αέριο). Η συνολική λειτουργία στο αέριο είναι επομένως η $p_0 u_0 - p_1 u_1$. Εξισώνοντας τη συνολική

λειτουργία με την αύξηση της ενέργειας του αερίου προκύπτει το (1.63). Αυτή η εξίσωση μπορεί επίσης να ερμηνευτεί με ένα διαφορετικό τρόπο έχοντας στο νου πως οι ροές της συνολικής ενέργειας $\rho u(\varepsilon + 1/2 u^2 + p/\rho)$ είναι ίσες και στις δύο πλευρές της ασυνέχειας. (Η έκφραση για τη ροή της ενέργειας προκύπτει από την εξίσωση της ενέργειας που έχει τη μορφή του (1.10)).

Οι εξισώσεις (1.61) – (1.63) που περιγράφουν τη διατήρηση της μάζας ορμής και ενέργειας μέσα σε μια επιφάνεια ασυνέχειας μπορούν επίσης να προκύψουν επίσημα από τις διαφορικές εξισώσεις (1.2), (1.7) και (1.10). Ας γράψουμε αυτές τις εξισώσεις για την επίπεδη περίπτωση

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) &= -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2), \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\right].\end{aligned}\tag{1.65}$$

Πρώτα, θα εξετάσουμε επίσημα την ασυνέχεια ως ένα λεπτό στρώμα που περιέχει μεγάλες κλίσεις όλων των παραμέτρων και θα ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις από x_0 σε x_1 .

Για παράδειγμα,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2) dx.$$

Ύστερα θα πάρουμε το όριο, αφήνοντας το πάχος του στρώματος $x_1 - x_0$ να γίνει μηδενικό. Τα ολοκληρώματα στην αριστερή πλευρά είναι ανάλογα με $x_1 - x_0 \rightarrow 0$, και εξαφανίζονται (το οποίο σχετίζεται με την απουσία συσσώρευσης μάζας, ορμής και ενέργειας στην ασυνέχεια). Τα ολοκληρώματα στη δεξιά πλευρά δίνουν τη διαφορά ανάμεσα στις ποικίλες ροές σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας, ή αλλιώς, φτάνουμε ξανά στα (1.61) – (1.63).

Θα πρέπει να τονίσουμε τη φυσική μορφή του τελευταίου αποτελέσματος των (1.61) – (1.63). Αυτός ο φορμαλισμός δείχνει μόνο ότι οι εκφράσεις των ροών της μάζας, ορμής και ενέργειας κάτω από τα σημάδια απόκλισης στις διαφορικές εξισώσεις είναι εντελώς γενικές, ασχέτως εάν η ροή είναι συνεχής ή όχι. Εάν εξετάσουμε την ασυνέχεια όχι ως μια μαθηματική επιφάνεια, αλλά ως ένα λεπτό στρώμα ορισμένου πάχους όπου οι μεταβλητές ροής αλλάζουν υπερβολικά απότομα, αλλά διαρκώς, δεν μπορούμε πλέον να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις (1.65), οι οποίες δεν λαμβάνουν υπ' όψιν ούτε τη συμπεριφορά του ιξώδους ούτε της θερμότητας.

Θα αποδειχθεί αργότερα ότι η εντροπία του αερίου σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας είναι διαφορετική, ενώ οι διαφορικές εξισώσεις (1.65) δείχνουν πως η εντροπία είναι σταθερή κατά μήκος των streamlines (η ροή είναι αδιαβατική). Παρατηρούμε την προφανή ομοιότητα της εξίσωσης ενέργειας στην κρουστική ασυνέχεια (1.64) με την εξίσωση

Bernoulli για την σταθερή ροή που ισχύει κατά μήκος των *streamlines*.

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{const},$$

§14. Οι καμπύλες Hugoniot

Οι εξισώσεις (1.61) – (1.63) που συσχετίζουν / συνδέουν τις μεταβλητές ροής σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας δημιουργούν ένα σύστημα τριών αλγεβρικών εξισώσεων με έξι μεταβλητές $u_0, \rho_0, p_0, u_1, \rho_1, p_1$. Θεωρείται πως οι θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού (η λειτουργία $\varepsilon(p, \rho)$ ή $h(p, \rho)$) είναι γνωστές. Γνωρίζοντας τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του αερίου ως προς την ασυνέχεια ρ_0, p_0 και υποθέτοντας πως η τιμή μιας παραμέτρου που περιγράφει την δύναμη / ένταση του κρουστικού κύματος είναι γνωστή (για παράδειγμα, η πίεση πίσω απ' το wave front p_1 ή η ταχύτητα του “εμβόλου” που δημιουργεί το κύμα $|u| = u_0 - u_1$), μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις μεταβλητές που απομένουν. Ας derive μερικές γενικές σχέσεις που προκύπτουν από τους νόμους διατήρησης (1.61) – (1.63). Στη θέση της πυκνότητας βάζουμε συγκεκριμένους όγκους $V_0 = 1/\rho_0$ και $V_1 = 1/\rho_1$. Από το (1.61), προκύπτει ότι

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{u_0}{u_1}. \quad (1.66)$$

Διαγράφοντας τις ταχύτητες u_0 και u_1 από τα (1.61) – (1.62) βρίσκουμε ότι:

$$u_0^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}, \quad (1.67)$$

$$u_1^2 = V_1^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}. \quad (1.68)$$

Εάν το κρουστικό κύμα δημιουργείται στο αδιατάρακτο αέριο από την κίνηση ενός εμβόλου, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις για την ταχύτητα της ροής του συμπιεσμένου αερίου (ίση με την ταχύτητα του “εμβόλου”) σε σχέση με το ήρεμο αέριο:

$$|u| = u_0 - u_1 = [(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)]^{1/2}. \quad (1.69)$$

*Σημείωση του εκδότη. Ορισμένες ως κρουστικές αδιαβατικές από τους συγγραφείς.

Σημειώνουμε εδώ μία χρήσιμη φόρμουλα για τη διαφορά μεταξύ της κινητικής ενέργειας του αερίου σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας στο σύστημα συντεταγμένων όπου το κρούσμα

βρίσκεται σε αδράνεια.

$$\frac{1}{2}(u_0^2 - u_1^2) = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(V_0 + V_1). \quad (1.70)$$

Εντάσσοντας τις (1.67) και (1.68) στην εξίσωση της ενέργειας (1.63) προκύπτει μία σχέση ανάμεσα στην πίεση και το συγκεκριμένο όγκο σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας

$$\varepsilon_1(p_1, V_1) - \varepsilon_0(p_0, V_0) = \frac{1}{2}(p_1 + p_0)(V_0 - V_1). \quad (1.71)$$

Αντικαθιστώντας τις συγκεκριμένες εσωτερικές ενέργειες με τις συγκεκριμένες ενθαλπίες σύμφωνα με τον ορισμό $h = \varepsilon + pV$, μπορούμε να ξαναγράψουμε το (1.71) ως εξής:

$$h_1 - h_0 = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(V_0 + V_1). \quad (1.72)$$

Αναλογικά με την εξίσωση που συνδέει τις αρχικές με τις τελικές πιέσεις και όγκους κατά τη διάρκεια της αδιαβατικής συμπίεσης ενός ρευστού, η σχέση (1.71) ή η αντίστοιχη (1.72) αδιαβατική ονομάζεται κρουστική ή αλλιώς η σχέση Hugoniot. Η καμπύλη Hugoniot αντιπροσωπεύεται από τη λειτουργία:

$$p_1 = H(V_1, p_0, V_0), \quad (1.73)$$

η οποία σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις, όταν η θερμοδυναμική λειτουργία $\varepsilon = \varepsilon(p, V)$ έχει μία απλή μορφή, μπορεί να βρεθεί σε σαφή μορφή.

Οι καμπύλες Hugoniot διαφέρουν αισθητά από τις συνηθισμένες ισέντροπες ή ισηντροπικές αδιαβατικές. Ενώ η συνηθισμένη ισέντροπη ανήκει σε μίας παραμέτρου ομάδα καμπυλών $p = P(V, S)$, όπου η μόνη παράμετρος είναι η εντροπία S , η καμπύλη Hugoniot είναι μια λειτουργία δύο παραμέτρων, της αρχικής πίεσης p_0 και του όγκου V_0 . Για να καλύψουμε όλες τις καμπύλες $p = P(V, S)$, αρκεί να διασταυρώσουμε μία σειρά από μονοδιάστατες τιμές της εντροπίας S . Για να καλύψουμε όλες τις καμπύλες $p = H(V, p_0, V_0)$ είναι απαραίτητο να δημιουργήσουμε ένα "άπειρο τετράγωνο" από καμπύλες που να ανταποκρίνεται σε όλες τις πιθανές τιμές των p_0 και V_0 .

§15. Κρουστικά κύματα σε ένα τέλειο αέριο με συγκεκριμένες σταθερές θερμότητες.

Οι εξισώσεις των κρουστικών κυμάτων για ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες είναι ιδιαίτερα απλές. Είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε αυτή την περίπτωση για να εξηγήσουμε όλες τις βασικές ποιοτικές σχέσεις που διέπουν τις αλλαγές στις μεταβλητές σε ένα κρουστικό κύμα. Ας εντάξουμε τις ακόλουθες σχέσεις στις σχέσεις Hugoniot (1.71) και (1.72):

$$\varepsilon = c_v T = \frac{1}{\gamma - 1} pV ; \quad h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pV. \quad (1.74)$$

*Σημείωση του εκδότη. Ορισμένες ορίζονται ως αδιαβατικές του Poisson από τους συγγραφείς.

Μπορούμε τώρα να προσκομίσουμε την εξίσωση της καμπύλης Hugoniot με σαφή μορφή:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma + 1)V_0 - (\gamma - 1)V_1}{(\gamma + 1)V_1 - (\gamma - 1)V_0} \quad (1.75)$$

από την οποία η αναλογία συγκεκριμένου όγκου δίνεται από:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_0}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_0}. \quad (1.76)$$

Η αναλογία της θερμοκρασίας προκύπτει από

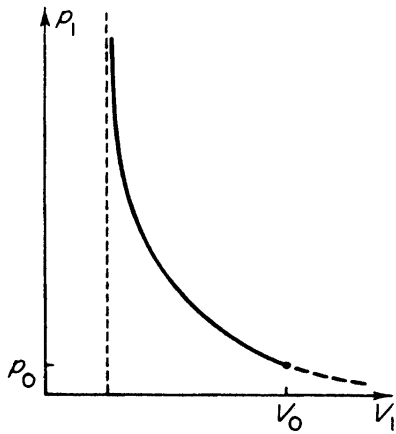
$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0}. \quad (1.77)$$

Χρησιμοποιώντας το (1.76) μπορούμε να εκφράσουμε τις ταχύτητες στις φόρμουλες (1.67) και (1.68) ως μία λειτουργία των πιέσεων και του αρχικού όγκου.

$$u_0^2 = \frac{V_0}{2} [(\gamma - 1)p_0 + (\gamma + 1)p_1], \quad (1.78)$$

$$u_1^2 = \frac{V_0 [(\gamma + 1)p_0 + (\gamma - 1)p_1]^2}{2 [(\gamma - 1)p_0 + (\gamma + 1)p_1]}. \quad (1.79)$$

Αν θεωρήσουμε ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμοότητες ως παράδειγμα, μπορούμε να βρούμε συγκεκριμένες σχέσεις που διέπουν τη συμπεριφορά των κρουστικών κυμάτων. Η καμπύλη Hugoniot είναι μία καμπύλη στο διάγραμμα p, V που περνά μέσα από την αρχική κατάσταση p_0, V_0 . Αυτή η καμπύλη απεικονίζεται στο Σχ.1.27.
Εικόνα



Σχ.1.27. Η καμπύλη Hugoniot.

Θεωρητικά, το (1.75) μπορεί να διευρυνθεί και σε πιέσεις χαμηλότερες από την αρχική $p_1 < p_0$. Όπως θα δούμε στην §17, αυτό το κομμάτι της καμπύλης ανταποκρίνεται σε φυσικώς ανέφικτες καταστάσεις. Για αυτό, απεικονίζεται στο Σχ.1.27 με μία διακεκομμένη γραμμή. Είναι προφανές από το (1.76) πως η αναλογία της πυκνότητας σε ένα πολύ δυνατό κρουστικό κύμα, όπου η πίεση πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος είναι πολύ πιο ισχυρή από την αρχική πίεση, δεν αυξάνεται με την αύξηση της δύναμης αόριστα, αλλά πλησιάζει σε μία σταθερή ορισμένη τιμή. Αυτή η περιορισμένη πυκνότητα ή αναλογία όγκου στο κρουστικό κύμα είναι μία λειτουργία συγκεκριμένης αναλογίας θερμότητας μόνο, και είναι ίση με

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{V_0}{V_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (1.80)$$

Η περιορισμένη αναλογία πυκνότητας για ένα μονατομικό αέριο με $\gamma=5/3$ είναι ίση με 4. Για ένα διατομικό αέριο με $\gamma=7/5$ (θεωρώντας πως οι παλμοί δεν έχουν διεγερθεί) και η αναλογία της πυκνότητας είναι 6. Αν από την άλλη, υπάρχει πλήρης παλμική διεγερση, τότε $\gamma=9/7$ και η αναλογία της πυκνότητας ισούται με 8. Στην πραγματικότητα, κάτω από υψηλές θερμοκρασίες και πιέσεις, οι συγκεκριμένες θερμότητες και η συγκεκριμένη αναλογία θερμότητας δεν είναι πλέον σταθερές λόγω της μοριακής διάστασης και του

ιονισμού. Οι καμπύλες Hugoniot που λαμβάνουν υπόψη αυτές τις διεργασίες θα εξετασθούν στο Κεφάλαιο 3 (III). Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση, όμως, η αναλογία της πυκνότητας παραμένει περιορισμένη και δεν αυξάνεται χωρίς όριο, γενικά δεν ξεπερνάει το 11-13. Η αύξηση στην πυκνότητα διαμέσου ενός κρουστικού κύματος σε ένα τέλειο αέριο με μία υψηλή αναλογία πίεσης είναι μεγαλύτερη, οι υψηλότερες είναι οι συγκεκριμένες θερμοότητες και η χαμηλότερη είναι η αναλογία η συγκεκριμένη της θερμοότητας. Σε υψηλές πιέσεις p_1 , η πυκνότητα αυξάνεται πολύ αργά με την αυξανόμενη πίεση και συνεπώς η αύξηση στη θερμοκρασία ενός συμπιεσμένου αερίου είναι ανάλογη προς την πίεση (βλ. (1.77) για $V_1 \approx \text{const}$). Στο όριο ενός δυνατού κρούσματος, όπου $p_1/p_0 \gg 1$ και $V_1/V_0 \approx (\gamma-1) / (\gamma+1)$,

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{p_1}{p_0}. \quad (1.81)$$

Στο όριο, καθώς $p_1/p_0 \rightarrow \infty$ οι ταχύτητες αυξάνονται όπως η τετραγωνική ρίζα της πίεσης. Οι εξισώσεις (1.67) και (1.68) δείχνουν αυτό για $p_1 \gg p_0$.

$$u_0 = \left(\frac{\gamma + 1}{2} p_1 V_0 \right)^{1/2}, \quad u_1 = \left(\frac{(\gamma - 1)^2}{2(\gamma + 1)} p_1 V_0 \right)^{1/2}. \quad (1.82)$$

Προκύπτουν σημαντικά αποτελέσματα αν συγκρίνουμε τις ταχύτητες του αερίου και στις δύο πλευρές της ασυνέχειας με τις αντίστοιχες ταχύτητες του ήχου. Σε ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμοότητες:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma p V.$$

Οι ταχύτητες του αερίου σε σχέση με την ασυνέχεια χωρισμένες από την ταχύτητα του ήχου δίνονται από:

$$\left(\frac{u_0}{c_0} \right)^2 = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)p_1/p_0}{2\gamma}, \quad (1.83)$$

$$\left(\frac{u_1}{c_1} \right)^2 = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)p_0/p_1}{2\gamma}. \quad (1.84)$$

Στην οριακή περίπτωση ενός ασθενούς κρουστικού κύματος οι πιέσεις στις δυο πλευρές της ασυνέχειας είναι κοντά μεταξύ τους, ώστε $p_1 \approx p_0$, $(p_1 - p_0) / p_0 \ll 1$. Από το (1.76) γνωρίζουμε πως η αύξηση της πυκνότητας είναι μικρή, έτσι ώστε $V_1 \approx V_0$, και οι ταχύτητες του ήχου είναι σχεδόν ίσες, έτσι ώστε $c_1 \approx c_0$. Είναι φανερό από το (1.83) και το (1.84) ότι σε αυτή την περίπτωση: $u_0 \approx c_0 \approx c_1 \approx u_1$. Όμως το u_0 είναι η ταχύτητα της διάδοσης της

ασυνέχειας μέσα από το ατάραχο αέριο. Επομένως, ένα ασθενές κρουστικό κύμα περνά μέσα από το αέριο με μία ταχύτητα που είναι πολύ κοντά στην ταχύτητα του ήχου. Άρα, το ασθενές κρουστικό κύμα είναι πρακτικά το ίδιο με ένα ακουστικό κύμα συμπίεσης. Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει αφού η διαφορά ανάμεσα σε p_1 και p_2 είναι μικρή. Οι εξισώσεις (1.83) και (1.84) επίσης δείχνουν ότι με ένα κρουστικό κύμα, μέσα από το οποίο το αέριο συμπιέζεται ($V_1 < V_0$, $\rho_1 > \rho_0$) η ροή του αερίου μέσα στην ασυνέχεια πραγματοποιείται με υπερηχητική ταχύτητα $u_0 > c_0$ και εκρέει από αυτήν με υπηχητική ταχύτητα $u_1 < c_1$. Το γεγονός ότι $V_1 < V_0$, $\rho_1 > \rho_0$ για $p_1 > p_0$ προκύπτει από τις γενικές σχέσεις (1.67) και (1.68). Μπορούμε να διατυπώσουμε το παραπάνω με έναν διαφορετικό τρόπο: Το κρουστικό κύμα εξαπλώνεται με μια υπερηχητική ταχύτητα σε σχέση με το ατάραχο αέριο και με υπηχητική ταχύτητα σε σχέση με το συμπιεσμένο αέριο πίσω από αυτό. Το πιο ισχυρό είναι το κρουστικό κύμα (πχ. Η μεγαλύτερη αναλογία είναι η p_1/p_0), η υψηλότερη είναι η ταχύτητα της πρόσοψης του κύματος u_0 σε σύγκριση με την ταχύτητα του ήχου c_0 στο ατάραχο αέριο. Από την άλλη, στην οριακή περίπτωση ενός ισχυρού κρούσματος ($p_1 \gg p_0$) η αναλογία u_1/c_1 προσεγγίζει μια σταθερή τιμή, $u_1/c_1 \rightarrow [(\gamma-1)/2\gamma]^{1/2} < 1$. Ας εξετάσουμε τί συμβαίνει στην εντροπία ενός αερίου που συμπιέζεται από ένα κρουστικό κύμα. Η εντροπία ενός τέλει αερίου με συγκεκριμένες σταθερές θερμοτήτες δίνεται από: $S = c_v \ln pV^\gamma$. Διαφορά ανάμεσα στις εντροπίες κάθε πλευράς της πρόσοψης του κρούσματος, όπως προέκυψε από το (1.76) είναι

$$S_1 - S_0 = c_v \ln \frac{p_1 V_1^\gamma}{p_0 V_0^\gamma} = c_v \ln \left\{ \frac{p_1 \left[(\gamma - 1)(p_1/p_0) + (\gamma + 1) \right]^\gamma}{p_0 \left[(\gamma + 1)(p_1/p_0) + (\gamma - 1) \right]^\gamma} \right\} \quad (1.85)$$

Στην οριακή περίπτωση ενός αδύναμου κρουστικού κύματος ($p_1 \approx p_0$) η έκφραση στα τυπογραφικά 'μούστακια' αυξάνεται μονοτονικά, και, όπως εύκολα μπορεί να επαληθευτεί, προσεγγίζει το άπειρο καθώς $p_1/p_0 \rightarrow \infty$. Άρα το άλμα της εντροπίας ενός αερίου που συμπιέζεται από ένα κρούσμα αυξάνεται με τη δύναμη ενός κρουστικού κύματος. Η αύξηση στην εντροπία δείχνει ότι οι αμετάτρεπτες διαλυτικές διαδικασίες (οι οποίες μπορούν να αποδοθούν στην παρουσία του ιζώδους και της συμπεριφοράς της θερμοτήτας στο ρευστό) συμβαίνουν στο κρουστικό κύμα. Μια θεωρία που δεν λαμβάνει υπόψη αυτές τις διαδικασίες δεν μπορεί να περιγράψει το μηχανισμό της συμπίεσης του κρούσματος ή τη δομή του πολύ λεπτού αλλά πεπερασμένου στρώματος όπου το αέριο περνά το μεταβατικό στάδιο από την αρχική στην τελική του κατάσταση.

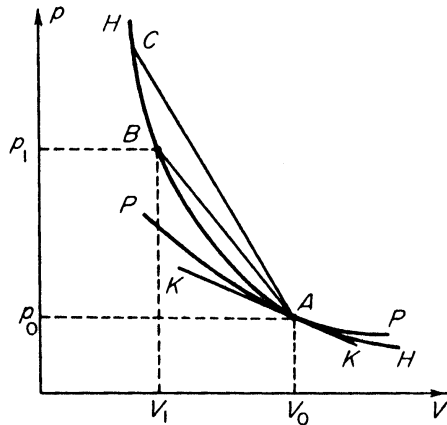
Πραγματικά, μία τέτοια θεωρία αντιπροσωπεύει επίσημα μία κρουστική ασυνέχεια ως μία μαθηματική επιφάνεια μηδενικού πάχους. Όπως σημειώθηκε πρωτότερα, αυτή η θεωρία δε συμπεριλαμβάνει κανένα χαρακτηριστικό μέγεθος που θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως κλίμακα για το πάχος της ασυνέχειας. Αυτή η κλίμακα εμφανίζεται όταν η μοριακή δομή του αερίου, σύμφωνα με το ιζώδες και τη θερμική συμπεριφορά, λαμβάνονται υπόψη. Είναι το μοριακό ελεύθερο μονοπάτι που είναι ανάλογο στο ιζώδες και στη θερμική συμπεριφορά, που χρησιμεύει ως τρόπος μέτρησης του εύρους της ασυνέχειας. Είναι σημαντικό όμως, ότι η αύξηση της εντροπίας σε ένα κρούσμα συμπίεσης είναι εντελώς ανεξάρτητη από το μηχανισμό διάλυσης και καθορίζεται αποκλειστικά από τους νόμους διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Μόνο το πάχος της ασυνέχειας, που εξαρτάται από την αξία της μεταβλητής θερμοτήτας του αερίου που υφίσταται την

κρουστική συμπίεση, εξαρτάται από τον διαλυτικό μηχανισμό. Αναλογικά ένα ποτήρι με καυτό νερό θα κρυώσει κατά κανόνα σε μια δεδομένη θερμοκρασία δωματίου, ανεξάρτητα από το μηχανισμό της ανταλλαγής θερμότητας με το περιβάλλον μέσο, ενώ ο μηχανισμός καθορίζει μόνο το βαθμό ψύξης. Ο διαλυτικός μηχανισμός ελέγχει μόνο τις τιμές των κλίσεων των μεταβλητών ροής, στο στρώμα μετάβασης, αλλά δεν επηρεάζει τα άλματα σε αυτές τις ποσότητες ανάμεσα στην αρχική και την τελική κατάσταση. Αυτές οι αλλαγές καθορίζονται αποκλειστικά από τους νόμους διατήρησης. Για παράδειγμα, αν $\Delta p = p_1 - p_0$ είναι η αλλαγή της πίεσης μέσα σε ένα κρουστικό κύμα και Δx είναι το πλάτος του στρώματος μετάβασης, τότε Δx και $dp/dx \sim \Delta p / \Delta x$ αλλάζουν και με το ιζώδες και με τη θερμική συμπεριφορά, ενώ το Δx $dp/dx \approx \Delta p$ παραμένει αμετάβλητο. Στο όριο, όταν οι συντελεστές του ιζώδους και της θερμικής συμπεριφοράς τείνουν προς το μηδέν, $\Delta x \rightarrow 0$ και $dp/dx \sim 1/\Delta x \rightarrow \infty$, έτσι ώστε οι κλίσεις να γίνονται πεπερασμένες και αντίστοιχες σε μία ασυνέχεια. Οι εξισώσεις αεροδυναμικής που δε λαμβάνουν υπόψη το ιζώδες ή τη θερμική συμπεριφορά παραδέχονται την ύπαρξη ασυνεχειών, αλλά δεν μπορούν να περιγράψουν τη συνεχή μετάβαση από την αρχική στην τελική κατάσταση. Αυτές οι εξισώσεις βασίζονται στην υπόθεση ότι η διαδικασία είναι αδιαβατική, ότι $DS/Dt=0$ που είναι ισοδύναμη με την εξίσωση ενέργειας. Οι εξισώσεις αεροδυναμικής περιγράφουν τέσσερις νόμους διατήρησης : διατήρηση της μάζας, ορμής, ενέργειας και εντροπίας. Μόνο οι πρώτες τρεις από αυτές τις εξισώσεις, όχι όμως η εξίσωση της εντροπίας, ικανοποιούνται από την ασυνέχεια. Θα επιστρέψουμε στο πρόβλημα του πλάτους της πρόσφυσης του κρούσματος στην § 23. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί μόνο όταν η μοριακή δομή του ρευστού λαμβάνεται υπόψη, ή αλλιώς, η διαδικασία κρουστικής συμπίεσης υπόκειται σε προσεκτική μικροσκοπική ανάλυση. Προς το παρόν, θα συνεχίσουμε τη λεπτομερή περιγραφή των φαινομένων κρουστικής συμπίεσης που βασίζονται στους νόμους της διατήρησης της μάζας, ορμής και ενέργειας.

§16. Γεωμετρική ερμηνεία των νόμων που διέπουν τα κρούσματα συμπίεσης.

Το διάγραμμα p, V είναι πολύ χρήσιμο για να ξεκαθαρίσουμε τις γεωμετρικές σχέσεις που διέπουν τα κρουστικά κύματα και τις ιδιότητες των καμπυλών Hugoniot. Μια καμπύλη Hugoniot HH (Σχ.1.28) σχεδιάζεται μέσα από το σημείο A στο επίπεδο p, V .

Εικόνα



Σχ.1.28. Ένα διάγραμμα p, V . ΗΗΗ είναι μία καμπύλη Hugoniot, η PP είναι μία ισηντροπική, και η KK είναι μία εφαπτομένη και στην καμπύλη Hugoniot και στην ισηντροπική κατά την αρχική κατάσταση που αντιπροσωπεύεται από το σημείο A (V_0, p_0).

Αυτό το σημείο δηλώνει την αρχική κατάσταση του ρευστού p_0, V_0 . Θεωρούμε ότι ο χαρακτήρας αυτής της καμπύλης είναι παρομοίως με την καμπύλη Hugoniot για ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες, ή αλλιώς, η καμπύλη είναι παντού κυρτή με κλίση προς τα κάτω όπου η δεύτερη παράγωγος d^2p/dV^2 είναι θετική σε όλα τα σημεία. Για λόγους σαφήνειας θα απεικονίσουμε μερικές προτάσεις με συγκεκριμένους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες ως παράδειγμα. Μπορεί να αποδειχθεί, όμως, ότι η φύση της συμπεριφοράς είναι αρκετά γενική και εφαρμόσιμη σε ρευστά με άλλες θερμοδυναμικές ιδιότητες. Η μόνη επιβεβλημένη συνθήκη είναι ότι η καμπύλη Hugoniot πρέπει να είναι κυρτή με κλίση προς τα κάτω. Το ρευστό μεταβάλλεται από την κρουστική συμπίεση από την κατάσταση A (p_0, V_0) στην κατάσταση B (p_1, V_1) που αντιπροσωπεύεται από το σημείο B πάνω την καμπύλη Hugoniot. Σύμφωνα με το (1.67) η διάδοση της ταχύτητας ενός κρουστικού κύματος μέσα από ένα ατάραχο ρευστό δίνεται από

$$D^2 = u_0^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}.$$

Αυτή η ταχύτητα μπορεί να καθοριστεί γραφικά από την κλίση $((p_1 - p_0) / (V_0 - V_1))$ της ευθείας AB που είναι σχεδιασμένη ανάμεσα στην αρχική και την τελική κατάσταση. Είναι φανερό από το Σχ.1.28 ότι όσο πιο μεγάλη είναι η τελική πίεση (όσο πιο ισχυρό είναι το κρουστικό κύμα) τόσο μεγαλύτερη είναι η κλίση και τόσο μεγαλώνει και η ταχύτητα του κύματος. Δύο ευθείες φαίνονται στο Σχ.1.28, η AB και η AC για να απεικονίσουν και σχηματικά την παραπάνω πρόταση. Ας εξετάσουμε τί ακριβώς καθορίζει την αρχική κλίση της καμπύλης Hugoniot στο σημείο A. Υπολογίζουμε την παράγωγο dp_1 / dV_1 από τη

φόρμουλα (1.75) για ένα τέλειο αέριο με σταθερές και συγκεκριμένες θερμότητες.

$$\frac{dp_1}{dV_1} = - \frac{(\gamma - 1)p_0}{(\gamma + 1)V_1 - (\gamma - 1)V_0} - \frac{p_0[(\gamma + 1)V_0 - (\gamma - 1)V_1](\gamma + 1)}{[(\gamma + 1)V_1 - (\gamma - 1)V_0]^2}.$$

Αξιολογώντας την παράγωγο στο σημείο A αν $V_1 = V_0$, τότε προκύπτει ότι $(dp_1/dV_1)_0 = -\gamma p_0/V_0$. Αυτή η ποσότητα είναι απλώς η κλίση της ισεντροπικής $p \sim V^{-\gamma}$ που περνά απ' το σημείο A, αφού $(\partial p / \partial V)_s = -\gamma p/V$. Άρα, η καμπύλη Hugoniot είναι στην ισεντροπική στο σημείο A. Η συνηθισμένη ισεντροπική καμπύλη PP που αντιστοιχεί στην αρχική εντροπία του αερίου $S_0 = S(p_0, V_0)$ επίσης φαίνεται στο Σχ. 1.28. Η κλίση της καμπύλης Hugoniot και η ισεντροπική στο αρχικό σημείο απεικονίζονται επίσης από τη γενική εξίσωση (1.67) για την ταχύτητα ενός κρουστικού κύματος. Στο όριο ενός ασθενούς κρουστικού κύματος, όταν $(p_1 - p_0)/p \rightarrow 0$, το κρουστικό κύμα είναι το ίδιο με ένα ηχητικό κύμα η αλλαγή στην εντροπία προσεγγίζει το μηδέν και η ταχύτητα του κύματος συλλειτουργεί μαζί με την ταχύτητα του ήχου.

$$D^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1} \rightarrow -V_0^2 \left(\frac{\Delta p}{\Delta V} \right)_s \rightarrow c_0^2.$$

Γενικά, όμως, η κλίση της ευθείας AB είναι πάντοτε μεγαλύτερη από την κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη Hugoniot στο σημείο A, έτσι ώστε ισχύει πάντα ότι $D = u_0 > c_0$.

Η αρχική κλίση της καμπύλης Hugoniot καθορίζεται από την ταχύτητα του ήχου στην αρχική κατάσταση. Αυτό θα αποδειχθεί ακριβώς από τη γενική περίπτωση ενός αυθαίρετου ρευστού στην §18. Ο άμεσος υπολογισμός χρησιμοποιώντας τις φόρμουλες για ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες, δείχνει πως μόνο η πρώτη αλλά και η δεύτερη παράγωγος καμπύλων και ισεντροπικών των Hugoniot συνυπάρχουν στο σημείο A και υπάρχει με δεύτερης τάξεως κλίσης στο σημείο αυτό. Αυτό το αποτέλεσμα είναι επίσης αποτέλεσμα γενικής φύσεως (βλ. §18).

Όπως φαίνεται απ' το σχήμα 1.28, η καμπύλη Hugoniot περνάει πάντα πάνω από τη συνηθισμένη ισεντροπική που ξεκινάει από το αρχικό σημείο. Πραγματικά, η εντροπία αυξάνεται κατά τη διάρκεια της κρουστικής συμπίεσης από τον όγκο V_0 στον όγκο $V_1 < V_0$, ενώ, βεβαίως, παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της ισεντροπικής συμπίεσης. Με τον όγκο σταθερό, η πίεση αυξάνεται όσο αυξάνεται και η εντροπία.*

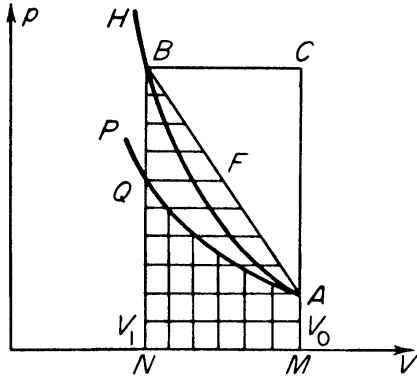
Η εξίσωση (1.71) για την καμπύλη Hugoniot δείχνει ότι η αύξηση στη συγκεκριμένη εσωτερική ενέργεια $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ κατά τη διάρκεια της συμπίεσης απ' το κρουστικό κύμα από την κατάσταση A στην κατάσταση B είναι αριθμητικά ίση με την περιοχή του τραπεζοειδούς MABN που σκιαγραφείται οριζοντίως στο Σχ. 1.29. Εάν το αέριο συμπιέζεται ισεντροπικά από τη κατάσταση A σε όγκο V_1 (κατάσταση Q) τότε η λειτουργία που εκτελείται είναι αριθμητικά ίση με την περιοχή MANQ (που σκιαγραφείται κάθετα) που συνδέεται με την συνηθισμένη ισεντροπική P επάνω και από τον άξονα V κάτω (Σχ. 1.29). Αυτή η περιοχή

δίνει επίσης την αύξηση στην εσωτερική ενέργεια του αερίου $\varepsilon_1 - \varepsilon' = \int_{V_0}^{V_1} p dV$ η ολοκλήρωση γίνεται για $S = S_0$).

Για να έρθει το αέριο στην τελική κατάσταση B είναι απαραίτητο να θεωρηθεί σε σταθερό όγκο V_1 , μεταφέροντας μία ποσότητα θερμότητας ίση με τη διαφορά μεταξύ των περιοχών που σκιαγραφούνται οριζοντίως και καθέτως, ή αλλιώς, με την περιοχή ABQ. Η τελευταία περιοχή καθορίζει επίσης την αύξηση της εντροπίας του αερίου

εξ' αιτίας της συμπίεσης απ' το κρουστικό κύμα. Η περιοχή είναι ίση, με $\epsilon_1 - \epsilon' = \int_{S_0}^{S_1} T dS = \bar{T} (S_1 - S_0)$ όπου \bar{T} είναι μία συγκεκριμένη μέση θερμοκρασία που έγκειται στο τμήμα QB ($V = V_1 = \text{const}$).

Εικόνα



Σχ. 1.29. Γεωμετρική ερμηνεία της αύξησης της ενέργειας σε ένα κρουστικό κύμα. Η είναι η καμπύλη Hugoniot και P η αντίστοιχη ισεντροπική.

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων όπου το αέριο βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση αδράνειας, η κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας που αποκτά το αέριο από την συμπίεση είναι ίση με:

$$\frac{u^2}{2} = \frac{(u_0 - u_1)^2}{2} = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(V_0 - V_1).$$

Αυτή η ενέργεια είναι αριθμητικά ίση με την περιοχή του τριγώνου ABC στο Σχ. 1.29, το οποίο συμπληρώνει το τραπέζιο MABN (του οποίου περιοχή αντιστοιχεί σε $\epsilon_1 - \epsilon_0$) σε σχέση με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο MCBN. Η περιοχή αυτού του παραλληλόγραμμου, $p_1 (V_0 - V_1)$, αντιπροσωπεύει τη συνολική ενέργεια που μεταφέρεται από το “έμβολο” σε μία μονάδα μάζας του αερίου που αρχικά είναι αδρανές. Μέσα από ένα ισχυρό κύμα, όπου $p_1 \gg p_0$, αυτή η ενέργεια χωρίζεται ίσα ανάμεσα στην αύξηση της εσωτερικής ενέργειας και την αύξηση της κινητικής ενέργειας και η περιοχή MABN είναι σχεδόν ίση με την περιοχή ABC:

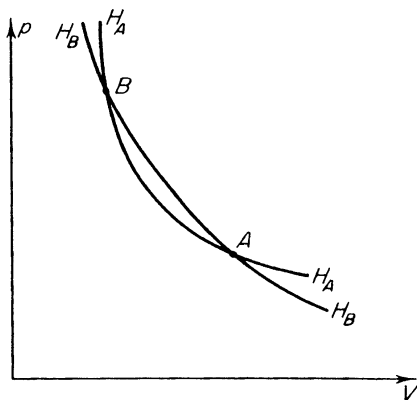
$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \approx \frac{u^2}{2} \approx \frac{1}{2} p_1 (V_1 - V_0).$$

Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα p, V ας εξετάσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της ταχύτητας του αερίου και της ταχύτητας του ήχου κατά το τελικό στάδιο (Σχ. 1.30). Στην καμπύλη Hugoniot H_A (που αντιστοιχεί στην αρχική κατάσταση A) σχεδιάζουμε μία καινούρια καμπύλη Hugoniot: H_B μέσα απ' το σημείο B , όπου το σημείο B είναι το αρχικό σημείο της νέας καμπύλης. Η συμμετρία της εξίσωσης για την καμπύλη Hugoniot σε σχέση με τη μετάθεση των υπογεγραμμένων "0" και "1"

δείχνει ότι εάν $p_1 = H(V_1, p_0, V_0)$ τότε $p_0 = H(V_0, p_1, V_1)$.

Με άλλα λόγια, η καμπύλη Hugoniot H_B που εκτείνεται στην κατεύθυνση της μείωσης της πίεσης τέμνει την καμπύλη H_A στο σημείο A . Η σχετική τοποθεσία των καμπύλων Hugoniot H_A και H_B είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.30 και αυτή η σχέση μπορεί εύκολα να επαληθευτεί χρησιμοποιώντας το παράδειγμα ενός τέλει αερίου με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες.*

Σχ. 1.30. Ένα διάγραμμα p, V που απεικονίζει τη σχέση μεταξύ της ταχύτητας του αερίου και της ταχύτητας του ήχου σ' ένα κρουστικό κύμα.



Εικόνα

Η διάδοση της ταχύτητας του κύματος σε σχέση με το συμπιεσμένο αέριο καθορίζεται από το (1.68),

$$u_1^2 = V_1^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}.$$

Το τετράγωνο της ταχύτητας του ήχου στο συμπιεσμένο αέριο στο σημείο B είναι

$$c_1^2 = -V_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s.$$

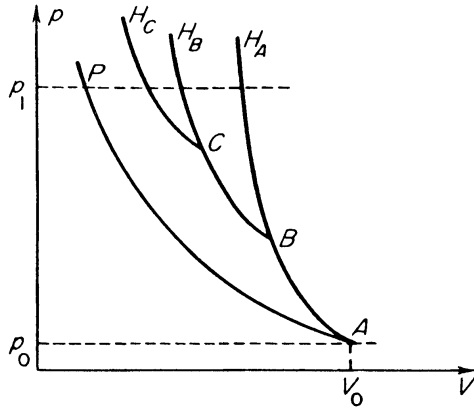
Η πρώτη από αυτές τις ποσότητες είναι ανάλογη στην κλίση της γραμμής BA, και η δεύτερη στην κλίση της καμπύλης Hugoniot H_B στο σημείο B (Η καμπύλη H_B και η ισεντροπική που περνάει απ' το σημείο B είναι εφαπτόμενες). Οι σχετικές θέσεις της ευθείας BA και της καμπύλης H_B αντιστοιχούν στο γεγονός ότι $u_1 < c_1$.

*Το γεγονός ότι η καμπύλη H_B περνά στα αριστερά της H_A με πιέσεις υψηλότερες από p_B μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: εάν το σημείο B αντιστοιχεί στη συμπίεση του αερίου απ' την κατάσταση A λόγω ενός ισχυρού κρουστικού κύματος, τότε η καμπύλη Hugoniot H_A γίνεται σχεδόν κάθετη $p > p_B$, και αντιστοιχεί στην οριακή συμπίεση με το όγκο $[(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]V_A$. Ταυτόχρονα ένα δεύτερο κρουστικό κύμα που περνά μέσα απ' το αέριο στην κατάσταση B μπορεί να προκαλέσει μία συμπίεση στον όγκο

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_B = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2 V_A.$$

Σημειώθηκε στην §12 ότι η καμπύλη Hugoniot σε αντίθεση με την ισεντροπική είναι μία λειτουργία δύο παραμέτρων. Λόγω αυτού του γεγονότος είναι απίθανο να φτάσουμε στην ίδια τελική κατάσταση αν συμπίεσουμε ένα αέριο με πολλαπλά κρουστικά κύματα καθώς φτάνει ένα μόνο κρουστικό κύμα για τη συμπίεση, θεωρώντας ότι και οι δύο διαδικασίες ξεκινούν από το ίδιο αρχικό στάδιο. Για παράδειγμα ένα δυνατό κρουστικό κύμα που διαδίδεται μέσα σε ένα μονατομικό αέριο θα αποφέρει αναλογία πυκνότητας 4, ενώ δύο διαδοχικά ισχυρά κρουστικά κύματα θα αποφέρουν αναλογία πυκνότητας 16 με την τελική πίεση να παραμένει ίδια. Την ίδια στιγμή, όμως, εάν η τελική πίεση διατηρείται η ίδια, η ίδια πυκνότητα θα αποκτηθεί ασχέτως του αριθμού των σταδίων ξεχωριστά μιας ισεντροπικής διαδικασίας.

Εικόνα



Σχ. 1.31. Μονό και πολλαπλό κρουστικό κύμα και ισεντροπική συμπίεση ενός αερίου στην ίδια τελική πίεση p_1 , H_A , H_B και H_C είναι οι καμπύλες Hugoniot με τα αρχικά στάδια A , B και C αντίστοιχα. P είναι μία ισεντροπική.

Αυτή η κατάσταση απεικονίζεται στο διάγραμμα p, V στο Σχ. 1.31, στο οποίο φαίνονται μία ισεντροπική και πολλές καμπύλες Hugoniot που αντιστοιχούν στην συμπίεση ενός αερίου από διαδοχικά κρουστικά κύματα.

§17. Μηδενική πιθανότητα για ένα κρουστικό κύμα αραιώσης σε ένα ρευστό με φυσιολογικές θερμοδυναμικές ιδιότητες.

Στην §15 παρουσιάσαμε τις εξισώσεις που σχετίζουν τις διάφορες ποσότητες ροής μέσα σε ένα κρουστικό κύμα για την περίπτωση ενός τέλει αερίου με σταθερές συγκεκριμένες θερμοότητες. Αυτές οι εξισώσεις δείχνουν ότι οι ακόλουθες ποσότητες επιτυγχάνονται μέσα σε ένα κρουστικό κύμα συμπίεσης.

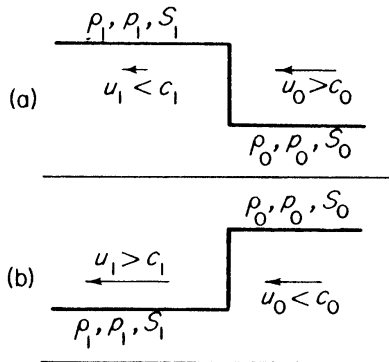
$$\begin{aligned} p_1 > p_0, \rho_1 > \rho_0, V_1 < V_0, u_0 > c_0, u_1 < c_1 \\ S_1 > S_0. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Η εντροπία του ρευστού αυξάνεται μαζί με την αύξηση στην πίεση και την πυκνότητα το κύμα κατευθύνεται σε σχέση με το αδιατάρακτο αέριο με υπερηχητική ταχύτητα και σε σχέση με το συμπιεσμένο αέριο πίσω του με υπηχητική ταχύτητα. Αυτή η κατάσταση

απεικονίζεται σχηματικά στο Σχ. 1.32α.

Ας επεκτείνουμε τώρα τις σχέσεις στο (1.75) για μία καμπύλη Hugouioti ώστε να συμπεριλάβουμε πιέσεις μικρότερες από την αρχική πίεση και ας εξετάσουμε την ύπαρξη ασυνεχειών στις οποίες συμβαίνει μία εξάπλωση του αερίου και όχι μία συμπίεση με $V_1 > V_0$, $\rho_1 < \rho_0$. Οι νόμοι διατήρησης της μάζας, ορμής και ενέργειας που χρησιμοποιούνται για να προκύψουν οι εξισώσεις που σχετίζουν τις ταχύτητες, τις πυκνότητες και τις πιέσεις και στις δύο πλευρές της ασυνέχειας δεν αποκλείουν με κανένα τρόπο την πιθανότητα ύπαρξης τέτοιων ασυνεχειών.

Εικόνα



Σχ. 1.32. Σχηματική αναπαράσταση (α) της συμπίεσης και (β) των κρουστικών κυμάτων αραιώσης. Το αέριο ρέει μέσα στην ασυνέχεια από τα δεξιά προς τα αριστερά.

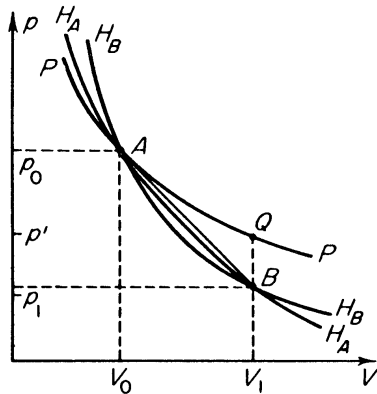
Είναι φανερό από το (1.83) και το (1.84) πως σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $u_0 < c_0$ και $u_1 > c_1$. Η εξίσωση (1.85) για την εντροπία μέσα στην ασυνέχεια δείχνει ότι η εντροπία του αερίου μειώνεται. Άρα φτάνουμε σε ένα κρουστικό κύμα αραιώσης όπου οι ακόλουθες ανισότητες επιτυγχάνονται ταυτόχρονα:

$$\begin{aligned} \rho_1 < \rho_0, \quad \rho_1 < \rho_0, \quad V_1 > V_0, \quad u_0 < c_0, \\ u_1 > c_1, \quad S_1 < S_0. \end{aligned}$$

(1.87)

Αυτή η κατάσταση απεικονίζεται στο Σχ. 1.32b.

Εικόνα



Σχ. 1.33. Γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων σε ένα κρουστικό κύμα αραιώσης H_A είναι η καμπύλη Hugoniot, ρ είναι η ισέντροπη που περνά μέσα απ' το αρχικό στάδιο A και H_B είναι η καμπύλη Hugoniot που ξεκινά από το στάδιο B .

Η γεωμετρική ερμηνεία αυτών των ανισοτήτων είναι παρόμοια με αυτήν στην §16 και φαίνεται στο Σχ. 1.33. Η κλίση της ευθείας AB είναι μικρότερη από την κλίση της Hugoniot H_A στο αρχικό στάδιο A ($u_0 < c_0$) και μεγαλύτερη από την κλίση της δεύτερης Hugoniot H_B στο τελικό στάδιο B ($u_1 > c_1$).

Η ισέντροπη P που περνά από το σημείο A στην περιοχή $p_1 < p_0$ βρίσκεται πάνω από την καμπύλη H_A και άρα εξηγεί τη μείωση στην εντροπία σε ένα κύμα αραιώσης. Για μία ισεντροπική εξάπλωση με τον ίδιο όγκο V_1 , η πίεση p' είναι μεγαλύτερη από την τελική πίεση p_1 . Για να φτάσει στο σημείο B από το Q είναι απαραίτητο να παγώσει το αέριο με συγκεκριμένο όγκο, και έτσι να μειώσει την εντροπία του.

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής, η εντροπία μιας ουσίας δεν μπορεί να μειωθεί μόνο από εσωτερικές διεργασίες, χωρίς τη μεταφορά θερμότητας σε ένα εξωτερικό μέσο. Αυτό δείχνει πως είναι αδύνατο για ένα κύμα αραιώσης να διαδοθεί σε μορφή ασυνέχειας. Επομένως, η προϋπόθεση ότι η εντροπία πρέπει να αυξηθεί επιτρέπει μόνο μια από τις δύο πιθανότητες σύμφωνα με τους νόμους διατήρησης της μάζας, ορμής και της

ενέργειας – το κρουστικό κύμα συμπίεσης. Αυτή η πρόταση είναι αρκετά γενικευμένη*. Στην επόμενη ενότητα θα δείξουμε πως σε ένα ασθενές κύμα, όταν η δεύτερη παράγωγος ($\partial^2 p / \partial V^2$)_s > 0, οι ανισότητες (1.86) ή (1.87) ικανοποιούνται ανεξάρτητα από τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού. Η εγκυρότητα αυτού του ισχυρισμού για τα ισχυρά κύματα για ένα αυθαίρετο ρευστό μπορεί επίσης να αποδειχθεί. Η μόνη συνθήκη που επιβάλλεται στις ιδιότητες του ρευστού, είναι ότι η καμπύλη Hugoniot πρέπει να είναι κυρτή προς τα κάτω σε όλα τα σημεία, ώστε $(d^2 p / dV^2)_{H} > 0$, με τον ίδιο τρόπο όπως και για ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες.

Πραγματικά, η μεγάλη πλειοψηφία των πραγματικών ρευστών, περιέχει τέτοιες ιδιότητες και συνεπώς ο ισχυρισμός σχετικά με την ανυπαρξία πιθανότητας ύπαρξης κρουστικών κυμάτων αραιώσης είναι αρκετά γενικευμένος (συγκεκριμένες εξαιρέσεις θα συζητηθούν παρακάτω).

Η μηδενική πιθανότητα ύπαρξης ενός κρουστικού κύματος αραιώσης μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: Ένα τέτοιο κύμα εξαπλώνεται στο ατάραχο αέριο με την υπηχητική ταχύτητα $u_0 < c_0$. Αυτό σημαίνει πως αν μία κατάσταση παρόμοια με αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 1.32b θα έπρεπε να εμφανιστεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, οι οποίες διαταραχές που προκαλούνται από την απότομη άνοδο της πυκνότητας και της πίεσης θα ξεκινήσουν να κινούνται προς τα δεξιά με την ταχύτητα του ήχου c_0 και θα ξεπεράσουν το “κρουστικό κύμα”. Μετά από μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή η περιοχή αραιώσης θα περιλαμβάνει το αέριο μπροστά από την “ασυνέχεια”, και η ασυνέχεια απλά θα εξαφανιστεί. Με άλλα λόγια, ένα κρουστικό κύμα αραιώσης είναι μηχανικά ασταθές. Αντίστροφα, ένα κρουστικό κύμα συμπίεσης, διαδίδεται μέσα στο ατάραχο αέριο με υπερηχητική ταχύτητα $u_0 > c_0$ η κατάσταση πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος δεν μπορεί με κανένα τρόπο να επηρεάσει την κατάσταση του αερίου μπροστά από το κύμα και η ασυνέχεια παραμένει σταθερή.

Το κρουστικό κύμα συμπίεσης διαδίδεται σε σχέση με το συμπιεσμένο αέριο με υπηχητική ταχύτητα $u_1 < c_1$, και έτσι οι συνθήκες πίσω από το μπροστινό τμήμα του κρούσματος δεν επηρεάζουν τη δύναμη του κύματος. Εάν το αέριο πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος είναι είτε θερμαινόμενο είτε συμπιεσμένο, τότε το κρουστικό κύμα θα δυναμώσει, και αντιστρόφως, εάν το αέριο πίσω από το μπροστινό τμήμα του κρούσματος είναι είτε παγωμένο είτε διευρυνόμενο, τότε οι διαταραχές αραιώσης θα ξεπεράσουν το κρουστικό κύμα και θα το αποδυναμώσουν.

Είναι αρκετά σημαντικό ότι η συνθήκη της μηχανικής σταθερότητας ενός κρουστικού κύματος αντιστοιχεί στη θερμοδυναμική συνθήκη της αυξανόμενης εντροπίας. Η μηχανική σταθερότητα μπορεί να συμβαίνει μόνο όταν το κύμα διαδίδεται μέσα στο ατάραχο ρευστό με υπερηχητική ταχύτητα, αλλιώς οι διαταραχές που προκαλούνται από το κρουστικό κύμα θα εισχωρούσαν στο αρχικό αέριο με την ταχύτητα του ήχου, θα ξεπερνούσαν το κρουστικό κύμα και έτσι θα εξάλειφαν το μπροστινό τμήμα του κύματος. Η συνθήκη αύξησης στην εντροπία συμφωνεί επίσης με την ερμηνεία μας της αιτιότητας των φαινομένων.

Ονομαστικά, με μια αύξηση στην εντροπία, το κρουστικό κύμα συμπίεσης διαδίδεται στο διαταραγμένο αέριο με υπηχητική ταχύτητα ή αλλιώς, εξωτερικοί παράγοντες, όπως ένα έμβολο που ωθείται μέσα στο αέριο, μπορεί να προκαλέσει την εμφάνιση κρουστικού κύματος και ύστερα να επηρεάσει την εξάπλωσή του.

Τα κρουστικά κύματα συμπίεσης, τα οποία ανταποκρίνονται σε μία αύξηση της εντροπίας σε ένα ρευστό με φυσιολογικές θερμοδυναμικές ιδιότητες όπου $(\partial^2 p / \partial V^2)_s > 0$, γίνονται

μηχανικά σταθερά και επηρεάζονται από εξωτερικές δραστηριότητες. Η ύπαρξη ενός κρουστικού κύματος αραιώσης είναι αδύνατη από την άποψη της θερμοδυναμικής και της σταθερότητας, και ένα απότομο μπροστινό τμήμα αραιώσης, που είχε προκληθεί έτσι, θα εξαφανιζόταν με το χρόνο.

Πίνακας 1. 1.

Εφικτά στάδια για τα φυσιολογικά ρευστά με τα κύματα συμπίεσης και τα κρουστικά κύματα αραιώσης.

	Κύμα Συμπίεσης	Κύμα αραιώσης
Ασυνέχεια	Πιθανή η εντροπία αυξάνεται μηχανικά σταθερό.	Αδύνατη η εντροπία μειώνεται μηχανικά ασταθές.
Στρωτή Κατανομή	Αδύνατη ^α , απεριόριστη αύξηση στην απότομη κλίση του μπροστινού τμήματος του κύματος του κύματος με τελικό αποτέλεσμα της “υπέρβασης”.	Πιθανή η κατανομή γίνεται αυξανόμενα πιο στρωτή με το χρόνο.

^α Σημείωση του εκδότη. Με την έννοια της συνθήκης έγκυρης για πάντα.

Κλείνοντας αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε στον πίνακα 1.1 τις πιθανότητες διαφορετικών καταστάσεων μέσω των κυμάτων συμπίεσης και αραιώσης.

§18. Ασθενή κρουστικά κύματα.

Ας εξετάσουμε ένα ασθενές κρουστικό κύμα, όπου η απότομη άνοδος στις μεταβλητές ροής μπορούν να θεωρηθούν ως μικρές ποσότητες. Θα αποφύγουμε προς το παρόν να κάνουμε υποθέσεις σχετικά με τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού και θα στηρίζουμε την ανάλυσή μας στους νόμους διατήρησης. Θεωρώντας πως η εσωτερική ενέργεια είναι μία λειτουργία της εντροπίας και συγκεκριμένου όγκου, περιγράφουμε την αύξηση ενέργειας στο κρουστικό κύμα ως μια εξάπλωση λόγω μικρών αλλαγών στις ανεξάρτητες μεταβλητές σε σχέση με την αρχική κατάσταση.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_0 = & \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} \right)_V (S_1 - S_0) + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_S (V_1 - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^2 \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial V^3} \right)_S (V_1 - V_0)^3. \end{aligned}$$

Όλες οι παράγωγοι στην εξάπλωση αυτή εκτιμούνται στην αρχική κατάσταση V_0, S_0 . Με το να θεωρούμε το $V_1 - V_0$ μια μικρή ποσότητα πρώτης τάξεως, θα δούμε πως $S_1 - S_0$ είναι μία μικρή ποσότητα τρίτης τάξεως. Άρα, με το να περιορίζουμε την εξάπλωση για την εσωτερική ενέργεια σε τρίτης τάξεως ποσότητες, μπορούν να προκύψουν όροι ανάλογα με $(S_1 - S_0)(V_1 - V_0), (S_1 - S_0)^2$, κ.λ.π.

Σύμφωνα με τη θερμοδυναμική ταυτότητα $d\varepsilon = T dS - p dV$,

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial S}\right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_S = -p.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_0 &= T_0(S_1 - S_0) - p_0(V_1 - V_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S (V_1 - V_0)^2 \\ &\quad - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S (V_1 - V_0)^3. \end{aligned}$$

Εντάσσουμε αυτή την έκφραση στην εξίσωση Hugoniot (1.71) και διευρύνουμε την πίεση p_1 στη δεξιά πλευρά με $(V_1 - V_0)$. Αφού η αριστερή πλευρά της εξίσωσης διευρύνεται σε ποσότητες τρίτης τάξεως, είναι αρκετό να περιορίσουμε την εξάπλωση των όρων της πίεσης σε όρους δεύτερης τάξεως και να αγνοήσουμε τον όρο που εμπεριέχει την αύξηση εντροπίας. Η τελευταία θα αποφέρει στη δεξιά πλευρά έναν όρο ανάλογο με $(S_1 - S_0)(V_1 - V_0)$, ο οποίος είναι μεγαλύτερης τάξεως από $(V_1 - V_0)^3$. Προκύπτει ότι:

$$p_1 = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S (V_1 - V_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S (V_1 - V_0)^2.$$

Εντάσσοντας στο (1.71) και απλοποιώντας προκύπτει το εξής για τη σχέση μεταξύ των αλλαγών στην εντροπία και τον όγκο:

$$T_0(S_1 - S_0) = \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S (V_0 - V_1)^3. \quad (1.88)$$

Εάν ξεκινήσουμε με την εξίσωση Hugoniot με την μορφή (1.72) όπου η εσωτερική ενέργεια έχει αντικατασταθεί από την ενθαλπία, προκύπτει παρομοίως:

$$T_0(S_1 - S_0) = \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_S (p_1 - p_0)^3. \quad (1.89)$$

Η ταυτότητα αυτών των δύο εξισώσεων μπορεί εύκολα να φανεί αν εντάξουμε την διεύρυνση $(p_1 - p_0) = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S (V_1 - V_0)$ στο (1.89).

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\partial p / \partial V} \right) = \frac{1}{\partial p / \partial V} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{\partial p / \partial V} \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)^{-3} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right).$$

Οι εξισώσεις (1.88) και (1.89) δείχνουν ότι η αύξηση της εντροπίας σε ένα ασθενές κρουστικό κύμα είναι μια μικρή ποσότητα τρίτης τάξεως σε σχέση με τις διαφορές $p_1 - p_0$ ή $V_0 - V_1$, που χαρακτηρίζουν τη δύναμη του κύματος. Είναι φανερό από τα (1.88) και (1.89) ότι το σήμα της αύξησης της εντροπίας σε ένα κρουστικό κύμα καθορίζεται από το σήμα των δεύτερων παραγώγων $(\partial^2 p / \partial V^2)_s$ ή $(\partial^2 V / \partial p^2)_s$.

Εάν η ισεντροπική συμπίεσιότητα του ρευστού $-(\partial V / \partial p)_s$ μειωθεί με την πίεση ή αλλιώς, $(\partial^2 V / \partial p^2)_s > 0$ και $(\partial^2 p / \partial V^2)_s > 0$, τότε η συνηθισμένη ισεντροπία είναι κυρτή προς τα κάτω στο επίπεδο p, V (όπως και στην περίπτωση ενός τέλει αερίου με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες). Σε αυτή την περίπτωση, όταν $p_1 > p_0$ και $V_1 < V_0$ η εντροπία αυξάνεται ($S_1 > S_0$) σε ένα κρουστικό κύμα συμπίεσης και μειώνεται σε ένα κρουστικό κύμα αραιώσης. Εάν, όμως, $(\partial^2 V / \partial p^2)_s < 0$ ή $(\partial^2 p / \partial V^2)_s < 0$, τότε ισχύει το αντίθετο, δηλαδή, όταν $p_1 < p_0$ και $V_1 > V_0$ η εντροπία αυξάνεται σε ένα κρουστικό κύμα αραιώσης και μειώνεται σε ένα κρουστικό κύμα συμπίεσης. Αφού για την πλειοψηφία των αληθινών ρευστών $(\partial^2 V / \partial p^2)_s > 0$, η μηδενική πιθανότητα ύπαρξης κρουστικών κυμάτων αραιώσης προκύπτει από τη μηδενική πιθανότητα μείωσης της εντροπίας. Αυτή η απαίτηση έχει δημιουργηθεί πιο πάνω και έχει αποδειχθεί για ένα τέλει αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμότητες.

Ας διευρύνουμε την πίεση $p = p(S, V)$ για το αρχικό σημείο S_0, V_0 στην τρίτη τάξη στο $V_1 - V_0$ και στην πρώτη τάξη στο $S_1 - S_0$.

$$p_1 - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s (V_1 - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s (V_1 - V_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3} \right)_s (V_1 - V_0)^3 + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (S_1 - S_0).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη διεύρυνση για να περιγράψουμε τα αρχικά τμήματα των ισεντροπικών και Hugoniot καμπύλων που περνούν από το σημείο S_0, V_0 . Οι όροι της πρώτης και δεύτερης τάξεως στο $V_1 - V_0$ και των δύο καμπυλών συμπίπτουν, δηλαδή, η κρουστική και η συνηθισμένη εντροπία έχουν κοινές εφαπτόμενες και κοινά κέντρα κυρτότητας στο αρχικό σημείο (δεύτερης τάξεως ένωση). Οι όροι τρίτης τάξεως είναι διαφορετικοί και στις δύο καμπύλες. Ο τρίτος όρος στη δεξιά πλευρά της εξάπλωσης είναι κοινός και στις δύο καμπύλες. Ο τέταρτος και τελευταίος όρος εξαφανίζεται για την συνηθισμένη ισέντροπη, αφού $S_1 - S_0 = 0$ ($S = \text{const}$), ενώ σύμφωνα με το (1.88), για την καμπύλη Hugoniot ισούται με:

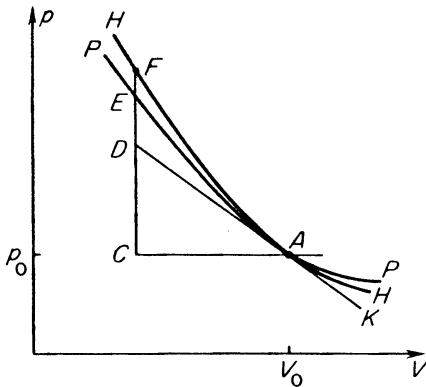
$$\left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (S_1 - S_0) = - \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s (V_1 - V_0)^3.$$

Η πίεση όλων των φυσιολογικών ρευστών * αυξάνεται με την εντροπία σε σταθερό όγκο (κατά τη διάρκεια της θέρμανσης σε σταθερό όγκο), δηλαδή, $(\partial p / \partial S)_V > 0$ και $(\partial^2 p /$

$2V^2)_s$ είναι επίσης θετικό.

Επομένως, ο τελευταίος όρος είναι αρνητικός όταν $V_1 > V_0$ και θετικός όταν $V_1 < V_0$ όταν $V_1 > V_0$ η καμπύλη Hugoniot περνάει κάτω από την ισέντροπη και όταν $V_1 < V_0$ περνάει πάνω από αυτήν. Άρα, στο αρχικό σημείο έχουμε μία ένωση δεύτερης τάξεως στη διατομή των δύο καμπύλων. Οι σχετικές θέσεις της Hugoniot καμπύλης H και της ισέντροπης P φαίνονται στο Σχ. 1.34. Σημειώνουμε ότι το τμήμα CD είναι μία ποσότητα πρώτης τάξεως στο $V_0 - V_1$, DE είναι μία ποσότητα δεύτερης τάξεως και EF είναι μία ποσότητα τρίτης τάξεως.

Εικόνα



Σχ. 1.34. Σχετική θέση της κρουστικής H και της συνηθισμένης ισέντροπης P . DK είναι η εφαπτομένη στις καμπύλες στο αρχικό στάδιο A . Σε ένα ασθενές κρουστικό κύμα το τμήμα CD είναι μία ποσότητα πρώτης τάξεως, το DE δεύτερης και το EF τρίτης τάξεως.

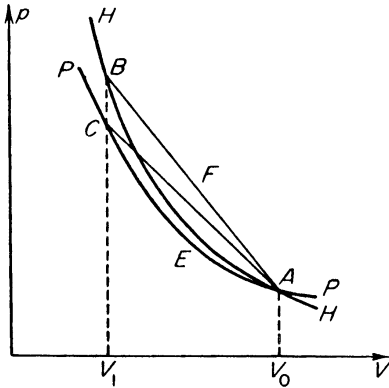
Ας επιστρέψουμε στη γεωμετρική ερμηνεία της αύξησης της εντροπίας σε ένα κρουστικό κύμα (Σχ. 1.35). Όπως φαίνεται στην §16, η ποσότητα $\bar{T} \Delta S$ περιγράφεται από την περιοχή $AFBCEA$. Ας το χωρίσουμε με μία ευθεία AC σε 2 τμήματα, το τμήμα $ACEA$ και το τρίγωνο ABC . Η περιοχή του τριγώνου ABC είναι ίση με το ήμισυ της παραγώγου της βάσης BC και του ύψους $V_0 - V_1$. Με μικρές αλλαγές όλων των παραμέτρων, σε ένα ασθενές κύμα, το τμήμα BC ισούται με $(\partial p / \partial S)_v \Delta S$, και

$$\bar{T} \Delta S = F_{\text{segm}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_v (V_0 - V_1) \Delta S,$$

όπου F_{segm} είναι η περιοχή του τμήματος ACEA. Άρα,

$$\Delta S = \frac{F_{segm}}{\bar{T} - \alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (V_0 - V_1).$$

Εικόνα



Σχ. 1.35. Γεωμετρική ερμηνεία της αύξησης της εντροπίας σε ένα κρουστικό κύμα.

Για μικρές αλλαγές στον όγκο $\alpha \rightarrow 0$ και $\bar{T} \Delta S \rightarrow F_{segm}$, δηλαδή, η διόρθωση για την περιοχή του τριγώνου είναι μικρή. Στην πραγματικότητα είναι υψηλότερης τάξης από την περιοχή του τμήματος το οποίο είναι της τάξεως του $\bar{T} \Delta S$. Εκφράζοντας την περιοχή του τμήματος ως εξής:

$$\bar{T} \Delta S = \frac{p_0 + p'}{2} (V_0 - V_1) - \int_{V_1}^{V_0} (p dV)_{s=s_0}$$

και εντάσσοντας τις διευρύνσεις για τα ασθενή κύματα προκύπτει, όπως ήταν αναμενόμενο, η σχέση (1.88).

Η γεωμετρική ερμηνεία δείχνει επίσης πως το σήμα του ΔS εξαρτάται από το σήμα της περιοχής του τμήματος, ή αλλιώς, από το εάν η AC περνά πάνω ή κάτω από την ισέντροπη ή κάτι που είναι ίδιο, αν η καμπύλη είναι κυρτή προς τα πάνω ή προς τα κάτω.

Ας συγκρίνουμε τις ταχύτητες u_0 και u_1 με τις ταχύτητες c_0 και c_1 . Όπως μας είναι γνωστό,

η αναλογία u_0 / c_0 καθορίζεται από την αναλογία της κλίσης της ευθείας AB (βλ. Σχ. 1.28) και της εφαπτομένης στην ισέντροπη στο σημείο A . Η αναλογία u_1 / c_1 καθορίζεται από την αναλογία της κλίσης της ευθείας AB και της εφαπτομένης στην ισέντροπη στο σημείο B . Γράφουμε τις εκφράσεις για τις κλίσεις και των τριών ευθειών με τη μορφή

$$\frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{s_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{s_0} (V_1 - V_0)$$

για την ευθεία AB ,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{s_A} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{s_0}$$

για την εφαπτομένη στην ισέντροπη στο σημείο A και

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{s_B} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{s_0} + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{s_0} (V_1 - V_0)$$

για την εφαπτομένη στην ισέντροπη στο σημείο B . Η τελευταία εξίσωση προκύπτει από το γεγονός ότι η ισέντροπη $S_1 = \text{const}$ είναι παράλληλη στην ισέντροπη $S_0 = \text{const}$ στους όρους της τρίτης - τάξεως στο $V_1 - V_0$.

Σημειώνουμε ότι

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{s_0} < 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{s_0} > 0, \quad V_1 - V_0 < 0,$$

και βλέπουμε ότι η ευθεία AB είναι πιο απότομη από την εφαπτομένη στο σημείο A , αλλά είναι λιγότερο απότομη από την εφαπτομένη στο σημείο B . Άρα, προκύπτει ότι $u_0 > c_0$ και $u_1 < c_1$. Αυτό είναι απόλυτα φανερό από το Σχ. 1.30.

Άξιο σημασίας είναι η βαθύτερη σχέση μεταξύ της συνθήκης για την αύξηση εντροπίας και αυτής για τη μηχανική σταθερότητα της ασυνέχειας $u_0 > c_0$.

Και οι δύο συνθήκες προκύπτουν άμεσα από το γεγονός ότι η κλίση των ισεντροπικών καμπυλών και η Hugoniot ξεκινώντας από το σημείο A αυξάνεται με τον όγκο που μειώνεται.

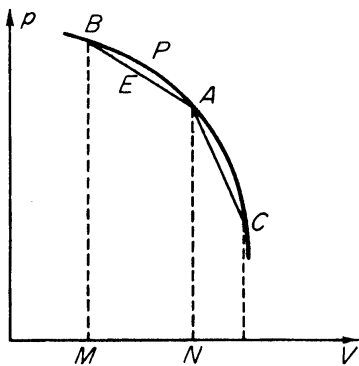
Έτσι, εξετάζοντας τα ασθενή κρουστικά κύματα σε ένα ρευστό με αυθαίρετες θερμοδυναμικές ιδιότητες προκύπτουν από τους νόμους διατήρησης όλα τα αποτελέσματα που είδαμε προηγουμένως για ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμοότητες. Η μόνη επιπρόσθετη απαραίτητη συνθήκη ήταν ότι η δεύτερη παράγωγος $(\partial^2 p / \partial V^2)_s$ θα πρέπει να είναι θετική.

§19. Κρουστικά κύματα σε ένα ρευστό με ανώμαλες θερμοδυναμικές ιδιότητες.

Ας εξετάσουμε τώρα ένα ρευστό με ανώμαλες θερμοδυναμικές ιδιότητες, όπου η δεύτερη

παράγωγος $(\partial^2 p / \partial V^2)_s$ αρνητική το ελάχιστο πάνω από κάποιο τμήμα της ισεντροπικής καμπύλης. Η συνηθισμένη ισέντροπη για ένα τέτοιο ρευστό στο αντίστοιχο διάγραμμα πίεσης – όγκου είναι κυρτή προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.36. Προκύπτει από την ανάλυση στην προηγούμενη ενότητα ότι εάν οι αλλαγές στην πίεση είναι μικρές, η καμπύλη Hugoniot σχεδόν ταυτίζεται με την ισέντροπη (με ακρίβεια στην τρίτη τάξη ή στο $V_1 - V_0$ ή $p_1 - p_0$). Σε αυτή την περίπτωση η περιοχή του σχήματος APBMNA που ενώνεται στην κορυφή από την ισέντροπη είναι μεγαλύτερη από την περιοχή του τραπεζιού AEBMNA που ενώνεται στην κορυφή από το AEB και έτσι η εντροπία μειώνεται στο κρουστικό κύμα συμπίεσης (αυτό επίσης φαίνεται από το 1.88). Την ίδια στιγμή, αφού η κλίση της εφαπτομένης είναι μικρότερη από την κλίση στο σημείο A, η διάδοση της ταχύτητας του κρουστικού κύματος μέσα στο ατάραχο αέριο είναι μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου. Επίσης, αφού η κλίση της AEB είναι μεγαλύτερη από την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο B, η ταχύτητα πίσω από την ασυνέχεια είναι υπερηχητική. Αντίστροφα, η εντροπία ενός κρουστικού κύματος αραιώσης (βλέπε 1.88). Η σύγκριση των κλίσεων της AC και των εφαπτόμενων στα σημεία A και C δείχνει ότι η ταχύτητα είναι υπερηχητική μπροστά απ' την ασυνέχεια και υπηχητική πίσω από αυτήν.

Εικόνα

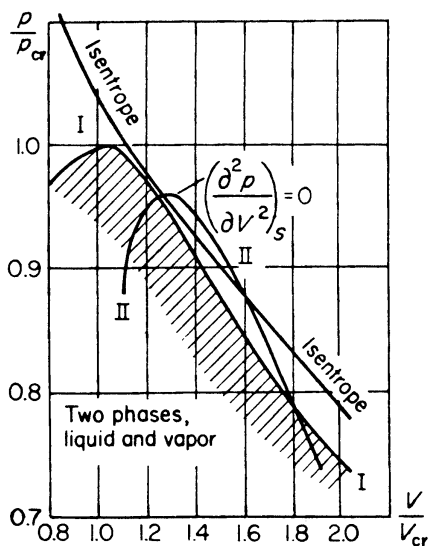


Σχ. 1.36. Ισέντροπη για ένα ρευστό με ανώμαλες ιδιότητες και η γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης των κρουστικών κυμάτων συμπίεσης και αραιώσης.

Έτσι η αύξηση της εντροπίας σε ένα ρευστό με ανώμαλες ιδιότητες συμπίπτει με τη συνθήκη της μηχανικής σταθερότητας $u_0 > c_0$ και συμφωνεί με τη συνθήκη που επιτρέπει σε εξωτερικούς παράγοντες να επηρεάσουν τη διάδοση του κύματος $u_1 < c_1$. Τα κρουστικά κύματα συμπίεσης είναι απίθανα, ενώ τα κρουστικά κύματα συμπίεσης μπορούν να συμβούν σε ένα τέτοιο ανώμαλο ρευστό. Η συμπίεση ενός τέτοιου ρευστού που προκαλείται

από ένα έμβολο συμβαίνει με ένα κύμα που σταδιακά διευρύνεται σε κύματα αραιώσης, σε ένα συνηθισμένο αέριο. Δεν δημιουργείται καμία κρουστική ασυνέχεια και η κίνηση είναι ισεντροπική. Το κύμα αραιώσης, όμως, διαδίδεται απότομα, που δεν εξαπλώνεται με το χρόνο και του οποίου το πάχος καθορίζεται από το ιξώδες και τη θερμική συμπεριφορά. Κάτω από φυσιολογικές συνθήκες όλες οι ουσίες – αέριες, συμπαγείς και υγρές- έχουν φυσιολογικές ιδιότητες και η ισεντροπική τους συμπίεστικότητα μειώνεται με την πίεση. Η ανώμαλη συμπεριφορά ενός ρευστού μπορεί να αναμένεται κοντά το κρίσιμο σημείο αέριο – ρευστό. Στην πραγματικότητα, αρκετά πριν από το κρίσιμο σημείο τα ισόθερμα του αερίου παρουσιάζουν μία κλίση (στο κρίσιμο σημείο η κλίση γίνεται οριζόντια). Για ένα ρευστό με επαρκώς υψηλή θερμότητα και με τη συγκεκριμένη αναλογία θερμότητας κοντά στην ενότητα, οι ισέντροπες και τα ισόθερμα δεν διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους. Επομένως μπορούμε να αναμένουμε πως οι ισέντροπες θα έχουν μια κλίση εκτός της διαφορικής περιοχής και ότι θα υπάρχει μία περιοχή όπου η δεύτερη παράγωγος θα έχει μία ανωμαλία. Αυτή η περιοχή φαίνεται στο Σχ. 1.37 (από Zel' donich [2]). Η καμπύλη I στο Σχ. 1.37 είναι το όριο της διαφορικής περιοχής και η καμπύλη II είναι η περιοχή των σημείων της κλίσης των ισέντροπων $(\partial^2 p / \partial V^2)_s = 0$. Η καμπύλη I συνδέει μία περιοχή όπου $(\partial^2 p / \partial V^2)_s < 0$. Μία ανώμαλη ισέντροπη φαίνεται επίσης στο Σχ. 1.37. Οι καμπύλες υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας την εξίσωση του van der Waal για τη περίπτωση όπου η συγκεκριμένη θερμότητα $c_v = 40 \text{ cal / deg} - \text{mole}$. Η σχέση ανάμεσα στην αλλαγή εντροπίας και στις ανισότητες που σχετίζονται με τις ταχύτητες του αερίου και τις ταχύτητες του ήχου, που ανταποκρίνεται στην σύνδεση της αύξησης της εντροπίας με τη συνθήκη της μηχανικής σταθερότητας, μπορεί να ακυρωθεί μόνο εάν για τις πιέσεις για τη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζεται το σήμα του $\partial^2 p / \partial V^2$ είναι και θετικό και αρνητικό, έτσι ώστε η ισέντροπη να τέμνει τη χορδή πάνω από μία φορά.

Εικόνα



Σχ. 1.37.

Ισέντροπη με ανώμαλη κυρτότητα
σε ένα αέριο van der Waal με
συγκεκριμένη θερμότητα
 $c_v = 40 \text{ cal /deg} - \text{mole}$.
Η επισκιασμένη περιοχή είναι μία
διφασική περιοχή. Η καμπύλη II συνδέει
την περιοχή ανώμαλης κυρτότητας της
ισέντροπης κάτω από την καμπύλη II
έχουμε $(\partial^2 p / \partial V^2)_S < 0$.

Αυτό μπορεί να επιφέρει πιο περίπλοκες συνθήκες με ασυνέχειες και συνεφαπτόμενα κύματα να συνυπάρχουν. Μία άλλη περίπτωση ανώμαλης συμπεριφοράς θα εξεταστεί στο Κεφάλαιο XI οι ανωμαλίες στην περίπτωση αυτή μπορούν να αποδοθούν σε πολυμορφικές αλλαγές / μετατροπές (μεταβατικά στάδια) στερεών σε υψηλές πιέσεις που δημιουργούνται στα κρουστικά κύματα. Στο Κεφ. XI θα ασχοληθούμε επίσης και με τις άλλες περίπλοκες συνθήκες που αναφέραμε παραπάνω.

3. Ιξώδες και θερμική συμπεριφορά στην αεριοδυναμική.

§20. Εξισώσεις μονοδιάστατης ροής.

Οι διαλυτικές διαδικασίες – ιξώδες (εσωτερική τριβή) και θερμική συμπεριφορά – μπορούν να αποδοθούν στη μοριακή δομή ενός ρευστού. Αυτές οι διαδικασίες δημιουργούν, μία πρόσθετη, μη υδροδυναμική μετάδοση ορμής και ενέργειας και επιφέρουν μη αδιαβατική ροή και μία θερμοδυναμικά αμετάτρεπτη μετατροπή της μηχανικής ενέργειας σε θερμότητα. Η ιξώδης και θερμική συμπεριφορά, εμφανίζονται μόνο όταν υπάρχουν μεγάλες κλίσεις στις μεταβλητές ροής, που συμβαίνουν, για παράδειγμα, στα συνοριακά στρώματα στα στερεά σώματα ροής ή μέσα στο μπροστινό τμήμα ενός κρουστικού κύματος. Σε αυτό το βιβλίο θα εξετάσουμε τη ιξώδη και θερμική συμπεριφορά αρχικά από την οπτική γωνία των επιδράσεών τους στην εσωτερική δομή του μπροστινού τμήματος του κρουστικού κύματος στα αέρια.

Μελετώντας αυτή τη δομή μπορούμε να θεωρήσουμε τη ροή ως λειτουργία μίας x συντεταγμένης μόνο (επίπεδη ροή), αφού το πάχος ενός κρουστικού εμπρόσθιου είναι πάντα πολύ μικρότερο από την ακτίνα κυρτότητας της επιφάνειάς του. Επομένως δεν θα μείνουμε εκτενώς στην παραγωγή των γενικότερων εξισώσεων ροής για ένα ιξώδες ρευστό ή αέριο, όπως μπορεί να επαληθευτεί, για παράδειγμα, στο βιβλίο των Landau και Lifshitz [1]. Θα εξηγήσουμε μόνο τον τρόπο με τον οποίο οι εξισώσεις μπορούν να προκύψουν για

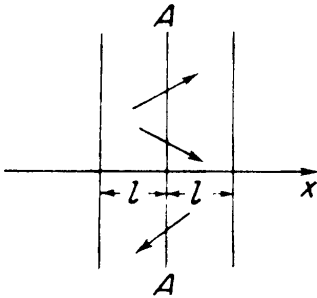
μονοδιάστατη, επίπεδη περίπτωση.

Ας γράψουμε τώρα το νόμο της διατήρησης της ορμής για ένα μη ιζώδες αέριο (1.7) στην επίπεδη περίπτωση, όπου όλες οι παράμετροι είναι λειτουργίες της x συντεταγμένης μόνο και η ταχύτητα έχει μόνο το συστατικό u

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = -\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad \Pi_{xx} = p + \rho u^2.$$

Εξετάζουμε τώρα το γεγονός όπου το αέριο αποτελείται από μόρια που συγκρούονται μεταξύ τους. Επιλέγουμε μία περιοχή διασταύρωσης κάθετη στον άξονα x . Αυτή η περιοχή διαπερνάται και από τις δύο πλευρές από μόρια που κινούνται σε ορισμένες κατευθύνσεις αφού έχουν υποστεί την πιο πρόσφατη σύγκρουση. Τα μόρια μπορεί να θεωρούνται ότι προκύπτουν από στρώματα των οποίων το πάχος είναι της τάξεως του μεγέθους της ελεύθερης διαδρομής l . Αυτά τα στρώματα προσκείμενα και στις δύο πλευρές της εξεταζόμενης περιοχής (Σχ. 1.38). Εάν n είναι ο αριθμός των μορίων ανά μονάδα όγκου και \bar{v} είναι η μέση θερμική τους ταχύτητα, τότε $n\bar{v}$ μόρια θα περάσουν ανά μονάδα χρόνου μέσα απ' την περιοχή από αριστερά προς δεξιά.

Εικόνα



Σχ.1.38. Σχηματική απεικόνιση της παραγωγής των εξισώσεων για τη μοριακή μεταφορά της ορμής.

Κάθε μόριο μεταφέρει μέσα από την περιοχή την υδροδυναμική ορμή mu , όπου m είναι η μάζα του μορίου. Η συνολική πυκνότητα της υδροδυναμικής ορμής από αριστερά προς δεξιά είναι, επομένως, της τάξεως $n\bar{v} * mu$. Ομοια, η πυκνότητα της υδροδυναμικής ορμής από δεξιά προς αριστερά είναι περίπου ίση με $n\bar{v}m(u + \Delta u)$, όπου Δu είναι η αύξηση στην υδροδυναμική ταχύτητα κατά τη διάρκεια της μετάβασης από το αριστερό στρώμα στο δεξί ή αλλιώς, $\Delta u \approx (\partial u / \partial x) l$. Η πυκνότητα του συστήματος της ορμής στην κατεύθυνση x που

προκαλείται από τη μοριακή μεταφορά είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ των ροών από αριστερά στα δεξιά και από δεξιά προς αριστερά, ή $n \bar{v} ml (\partial u / \partial x)$. Αυτή είναι η ποσότητα που εκφράζει την πρόσθετη μεταφορά ορμής που προκαλείται από εσωτερική τριβή. Θα έπρεπε να προστεθεί στην πυκνότητα της ορμής $\Pi_{xx} = p + \rho u^2$.

Μία πιο σχολαστική ανάλυση, βασισμένη σε τρισδιάστατες θεωρήσεις, δείχνει ότι ένας αριθμητικός συντελεστής της τάξης της ενότητας θα έπρεπε να εισαχθεί στις παραπάνω εκφράσεις. Η εξίσωση της διατήρησης της ορμής για την επίπεδη περίπτωση (για ένα μονατομικό αέριο), συμπεριλαμβανομένου του όρου ιζώδες, έχει την παρακάτω μορφή

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = - \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad \Pi_{xx} = p + \rho u^2 - \sigma', \quad \sigma' = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.90)$$

όπου μ είναι ο συντελεστής του ιζώδους. Αυτός ο συντελεστής για τα αέρια (απουσία των διαδικασιών χαλάρωσης, βλέπε παρακάτω) είναι της τάξεως

$$\mu \sim n \bar{v} m l = \rho \bar{v} l.$$

Η ποσότητα σ' είναι το $\chi\chi$ συστατικό του ιζώδους τανυστή πίεσης. Η εμφάνισή του στην εξίσωση για τη ροή της ορμής είναι ίση με την εμφάνιση μιας επιπρόσθετης «πίεσης» που δημιουργείται από εσωτερικές δυνάμεις τριβής. Με τη βοήθεια της εξίσωσης συνέχειας (1.90) μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε εξίσωση κίνησης.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial x} (p - \sigma'), \quad (1.91)$$

όπου $\partial \sigma' / \partial x$ είναι η εσωτερική δύναμη τριβής ανά μονάδα όγκου του αερίου. Με διαλυτικές διαδικασίες, εμφανίζονται πρόσθετοι όροι στην εξίσωση της ενέργειας. Η πρόσθετη ροή ενέργειας σχετίζεται με την πρόσθετη ιζώδη πίεση. Μία ποσότητα $-\sigma'u$, ανάλογη σε ρu , θα έπρεπε να προστεθεί στην έκφραση για την πυκνότητα της ροής της ενέργειας, η απόκλιση της οποίας φαίνεται στο (1.10). Επιπλέον, η ροή της ενέργειας που μεταφέρεται από τη θερμική αγωγιμότητα

$$J = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.92)$$

όπου κ είναι ο συντελεστής της θερμικής αγωγιμότητας, πρέπει να ενταχθεί σε αυτή την έκφραση. Η εξίσωση (1.92) μπορεί εύκολα να προκύψει με την ίδια προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στην παραγωγή της ροής ιζώδους ορμής. Το αποτέλεσμα είναι ότι για τα αέρια ο συντελεστής της θερμικής αγωγιμότητας είναι της τάξεως $\rho c_p \bar{v} l$. Λαμβάνοντας υπόψη τους δύο όρους διαλυτότητας η εξίσωση ενέργειας (1.10) για την επίπεδη περίπτωση γίνεται ως εξής

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p u - \sigma' u + J \right]. \quad (1.93)$$

Διευθετώντας πάλι αυτή την εξίσωση με τη βοήθεια των εξισώσεων κίνησης και συνέχειας και τη θερμοδυναμική ταυτότητα $Ta \, dS = d\varepsilon + p \, dV$, προκύπτει μία έκφραση για την τιμή της αλλαγής της εντροπίας του ρευστού σωματιδίου

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \sigma' \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (1.94)$$

Ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά αντιπροσωπεύει τη μηχανική ενέργεια διαλυμένη από το ιξώδες ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου. Αυτός ο όρος είναι θετικός, αφού $\mu > 0$ και $(\partial u / \partial x)^2 > 0$. Συνεπώς, οι εσωτερικές δυνάμεις τριβής οδηγούν σε μία τοπική αύξηση στην εντροπία του ρευστού. Ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στη θέρμανση ή την ψύξη του ρευστού από τη θερμική αγωγιμότητα. Μπορεί να είναι ή θετικός ή αρνητικός, επειδή τα αποτελέσματα της αγωγιμότητας στη μεταφορά θερμότητας από την περιοχή της μεγαλύτερης εντροπίας στην περιοχή της μικρότερης εντροπίας. Όμως, η εντροπία ενός ρευστού ως ολότητα θα αυξάνεται πάντα ως αποτέλεσμα της θερμικής αγωγιμότητας. Αυτό μπορεί να φανεί αν χωρίσουμε το (1.94) από το T και ολοκληρώνοντας ως προς το συνολικό όγκο. Η αλλαγή στην εντροπία που προκαλείται από την θερμική αγωγιμότητα ενός ρευστού καταλαμβάνοντας έναν όγκο που συνδέεται από τις επιφάνειες χ_1 και χ_2

$$\int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = \frac{1}{T} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\chi_1}^{\chi_2} + \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{\kappa}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Εάν τα όρια χ_1 και χ_2 είναι θερμικά μονωμένο τότε δεν υπάρχει θερμική ροή μέσα από τα όρια (ο πρώτος όρος στα δεξιά εξαφανίζεται), και μόνο ο δεύτερος όρος, που είναι πάντα θετικός ($\kappa > 0$), θα παραμείνει.

Οι εξισώσεις αεριοδυναμικής που συμπεριλαμβάνουν τους όρους του ιξώδους και της θερμικής αγωγιμότητας, μας επιτρέπουν να καθορίζουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι διαλυτικές επιπτώσεις γίνονται σημαντικές. Για να το κάνουμε αυτό εξισώνουμε τις αρχικές δυνάμεις στην εξίσωση της κίνησης ως προς τις ιξώδεις δυνάμεις. Εάν U είναι η κλίμακα της ροής της ταχύτητας και d είναι μία χαρακτηριστική διάσταση της περιοχής ροής, τότε η χρονική κλίμακα είναι της τάξεως d/U και ο αδρανειακός όρος $\rho Du/Dt$ είναι της τάξεως $\rho U^2/d$. Ο ιξώδης όρος στην εξίσωση $\partial \left(\frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) / \partial x$ είναι της τάξεως $\mu U/d^2$, και η αναλογία του στον αδρανειακό όρο είναι της τάξεως

$$\frac{1}{\text{Re}} = \frac{\mu}{\rho U d} = \frac{\nu}{U d} \sim \frac{l}{d} \frac{c}{U}.$$

Το αντίστροφο της αναλογίας αυτής ονομάζεται αριθμός Reynolds $\nu = \mu/\rho \sim l \bar{U} \sim l c$ είναι το κινηματικό ιξώδες και $c \sim \bar{U}$ είναι η ταχύτητα του ήχου). Παρομοίως, συγκρίνοντας τη

Θερμότητα που μεταφέρεται από την αγωγιμότητα με τη μεταφορά μηχανικής ενέργειας, βρίσκουμε ότι η αναλογία τους είναι της τάξεως

$$\frac{1}{Pe} = \frac{\kappa}{\rho c_p U d} \sim \frac{\chi}{U d} \sim \frac{l}{d} \frac{c}{U},$$

όπου Pe είναι ο αριθμός Peclet. Αυτός ο αριθμός για τα αέρια είναι αριθμητικά κοντά στον αριθμό Reynolds, επειδή η θερμική διάχυση $\chi = \kappa / \rho c_p$ είναι αριθμητικά κοντά στο κινηματικό ιξώδες ν . (Για παράδειγμα, για αέρα σε ορισμένες συνθήκες $\nu \approx \chi \approx 0.15 \text{ cm}^2/\text{sec}$)

Άρα, οι όροι ιξώδους και θερμικής αγωγιμότητας μπορούν να παραμεριστούν για $Re \approx Pe \gg 1$. Εάν εξετάσουμε μία ροή με ταχύτητες μικρότερες από, ή κοντά, στην ταχύτητα του ήχου, οι διαστάσεις του συστήματος πρέπει να είναι μεγαλύτερες από τη μοριακή ελεύθερη διαδρομή, $d/l \gg 1$. Όπως θα δούμε, αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται στο μπροστινό τμήμα ενός κύματος, το πάχος του οποίου μπορεί να συγκριθεί με την ελεύθερη διαδρομή. Οι διαδικασίες διάλυσης πρέπει να εμφανίζονται στο μπροστινό τμήμα ενός κρουστικού κύματος. Αυτές οι διαδικασίες είναι υπεύθυνες για την αύξηση στην εντροπία σε ένα κρουστικό κύμα.

§21. Επισημάνσεις στο δεύτερο συντελεστή ιξώδους.

Γράφοντας τις εξισώσεις αεριοδυναμικής και χρησιμοποιώντας τις θερμοδυναμικές μεταξύ της πίεσης και των άλλων θερμοδυναμικών μεταβλητών του ρευστού, έχουμε εμμέσως υποθέσει πως η πίεση \bar{p} που καθορίζει τις δυνάμεις σε ένα κινούμενο αέριο, δεν διαφέρει από τη στατική πίεση p_{st} για αέριο σε αδράνεια υπό τις ίδιες θερμοδυναμικές συνθήκες, για την ίδια έκθεση, πυκνότητα, εσωτερική ενέργεια και θερμοκρασία. Η πίεση είναι μια κλιμακωτή ποσότητα ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων, της κατεύθυνσης της ταχύτητας ροής, και της εφαπτομένης της ταχύτητας. Αυτή η προϋπόθεση ότι η πίεση πρέπει να είναι κλιμακωτή ποσότητα, αμετάβλητη σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων μας επιτρέπει να κάνουμε μια υπόθεση η οποία είναι πολύ πιο γενικευμένη από την υπόθεση ότι η πίεση εξαρτάται μόνο από τη θερμοδυναμική κατάσταση του ρευστού. Η πίεση μπορεί γενικά να εξαρτάται από την κλιμακωτή ποσότητα – την απόκλιση της ταχύτητας. Με μέτριες κλίσεις, και με τον περιορισμό στους πρώτους όρους στην κατάλληλη εξάπλωση, μπορούμε να γράψουμε την γενική έκφραση

$$p_{st} = \bar{p} + \mu' \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1.95)$$

όπου ο συντελεστής μ' χαρακτηρίζει την εξάρτηση των δυνάμεων που δρουν στο ρευστό με την κλιμακωτή ποσότητα $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Ο συντελεστής μ' ορίζεται ως ο δεύτερος συντελεστής ιξώδους. Από την άλλη πλευρά, ο συντελεστής μ , ο πρώτος ή συνηθισμένος συντελεστής ιξώδους, χαρακτηρίζει τις δυνάμεις που εξαρτώνται από τις κατευθύνσεις και την κλίση της ταχύτητας.

Ο συνηθισμένος συντελεστής ιξώδους για ένα αέριο σχετίζεται με τη μεταφραστική κίνηση των μορίων. Εάν ο χρόνος που απαιτείται για να ισχύει η στατική πίεση είναι της τάξεως του ελεύθερου χρόνου ενός μορίου l/c , τότε ο μ' είναι της τάξεως μ . Στην επίπεδη περίπτωση όπου αυτή η συνθήκη ικανοποιείται, και ο συνηθισμένος και ο δεύτερος ιξώδης όρος συνδυάζονται σε έναν μόνο όρο.

*Σημείωση του εκδότη. Αυτή η ποσότητα ορίζεται γενικά μαζικός συντελεστής ιξώδους ή διαμήκης συντελεστής ιξώδους. Ο όρος δεύτερος συντελεστής ιξώδους χρησιμοποιείται συχνά για την ποσότητα $\lambda = \mu' - \frac{2}{3}\mu$.

Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, όμως, ο μ' παίρνει μία αφύσικα μεγάλη τιμή. Σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας $\nabla \cdot \mathbf{u} = -(1/\rho)D\rho/Dt$, και το συντελεστή μ' χαρακτηρίζει την εξάρτηση της πίεσης από την τιμή της αλλαγής της πυκνότητας. Στην παρουσία αργά διεγερμένων βαθμών ελευθερίας (για παράδειγμα, μοριακές δονήσεις) και γρήγορων αλλαγών στην κατάσταση του ρευστού, η πίεση δεν μπορεί να ακολουθήσει τις αλλαγές στην πυκνότητα και διαφέρει από την τιμή της για την θερμοδυναμική ισορροπία. Αυτή η επίπτωση μπορεί να περιγράφεται από το δεύτερο συντελεστή ιξώδους (βλ. [1]). Όσο πιο δύσκολο είναι να επηρεαστούν οι εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας τόσο πιο έντονη είναι η αντίφαση ανάμεσα στις αλλαγές στην πίεση, την πυκνότητα και την εσωτερική κατάσταση του ρευστού, και τόσο πιο μεγάλο είναι το δεύτερο ιξώδες. Στις πολύ γρήγορες διαδικασίες, όταν αυτή η αντίφαση είναι ιδιαίτερα υψηλή, η γραμμική σχέση (1.95) μπορεί να είναι ανεπαρκής και μπορεί να γίνει απαραίτητη για να εισάγουμε μια λεπτομερή περιγραφή των διαδικασιών χαλάρωσης στις εξισώσεις αεριοδυναμικής, για να εισάγουμε την κινητική της διεγερσης στους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Θα γίνει πιο οικείο το φαινόμενο σε εμάς στα Κεφάλαια VI, VII και VIII, τα οποία εξετάζουν τις διαδικασίες χαλάρωσης και τις επιπτώσεις τους στη δομή των μπροστινών τμημάτων των κρουστικών κυμάτων.

§22. Επισημάνσεις στην απορρόφηση του ήχου.

Ως ένα παράδειγμα της επίπτωσης της ιξώδους και θερμικής συμπεριφοράς στην υδροδυναμική ας εξετάσουμε τη διάδοση των κρουστικών κυμάτων. Η παρουσία ιξώδους και θερμικής συμπεριφοράς οδηγεί στη διάλυση της ενέργειας του κρουστικού κύματος από την αμετάβλητη μετατροπή της ενέργειας σε θερμότητα, στην απορρόφηση του ήχου και σε μείωση της έντασής της. Ο συντελεστής απορρόφησης του ήχου μπορεί να βρεθεί από τη λύση των μονοδιάστατων γραμμικών αεριοδυναμικών εξισώσεων, που περιέχουν τους όρους της ιξώδους και θερμικής μεταβίβασης, για επίπεδα αρμονικά κύματα του τύπου $\exp[i(kx - \omega t)]$, όπου k είναι το διάνυσμα του κύματος. Σε αυτή την περίπτωση το k έχει μια περίπλοκη τιμή, της οποίας το πραγματικό τμήμα δίνει το μήκος του κύματος και της οποίας το φανταστικό τμήμα δίνει το συντελεστή απορρόφησης.

$$k = k_1 + ik_2; \quad \exp[i(kx - \omega t)] = \exp[-k_2x] \exp[i(k_1x - \omega t)].$$

Ο συντελεστής απορρόφησης μπορεί επίσης να εκτιμηθεί από φυσικές θεωρήσεις. Σύμφωνα με το (1.94), η διάλυση της ενέργειας ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου

συντελείται από δύο τμήματα, και ανταποκρίνεται στις επιπτώσεις ιζώδης και θερμικής μεταβίβασης. Σε ένα κρουστικό κύμα μήκους λ αυτές οι ποσότητες είναι της τάξεως μ^2/λ^2 και $\kappa(\Delta T)^2/\lambda^2 T$ αντίστοιχα. Εδώ u είναι η ευρύτητα της ταχύτητας και ΔT είναι η ευρύτητα της αλλαγής της θερμοκρασίας στο κύμα (η τελευταία είναι ανάλογη στο u). Η ενέργεια του ήχου ανά μονάδα όγκου είναι $\rho_0 u^2$. Το κλάσμα της ενέργειας που απορροφάται ανά μονάδα χρόνου αποτελείται επίσης από δύο τμήματα. Το τμήμα που συνδέεται με το ιζώδες είναι της τάξεως $\mu^2/\lambda^2)/\rho_0 u^2 \sim \mu/\rho_0 \lambda^2 \sim \mu\omega^2/c^2 \rho_0$. Όμως, η απόσταση που διανύεται από τον ήχο ανά μονάδα χρόνου είναι c , έτσι ώστε το ιζώδες τμήμα του συντελεστή απορρόφησης ανά μονάδα μήκους γ , να είναι της τάξεως $\mu\omega^2/c^3 \rho_0$. Παρομοίως, ο συντελεστής απορρόφησης ανά μονάδα μήκους που σχετίζεται με τη θερμική μεταβίβαση γ_2 είναι της τάξεως $(\kappa/c_p)(\omega^2/c^3 \rho_0)$. (Αυτό το αποτέλεσμα είναι εύκολο να κατανοηθεί στις περιπτώσεις των αερίων· σημειώνουμε ότι $\kappa/c_p \approx \mu$, εξαιτίας της σχετικής ισοδυναμίας μεταξύ του κινηματικού ιζώδους $\nu = \mu/\rho$ και της θερμικής διάχυσης $\chi = \kappa/\rho c_p$, άρα για τα αέρια $\gamma_1 \approx \gamma_2$). Αυτές οι εκφράσεις είναι έγκυρες για την απορρόφηση ασθενών ήχων, όπου η ευρεία μείωση στις αποστάσεις της τάξεως ενός μήκους κύματος είναι μικρή, πχ. Όπου $\gamma \ll 1$ ($\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$). Για τα αέρια αυτή η συνθήκη απλά εννοεί ότι

$$\gamma \lambda \sim \frac{\mu \omega^2 \lambda}{c^3 \rho_0} \sim \frac{\nu \lambda}{\lambda^2 c} \sim \frac{l \bar{v}}{\lambda c} \sim \frac{l}{\lambda} \ll 1.$$

Αυτό σημαίνει πως η έκφραση για το συντελεστή απορρόφησης είναι έγκυρη για μήκη πολύ μεγαλύτερα από τη μοριακή ελεύθερη διαδρομή, που είναι η περίπτωση που συναντάμε περισσότερο.

Άλλες περιπτώσεις αφύσικα μεγάλης απορρόφησης και διασκόρπισης του ήχου (εξάρτηση της ταχύτητας του ήχου από τη συχνότητα), εμφανίζονται σε ένα ρευστό με αργή διέγερση των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας (με μια υψηλή τιμή του δεύτερου ιζώδους). Αυτό το πρόβλημα θα εξεταστεί στο Κεφάλαιο VIII.

§23. Η δομή και το πάχος του μπροστινού τμήματος ενός ασθενούς κρουστικού κύματος.

Ας εξετάσουμε την εσωτερική δομή και το πάχος του λεπτού στρώματος αναπαριστώντας το κρουστικό κύμα μέσα από το οποίο το αέριο περνά τη μετάβαση από την αρχική στην τελική κατάσταση· αναφερόμαστε σε αυτό το στρώμα ως το μπροστινό τμήμα του κύματος. Σε αυτό το στρώμα συμβαίνουν φαινόμενα όπως μια αύξηση στην πυκνότητα του ρευστού, αλλαγές στην πίεση και την ταχύτητα, και, όπως έχει αποδειχθεί από υπολογισμούς βασισμένους μόνο στην εφαρμογή των νόμων διατήρησης, μια αύξηση στην εντροπία. Η αύξηση στην εντροπία δείχνει ότι υπάρχει διάλυση της μηχανικής ενέργειας και ότι μια αμετάβλητη αντιστροφή της μηχανικής ενέργειας στη θερμότητα λαμβάνει χώρα στο μεταβατικό στρώμα. Άρα, για να καταλάβουμε τη λεπτομερή φύση της κρουστικής μετάβασης είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τη διαδικασία διάλυσης, την ιζώδη και θερμική μεταβίβαση.

Ας εξετάσουμε τη μονοδιάστατη επίπεδη ροή ενός ιζώδους και θερμικού αερίου σε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο το μπροστινό τμήμα του κύματος είναι σε αδράνεια. Το μπροστινό πάχος είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους για την αεριοδυναμική διαδικασία ως ολότητα, για παράδειγμα, σε σύγκριση με την απόσταση μεταξύ του μπροστινού τμήματος του κύματος και του εμβόλου που επιδρά στο αέριο και δημιουργεί το κύμα. Ακόμα και αν το έμβολο κινείται με μεταβλητή ταχύτητα και η δύναμη του κρουστικού κύματος αλλάζει με το χρόνο, η ισχύς του κύματος θα παραμείνει αμετάβλητη κατά τη διάρκεια του μικρού χρονικού διαστήματος Δt που απαιτείται για να διανυθεί μια απόσταση της τάξεως του μπροστινού εύρους Δx .

Άρα, κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος που είναι μικρό σε σχέση με τη συνολική χρονική κλίμακα της αεριοδυναμικής διαδικασίας, αλλά και μεγάλο σε σχέση με ΔE , η συνολική εικόνα των κατανομών των μεταβλητών ροής στο μπροστινό τμήμα του κύματος διαδίδεται μέσα στο αέριο σαν “παγωμένη”. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο το αέριο είναι σε αδράνεια, η ροή μπορεί να θεωρηθεί στατική σε οποιαδήποτε δεδομένη χρονική στιγμή. Ας γράψουμε τις εξισώσεις της συνέχειας, ορμής και εντροπίας για μια στατική επίπεδη περίπτωση συμπεριλαμβανομένων των όρων της ιζώδους και θερμικής μεταβίβασης. Αφού η διαδικασία είναι στατική, μπορούμε να βάλουμε όρους στις μερικές παραγώγους σε σχέση με το χρόνο $\partial/\partial t$ και μπορούμε να αντικαταστήσουμε την μερική παράγωγο $\partial/\partial x$ με τη συνολική παράγωγο d/dx .

Προκύπτει λοιπόν ότι:*

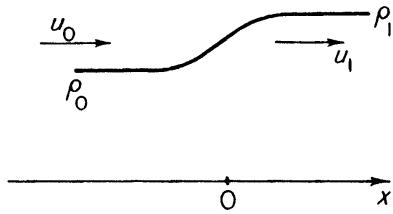
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\rho u) &= 0, \\ \frac{d}{dx}\left(p + \rho u^2 - \frac{4}{3}\mu \frac{du}{dx}\right) &= 0, \\ \rho u T \frac{dS}{dx} &= \frac{4}{3}\mu \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d}{dx}\left(\kappa \frac{dT}{dx}\right). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμική $T dS = dn - Vdp$ μαζί με τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση της εντροπίας με τη μορφή εξίσωσης ενέργειας.

$$\frac{d}{dx}\left[\rho u\left(h + \frac{u^2}{2}\right) - \frac{4}{3}\mu u \frac{du}{dx} - \kappa \frac{dT}{dx}\right] = 0. \quad (1.97)$$

Τώρα θέτουμε / επιβάλλουμε κατάλληλες οριακές προϋποθέσεις στην επίλυση αυτών των εξισώσεων, προϋποθέτοντας ότι οι κλίσεις όλων των ποσοτήτων εξαφανίζονται μπροστά στο μπροστινό τμήμα σε $x = -\infty$ και πίσω απ’ το μπροστινό τμήμα σε $x = +\infty$. Σε αυτά τα όρια οι μεταβλητές παίρνουν τις αρχικές και τελικές τιμές τους, ορισμένες, όπως πριν, από τους δείκτες “0” και “1” (Σχ. 1.39).

Εικόνα



Σχ. 1.39 Σχεδιαστική απεικόνιση της δομής του μπροστινού τμήματος ενός κύματος.

*Σημείωση εκδότη. Οι εξισώσεις και τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας παραμένουν έγκυρα για ένα αέριο με μη αμελητέο δεύτερο συντελεστή ιζώδους μ' , δεδομένου ότι $3/4\mu$ αντικαθιστάται από τον διαμήκη συντελεστή ιζώδους $\mu'' = \frac{4}{3}\mu + \mu'$

Τα πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος εξισώσεων της μάζας, ορμής και ενέργειας προκύπτουν αμέσως και είναι

$$\rho u = \rho_0 u_0, \quad (1.98)$$

$$p + \rho u^2 - \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} = p_0 + \rho_0 u_0^2, \quad (1.99)$$

$$\rho u \left(h + \frac{u^2}{2} \right) - \frac{4}{3} \mu u \frac{du}{dx} - \kappa \frac{dT}{dx} = \rho_0 u_0 \left(h_0 + \frac{u_0^2}{2} \right). \quad (1.100)$$

Οι σταθερές της ολοκλήρωσης εκφράζονται εδώ με όρους των αρχικών τιμών των μεταβλητών p , ρ , T και u και θεωρούνται ως λειτουργίες της συντεταγμένης x^* . Η εξίσωση (1.99) δείχνει ότι η παρουσία του ιζώδους, ο όρος που περιέχει το du/dx , κάνει την κατανομή των μεταβλητών ροής σε σχέση με x στο μπροστινό μέρος του κύματος να είναι συνεχής (αλλιώς, η κλίση du/dx θα ήταν άπειρη, κάτι που θα αντίκρουε το γεγονός ότι οι μεταβλητές είναι πεπερασμένες).

Για να καταλάβουμε καλύτερα το ρόλο της ιζώδους και της θερμικής μεταβίβασης ας εξετάσουμε πρώτα τη δομή μπροστινό τμήμα του κύματος σε δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις: (1) όταν το ιζώδες δεν υπάρχει και υπάρχει μόνο θερμική μεταβίβαση και (2) όταν υπάρχει μόνο ιζώδες και καθόλου θερμική μεταβίβαση. Δεν θα αναζητήσουμε εδώ ακριβείς λύσεις για τις εξισώσεις (αυτό το πρόβλημα θα εξετασθεί στο Κεφάλαιο VII, το οποίο είναι αφιερωμένο ειδικά στη δομή του μπροστινού τμήματος του κρουστικού κύματος). Θα εξηγήσουμε μόνο, τις ποιοτικές ιδιότητες του φαινομένου και θα εκτιμήσουμε το εύρος / πάχος του μπροστινού τμήματος.

(1) Θερμική μεταβίβαση υπάρχει όμως δεν υπάρχει ιζώδες: $\mu = 0$.
 Σε αυτή την οριακή περίπτωση η εξίσωση ορμής (1.99) γίνεται:

$$p + \rho u^2 = p_0 + \rho_0 u_0^2$$

που είναι ανάλογη στην εξίσωση που σχετίζει τις αρχικές με τις τελικές τιμές αυτών των ποσοτήτων. Αυτή η εξίσωση, όμως, τώρα περιγράφει επίσης όλες τις μεταβατικές καταστάσεις στο μπροστινό τμήμα του κύματος. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας (1.98) προκύπτει:

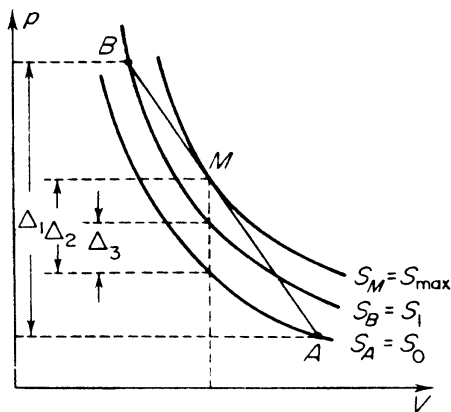
$$p = p_0 + \rho_0 u_0^2 \left(1 - \frac{V}{V_0} \right). \tag{1.101}$$

Άρα, το σημείο που περιγράφει την κατάσταση του αερίου στο μπροστινό τμήμα του κύματος είναι από το αρχικό σημείο A στο επίπεδο p, V ως το τελικό σημείο B κατά μήκος της ευθείας AB . Η ευθεία AB έχει ήδη συζητηθεί στην περιγραφή της καμπύλης Hugoniot.

*Στο $x = +\infty$, $du / dx = 0$, $dT / dx = 0$, $p = p_1$, $\rho = \rho_1$, $u = u_1$, και φτάνουμε στους νόμους διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας στην ασυνέχεια, (1.61), (1.62), (1.64).

Ας σχεδιάσουμε τις ισέντροπες μέσα απ' το αρχικό και τελικό σημείο στο επίπεδο p, V (Σχ. 1.40 η καμπύλη Hugoniot δεν φαίνεται). Σχεδιάζοντας μία σειρά από ισέντροπες, είναι φανερό πως μία από τις καμπύλες μπορεί να είναι εφαπτόμενη στο AB στο σημείο M , όπως φαίνεται στο Σχ. 1.40. Σε αυτό το σημείο η εντροπία κατά μήκος της γραμμής AB είναι στο μέγιστο ($S_0 < S_1 < S_m$).

Εικόνα



Σχ. 1.40 Διάγραμμα p, V που απεικονίζει τη δομή των μπροστινών τμημάτων υπό την απουσία του ιζώδους.
 Η κατάσταση του αερίου στις αλλαγές του κύματος κατά μήκος της ευθείας AB .
 Τα τμήματα Δ_1, Δ_2 και

Δ_3 είναι πρώτης,
δεύτερης και τρίτης
τάξεως αντίστοιχα,
σε σχέση με την ισχύ του
κύματος.

Προκύπτει απ' το (1.98) και (1.101) ότι η ταχύτητα του αερίου u στο σημείο τομής M είναι ακριβώς ίση με την τοπική ταχύτητα του ήχου ($u = c$ στο σημείο M σημειώνουμε ότι $u_0 > c_0$ στο σημείο A και $u_1 < c_1$ στο σημείο B).

Επιθυμούμε τώρα να καθορίσουμε τη μέγιστη τιμή της εντροπίας S_{max} από τη συνθήκη της τομής μεταξύ της ισέντροπης $S = S_{max}$ και της ευθείας AB . Όπως θα δούμε σύντομα, η ποσότητα $S_{max} - S_0$ είναι ανάλογη είτε με $(V_1 - V_0)^2$ είτε με $(p_1 - p_0)^2$. Έτσι θα γράψουμε τις εξισώσεις της ομάδας των ισέντροπων $p(V, S)$ και για την ευθεία AB με τους όρους των διευρύνσεων για το σημείο A , αγνοώντας τους όρους τρίτης - τάξεως (σε αυτή την προσέγγιση οι ισέντροπες S_0 και S_1 συνυπάρχουν βλέπε §18). Η εξίσωση για την ισέντροπη είναι:

$$p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{S_A} (V - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{S_A} (V - V_0)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{V_A} (S - S_0).$$

Η εξίσωση για την ευθεία είναι:

$$\begin{aligned} p - p_0 &= \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} (V - V_0) \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{S_A} (V - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{S_A} (V_1 - V_0)(V - V_0). \end{aligned}$$

Η συνθήκη τομής δίνεται από την ισότητα $(\partial p / \partial V)_{isent} = (\partial p / \partial V)_{str.line}$ που μας δίνει μια εξίσωση για τον καθορισμό του όγκου V_M στο σημείο τομής M . Μπορεί να φανεί ότι το σημείο M βρίσκεται ακριβώς στα μισά μεταξύ του A και B π.χ. $V_M - V_0 = 1/2(V_1 - V_0)$. Εντάσσοντας αυτή την έκφραση στην εξίσωση για την ευθεία γραμμή, βρίσκουμε την πίεση p_M στο σημείο M . Ύστερα, εντάσσοντας τα p_M και V_M στην εξίσωση της ισέντροπης και λύνοντας για την εντροπία στο σημείο M , προκύπτει:

$$S_M - S_0 = S_{max} - S_0 = \frac{1}{8} \frac{(\partial^2 p / \partial V^2)_{S_A}}{(\partial p / \partial S)_{V_A}} (V_1 - V_0)^2.$$

Η μέγιστη αλλαγή εντροπίας μέσα στο μπροστινό τμήμα του κρουστικού κύματος, λαμβάνοντας υπ' όψιν την μεταβίβαση θερμότητας, είναι μια ποσότητα δεύτερης τάξεως σε σχέση με την ποσότητα $V_0 - V_1$ ή $p_1 - p_0$, σε αντίθεση με την συνολική αλλαγή εντροπίας $S_1 - S_0$ που είναι τρίτης τάξεως. Αυτό μπορεί επίσης να φανεί με βάση τα γεωμετρικά επιχειρήματα: η μέγιστη απόσταση ανάμεσα στην ευθεία AB και των ισέντροπων $S = S_0$ στο επίπεδο p, V είναι ανάλογη με $(V_1 - V_0)^2$ ή $(p_1 - p_0)^2$. Έτσι, η διαφορά μεταξύ της πίεσης στο σημείο M και της πίεσης στην ισέντροπη S_A (ή S_B) στον ίδιο όγκο V_M είναι ίση

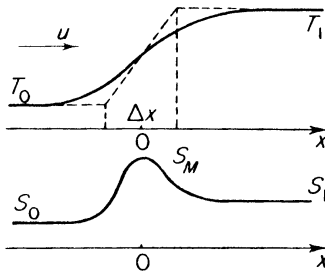
με

$$\begin{aligned} p_M(V_M) - p_{S_A}(V_M) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_M - V_0)(V_1 - V_M) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_1 - V_0)^2 \end{aligned} \quad (1.102)$$

(η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων των ισέντροπων S_B και S_A στον ίδιο όγκο V_M είναι ποσότητα τρίτης τάξεως).

Η παρουσία μιας μέγιστης εντροπίας μέσα στο μπροστινό τμήμα του κύματος δείχνει ότι η θερμοκρασία $T(x)$ στο σημείο της μέγιστης εντροπίας άρα, οι κατανομές θερμοκρασίας και εντροπίας σε ένα ασθενές κρουστικό κύμα, λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο τη θερμική μεταβίβαση, μπορούν να περιγραφούν από τις καμπύλες του Σχήματος 1.41.

Εικόνα



Σχ. 1.41.

Κατανομή θερμοκρασίας και εντροπίας σε ένα αδύναμο (μπροστινό τμήμα) κρουστικού κύματος υπό την απουσία ιξώδους. Το Δx είναι το αποτελεσματικό πάχος του τμήματος.

Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει από την εξίσωση εντροπίας (1.37), η οποία, υπό την απουσία ιξώδους, παίρνει τη μορφή

$$\rho u T \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx} \kappa \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (1.103)$$

(η θερμοκρασία σε ένα ασθενές κύμα αλλάζει μόνο ελαφρώς και μπορούμε να υποθέσουμε πως η θερμική αγωγιμότητα είναι σταθερή).

Η ύπαρξη της μέγιστης εντροπίας μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι η μεταφορά αγωγίμης θερμότητας συμβαίνει από μία περιοχή υψηλής θερμότητας σε μία περιοχή χαμηλής θερμότητας. Επομένως, το αέριο που ρέει στο κύμα θερμαίνεται αρχικά από την θερμική μεταβίβαση, (με μία αύξηση στην εντροπία) και ύστερα ψύχεται (με μία μείωση στην εντροπία). Στο τελικό στάδιο, η εντροπία είναι φανερά μεγαλύτερη από την αρχική της τιμή. Αυτό φαίνεται στο Σχ. 1.41, όπου η ροή κατά μήκος του άξονα x με μια ταχύτητα u (x) αντιστοιχεί στην αλλαγή στην κατάσταση ενός δεδομένου σωματιδίου αερίου με το χρόνο.

Ας εκτιμήσουμε το πάχος του μπροστινού τμήματος του κρουστικού κύματος. Χωρίζουμε το (1.103) από T και ολοκληρώνουμε σε σχέση με χ από το αρχικό στάδιο A ($\chi = -\infty$), όπου $dT/d\chi = 0$, σε οποιοδήποτε σημείο χ στο κύμα (επίσης χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\rho u = \rho_0 u_0 = \text{σταθερό}$).

$$\rho_0 u_0 (S - S_0) = \kappa \int_{-\infty}^{\chi} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dx^2} dx = \kappa \left\{ \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} + \int_{T_0}^T \frac{dT}{dx} \frac{1}{T^2} dT \right\}. \quad (1.104)$$

Εάν εφαρμόσουμε αυτή την εξίσωση στο τελικό στάδιο B ($\chi = +\infty$) όπου $dT/d\chi = 0$, τότε ο πρώτος όρος στις αγκύλες εξαφανίζεται και

$$\rho_0 u_0 (S_1 - S_0) = \kappa \int_{T_0}^{T_1} \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dx} dT.$$

Τώρα ορίζουμε το αποτελεσματικό εύρος του μπροστινού τμήματος Δx , στο οποίο υπάρχει μόνο θερμική μεταβίβαση, από

$$\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = \left| \frac{dT}{dx} \right|_{\max},$$

όπου η γεωμετρική σημασία είναι ξεκάθαρη από το Σχ. 1.41.

Για να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα θέτουμε $dT/d\chi \sim (T_1 - T_0)/\Delta\chi$, απ' το οποίο

$$\rho_0 u_0 (S_1 - S_0) \sim \kappa \frac{1}{T_0^2} \frac{(T_1 - T_0)^2}{\Delta x}.$$

Εκφράζοντας την απότομη αλλαγή στη θερμοκρασία με όρους της αλλαγής της πίεσης, προκύπτει

$$T_1 - T_0 = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s (p_1 - p_0) = \frac{V_0}{c_p} (p_1 - p_0),$$

όπου c_p είναι η συγκεκριμένη θερμότητα σε σταθερή πίεση. Χρησιμοποιώντας το (1.89) για την αλλαγή στην εντροπία και ανακαλώντας ότι σχεδόν $(\partial^2 V / \partial p^2)_S \sim V_0 / p_0^2$, $\kappa \sim \rho_0 c_p / c_0$, και ότι $\mu_0 \approx c_0$, προκύπτει απ' το (1.104) για μια εκτίμηση του πάχους του μπροστινού τμήματος:

$$\Delta x \sim l \frac{p_0}{p_1 - p_0} \tag{1.105}$$

Το πάχος του μπροστινού τμήματος είναι αντιστρόφως ανάλογο στην ισχύ του κύματος και ο παράγοντας της κλίμακας όπως φαίνεται απ' το (1.105), είναι η μοριακή ελεύθερη διαδρομή l .

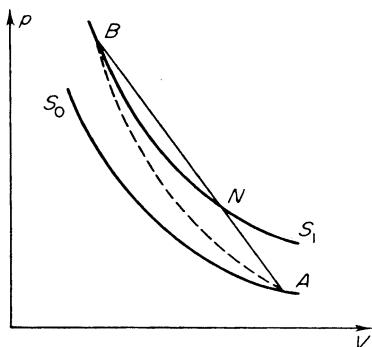
Η εξίσωση (1.104) μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμήσουμε την μέγιστη αύξηση της εντροπίας. Στο σημείο της μέγιστης εντροπίας $dS / dx = 0$ και στην κλίση dT / dx είναι επίσης μέγιστη. Ο κυρίαρχος όρος στην έκφραση σε αγκύλες στο (1.104) είναι ο πρώτος όρος που είναι ανάλογος σε $\Delta T / \Delta x \sim \Delta p / \Delta x \sim (\Delta p)^2$, ενώ ο δεύτερος όρος είναι ανάλογος σε $(\Delta T)^2 / \Delta x \sim (\Delta p)^2$. Επομένως είναι φανερό ότι $S_{max} - S_0 \sim (\Delta p)^2$, ενώ $S_1 - S_0 \sim (\Delta p)^3$. Εξετάζοντας την εσωτερική δομή του μπροστινού τμήματος (λαμβάνοντας υπόψη τη θερμική μεταβίβαση ξεχωριστά), μπορούμε να ισχυριστούμε μόνο πως η θερμοκρασία στο κύμα αλλάζει συνεχώς, ενώ οι άλλες ποσότητες, όπως η πυκνότητα, η ταχύτητα και η πίεση μπορεί, γενικά, να είναι ασυνεχείς. Πραγματικά, η μελέτη της δομής του κρουστικού κύματος, (χωρίς να υπολογίσουμε το ιζώδες) δείχνει ότι είναι αδύνατο να φτιάξουμε μια συνεχή κατανομή όλων των κυματικών παραμέτρων για ένα αρκετά ισχυρό κύμα. Αυτή η δυσκολία είχε ήδη επισημανθεί από τον Rayleigh (Κεφάλαιο VII, §3) και δείχνει το σημαντικό ρόλο του ιζώδους στην επίτευξη της αμετάτρεπτης συμπίεσης ενός ρευστού σε ένα κρουστικό κύμα.

Ας εξετάσουμε τώρα τη δεύτερη περίπτωση:

(2) Παρουσία ιζώδους αλλά απουσία θερμικής μεταβίβασης: $\kappa = 0$.

Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να κρατήσουμε την ολοκληρωμένη μορφή της εξίσωσης ορμής (1.99). Ένα σημείο που περιγράφει την κατάσταση του αερίου στις κινήσεις του κύματος στο επίπεδο p, V , από το σημείο A στο σημείο B κατά μήκος κάποιων καμπυλών (στο Σχ. 1.42 με διακεκομμένη γραμμή) παρά κατά μήκος της ευθείας AB .

Εικόνα



Σχ. 1.42

Διάγραμμα p, V για τη δομή ενός
μπροστινού τμήματος αγνοώντας
τη θερμική μεταβίβαση.
Η κατάσταση του αερίου στο κύμα,
αλλάζει κατά μήκος της διακεκομμένης
καμπύλης AB .

Από την εξίσωση της εντροπίας χωρίς τον όρο θερμική μεταβίβαση, βρίσκουμε:

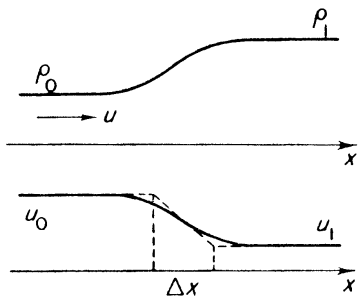
$$\rho u T \frac{dS}{dx} = \mu \left(\frac{du}{dx} \right)^2, \quad (1.106)$$

το οποίο δείχνει ότι η εντροπία του κύματος αυξάνεται μονοτονικά από την αρχική τιμή $S_0 = S_A$ στην τελική τιμή $S_1 = S_B$ άρα η διακεκομμένη γραμμή περιέχεται ολοκληρωτικά ανάμεσα στις ισέντροπες S_0 και S_1 (βλ. Σχ. 1.42). Αφού οι ισέντροπες είναι κυρτές με κλίση προς τα κάτω $(\partial^2 p / \partial V^2)_s > 0$, η διακεκομμένη γραμμή βρίσκεται κάτω από την ευθεία AB . * Η εξίσωση της καμπύλης που περιγράφει τη μετάβαση από το σημείο A στο σημείο B δίνεται από:

$$p = p_0 + \rho_0 u_0^2 \left(1 - \frac{V}{V_0} \right) + \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx}. \quad (1.107)$$

Αφού η καμπύλη βρίσκεται εντελώς κάτω από την ευθεία, τότε $du / dx < 0$ σε όλα τα σημεία μέσα στο κύμα. Εάν ο άξονας x είναι παράλληλος στη ροή τότε $u > 0$, ή αλλιώς, το αέριο στο κύμα επιβραδύνει μόνο, και, ως αποτέλεσμα, συμπιέζεται μονοτονικά. Άρα, η εξέταση της δομής του μπροστινού τμήματος που περιλαμβάνει το ιζώδες οδηγεί στο συμπέρασμα πως με $(\partial^2 p / \partial V^2)_s > 0$, το αέριο στο κρουστικό κύμα μπορεί μόνο να συμπιέζεται. Οι κατανομές πυκνότητας και ταχύτητας μέσα απ' το κύμα έχουν τη μορφή που δείχνει το Σχ. 1.43.

Εικόνα



Σχ. 1.43 Όψεις της πυκνότητας και της ταχύτητας στο μπροστινό τμήμα του κύματος. Το Δx είναι το αποτελεσματικό πάχος.

Ας ορίσουμε το πάχος ως εξής†

$$\frac{u_0 - u_1}{\Delta x} = \left. \frac{du}{dx} \right|_{\max} . \quad (1.108)$$

Η γεωμετρική σημασία στην εξίσωση είναι ολοφάνερη. Η μέγιστη απόλυτη τιμή της κλίσης $|du/dx|_{\max}$ ορίζεται, σύμφωνα με το (1.107), από τη μέγιστη κάθετη παρέκκλιση της ευθείας AB από τη διακεκομμένη γραμμή, ή αλλιώς, από τις ισέντροπες S_0 ή S_1 . Αυτή η παρέκκλιση αντιστοιχεί στη μέση του τμήματος AB και δίνεται από το (1.102). Άρα:

$$\frac{4}{3} \mu \left. \frac{du}{dx} \right|_{\max} = \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_1 - V_0)^2.$$

*Στην πραγματικότητα, η κάθετη παρέκκλιση μεταξύ των ισέντροπων S_1 και S_0 είναι ανάλογη σε $S_1 - S_0 \sim (p_1 - p_0)^3$, ενώ η κάθετη απόσταση μεταξύ των σημείων A και B είναι $p_1 = p_0$. Άρα, το τμήμα του AN , όπου η διακεκομμένη γραμμή, θα μπορούσε, αρχικά, να περάσει πάνω από την ευθεία, είναι μικρό σε σύγκριση με το κύριο τμήμα της ευθείας AN .

+ Το Δx μερικές φορές ονομάζεται το πάχος Prandtl του μπροστινού τμήματος.

Εντάσσοντας την έκφραση για $|du/dx|_{\max}$ στο (1.108) και σημειώνοντας ότι $\mu = \rho_0 \nu \sim \rho_0 l \bar{v} \sim \rho_0 l c_0$

(ν είναι το κινηματικό ιξώδες), και επίσης ότι

$$u_0 - u_1 = [(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)]^{1/2} \sim \left[(p_1 - p_0)^2 \left| \frac{\partial V}{\partial p} \right| \right]^{1/2} \sim \frac{p_1 - p_0}{\rho_0} c_0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S \sim \frac{\rho_0}{V_0^2},$$

φτάνουμε ξανά στη φόρμουλα (1.105) για το πάχος του μπροστινού μέρους

$$\Delta x \sim l \frac{V_0}{V_0 - V_1} \approx l \frac{p_0}{p_1 - p_0}.$$

Το πάχος του μπροστινού τμήματος μπορεί επίσης να εκτιμηθεί από την εξίσωση της εντροπίας (1.106) με μία διαδικασία όμοια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την πρώτη περίπτωση:

$$\rho_0 u_0 T_0 \frac{S_1 - S_0}{\Delta x} \sim \mu \frac{(u_0 - u_1)^2}{\Delta x^2}.$$

Εντάσσοντας το (1.89) για την απότομη αλλαγή εντροπίας και αναδιοργανώνοντας, φτάνουμε στην προηγούμενη εξίσωση για το Δx .

Οι δυσκολίες που προκύπτουν στη δημιουργία μίας συνεχούς λύσης μόνο με θερμική μεταβίβαση δεν συναντώνται στη δημιουργία συνεχούς λύσης όταν λαμβάνεται υπόψη μόνο το ιξώδες. Αυτό το γεγονός όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω έχει ένα βαθύ φυσικό νόημα και δείχνει τη σημασία του ιξώδους στα κρουστικά κύματα συμπίεσης. Πραγματικά, είναι ο ιξώδης μηχανισμός που αλλάζει ένα μέρος της κινητικής ενέργειας του αερίου που ρέει μέσα στην ασυνέχεια, σε θερμότητα αυτή η αντιστροφή είναι ισοδύναμη με τη μετατροπή της ενέργειας της κίνησης των μορίων του αερίου σε ενέργεια της συνολικής κίνησης από τη διάλυση της μοριακής ορμής. Με αυτή την εκτίμηση η θερμική μεταβίβαση έχει μια έμμεση επίδραση στην διαδικασία αντιστροφής αφού συμμετέχει μόνο στη μεταφορά της συνολικής ενέργειας των μορίων από το ένα σημείο στο άλλο, αλλά δεν επηρεάζει άμεσα την συγκεκριμένη κίνηση.

Εάν εξετάσουμε τα κρουστικά κύματα μέτριας ισχύος σε ένα συνηθισμένο αέριο, όπου οι συντελεστές μεταφοράς, το κινηματικό ιξώδες ν και η θερμική διάχυση χ , είναι περίπου ίσα μεταξύ τους και καθορίζονται από την ίδια μοριακή ελεύθερη διαδρομή l ($\nu \approx \chi \sim lc$), αποκτούμε ξανά τη φόρμουλα (1.105) για το πάχος του μπροστινού τμήματος. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε πως είναι αλήθεια αν εξετάσουμε τη γενική εξίσωση της εντροπίας (1.98) που περιέχει και τους όρους ιξώδους και της θερμικής μεταβίβασης.

Η εξίσωση (1.105) δείχνει ότι αν η απότομη αλλαγή της πίεσης μέσα στο κύμα είναι της τάξεως του μεγέθους της πίεσης πριν από το μπροστινό τμήμα, τότε το πάχος του μπροστινού τμήματος θα είναι κατά προσέγγιση ίσο στη μοριακή μέση ελεύθερη διαδρομή.

Εάν η δύναμη του κύματος αυξάνεται περαιτέρω, η ίδια εξίσωση δείχνει πως το πάχος γίνεται μικρότερο από τη μοριακή μέση ελεύθερη διαδρομή. Αυτό το αποτέλεσμα, προφανώς, δεν έχει καμία φυσική σημασία. Εάν οι μεταβλητές ροής αλλάζουν γρήγορα με τις αποστάσεις της τάξεως της μέσης ελεύθερης διαδρομής, τότε η υδροδυναμική συμπεριφορά του ιξώδους και της θερμικής μεταβίβασης, που

Εξαρτάται από την προϋπόθεση ότι οι κλίσεις είναι μικρές, δεν μπορεί πλέον να εφαρμοζέται. Το πάχος ενός αυθαίρετα ισχυρού κρουστικού κύματος δεν μπορεί, προφανώς, να γίνει μικρότερο από τη μοριακή μέση διαδρομή, όπως φαίνεται από μελέτες στην κινητική θεωρία των αερίων (βλ. Κεφάλαιο VII).

Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες το μπροστινό τμήμα ενός κρουστικού κύματος μπορεί να γίνει τόσο παχύ όσο και πολλές μέσες ελεύθερες διαδρομές των μεταβλητών ροής. Συγκεκριμένα, αυτό συμβαίνει μέσα σε ένα αέριο με καθυστερημένη διέγερση

συγκεκριμένων μοριακών βαθμών ελευθερίας, ή όταν μία αντιστρέψιμη χημική αντίδραση λαμβάνει χώρα στο κύμα. Αυτά τα προβλήματα, του μπροστινού τμήματος, θα εξεταστούν στο Κεφάλαιο VII.

4. Διάφορα προβλήματα.

§24. Εξάπλωση μίας αυθαίρετης ασυνέχειας.

Οι μεταβλητές ροής και στις δύο πλευρές του μπροστινού τμήματος ενός κρουστικού κύματος δεν είναι ανεξάρτητες. Σχετίζονται μεταξύ τους από ορισμένες εξισώσεις που εκφράζουν τους νόμους διατήρησης της μάζας, ορμής και ενέργειας. Επιπλέον, η ασυνέχεια – το κρουστικό κύμα συμπίεσης στα ρευστά με συνηθισμένες θερμοδυναμικές ιδιότητες – διαδίδεται μέσα στο ρευστό ως ένας σταθερός μη εξαπλώσιμος σχηματισμός. Όμως, το πρόβλημα μπορεί να διαμορφωθεί ώστε να συμπεριλάβει την ύπαρξη μιας επιφάνειας ασυνέχειας στην αρχική χρονική στιγμή. Οι μεταβλητές ροής και στις δύο πλευρές μίας τέτοιας ασυνέχειας είναι αυθαίρετες και εντελώς άσχετες μεταξύ τους. Τέτοιες ασυνέχειες ορίζονται αυθαίρετες ασυνέχειες.

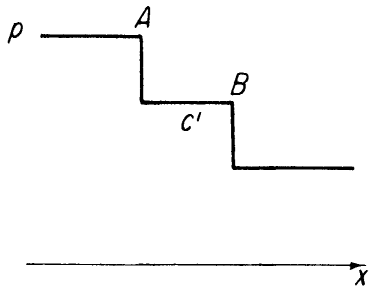
Ας δείξουμε μερικά πρακτικά παραδείγματα που απεικονίζουν πως μπορούν να προκύψουν οι αυθαίρετες ασυνέχειες. Φανταζόμαστε έναν αγωγό γεμάτο με αέριο και χωρισμένο με ένα λεπτό τοίχωμα. Ας υποθέσουμε πως η πυκνότητα, η πίεση και γενικά, η σύνθεση του αερίου είναι διαφορετικές στις δύο πλευρές του τοιχώματος. Το τοίχωμα αφαιρείται γρήγορα σε κάποια χρονική στιγμή. Τη στιγμή αυτή οι δύο περιοχές με εντελώς αυθαίρετες πυκνότητες και πιέσεις έρχονται σε επαφή στην προηγούμενη τοποθεσία του τοιχώματος. Αφού οι πιέσεις και στα δύο αέρια ήταν διαφορετικές, η απότομη αλλαγή στην πίεση θα κάνει τα αέρια να κινηθούν μόλις το τοίχωμα αφαιρεθεί.

Ως ένα δεύτερο παράδειγμα, ας υποθέσουμε πως δύο κρουστικά κύματα με αυθαίρετη δύναμη εισέρχονται από τις δύο πλευρές σε έναν αγωγό γεμάτο με αέριο. Τη στιγμή της σύγκρουσης των δύο κυμάτων κάπου στη μέση του αγωγού, μία επιφάνεια δημιουργείται που χωρίζει τα αέρια διαφορετικών πιέσεων, ταχυτήτων και θερμοκρασιών (οι πιθανές διαφορές πυκνότητας σε αυτό το παράδειγμα είναι κάπως περιορισμένες μπορούμε να πούμε ότι αν τα κύματα είναι ισχυρά, τότε οι πυκνότητες είναι ίδιες και ίσες με την οριακή τιμή). Ύστερα από τη σύγκρουση η κίνηση του αερίου θα αλλάξει.

Ας εξετάσουμε ένα τρίτο παράδειγμα. Χρησιμοποιήσαμε τη θεωρία των κρουστικών κυμάτων εξετάζοντας τη ροή προέρχεται από ένα έμβολο το οποίο εισέρχεται στο αέριο με σταθερή ταχύτητα. Σε αυτή την περίπτωση το κρουστικό κύμα δημιουργήθηκε αμέσως στο έμβολο και διαδόθηκε μέσα στο αέριο με σταθερή ταχύτητα. Στην πραγματικότητα, όμως, το έμβολο έχει μια ορισμένη μάζα και δεν μπορεί να αποκτήσει στιγμιαία την τελική ταχύτητα. Το έμβολο, επομένως, σταδιακά επιταχύνει από την επιβεβλημένη δύναμη. Ως αποτέλεσμα, το κρουστικό κύμα δεν θα δημιουργηθεί αμέσως παρά μόνο σε κάποια απόσταση μακριά από το έμβολο. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την αμυδρή ποικιλομορφία στην ταχύτητα του εμβόλου $U(t)$ από μια βηματική λειτουργία. Αυτό μπορεί να γίνει αν χωρίσουμε την χρονική κλίμακα σε απειροστικά διαστήματα και αν υποθέσουμε

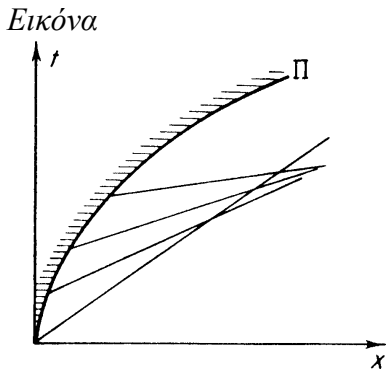
πως η ταχύτητα του εμβόλου κατά τη διάρκεια κάθε διαστήματος είναι σταθερή. Υποθέτουμε επίσης ότι μετά από κάθε χρονικό διάστημα η ταχύτητα αλλάζει απότομα με μικρή ποσότητα. Η διαδρομή του εμβόλου στο επίπεδο x, t θα είναι μια σπασμένη καμπύλη που αποτελείται από πολύ μικρά γραμμικά τμήματα. Κατά τη διάρκεια κάθε μικρού χρονικού διαστήματος το έμβολο στέλνει μια διαταραχή συμπίεσης προς τα εμπρός, με τη μορφή ενός αδύναμου κρουστικού κύματος. Αυτό το κύμα περνά μέσα από το αέριο με μια ταχύτητα που ξεπερνά ελαφρώς την ταχύτητα του ήχου, ενώ το προηγούμενο αδύναμο κρουστικό κύμα, προκλήθηκε από την προηγούμενη ξαφνική αλλαγή στην ταχύτητα του εμβόλου διαδίδεται σχετικά με το αέριο πίσω του με μια ταχύτητα ελαφρώς μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου (βλέπε Σχ. 1.44).

Εικόνα



Σχ. 1.44 Κατανομή της πίεσης σε ένα σύστημα δύο διαδοχικών ασθενών κυμάτων συμπίεσης. Το κύμα A περνά μέσα από το αέριο μπροστά από το κύμα με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου c' σε αυτό το αέριο. Το κύμα B περνάει μέσα από το αέριο με μία υποηχητική ταχύτητα μικρότερη από c' . Άρα, το κρουστικό κύμα A θα ξεπεράσει τελικά το B.

Άρα, κάθε διαδοχικό κρουστικό κύμα ξεπερνάει το προηγούμενο και οι επιπτώσεις συμπίεσης των κυμάτων ξεχωριστά συναθροίζονται. Εάν σχεδιάσουμε τα χαρακτηριστικά στο επίπεδο x, t ξεκινώντας από τη διαδρομή του εμβόλου, θα διασταυρωθούν (Σχ. 1.45). Προκύπτει ότι είναι πιθανό να συγκεκριμενοποιήσουμε την επιτάχυνση του εμβόλου με τέτοιο τρόπο ώστε όλα αυτά τα ασθενή κρουστικά κύματα ξεπερνούν το ένα το άλλο ταυτόχρονα και σε ένα σημείο. Εδώ όλοι οι μικροί παλμοί συμπίεσης μαζεύονται σε μια μεγάλη αλλαγή πίεσης. (Όλα τα χαρακτηριστικά διασταυρώνονται σε ένα μόνο σημείο). Η κατάσταση του αερίου στην ασυνέχεια αλλάζει από την ήρεμη στην τελική κατάσταση σχεδόν ισηντροπικά. Πραγματικά, εάν η ολική συμπίεση του αερίου στην πίεση p χωρίζεται σε n στάδια, ή αλλιώς, σε n ασθενή κρουστικά κύματα με αλλαγές πίεσης $\Delta p = (p - p_0)/n$, τότε η αύξηση εντροπίας ΔS σε κάθε στάδιο θα είναι ανάλογη με $(\Delta p)^3 \sim 1/n^3$, και η συνολική αύξηση εντροπίας για το σύνολο των n κυμάτων θα είναι ανάλογη με $n \Delta S \sim 1/n^2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Άρα, η κατάσταση του αερίου σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας, προκύπτει από τη σύγκρουση των n ασθενών κρουστικών κυμάτων, μπορεί να συσχετιστεί από την ισηντροπική σχέση.



Σχ. 1.45 Διασταύρωση των χαρακτηριστικών σε ένα αέριο συμπιεσμένο από ένα επιταχυνόμενο έμβολο. Π είναι η διαδρομή του εμβόλου.

Γνωρίζουμε, όμως, ότι οι καταστάσεις σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας σχετίζονται όχι από την ισεντροπική σχέση αλλά από τις εξισώσεις Hugoniot. Προκύπτει ότι οι ποσότητες και στις δύο πλευρές της ασυνέχειας δεν ικανοποιούν τους νόμους διατήρησης και ότι η ασυνέχεια είναι αυθαίρετη.

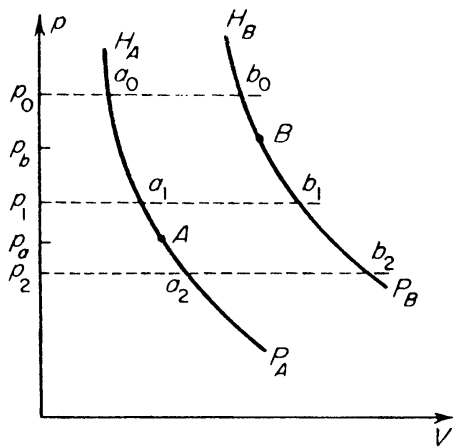
Γενικεύοντας τις περιπτώσεις που είδαμε στα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα ιδανικό πρόβλημα στο οποίο να αναζητούμε μία λύση για την κίνηση του αερίου που περιέχει μία αυθαίρετη ασυνέχεια. Υποθέτουμε ότι στην αρχική χρονική στιγμή $t=0$ στο επίπεδο $x=0$, όλες οι μεταβλητές ροής είναι ασυνεχείς, η πίεση, η πυκνότητα, η ταχύτητα και η θερμοκρασία. Αυτές οι ποσότητες, όμως, είναι ενιαίες στην κάθε πλευρά της ασυνέχειας. Επιπλέον, το αέριο σε κάθε πλευρά μπορεί να είναι διαφορετικής σύστασης. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση από την επιφάνεια της

ασυνέχειας για την οποία όλες οι μεταβλητές ροής μπορούν ακόμα να θεωρούνται συνεχείς, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το χρονικό διάστημα κατά τη διάρκεια του οποίου η επιθυμητή λύση θα εφαρμοστεί (αυτό το πρόβλημα λύθηκε για πρώτη φορά από τον Kochin [3]). Αφού οι συνθήκες του προβλήματος δεν περιλαμβάνουν ένα χαρακτηριστικό μήκος ή χρόνο, θα πρέπει να αναζητήσουμε μία λύση που να εξαρτάται μόνο από την αναλογία χ/t . Δείξαμε στην §11 ότι η πανομοιότυπη επίπεδη ροή ενός αερίου μπορεί να περιγραφεί με όρους μόνο δύο ειδών λύσεων, εκείνων για τα απλά κρουστικά κύματα συμπίεσης και εκείνων με ροές των οποίων όλες οι μεταβλητές είναι σταθερές. Επιπρόσθετα, ασυνέχειες, πχ. Κρουστικά κύματα, είναι επίσης πιθανές. Άρα, η επιθυμητή ροή, θα πρέπει να φτιάχνεται από τρία στοιχεία: κύματα αραιώσης, περιοχές ενιαίας ροής, και κρουστικές ασυνέχειες.

Το σύνολο των πιθανών ροών είναι περιορισμένο από το γεγονός ότι μόνο ένα κύμα μπορεί να κινηθεί προς μία κατεύθυνση (ασχέτως αν το κύμα είναι κύμα αραιώσης ή είναι κρουστικό κύμα). Πραγματικά, ένα κρουστικό κύμα διαδίδεται σε σχέση με το ατάραχο αέριο με υπερηχητική ταχύτητα, και σε σχέση με το συμπιεσμένο αέριο με υποηχητική ταχύτητα, ενώ ένα κύμα αραιώσης περνά μέσα από το αέριο με την ταχύτητα του ήχου. Εάν, για παράδειγμα, ένα κρουστικό κύμα κινείται προς τα δεξιά, τότε ένα κύμα αραιώσης (και ακόμα περισσότερο ένα άλλο κρουστικό κύμα) ακολουθώντας την ίδια διαδρομή πάντα θα το ξεπερνάει μετά από συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αφού, όμως, η κίνηση είναι πανομοιότυπη, και τα δύο κύματα θα ξεκινήσουν από το ίδιο σημείο $\chi=0$ και την ίδια στιγμή $t=0$. Άρα, το ένα κύμα δρα σα να είχε ήδη ξεπεράσει το άλλο την αρχική χρονική στιγμή, αλλά και τα δύο μαζί διαδίδονται ως ένα κύμα. Επομένως, είναι πιθανό για ένα δεύτερο κύμα να ακολουθήσει ένα κύμα αραιώσης. Ένα κρουστικό κύμα θα είχε ξεπεράσει το κύμα αραιώσης, ενώ ένα δεύτερο κύμα αραιώσης θα κινούνταν σε συγκεκριμένη απόσταση από το πρώτο κύμα. Αφού, όμως, η κίνηση είναι πανομοιότυπη, αυτή η απόσταση ισούται με 0 και ο διαχωρισμός ανάμεσα στα δύο κύματα εξαφανίζεται. Από την παραπάνω ανάλυση βλέπουμε ότι η επιθυμητή λύση μπορεί να δημιουργηθεί από κάποιο συνδυασμό των δύο κυμάτων, κρουστικού και αραιώσης, που διαδίδονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις από την αρχική ασυνέχεια και διαχωρίζονται από περιοχές ομοιόμορφης ροής. Γενικά, υπάρχουν δύο τέτοιες περιοχές. Χωρίζονται από ένα επίπεδο που διαχωρίζει τα δύο αέρια που βρίσκονταν αρχικά σε αντίθετες πλευρές της αυθαίρετης ασυνέχειας. Αφού η υδροδυναμική των ιδανικών ρευστών δεν λαμβάνει υπόψη μοριακές διαχύσεις, τα αέρια δεν διαχέονται μεταξύ τους, και το όριο μεταξύ τους παραμένει ατόφιο, κινούμενο με τα αέρια. Η περίπτωση όπου τα αέρια είναι ίδιου είδους δεν είναι, προφανώς, και τόσο διαφορετική. Αυτό το επίπεδο όριο μεταξύ των δύο αερίων, το οποίο μπορούμε να αποκαλούμε όριο επαφής ή ασυνέχεια επαφής, έχει ιδιαίτερες ιδιότητες. Προφανώς, οι πιέσεις και οι ταχύτητες, είναι ίσες και στις δύο πλευρές της ασυνέχειας επαφής. Διαφορετικά, μία ροή στη γειτονική περιοχή της ασυνέχειας θα λάμβανε χώρα και οι περιοχές και στις δύο πλευρές θα έτειναν να γίνουν ομοιόμορφες περιοχές ροής. Όμως, οι πυκνότητες, οι θερμοκρασίες και οι εντροπίες των αερίων και στις δύο πλευρές της ασυνέχειας επαφής μπορεί να έχουν αυθαίρετες τιμές, καθορισμένες από τις αυθαίρετες αρχικές τους τιμές. Διαφορές σε αυτές τις ποσότητες, με ίσες πιέσεις και ταχύτητες, δεν μπορούν να προκαλέσουν τα αέρια να κάνουν σχετική κίνηση. Η ασυνέχεια επαφής είναι στατική σε σχέση με το αέριο και δεν εκπέμπει διαταραχές που θα μπορούσαν να επηρεάσουν τα κύματα (κρουστικό και αραιώσης) που κινούνται σε κάθε κατεύθυνση

μακριά της. Ας απαριθμήσουμε τους πιθανούς τύπους ροής μετά από τη δημιουργία μιας αυθαίρετης ασυνέχειας, τις πιθανές περιπτώσεις της διάλυσης της ασυνέχειας με διαφορετικούς συνδυασμούς κρουστικών και κυμάτων αραιώσης. Αυτές οι τυπικές περιπτώσεις μπορεί να προκύψουν: (1) τα κρουστικά κύματα διαδίδονται και στις δύο κατευθύνσεις μακριά από την ασυνέχεια, (2) ένα κρουστικό κύμα διαδίδεται προς μία κατεύθυνση και ένα κύμα αραιώσης προς μία άλλη, (3) και τα κύματα αραιώσης κινούνται και στις δύο κατευθύνσεις. Ας εξετάσουμε αυτές τις περιπτώσεις πιο λεπτομερώς χρησιμοποιώντας το βολικό διάγραμμα p, V (Σχ.1.46). Πρώτα απ'όλα, ας εντάξουμε στο διάγραμμα τις αρχικές καταστάσεις του ρευστού. Το σημείο A αντιπροσωπεύει το αέριο στα αριστερά και το σημείο B το αέριο στα δεξιά της ασυνέχειας. Η πίεση στο σημείο A (p_a) είναι μικρότερη από την p_b και ας σχεδιάσουμε από αυτά τα σημεία προς τα επάνω τις καμπύλες Hugoniot που χαρακτηρίζουν τα κρουστικά κύματα συμπίεσης, και προς τα κάτω τις ισέντροπες κατά μήκος των οποίων το αέριο εξαπλώνεται σε κύματα αραιώσης.

Εικόνα



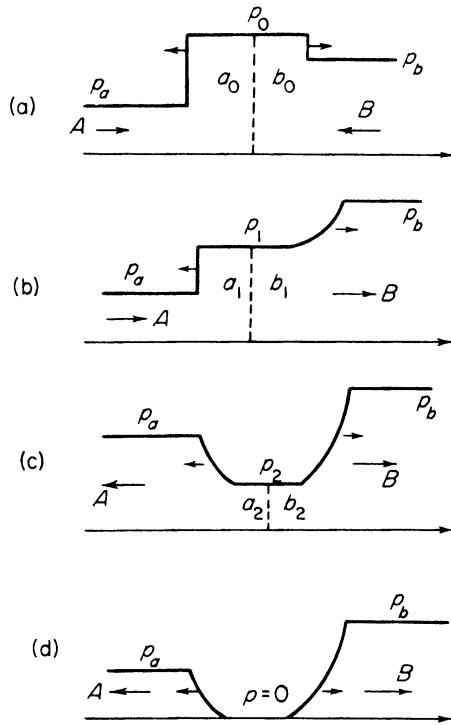
Σχ.1.46. Ένα διάγραμμα p, V που απεικονίζει διαφορετικές περιπτώσεις της διάσπασης μίας αυθαίρετης ασυνέχειας. Τα σημεία A και B χαρακτηρίζουν τις αρχικές

καταστάσεις των αερίων A και B . Τα H_{AA} και H_{BB} είναι οι καμπύλες Hugoniot. AP_A και BP_B είναι οι ισέντροπες για τα αέρια A και B .

Μόλις η ασυνέχεια διασπαστεί, οι πιέσεις και στα δύο αέρια θα γίνουν ίσες στις περιοχές που επηρεάζονται από τα κύματα.

- (1) Ας πούμε πως η νέα πίεση p_0 είναι μεγαλύτερη από τις αρχικές πιέσεις p_a και p_b . Σε αυτή την πρώτη περίπτωση (Σχ.1.47a) τα κύματα συμπίεσης κινούνται και στ αριστερά και στα δεξιά της αυθαίρετης ασυνέχειας (ή επιφάνεια επαφής). Τα αέρια πίσω από αυτά τα κύματα είναι στις καταστάσεις a_0 και b_0 και έχουν την ίδια πίεση p_0 και ταχύτητα. Το αέριο στην κατάσταση a_0 κινείται προς τα αριστερά σχετικά με το αέριο αρχικά στην κατάσταση A , και το αέριο b_0 κινείται προς τα δεξιά σχετικά με το αέριο αρχικά στην κατάσταση B . Αφού τα αέρια a_0 και b_0 κινούνται με ίδια ταχύτητα, είναι απαραίτητο τα αέρια A και B να κινούνται το ένα προς το άλλο. Δύο κρουστικά κύματα σχηματίζονται κατά την σύγκρουση των μαζών των δύο αερίων που κινούνται το ένα προς το άλλο με υψηλές ταχύτητες. Όσο πιο μικρή είναι η ταχύτητα σύγκρουσης, τόσο μικρότερη είναι η πίεση p_0 πίσω από τα κρουστικά κύματα. Το δεύτερο παράδειγμα που συζητήσαμε στην αρχή αυτής της ενότητας αποφέρει αυτήν την περίπτωση.
- (2) Με μια συγκεκριμένη χαμηλή ταχύτητα σύγκρουσης μία νέα συνθήκη θα προκύψει στην οποία η πίεση p_1 είναι ακόμα μεγαλύτερη από την πίεση p_a αλλά χαμηλότερη από την πίεση p_b . Σε αυτή την δεύτερη περίπτωση αφού η ασυνέχεια διασπαστεί, ένα κρουστικό κύμα διαδίδεται μέσα από το αέριο A και ένα κύμα αραιώσης κινείται μέσα από τα αέριο B (Σχ.1.47b). Τέτοιες συνθήκες θα υπάρξουν όταν οι αρχικές ταχύτητες και των δύο αερίων A και B είναι ίσες με 0, ή αλλιώς, όταν η πίεση της ασυνέχειας υπάρχει αρχικά, όπως στο παράδειγμα με την διχοτόμηση, και το αέριο ξεκινά να κινείται στην κατεύθυνση της περιοχής με τη χαμηλότερη πίεση. Αυτή η περίπτωση έχει σημαντικές πρακτικές εφαρμογές, αφού δημιουργεί την αρχή για τη χρήση των κρουστικών σωλήνων. Εδώ τα ισχυρά κρουστικά κύματα προκύπτουν υπό τις συνθήκες εργαστηρίου και μπορούν να θερμάνουν το αέριο A με υψηλές θερμοκρασίες. Ο κρουστικός σωλήνας χωρίζεται από ένα μικρό χάσμα (διάφραγμα). Στη μία πλευρά του διαφράγματος ο σωλήνας περιέχει το αέριο A σε χαμηλή πίεση, ενώ το αέριο B βρίσκεται στην άλλη πλευρά- το λεγόμενο θάλαμο υψηλής πίεσης. Αφού το διάφραγμα αποσυντεθεί, το αέριο B εξαπλώνεται στην κατεύθυνση του θαλάμου χαμηλής πίεσης, στέλνοντας ένα ισχυρό κρουστικό κύμα στο αέριο A .

Εικόνα



Σχ. 1.47. Κατανομές της πίεσης για διαφορετικές περιπτώσεις της διάσπασης της ασυνέχειας. Τα μακριά βέλη με τα γράμματα A και B δηλώνουν τις αρχικές ταχύτητες των αερίων A και B προτού η ασυνέχεια διασπαστεί. Τα μικρά βέλη δείχνουν τις κατευθύνσεις διάδοσης των κυμάτων μέσα από το αέριο (η κατεύθυνση της διάδοσης σε φυσικό χώρο μερικές φορές μπορεί να είναι διαφορετική.)

Η τελική κατάσταση, που απεικονίζεται στο Σχ.1.47b, θα εξετασθεί στο Κεφάλαιο IV, όπου εξετάζεται η χρήση των κρουστικών σωλήνων. Μία κατάλληλη επιλογή των αερίων A και B της πίεσης καθιστά δυνατό να επιτύχουμε υπερβολικά ισχυρά κρουστικά κύματα και να θερμάνουμε το υπό εξέταση αέριο σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες. Μία από τις μεθόδους για να αποκτήσουμε ακόμα πιο υψηλές

θερμοκρασίες παρέχεται από τη σύγκρουση των δύο κυμάτων. Μία ιδιαίτερη περίπτωση του τελευταίου είναι η αντανάκλαση ενός κρουστικού κύματος από το τείχος του σωλήνα, που είναι ένας τρόπος που χρησιμοποιείται επίσης για να επιτύχουμε υψηλές θερμοκρασίες στο εργαστήριο. Η αντανάκλαση ενός κρουστικού κύματος από ένα συμπαγή τοίχο είναι ίση με μία ιδιαίτερη περίπτωση σύγκρουσης των δύο ρευμάτων των αερίων. Εάν δύο εντελώς ίδια ρεύματα συγκρουστούν μεταξύ τους, η ασυνέχεια επαφής θα παραμείνει σε αδράνεια ύστερα από τη σύγκρουση, και η κατάσταση είναι η ίδια όπως η περίπτωση όπου ένα στατικό συμπαγές τείχος αντικαθιστά την ασυνέχεια επαφής. Τα προβλήματα της σύγκρουσης περιστατικών και αντανακλώμενων κρουστικών κυμάτων θα εξετασθούν στο Κεφάλαιο IV.

(3) Εάν μετά τη διάσπαση της ασυνέχειας, η πίεση p_2 είναι χαμηλότερη από τις p_a και p_b , τότε θα προκύψει ένα κύμα αραιώσης το οποίο θα κινείται στα δεξιά και στα αριστερά μέσα από το κάθε αέριο. Αυτή η κατάσταση, που απεικονίζεται στο Σχ.1.47c, επιτυγχάνεται όταν και τα δύο αέρια A και B κινούνται αρχικά σε αντίθετες κατευθύνσεις μακριά από την ασυνέχεια σε αρκετά υψηλές ταχύτητες.

Εάν η αρχική σχετική ταχύτητα, με την οποία τα αέρια A και B απομακρύνονται μεταξύ τους είναι πολύ υψηλή, ονομαστικά μεγαλύτερη από το σύνολο των μέγιστων ταχυτήτων (σε κενό) των αερίων A και B, $2c_a/(\gamma_a-1) + 2c_b/(\gamma_b-1)$, τότε ένα κενό ($p=0$) θα δημιουργηθεί μεταξύ των δύο αερίων. Εδώ c_a και c_b είναι οι αρχικές ταχύτητες του ήχου και γ_a και γ_b είναι οι συγκεκριμένες αναλογίες θερμότητας των αερίων A και B (βλέπε (1.60) στην §11). Αυτή η κατάσταση, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο της τρίτης περίπτωσης, απεικονίζεται στο Σχ.1.47b.

Με ακριβείς υπολογισμούς σχετικά με τη διάσπαση των αυθαίρετων ασυνεχειών είναι βολικό (επιπλέον στα διαγράμματα p, V) να χρησιμοποιήσουμε τα λεγόμενα p, u διαγράμματα στα οποία κάποιος σχεδιάζει την πίεση p ενάντια στην ταχύτητα στο εργαστηριακό σύστημα συντεταγμένων u . Η σχέση Hugoniot $p_H(V)$ μπορεί να αντιπροσωπευτεί με μία λειτουργική σχέση μεταξύ της πίεσης πίσω από το προστινό τμήμα του κύματος και την απότομη αλλαγή στην ταχύτητα του αερίου, π.χ. Η ταχύτητα του συμπιεσμένου αερίου σε σχέση με το ατάραχο αέριο. Με παρόμοιο τρόπο, η πίεση σε ένα κύμα αραιώσης είναι μοναδικά συσχετισμένο με την ταχύτητα εξαιτίας της σταθερότητας των αμετάβλητων Riemann (βλέπε §§10 και 11). Η βολικότητα των διαγραμμάτων p, u στην περιγραφή της διάσπασης μιας ασυνέχειας έγκειται στο γεγονός ότι η πίεση και η ταχύτητα και των δύο αερίων είναι ίδιες στην τελική κατάσταση, ότι οι τελικές καταστάσεις των αερίων δίνονται από το ίδιο σημείο στο διάγραμμα. Τα διαγράμματα p, u για τις διασπάσεις που απεικονίζονται στο Σχ.1.47 a-d φαίνονται στο Σχ.1.48 a-d.

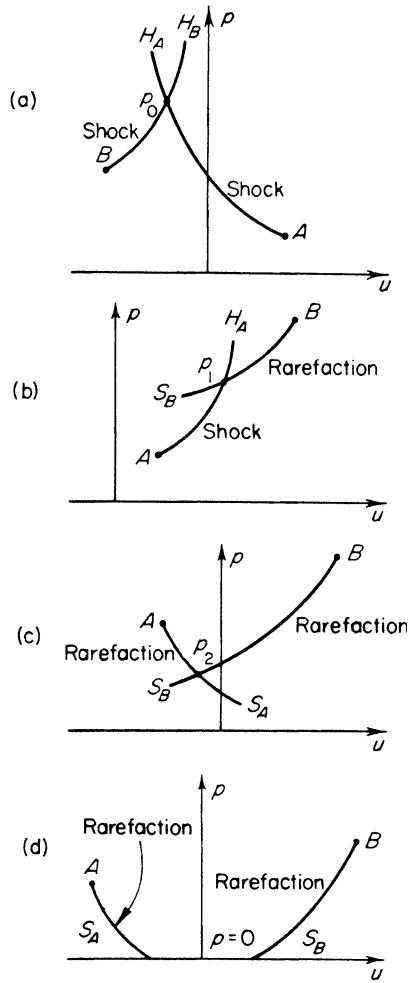
Έχοντας ξεκαθαρίσει τους τύπους της ροής που δημιουργούνται από τη διάσπαση μιας αυθαίρετης ασυνέχειας, μπορούμε τώρα να βεβαιώσουμε την αρχική υπόθεση ότι τέτοιες ροές εξαρτώνται μόνο από την αναλογία χ/t . Στην ανάλυση των κυμάτων αραιώσης στην §11 αυτή η υπόθεση βασίστηκε στο γεγονός ότι το εύρος του κύματος αραιώσης, που είναι το μόνο μήκος κλίμακας στο πρόβλημα στο οποίο οι διαλυτικές διαδικασίες αγνοούνται, αυξάνεται με το χρόνο καθώς $\chi \sim ct$. Η σχετική επίπτωση ιξώδους και θερμικής μεταβίβασης, που είναι ανάλογη με l/χ , μειώνεται με το χρόνο και γίνεται πολύ μικρή στις μακροσκοπικές ροές, όταν $\chi \gg l$. Επομένως, η μόνη σταθερή κλίμακα, η μέση μοριακή

διαδρομή θα εξαφανιστεί επίσης.

Στις ροές με κρουστικά κύματα, και η ιζώδης και η θερμική μεταβίβαση, που εισάγουν την κλίμακα μήκους l στις εξισώσεις, είναι σημαντικές μόνο στο λεπτό στρώμα του μπροστινού τμήματος του κρουστικού κύματος του οποίου το πάχος είναι της τάξεως l . Το πάχος της ασυνέχειας επαφής είναι επίσης μικρό. Μικραίνει με το χρόνο εξαιτίας της μοριακής διάλυσης και της θερμικής μεταβίβασης. Αυτοί οι δύο μηχανισμοί οδηγούν στο πάχος της ασυνέχειας $\Delta\chi$ της τάξεως $(\chi t)^{1/2} \sim (Dt)^{1/2}$ (όπου D είναι ο συντελεστής διάλυσης, που είναι περίπου ίσος με τη θερμική διάλυση $D \sim \chi \sim lc$).

Η απόσταση χ που διανύεται από το κρουστικό και κύμα αραιώσης σε χρόνο t είναι της τάξεως ct , έτσι ώστε $\Delta\chi \sim (l\chi)^{1/2}$. Η αναλογία των διαστάσεων της περιοχής στην οποία οι δυνάμεις διάλυσης δεν είναι αμελητέες στις διαστάσεις όλης της περιοχής που καταλαμβάνεται από τη ροή είναι επομένως της τάξεως l/χ για το κρουστικό κύμα και της τάξεως $(l/\chi)^{1/2}$ για την ασυνέχεια επαφής. Και οι δύο ποσότητες είναι μικρές σε μία μακροσκοπική ροή όπου $\chi \gg l$.

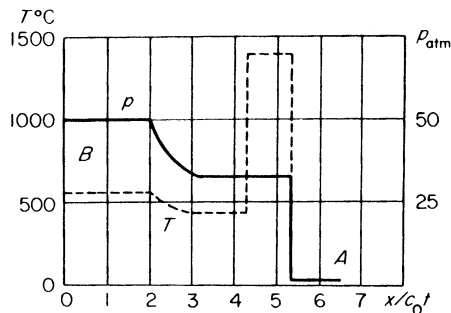
Εικόνα



Σχ.1.48. Μία σειρά από p, u διαγράμματα για τις διαφορετικές περιπτώσεις της διάσπασης της ασυνέχειας που δείχνει το Σχ.1.47. Οι καμπύλες H είναι οι καμπύλες Hugoniot ως λειτουργία των p και u . Οι καμπύλες S είναι ισέντροπες ως λειτουργία των p και u .

Ας επιστρέψουμε στο τρίτο παράδειγμα που παρουσιάσαμε στην αρχή αυτής της ενότητας και ας ερευνήσουμε τις γενικές συνθήκες που προκύπτουν από τη διάσπαση μίας ασυνέχειας που δημιουργείται από την συγκέντρωση κυμάτων συμπίεσης που προκλήθηκαν από ένα επιταχυνόμενο έμβολο. Όταν δύο ξεχωριστά κύματα συνδυάζονται έχουμε στη μία πλευρά της ασυνέχειας το ατάραχο αέριο *A* και στην άλλη το αέριο στην κατάσταση *B*, το οποίο έχει συμπιεστεί πρακτικά ισεντροπικά. Μπορούμε να δείξουμε ότι η ταχύτητα ροής, που έχει το αέριο ως αποτέλεσμα διαδοχικών συμπίεσεων από ένα μεγάλο αριθμό κρουστικών κυμάτων, είναι χαμηλότερη από την ταχύτητα που δημιουργήθηκε ως αποτέλεσμα συμπίεσης στην ίδια πίεση από ένα μόνο κρουστικό κύμα. Προκύπτει, επομένως, ότι η ασυνέχεια διασπάται όπως στην περίπτωση 2. Ένα κύμα αραιώσης κινείται προς το έμβολο μέσα από ένα συμπιεσμένο αέριο και ένα κρουστικό κύμα κινείται μέσα από το ατάραχο αέριο. Η πίεση *p* γίνεται μικρότερη από την πίεση στο έμβολο *p_b*. Εξαιτίας της αύξησης στην εντροπία στο κρουστικό κύμα, όμως, αυτή η χαμηλότερη πίεση αντιστοιχεί σε μία υψηλότερη θερμοκρασία, έτσι ώστε το αέριο πίσω από το κρουστικό κύμα υφίσταται μία μεγαλύτερη θέρμανση από ότι το αέριο το οποίο υπέστη την σχεδόν ισεντροπική θέρμανση που προκλήθηκε από την σύγκρουση ασθενών κυμάτων. Το Σχ.1.49 δείχνει τις κατανομές των *p* και *T* μετά τη διάσπαση της ασυνέχειας που δημιουργήθηκε από τη σύγκρουση ασθενών κυμάτων συμπίεσης.

Εικόνα



Σχ.1.49. Διάδοση μίας ασυνέχειας που προκαλείται από τη σύγκρουση διαδοχικών κυμάτων συμπίεσης. Η θερμοκρασία πίσω από κρουστικό κύμα είναι υψηλότερη από τη μέγιστη θερμοκρασία που δημιουργείται από την προσθήκη ασθενών κυμάτων συμπίεσης. Από την άλλη πλευρά, οι πιέσεις είναι χαμηλότερες, αφού τα κύματα αραιώσεως κινούνται σε μία κατεύθυνση αντίθετη από τα κύματα συμπίεσης. Η κατανομή πίεσης απεικονίζεται από την έντονη γραμμή και η κατανομή της θερμοκρασίας από την διακεκομμένη γραμμή.

Ο αέρας έχει συμπιεστεί από ένα έμβολο του οποίου η ταχύτητα έχει φτάσει σταδιακά τα $4.44c_0 = 1500 \text{ m/sec}$, με την πίεση στο έμβολο να φτάνει τα $p_b = 50p_a = 50 \text{ atm}$. Η συντεταγμένη απόστασης και ο χρόνος στο σχήμα μετριούνται σε σχέση με το σημείο και τη στιγμή της σύγκρουσης.

Η περίπτωση που εξετάστηκε παραπάνω είναι άξια ενδιαφέροντος στην θεωρία πυροκρότησης. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν εξηγούν πώς μία φλόγα, που δρα σε ένα αέριο με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που δρα το έμβολο, μπορεί να προκαλέσει τη δημιουργία κρουστικού κύματος σε μία μεγάλη απόσταση από τη φλόγα μέσω διαδοχικών συμπίεσεων. Με το να συμπιεστεί το αέριο σταδιακά σε μια μέση θερμοκρασία (630°C στο Σχ.1.49), μπορεί να προκύψει μία θέρμανση στους 1450°C σε μία απόσταση μακριά, και μπορεί να επιτευχθεί μία «απομακρυσμένη ανάφλεξη» τη στιγμή της σύγκρουσης. Προφανώς, αυτός είναι συνήθως ο μηχανισμός πυροκρότησης στα αέρια.

§25. Ισχυρή έκρηξη σε μία ομοιογενή ατμόσφαιρα

Το ιδανικό πρόβλημα μίας ισχυρής έκρηξης σε μία ομοιογενή ατμόσφαιρα αντιπροσωπεύει ένα τυπικό παράδειγμα μίας πανομοιότυπης ροής, στην οποία οι μεταβλητές ροής αλλάζουν με το χρόνο με τέτοιο τρόπο ώστε οι κατανομές τους σε σχέση με τη μεταβλητή συντεταγμένη να παραμένουν πάντα όμοιες στο χρόνο. Το πανομοιότυπο πρόβλημα της ισχυρής έκρηξης δημιουργήθηκε και επιλύθηκε από τον Sedon [4, 5]. Χρησιμοποιώντας μία εξαιρετική μέθοδο, στην οποία χρησιμοποιήθηκε το ολοκλήρωμα ενέργειας, ο Sedon βρήκε με επιτυχία μία ακριβή αναλυτική λύση στις εξισώσεις της πανομοιότυπης κίνησης. Το ίδιο πρόβλημα εξετάστηκε επίσης από τον Stanjukovich (στη διατριβή του, βλ. [15] και από τον Taylor [6], και οι δύο από τους οποίους δημιούργησαν τις εξισώσεις για το πρόβλημα και απέκτησαν αριθμητικές αλλά όχι αναλυτικές λύσεις. Θα συζητήσουμε τη λύση σε αυτό το πρόβλημα και μερικές από τις συνέπειές της, αφού θα μας χρησιμεύσουν στα Κεφάλαια VIII και IX όπου θα εξετάσουμε συγκεκριμένα φυσικοχημικά και οπτικά φαινόμενα που συνοδεύουν τις εκρήξεις στον αέρα.

Εξετάζουμε ένα τέλειο αέριο με σταθερές συγκεκριμένες θερμοότητες και πυκνότητα ρ_0 , στο οποίο μία μεγάλη ποσότητα ενέργειας E απελευθερώνεται σε μικρό όγκο κατά τη διάρκεια σύντομου χρονικού διαστήματος. Ένα κρουστικό κύμα θα διαδοθεί μέσα στο αέριο ξεκινώντας από το σημείο όπου η ενέργεια απελευθερώνεται. Θα εξετάσουμε τη διαδικασία στο στάδιο όπου το κρουστικό κύμα έχει διανύσει κάποια απόσταση η οποία είναι

υπερβολικά μεγάλη σε σύγκριση με τις διαστάσεις της περιοχής στην οποία αρχικά απελευθερώθηκε η ενέργεια, όταν η μάζα του αερίου που τέθηκε σε κίνηση από την έκρηξη είναι μεγάλη σε σύγκριση με τη μάζα των προϊόντων της έκρηξης. Σε αυτή την περίπτωση, κατά ένα μεγάλο βαθμό ακριβείας, η απελευθέρωση ενέργειας μπορεί να θεωρηθεί και ακαριαία και ότι συμβαίνει σε ένα σημείο. Θα υποθέσουμε επίσης πως σε αυτό το στάδιο της διαδικασίας είναι αρκετά νωρίς ότι το κρουστικό κύμα δεν έχει μετακινηθεί πολύ μακριά από την πηγή, έτσι ώστε η δύναμή του είναι ακόμα αρκετά μεγάλη και είναι πιθανό να αγνοήσουμε την αρχική πίεση του αερίου ή την αντιπίεση p_0 σε σύγκριση με την πίεση πίσω από το κύμα. Αυτό είναι αντίστοιχο με το να αγνοήσουμε την αρχική εσωτερική ενέργεια του αερίου που τέθηκε σε κίνηση σε σύγκριση με την ενέργεια της έκρηξης E και επίσης αντιστοιχεί στο να αγνοήσουμε την αρχική ταχύτητα του ήχου c_0 σε σύγκριση με τις ταχύτητες και του αερίου και του μπροστινού τμήματος του κύματος. Η κίνηση του αερίου καθορίζεται από δύο διαστατές παραμέτρους, την ενέργεια της έκρηξης E , και την αρχική πυκνότητα ρ_0 . Αυτές οι παράμετροι δεν μπορούν να συνδυαστούν ώστε να αποφέρουν κλίμακες με διαστάσεις είτε μήκους είτε χρόνου. Έτσι η κίνηση θα είναι πανομοιότυπη, ή αλλιώς, θα είναι μία λειτουργία συγκεκριμένου συνδυασμού της συντεταγμένης r (απόσταση από το κέντρο της έκρηξης) και του χρόνου t . Σε αντίθεση με την πανομοιότυπη κίνηση που εξετάσαμε στην §11, αυτό το πρόβλημα δεν περιέχει χαρακτηριστική ταχύτητα. Η αρχική ταχύτητα του ήχου c_0 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να χαρακτηρίσει αυτή τη διαδικασία. Οποτεδήποτε θέτουμε $p_0 = 0$ με μια συγκεκριμένη προσέγγιση, θα είναι επίσης ίση με 0 στον ίδιο βαθμό προσέγγισης*. Έτσι, η ποσότητα r/t δεν μπορεί να χρησιμεύσει ως μεταβλητή ομοιότητας, όπως συνέβη στο πανομοιότυπο κύμα αραίωσης στην §11. Σε αυτή την περίπτωση ο μόνος διαστατός συνδυασμός που περιέχει μόνο το μήκος και το χρόνο είναι η αναλογία του E στο ρ_0 , με τις διαστάσεις $[E/\rho_0] = [cm^5 \cdot sec^{-2}]$. Έτσι, η αδιάστατη ποσότητα

$$\xi = r \left(\frac{\rho_0}{Et^2} \right)^{1/5} \quad (1.109)$$

μπορεί να χρησιμεύσει ως η μεταβλητή ομοιότητας.

Το μπροστινό τμήμα του κύματος ορίζεται από μία δεδομένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής ξ_0 . Η κίνηση στο τμήμα αυτό $R(t)$ διέπεται από τη σχέση

$$R = \xi_0 \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (1.110)$$

Η διάδοση της ταχύτητας του κρουστικού κύματος είναι

$$D = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5} \frac{R}{t} = \xi_0 \frac{2}{5} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5} \xi_0^{5/2} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/2} R^{-3/2}.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τις παραμέτρους πίσω από μπροστινό τμήμα του κύματος με όρους της ταχύτητάς του χρησιμοποιώντας τις οριακές φόρμουλες για ένα ισχυρό κρουστικό κύμα

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 D^2, \quad u_1 = \frac{2}{\gamma + 1} D. \quad (1.111)$$

Η πυκνότητα πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος παραμένει σταθερή και ίση με την οριακή του τιμή. Η πίεση μειώνεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$p_1 \sim \rho_0 D^2 \sim \rho_0 \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{2/5} t^{-6/5} \sim \frac{E}{R^3}. \quad (1.112)$$

Η φυσική σημασία των εξισώσεων που διέπουν τη διάδοση μίας ισχυρής έκρηξης μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητή. Σε χρόνο t το κύμα φτάνει μία ακτίνα R και περιβάλλει έναν όγκο $4/3\pi R^3$, του οποίου η μάζα είναι $M = 4/3\pi R^3 \rho_0$. Η πίεση είναι ανάλογη στη μέση ενέργεια ανά μονάδα όγκου, δηλαδή, $p \sim E/R^3$. Οι ταχύτητες του αερίου και του μπροστινού τμήματος του κύματος είναι ανάλογες και $D \sim u \sim (p/\rho)^{1/2} \sim (E/\rho_0 R^3)^{1/2}$.

* Αυτή η συνθήκη στην πραγματικότητα καθορίζει τα όρια εφαρμοσιμότητας της λύσης. Θέτουμε συγκεκριμένες προϋποθέσεις στην ακρίβεια της λύσης με το να συγκρίνουμε την πίεση p_1 πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος και τη διάδοση της ταχύτητας του κύματος D , με ρ_0 και c_0 , και βρίσκουμε το χρόνο όταν η προσέγγιση $p_1 \gg \rho_0$ δεν ικανοποιείται πλέον. Θα πρέπει να σημειωθεί, όμως, ότι η συνθήκη που αγνοεί την αντιπίεση είναι πιο αυστηρή, ονομαστικά : $p_1 \gg [(\gamma + 1) / (\gamma - 1)] \rho_0$. Αυτό είναι φανερό από το (1.76). Με τη συνθήκη αυτή η αναλογία πυκνότητας σε ένα κρουστικό κύμα είναι ίση με την οριακή τιμή της $(\gamma + 1) / (\gamma - 1)$.

Ολοκληρώνοντας $dR/dt = D$, βρίσκουμε την ακτίνα του μπροστινού τμήματος ως λειτουργία του χρόνου $R \sim (E/\rho_0)^{1/5} t^{2/5}$. Η εξίσωση (1.112) δείχνει το νόμο ομοιότητας για διαφορετικές ενέργειες έκρηξης. Η πίεση πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος έχει μία σταθερή τιμή σε αποστάσεις ανάλογες σε $E^{1/3}$, ή σε χρόνους ανάλογους σε $E^{1/3}$. Οι κατανομές της πίεσης, της πυκνότητας και της ταχύτητας του αερίου σε σχέση με την ακτίνα καθορίζονται ως λειτουργίες της μίας αδιάστατης μεταβλητής ξ , που μπορεί να γραφτεί ως $\xi = \xi_0 r/R$. Αφού η κίνηση είναι πανομοιότυπη, τα σχήματα των κατανομών δεν αλλάζουν με το χρόνο, ενώ οι κλίμακες για τις μεταβλητές p , ρ και u είναι ακριβώς οι ίδιες λειτουργίες του χρόνου όπως στο μπροστινό τμήμα του κύματος. Με άλλα λόγια, η λύση μπορεί να αποδοθεί με την εξής μορφή

$$p = p_1(t) \bar{p}(\xi), \quad u = u_1(t) \bar{u}(\xi), \quad \rho = \rho_1 \bar{\rho}(\xi).$$

Εδώ $p_1(t)$, $u_1(t)$ και ρ_1 είναι η πίεση, η ταχύτητα και η πυκνότητα πίσω από το μπροστινό τμήμα και είναι λειτουργίες του χρόνου όπως φαίνεται από το (1.111) και (1.112), καθώς $\bar{p}(\xi)$, $\bar{u}(\xi)$, $\bar{\rho}(\xi)$ είναι καινούριες αδιάστατες λειτουργίες. Εντάσσοντας αυτές τις εκφράσεις στις εξισώσεις αεριοδυναμικής για την σφαιρικά συμμετρική περίπτωση και μετατρέποντας από τη διαφοροποίηση σε σχέση με το r και t στη διαφοροποίηση σε σχέση με ξ (χρησιμοποιώντας το (1.109) με τρόπο παρόμοιο με αυτόν της §11) προκύπτει ένα

σύστημα τριών συνηθισμένων πρώτης τάξεως διαφορικών εξισώσεων για τις τρεις άγνωστες λειτουργίες $\bar{p}, \bar{u}, \bar{\rho}$. Η λύση για αυτό το σύστημα πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες στο μπροστινό τμήμα του κύματος $\bar{p} = \bar{u} = \bar{\rho} = 1$, για $\xi = \xi_0$.

Δε θα παρουσιάσουμε εδώ την αναλυτική λύση και τις φόρμουλες που προκύπτουν οι οποίες μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο του Sedon ή σε εκείνο των Landau και Lifshitz [1]. Σημειώνουμε, όμως, ότι η μοναδική αδιάστατη παράμετρος ξ_0 που συμπεριλαμβάνεται στη λύση καθορίζεται από τη συνθήκη της διατήρησης της ενέργειας

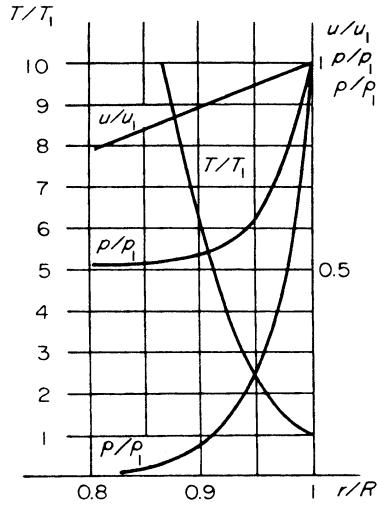
$$E = \int_0^R 4\pi r^2 \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \rho dr, \quad (1.113)$$

Αυτή η παράμετρος εξαρτάται επίσης, όπως και όλη η λύση, από τη συγκεκριμένη αναλογία θερμότητας γ .

Η συγκεκριμένη αναλογία θερμότητας για τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν είναι σταθερή και είναι μια λειτουργία και της θερμοκρασίας και της πίεσης, ως αποτέλεσμα της διάστασης και του ιονισμού που λαμβάνει χώρα σε υψηλές θερμοκρασίες (βλ. Κεφάλαιο III). Όμως, είναι πάντα πιθανό να επιλέξουμε στο περίπου κάποια αποτελεσματική τιμή της αναλογίας και να υποθέσουμε ότι είναι σταθερή. Με τον τρόπο αυτόν η λύση στο πρόβλημα της ιδανικής ισχυρής έκρηξης μπορεί να εφαρμοστεί στην όλη διαδικασία. Για τον αέρα μπορούμε να υποθέσουμε μία τιμή για το γ ότι είναι ίση με 1.2 και 1.3.

Στο Σχ.1.50 σχεδιάζονται οι κατανομές των λειτουργιών $p/p_1, \rho/\rho_1, u/u_1, T/T_1$ σε σχέση με r/R για $\gamma = 1.23$. Η παράμετρος ξ_0 εδώ είναι ίση με 0.930. Είναι χαρακτηριστικό μίας ισχυρής έκρηξης για την πυκνότητα του αερίου να μειώνεται υπερβολικά γρήγορα πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος στο κέντρο. Πρακτικά η συνολική μάζα του αερίου που αρχικά ήταν κατανεμημένη ομοιόμορφα μέσα στη σφαίρα της ακτίνας R τώρα εμπεριέχεται μέσα σε ένα λεπτό στρώμα κοντά στην επιφάνεια του μπροστινού τμήματος. Στην γειτονική περιοχή του μπροστινού τμήματος η πίεση μειώνεται όσο προχωράμε προς το κέντρο από έναν παράγοντα του 2 στο 3, και ύστερα παραμένει περίπου σταθερή σχεδόν σε όλη τη σφαίρα. Η θερμοκρασία αυξάνεται όσο κινούμαστε μακριά από το μπροστινό τμήμα προς το κέντρο. Η αύξηση είναι περισσότερο αμυδρή στην αρχή, ενώ η πίεση ακόμα μειώνεται. Τότε, στην περιοχή με τη σταθερή πίεση, η θερμοκρασία αυξάνεται πολύ γρήγορα. Αυτή η αύξηση στη θερμοκρασία όσο πηγαίνουμε προς το κέντρο συμβαίνει εξαιτίας του γεγονότος ότι τα σωματίδια που είναι κοντά στο κέντρο θερμαίνονται από ένα πολύ ισχυρό κρουστικό κύμα και έχουν ως αποτέλεσμα μία πολύ υψηλή εντροπία. Για μία ισηντροπική εξάπλωση στην ίδια πίεση, η θερμοκρασία είναι υψηλότερη όσο πιο μεγάλη είναι η εντροπία των σωματιδίων, ή αλλιώς, όσο πιο κοντά βρίσκονται στο κέντρο. Η απότομη μείωση της πυκνότητας προς το κέντρο γίνεται, με τη σειρά της, εξαιτίας της αύξησης στη θερμοκρασία (η πίεση είναι σταθερή).

Εικόνα



Σχ.1.50 Κατανομές της πίεσης, πυκνότητας, ταχύτητας και θερμοκρασίας για ένα σημείο της έκρηξης ενός αερίου με $\gamma = 1.23$.

Αφού η πίεση είναι σταθερή σε σχέση με την ακτίνα παντού εκτός από την περιοχή κοντά στο μπροστινό τμήμα, μπορούμε να βρούμε τις ασυμπτωτικές κατανομές των μεταβλητών ροής καθώς $r \rightarrow 0$. Προκύπτει από την εξίσωση της κίνησης με $p(r) = \text{const}$, $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, ότι $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = 0$, πχ, ότι $u = r/t^*$. Για να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πυκνότητας παίρνουμε μία μετατροπή από τις συντεταγμένες του Lagrange (βλ. §2) και χαρακτηρίζουμε το δεδομένο σωματίδιο αερίου από την αρχική του ακτίνα r_0 (με το «σωματίδιο» εννοούμε ένα βασικό σφαιρικό στρώμα όγκου $4\pi r_0^2 dr_0$). Τη στιγμή που το μπροστινό τμήμα περνά μέσα από το σωματίδιο, η πίεση p_1 στο σωματίδιο είναι ανάλογη με $R^{-3} = r_0^{-3}$.

* Σημείωση του εκδότη. Αυτό το επιχείρημα δεν είναι πλήρες, καθώς $r \rightarrow 0$ στο όριο. Ένας πιο λεπτομερής υπολογισμός δίνει $u = (2/5\gamma) r/t$.

Ξεκινώντας σε αυτό το χρόνο, το σωματίδιο r_0 εξαπλώνεται ισημερινά έτσι ώστε σε μεταγενέστερο χρόνο t είναι

$$\rho(r_0 t) = \rho_1 \left[\frac{p(r_0 t)}{p_1(r_0)} \right]^{1/\gamma}$$

Όμως, σε δεδομένο χρόνο t η πίεση για όλα τα σωματίδια στην «κοιλότητα» κοντά στο κέντρο είναι η ίδια και $p_1(t)$ είναι ανάλογη με $t^{6/5}$. Έτσι, στις συντεταγμένες Lagrange το ασυμπτωτικό αποτέλεσμα για την πυκνότητα είναι $\rho \sim r_0^{3/\gamma} t^{-6/5\gamma}$. Ας κάνουμε μια μετατροπή στις συντεταγμένες Euler με την εξίσωση (1.24), $\rho r^2 dr = \rho_0 r_0^2 dr_0$. Ολοκληρώνοντας, προκύπτει η ακτίνα Euler ως λειτουργία του χρόνου $r \sim r_0^{(\gamma-1)/\gamma} t^{2/5\gamma}$. Αποκλείοντας το r_0 από αυτή την έκφραση από τη λειτουργία $\rho(r_0 t)$, προκύπτει η ασυμπτωτική συμπεριφορά για την πυκνότητα

$$\rho \sim r^{-3/(\gamma-1)} t^{-6/5(\gamma-1)} \quad \text{καθώς } r \rightarrow 0.$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά για τη θερμοκρασία είναι

$$T \sim \frac{p_c}{\rho} \sim r^{-3/(\gamma-1)} t^{(6/5)(2-\gamma)/(\gamma-1)} \quad \text{as } r \rightarrow 0.$$

§26. Κατά προσέγγιση συμπεριφορά μίας ισχυρής έκρηξης

Οι βασικές σχέσεις που διέπουν μία ισχυρή έκρηξη μπορούν να προκύψουν από μία απλή κατά προσέγγιση μέθοδο που πρότεινε ο Chernyi [7]. Ας υποθέσουμε πως η συνολική μάζα του αερίου που περιβάλλεται από το κύμα της έκρηξης βρίσκεται συγκεντρωμένη σε ένα λεπτό στρώμα πίσω από την επιφάνεια του μπροστινού τμήματος. Η πυκνότητα μέσα στο στρώμα είναι σταθερή και ίση με την πυκνότητα πίσω από το μπροστινό τμήμα $\rho_1 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \rho_0$. Το πάχος του στρώματος Δr καθορίζεται από τη διατήρηση της μάζας

$$4\pi R^2 \Delta r \rho_1 = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0; \quad \Delta r = \frac{R \rho_0}{3 \rho_1} = \frac{R \gamma - 1}{3 \gamma + 1}.$$

Για παράδειγμα, για $\gamma = 1.3$, $\Delta r/R = 0.0435$.

Αφού το στρώμα είναι πολύ λεπτό, η ταχύτητα του αερίου εσωτερικά παραμένει περίπου σταθερή και συμπίπτει με την ταχύτητα u_1 του αερίου πίσω από το μπροστινό τμήμα. Ας υποθέσουμε πως η πυκνότητα στο στρώμα είναι αόριστα μεγάλη και το πάχος είναι, αντίστοιχα, απειροελάχιστα μικρό, ενώ η μάζα είναι πεπερασμένη και ίση με τη μάζα M που εμπεριέχεται στη σφαίρα της ακτίνας R : $M = 4/3\pi R^3 \rho_0$. Δηλώνουμε την πίεση στην ενδότερη πλευρά του στρώματος ως p_c και την αφήνουμε να είναι το κλάσμα α της πίεσης πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος $p_c = \alpha p_1$. Ο νόμος του Νεύτωνα για τη μάζα M γίνεται

$$\frac{d}{dt} M u_1 = 4\pi R^2 p_c = 4\pi R^2 \alpha p_1.$$

Η μάζα $M = 3/4\pi R^3 \rho_0$ είναι μια λειτουργία του χρόνου έτσι ώστε να διαφοροποιούμε την ορμή $M u_1$, σε σχέση με το χρόνο, παρά την ταχύτητα. Μία εξωτερική δύναμη $4\pi R^2 p_c$ δρα στη μάζα από το εσωτερικό, αφού p_c είναι η δύναμη ανά μονάδα περιοχής της επιφάνειας. Η εξωτερική δύναμη ισούται με 0 αφού η αρχική πίεση του αερίου αγνοείται. Εκφράζοντας u_1 και p_1 σύμφωνα με την ταχύτητα του μπροστινού τμήματος $D = dR/dt$, και χρησιμοποιώντας το (1.111), προκύπτει ότι

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} R^3 D = \alpha D^2 R^2.$$

Σημειώνοντας ότι

$$\frac{d}{dt} = \frac{dR}{dt} \frac{d}{dR} = D \frac{d}{dR}$$

και ολοκληρώνοντας την εξίσωση, βρίσκουμε

$$D = a R^{-3(1-\alpha)},$$

όπου a είναι μία σταθερά της ολοκλήρωσης.

Για να καθορίσουμε τις ποσότητες a και α χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Η κινητική ενέργεια του αερίου είναι ισοδύναμη με $E_k = M u_1^2/2$. Η εσωτερική ενέργεια βρίσκεται συγκεντρωμένη στην «κοιλότητα» που συνδέεται με το απειροελάχιστο λεπτό στρώμα, και η πίεση στο εσωτερικό αυτής της κοιλότητας ισούται με p_c (αυτό σημαίνει ότι αν και η περισσότερη μάζα εμπεριέχεται στο στρώμα, η «κοιλότητα» περιέχει επίσης κάποια μικρή ποσότητα από το ρευστό). Η εσωτερική ενέργεια είναι $E_T = [1 / (\gamma - 1)] 4/3\pi R^3 p_c$. Επομένως,

$$E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{4\pi R^3}{3} p_c + M \frac{u_1^2}{2}$$

Γράφοντας ξανά $p_c = \alpha p_1$, εκφράζοντας το u_1 σε συνάρτηση με το D , και μετά αντικαθιστώντας την έκφραση ως προς D προκύπτει ότι

$$E = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a^2 \left[\frac{2\alpha}{\gamma^2 - 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)^2} \right] R^{3-6(1-\alpha)}.$$

Αφού η ενέργεια έκρηξης E είναι σταθερή, ο εκθέτης της μεταβλητής R πρέπει να εξαφανιστεί. Αυτό δίνει $\alpha = 1/2$. Η εξίσωση λοιπόν που προκύπτει ορίζει τη σταθερά a

$$a = \left[\frac{3}{4\pi} \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)^2}{(3\gamma - 1)} \right]^{1/2} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/2}.$$

Από την εξίσωση $D \sim R^{-3(1-\alpha)}$ με $\alpha = 1/2$ και από το (1.111) προκύπτουν οι ακόλουθες οικείες σχέσεις:

$$D \sim R^{-3/2}, \quad \rho_1 \sim R^{-3}, \quad u_1 \sim R^{-3/2}, \quad R \sim t^{2/5}.$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση ως προς a μπορούμε να βρούμε το συντελεστή αναλογίας στη σχέση $R \sim t^{2/5}$ από

$$R = \left(\frac{5}{2} a\right)^{2/5} t^{2/5} = \left[\frac{75}{16\pi} \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)^2}{(3\gamma - 1)}\right]^{1/5} \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5} = \xi_0 \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5}.$$

Ας συγκρίνουμε την κατά προσέγγιση λύση με την ακριβή λύση. Η πίεση στο κέντρο που προέρχεται από την κατά προσέγγιση μέθοδο είναι το ήμισυ της πίεσης πίσω από το μπροστινό μέρος του κύματος, άσχετα από τη συγκεκριμένη αναλογία θερμότητας. Στην ακριβή λύση $p_c = 0.35\rho_1$ για $\gamma = 1.4$ και $p_c = 0.41\rho_1$ για $\gamma = 1.2$. Οι κατά προσέγγιση αριθμητικές τιμές του συντελεστή ξ_0 στην εξίσωση για την ακτίνα του κύματος (1.110) είναι : $\xi_0 = 1.014$ για $\gamma=1.4$ και $\xi_0=0.89$ για $\gamma= 1.2$. Στην ακριβή λύση και για τις ίδιες τιμές των γ_0 , $\xi_0 = 1.033$ και 0.89 , αντίστοιχα. Άρα είναι φανερό ότι η κατά προσέγγιση λύση αποφέρει αρκετά ακριβή αποτελέσματα.

Έννοιες κοντά σε αυτές που περιγράψαμε παραπάνω χρησιμοποιήθηκαν από τον Kompaneets [13] σε μία αντιμετώπιση του προβλήματος μίας ισχυρής έκρηξης σε μία ανομοιογενή ατμόσφαιρα. Αυτό το πρόβλημα εξετάζεται στο Μέρος 5 του Κεφαλαίου XII.

§27. Παρατηρήσεις για το σημείο έκρηξης με την αντιπίεση

Σε μεταγενέστερο στάδιο της διάδοσης ενός κύματος έκρηξης, όταν η πίεση πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος γίνεται συγκρίσιμη με την πίεση μπροστά από αυτό (για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι, όταν ρ_1 γίνεται της τάξεως $[(\gamma + 1) / (\gamma - 1)] \rho_0$, βλέπε υποσημείωση στην §25), η πανομοιότυπη λύση στο πρόβλημα της ισχυρής έκρηξης δεν ισχύει πια. Σε αυτό το στάδιο η διαδικασία δεν είναι πλέον πανομοιότυπη, επειδή τώρα το πρόβλημα περιέχει κλίμακες χαρακτηριστικού μήκους και χρόνου, οι οποίες μπορούν να δημιουργηθούν από την συνολική ενέργεια έκρηξης E και τις παραμέτρους χαρακτηρίζοντας το ατάραχο αέριο. Η κλίμακα μήκους μπορεί να αντιπροσωπευτεί από την ακτίνα $r_0 = (E/\rho_0)^{1/3}$ μίας σφαίρας, της οποίας η αρχική ενέργεια είναι συγκρίσιμη στην ενέργεια έκρηξης. Η χρονική κλίμακα δίνεται από το χρόνο $t_0 = r_0/c_0$ που χρειάζεται το κρουστικό κύμα να διανύσει την απόσταση, όπου $c_0 = (\gamma\rho_0/\rho_0)^{1/2}$. Άρα, για παράδειγμα, οι κλίμακες μήκους και χρόνου για μία έκρηξη στον ατμοσφαιρικό αέρα ($\rho_0 = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, $\rho_0 = 1 \text{ atm}$, και $c_0 = 330 \text{ m/sec}$) με απελευθέρωση ενέργειας $E=10^{21} \text{ ergs}$ (περίπου ίση με την ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη 20,000 τόνων TNT) είναι $r_0 = 1 \text{ km}$ και $t_0 = 3 \text{ sec}$.

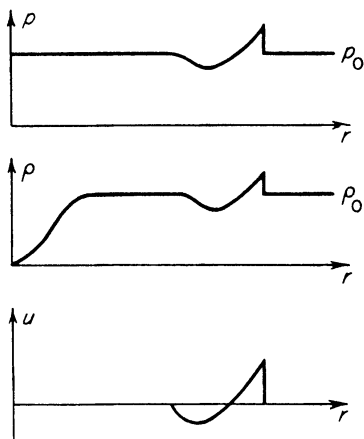
Η λύση στο πρόβλημα της διάδοσης μίας έκρηξης με αντιπίεση έχει προκύψει σε πολλά σημεία [8-10] ολοκληρώνοντας αριθμητικά τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Τα

αριθμητικά αποτελέσματα, πίνακες και γραφήματα των κατανομών των μεταβλητών ροής σε διαφορετικές χρονικές στιγμές μπορούν να βρεθούν σε αυτές τις αναφορές και στο βιβλίο του Sedon [5]. Θα περιορίσουμε εδώ τη συζήτησή μας σε κάποιες ποιοτικές πτυχές της διαδικασίας.

Το κρουστικό κύμα γίνεται αυξανόμενα ασθενές με το χρόνο και η πίεση στο μπροστινό του τμήμα ασυμπτωτικά πλησιάζει την αρχική ατμοσφαιρική πίεση.

Υπάρχει μία αντίστοιχη μείωση στην πυκνότητα πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος και στην ταχύτητα διάδοσής του, η οποία ασυμπτωτικά πλησιάζει την ταχύτητα του ήχου c_0 . Η σχέση που διέπει τη διάδοση του κύματος $R \sim t^{2/5}$ σταδιακά τροποποιείται στη σχέση $R = c_0 t$. Όταν η πίεση στην κεντρική περιοχή έρχεται κοντά στην ατμοσφαιρική, η εξάπλωση του αερίου στην περιοχή αυτή σταματάει και το αέριο σταματάει να κινείται. Η περιοχή στην οποία το αέριο κινείται βρίσκεται πιο κοντά στο μπροστινό τμήμα του κύματος, το οποίο σταδιακά μετατρέπεται σε σφαιρικό κύμα ακουστικού τύπου. Η περιοχή συμπίεσης σε ένα τέτοιο κύμα ακολουθείται από μία περιοχή αραιώσης, μετά από την οποία ο αέρας φτάνει στην τελική του μορφή. Το τελικό στάδιο των στρωμάτων που είναι μακριά από το κέντρο και μέσα από τα οποία μόνο ένα ασθενές κρουστικό κύμα έχει περάσει διαφέρει λίγο από την αρχική ατάραχη κατάσταση. Οι κατανομές της πίεσης, της ταχύτητας και της πυκνότητας σε σχέση με την ακτίνα απεικονίζονται στο Σχ.1.51.

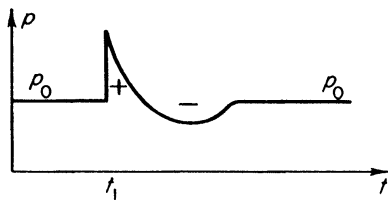
Εικόνα



Σχ.1.51. Κατανομές της πίεσης, της ταχύτητας και της πυκνότητας σε ένα μεταγενέστερο στάδιο μίας έκρηξης όταν το κρουστικό κύμα έχει γίνει ασθενές.

Εάν ακολουθήσουμε την αλλαγή πίεσης με το χρόνο σε μια ορισμένη μεγάλη απόσταση από το κέντρο της έκρηξης, θα πάρουμε την εικόνα που δείχνει το Σχ.1.52. Τη στιγμή t_1 , όταν το προστινικό τμήμα του κύματος πλησιάζει ένα δεδομένο σημείο, η πίεση υφίσταται μία ασυνεχή απότομη αλλαγή πάνω από την ατμοσφαιρική, ύστερα μειώνεται κάτω από την ατμοσφαιρική (οι φάσεις αρνητικής και θετικής ενέργειας), και τελικά επιστρέφει στην αρχική της τιμή.

Εικόνα

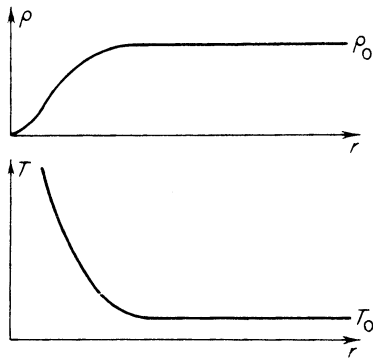


Σχ.1.52. Η χρονική εξάρτηση της πίεσης σε ένα συγκεκριμένο σημείο μακριά από την πηγή της έκρηξης.

Όπως σημειώθηκε προωτέρα, η τελική κατάσταση του αερίου μακριά από την πηγή της έκρηξης είναι σχεδόν η ίδια με την ατάραχη κατάσταση. Σε μικρές αποστάσεις, όμως, το αέριο στο τελικό του στάδιο, είναι πολύ αραιωμένο και θερμαίνεται σε υψηλή θερμοκρασία. Αυτό γίνεται εξαιτίας του ότι ένα ισχυρό κρουστικό κύμα πέρασε μέσα από τα σωματίδια που τοποθετούνται κοντά στο κέντρο και των οποίων η εντροπία είναι πολύ υψηλότερη από την αρχική εντροπία. Οι ασυμπτωτικές κατανομές των τελικών πυκνοτήτων

και θερμοκρασιών σε σχέση με την ακτίνα στη γειτνίαση του κέντρου μπορούν να βρεθούν αν αναλογιστούμε την ισεντροπική εξάπλωση στη ατμοσφαιρική πίεση των σωματιδίων που θερμαίνονται στο μπροστινό τμήμα ενός ισχυρού κρουστικού κύματος. Επαναλαμβάνοντας του υπολογισμούς που είδαμε στο τέλος της §25, με ρ_c να μην είναι πλέον λειτουργία του t αλλά μία σταθερά $\rho_c = \rho_0$, βρίσκουμε τις ίδιες κατανομές σε σχέση με την ακτίνα για $r \rightarrow 0$ όπως συνέβη στο πρόβλημα ισχυρής έκρηξης, $\rho \sim r^{3/(\gamma-1)}$, $T \sim r^{-3/(\gamma-1)}$. Οι τελικές κατανομές των $\rho(r)$ και $T(r)$ απεικονίζονται στο Σχ.1.53.

Εικόνα



Σχ.1.53. Τελικές κατανομές πυκνότητας και ταχύτητας ($t \rightarrow \infty$) για μια ισχυρή έκρηξη (θεωρώντας ότι η διαδικασία είναι αδιαβατική)

Ένα σημαντικό κλάσμα της ενέργειας της έκρηξης (που εξαρτάται από γ , αλλά της τάξεως διάφορων χρόνων 10%) συγκεντρώνεται στην περιοχή θερμότητας. Αυτή η ενέργεια καταναλώθηκε κατά τη θέρμανση του αερίου κατά τη διάρκεια της κρουστικής συμπίεσης. Η ενέργεια που απομένει απομακρύνεται από το κρουστικό κύμα και διαλύεται στο χώρο. Στο Κεφάλαιο IX θα συζητήσουμε την πορεία της ενέργειας πίσω από την κεντρική περιοχή (ο αέρας σε αυτή την περιοχή ψύχεται από εκπομπή ακτινοβολίας).

Το τελευταίο στάδιο της διάδοσης ενός κύματος έκρηξης έχει εξεταστεί θεωρητικά και πειραματικά από πολλούς συγγραφείς. Οι οριακές σχέσεις της διάδοσης του κύματος σε μεγάλες αποστάσεις βρέθηκαν από τον Landau [11]. Ιδιαίτερης πρακτικής σημασίας είναι η εμπειρική φόρμουλα του Sadovskii [12], που εκφράζει την πίεση πίσω από το μπροστινό τμήμα του κύματος ως μία λειτουργία της απόστασης από το κέντρο έκρηξης. Σημειώνουμε ότι η σχέση ομοιότητας $p_1 = f(E^{1/3}/R)$ είναι επίσης έγκυρη σε μεταγενέστερο στάδιο της

διάδοσης του κρουστικού κύματος, όταν $p_1 - p_0$ είναι ίδιας τάξεως με p_0 ή μικρότερης.

§28. Ξαφνική ισεντροπική εξάπλωση ενός σφαιρικού σύννεφου αερίου σε κενό

Ας εξετάσουμε ένα άλλο πρόβλημα αεροδυναμικής, το πρόβλημα της ξαφνικής εξάπλωσης ενός σύννεφου αερίου στο κενό. Αυτό το πρόβλημα θα αναλυθεί με περισσότερη λεπτομέρεια στο Κεφάλαιο VIII. Φανταζόμαστε ένα αέριο που έχει αρχικά έναν σφαιρικό όγκο της ακτίνας R_0 . Υποθέτουμε ότι αρχικά το αέριο έχει την ομοιόμορφη πυκνότητα ρ_0 και βρίσκεται σε αδράνεια (η συνολική μάζα του αερίου είναι $M = 4/3\pi R_0^3 \rho_0$). Η αρχική πίεση στο σύννεφο θεωρείται επίσης ότι είναι σταθερή και ίση p_0 , έτσι ώστε η συνολική ενέργεια να είναι $E = [1/(\gamma - 1)] 4/3\pi R_0^3 p_0$ (θεωρείται ότι το αέριο είναι τέλει με σταθερές συγκεκριμένες ταχύτητες). Το χάρισμα που περιέχει το αέριο απομακρύνεται σε $t=0$ και το σύννεφο ξεκινάει να εξαπλώνεται στο κενό.

Αφού το χάρισμα απομακρυνθεί, η ασυνέχεια διασπάται ένα κύμα αραιώσης διαδίδεται μέσα από το αέριο προς το κέντρο. Τα μπροστινά στρώματα του σύννεφου εξαπλώνονται στο κενό με τη μέγιστη ταχύτητα $u_{max} = [2/(\gamma - 1)] c_0$. Όταν το κύμα αραιώσης φτάσει στο κέντρο, όλο το ρευστό έχει υποστεί διαταραχή και αρχίζει να κινείται. Κατά τη διαδικασία της ξαφνικής ισεντροπικής εξάπλωσης, γίνεται κάποια λειτουργία από το αέριο που εξαπλώνεται, το αέριο επιταχύνει και η αρχική του εσωτερική ενέργεια E μετατρέπεται σταδιακά σε κινητική ενέργεια της ακτινικής κίνησης. Η κίνηση είναι ισεντροπική, αφού η αρχική σταθερή πίεση και πυκνότητα κατά μήκος της ακτίνας αποφέρει την εντροπία σε όλα τα σωματίδια που είναι πανομοιότυπα. Μπορούμε να δούμε (βλ. [15]) ότι κατά τη διάρκεια της ισεντροπικής εξάπλωσης οι διαταραχές που ξεκινούν από την ενδοτερη περιοχή του σφαιρικού σύννεφου δεν φτάνουν το όριο. Έτσι αυτή η επιφάνεια κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_{max} = [2/(\gamma - 1)] c_0$. Η σχέση που διέπει την κίνηση του ορίου του σύννεφου είναι $R = [2/(\gamma - 1)] c_0 t + R_0$. Δεν είναι δυνατόν να βρούμε μία ακριβή αναλυτική λύση σε αυτό το πρόβλημα, από τη στιγμή που η ροή δεν είναι πανομοιότυπη και απαιτείται η λύση ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων· αυτό μπορεί να γίνει αναλυτικά μόνο στις πολύ λίγες περιπτώσεις εξαιρέσης. Μπορούμε να θεωρούμε ότι το πρόβλημα δεν είναι πανομοιότυπο σημειώνοντας ότι περιέχει μία χαρακτηριστική κλίμακα μήκους, δηλαδή, την αρχική ακτίνα του σύννεφου R_0 .

Αυτό το πρόβλημα, όμως, έχει την ιδιότητα ότι η ροή πλησιάζει ασυμπτωτικά μία πανομοιότυπη με το χρόνο. Ο ρόλος της αρχικής παραμέτρου μήκους R_0 γίνεται όλο και πιο ασήμαντος κατά τη διάρκεια του τελευταίου σταδίου υψηλής εξάπλωσης όπου $R \gg R_0$, αφού η κλίμακα μήκους R_0 γίνεται πολύ μικρή σε σύγκριση με την χαρακτηριστική κλίμακα ροής, την ακριβή ακτίνα R του σφαιρικού σύννεφου. Η ροή «ξεχνάει» την αρχική ακτίνα R_0 με το χρόνο. Όμως, δεν ξεχνούν όλα τα τμήματα της λύσης της ροής εντελώς τις αρχικές συνθήκες, και αυτή είναι μία απόδειξη για το γεγονός ότι η ροή δεν είναι πανομοιότυπη τουλάχιστον σε κάποιες σημαντικές πτυχές.

Ας εξετάσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης καθώς $t \rightarrow \infty$. Σε αυτό το όριο η δύναμη που δρα σε μία μονάδα μάζας του αερίου πλησιάζει το μηδέν. Η δύναμη $-(1/\rho) \partial p/$

∂_r έχει την τάξη του μεγέθους του $-p/\rho R$, όπου p και ρ είναι η πίεση και πυκνότητα τη στιγμή t , κατά μέσο όρο πάνω από τη μάζα. Αλλά η μέση πίεση p είναι ανάλογη στην αναλογία της θερμικής ενέργειας του συνολικού αερίου στον όγκο του $p \sim E_{\text{heat}}/R^3$ και είναι σε κάθε περίπτωση πιο μικρή από E/R^3 . Η μέση πυκνότητα $\rho \sim 1/R^3$, και επομένως η δύναμη τείνει προς το μηδέν τουλάχιστον τόσο γρήγορα όσο $1/R$.

Στην πραγματικότητα, καθώς $R \rightarrow \infty$ η δύναμη μειώνεται πιο γρήγορα από $1/R$ αφού το θερμικό κομμάτι της ενέργειας μειώνεται κατά τη διάρκεια της ισηντροπικής εξάπλωσης: $E_{\text{heat}} \sim M\varepsilon \sim Mp/\rho \sim \rho^{\gamma-1} \sim R^{-3(\gamma-1)}$. Έτσι, $p \sim E_{\text{heat}}/R^3 \sim R^{-3\gamma}$, και η δύναμη μειώνεται καθώς $R^{-3\gamma+2} = R^{-1-3(\gamma-1)}$. Η εξίσωση της κίνησης για τα όρια $t \rightarrow \infty$ και $R \rightarrow \infty$ παίρνει την ασυμπτωτική μορφή

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \sim \frac{1}{R^{1+3(\gamma-1)}} \rightarrow 0, \quad (1.114)$$

Δηλαδή, οι ταχύτητες των σωματιδίων του ρευστού πλησιάζουν σταθερές τιμές και $u = r/t$. Η ζαφνική εξάπλωση γίνεται αδρανειακή καθώς $t \rightarrow \infty$. Αυτό προκύπτει επίσης αμέσως και από τη συνθήκη της διατήρησης της συνολικής ενέργειας E , η οποία συνίσταται από τη θερμική και κινητική ενέργεια. Η θερμική μερίδα της ενέργειας, όμως, πλησιάζει το μηδέν ασυμπτωτικά κατά τη διάρκεια της εξάπλωσης και, συνεπώς, η κινητική ενέργεια πλησιάζει το E . Η μέση (ενεργός τιμή) ταχύτητα της μάζας του αερίου πλησιάζει ασυμπτωτικά τη σταθερή οριακή τιμή $u_\infty = (2E/M)^{1/2}$, που είναι ένα συγκεκριμένο αριθμητικό κλάσμα του ορίου της ταχύτητας

$$u_{\text{max}} = \frac{2}{\gamma-1} c_0 = \frac{2}{\gamma-1} \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \frac{2}{\gamma-1} [\gamma(\gamma-1)\varepsilon_0]^{1/2} \\ = \left(\frac{4\gamma}{\gamma-1} \frac{E}{M} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right)^{1/2} u_\infty$$

(για παράδειγμα, σε ένα μονατομικό αέριο $\gamma=5/3$ και $u_{\text{max}}=2.9u_\infty$). Βάζοντας την ασυμπτωτική λύση για την ταχύτητα $u=r/t$ στην εξίσωση της συνέχειας, βλέπουμε ότι ικανοποιείται από τη λειτουργία της πυκνότητας

$$\rho = \frac{f(r/t)}{t^3}, \quad (1.115)$$

όπου f είναι μία εντελώς αυθαίρετη λειτουργία του r/t . Αφού η ακτίνα του σφαιρικού ορίου είναι $R = u_{\text{max}}t$, μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτή την εξίσωση με την παρακάτω μορφή

$$\rho = \frac{\varphi(r/R)}{R^3}.$$

Η ασυμπτωτική κατανομή της πυκνότητας σε σχέση με την ακτίνα δεν αλλάζει με το χρόνο, αλλάζει με την ίδια αναλογία καθώς αυξάνεται το R , παραμένοντας ίδια. Υπό την απουσία οποιασδήποτε δύναμης, το κάθε σωματίδιο θα κινηθεί με μία σταθερή αδρανειακή ταχύτητα, δεν θα υπάρχει ανακατανομή της μάζας, και η όψη της πυκνότητας θα

παραμένει αμετάβλητη. Το γεγονός ότι το πρόβλημα δεν είναι εσωτερικά πανομοιότυπο μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε την ασυμπτωτική κατανομή της πυκνότητας από τις εξισώσεις για την ασυμπτωτική ροή, καθώς αυτές οι εξισώσεις επιτρέπουν κάθε τύπο κατανομής. Η κατανομή της πυκνότητας δημιουργείται σε προγενέστερο στάδιο, όταν οι δυνάμεις της πίεσης δρουν στο αέριο. Μόλις το αέριο εξαπλωθεί με δύναμη, η κατανομή «παγώνει». Η κατανομή της πυκνότητας εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και μπορεί να βρεθεί μόνο με βάση μία ολοκληρωμένη λύση του προβλήματος.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, είναι απίθανο να βρούμε μία ακριβή αναλυτική λύση στο πρόβλημα με τις αρχικές συνθήκες $\rho_0(r) = \text{const}$ και $\rho_0(r) = \text{const}$. Μπορούμε μόνο να δημιουργήσουμε μία λύση κατά προσέγγιση με βάση το ανάλογο και λυτό επίπεδο πρόβλημα της ξαφνικής εξάπλωσης σε κενό του στρώματος του αερίου με μία πεπερασμένη μάζα και σταθερές αρχικές κατανομές. Αυτή η κατά προσέγγιση λύση παρουσιάζεται στο βιβλίο του Stanjukovich [15] και έχει τη μορφή:

$$\rho = \frac{A}{R^3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{3 - \gamma}{2(\gamma - 1)}, \quad R = u_{\max} t.$$

Αυτή η λύση είναι έγκυρη μόνο για τις ολοκληρωτικές τιμές $\alpha=0, 1, 2, 3, \dots$, οι οποίες ανταποκρίνονται, αντίστοιχα, στις τιμές της συγκεκριμένης αναλογίας θερμότητας $\gamma=3, 5/3, 7/5, 9/7, \dots$. Η σταθερά A μπορεί να καθοριστεί από τη διατήρηση της μάζας ολοκληρώνοντας την πυκνότητα ως προς το συνολικό όγκο της σφαίρας. Η κατάλληλη εξίσωση παρουσιάζεται στο [15].

§29. Συνθήκες για την πανομοιότυπη ξαφνική εξάπλωση ενός σύννεφου αερίου στο κενό

Υπάρχει μία τάξη λύσεων στο πρόβλημα της ξαφνικής εξάπλωσης ενός σφαιρικού σύννεφου αερίου στο κενό, όπου οι κατανομές όλων των μεταβλητών ροής είναι πανομοιότυπες, και είναι από την αρχή λειτουργίες του r/R , όπου R είναι η ακτίνα του σφαιρικού σύννεφου. Οι αρχικές κατανομές των μεταβλητών ροής σε σχέση με την ακτίνα, που οδηγούν σε αυτές τις λύσεις, δεν μπορούν να τεθούν αυθαίρετα αλλά πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες. Η παραπάνω ομάδα λύσεων χαρακτηρίζεται από μία γραμμική κατανομή ταχύτητας σε σχέση με την ακτίνα (αυτές οι λύσεις αναλύθηκαν από τον Sedon [5]),

$$u = rF(t) = \dot{R} \frac{r}{R}, \quad (1.116)$$

όπου η λειτουργία του χρόνου $F(t)$ εκφράζεται με όρους της ταχύτητας του σφαιρικού ορίου του σύννεφου $R=Dr/dt^*$. Βάζοντας αυτή την έκφραση στην εξίσωση της κίνησης προκύπτει

ότι

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho r (\dot{F} + F^2), \quad (1.117)$$

*Σημείωση του εκδότη. Οι ασυμπτωτικές λύσεις της §28 είναι αυτής της μορφής, με $F=t^{-1}$.

που μπορεί να ικανοποιηθεί από τις κατανομές των p και ρ σε σχέση με την ακτίνα κατά τη διάρκεια όλης της διαδικασίας, συμπεριλαμβανομένου του αρχικού χρόνου. Μόνο κάτω από αυτή τη συνθήκη η λύση θα ανήκει στην ομάδα υπό εξέταση.

Ας εξετάσουμε τώρα δύο συγκεκριμένα παραδείγματα τέτοιων λύσεων.

1. Η πυκνότητα ρ είναι σταθερή σε στο συνολικό όγκο και ανεξάρτητη από τη μεταβλητή

$$\rho = f(t) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (1.118)$$

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι ο προσδιορισμός της πυκνότητας και της ταχύτητας με τη μορφή των (1.118) και (1.116) αυτόματα ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας για μία αυθαίρετη λειτουργία $R(t)$. Εντάσσοντας το (1.118) στο (1.117) και ολοκληρώνοντας, προκύπτει μία κατανομή πίεσης παραβολική σε σχέση με την ακτίνα

$$p = p_0(t) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (1.119)$$

Που ύστερα θα πρέπει να προσδιοριστεί ως μία αρχική συνθήκη με σκοπό να ικανοποιεί το (1.117). Είναι φανερό πως το πρόβλημα δεν είναι ισηντροπικό, αφού η πυκνότητα όλων των σωματιδίων είναι ίδια ενώ οι πιέσεις είναι διαφορετικές. Η ένταξη των p και ρ στην εξίσωση της εντροπίας δίνει μία σχέση ανάμεσα στις άγνωστες λειτουργίες: την πίεση στο κέντρο $p_0(t)$ και την ακτίνα του σφαιρικού σύννεφου $R(t)$

$$p_0(t) = A\rho^\gamma = A \left(\frac{3M}{4\pi} \right)^\gamma \frac{1}{R^{3\gamma}}, \quad (1.120)$$

όπου A είναι μία σταθερά που εξαρτάται από την αρχική εντροπία στο κέντρο του σύννεφου. Τέλος, εντάσσοντας τα (1.118), (1.119) και (1.120) στην εξίσωση της κίνησης (1.117) αποκτούμε μία διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως που διέπει την κίνηση του ορίου του σύννεφου $R(t)$. Λύνοντας αυτή την εξίσωση με τις αρχικές συνθήκες $t=0$, $R=R_0$, και $\dot{R} = \dot{R}_0$, μπορούμε να βρούμε την ολοκληρωμένη λύση στο πρόβλημα.

Συγκεκριμένα, μπορούμε να υποθέσουμε πως το αέριο είναι αρχικά αδρανές, με \dot{R}_0 . Εάν ενδιαφερόμαστε για το ασυμπτωτικό αποτέλεσμα καθώς $t \rightarrow \infty$, μπορούμε να θέσουμε $\dot{R} = \text{σταθερό}$ όπου u_1 είναι η οριακή ταχύτητα του σφαιρικού ορίου (η λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνει, όπως είναι αναμενόμενο, $\dot{R} \rightarrow \text{σταθερό}$ καθώς $t \rightarrow \infty$). Η τιμή

του u_1 μπορεί να υπολογισθεί από τη συνθήκη της διατήρησης της ενέργειας χρησιμοποιώντας τις ακτινικές κατανομές των ρ και u και σημειώνοντας πως η συνολική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια καθώς $t \rightarrow \infty$. Έτσι προκύπτει ότι

$$u_1 = \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{2E}{M}\right)^{1/2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} u_\infty, \quad (1.121)$$

όπου u_∞ ορίζεται ξανά ως η τετράγωνη ρίζα του τετραγώνου της ταχύτητας κατά μέσο όρο σε σχέση με τη συνολική μάζα

$$u_\infty = (\bar{u}^2)^{1/2} = (2E/M)^{1/2}.$$

2. Η εντροπία όλων των σωματιδίων είναι ίδια (ισεντροπική ροή), έτσι ώστε $S(r,t)=const$, $p/\rho^\gamma=A=const$ (A είναι η ισεντροπική σταθερά). Η εισαγωγή του $p=A\rho^\gamma$ στο (1.117) δίνει τις εξής κατανομές πίεσης και πυκνότητας:

$$\rho = \rho_c \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (1.122)$$

$$p = A\rho_c^\gamma \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (1.123)$$

οι οποίες σαφώς πρέπει να οριστούν ως αρχικές συνθήκες.

Η πυκνότητα στο κέντρο ρ_c μπορεί να καθοριστεί από την ολοκλήρωση της πυκνότητας ως προς τον όγκο και εξισώνοντας το ολοκλήρωμα που προκύπτει ως προς τη συνολική μάζα. Όπως συνήθως, αυτό δίνει $\rho_c \sim M/R^3$, με ένα συντελεστή αναλογικότητας ο οποίος είναι λειτουργία του γ . Η εξίσωση (1.117) μετατρέπεται ύστερα από την ενσωμάτωση των (1.122) και (1.123) σε εξίσωση δεύτερης τάξεως στο $R(t)$. Η οριακή τιμή για την ταχύτητα του ορίου u_1 μπορεί να προκύψει από τη διατήρηση της ενέργειας

$$E = \int_0^R \frac{\rho u^2}{2} 4\pi r^2 dr,$$

εάν η έκφραση για ρ που δίνεται από το (1.122) και το $u=u_1 r/R$ ενταχθούν στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Αυτό αποφέρει τη σχέση μεταξύ u_1 και $u_\infty(2E/M)^{1/2}$ με όρους μιας λειτουργίας του γ , όπως ήταν ο συντελεστής αναλογικότητας. Και οι δύο συντελεστές δίνονται από πεπερασμένα ολοκληρώματα που υπολογίζονται με τη βοήθεια λειτουργιών γάμμα. Ας παρουσιάσουμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα. Για $\gamma = 5/3$, $p_c = 3.4\bar{p}$, $u_1 = 1.64u_\infty$; για $\gamma=4/3$, $p_c=6.6\bar{p}$, $u_1 = 1.92u_\infty$, όπου $\bar{p} = M^{1/3}\pi R^3$ είναι η μέση πυκνότητα ως προς τον όγκο. Στο όριο, όπου $t \rightarrow \infty$, $R \approx u_1 t^*$.

Σημειώνουμε ότι ο Imshennik [16] εξετάζει το πρόβλημα της ζαφνικής ισοθερμικής

εξάπλωσης ενός σύννεφου αερίου στο κενό. Σημειώνουμε επίσης το έργο του Nemchinov [18] το οποίο ασχολείται με την ζαφνική εξάπλωση σε κενό ενός αερίου στο οποίο πραγματοποιείται σταδιακή απελευθέρωση ενέργειας.

* Η αναφορά [17] περιέχει μερικές αριθμητικές λύσεις στο πρόβλημα της ζαφνικής ισεντροπικής εξάπλωσης ενός σύννεφου αερίου στο κενό για ομοιογενείς αρχικές συνθήκες και $\gamma=5/3$ (σε $t=0$ το αέριο στη σφαίρα είναι σε αδράνεια με καμία ποικιλομορφία στην πυκνότητα σε σχέση με την ακτίνα). Δυστυχώς, η αναφορά δεν παρουσιάζει την ασυμπτωτική κατανομή της πυκνότητας και δίνει μόνο το σχέδιο του $\rho_c(t)$. Είναι φανερό ότι η λειτουργία πλησιάζει το $\rho_c \sim 1/t^3$ με το χρόνο, και ο συντελεστής σε αυτή την οριακή σχέση γίνεται υψηλότερος από την πανομοιότυπη λύση που περιγράφεται παραπάνω από έναν παράγοντα μόνο του 1.122.

II. ΘΕΡΜΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΟΥΜΕΝΗ ΘΕΡΜΙΚΗ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΩΜΑ

§1. Εισαγωγή και βασικές έννοιες

Έως τώρα οι υψηλές θερμοκρασίες της τάξεως δεκάδων και εκατοντάδων χιλιάδων ή ακόμα και εκατομμυρίων βαθμών ήταν το κύριο ενδιαφέρον στη μελέτη της αστροφυσικής. Η θεωρία της ακτινοβολούμενης μεταφοράς και της ακτινοβολούμενης θερμικής ανταλλαγής δημιουργήθηκε και αναπτύχθηκε με σκοπό να κατανοηθούν διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα σε αστρικά σώματα και να εξηγηθεί η φωτεινότητα στα αστέρια. Σε μεγάλη έκταση, αυτή η θεωρία μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και σε άλλα συστήματα υψηλής θερμοκρασίας που εξετάζονται από τη σύγχρονη φυσική και τη μηχανική. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μας απασχολήσουν οι αρχές της θερμικής ακτινοβολίας, η θεωρία της ακτινοβολούμενης μεταφοράς ενέργειας, και η θεωρία της φωτεινότητας των θερμαινόμενων σωμάτων. Επίσης θα βρούμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση ενός ρευστού παρουσία ενός πεδίου ισχυρής ακτινοβολίας. Στην παρουσίαση αυτού του υλικού θα μας απασχολήσουν κυρίως οι γήινες εφαρμογές και θα δώσουμε έμφαση σε συγκεκριμένα θέματα τα οποία είναι ελάχιστης ή και μηδενικής σημασίας στην αστροφυσική*.

Ας ανακαλέσουμε τις βασικές έννοιες και ορισμούς της θερμικής ακτινοβολίας. Η ακτινοβολία χαρακτηρίζεται από τη συχνότητα ν της ταλάντωσης ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και από το μήκος κύματος λ που σχετίζεται με τη συχνότητα και την ταχύτητα του

φωτός c από τη σχέση $\lambda=c/\nu$. Σε ό,τι ακολουθήσει θα ασχοληθούμε με μέσα των οποίων οι δείκτες αραιώσης είναι πολύ κοντά στην ενότητα και επομένως μπορούμε να θεωρούμε ότι c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, ίση με $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Από την άποψη της κβαντικής μηχανικής η ακτινοβολία μπορεί να θεωρηθεί ως μία συλλογή από σωματίδια, φωτόνια, ή φωτεινά κβάντα, των οποίων η ενέργεια σχετίζεται με τη συχνότητα του ανάλογου πεδίου από τη σταθερά Planck $h=6.62 \cdot 10^{27}$ erg·sec. Είναι συνηθισμένο να εκφράζουμε ένα κβάντο ενέργειας $\dot{h}\nu$ σε ηλεκτρονικά βολτ. Ένα ηλεκτρονικό βολτ είναι η ενέργεια που αποκτάται από ένα ηλεκτρόνιο που κινείται μέσα σε μία πιθανή διαφορά ενός βολτ. 1 ηλεκτρονιοβόλτ (1 ev) είναι ίσο με $1.6 \cdot 10^{-12}$ erg. Η θερμοκρασία επίσης συχνά εκφράζεται με ηλεκτρονιοβόλτ. Η ενέργεια του $Kt=1.6 \cdot 10^{-12}$ erg, όπου $k=1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/deg είναι η σταθερά Boltzmann, αντιστοιχεί στη θερμοκρασία T ενός ηλεκτρονιοβόλτ. Γενικά, ορίζουμε ως εξής:

$$T_{ev} = \frac{kT^{\circ}}{1.6 \cdot 10^{-12}} = \frac{T^{\circ}}{11,600};$$

έτσι, 1 ev θερμοκρασίας είναι ίσο με 11,600°K.

*Πιο λεπτομερής συζήτηση για τη θεωρία της ακτινικής μεταφοράς και της εφαρμογής της στην αστροφυσική δίνονται από τους Ambartsumian et al. [1], Unsold[2] και Mustel' [3]. Στη κβαντική θεωρία είναι συνηθισμένο να χρησιμοποιούμε τη γωνιακή συχνότητα $\omega=2\pi\nu$ αντί για τη συχνότητα ν και, επομένως, να χρησιμοποιούμε την αλλαγμένη σταθερά Planck $h=h/2\pi$. Σε αυτό το βιβλίο θα ακολουθήσουμε την εφαρμογή της θεωρίας της ακτινοβολούμενης μεταφοράς και της αστροφυσικής και θα χρησιμοποιήσουμε τις ποσότητες ν και h .

Η κλίμακα ηλεκτρομαγνητικής συχνότητας (ή μήκους κύματος), που επίσης ορίζεται και ως φάσμα ακτινοβολίας, χωρίζεται κανονικά σε πολλές ζώνες που έχουν πάρει συγκεκριμένα ονόματα: ραδιοκύμα, υπέρυθρη, ορατή, υπεριώδης, ακτινογραφία και ακτίνες γ. Αυτός ο διαχωρισμός είναι εντελώς ιστορικός στη φύση και δεν έχει καμία λογική φυσική βάση. Μερικές ενδιάμεσες συχνότητες είναι ακόμα πιο δύσκολο να ενταχθούν σε οποιοδήποτε τμήμα του φάσματος. Μία εξαίρεση είναι το περισσότερο ή λιγότερο ορισμένο ορατό τμήμα του φάσματος: $\lambda \sim 7500-4000 \text{ \AA}$, $h\nu \sim 1.7-3.13$ ev. Έχει αποδειχθεί από τη θεωρία της θερμικής ακτινοβολίας ότι για την θερμοδυναμική ισορροπία ανάμεσα στην ακτινοβολία και στο σώμα η συχνότητα της κατανομής των ενεργειών έχει ένα καθαρά ορισμένο μέγιστο, που αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο ν που σχετίζεται με τη θερμοκρασία από τη σχέση $h\nu = 2.82kT$. Μπορούμε να πούμε ότι η πιο χαρακτηριστική συχνότητα για ένα σώμα σε μία θερμοκρασία $T= h\nu/2.82 k$ είναι ν έτσι το εύρος της συχνότητας αμέσως προσφέρει κάποια ιδέα σχετικά με τις θερμοκρασίες που ανταποκρίνονται σε κάθε δεδομένη φασματική περιοχή. Η ορατή ακτινοβολία είναι χαρακτηριστική για σώματα των οποίων οι θερμοκρασίες είναι της τάξεως 7000-13,000°K.

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ή τα φωτεινά κβάντα χαρακτηρίζονται όχι μόνο από την ενέργειά τους αλλά και από την ορμή τους. Η απόλυτη τιμή της ορμής ενός κβάντος $h\nu$

είναι ίση με $h\nu/c$. Η κατεύθυνση της κίνησης ενός κβάντος δίνεται από το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τη ροή στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο – το διάνυσμα Poynting. Ένα πεδίο ακτινοβολίας στο χώρο περιγράφεται από την κατανομή της εντονότητας της ακτινοβολίας σε σχέση με τη συχνότητα, στο χώρο, και στην κατεύθυνση της ακτινοβολούμενης μεταφοράς ενέργειας. Εάν θεωρήσουμε την ακτινοβολία ως μία συλλογή από σωματίδια – φωτόνια – τότε το πεδίο μπορεί να περιγραφεί από μία λειτουργία της κατανομής του φωτονίου που είναι, σε μεγάλη έκταση, ανάλογη με οποιαδήποτε άλλη λειτουργία κατανομής σωματιδίου. Ας πούμε πως $f(\nu, r, \Omega, t) d\nu dr d\Omega$ είναι ο αριθμός των φωτονίων στο διάστημα συχνότητας ν σε $\nu + d\nu$, που περιέχεται στο χρόνο t στο στοιχείο όγκου dr για το σημείο r , και έχει κατεύθυνση κίνησης μέσα στο στοιχείο στερεάς γωνίας $d\Omega$ για μία μονάδα διανύσματος Ω . Η λειτουργία f ονομάζεται λειτουργία κατανομής. Κάθε φωτόνιο περιέχει μία ενέργεια $h\nu$ και κινείται με ταχύτητα c .

*Οι γραμμικές διαστάσεις του στοιχείου του όγκου dr θεωρούνται πως είναι πιο μεγάλες από το μήκος κύματος λ .

Έτσι η ποσότητα

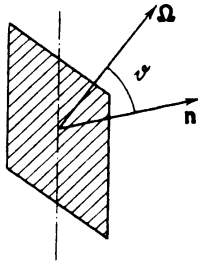
$$I_\nu(r, \Omega, t) d\nu d\Omega = h\nu c f(\nu, r, \Omega, t) d\nu d\Omega$$

αντιπροσωπεύει την ενέργεια ακτινοβολίας στο φασματικό διάστημα $d\nu$, που περνά ανά μονάδα χρόνου σε μονάδα περιοχής, με κατευθύνσεις της διάδοσης ενέργειας που περιέχεται στο στοιχείο της στερεάς γωνίας $d\Omega$ για ένα διάνυσμα Ω . Η περιοχή τοποθετείται στο σημείο r και προσανατολίζεται κάθετα προς το Ω . Η ποσότητα I_ν ονομάζεται ένταση της φασματικής ακτινοβολίας. Το πεδίο ακτινοβολίας ορίζεται πλήρως από τον προσδιορισμό είτε της λειτουργίας I_ν είτε της f . Η ενέργεια ακτινοβολίας της συχνότητας ν που περιλαμβάνεται σε μία μονάδα του φασματικού διαστήματος συχνότητας και που περιέχεται σε μία μονάδα όγκου στο σημείο r σε χρόνο t ορίζεται ως η φασματική πυκνότητα της ενέργειας ακτινοβολίας και δίνεται από

$$U_\nu(\mathbf{r}, t) = h\nu \int_{(4\pi)} f d\Omega = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_\nu d\Omega. \quad (2.1)$$

Ας φανταστούμε μία περιοχή με το φυσιολογικό διάνυσμα n . Τα φωτόνια περνούν μέσα από αυτή την περιοχή από τα αριστερά προς τα δεξιά και από τα δεξιά προς τα αριστερά. Η ποσότητα της ενέργειας ακτινοβολίας στο διάστημα $d\nu$, που περνά από τα αριστερά προς τα δεξιά ανά μονάδα χρόνου, είναι ίση με $h\nu c \int_{2\pi} f \cos \vartheta d\Omega$ όπου ϑ είναι η γωνία ανάμεσα στις κατευθύνσεις της κίνησης των φωτονίων Ω και φυσιολογικού n · το ολοκλήρωμα είναι στο δεύτερο ημισφαίριο, έχοντας αυτή την περιοχή ως βάση (Σχ.2.1). Το διάστημα στο δεξί ημισφαίριο είναι ίσο με την ενέργεια που προκύπτει από τα δεξιά προς τα αριστερά. Η διαφορά μεταξύ των ατομικών ροών από τα αριστερά στα δεξιά και από τα δεξιά στα αριστερά δίνει το πλέγμα της φασματικής ροής της ενέργειας ακτινοβολίας μέσα στη δεδομένη περιοχή.

Εικόνα



Σχ.2.1. Απεικόνιση της παραγωγής της σχέσης για τη ροή της ενέργειας ακτινοβολίας.

Αφού το ϑ έχει διαφορετικά σημάδια στο δεξί και αριστερό ημισφαίριο, η φασματική ροή της ενέργειας ακτινοβολίας μέσα σε μία περιοχή με φυσιολογικό n είναι

$$S_v(\mathbf{r}, t, \mathbf{n}) = h\nu c \int_{(4\pi)} f \cos \vartheta d\Omega = \int_{(4\pi)} I_v \cos \vartheta d\Omega, \quad (2.2)$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι σε όλη την στερεά γωνία. Η ροή ενέργειας είναι ένα διάνυσμα ποσότητας. Η εξίσωση (2.2) αντιπροσωπεύει το στοιχείο του διανύσματος ροής στην κατεύθυνση n . Το διάνυσμα της φασματικής ροής της ενέργειας δίνεται από

$$\mathbf{S}_v = \int I_v \boldsymbol{\Omega} d\Omega, \quad (2.3)$$

όπου $\boldsymbol{\Omega}$ είναι η μονάδα διανύσματος στην κατεύθυνση της κίνησης των φωτονίων.

Για μία ισοτροπική κατανομή της ακτινοβολίας, όπου η λειτουργία κατανομής f και η λειτουργία έντασης I_v είναι ανεξάρτητες της κατεύθυνσης $\boldsymbol{\Omega}$, η πυκνότητα της ενέργειας ακτινοβολίας είναι ίση με

$$U_v = 4\pi h\nu f = \frac{4\pi}{c} I_v. \quad (2.4)$$

Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει ροή και $S_v=0$ τα στοιχεία σε κάθε κατεύθυνση είναι ίσα με μηδέν (αφού ίσες ποσότητες ενέργειας μεταφέρονται και στις δύο αντίθετες κατευθύνσεις).

Η ολοκληρωμένη ένταση, πυκνότητα και ροή της ακτινοβολίας προκύπτουν από τις αντίστοιχες φασματικές τους από την ολοκλήρωση ως προς το φάσμα συνολικής συχνότητας

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu, \quad U = \int_0^{\infty} U_{\nu} d\nu, \quad \mathbf{S} = \int_0^{\infty} \mathbf{S}_{\nu} d\nu. \quad (2.5)$$

Ας εισάγουμε τώρα την έννοια των οπτικών χαρακτηριστικών ενός υλικού*. Η ποσότητα της ενέργειας της συχνότητας ν που εκπέμπεται από μία μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου σε μία μονάδα φασματικού διαστήματος συχνότητας ονομάζεται ο συντελεστής εκπομπής J_{ν} . Συνήθως, εξαιτίας του τυχαίου προσανατολισμού και της χαοτικής κίνησης των ατόμων, των μορίων, κλπ., τα αέρια ακτινοβολούν ομοιόμορφα σε όλες τις κατευθύνσεις (ισοτροπικά). Επομένως, η ποσότητα της ενέργειας που ακτινοβολείται σε μία στερεά γωνία $d\Omega$ σε κάθε κατεύθυνση είναι απλά ίση με $j_{\nu} d\Omega = J_{\nu} d\Omega/4\pi$ (j_{ν} είναι ανά μονάδα στερεάς γωνίας). Μερικές φορές ο συντελεστής εκπομπής δεν ορίζεται ανά μονάδα όγκου, αλλά ανά μονάδα μάζας. Για να προκύψουν οι αντίστοιχες ποσότητες, είναι προφανώς απαραίτητο να χωρίσουμε το J_{ν} ή το j_{ν} από την πυκνότητα ρ .

Όταν μία δέσμη φωτός περνάει μέσα από την ουσία μετριάζεται. Αυτή η μείωση γίνεται εξαιτίας της απορρόφησης των φωτονίων αλλά και του σκεδασμού τους, δηλαδή, της απόκλισης από την αρχική τους κατεύθυνση. Η σχετική εξασθένιση μίας παράλληλης δέσμης κατά μήκος μίας διαδρομής dx είναι ανάλογη σε αυτό το στοιχείο, από το νόμο

$$dI_{\nu} = -\mu_{\nu} I_{\nu} dx. \quad (2.6)$$

Διασχίζοντας την απόσταση x , από το σημείο $x=0$ στο σημείο x , η ένταση της δέσμης μειώνεται εκθετικά σύμφωνα με τη σχέση

$$I_{\nu} = I_{\nu 0} \exp \left[- \int_0^x \mu_{\nu} dx \right]. \quad (2.7)$$

Ο συντελεστής απόσβεσης (ολικής απορρόφησης) μ_{ν} συνίσταται από το συντελεστή της απορρόφησης $\kappa_{\nu a}$ † και από το συντελεστή σκεδασμού $\kappa_{\nu s}$.

* Εδώ και σε ό,τι θα ακολουθήσει οι όροι «φως», «κβάντα φωτός» ή «φωτόνια» και «οπτικές» ιδιότητες θα εφαρμοστούν όχι μόνο στο ορατό κομμάτι του φάσματος αλλά και σε οποιαδήποτε συχνότητα.

† Δεν εξετάζουμε εδώ τη διαδικασία της κινητοποιημένης εκπομπής, η οποία θα συζητηθεί αργότερα, και θα δηλώσουμε το συντελεστή πραγματικής απορρόφησης με $\kappa_{\nu a}$.

Οι αντίστροφες αυτών των ποσοτήτων είναι οι μέσες ελεύθερες διαδρομές του φωτός. Έτσι, $l_v = 1/\mu_v$ είναι η συνολική μέση ελεύθερη διαδρομή, $l_{va} = 1/\kappa_{va}$ είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή απορρόφησης, και $l_{vs} = 1/\kappa_{vs}$ είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή σκεδασμού ($l_v = (l_{va}^{-1} + l_{vs}^{-1})^{-1}$). Αυτές οι μέσες ελεύθερες διαδρομές χαρακτηρίζουν την απόσβεση ανά μονάδα μήκους μίας δέσμης φωτός σχετική με την αντίστοιχη διαδικασία. Οι συντελεστές που ορίζονται ανά μονάδα μάζας παρά ανά μονάδα διαδρομής ορίζονται ως συντελεστές μάζας. Οι συντελεστές μάζας είναι ίσοι με μ_v/ρ , κ_{va}/ρ , και κ_{vs}/ρ , αντίστοιχα. Η μέση ελεύθερη διαδρομή αντιπροσωπεύει μία μέση απόσταση που διανύεται από ένα φωτόνιο πριν από την απορρόφησή του, το σκεδασμό του κλπ. Όμως, το φωτόνιο κινείται με ταχύτητα c , και έτσι η μέση διάρκεια «ζωής» ενός φωτονίου σε μια δεδομένη διαδικασία είναι ίση με το μήκος της διαδρομής που χωρίζεται από την ταχύτητα του φωτός l/c . Για παράδειγμα, εάν ένα χάρισμα φωτονίων dx/l_{va} απορροφάται κατά μήκος ενός στοιχείου διαδρομής dx , τότε $c dt/l_{va}$ φωτόνια απορροφούνται σε χρόνο dt . Η απορρόφηση μιας δέσμης φωτός περιγράφεται από το προϊόν του συντελεστή απορρόφησης και το μήκος της διαδρομής. Η αδιάστατη ποσότητα

$$\tau_v = \int_0^x \mu_v dx, \quad d\tau_v = \mu_v dx \quad (2.8)$$

ονομάζεται το οπτικό πάχος ενός στρώματος x σε σχέση με τη συχνότητα ν . Μία δέσμη φωτός που περνά μέσα από μία μονάδα οπτικού πάχους απορροφάται από έναν παράγοντα του e . Στην περίπτωση που ο σκεδασμός των φωτονίων μπορεί να αγνοηθεί, το οπτικό πάχος γίνεται

$$\tau_v = \int_0^x \kappa_{va} dx, \quad d\tau_v = \kappa_{va} dx. \quad (2.9)$$

§2. Μηχανισμοί της εκπομπής, απορρόφησης και σκεδασμού του φωτός στα αέρια

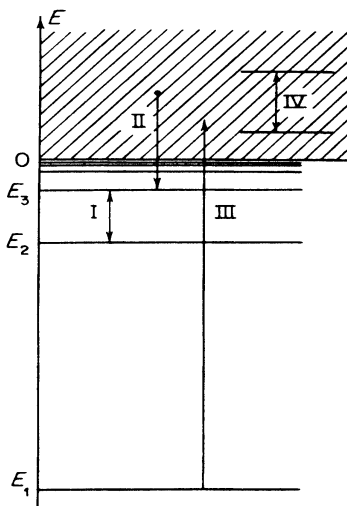
Τα φωτόνια εκπέμπονται και απορροφώνται κατά τη διάρκεια ηλεκτρονικών μεταβιβάσεων από μία κατάσταση ενέργειας σε μία άλλη στα ατομικά συστήματα (άτομα, μόρια, ιόντα, πλάσματα ηλεκτρονίων). Η απορρόφηση ενός φωτονίου συνοδεύεται από τη διέγερση ενός ατόμου, μορίου, κλπ. Για να αποβάλει ένα φωτόνιο το άτομο πρέπει να έχει διεγερθεί το άτομο χάνει την ενέργεια διέγερσης κατά τη μεταφορά της στο φωτόνιο που εκπέμπει. Όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής εκπομπής τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των διεγερμένων ατόμων, και έτσι τόσο μεγαλύτερη είναι η θερμοκρασία.

Το Σχ.2.2 δείχνει ένα διάγραμμα που απεικονίζει το επίπεδο της ενέργειας του πιο βασικού ατομικού συστήματος και αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο, που απαρτίζουν το άτομο υδρογόνου. Ως συνήθως, το μηδενικό επίπεδο ενέργειας διαχωρίζει την ελεύθερη από την περιοχή σύνδεσης του ηλεκτρονίου με την ενέργεια στις περιοχές

σύνδεσης αρνητική. Στις περιοχές σύνδεσης η ενέργεια του ηλεκτρονίου μπορεί να πάρει μόνο συγκεκριμένες διακριτές τιμές. Η ενέργεια της επίπεδης κατάστασης του συστήματος πρωτόνιο-ηλεκτρόνιο είναι $E_1 = -13.5$ ev, και η απόλυτη τιμή της ισοδυναμεί με τον πιθανό ιονισμό του ατόμου του υδρογόνου. Στην ελεύθερη κατάσταση με θετική ενέργεια (ιόν υδρογόνου) η ενέργεια του ηλεκτρονίου μπορεί να πάρει κάθε τιμή και η ενέργεια του φάσματος είναι συνεχής.

Η ενέργεια του φάσματος των πολύπλοκων ατομικών συστημάτων δεν διαφέρει ποιοτικά από το φάσμα των βασικών συστημάτων. Όλες οι ηλεκτρονικές μεταβιβάσεις μπορούν να χωριστούν (όπως γίνεται και στην αστροφυσική) σε τρεις ομάδες χρησιμοποιώντας το κριτήριο της συνέχειας ή της διακριτότητας του φάσματος της ενέργειας στην αρχική και τελική κατάσταση του ατομικού συστήματος. Αυτές οι ομάδες είναι δεσμευμένες, δεσμευμένες-ελεύθερες και ελεύθερες (όλες οι επιτρεπόμενες μεταβιβάσεις απεικονίζονται με βέλη στο Σχ.2.2).

Εικόνα



Σχ.2.2. Διάγραμμα του επιπέδου ενέργειας για ένα σύστημα πρωτονίων-ηλεκτρονίων. $E_1 = -13.5$ ev είναι η επίπεδη κατάσταση του ατόμου υδρογόνου, E_2 και E_3 είναι τα επίπεδα με αρχικούς αριθμούς κβάντων $n=2$ και 3 . Το $E=0$ αντιστοιχεί στο όριο μεταξύ των διακριτών και συνεχών φασμάτων. Τα βέλη δείχνουν τους επιτρεπόμενους τύπους μεταβιβάσεων: I-

δεσμευμένη-δεσμευμένη, II-σύλληψη ηλεκτρονίου από ένα φωτόνιο, III- ιονισμός ατόμου και IV- ελεύθερη-ελεύθερη μεταβίβαση.

Οι δεσμευμένες – δεσμευμένες μεταβιβάσεις αντιστοιχούν στις ηλεκτρονικές μεταβιβάσεις στα άτομα, μόρια, και ιόντα από ένα διακριτό επίπεδο σε ένα άλλο. Εξ ορισμού της διακριτότητας των επιπέδων ενέργειας των δεσμευμένων ηλεκτρονικών σταδίων, αυτές οι μεταβιβάσεις καταλήγουν στην εκπομπή ή την απορρόφηση γραμμικών φασμάτων. Στα μόρια όπου οι ηλεκτρονικές μεταβιβάσεις συνοδεύονται από αλλαγές στους τρόπους δόνησης και περιστροφής, προκύπτουν ζώνες φάσματος*.

Κατά τη διάρκεια μίας δεσμευμένης – ελεύθερης μεταβίβασης που προκύπτει από την απορρόφηση φωτονίων, το ηλεκτρόνιο αποκτά μία ενέργεια που ξεπερνά την ενέργεια σύνδεσης στο άτομο, μόριο ή ιόν και γίνεται ελεύθερη ` λαμβάνει χώρα ο φωτοϊονισμός. Η υπερβολή της ενέργειας φωτονίων ως προς την ενέργεια σύνδεσης μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του ελεύθερου ηλεκτρονίου. Οι αντίστροφες μεταβιβάσεις, δηλαδή, η σύλληψη ελεύθερων ηλεκτρονίων από ιόντα σε ένα ιονισμένο αέριο (φωτοανασυνδυασμός), καταλήγουν στην εκπομπή φωτονίων. Αφού η ενέργεια ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου μπορεί να πάρει κάθε θετική τιμή η δεσμευμένη-ελεύθερη μεταβίβαση έχει σταθερά φάσματα απορρόφησης και εκπομπής.

* Οι μεταβιβάσεις στα μόρια μερικές φορές σχετίζονται με τις αλλαγές στα στάδια δόνησης και περιστροφής, χωρίς καμία αλλαγή στις ηλεκτρονικές καταστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση τα φωτόνια που εκπέμπονται ή που απορροφώνται έχουν πολύ χαμηλή ενέργεια, που βρίσκεται στο υπέρυθρο τμήμα του φάσματος ` σε θερμοκρασίες της τάξεως πολλών χιλιάδων βαθμών και πάνω ο ρόλος τους είναι σημαντικός.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι κανένα αυθαίρετο φωτόνιο δεν μπορεί να έχει φωτοηλεκτρική επίδραση σε ένα άτομο σε μία δεδομένη κατάσταση. Η ενέργεια του φωτονίου πρέπει να ξεπερνάει την ενέργεια σύνδεσης του ηλεκτρονίου σε αυτή την κατάσταση. Όμως, ακόμα και ένα φωτόνιο πολύ χαμηλής ενέργειας μπορεί να αποσύρει ένα ηλεκτρόνιο από ένα ικανοποιητικά ισχυρά διεγερμένο άτομο, επειδή η ενέργεια σύνδεσης του ηλεκτρονίου γίνεται αυξανόμενα μικρότερη καθώς ο βαθμός της διέγερσης αυξάνεται.

Ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο που κινείται μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο ενός ιόντος σε ένα ιονισμένο αέριο (πλάσμα) μπορεί ή να αποβάλει ένα φωτόνιο χωρίς να χάσει όλη την κινητική του ενέργεια και να παραμείνει ελεύθερο, ή μπορεί να απορροφήσει ένα φωτόνιο και να αποκτήσει μία επιπλέον κινητική ενέργεια. Αυτές οι ελεύθερες-ελεύθερες μεταβιβάσεις ονομάζονται συνήθως bremsstrahlung (από το γερμανικό: Bremse- σπάω,

και Strahlung- ακτινοβολία), αφού το ηλεκτρόνιο ελαττώνει ταχύτητα μέσα στο πεδίο του ιόντος και χάνει ένα μέρος της ενέργειάς του κατά τη διαδικασία ακτινοβολίας. Το Bremsstrahlung έχει ένα σταθερό φάσμα εκπομπής και απορρόφησης. Το Bremsstrahlung μπορεί επίσης να συμβεί όταν ένα ηλεκτρόνιο περνά από ένα πεδίο ουδέτερου ατόμου. Σε αντίθεση με το πεδίο ιόντος, το πεδίο του ουδέτερου ατόμου μειώνεται γρήγορα με την απόσταση, και επομένως το ηλεκτρόνιο πρέπει να περάσει πολύ κοντά στο άτομο για να εξασφαλιστεί η εκπομπή ή απορρόφηση του φωτός. Η πιθανότητα bremsstrahlung με τη συμμετοχή ενός ουδέτερου ατόμου είναι πολύ μικρότερη από την πιθανότητα αυτής της διαδικασίας με ένα ιόν.

Οι συντελεστές της συνδεδεμένης –συνδεδεμένης και συνδεδεμένης – ελεύθερης απορρόφησης είναι ανάλογοι στον αριθμό N των απορροφούμενων ατόμων ανά μονάδα όγκου του αερίου. Η τιμή του συντελεστή ανά απορροφούμενο άτομο εξαρτάται μόνο από τις εσωτερικές ιδιότητες του ατόμου, το βαθμό διέγερσης και τη συχνότητα του φωτονίου. Είναι ένα χαρακτηριστικό του ίδιου του ατόμου. Αυτή η ποσότητα $\kappa_{\nu a}/N = \sigma_{\nu}$ έχει τις διαστάσεις ενός μήκους στο τετράγωνο (το $\kappa_{\nu a}^{-1}$ έχει τις διαστάσεις του μήκους και το N^{-1} του μήκους στον κύβο) και ονομάζεται εγκάρσι τομή της απορρόφησης. Το φυσικό του νόημα μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητό από τις ακόλουθες σκέψεις. Υποθέτουμε πως μία παράλληλη δέσμη φωτός συχνότητας ν και μία περιοχή εγκάρσιας τομής κινούνται στο απορροφούμενο αέριο. Ας αντικαταστήσουμε κάθε άτομο με έναν αδιαφανή δίσκο που τοποθετείται κάθετα στην κατεύθυνση της δέσμης. Μπορούμε τώρα να δούμε την απορρόφηση ως μία διαδικασία σύλληψης των φωτονίων τα οποία χτυπούν τους δίσκους. Εάν η περιοχή κάθε δίσκου είναι ίση με σ_{ν} και ο αριθμός των δίσκων (ατόμων) ανά μονάδα όγκου είναι N , τότε η συνολική περιοχή όλων των δίσκων είναι ένας κύλινδρος αερίου πάχους $d\chi$ και η ενιαία βασική περιοχή θα είναι ίση με $N\sigma_{\nu} d\chi$. Επιλέγουμε το $d\chi$ αρκετά μικρό ώστε να μη συγκρούονται οι δίσκοι στο στρώμα του αερίου. Τότε, προφανώς, το χώρισμα των φωτονίων που παγιδεύτηκαν κατά το πέρασμα του φωτός μέσα από το στρώμα αυτό είναι ίσο με την αναλογία αδιαφανούς περιοχής $N\sigma_{\nu} d\chi$ στην συνολική περιοχή. Έχουμε $dI_{\nu} = -I_{\nu}N\sigma_{\nu}d\chi$. Ανακαλώνοντας τον ορισμό του συντελεστή απορρόφησης (εξισώσεις (2.6)) βλέπουμε ότι $\kappa_{\nu} = N\sigma_{\nu}$, και ότι μπορούμε να αναγνωρίσουμε την περιοχή εγκάρσιας τομής σ_{ν} ως περιοχή του αδιαφανούς δίσκου που αντιστοιχεί στο απορροφούμενο άτομο. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να μιλήσουμε για την εγκάρσια τομή ενός ατόμου ή κάθε άλλου σωματιδίου για το σκεδασμό των φωτονίων.

Οι συνδεδεμένες – συνδεδεμένες μεταβιβάσεις προκαλούνται από φωτόνια με μία αυστηρά καθορισμένη ενέργεια $h\nu$, που βρίσκονται σε στενά όρια. Αυτή η ενέργεια αντιστοιχεί στη διαφορά μεταξύ δύο επιπέδων ενέργειας μέσα στο άτομο. Αυτή η απορρόφηση ορίζεται επομένως επιλεκτική απορρόφηση. Οι εγκάρσιες τομές απορρόφησης «απομονωμένων» ατόμων για αυτά τα «επιλεγμένα» φωτόνια είναι υπερβολικά μεγάλες. Για το ορατό φως είναι της τάξεως 10^{-9} cm^2 στο κέντρο της φασματικής γραμμής (στη μέση μίας στενής ζώνης της επιλεγμένης απορρόφησης) *. Αυτές οι εγκάρσιες τομές αντιστοιχούν σε πολύ σύντομες μέσες ελεύθερες διαδρομές φωτονίων. Για παράδειγμα, για μία πυκνότητα $N \sim 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ (η τάξη της πυκνότητας του ατμοσφαιρικού αέρα) η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός φωτονίου θα ήταν της τάξεως $l = 1/\kappa = 1/N\sigma \sim 10^{-10} \text{ cm}$.

Οι εγκάρσιες τομές για μία συνδεδεμένη – ελεύθερη απορρόφηση, πχ., για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, είναι πολύ μικρότερες, της τάξεως 10^{-17} ως 10^{-20} cm^2 ($l \sim 10^2$ σε 10 cm για $N \sim 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). Αυτές οι τιμές εφαρμόζονται, βεβαίως, μόνο σε εκείνα τα

φωτόνια που έχουν τη δυνατότητα να απομακρύνουν ένα ηλεκτρόνιο από το άτομο, φωτόνια των οποίων οι ενέργειες είναι μεγαλύτερες από την ενέργεια σύνδεσης ενός ηλεκτρονίου.

Στις ελεύθερες – ελεύθερες μεταβιβάσεις ένα φωτόνιο μπορεί να απορροφάται μόνο εάν το ηλεκτρόνιο περνά πολύ κοντά στο ιόν τη στιγμή της απορρόφησης ` πρέπει να «συγκρουστεί» με το ιόν (ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο δεν έχει τη δυνατότητα να απορροφήσει ένα φωτόνιο, μπορεί μόνο να χρησιμεύσει ως κέντρο σκεδασμού). Έτσι, ο συντελεστής της απορρόφησης *bremmsstrahlung* είναι ανάλογος στον αριθμό των ιόντων καθώς επίσης και στον αριθμό των ελεύθερων ηλεκτρονίων που περιέχονται ανά μονάδα όγκου $\kappa_{bremms} \sim N + N_e$. Μπορούμε να μιλήσουμε για την εγκάρσια τομή ενός ιόντος $\sigma_{bremms} = \kappa_{bremms} / N_+$ (με $N_+ \sim N_e$) μόνο περιορισμένα αφού αυτή η εγκάρσια τομή είναι ανάλογη στην πυκνότητα των ελεύθερων ηλεκτρονίων. Προκύπτει, όμως, ότι ο συντελεστής απορρόφησης *bremmsstrahlung* στην περίπτωση μερικού ιονισμού είναι ανάλογος μόνο στην πρώτη δύναμη της πυκνότητας του αερίου, αφού $N + N_e$ είναι ανάλογο στην πυκνότητα. Για τα φωτόνια που υπάρχουν πιο συχνά σε δεδομένη θερμοκρασία, ο συντελεστής απορρόφησης *bremmsstrahlung* είναι περίπου τάξεως μεγέθους μικρότερου από το συντελεστή της συνδεδεμένης – ελεύθερης απορρόφησης. Για πλήρη ιονισμό, όμως, όταν μόνο ο πυρήνας και τα ηλεκτρόνια είναι παρόντα στο αέριο (η συνδεδεμένη – ελεύθερη απορρόφηση είναι εντελώς απύσα), ο συντελεστής ο συντελεστής απορρόφησης *bremmsstrahlung* είναι ανάλογος στο τετράγωνο της πυκνότητας.

Τα φωτόνια σκεδαζονται κυρίως από ελεύθερα ηλεκτρόνια † (εάν η ενέργεια του φωτονίου είναι μεγάλη σε σχέση με την ενέργεια σύνδεσης ενός ηλεκτρονίου στο άτομο, τότε ένα τέτοιο ηλεκτρόνιο σύνδεσης μπορεί επίσης να θεωρείται ως «ελεύθερο»). Τα φωτόνια ενδιάμεσης ενέργειας, δηλαδή, με ενέργειες πολύ μικρότερες από την υπόλοιπη ενέργεια του ηλεκτρονίου $m_e c^2 = 500\text{eV}$ (αυτές είναι οι συνηθισμένες ενέργειες φωτονίου στη γκάμα θερμοκρασιών που εξετάζουμε) σκεδαζονται χωρίς καμία αλλαγή στην ενέργεια. Η εγκάρσια τομή σκεδασμού ορίζεται εδώ από την κλασσική ακτίνα ηλεκτρονίου r_0 και είναι ίση με $\sigma_{\chi} = 8/3 \pi r_0^2 = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ (αυτή είναι η λεγόμενη σκεδαστική εγκάρσια τομή Thomson). Αυτή η εγκάρσια τομή είναι αρκετά μικρή και αντιστοιχεί στην σκεδαστική μέση ελεύθερη διαδρομή $l_s \sim 10^5 \text{ cm}$ για μία πυκνότητα ηλεκτρονίου $N_e \sim 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Εκτιμώντας τη σκεδαστική μέση ελεύθερη διαδρομή φωτονίων υψηλής ενέργειας, για τις οποίες συνθήκες όλα τα ηλεκτρόνια στα άτομα και τα μόρια μπορούν να θεωρηθούν ελεύθερα, είναι κατανοητό ότι N_e δηλώνει το συνολικό αριθμό ηλεκτρονίων στα άτομα. Για παράδειγμα, στον αέρα σε σταθερή πυκνότητα $N_{molec} = 2.67 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, ενώ ο συνολικός αριθμός ηλεκτρονίων είναι περίπου 14.4 φορές μεγαλύτερος. Η σκεδαστική μέση ελεύθερη διαδρομή ισούται με 37 μέτρα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η σκεδαστική τομή για φωτόνια πολύ μεγάλης ενέργειας (ενέργειες που μετριούνται σε MeV) είναι διαφορετική από την εγκάρσια τομή Thomson.

Η σκεδαστική μέση ελεύθερη διαδρομή ενός φωτονίου που ανήκει σε ένα συνεχές φάσμα σε ένα μερικώς ιονισμένο αέριο είναι πάντα πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μέση ελεύθερη διαδρομή απορρόφησης. Ο σκεδασμός μπορεί να εξεταστεί μόνο σε ένα αραιωμένο και πλήρως ιονισμένο αέριο, όταν η απορρόφηση *bremmsstrahlung*, που είναι ανάλογη σε N^2 , γίνεται μικρή. Ο σκεδασμός του φωτός υπό γήινες συνθήκες μπορεί πάντα να αγνοηθεί σε σχέση με την απορρόφηση*. Επομένως, στην ακόλουθη ανάλυσή μας θα βάλουμε τον εκθέτη «α» στις ποσότητες κ , l , και πρέπει να κατανοηθεί ότι αυτές οι

ποσότητες δηλώνουν το συντελεστή απορρόφησης και τη μέση ελεύθερη διαδρομή απορρόφησης, αντίστοιχα.

Αυτό συνοψίζει την όλη έρευνα των μηχανισμών αλληλεπίδρασης ανάμεσα στην ακτινοβολία και την ύλη. Λεπτομερείς εκφράσεις για τους συντελεστές απορρόφησης δεν απαιτούνται τώρα. Το Κεφάλαιο V είναι αφιερωμένο στη λεπτομερή εξέταση αυτών των προβλημάτων.

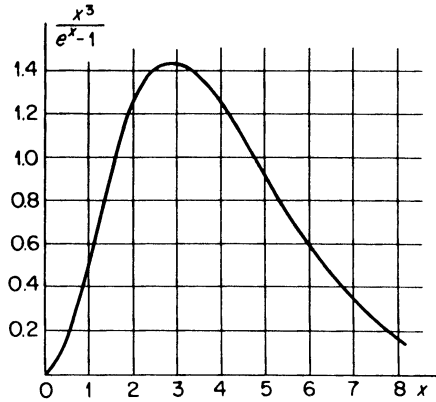
*Υπό τις συνθήκες που συναντάμε στην αστροφυσική, ο σκεδασμός είναι μερικές φορές ακόμα μεγαλύτερος από την απορρόφηση.

§3. Ακτινοβολία ισορροπίας και η έννοια του τέλειου μαύρου σώματος

Ας φανταστούμε ένα ορισμένο μέσο σε θερμοδυναμική ισορροπία σε σταθερή ταχύτητα T . Υπό σταθερές συνθήκες το πεδίο ακτινοβολίας θα είναι επίσης σε ισορροπία. Η θερμική ισορροπία ακτινοβολίας χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι ο αριθμός των φωτονίων ή η ποσότητα της ενέργειας ακτινοβολίας που εκπέμπεται από το μέσο ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα όγκου σε ένα δεδομένο διάστημα συχνότητας dn και σε δεδομένη διαφορική στερεά γωνία $d\Omega$ είναι ακριβώς ίση με τον αριθμό των απορροφημένων φωτονίων ή με την ενέργεια ακτινοβολίας που απορροφά το μέσο στα ίδια διαστήματα dn και $d\Omega$. Το πεδίο ισορροπίας ακτινοβολίας είναι ισοτροπικό, είναι ανεξάρτητο και από την κατεύθυνση και από τις επιμέρους ιδιότητες του μέσου ` το πεδίο είναι μία γενική λειτουργία της συχνότητας και της θερμοκρασίας.

Η φασματική λειτουργία της πυκνότητας της ενέργειας για ακτινική ισορροπία U_{ν} προέκυψε από τον Planck αρκετά νωρίς στην ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας. Ο πιο φυσικός τρόπος να προκύψει αυτή η λειτουργία είναι να εφαρμόσουμε τους νόμους της κβαντικής στατιστικής οι οποίοι διέπουν τη συμπεριφορά ενός «φωτογονικού αερίου» (βλ., για παράδειγμα, [4]).

Εικόνα



Σχ.2.3. Η λειτουργία Planck $\chi^3(e^x - 1)^{-1}$, όπου $\chi = h\nu/kT$.

Η ποσότητα της ενέργειας ανά μονάδα όγκου που ακτινοβολείται σε ισορροπία με μία συχνότητα ν ανά μονάδα διαστήματος συχνότητας είναι

$$U_{\nu p} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2.10)$$

Σαν αποτέλεσμα της ισοτροπίας, η φασματική ένταση για την ακτινική ισορροπία είναι*

$$I_{\nu p} = \frac{cU_{\nu p}}{4\pi} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2.11)$$

Η κατανομή ενέργειας για την ακτινική ισορροπία ως λειτουργία της συχνότητας δίνεται από τη λειτουργία Planck (2.10), που απεικονίζεται στο Σχ.2.3. Το μέγιστο αυτής της κατανομής συμβαίνει σε μία φωτογονική ενέργεια $h\nu_{max} = 2.822 kT$. Όσο η θερμοκρασία αυξάνεται το μέγιστο μετατοπίζεται σε υψηλότερες συχνότητες. Στην περιοχή χαμηλής συχνότητας $h\nu \ll kT$, η φόρμουλα Planck γίνεται ο κλασσικός νόμος Rayleigh-Jeans

$$U_{\nu p} = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2, \quad h\nu \ll kT. \quad (2.12)$$

Στην περιοχή υψηλής συχνότητας $h\nu \gg kT$ παίρνουμε το νόμο μετατόπισης του Wien

$$U_{\nu p} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT}, \quad h\nu \gg kT. \quad (2.13)$$

*Στην αστροφυσική το σύμβολο B_ν χρησιμοποιείται συνήθως στη θέση του $I_{\nu p}$. Η ολοκληρωμένη πυκνότητα της ακτινοβολούμενης ενέργειας ισορροπίας προκύπτει από την ολοκλήρωση της φασματικής πυκνότητας της ενέργειας (2.10) ως προς όλες τις συχνότητες από 0 ως ∞ . Αυτό αποφέρει την γνωστή έκφραση

$$U_p = \int_0^\infty U_{\nu p} d\nu = \frac{4\sigma T^4}{c}, \quad (2.14)$$

όπου $\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15h^3 c^2 = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{deg}^4$ είναι η σταθερά Stefan – Boltzmann ($U_p = 7.57 \cdot 10^{-15} T^4 \text{ erg/cm}^3$).

Το γεγονός ότι η ολοκληρωμένη πυκνότητα της ακτινοβολούμενης ενέργειας ισορροπίας είναι ανάλογη στην τέταρτη δύναμη της θερμοκρασίας προκύπτει αμέσως από το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής και από το γνωστό αποτέλεσμα της κλασσικής ηλεκτροδυναμικής ότι η πίεση ενός ισοτροπικού πεδίου ακτινοβολίας είναι ίση με ένα τρίτο της πυκνότητας της ενέργειας, δηλ., $p_\nu = U_\nu/3$. Βάζοντας αυτή την έκφραση στη γενική θερμοδυναμική σχέση $T dS = d\varepsilon + p dV^*$, όπου η εσωτερική ενέργεια δηλώνει την παράγωγο της πυκνότητας της ακτινοβολούμενης ενέργειας και τον όγκο ($\varepsilon = U_p V$), και σημειώνοντας ότι το dS είναι μία ολική διαφορική, προκύπτει ότι $U_p = \text{const } T^4$. Σημειώνουμε ότι η σχέση $p_\nu = U_\nu/3$ είναι μία απόδειξη για το γεγονός ότι η ακτίνα ισορροπίας μπορεί να θεωρηθεί από άποψη θερμοδυναμικής ως ένα τέλειο αέριο με συγκεκριμένη αναλογία θερμότητας $\gamma=4/3$.

Αφού ένα πεδίο ακτινικής ισορροπίας είναι ισοτροπικό, το δίκτυο της ακτινικής ενέργειας ροής σε οποιοδήποτε σημείο μέσα στο σώμα είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι εάν δούμε μία επίπεδη επιφάνεια σχεδιασμένη μέσα σ' ένα σώμα, τότε η μονόπλευρη ακτινική ενέργεια ρέει μέσα στην επιφάνεια από τα δεξιά προς τα αριστερά και από δεξιά προς αριστερά ακριβώς ίσα ως προς το μέγεθος και αντίθετα ως προς την κατεύθυνση. Αυτή η μονόπλευρη ροή, δηλαδή, η ποσότητα της ακτινικής ενέργειας που περνά (για παράδειγμα) από τα αριστερά προς τα δεξιά ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα περιοχής, μπορεί να προκύψει από την ένταξη του (2.11) για την ένταση ισορροπίας στο (2.2) και ολοκληρώνοντας ως προς ένα ημισφαίριο (παρά ως προς όλη τη στερεά γωνία). Το αποτέλεσμα είναι μία μονόπλευρη φασματική ροή ακτινικής ενέργειας

$$S_{\nu p} = \frac{cU_{\nu p}}{4} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2.15)$$

Η μονόπλευρη ροή ολοκληρωμένη ως προς όλες τις συχνότητες είναι

$$S_p = \int_0^\infty S_{\nu p} d\nu = \frac{cU_p}{4} = \sigma T^4. \quad (2.16)$$

Ας φανταστούμε ένα σώμα υλικού με σταθερή θερμοκρασία T που περιέχει μία κοιλότητα γεμάτη από ακτινοβολία ισορροπίας. Η ροή της ακτινικής ενέργειας που δίνεται από την κοιλότητα σε μία μονάδα χώρου της επιφάνειας του υλικού ανά μονάδα χρόνου είναι $S_{\nu p}$. Αυτή η ροή, γενικά, αντανακλάται μερικώς από τα τείχη της κοιλότητας και μεταφέρεται μερικώς μέσα στο σώμα και τέλος απορροφάται από το σώμα (υποθέτουμε πως το σώμα είναι ορισμένου μεγέθους και ότι η ροή δεν ξεκινά από το σώμα).

* Εδώ το S είναι η εντροπία της ακτινοβολίας.

Ας δηλώσουμε την αντανακλαστικότητα και την απορροφητικότητα με R_ν και A_ν , αντίστοιχα, με $A_\nu = 1 - R_\nu$. Η ακτινοβολία που μεταφέρεται από την κοιλότητα μέσα στο σώμα και απορροφάται από αυτό είναι ίση με $S_{\nu p} \cdot A_\nu$. Ως αποτέλεσμα της ισορροπίας η ίδια ποσότητα ακτινοβολίας $J'_\nu = S_{\nu p} \cdot A_\nu$ εκπέμπεται από το σώμα ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα χώρου της επιφάνειας. Η απορροφητικότητα, η αντανακλαστικότητα, και η ποσότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από την επιφάνεια είναι χαρακτηριστικά του υλικού και της θερμοδυναμικής του κατάστασης. Παρόλα αυτά, η σχέση

$$\frac{J'_\nu}{A_\nu} = S_{\nu p} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.17)$$

είναι ανεξάρτητη από τις επιμέρους ιδιότητες του σώματος και είναι μία γενική λειτουργία της συχνότητας και της θερμοκρασίας. Αυτή η πρόταση ονομάζεται νόμος του Kirchhoff.

Ένα σώμα το οποίο απορροφά εντελώς όλη την ακτινοβολία ονομάζεται τέλειο μαύρο σώμα. Από τον ορισμό για ένα τέλειο μαύρο σώμα $R_\nu=0$ και $A_\nu=1$. Προκύπτει από το (2.17) ότι μία φασματική ροή ενέργειας ίση με $S_{\nu p}$ προέρχεται από την επιφάνεια και ότι η ροή που ολοκληρώνεται ως προς το φάσμα είναι ίση με $S_p = \sigma T^4$. Ας εξετάσουμε ένα μη συνδεδεμένο σταθερό μέσο με σταθερή ταχύτητα T στο οποίο η ακτινοβολία είναι σε ισορροπία με το υλικό, και ας χωρίσουμε ξανά το σώμα με ένα φανταστικό επίπεδο. Η μονόπλευρες ροές ενέργειας μέσα στην επιφάνεια είναι ίσες με $S_{\nu p}$. Τα φωτόνια που περνούν μέσα στην επιφάνεια από τα αριστερά προς τα δεξιά «δημιουργούνται» στα αριστερά της επιφάνειας, ενώ αυτά που κινούνται από τα δεξιά προς τα αριστερά «δημιουργούνται» στα δεξιά της επιφάνειας. Φανταζόμαστε ότι το υλικό απομακρύνεται από μία πλευρά της επιφάνειας, ας πούμε από τη δεξιά πλευρά, και υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία του υλικού στα αριστερά παραμένει αμετάβλητη. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι η διάθλαση του μέσου είναι ίση με την ενότητα, και έτσι ότι το όριο διεπαφής δεν αντανακλά φως. Ύστερα αφού το υλικό απομακρυνθεί από τη δεξιά πλευρά, δεν θα υπάρχει φωτογονική ροή από αυτή την πλευρά, ενώ η φωτογονική ροή από τα αριστερά θα παραμείνει προφανώς η ίδια και ίση με $S_{\nu p}$. Επομένως, μισός χώρος είναι γεμάτος με το υλικό με διάθλαση ίση με την ενότητα και με σταθερή θερμοκρασία. Τα εκπέμπει από την επιφάνεια μία ακτινική ροή ενέργειας ίση με $S_{\nu p}$, δηλαδή, ακτινοβολεί ως ένα τέλειο μαύρο σώμα σε θερμοκρασία T .

§4. Επαγόμενη εκπομπή

Ας εξετάσουμε την ισορροπία μεταξύ της απορρόφησης και της εκπομπής φωτός σε υλικό που τοποθετείται μέσα σε ένα πεδίο ακτινοβολίας I_ν . Η ενέργεια ακτινοβολίας στο διάστημα της συχνότητας $d\nu$ και στο στοιχείο της στερεάς γωνίας $d\Omega$ που απορροφάται ανά

μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου είναι

$$k_v I_v dv d\Omega = \text{απορρόφηση ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου.} \quad (2.18)$$

Η ποσότητα της ενέργειας που αυθόρμητα εκπέμπεται ανά μονάδα όγκου του υλικού ανά μονάδα χρόνου στο ίδιο διάστημα $dv d\Omega$ είναι

$$j_v dv d\Omega = \text{αυθόρμητη εκπομπή ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου.}$$

Το μέγεθος της αυθόρμητης εκπομπής (συντελεστής εκπομπής j_v) καθορίζεται μόνο από τις ιδιότητες και την κατάσταση του υλικού, τον τύπο των ατόμων, τη θερμοκρασία (η οποία επηρεάζει το βαθμό διέγερσης των ατόμων), και λοιπά, και είναι εντελώς ανεξάρτητο από οποιαδήποτε ακτινοβολία που μπορεί ή όχι να είναι παρούσα στο χώρο. Αυτό, όμως, δεν εξαντλεί τη συνολική ποσότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από το υλικό.

Υπάρχει επίσης η λεγόμενη επαγόμενη εκπομπή. Η πιθανότητα μίας επαγόμενης εκπομπής ενός φωτονίου με μία δεδομένη συχνότητα και κατεύθυνση είναι ανάλογη στην ένταση της ακτινοβολίας της ίδιας συχνότητας και κατεύθυνσης που υπάρχουν στο δεδομένο σημείο του χώρου. Τα υπάρχοντα φωτόνια «διευκολύνουν» τη μεταφορά των διεγερμένων ατομικών συστημάτων, που συνοδεύονται από την εκπομπή των ίδιων τύπων φωτονίων. Η κβαντική θεωρία δείχνει ότι η συνολική πιθανότητα εκπομπής ενός φωτονίου είναι ανάλογη με $1 + n$, όπου n είναι ο αριθμός φωτονίων με μία ορισμένη κατεύθυνση πόλωσης και τοποθετημένα στην ίδια φάση που δέχεται τα φωτόνια. Αυτός ο αριθμός είναι ίσος με $n = c^2 I_v / 2h\nu^3$ *. Επομένως, η συνολική ακτινοβολία που εκπέμπεται ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα όγκου στο διάστημα $dv d\Omega$ είναι

$$j_v dv d\Omega \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_v \right) = \text{συνολική εκπομπή ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου.}$$

Ο πρώτος όρος στην παρένθεση αντιστοιχεί στην αυθόρμητη εκπομπή και ο δεύτερος στην επαγόμενη εκπομπή†.

*Ο όγκος που αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο $dv d\Omega dr$, που περιέχει $f dv d\Omega dr$ φωτόνια, είναι ίσος με $dr dr$, όπου dr είναι ένα στοιχείο όγκου στο χώρο της ορμής. Αφού η ορμή ενός φωτονίου είναι ίση με $p = h\nu/c$, $dr = p^2 dp d\Omega = h^3 \nu^2 dv d\Omega / c^3$. Ο αριθμός των πυρήνων σε ένα στοιχείο χώρου $dr dr$ είναι ίσος με $dr dr / h^3$ και, συνεπώς, ο αριθμός φωτονίων σε έναν πυρήνα είναι $f dv d\Omega dr h^3 / dp dr = c^2 f / \nu^2 = c^2 I_v / h\nu^3$. Ο αριθμός των φωτονίων με συγκεκριμένη κατεύθυνση πόλωσης είναι ίσος με το μισό αυτού του αριθμού, ή $c^2 I_v / 2h\nu^3$.

† Σημείωση του εκδότη. Αυτός ο κανόνας για την επαγωγική εκπομπή εξαρτάται από την ανεξαρτησία των ατόμων που εκπέμπονται στην απάντηση για την επαγόμενη ακτινοβολία. Ο κανόνας μπορεί να μην εφαρμόζεται σε συγκεκριμένες περιπτώσεις όπως, για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός λέιζερ με πολύ υψηλό βαθμό εκπομπής.

Σε μία κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας η εκπομπή και απορρόφηση των φωτονίων δεδομένων συχνοτήτων και κατευθύνσεων αντισταθμίζονται ακριβώς μεταξύ τους, έτσι

ώστε τα (2.18) και (2.19) να πρέπει να τεθούν ίσα, και η ένταση της ακτινοβολίας I_{ν} να πρέπει να αντικατασταθεί από την τιμή ισορροπίας $I_{\nu p}$. Χρησιμοποιώντας το (2.11) για την ένταση της ισορροπίας, βρίσκουμε ότι η αναλογία του συντελεστή εκπομπής κάθε ουσίας στο συντελεστή απορρόφησης της είναι μία γενική λειτουργία της συχνότητας και της θερμοκρασίας

$$\frac{j_{\nu}}{\kappa_{\nu}} = \frac{I_{\nu p}}{1 + (c^2/2h\nu^3)I_{\nu p}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}. \quad (2.20)$$

Αυτή η σχέση είναι μία σχέση από το νόμο του Kirchhoff. Είναι βολικό να ξαναγράψουμε το (2.20) ως εξής:

$$j_{\nu} = I_{\nu p} \kappa_{\nu} (1 - e^{-h\nu/kT}). \quad (2.21)$$

Ο συντελεστής ολικής εκπομπής σε όλες τις κατευθύνσεις είναι ίσος με

$$J_{\nu} = 4\pi j_{\nu} = cU_{\nu p} \kappa_{\nu} (1 - e^{-h\nu/kT}). \quad (2.22)$$

Ο νόμος του Kirchhoff εκφράζει τη γενική αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας που εφαρμόζεται στην εκπομπή και την απορρόφηση του φωτός. Μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το συντελεστή εκπομπής μίας ουσίας εάν ο συντελεστής απορρόφησης είναι γνωστός (και αντίστροφα).

* Σημείωση του εκδότη. Η αρχή για την λεπτομερή ισορροπία αποτελεί τη βάση για πολλά πράγματα στη φυσική που παρουσιάζονται σε αυτό το κείμενο. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τη φύση αυτής της αρχής. Όπως χρησιμοποιήθηκε από τους συγγραφείς και από πολλούς άλλους συγγραφείς η αρχή αναφέρεται σε μία ισορροπία ανάμεσα σε μία συγκεκριμένη διαδικασία και στην αντίθετή της διαδικασία σε ένα σύστημα το οποίο είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία. Όταν τα αποτελέσματα της αρχής όπως ο νόμος του Kirchhoff εφαρμόζονται σε ένα σύστημα το οποίο δεν είναι σε αυστηρή θερμοδυναμική ισορροπία, είναι σημαντικό ότι μία περιορισμένη ισορροπία να εφαρμόζεται, έτσι ώστε να μπορεί να οριστεί μία κατάλληλη θερμοκρασία. Μία σχετική ισορροπία σε ένα θερμοδυναμικό σύστημα εμφανίζεται όταν συγκεκριμένες λειτουργίες της ενέργειας στο σύστημα εξισορροπούνται γρήγορα, όπου η αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών των λειτουργιών και άλλων λειτουργιών της ενέργειας είναι πολύ αδύναμη. Το περιορισμένο σύστημα στο οποίο μόνο αυτές οι λειτουργίες που εξισορροπούνται γρήγορα και λαμβάνονται υπόψη μπορούν να βρισκονται σε σχετική θερμοδυναμική ισορροπία και έχουν μία προσδιορίσιμη θερμοκρασία. Αυτή η έννοια είναι σημαντική στη θεωρία της ακτινικής μεταφοράς, και στη θεωρία των διαδικασιών χαλάρωσης που εξετάζονται στο Κεφάλαιο VI.

Στη θεωρία της ακτινικής μεταφοράς που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο από την §5 και μετά, ο νόμος του Kirchhoff είναι βασικός. Οι ποσότητες j_{ν} , κ_{ν} , και $I_{\nu p}$ είναι λειτουργίες της θερμοκρασίας του μέσου. Με την ακτινοβολία να μη βρίσκεται σε ισορροπία, με $I_{\nu} \neq I_{\nu p}$, αυτή η θερμοκρασία είναι προσδιορίσιμη μόνο εάν το μέσο είναι σε σχετική ισορροπία. Αυτή η περιορισμένη ισορροπία πρέπει να διατηρηθεί, για παράδειγμα, μέσα από συγκρούσεις. Ο νόμος του Kirchhoff δεν εφαρμόζεται όπου δεν υπάρχει τέτοια σχετική ισορροπία, όπως με τα λέιζερ στην §4.

Η αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας στηρίζεται στην βασική φυσική αρχή της μικροσκοπικής αντιστρεψιμότητας, και κάποιοι συγγραφείς χρησιμοποιούν τον όρο για έναν μικροσκοπικό ισχυρισμό ισορροπίας ο οποίος δεν περιλαμβάνει την έννοια της ισορροπίας (Landau & Lifshitz [15]). Μερικά

αποτελέσματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας την αρχή της λεπτομερούς ισορροπίας, συγκεκριμένα η σχέση του Αϊνστάιν στο Κεφάλαιο V, (5.71), στηρίζεται μόνο στην μικροσκοπική αντιστρεψιμότητα και δεν περιλαμβάνει τις έννοιες της ισορροπίας ή της θερμοκρασίας. Για μία συζήτηση μικροσκοπικής βάσης της λεπτομερούς ισορροπίας βλέπε Reif [16].

Η ύπαρξη της επαγόμενης εκπομπής (μεταφορές των ατόμων των οποίων η πιθανότητα εξαρτάται από τον αριθμό των «σωματιδίων» – φωτονίων – που είναι ήδη παρόντα στο τελικό στάδιο του συστήματος άτομο- συν – φωτόνιο) είναι χαρακτηριστική για τις διαδικασίες στις οποίες τα «σωματίδια» (φωτόνια) που ανταποκρίνονται στις κβαντικές στατιστικές Bose παίρνουν μέρος. Πραγματικά, εξαιτίας της παρουσίας αυτών των διαδικασιών η λειτουργία κατανομής για το φωτογονικό αέριο διαφέρει από τη λειτουργία κατανομής για ένα αέριο που διέπεται από τις κλασσικές στατιστικές Boltzmann. Με τις στατιστικές Boltzmann ο αριθμός των σωματιδίων με ενέργεια ϵ είναι ανάλογος με $e^{-\epsilon/kT}$ και όχι με $(e^{-\epsilon/kT} - 1)^{-1}$, όπως για τα φωτόνια όπου $\epsilon = h\nu$. Για να ξεκαθαρίσουμε αυτή την πρόταση ας εξετάσουμε μία απλή περίπτωση όπου το άτομο έχει μόνο δύο επίπεδα ενέργειας ϵ_1 και ϵ_2 ($\epsilon_2 > \epsilon_1$), και όπου η μεταφορά από την μεγαλύτερο στο μικρότερο επίπεδο ενέργειας συνοδεύεται από την εκπομπή ενός φωτονίου $h\nu = \epsilon_2 - \epsilon_1$ ενώ η μεταφορά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο επίπεδο ενέργειας συνοδεύεται από απορρόφηση ενός φωτονίου $h\nu$. Η πιθανότητα της απορρόφησης κ_ν είναι ανάλογη στον αριθμό των ατόμων στο στάδιο της χαμηλής ενέργειας το οποίο, σύμφωνα με τις στατιστικές Boltzmann, είναι ανάλογο με $\exp(-\epsilon_1/kT)$. Η πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής j_ν είναι ανάλογη με τον αριθμό των ατόμων στο επίπεδο με τη μεγαλύτερη ενέργεια, δηλαδή, με $\exp(-\epsilon_2/kT)$. Ας υποθέσουμε πως δεν υπάρχει καθόλου επαγόμενη εκπομπή. Τότε, σε ισορροπία ο συνολικός αριθμός των φωτονίων που εκπέμπονται θα είναι ίσος με το συνολικό αριθμό των απορροφημένων φωτονίων, δηλαδή, η σχέση (2.20) ή (2.21) μπορεί να αντικατασταθεί από

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = I_{\nu p}, \quad j_\nu = I_{\nu p} \kappa_\nu, \quad (2.23)$$

Αλλά $j_\nu \sim \exp(-\epsilon_2/kT)$, $\kappa_\nu \sim \exp(-\epsilon_1/kT)$, έτσι ώστε

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = I_{\nu p} = \text{const} \cdot e^{-\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{kT}} = \text{const} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

Έτσι έχει προκύψει ο νόμος Boltzmann για την ένταση της ακτινοβολίας ισορροπίας, ή με άλλα λόγια η λειτουργία κατανομής των φωτονίων γίνεται τελικά ίδια όπως στα συνηθισμένα σωματίδια. Στην πραγματικότητα, ο νόμος Boltzmann εφαρμόζεται μόνο σε φωτόνια με υψηλή ενέργεια $h\nu \gg kT$ στην περιοχή Wien.

Η σωστή περιγραφή της ισορροπίας μεταξύ της εκπομπής και της απορρόφησης, που οδηγεί στην λειτουργία ισορροπίας Planck, προκύπτει αν λάβουμε υπόψη το φαινόμενο της επαγόμενης εκπομπής. Στο παράδειγμά μας για ένα ατομικό σύστημα με δύο επίπεδα ενέργειας προκύπτει ότι

$$\frac{j_v}{\kappa_v} = \frac{I_{vp}}{1 + (c^2 I_{vp} / 2h\nu^3)} = \text{const} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{kT}} = \text{const} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}},$$

που μας δίνει την εξίσωση Planck για την ένταση I_{vp} (με το σταθερό επάνω ίσο με $2h\nu^3 / c^2$).

Η παραπάνω συζήτηση δείχνει ότι η επαγόμενη εκπομπή γίνεται ασήμαντη σε σύγκριση με την αυθόρμητη εκπομπή κάτω από συνθήκες ισορροπίας καθώς $h\nu / kT \rightarrow \infty$, δηλαδή, στην περιοχή Wien του φάσματος. Αυτό είναι προφανές από το (2.19), εάν σημειώσουμε ότι σε ισορροπία και στο όριο καθώς $h\nu / kT \rightarrow \infty$,

$$I_v = I_{vp} \sim e^{-h\nu/kT} \rightarrow 0.$$

Από την άλλη πλευρά, στην περιοχή Rayleigh – Jeans του φάσματος, όπου $h\nu \ll kT$, ο σχετικός ρόλος της επαγόμενης εκπομπής γίνεται κυρίαρχος στο (2.19) βρίσκουμε ότι:

$$1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_{vp} = 1 + \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \approx \frac{kT}{h\nu} + \frac{1}{2},$$

έτσι ώστε η αναλογία των πιθανοτήτων της επαγόμενης και αυθόρμητης εκπομπής είναι ίση με $kT / h\nu \gg 1$.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση όπου το πεδίο ακτινοβολίας δεν βρίσκεται σε ισορροπία, οι παραπάνω ισχυρισμοί για τους σχετικούς ρόλους της αυθόρμητης και επαγόμενης εκπομπής δεν είναι έγκυροι γενικά. Η επαγόμενη εκπομπή είναι ανάλογη στην πραγματική ένταση της ακτινοβολίας, η οποία στην παρουσία της ισορροπίας μπορεί να είναι αυθαίρετη.

§4^α. Επαγόμενη εκπομπή ακτινοβολίας στην κλασική και κβαντική θεωρία και η επίδραση του λείζερ.

Στα πρόσφατα χρόνια υπάρχει μία ιδιαίτερη προσοχή στο φαινόμενο της επαγόμενης εκπομπής της ακτινοβολίας εξαιτίας του γεγονότος ότι χρησιμεύει ως η βάση της λειτουργίας του λείζερ και του μείζερ. Για να εξηγήσουμε αυτό το φαινόμενο με φυσικούς όρους θα το περιγράψουμε πρώτα από την κλασική οπτική γωνία. Όπως είναι ευρέως γνωστό, στο κλασικό μοντέλο του ατόμου ακτινοβολίας το άτομο αναπαριστάται με ένα ελαστικά συνδεδεμένο ηλεκτρόνιο, δηλαδή, ως ένας αρμονικός ταλαντωτής. Ας υποθέσουμε πως το ηλεκτρικό πεδίο ενός κύματος φωτός δρα σε αυτόν τον ταλαντωτή ως μία κατευθυνόμενη δύναμη, με την συχνότητα του κύματος να είναι ίδια με την φυσιολογική ταχύτητα του ταλαντωτή. Εάν ο ταλαντωτής, ήταν αρχικά σε αδράνεια $t=0$, τότε υπό την επίδραση του πεδίου θα έχει συντονισμένες ταλαντώσεις, με το εύρος να αυξάνεται με t και η ενέργεια με t^2 . Όμως, εάν αρχικά ο ταλαντωτής ήδη είχε μία συγκεκριμένη ποσότητα

ενέργειας, τότε η δύναμη που δρα με συχνότητα συντονισμού μπορεί να διεγείρει τον ταλαντωτή ακόμα περισσότερο ή, αντίστροφα, μπορεί να υγράνει τις ταλαντώσεις έτσι ώστε ο ταλαντωτής να χάσει ενέργεια. Το ποια διαδικασία συμβαίνει εξαρτάται από τις σχέσεις μεταξύ των φάσεων του ταλαντωτή και την εναλλασσόμενη δύναμη. Ας δώσουμε έμφαση στο ότι σε αυτή την περίπτωση η επαγόμενη δύναμη πρέπει να είναι σε κατάλληλο συντονισμό με τη συχνότητα του ταλαντωτή, όχι μόνο για να ενισχύσει αλλά επίσης και για να υγράνουν τις δονήσεις. Αυτή η κλασική έννοια της μεταφοράς ενέργειας συντονισμού χρησιμεύει ως η βάση για την έννοια της επαγόμενης εκπομπής της ακτινοβολίας. Ένας ταλαντωτής ο οποίος έχει ενέργεια και βρίσκεται στην απαιτούμενη φάση σχέσης με το κύμα φωτός στο οποίο τοποθετείται θα εγκαταλείψει την ενέργειά του για να ενδυναμώσει το κύμα φωτός που περνά. Ένας τέτοιος ταλαντωτής θα αυξήσει την ενέργεια του συνεκτικού κύματος. Στην κλασική γλώσσα μπορούμε να πούμε ότι E_s , το ηλεκτρικό πεδίο του ταλαντωτή, προστίθεται στο πεδίο κύματος E_0 . Το πεδίο του ταλαντωτή έχει μία κατάλληλη γωνιακή κατανομή. Αλλά η ροή ενέργειας είναι ανάλογη στο τετράγωνο του πεδίου. Για τον λόγο αυτό η ροή της ενέργειας του ταλαντωτή στην κατεύθυνση του περαστικού κύματος είναι ανάλογη σε $E_s E_0$ και είναι μεγαλύτερη εάν το E_0 είναι μεγαλύτερο. Αυτό αντιστοιχεί στο γεγονός ότι η ένταση της επαγόμενης ακτινοβολίας αυξάνεται με την αύξηση στην ένταση του κύματος που την παράγει. Όμως, αυτή η κλασική εικόνα έχει ένα μειονέκτημα το οποίο οδηγεί σε μία λανθασμένη μορφή των εξισώσεων. Στην κλασική θεωρία ένας συνδυασμός ταλαντωτών με αυθαίρετες φάσεις πάντα απορροφά περισσότερη ενέργεια κατά μέσο όρο από αυτή που εκπέμπει από την αυθαίρετη ακτινοβολία. Για να προκύψουν σωστά αποτελέσματα αυτό το πρόβλημα πρέπει να εξετασθεί κβαντικά – μηχανικά. Γυρίζουμε στην κβαντική αντιμετώπιση και της επίδρασή της στον αρμονικό ταλαντωτή. Είναι ιδιαίτερης σημασίας εδώ το γεγονός ότι τα επίπεδα ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή είναι ισαπέχοντα μεταξύ τους (το διάστημα είναι $h\nu$, όπου ν είναι η φυσιολογική συχνότητα). Ένας ταλαντωτής που τοποθετείται στο επίπεδο n th μπορεί, υπό την δράση της δύναμης συντονισμού, να κινείται είτε προς το $(n + 1)$ th είτε προς το $(n - 1)$ th στάδιο, με εκπομπή ενέργειας. Όπως είναι γνωστό από την κβαντική μηχανική, η αναλογία μεταξύ των πιθανοτήτων αυτών των μεταφορών είναι $(n + 1)/n$. Αυτό είναι κυρίως το γεγονός που δείχνει ότι ο συνδυασμός αρμονικών ταλαντωτών απορροφά (και όχι εκπέμπει) φως κατά μέσο όρο. Η καθοριστική προϋπόθεση για την επίτευξη της επίδρασης του λέιζερ, για την υπεροχή της επαγόμενης εκπομπής ακτινοβολίας, είναι ότι ο ταλαντωτής δεν είναι αρμονικός, και ότι συνεπώς τα διαστήματα ενέργειας ανάμεσα στα γειτονικά επίπεδα θα πρέπει να είναι άνισα. Εάν τα επίπεδα τοποθετούνται σε άνισα διαστήματα, τότε μπορούμε να έχουμε μία συχνότητα που είναι συντονισμένη για τη μεταφορά $n \rightarrow n - 1$, αλλά δεν είναι συντονισμένη για τη μεταφορά $n \rightarrow n + 1$. Τότε είναι ξεκάθαρο ότι ένας ταλαντωτής στην κατάσταση n th θα εγκαταλείψει την ενέργειά του υπό τη δράση του φωτός με τη συχνότητα ν . Αυτή είναι ακριβώς η κατάσταση όταν, με τα επίπεδα αντιστρόφως συμπληρωμένα (το επίπεδο n th είναι γεμάτο, ενώ το επίπεδο $(n-1)$ th δεν είναι), η ενέργεια εγκαταλείπεται και το κύμα υφίσταται αρνητική απορρόφηση. Αυτές είναι οι συνθήκες για τη δημιουργία του λέιζερ*.

* Είναι άξιο ενδιαφέροντος ότι συναντάμε την επίδραση της μη αρμονικότητας στην περίπτωση της ακτινοβολίας από ηλεκτρόνια σε ένα μαγνητικό πεδίο. Στην μη σχετικιστική προσέγγιση το ηλεκτρόνιο γυρίζει με σταθερή γωνιακή συχνότητα. Ένα αποτέλεσμα αυτού είναι ότι τα κβαντικά επίπεδα της ενέργειας της

κίνησης του εγκάρσιου ηλεκτρονίου στο μαγνητικό πεδίο ισαπέχουν. Καμία τέτοια κατανομή ενέργειας σε ένα μαγνητικό πεδίο με αυτή την προσέγγιση δεν μπορεί να παράγει ένα συντελεστή αρνητικής απορρόφησης ή να δημιουργήσει συνεκτικό φως. Λαμβάνοντας υπόψη τις σχετικιστικές διορθώσεις, μπορεί να φανεί ότι τα επίπεδα δεν ισαπέχουν στην πραγματικότητα και έτσι ότι είναι πιθανό να έχουμε κατανομές της ενέργειας του ηλεκτρονίου που μπορούν να παράγουν λείζερ.

Ένας πληθυσμός που αποτελείται από N άτομα με δύο επίπεδα το καθένα (και τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, όπως τα άτομα χρωμίου στο πλέγμα του ρουμπινιού) μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως ένα μονό σύστημα με επίπεδα που ισαπέχουν \hbar η ενέργειά του είναι $E_n = nh\nu$, όπου n είναι ο αριθμός των διεγερμένων ατόμων. Αντίθετα με τον ταλαντωτή, όπου το φάσμα των φάσεων της ενέργειας δεν είναι συνδεδεμένο επάνω (και το στατιστικό βάρος όλων των φάσεων είναι το ίδιο), εδώ το φάσμα είναι συνδεδεμένο όχι μόνο κάτω ($n = 0, E_n = 0$), αλλά και επάνω ($E_{max} = Nh\nu$). Το στατιστικό βάρος για διαφορετικό n είναι διαφορετικό, και το μέγιστο στατιστικό βάρος αποκτάται με $n = N/2$. Αυτός είναι ο λόγος που σε αυτό το σύστημα υπερिशχύει η απορρόφηση με $n < N/2$, ενώ υπερिशχύει η επαγόμενη εκπομπή με $n > N/2$ *

Όπως αναφέραμε και στην αρχή αυτής της ενότητας, η έννοια της επαγόμενης εκπομπής ακτινοβολίας μπορεί να εκφραστεί καθαρά με κλασσικούς όρους. Όπως είναι αναμενόμενο, η επαγόμενη ακτινοβολία περιέχεται εντελώς στις εξισώσεις του Νεύτωνα και του Μάξγουελ \hbar δεν είναι άνευ αιτίας ότι η φόρμουλα Rayleigh – Jeans (2.12) για τη φασματική πυκνότητα σε χαμηλή συχνότητα δεν περιέχει τη σταθερά Planck – τελικά, η επαγόμενη εκπομπή πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στην κβαντομηχανική παραγωγή της φόρμουλας Rayleigh – Jeans.

Μετά από την ανακάλυψη των λείζερ, που έχουν στρέψει την προσοχή των φυσικών στο φαινόμενο της επαγόμενης εκπομπής, έχει αποδειχθεί ότι ένας μεγάλος αριθμός διαδικασιών περιγράφονται πιο βολικά με όρους της απορρόφησης και της επαγόμενης εκπομπής. Μπορούμε να παραθέσουμε ως χαρακτηριστικό παράδειγμα το φαινόμενο του σκεδασμού ηλεκτρονίων από ένα κύμα φωτός. Αυτό το φαινόμενο το πρόβλεψαν οι Karitsa και Dirac [11] πάνω από τριάντα χρόνια πριν. Ένα μονοχρωματικό κύμα φωτός, αφού έχει αντανάκλασει από καθρέφτη, δημιουργεί στο χώρο περιοδικά τοποθετημένες περιοχές στις οποίες το ηλεκτρικό πεδίο είναι μικρό και στις οποίες είναι μεγάλο. Τα ηλεκτρόνια θα πρέπει να σκεδιάζονται σε συγκεκριμένες γωνίες “Bragg” με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο σκεδιάζονται από το περιοδικό πεδίο ενός κρυστάλλινου πλέγματος. Αυτή η επίδραση εξετάστηκε [12] μόνο πολύ πρόσφατα χρησιμοποιώντας μονοχρωματικό φωτεινό παλμό από λείζερ.

Ο σκεδασμός των ηλεκτρονίων από το πεδίο ενός σταθερού κύματος μπορεί να περιγραφεί ποσοτικά με νέους όρους ως ένα “επαγόμενο αποτέλεσμα Compton”. Στην πραγματικότητα, το αποτέλεσμα Compton είναι μια διαδικασία αλληλεπίδρασης ενός γ -φωτονίου με ένα ηλεκτρόνιο

$$\gamma + e = \gamma' + e'$$

Για μία δεδομένη ενέργεια και ορμή ενός φωτονίου και ενός ηλεκτρονίου πριν το σκεδασμό οι νόμοι διατήρησης επιτρέπουν κάθε κατεύθυνση για το φωτόνιο γ' και το ηλεκτρόνιο e' μετά το σκεδασμό. Άρα, υπό κανονικές συνθήκες, το αποτέλεσμα Compton δημιουργεί μία στατιστική κατανομή στην κατεύθυνση των ηλεκτρονίων.

* Σημειώνουμε ότι στην [9] η επίδραση του λέιζερ εξετάζεται με βάση των ημικλαστικών εννοιών, και ότι στη [10] συγκρίνονται η κβαντομηχανική και ημικλαστική προσέγγιση.

Ας επιστρέψουμε στο σκεδασμό ηλεκτρονίων από ένα σταθερό κύμα. Ένα σταθερό κύμα αντιπροσωπεύει μία υπεροχή ενός τυχαίου κύματος γ_1 και ενός αντανακλασμένου κύματος γ_2 . Αυτό σημαίνει ότι ο σκεδασμός Compton μπορεί να λάβει χώρα καθώς

$$\gamma_1 + e = e' + \gamma_3, \quad \gamma_2 + e = e'' + \gamma_4.$$

Αλλά όταν η ροή του φωτός είναι πολύ δυνατή, τότε ο νόμος της επαγόμενης εκπομπής προβλέπει την ομοιότητα της εκπομπής ενός φωτονίου το οποίο είναι το ίδιο με τα ήδη υπάρχοντα φωτόνια, δηλαδή, την ομοιότητα των διαδικασιών

$$\gamma_1 + e = e_{12} + \gamma_2, \quad \gamma_2 + e = e_{21} + \gamma_1,$$

που είναι φυσιολογικό στον όρο 'επαγόμενο αποτέλεσμα Compton'. Αφού η κατεύθυνση και η συχνότητα των φωτονίων πριν και μετά το σκεδασμό έχουν προσδιοριστεί, τότε η αλλαγή στην κατεύθυνση του ηλεκτρονίου είναι πλήρως ορισμένη. Η ενέργεια του ηλεκτρονίου προφανώς δεν αλλάζει. Επίσης, προκύπτει από τους νόμους διατήρησης ότι αυτή η διαδικασία είναι πιθανή μόνο όταν το τυχαίο ηλεκτρόνιο έχει συγκεκριμένη ορμή. Όλες οι σχέσεις που διέπουν το σκεδασμό διάθλασης προκύπτουν ακριβώς από την έννοια της επαγόμενης επίδρασης Compton. Μία πολύ σημαντική γενική αρχή φαίνεται σε αυτό το παράδειγμα, ότι δηλαδή μία δράση που πραγματοποιείται σε ένα σύστημα από μία περιοδική εξωτερική δύναμη, πρέπει, με όρους κβαντομηχανικής, να εξετάζεται ως συνδυασμός της απορρόφησης και της επαγόμενης εκπομπής των κατάλληλων κβάντων ενέργειας από το σύστημα. Αυτή η αρχή ισχύει επίσης και σε προβλήματα στα οποία η εξωτερική δύναμη μπορεί να θεωρηθεί ως κλασική, και υπονοεί ότι μπορούμε σε αυτή την περίπτωση να αγνοήσουμε την αντίδραση του συστήματος στη δύναμη, όπως στο παράδειγμα που παρουσιάστηκε παραπάνω, τη δράση ενός ηλεκτρονίου στο πεδίο ενός σταθερού κύματος. Όμως, ακόμα και αν εξετάσουμε αυτή τη δύναμη από την κλασική οπτική γωνία, η δράση της στο σύστημα των φωτονίων θα πρέπει, ή μπορεί*, να θεωρείται ως απορρόφησης και εκπομπή φωτονίων. Η θεώρηση μίας δύναμης ως κλασική υπονοεί ότι η επαγόμενη εκπομπή φωτονίων με μία συχνότητα που καθορίζεται από μία εξωτερική δύναμη είναι μεγαλύτερη κατά πολύ από μία αυθόρμητη εκπομπή οποιωνδήποτε άλλων φωτονίων που διαφέρουν στη συχνότητά τους, στην κατεύθυνση και την πόλωσή τους. Όταν ένα σύστημα υπόκειται σε μία περιοδική εξωτερική δράση, η χαμιλτονιανή του δεν μπορεί πλέον να θεωρείται ανεξάρτητη του χρόνου. Όμως, η χαμιλτονιανή είναι τότε περιοδική, $H(t) = H(t + nT)$, που σημαίνει ότι θα πρέπει να υπάρχουν λύσεις οι οποίες, μετά από μία μονή περίοδο δράσης της δύναμης, να επανέρχονται στην προηγούμενη μορφή τους από έναν συντελεστή φάσης.

$$\psi_k(t + T) = a_k \psi(t), \quad |a_k| = 1, \\ a_k = e^{i\alpha_k}.$$

Ας εισάγουμε την έννοια της μερικής ενέργειας ϵ_k , όπου

$$\alpha_k = 2\pi\epsilon_k T/h, \quad \psi_k(t + nT) = \psi_k(t) \exp(2\pi i \epsilon_k nT/h).$$

*Σημειώνουμε τη μελέτη από τον Keldysh [13], στην οποία γίνεται χρήση σε ακριβείς λειτουργίες του κύματος ενός ηλεκτρονίου στο πεδίο ενός κλασσικού κύματος φωτός.

Αυτή η ποσότητα σχετίζεται με την ενέργεια με τον ίδιο τρόπο όπως στην σχετική ορμή ενός ηλεκτρονίου σε ένα χωρικό περιοδικό πλέγμα στην κατάλληλη ορμή του ηλεκτρονίου. Με αυτό τον τρόπο είναι πιθανό να αναπτύξουμε μία θεωρία συστημάτων που υπόκειται στη δράση περιοδικών εξωτερικών δυνάμεων. Σύμφωνα με ό,τι έχουμε δει αυτή θα είναι η θεωρία των φαινομένων της απορρόφησης και της επαγόμενης εκπομπής.

Ένα δεύτερο παράδειγμα της εφαρμογής της έννοιας της επαγόμενης εκπομπής είναι η θεωρία του αρμονικού ταλαντωτή. Είναι γνωστό ότι το εύρος μιας φασματικής γραμμής που εκπέμπεται κατά τη μεταφορά από το στάδιο A στο στάδιο B είναι το σύνολο από τα πλάτη Γ_A και Γ_B αυτών των σταδίων. Όπως εφαρμόστηκε σε έναν ταλαντωτή για τον οποίο το βασικό στοιχείο της μεταφοράς από την κατάσταση n th στην $(n-1)$ th είναι ανάλογο με $n^{1/2}$, θα βρούμε ότι $\Gamma_n = kn$ και $\Gamma_{n-1} = k(n-1)$. Προκύπτει από εδώ ότι το πλάτος της γραμμής που εκπέμπεται κατά τη μεταφορά από την κατάσταση n th στην $(n-1)$ είναι ανάλογο με $(2n-1)$. Από την άλλη πλευρά, στην κλασσική θεωρία το πλάτος μιας γραμμής που εκπέμπεται από έναν αρμονικό ταλαντωτή είναι ανεξάρτητο από το εύρος της. Η ένταση της ακτινοβολίας είναι ανάλογη στο τετράγωνο του εύρους*. Συνεπώς, η ενέργεια του ταλαντωτή μειώνεται εκθετικά $E \sim e^{-\gamma t}$, και το εύρος των ταλαντώσεών του επίσης μειώνεται εκθετικά $x = a_0 e^{-\gamma t/2} \cos 2\pi \nu t$. Η επέκταση αυτής της εφαρμογής σε ένα ολοκλήρωμα Fourier δίνει τη μορφή Lorentz για τη γραμμή (βλ. Κεφ. V).

$$|b(\nu)|^2 = \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma_0/4\pi)^2},$$

με ένα εύρος το οποίο είναι ανεξάρτητο από το εύρος. Το παράδοξο αυτής της διαφωνίας ανάμεσα στην κλασσική και την κβαντομηχανική θεωρία για υψηλούς αριθμούς κβάντων παρατηρήθηκε ήδη από τους Weisskopf και Wigner [14], και επίσης από τον Pauli [14] στην αρχή της δεκαετίας του 30'. Η αναφορά [14] δείχνει ότι αυτό το παράδοξο σχετίζεται με μία συγκεκριμένη ιδιότητα του αρμονικού ταλαντωτή, το γεγονός ότι τα επίπεδά του ισαπέχουν, έτσι ώστε οι συχνότητες που εκπέμπονται από τις μεταφορές μεταξύ κάθε ζεύγους γειτονικών επιπέδων είναι αυστηρά ίδιες. Η αναφορά [14] εξετάζει τρεις καταστάσεις A , B και C , με διαδοχική εκπομπή των δύο φωτονίων $A^{h\nu_1} \rightarrow B^{h\nu_2} \rightarrow C$. Εάν τα επίπεδα δεν ισαπέχουν, τότε $E_A - E_B \neq E_B - E_C$, $\nu_1 \neq \nu_2$, και έχουμε την πάγια απάντηση για τη γραμμή ν_1 - το εύρος της είναι ανάλογο με $\Gamma_A + \Gamma_B$

Όμως, εάν τα επίπεδα ισαπέχουν (για παράδειγμα, εάν το C είναι το μηδενικό επίπεδο, B είναι το πρώτο επίπεδο και A είναι το δεύτερο επίπεδο ενός αρμονικού ταλαντωτή) η

κατάσταση γίνεται πιο πολύπλοκη, επειδή η εκπομπή δύο φωτονίων ίδιας συχνότητας μπορεί να λάβει χώρα επίσης μέσα από μία δεύτερη διαδικασία, $A^{hv_2} \rightarrow B^{hv_1} \rightarrow C$.

* Συνεπώς, ο χρόνος που χρειάζεται για την εκπομπή ενός κβάντος ενέργειας είναι αντιστρόφως ανάλογος με την ίδια την ενέργεια του ταλαντωτή. Αυτός ο συλλογισμός, βασισμένος στον υπολογισμό της τιμής του στοιχείου *matrix* που δίνει την πιθανότητα της εκπομπής, είναι υπό αμφισβήτηση.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα όλης της διαδικασίας της εκπομπής δύο φωτονίων πρέπει να προσθέσουμε τα πλάτη και τις δύο διαδικασίες, με μία επακόλουθη αλλαγή στο πλάτος και το σχήμα της γραμμής. Χρησιμοποιώντας την τρέχουσα ορολογία μπορεί να πούμε, χωρίς να αναφερόμαστε στους αριθμούς (1^{0s} , 2^{0s}) των φωτονίων, ότι ένα φωτόνιο που εκπέμπεται από τη μεταφορά $A \rightarrow B$ παράγει επαγόμενη εκπομπή από τη μεταφορά $B \rightarrow C^*$. Ο αρμονικός ταλαντωτής σε ένα στάδιο μεγάλου αριθμού κβάντων ακτινοβολεί μία διαδοχή φωτονίων. Σε αυτή την περίπτωση ο ρόλος της επαγόμενης εκπομπής, σε σύγκριση με την αυθόρμητη εκπομπή, είναι πιο σημαντικός όσο μεγαλύτερος είναι ο μέσος αριθμός n της κατάστασης. Η αναφορά εδώ είναι για την εκπομπή που προκαλείται όχι από εξωτερική ακτινοβολία αλλά από την ίδια ακτινοβολία του ταλαντωτή. Μόνο εξετάζοντας την όλη διαδικασία συμπεριλαμβανομένης της επαγόμενης εκπομπής θα αποκτήσουμε αποτελέσματα που συμφωνούν με την κλασική θεωρία.

Σε οποιαδήποτε δεδομένη στιγμή η κατάσταση του ταλαντωτή αποτελείται από μια υπερίσχυση πολλών διεγερμένων επιπέδων. Είναι επίσης σημαντικό ότι με τις επαγόμενες μεταφορές, συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ των διαδοχικών επιπέδων προκύπτουν, και η κατάσταση του συστήματος δεν μπορεί να προσδιοριστεί με τις ίδιες πιθανότητες για τα διαφορετικά επίπεδα. Αυτή η κατάσταση είναι επίσης φυσιολογική.

Στην κλασική εικόνα το ηλεκτρόνιο είναι προσδιορισμένο. Είναι προφανές από την αρχή της αβεβαιότητας ότι η περιγραφή ενός προσδιορισμένου ηλεκτρονίου απαιτεί να πάρουμε την υπερίσχυση πολλών ιδιοσυναρτήσεων (ο αριθμός τους είναι μεγαλύτερος όσο πιο ακριβής είναι η τοποθέτηση) που πρέπει να έχουν συγκεκριμένες σχέσεις. Μπορεί να αναρωτηθούμε αν η δεδομένη αιτιολόγηση εφαρμόζεται μόνο στην ιδανική περίπτωση ενός αυστηρά αρμονικού ταλαντωτή, για τον οποίο οι καταστάσεις της ενέργειας ισαπέχουν ή ακόμη και σε οποιονδήποτε αρμονικό ταλαντωτή. Ποιό είναι το κριτήριο για την εφαρμογή υποχρεωτικών εννοιών για τις διακριτές απότομες αλλαγές των κβάντων; τα ίδια διακριτά επίπεδα μπορεί να εξετάζονται με βάση το ότι το εύρος του επιπέδου Γ_n που συνδέεται με την αυθόρμητη εκπομπή είναι μικρό σε σχέση με την απόσταση μεταξύ των επιπέδων, δηλ., η συχνότητα μεταφοράς,

$$\Gamma_n \ll \nu_{n,n-1} = \frac{E_n - E_{n-1}}{h}.$$

Το κριτήριο της πιθανότητας εφαρμογής των υποχρεωτικών κβαντικών εννοιών του εύρους

της γραμμής (χωρίς να ληφθεί υπόψη η επαγόμενη εκπομπή) έχει μια διαφορετική μορφή, και είναι ότι το εύρος πρέπει να είναι μικρό σε σχέση με τη διαφορά των συχνοτήτων

$$\Gamma_n \ll \nu_{n,n-1} - \nu_{n-1,n-2} = \frac{E_n - 2E_{n-1} + E_{n-2}}{h}.$$

Θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πειραματικά τις επιδράσεις της «εσωτερικής» επαγόμενης εκπομπής σε υψηλά επίπεδα δονήσεων των μορίων.

*Αυτή η οπτική γωνία στηρίζεται επίσης στο γεγονός ότι, σύμφωνα με το [14], οι φασματικές αλλαγές εκπέμπονται στην ίδια κατεύθυνση.

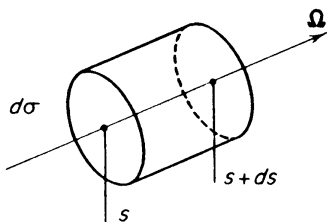
Τα παραδείγματα που παρουσιάσαμε παραπάνω δείχνουν ότι η έννοια της επαγόμενης εκπομπής ακτινοβολίας καθιστά δυνατό να ερμηνεύουμε εκ νέου πολλά γεγονότα και παράδοξα· αυτή η έννοια είναι ένα αναπόσπαστο κομμάτι της ερμηνείας της κβαντικής μηχανικής.

§5. Η εξίσωση της ακτινικής μεταφοράς

Ας ρυθμίσουμε την εξίσωση για τη λειτουργία κατανομής των φωτονίων σε μια δεδομένη συχνότητα. Αφού αυτή η λειτουργία, στην οποία ο σταθερός παράγοντας $h\nu c$, είναι ίδιος με την ένταση της ακτινοβολίας, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση για την πυκνότητα κατευθείαν. Η κινητική εξίσωση που είναι γραμμένη με αυτή τη μορφή ονομάζεται συνήθως η εξίσωση της ακτινικής μεταφοράς.

Θα μας απασχολήσει η ακτινοβολία της συχνότητας ν σε μία μονάδα διαστήματος συχνότητας που διαδίδεται μέσα σε μία μονάδα στερεάς γωνίας στην κατεύθυνση Ω .

Εικόνα



Σχήμα 2.4. Σχηματική απεικόνιση της παραγωγής της εξίσωσης της

ακτινικής μεταφοράς.

Ας εξετάσουμε την ισορροπία της ακτινοβολίας σε έναν βασικό κύλινδρο με βασική περιοχή $d\sigma$ και ύψος ds , τοποθετημένο σε ένα σημείο στο χώρο με τέτοιο τρόπο ώστε η κατεύθυνση Ω να συμπίπτει με τον άξονα του κυλίνδρου και επομένως κάθετος στις βάσεις του (Σχ.2.4). Μία ποσότητα ακτινοβολίας $I_\nu(\Omega, r, t) d\sigma dt$ ρέει μέσα στην αριστερή βάση κατά το χρόνο dt . Μία ποσότητα ακτινοβολίας $(I_\nu + dI_\nu) d\sigma dt$ εκρέει από τη δεξιά βάση κατά το ίδιο χρονικό διάστημα dt . Η ένταση I_ν είναι μία λειτουργία και της θέσης και του χρόνου. Η αλλαγή στην εντονότητα της φωτεινής δέσμης ως αποτέλεσμα του περάσματος του από την αριστερή βάση στη δεξιά αποτελείται από την τοπική αλλαγή κατά τη διάρκεια του χρόνου της μετάβασης μέσα από την απόσταση ds και την αύξηση που προκύπτει από την αλλαγή στη συντεταγμένη θέση προς s σε $s+ds$ ορισμένο χρόνο.

$$dI_\nu = \frac{\partial I_\nu}{\partial t} \frac{ds}{c} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} ds.$$

Αλλά μέσα στον κύλινδρο η εντονότητα της δέσμης πρέπει να αλλάξει ως αποτέλεσμα της εκπομπής και απορρόφησης του φωτός των συγκεκριμένων χαρακτηριστικών. (Ανακαλούμε εδώ την επισήμανση που έγινε στο τέλος της §2 σχετικά με την αγνόηση του σκεδασμού του φωτός). Η ποσότητα της ακτινοβολίας στον κύλινδρο κατά τη διάρκεια του χρόνου dt είναι, σύμφωνα με το (2.19)

$$j_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) d\sigma ds dt.$$

Από την άλλη πλευρά, η ακτινοβολία που απορροφάται κατά το ίδιο χρονικό διάστημα είναι $\kappa_\nu I_\nu d\sigma ds dt$. Ρυθμίζοντας την ισορροπία για τον κύλινδρο και χωρίζοντας την έκφραση από την παράγωγο των διαφορικών $d\sigma ds dt$ προκύπτει ότι

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + c\mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_\nu \right) = j_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) - \kappa_\nu I_\nu. \quad (2.24)$$

Εδώ έχουμε αντικαταστήσει στην αριστερή πλευρά τη μερική παράγωγο της κατεύθυνσης $\frac{\partial I_\nu}{\partial s}$ από την αντίστοιχη έκφραση $\mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_\nu$. Ο όρος στην παρένθεση στην αριστερή πλευρά του (2.24) απλά αντιπροσωπεύει τη συνολική παράγωγο της έντασης σε σχέση με το χρόνο, δηλ. η χρονική παράγωγος της έντασης ενός δεδομένου αριθμού φωτονίων (η υδροδυναμική εξίσωση της κίνησης (1.16)).

Ας αναδιοργανώσουμε τη δεξιά πλευρά του (2.24) με το να συγκεντρώσουμε μαζί τους όρους απορρόφησης και επαγόμενης εκπομπής, αφού και οι δύο είναι ανάλογοι στην αγνώστη λειτουργία της θέσης και του χρόνου, την ένταση της ακτινοβολίας. Ας εκφράσουμε επίσης το συντελεστή εκπομπής j_ν στον όρο της επαγόμενης εκπομπής με όρους του συντελεστή απορρόφησης όπως ορίστηκε από το (2.21) και ας εντάξουμε στο τελευταίο

την ένταση ισορροπίας από το (2.11). Η δεξιά πλευρά του (2.24) μετατρέπεται ως εξής:

$$j_v - \kappa_v(1 - e^{-h\nu/kT})I_v. \quad (2.25)$$

Είναι τώρα φανερό πως η επαγόμενη εκπομπή μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μία μείωση στην απορρόφηση: μερικά φωτόνια δρουν σαν να είχαν απορροφηθεί και αμέσως έγινε επανεκπομπή τους με την ίδια συχνότητα και προς την ίδια κατεύθυνση η πιθανότητα αυτής της «επανακτινοβολίας» είναι ίση με $e^{-h\nu/kT}$. Φυσικά τέτοια επανακτινοβολία δε συμβαίνει και μπορεί να αποκλειστεί από τη σκέψη μας αν θεωρούμε πως ο συντελεστής απορρόφησης έχει την αμυδρά χαμηλότερη τιμή

$$\kappa'_v = \kappa_v(1 - e^{-h\nu/kT}). \quad (2.26)$$

Η αλληλεπίδραση μεταξύ της ακτινοβολίας και της ύλης μπορεί επομένως να αντιπροσωπευτεί να υπήρχε μόνο αυθόρμητη εκπομπή και μη αποτελεσματική απορρόφηση που περιγράφεται από το συντελεστή κ'_v ο οποίος έχει διορθωθεί για την επαγόμενη εκπομπή στο σύστημα. Χρησιμοποιώντας την αλλαγμένη αναπαράσταση, ο νόμος του Kirchhoff (2.21) γίνεται

$$j_v = \kappa'_v I_{vp}, \quad \kappa'_v = \kappa_v(1 - e^{-h\nu/kT}). \quad (2.27)$$

Εντάσσοντας αυτή την έκφραση στα δεξιά της εξίσωσης μεταφοράς (2.24), προκύπτει τελική μορφή

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_v = \kappa'_v(I_{vp} - I_v). \quad (2.28)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.28) ως προς όλες τις κατευθύνσεις $\mathbf{\Omega}$ και ανακαλώντας τους ορισμούς της πυκνότητας της ακτινοβολίας και της ροής (2.1) και (2.2) αντίστοιχα, προκύπτει

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_v = c\kappa'_v(U_{vp} - U_v). \quad (2.29)$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να θεωρείται ως η εξίσωση της συνέχειας για την ακτινοβολία δεδομένης συχνότητας. Είναι μία έκφραση του νόμου της διατήρησης της ακτινοβολούμενης ενέργειας που είναι εντελώς ανάλογη στην εξίσωση υδροδυναμικής ενέργειας που γράφεται σε διαφοροποίηση από το (1.10).

Η εξίσωση ακτινικής μεταφοράς (2.28) είναι μία μερική διαφορική εξίσωση για την ένταση ως μία λειτουργία της θέσης, του χρόνου και της κατεύθυνσης $I_v(r,t,\mathbf{\Omega})$, και περιγράφει ένα μη ισορροπημένο πεδίο ακτινοβολίας. Η θερμοδυναμική ακτινοβολία στην ύλη αποκτάται συνήθως πολύ γρήγορα, και είναι επομένως πιθανό να θεωρούμε πως η ύλη είναι μία

κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας στο κάθε σημείο του χώρου και σε κάθε χρονική στιγμή. Η κατάσταση του υλικού μπορεί τότε να περιγράφει από δύο παραμέτρους, όπως, θερμοκρασία και πυκνότητα. Η εξίσωση μεταφοράς της ακτινοβολίας περιλαμβάνει ποσότητες που εξαρτώνται από τη φύση και την κατάσταση του υλικού, συγκεκριμένα τον συντελεστή απορρόφησης κ'_v , που εξαρτάται από τη φύση και την κατάσταση του υλικού, και τον συντελεστή ισορροπίας I_{vp} , που είναι μία λειτουργία της θερμοκρασίας μόνο.

Η εξίσωση (2.28) περιγράφει, συγκεκριμένα, την ιστορία της επίτευξης ισορροπίας ανάμεσα στην ακτινοβολία και την ύλη. Ας φανταστούμε ένα μέσο αόριστης σταθερής πυκνότητας. Το μέσο είναι αρχικά ήρεμο, ώστε η ακτινοβολία δεν υπάρχει. Υποθέτουμε πως την αρχική στιγμή $t=0$ η ύλη θερμαίνεται στιγμιαία και ύστερα διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία t . Ας εξετάσουμε τώρα πώς η ένταση της ακτινοβολίας αλλάζει με το χρόνο. Προφανώς, οι κλίσεις του χώρου σε αυτή την περίπτωση είναι όλες ίσες με το μηδέν, $\kappa'_v = \text{const}$ και $I_{vp} = \text{const}$. Η λύση της εξίσωσης (2.28) σε αυτή την περίπτωση παίρνει την εξής μορφή

$$I_v(t) = I_{vp}(1 - e^{-\kappa'_v t}). \quad (2.30)$$

Η ένταση της ακτινοβολίας πλησιάζει ασυμπτωτικά την ένταση της ισορροπίας, και ο χρόνος χαλάρωσης που χρειάζεται για να υπάρξει ισορροπία μεταξύ της ακτινοβολίας και του υλικού είναι $t_p = 1/c \kappa'_v = l_v'/c = l_w/(1 - e^{-h\nu/kT})c$. Για παράδειγμα, με $I_v = 1 \text{ cm}$, στο μέγιστο κομμάτι του φάσματος Planck $h\nu = 2.8kT$ θα είχαμε $t_p = 3 \cdot 10^{-11} \text{ sec}$.

§6. Ολοκληρωτικές εκφράσεις για την ένταση της ακτινοβολίας

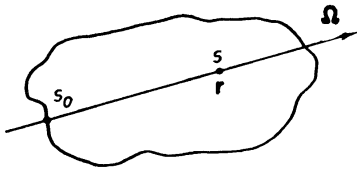
Ας δούμε τώρα μια επίσημη λύση για την εξίσωση της μεταφοράς της ακτινοβολίας με το να εξετάσουμε αυτές τις ποσότητες οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την κατάσταση του υλικού $I_{vp}(T)$, $\kappa'_v(T, \rho)$ και είναι γνωστές λειτουργίες της θέσης και του χρόνου. Για να γίνει πιο απλό, εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση σταθερής κατάστασης, όπου οι κατανομές της θερμότητας και της πυκνότητας και επίσης το πεδίο της ακτινοβολίας είναι ανεξάρτητα του χρόνου. Θα μας απασχολήσει η ακτινοβολία σε ένα σημείο r ενός σώματος ύλης ή ρευστό, που διαδίδεται σε κατεύθυνση Ω (Σχ.2.5). Σχεδιάζουμε μία ακτίνα μέσα από το δεδομένο σημείο στη δεδομένη κατεύθυνση. Η συντεταγμένη κατά μήκος της ακτίνας δηλώνεται με s . Σημειώνοντας ότι η διαφορική έκφραση στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης μεταφοράς (2.28) αντιπροσωπεύει τη συνολική παράγωγο της έντασης ενός συνόλου φωτονίων στην κατεύθυνση της διάδοσης, μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτή την εξίσωση ως εξής:

$$\frac{dI_v}{ds} + \kappa'_v I_v = \kappa'_v I_{vp}. \quad (2.31)$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνηθισμένη γραμμική εξίσωση για την ένταση στην κατεύθυνση της διάδοσης. Η λύση της είναι

$$I_v(s) = \int_{s_0}^s \kappa'_v I_{vp} \exp \left[- \int_{s'}^s \kappa'_v ds'' \right] ds' + I_{v_0} \exp \left[- \int_{s_0}^s \kappa'_v ds'' \right]. \quad (2.32)$$

Εικόνα



Σχήμα 2.5 Διάγραμμα που δείχνει τα όρια της ολοκλήρωσης στο (2.32)

Εδώ το $I_v(s)$ είναι η ένταση $I_v(r, \Omega)$, και θεωρείται ως μία λειτουργία της συντεταγμένης s ως προς την ακτίνα. Η ολοκλήρωση ως προς την ακτίνα εκτελείται γενικά από το “ $-\infty$ ”, αν και στην πραγματικότητα είναι από το όριο του σώματος της ύλης s_0 (όπως φαίνεται από το Σχ.2.5). Η σταθερά της ολοκλήρωσης δηλώνεται από I_{v_0} .

Ας ξεκαθαρίσουμε την έννοια της παραπάνω λύσης. Η ακτινοβολία που περνά ανά μονάδα χρόνου μέσα από μία μονάδα περιοχής εγκάρσιας διατομής στο σημείο s (ανά μονάδα στερεάς γωνίας) συνίσταται από όλα τα φωτόνια που «γεννιούνται» σε έναν κύλινδρο. Μία ποσότητα ακτινοβολίας $j_v ds' = \kappa'_v I_{vp} ds'$ δημιουργείται στο σημείο s' στο τμήμα της ακτίνας ds' και διαδίδεται κατά μήκος της ακτίνας Ω μέσα σε μια μονάδα στερεάς γωνίας. Μόνο το χώρισμα $\exp \left[- \int_{s'}^s \kappa'_v ds'' \right]$ αυτής της ακτινοβολίας φτάνει από το σημείο s' στο σημείο s καθώς η υπόλοιπη απορροφάται στη διαδρομή. Η συνολική ένταση συνίσταται από φωτόνια που δημιουργούνται σε όλα τα βασικά τμήματα ds' δηλαδή, είναι ίση με το ολοκλήρωμα ως προς την ακτίνα. Εάν το υλικό σώμα που εκπέμπει ακτινοβολία έχει ορισμένες διαστάσεις, τότε η ολοκλήρωση πρέπει να διεξαχθεί από το όριο του σώματος s_0 στο σημείο s . Με αυτό τον τρόπο προκύπτει ο πρώτος όρος στο (2.32). Ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει την ακτινοβολία που εισχώρησε στο σώμα στο σημείο s_0 από εξωτερικές πηγές. Η σταθερά της ολοκλήρωσης I_{v_0} είναι η ένταση αυτής της εξωτερικής ακτινοβολίας που εισχωρεί στο σώμα. Ο παράγοντας $\exp \left[- \int_{s_0}^s \kappa'_v ds'' \right]$ μετράει για τη μείωση της έντασης κατά το διάστημα από s_0 σε s που προκαλείται από την απορρόφηση. Ο συντελεστής απορρόφησης κ'_v και η ένταση ισορροπίας I_{vp} είναι λειτουργίες της θέσης κατά μήκος της ακτίνας, εξαιτίας της εξάρτησής τους από τη

θερμοκρασία και την πυκνότητα που κατανομούνται με κάποιο τρόπο κατά μήκος της ακτίνας. Εάν αυτές οι λειτουργίες είναι γνωστές, τότε ο καθορισμός της έντασης σε οποιοδήποτε σημείο του σώματος ύλης μειώνεται όπως εύκολα φαίνεται από το (2.32), απλά σε μια τετραγωνοποίηση και ολοκλήρωση κατά μήκος της ακτίνας.

Ας γενικεύσουμε τη λύση (2.32) στην ασταθή περίπτωση, όπου η θερμοκρασία και η πυκνότητα, και συνεπώς το I_{vp} , κ'_v καθώς επίσης και η ένταση I_v είναι λειτουργίες του χρόνου. Είναι προφανές ότι στο χρόνο t και στο σημείο s τα φωτόνια φτάνουν από το σημείο s' που δημιουργήθηκε σε προγενέστερο χρόνο $t-(s-s')/c$. Όπως πριν, τα φωτόνια απορροφούνται από το υλικό σε ένα σημείο s'' κατά μήκος της ακτίνας. Αυτή η απορρόφηση καθορίζεται από το μέγεθος του συντελεστή απορρόφησης στο χρόνο $t-(s-s'')/c$. Προκύπτει ότι η ασταθής περίπτωση της εξίσωσης μεταφοράς μπορεί να γραφτεί με την παρακάτω μορφή

$$I_v(s, t) = \int_{s_0}^s (\kappa'_v I_{vp})_{s', t-(s-s')/c} \exp \left[- \int_{s'}^s (\kappa'_v)_{s'', t-(s-s'')/c} ds'' \right] ds' + (I_{v_0})_{s_0, t-(s-s_0)/c} \exp \left[- \int_{s_0}^s (\kappa'_v)_{s'', t-(s-s'')/c} ds'' \right], \quad (2.33)$$

όπου η συνεταγμένη του ορίου s_0 είναι στο χρόνο $t-(s-s_0)/c$. Είναι εύκολο να δείξουμε με άμεση ενσωμάτωση ότι η λύση (2.33) ικανοποιεί την εξίσωση ασταθής μεταφοράς. Είναι φανερό από το (2.32) και (2.33) ότι η συνεισφορά των πηγών σε ένα πολύ απορροφητικό μέσο στη συνολική ένταση σε ένα δεδομένο σημείο μειώνεται εκθετικά με την απόσταση. Τα φωτόνια που φτάνουν στο σημείο s δημιουργούνται στην άμεση εγγύτητα σε αποστάσεις που δεν ξεπερνούν τις πολλές μέσες ελεύθερες διαδρομές της ακτινοβολίας, ή πιο συγκεκριμένα, σε αποστάσεις που δεν ξεπερνούν τα πολλά οπτικά πλάτη. Αυτή η κατάσταση είναι εύκολο να εντοπιστεί στην περίπτωση που ο συντελεστής απορρόφησης είναι σταθερός κατά μήκος της ακτίνας. Τότε οι εκθετικοί παράγοντες γίνονται

$$\exp \left[- \int_{s'}^s \kappa'_v ds'' \right] = \exp [- \kappa'_v (s - s')] = \exp \left[- \frac{s - s'}{l'_v} \right]; \quad l'_v = \frac{1}{\kappa'_v}.$$

Η περίπτωση ακριβούς διαβάθμισης της θερμοκρασίας αποτελεί μία εξαίρεση. Εδώ, η επίδραση της αύξησης στο συντελεστή εκπομπής $j_v = \kappa'_v I_{vp}$ με την απόσταση από ένα σημείο μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την επίδραση της απορρόφησης ως προς την ίδια διαδρομή. Αυτό, όμως, δεν συμβαίνει σχεδόν ποτέ στην πράξη, και η κύρια συνεισφορά στα ολοκληρώματα σε (2.32) και (2.33) παρέχεται από το τμήμα της ακτίνας στη γειτονική περιοχή του σημείου που εξετάζουμε. Το μήκος του τμήματος είναι της τάξεως πολλών (δύο ή τριών) μέσων ελεύθερων διαδρομών ακτινοβολίας. Το φως, όμως, διανύει αυτή την απόσταση σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα l'_v/c το οποίο, εξ ορισμού, είναι πολύ συντομότερο από χαρακτηριστικούς χρόνους που απαιτούνται για να γίνει οποιαδήποτε σημαντική αλλαγή στην κατάσταση (θερμοκρασία και πυκνότητα) του υλικού. Για παράδειγμα, για μία μέση ελεύθερη διαδρομή $l'_v = 3\text{cm}$ αυτή τη φορά είναι $l'_v/c \approx 10^{-10}\text{sec}$, που είναι πολύ μικρότερο από τους χαρακτηριστικούς χρόνους που συναντάμε σε συνηθισμένες ροές. Αυτή είναι απλά μία επίπτωση του γεγονότος ότι η ταχύτητα του

ρευστού είναι συνήθως πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός. Το γεγονός που σημειώθηκε παραπάνω είναι αρκετά σημαντικό. Δείχνει ότι το πεδίο της ακτινοβολίας σε όλες τις περιπτώσεις μπορεί να θεωρηθεί ως ημισταθερό σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Αυτή η συνθήκη αντιστοιχεί σε μία στιγμιαία κατανομή των πηγών εκπομπής και απορρόφησης, δηλαδή, μία κατανομή της θερμοκρασίας και της πυκνότητας στο ρευστό. Ως αποτέλεσμα, μπορούμε να γνωρίσουμε την παράγωγο της έντασης σε σχέση με το χρόνο στην εξίσωση της ακτινικής μεταφοράς και να θεωρήσουμε το χρόνο ως μία παράμετρο από την οποία θα εξαρτηθούν η θερμοκρασία και η πυκνότητα (και επομένως, I_{vp} και κ'_v). Στο εξής λοιπόν πάντα θα χρησιμοποιούμε την απλουστευμένη εξίσωση μεταφοράς

$$\Omega \cdot \nabla I_v = \kappa'_v(I_{vp} - I_v) \quad (2.34)$$

ή την λύση της με τη μορφή του (2.32).

§7. Ακτινοβολία από ένα επίπεδο στρώμα

Γενικά, η μεταφορά ακτινοβολίας και η ακτινοβολούμενη ανταλλαγή θερμότητας έχουν μία επίδραση στην κατάσταση του ρευστού, στην κίνησή του, ή στη σταθερή κατανομή της θερμοκρασίας. Αυτή η επίδραση προκαλείται από το γεγονός ότι το ρευστό με το να εκπέμπει ή να απορροφά φως είτε χάνει είτε αποκτά ενέργεια, έτσι ώστε ή ψύχεται ή θερμαίνεται. Γενικά η κατάσταση του ρευστού μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις υδροδυναμικής οι οποίες, στην παρουσία θερμικής ανταλλαγής ακτινοβολίας, πρέπει να γενικεύονται ώστε να συμπεριλαμβάνουν την αλληλεπίδραση μεταξύ της ακτινοβολίας και του ρευστού. Αφού η ακτινική μεταφορά είναι επίσης μία λειτουργία της κατάστασης του ρευστού, της θερμοκρασίας και της πυκνότητας, τότε το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει και το ρευστό και την ακτινοβολία συνίσταται γενικά από ένα γενικευμένο σύνολο υδροδυναμικών εξισώσεων μαζί με μία γενικευμένη εξίσωση ακτινικής μεταφοράς. Σε πολλές περιπτώσεις, όμως, η αμοιβαία επίδραση της ακτινοβολίας στο ρευστό είναι είτε όχι τόσο μεγάλη, είτε μπορεί να εξηγηθεί από κάποια κατά προσέγγιση μέθοδο. Για παράδειγμα, σε ικανοποιητικά χαμηλές θερμοκρασίες η ακτινοβολία εναλλαγή θερμότητας και η απώλειες ενέργειας που υφίσταται το ρευστό από την ακτινοβολία είναι ασήμαντες. Σε αυτή την περίπτωση, η κατάσταση του ρευστού είναι πρακτικά ανεξάρτητη από την ακτινοβολία και το πρόβλημα του προσδιορισμού του πεδίου ακτινοβολίας και της κατάστασης του ρευστού μπορεί να αντιμετωπιστεί ξεχωριστά. Η κατάσταση του ρευστού περιγράφεται, για παράδειγμα, από τις υδροδυναμικές εξισώσεις, ενώ το πεδίο ακτινοβολίας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μπορεί να βρεθεί από τις γνωστές κατανομές θερμοκρασίας και πυκνότητας και από τους γνωστούς συντελεστές απορρόφησης. Σε αυτή την περίπτωση δεν μας ενδιαφέρει να καθορίσουμε το συνολικό πεδίο ακτινοβολίας στο μέσο (αφού δεν επηρεάζει την κατάστασή του), αλλά μας ενδιαφέρει περισσότερο να καθορίσουμε την ακτινοβολία που εκπέμπεται από την επιφάνεια του σώματος του ρευστού, δηλαδή, την φωτεινότητα του θερμού σώματος, τη φωτεινότητα της επιφάνειας, το φάσμα της ακτινοβολίας, τη γωνιακή κατανομή της ροής, και ου το καθεξής. Εάν τα οπτικά χαρακτηριστικά του ρευστού είναι γνωστά, δηλαδή, ο συντελεστής

απορρόφησης κ'_v * δίνεται ως λειτουργία της συχνότητας και της κατανομής της θερμοκρασίας και της πυκνότητας στο σώμα του ρευστού, τότε η απάντηση σε όλα αυτά τα προβλήματα δίνεται από το ολοκλήρωμα για την ένταση (2.32).

Εξετάζοντας την ακτινοβολία που εκπέμπεται από την επιφάνεια του σώματος του ρευστού, μπορούμε, χωρίς να υπάρχει απώλεια της γενικότητας, να μετρήσουμε την απόσταση s κατά μήκος της ακτίνας από την επιφάνεια μέσα στο ρευστό σώμα (αλλάζοντας το σημάδι του s) και να επεκτείνουμε την ολοκλήρωση ως προς την ακτίνα επ' άπειρον,

$$I_v(\Omega) = \int_0^{\infty} I_{vp}[T(s)] \exp\left(-\int_0^s \kappa'_v ds'\right) \kappa'_v(s) ds. \quad (2.35)$$

Εάν το σώμα έχει ορισμένες διαστάσεις τότε ο συντελεστής απορρόφησης έξω από τα όριά του είναι ίσος με 0 και το αντίστοιχο τμήμα ολοκλήρωσης θα εξαφανιστεί. Εάν εξωτερική ακτινοβολία εισχωρήσει σε ένα σώμα ορισμένων διαστάσεων από «πίσω» (μέσω της «πίσω» επιφάνειάς του) τότε με το να επεκτείνουμε την ολοκλήρωση ως προς την ακτίνα επ' άπειρον θα συμπεριλάβουμε επίσης και την επίπτωση αυτών των εξωτερικών πηγών. Ας εξετάσουμε μερικά απλά παραδείγματα πρακτικού ενδιαφέροντος. Το σώμα της ύλης $α$ καταλαμβάνει ένα αόριστο μεσοδιάστημα $x > 0$ και $α$ συνδέεται με μία επίπεδη επιφάνεια. Η θερμοκρασία του σώματος είναι σταθερή ενώ ο συντελεστής απορρόφησης μπορεί να ποικίλει αυθαίρετα από σημείο σε σημείο (αλλά με τέτοιο τρόπο ώστε το οπτικό πάχος του σώματος $\int_0^{\infty} \kappa'_v dx$ παραμένει αόριστο). Η ένταση της ακτινοβολίας στην επιφάνεια είναι, σε αυτή την περίπτωση, απλά $I_{vp}(T)$ αφού

$$I_v(\Omega) = \int_0^{\infty} I_{vp} e^{-z} dz = I_{vp}; \quad dz = \kappa'_v ds, \quad z = \int_0^s \kappa'_v ds.$$

Το σώμα ακτινοβολεί σαν ένα τέλειο μαύρο σώμα στη θερμοκρασία T . Η ένταση I_v είναι η ποσότητα της ακτινοβολίας ενέργειας που περνά ανά μονάδα χρόνου από μία συμπαγή γωνία και μέσα από μία ενιαία περιοχή κάθετη στην κατεύθυνση της δέσμης φωτονίων†. Για ένα μαύρο σώμα που ακτινοβολεί αυτή η ένταση είναι ανεξάρτητη από τη γωνία. Η ακτινοβολία ενέργεια που περνά ανά μονάδα χρόνου από μία ενιαία περιοχή της επιφάνειας ανά μονάδα συμπαγής γωνίας και σε μία γωνία ϑ στη φυσιολογική (ας αποκαλούμε αυτή την ποσότητα ως την εκπομπή του σώματος $i_v \ddagger$) είναι

$$i_v = I_v(\vartheta) \cos \vartheta. \quad (2.36)$$

* Θυμόμαστε πως εξετάζουμε εδώ με ενδείξεις διάθλασης ίσες με την ενότητα, όπως αέρια.

† Οι διαστάσεις της I_v είναι $\text{ενέργεια/cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sterad} \cdot \text{frequency} - \text{erg/cm}^2 \cdot \text{sterad}$

‡ Αυτό δεν θα πρέπει να το συγχέουμε με τον συντελεστή εκπομπής ενός μέσου j_v ή J_v

Για ένα μαύρο σώμα που ακτινοβολεί

$$i_v = I_{vp} \cos \vartheta. \quad (2.37)$$

Ας εξετάσουμε την ακτινοβολία ενός επίπεδου στρώματος ορισμένου πάχους d σε σταθερή θερμοκρασία T και με έναν συντελεστή απορρόφησης κ'_v . Η ένταση της ακτινοβολίας στην επιφάνεια σε μία κατεύθυνση που κάνει μία γωνία ϑ με τη φυσιολογική (Σχ.2.6) είναι

$$\begin{aligned} I_v(\vartheta) &= \int_0^{d/\cos \vartheta} I_{vp} e^{-\frac{\kappa'_v x}{\cos \vartheta}} \kappa'_v \frac{dx}{\cos \vartheta} = \int_0^{\kappa'_v d/\cos \vartheta} I_{vp} e^{-\frac{\tau_v}{\cos \vartheta}} \frac{d\tau_v}{\cos \vartheta} \\ &= I_{vp} \left(1 - e^{-\frac{\kappa'_v d}{\cos \vartheta}}\right) = I_{vp} \left(1 - e^{-\frac{\tau_v}{\cos \vartheta}}\right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

όπου $\tau_v = \int_0^d \kappa'_v dx$ είναι το οπτικό πάχος του στρώματος στην κατεύθυνση φυσιολογικά στην επιφάνεια.

Η εξίσωση (2.38) δείχνει πως η ένταση της ακτινοβολίας για ένα στρώμα ορισμένου πάχους είναι πάντοτε πιο χαμηλή από την ισορροπία της έντασης. Το φάσμα διαφέρει από το φάσμα Planck $I_{vp}(T)$ από τον παράγοντα $[1 - \exp(-\tau_v/\cos \vartheta)]$. Αυτός ο παράγοντας είναι μια λειτουργία της συχνότητας εξαιτίας της εξάρτησης της συχνότητας από το συντελεστή απορρόφησης και πλησιάζει την ενότητα μόνο καθώς $d \rightarrow \infty$.

Αυτή η διαφορά ανάμεσα στην ένταση και την ένταση Planck είναι εντονότατη στην κατεύθυνση φυσιολογικά στην επιφάνεια, όπου το τμήμα της ακτίνας που περιέχει τις πηγές έχει ένα ελάχιστο μήκος (ίσο με d). Το φάσμα της έντασης πλησιάζει το φάσμα Planck σε μεγάλες γωνίες προς το φυσιολογικό όπου $\vartheta \rightarrow \pi/2$ και $\vartheta \rightarrow 0$.

Η μεγαλύτερη διαφορά ανάμεσα στο φάσμα και το φάσμα Planck ως μία λειτουργία του πάχους του στρώματος d παρατηρείται στο όριο ενός οπτικά λεπτού στρώματος, σε τέτοιες γωνίες ώστε $\kappa'_v d/\cos \vartheta \ll 1$. Επεκτείνοντας τον εκθετικό παράγοντα βρίσκουμε ότι στη δεύτερη τάξη

$$I_v = I_{vp} \frac{\kappa'_v d}{\cos \vartheta} \ll I_{vp}. \quad (2.39)$$

Η ένταση στην επιφάνεια είναι ανάλογη σε $1/\cos \vartheta$ και η εκπομπή του στρώματος είναι ανεξάρτητη της γωνίας

$$i_v = I_v \cos \vartheta = I_{vp} \kappa'_v d \quad \text{for } \cos \vartheta \gg \tau_v. \quad (2.40)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η εφαρμοσιμότητα της έννοιας του οπτικού πάχους ενός στρώματος εξαρτάται από τη γωνία : δηλαδή, είναι πάντα πιθανόν να βρούμε αρκετά μεγάλες γωνίες ($\vartheta \approx \pi/2$, $\cos \vartheta \ll 1$), για τις οποίες το στρώμα θα είναι «οπτικά παχύ». Άρα σε μία γωνία $\vartheta \approx \pi/2$, ακόμη και ένα στρώμα με $\tau_v \ll 1$ θα ακτινοβολεί σαν ένα μαύρο σώμα. Για μικρές γωνίες, όπου $\tau_v/\cos \vartheta \ll 1$ και το στρώμα είναι οπτικά λεπτό, το σώμα θα ακτινοβολεί ως ένας **volume radiator**, και τα φωτόνια που δημιουργούνται σε οποιοδήποτε

σημείο απορρέουν από το στρώμα χωρίς καμία απορρόφηση στη διέλευση. Δεν υπάρχει αυτοαπορρόφηση στο στρώμα και κάθε στοιχείο όγκου συμβάλλει ισοδύναμα στη συνολική ακτινοβολία που προέρχεται από την επιφάνεια. Για αυτό το λόγο, χρησιμοποιούμε τον όρο **volume radiator**. Εάν ένα οπτικά παχύ σώμα ακτινοβολεί «από την επιφάνεια», επειδή τα φωτόνια που δημιουργούνται βαθιά μέσα στο σώμα απορροφούνται κατά τη διάρκεια της διέλευσης και δεν εκπέμπονται.

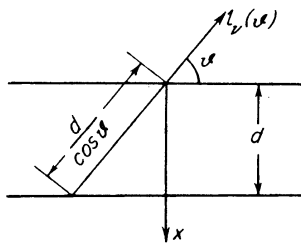
Σε πολλές περιπτώσεις δεν ενδιαφερόμαστε για την ένταση της ακτινοβολίας σε μια δεδομένη γωνία αλλά για την ενέργεια της ροής της ακτινοβολίας από την επιφάνεια του σώματος, δηλαδή, για την ποσότητα της ενέργειας που περνά ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα επιφάνειας προς όλες τις κατευθύνσεις.

Αυτή η ποσότητα αποκαλείται ως φωτεινότητα της επιφάνειας (φασματική ή ολοκληρωμένη). Η φασματική φωτεινότητα της επιφάνειας είναι, προφανώς, ισοδύναμη με

$$S_v = \int_{\text{over a hemisphere}} \cos \vartheta I_v(\Omega) d\Omega, \quad (2.41)$$

όπου το $I_v(\Omega)$ δίνεται από το (2.35) και το ϑ είναι η γωνία ανάμεσα στην κατεύθυνση της διάδοσης της ακτινοβολίας και στο φυσιολογικό της επιφάνειας.

Εικόνα



Σχήμα 2.6. Διάγραμμα που απεικονίζει το πρόβλημα της ακτινοβολίας από ένα επίπεδο στρώμα.

Ας βρούμε τη φωτεινότητα της επιφάνειας ενός επίπεδου στρώματος ` θα υποθέσουμε πως η θερμοκρασία και ο συντελεστής απορρόφησης είναι μεταβλητά αλλά είναι και λειτουργίες της συντεταγμένης x μόνο (Σχ.2.6). Αντικαθιστούμε το ds στο (2.35) με $dx/\cos \vartheta$ και εισάγουμε το οπτικό πάχος.

$$d\tau'_v = \kappa'_v dx, \quad \tau'_v = \int_0^x \kappa'_v dx. \quad (2.42)$$

Τότε,

$$I_v(\vartheta) = \int_0^\infty I_{vp} e^{-\frac{\tau'_v}{\cos \vartheta}} \frac{d\tau'_v}{\cos \vartheta}, \quad \frac{\pi}{2} > \vartheta > 0. \quad (2.43)$$

Εντάσσοντας αυτή την έκφραση στο (2.41) και ολοκληρώνοντας ως προς όλες τις γωνίες $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$

$$\begin{aligned} S_v &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\infty I_{vp} e^{-\frac{\tau'_v}{\cos \vartheta}} \frac{d\tau'_v}{\cos \vartheta} \\ &= 2\pi \int_v^\infty I_{vp} d\tau'_v \int_0^1 d(\cos \vartheta) e^{-\frac{\tau'_v}{\cos \vartheta}}. \end{aligned}$$

Επειτα εισάγουμε τη μεταβλητή $w=1/\cos \vartheta$ και λαμβάνουμε υπόψη τον ορισμό του πινακογραφημένου εκθετικού ολοκληρώματος,

$$E_n(z) = \int_1^\infty e^{-zw} \frac{dw}{w^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.44)$$

Με το να αντικαταστήσουμε την ένταση της ισορροπίας με την ενέργεια της πυκνότητας της ισορροπίας μέσα από τη σχέση $I_{vp}=cU_{vp}/4\pi$ προκύπτει ότι

$$S_v = \frac{c}{2} \int_0^\infty U_{vp}[T(\tau'_v)] E_2(\tau'_v) d\tau'_v \quad (2.45)$$

ή, για ένα στρώμα ορισμένου οπτικού πάχους $\tau_v = \int_0^d \kappa'_v dx$,

$$S_v = \frac{c}{2} \int_0^{\tau_v} U_{vp} E_2(\tau'_v) d\tau'_v. \quad (2.46)$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα του εκθετικού ολοκληρώματος

$$\int_0^\infty E_2(z) dz = \frac{1}{2},$$

προκύπτει, για ένα ημιορισμένο σώμα σε σταθερή θερμοκρασία,

$$S_v = \frac{cU_{vp}}{4} = S_{vp}. \quad (2.47)$$

Όπως θα έπρεπε να ήταν αναμενόμενο, η φασματική φωτεινότητα της επιφάνειας είναι ίση με τη φωτεινότητα ενός τέλειου μαύρου σώματος. Η φωτεινότητα ενός ορισμένου πάχους στρώματος σε σταθερή θερμοκρασία δίνεται από

$$S_v = \frac{cU_{vp}}{2} \int_0^{\tau_v} E_2(\tau'_v) d\tau'_v = \frac{cU_{vp}}{4} [1 - 2E_3(\tau_v)] = S_{vp}[1 - 2E_3(\tau_v)]. \quad (2.48)$$

Αυτή η φωτεινότητα είναι πάντα χαμηλότερη από τη φωτεινότητα ενός τέλειου μαύρου σώματος στην ίδια θερμοκρασία, και πλησιάζει την τελευταία καθώς $\tau_v \rightarrow \infty$. Για ένα οπτικά λεπτό στρώμα

$$\begin{aligned} \tau_v \ll 1, \quad E_2(\tau'_v) &\approx E_2(0) = 1, \\ 2E_3(\tau_v) &\approx 1 - 2\tau_v \end{aligned} \quad (2.49)$$

και

$$S_v = \frac{cU_{vp}}{2} \tau_v = S_{vp} \cdot 2\tau_v, \quad 2\tau_v \ll 1. \quad (2.50)$$

§8. Η θερμοκρασία της φωτεινότητας της επιφάνειας σε ένα ανομοιόμορφα θερμαινόμενο σώμα.

Η φασματική φωτεινότητα της επιφάνειας ενός ανομοιόμορφα θερμαινόμενου σώματος χαρακτηρίζεται περισσότερο βολικά από τη θερμοκρασία της φωτεινότητας* T_{vbr} . Η τελευταία δηλώνει τη θερμοκρασία ενός τέλειου μαύρου σώματος που εκπέμπει από την επιφάνειά του την ίδια ποσότητα ακτινοβολίας σε μία δεδομένη συχνότητα όπως το σώμα που εξετάζουμε. Εξισώνοντας τα (2.46) και (2.47) προκύπτει μία έκφραση για τη θερμοκρασία της φωτεινότητας στην επίπεδη περίπτωση

$$U_{vp}(T_{vbr}) = 2 \int_0^{\tau_v} U_{vp}[T(\tau'_v)] E_2(\tau'_v) d\tau'_v, \quad (2.51)$$

ή, αντικαθιστώντας τη λειτουργία Planck με U_{vp} ,

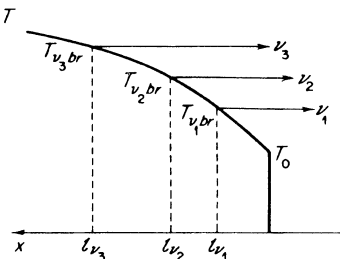
$$\frac{1}{e^{hv/kT_{v,br}} - 1} = 2 \int_0^{\tau_v} \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} E_2(\tau'_v) dt'_v. \quad (2.52)$$

Η θερμοκρασία της φωτεινότητας είναι μία λειτουργία της συχνότητας. Μόνο στην περίπτωση ενός τέλει μαύρου σώματος είναι ίδια για όλες τις συχνότητες και τότε ισούται με τη θερμοκρασία του υλικού. Μπορεί κανείς να εισάγει τη θερμοκρασία φωτεινότητας για την ολοκληρωμένη ακτινοβολία με βάση τον ορισμό

$$S = \sigma T_{br}^4 \quad (2.53)$$

όπου S είναι η ολοκληρωμένη ροή ενέργειας που προέρχεται από την επιφάνεια του σώματος. Προφανώς, η θερμοκρασία της φωτεινότητας για την ολοκληρωμένη ακτινοβολία είναι μία μέση αξία με βάση τις φασματικές θερμοκρασίες φωτεινότητας.

Εικόνα



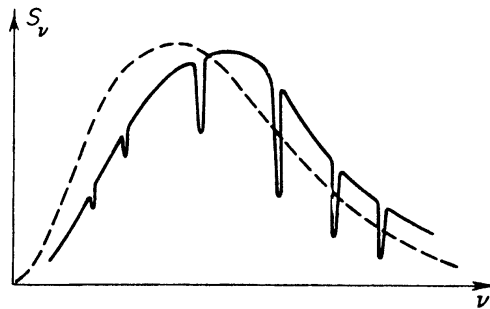
Σχήμα 2.7. Η όψη της θερμοκρασίας για ένα σώμα που ακτινοβολεί του οποίου η θερμοκρασία μειώνεται προς την επιφάνεια.

Ας εξετάσουμε τη σχέση ανάμεσα στο φάσμα ακτινοβολίας ενός σώματος και την εξάρτηση της συχνότητας από το συντελεστή απορρόφησης. Σκεφτείτε ένα οπτικά παχύ σώμα και η ακτίνα της καμπυλότητας της επιφάνειας ας είναι μεγάλη σε σχέση με τη μέση ελεύθερη διαδρομή της ακτινοβολίας, έτσι ώστε το σώμα να μπορεί να θεωρείται επίπεδο. Ας πούμε πως η θερμοκρασία μειώνεται προς την επιφάνεια όπως φαίνεται στο Σχ. 2.7.

*.Σημείωση του εκδότη. Ορισμένη ως αποτελεσματική θερμοκρασία από τους συγγραφείς.

Η ακτινοβολία ροή ενέργειας της συχνότητας ν που ξεκινά από την επιφάνεια καθορίζεται από το ολοκλήρωμα ως προς όλες τις πηγές (βλ. (2.45)). Αφού το εκθετικό ολοκλήρωμα μειώνεται γρήγορα με τ'_v για την αυτοαπορρόφηση, η βασική συνεισφορά του ολοκληρώματος θα προέλθει από το στρώμα της τάξεως της μέσης ελεύθερης διαδρομής της ακτινοβολίας l'_v στο γειτονικό χώρο της επιφάνειας (με ένα οπτικό πάχος τ'_v). Με άλλα

λόγια, τα φωτόνια, που εκπέμπονται από την επιφάνεια του σώματος, δημιουργούνται κυρίως σε ένα στρώμα κοντά στην επιφάνεια με ένα οπτικό πάχος της τάξεως της ενότητας. Αυτό το στρώμα μπορεί να ονομαστεί το ακτινοβόλο στρώμα. Τα φωτόνια που γεννιούνται σε στρώματα πολύ πιο απομακρυσμένα από την επιφάνεια απορροφούνται σχεδόν εντελώς πριν φτάσουν στην επιφάνεια. Η θερμοκρασία της φωτεινότητας, όπως προκύπτει από την εξίσωση (2.52), είναι επομένως ίση με κάποια μέση θερμοκρασία του ακτινοβόλου στρώματος, τα φωτόνια που ξεκινούν από την επιφάνεια με συχνότητες για τις οποίες η απορρόφηση είναι ισχυρότερη και η μέση ελεύθερη διαδρομή της ακτινοβολίας είναι συντομότερη, ακτινοβολούνται στα λιγότερο θερμά στρώματα πιο κοντά στην επιφάνεια. Αντίστροφα, οι συχνότητες στις οποίες η απορρόφηση είναι πιο αδύναμη ξεκινούν από τα βαθύτερα και πιο θερμά στρώματα. Άρα, εάν η θερμοκρασία του ρευστού μειώνεται προς την επιφάνεια (όπως συνήθως γίνεται), η θερμοκρασία της φωτεινότητας για τις ισχυρά απορροφημένες συχνότητες είναι λιγότερη από εκείνη για τις αδύναμα απορροφημένες συχνότητες. Αυτό αναπαρίσταται σχηματικά στο Σχ.2.7 από τα βέλη που δείχνουν τα σημεία για τα οποία τα φωτόνια διαφορετικών συχνοτήτων μπορούν να θεωρούνται ότι ξεκινούν. Αυτά τα σημεία τοποθετούνται σχετικά στην επιφάνεια σε αποστάσεις της τάξεως των μέσων ελεύθερων διαδρομών των φωτονίων. Το φάσμα της ακτινοβολίας για ένα ανομοιόμορφα θερμαινόμενο σώμα είναι διαφορετικό από το φάσμα Planck : η διαφορά είναι ότι όσο πιο έντονο τόσο πιο μεγάλη είναι η εξάρτηση του συντελεστή απορρόφησης από τη συχνότητα και τη θερμοκρασία, και τόσο πιο απότομη είναι η καμπύλη της θερμοκρασίας κοντά στην επιφάνεια (σε αποστάσεις της τάξεως των μέσων ελεύθερων διαδρομών των φωτονίων).



Σχήμα 2.8. Σχηματικό διάγραμμα του φάσματος της ακτινοβολίας ενός σώματος με μία θερμοκρασία η οποία μειώνεται προς την επιφάνεια. Οι χαμηλές συχνότητες απορροφούνται πιο έντονα από τις υψηλές συχνότητες. Η διακεκομμένη καμπύλη δείχνει το φάσμα Planck που αντιστοιχεί στη μέση θερμοκρασία της φωτεινότητας της ακτινοβολίας. Οι επιλεκτικές γραμμές απορρόφησης διακόπτονται στο φάσμα. Η ροή στα κέντρα των γραμμών είναι πρακτικά ίση με τη ροή Planck που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία της επιφάνειας του σώματος.

Το Σχ.2.8 είναι μια σχηματική αναπαράσταση του φάσματος ακτινοβολίας ενός σώματος με μία θερμοκρασία που μειώνεται προς την επιφάνεια και με ένα συντελεστή απορρόφησης που ποικίλει αντίστροφα με τη συχνότητα, πχ., με τις χαμηλότερες

συχνότητες να απορροφούνται πιο εύκολα από τις υψηλότερες. Οι διακριτές γραμμές, που αντιστοιχούν στις συνδεδεμένες μεταφορές σε άτομα ή ιόντα, έχουν επιτεθεί στο συνεχές φάσμα. Οι συντελεστές απορρόφησης αυτών των γραμμών είναι πάντα πολύ υψηλοί, πολύ υψηλότεροι από το συνεχές φάσμα. Άρα, η θερμοκρασία φωτεινότητας αυτών των γραμμών σχεδόν συμπίπτει ακριβώς με τη θερμοκρασία πλησίον της επιφάνειας του σώματος (οι γραμμές κόβονται στο φάσμα της ακτινοβολίας του σώματος). Για να συγκρίνουμε, η διακεκομμένη γραμμή στο Σχ.2.8 δείχνει το φάσμα Planck που αντιστοιχεί στην ολοκληρωμένη θερμοκρασία φωτεινότητας, που είναι μία μέση εκ των φασματικών θερμοκρασιών. Βάση του ορισμού της ολοκληρωμένης θερμοκρασίας φωτεινότητας, οι περιοχές που συνδέονται από συμπαγείς και διακεκομμένες γραμμές είναι ακριβώς ισοδύναμες.

Θα δείξουμε στο Κεφάλαιο V ότι οι σταθεροί συντελεστές απορρόφησης δεν είναι λειτουργίες της συχνότητας αλλά υφίστανται αντίστοιχες ασυνεχείς απότομες μεταβολές σε υψηλές θερμοκρασίες. Αυτό αποφέρει αντίστοιχες απότομες μεταβολές στο φάσμα της ακτινοβολίας του σώματος. (Αυτό δεν φαίνεται στο Σχ.2.8, το οποίο υποθέτει μια αμυδρή εξάρτηση του κ_ν στο ν .)

Η έννοια της χρωματικής θερμοκρασίας συχνά χρησιμοποιείται σε οπτικές μετρήσεις της φωτεινότητας των θερμών σωμάτων. Ο όρος χρωματική θερμοκρασία χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη θερμοκρασία ενός τέλει μαύρου σώματος, που θα απέδιδε μια αναλογία φωτεινότητας σε δύο διαφορετικές φασματικές περιοχές (για παράδειγμα στην κόκκινη και μωβ περιοχή του φάσματος) ίσες με την αναλογία που μετριέται πειραματικά.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς της φωτεινότητας και των χρωματικών θερμοκρασιών, μπορούμε εύκολα να βρούμε την κοινή τους σχέση. Οι θερμοκρασίες φωτεινότητας στις συχνότητες ν_1 και ν_2 ας είναι T_1 και T_2 αντίστοιχα και η χρωματική θερμοκρασία να είναι T_{12} . Υποθέτοντας, πιο απλά, ότι και οι δύο γραμμές ν_1 και ν_2 βρίσκονται στη φασματική περιοχή Wien, δηλαδή, $h\nu_1/kT_1 \gg 1$, $h\nu_2/kT_2 \gg 1$, προκύπτει ότι

$$S_{\nu_1} \sim \nu_1^3 \exp\left(-\frac{h\nu_1}{kT_1}\right), \quad S_{\nu_2} \sim \nu_2^3 \exp\left(-\frac{h\nu_2}{kT_2}\right);$$

$$\frac{S_{\nu_1}}{S_{\nu_2}} = \frac{\nu_1^3}{\nu_2^3} \exp\left(-\frac{h\nu_1}{kT_1} - \frac{h\nu_2}{kT_2}\right) = \frac{\nu_1^3}{\nu_2^3} \exp\left(-\frac{h\nu_1 - h\nu_2}{kT_{12}}\right),$$

από το οποίο

$$\frac{\nu_1 - \nu_2}{T_{12}} = \frac{\nu_1}{T_1} - \frac{\nu_2}{T_2}. \quad (2.54)$$

Αν η θερμοκρασία του σώματος είναι σχεδόν σταθερή στα στρώματα ακτινοβολίας κοντά στην επιφάνεια μέσα σε όλο το βασικό φάσμα, τότε η χρωματική θερμοκρασία θα είναι συχνά πιο κοντά στην πραγματική θερμοκρασία του σώματος από ότι είναι στην θερμοκρασία φωτεινότητας. Αυτή η συνθήκη χρησιμοποιείται στην πυρομετρία για οπτικές

μετρήσεις των θερμοκρασιών. Μπορούμε να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση ενός ανομοιόμορφα θερμαινόμενου «γκρι» σώματος, του οποίου ο συντελεστής απορρόφησης κ_ν είναι ανεξάρτητος της συχνότητας ή $\kappa_\nu \equiv \kappa$ η θερμοκρασία φωτεινότητας για διαφορετικές συχνότητες παραμένει μία λειτουργία της συχνότητας. Μόνο για φωτόνια χαμηλής ενέργειας (στη φασματική περιοχή Rayleigh- Jeans $h\nu/kT \ll 1$) η συχνότητα ξεφεύγει από το (2.52) και η θερμοκρασία φωτεινότητας παραμένει ίδια για όλες τις συχνότητες.

§9. Κίνηση ενός ρευστού λαμβάνοντας υπόψη την θερμική ανταλλαγή της ακτινοβολίας.

Παραπάνω δώσαμε τις μεθόδους που μας βοηθούν να καθορίσουμε το πεδίο της ακτινοβολίας σε ένα σώμα ή ένα ρευστό, ή την ακτινοβολία που ξεκινά από την επιφάνεια, όταν η κατάσταση του ρευστού, δηλαδή, οι κατανομές της θερμοκρασίας και της πυκνότητας στο μέσο, είναι γνωστή. Ας διαμορφώσουμε τώρα το πρόβλημα για τον ταυτόχρονο καθορισμό της κατάστασης και της κίνησης του ρευστού και του πεδίου ακτινοβολίας. Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου η μεταφορά της ακτινοβολίας και η αλληλεπίδραση μεταξύ της ακτινοβολίας και του ρευστού έχουν μία ουσιαστική επίδραση και στην κίνηση και στην κατάσταση του μέσου (αερίου). Η κίνηση πάντα θα θεωρείται ως μη σχετικιστική, δηλαδή, θα υποθέσουμε ότι οι ταχύτητες της ροής είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός.

Αν η θερμοκρασία δεν είναι πολύ υψηλή, και η πυκνότητα του αερίου δεν είναι πολύ χαμηλή, τότε η πυκνότητα της ακτινοβολίας ενέργειας και η πίεση της ακτινοβολίας είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με την ενέργεια και πίεση του ρευστού. Ας υπολογίσουμε και ας συγκρίνουμε την ισορροπία της πυκνότητας της ακτινοβολίας ενέργειας $U_p = 4\sigma T^4/c$ και τη θερμική ενέργεια που περιέχεται σε μια μονάδα όγκου μονατομικού αερίου $E = 3/2 n k T$ (n είναι ο αριθμός των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου). Για παράδειγμα, για $n = 2.67 \cdot 10^{19}$ ανά cm^3 (το οποίο αντιστοιχεί στον αριθμό των μορίων στον αέρα σε συγκεκριμένη πυκνότητα), και οι δύο ενέργειες είναι ίσες σε μία θερμοκρασία $900,000^\circ\text{K}$. Στην πραγματικότητα η ακτινοβολία ενέργεια γίνεται συγκρίσιμη με την ενέργεια του ρευστού μόνο σε ακόμα πιο υψηλές θερμοκρασίες. Η θέρμανση του ρευστού έχει ως αποτέλεσμα τον ιονισμό των ατόμων, κάτι που οδηγεί πρώτα σε μια αύξηση στον αριθμό των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου και ύστερα στην πρόσθεση της ενέργειας ιονισμού στην θερμική ενέργεια. Άρα, η ακτινοβολία ενέργεια σε πραγματικό αέρα με συγκεκριμένες συνθήκες πυκνότητας γίνεται συγκρίσιμη με την εσωτερική ενέργεια του αέρα μόνο σε θερμοκρασίες περίπου $2,700,000^\circ\text{K}$. Σε ένα αρκετά αραιό αέριο η ισορροπία της ακτινοβολίας ενέργειας γίνεται συγκρίσιμη με την ενέργεια του ρευστού σε πολύ χαμηλότερες θερμοκρασίες (η θερμοκρασία στην οποία και οι δύο ενέργειες είναι ίσες είναι ανάλογη με $n^{1/3}$). Όμως, κάποιος πρέπει να είναι πολύ προσεκτικός κατά τη σύγκριση των ενεργειών σε αυτή την περίπτωση, αφού η μέση ελεύθερη διαδρομή της ακτινοβολίας σε ένα πολύ αραιό αέριο είναι πολύ μεγάλη και αν οι διαστάσεις του αερίου σώματος δεν είναι αρκετά μεγάλες, τότε

η πυκνότητα της ακτινοβολίας ενέργειας μπορεί τελικά να είναι πολύ χαμηλότερη από την ισορροπία της πυκνότητας της ενέργειας (βλ. παρακάτω).

Η πίεση της ακτινοβολίας και η πίεση του ρευστού σχετίζονται με τον ίδιο περίπου τρόπο όπως συμβαίνει και στις ενέργειες. Στην πραγματικότητα η πίεση της ακτινοβολίας (για ένα ανισοτροπικό πεδίο ακτινοβολίας) είναι $p_r = U/3$ και η πίεση του ρευστού είναι $p = (\gamma - 1)E$. Σε υψηλές θερμοκρασίες η τιμή της συγκεκριμένης αναλογίας είναι μεταξύ $5/3$ και ~ 1.15 , ανάλογα με την σύνθεση του αερίου, τη θερμοκρασία του, και την πυκνότητά του.

Άρα, σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες και όχι σε πολύ χαμηλές πυκνότητες, η πυκνότητα της ακτινοβολίας ενέργειας και η πίεση της ακτινοβολίας δεν έχει καμία επίδραση ούτε στην ισορροπία της ενέργειας ούτε στην κίνηση του ρευστού. Η επίδραση της ακτινοβολίας στην ισορροπία της ενέργειας και της κίνησης του αερίου διαμορφώνεται με έναν άλλο τρόπο : Η ακτινοβολία ενέργεια που χάνεται από το θερμό ρευστό σώμα και η ακτινοβολία μεταφορά θερμότητας στο μέσο μπορεί, γενικά, να γίνει αρκετά εκτιμητή. Αυτές οι επιδράσεις συχνά παίζουν σημαντικό ρόλο ακόμα και σε πολύ χαμηλότερες θερμοκρασίες, όπου και η ενέργεια και η πίεση της ακτινοβολίας είναι πολύ μικρές.

Η αιτία του παραπάνω φαινομένου υπό συνθηθισμένες συνθήκες είναι η διαφορά μεταξύ της ταχύτητας του ρευστού και της ταχύτητας του φωτός c ; $u \ll c$.

Ως αποτέλεσμα, η ροή της ενέργειας στο ρευστό και η ροή της ροής ακτινοβολίας μπορεί να συγκριθεί, ακόμα και αν η πυκνότητα της ακτινοβολίας ενέργειας είναι πολύ μικρότερη από την πυκνότητα της ενέργειας του ρευστού. Για παράδειγμα, στην οριακή περίπτωση όπου όλα τα φωτόνια κινούνται προς μία κατεύθυνση, η ροή της ακτινοβολίας ενέργειας είναι $S = Uc$ ενώ η ροή της ενέργειας του ρευστού είναι της τάξεως Eu , δηλαδή, το Uc μπορεί να είναι της τάξεως η και ακόμα μεγαλύτερης από Eu ακόμα και με $U \ll E$ επειδή $c \gg u$. Η ροή της ακτινοβολίας ενέργειας και η ροή της ενέργειας του ρευστού είναι συχνά συγκρίσιμες ακόμα και σε πραγματικές περιπτώσεις όπου το πεδίο ακτινοβολίας είναι σχετικά ισοτροπικό και η ροή του δικτύου της ακτινοβολίας ενέργειας S (ίσο με τη διαφορά μονόπλευρων ροών) είναι μικρότερη από τη μέγιστη οριακή αξία Uc (που αντιστοιχεί σε μία υπερβολική ανισοτροπία του πεδίου ακτινοβολίας). Όπως θα αποδείξουμε, η ποσότητα της ενέργειας που χάνεται ή, αντίστροφα που ελευθερώνεται στο ρευστό ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με την ακτινοβολία δίνεται από τη διαφοροποίηση της ροής της ακτινοβολίας. Έτσι, μία σύγκριση της ροής της ακτινοβολίας ενέργειας και της ροής της ενέργειας του ρευστού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να χαρακτηρίσει την σημασία της μεταφοράς της ακτινοβολίας θερμότητας στο μέσο.

Ας βρούμε την ενέργεια q που χάνεται από την ακτινοβολία σε μία μονάδα όγκου του ρευστού ανά μονάδα χρόνου. Αυτή η ενέργεια αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ της ενέργειας που εκπέμπεται από το ρευστό και της ενέργειας της ακτινοβολίας που απορροφάται από αυτό. Η διαφορά μεταξύ της εκπομπής και της απορρόφησης της ακτινοβολίας της συχνότητας ν (ανά μονάδα διαστήματος συχνότητας) και της κατεύθυνσης Ω (ανά μονάδα στερεάς γωνίας) ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα όγκου δίνεται από τη δεξιά πλευρά της εξίσωσης ακτινικής μεταφοράς (2.28). Η συνολική ενέργεια q που χάνεται ανά μονάδα όγκου του ρευστού ανά μονάδα χρόνου μπορεί να βρεθεί με το να ολοκληρώσουμε όλη την στερεά γωνία και ως προς όλες τις συχνότητες,

$$q = \int_0^\infty dv \int \kappa'_v(I_{vp} - I_v) d\Omega = c \int_0^\infty \kappa'_v(U_{vp} - U) dv. \quad (2.55)$$

Ο πρώτος όρος στην παρένθεση αντιστοιχεί στην αυθόρμητη εκπομπή, και ο δεύτερος όρος στην απορρόφηση. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνέχειας για την ακτινοβολία (2.29) στην οποία, σύμφωνα με πρωτότερους ισχυρισμούς μας στον ημιμόνιμο χαρακτήρα της ακτινικής μεταφοράς, μπορούμε να αγνοήσουμε την παράγωγο σε σχέση με το χρόνο, βρίσκουμε ότι η απώλεια ενέργειας είναι ίση με τη διαφοροποίηση της ολοκληρωμένης ροής ακτινοβολίας :

$$q = \int_0^\infty \nabla \cdot \mathbf{S}_v dv = \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (2.56)$$

Εάν το ρευστό ακτινοβολεί περισσότερη ενέργεια από αυτή που απορροφά, τότε η ενέργεια χάνεται στην ακτινοβολία, και $q > 0$ · εάν, όμως, απορροφάται περισσότερη ενέργεια από αυτήν που εκπέμπεται τότε το ρευστό θερμαίνεται από την ακτινοβολία και η απώλεια ενέργειας είναι αρνητική, $q < 0$.

Ας γράψουμε τώρα τις εξισώσεις αεριοδυναμικής συμπεριλαμβάνοντας την μεταφορά ακτινοβολίας θερμότητας, αλλά αγνοώντας την ενέργεια ακτινοβολίας και την πίεση. Η πρώτη από αυτές τις εξισώσεις – η εξίσωση της συνέχειας – παραμένει ίδια. Η εξίσωση της κίνησης επίσης παραμένει ίδια, επειδή αγνοούμε την πίεση της ακτινοβολίας. Μόνο η εξίσωση ενέργειας απαιτεί την εισαγωγή ενός όρου που περιγράφει τις απώλειες ενέργειας από την ακτινοβολία. Η εξίσωση της ενέργειας (1.10) τότε γίνεται *

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right] - q, \quad (2.57)$$

ή αντικαθιστώντας το q με τη διαφοροποίηση της ροής S

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \mathbf{S} \right]. \quad (2.58)$$

Έτσι, η ροή της ακτινοβολίας ενέργειας προστίθεται στη συνολική ροή της υδροδυναμικής ενέργειας. Με το να γράψουμε την εξίσωση αεριοδυναμικής για την ενέργεια με τη μορφή εξίσωσης εντροπίας (βλ. §1, Κεφάλαιο I), προκύπτει ότι

$$\rho T \frac{d\Sigma}{dt} = -q = -\nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (2.59)$$

όπου Σ είναι η συγκεκριμένη εντροπία του ρευστού.

* Υποθέτουμε ότι δεν συμβαίνουν άλλες πηγές ενέργειας και ούτε άλλες μη αναστρέψιμες διαδικασίες εκτός από την μεταφορά ακτινικής θερμότητας.

Σοβαρές μαθηματικές δυσκολίες συναντάμε όταν θέλουμε να βρούμε το πεδίο ακτινοβολίας και την κατανομή της θερμοκρασίας σε ένα μέσο όταν η μεταφορά της ακτινοβολίας θερμότητας έχει μεγάλη επίδραση στην ισορροπία της ενέργειας. Η χωρική παράγωγος στην εξίσωση της μεταφοράς (2.34) που περιγράφει το πεδίο ακτινοβολίας διαμορφώνεται για μία φασματική ένταση ακτινοβολίας που διαδίδεται σε μία δεδομένη κατεύθυνση. Η εξίσωση της ισορροπίας της ενέργειας (2.57) περιέχει, όμως, τις ποσότητες q και S οι οποίες προκύπτουν από ολοκληρώματα ως προς την συχνότητα και ως προς την συνολική στερεά γωνία. Επομένως, μαζί, οι εξισώσεις μεταφοράς και ενέργειας έχουν έναν ακέραιο διαφορικό χαρακτήρα που απαιτεί μία διπλή ολοκλήρωση σε σχέση με τη συχνότητα και τη γωνία. Οι μαθηματικές απλουστεύσεις αυτού του ακέραιου διαφορικού συστήματος βασίζονται σε κατά προσέγγιση περιγραφές των φασματικών και γωνιακών κατανομών, με σκοπό τη διαγραφή του «ακέραιου» τμήματος.

Η επίδραση της φασματικής κατανομής στην ισορροπία της ενέργειας εμφανίζεται ως αποτέλεσμα της εξάρτησης της συχνότητας από το συντελεστή απορρόφησης. Τα φασματικά χαρακτηριστικά μπορούν να εξαιρεθούν από την εξέταση μόνο όταν ο συντελεστής απορρόφησης κ'_ν είναι ανεξάρτητος της συχνότητας, δηλαδή, $\kappa'_\nu = \kappa'$. Στην περίπτωση ενός «γκρι» σώματος η εξίσωση της μεταφοράς (2.34), κατά την ολοκλήρωση ως προς όλες τις συχνότητες, μπορεί να γραφτεί κατευθείαν για την ολοκληρωμένη ένταση $I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$,

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla I = \kappa'(I_p - I). \quad (2.60)$$

Επίσης γίνεται πιθανό να βρούμε την απώλεια ενέργειας με το να ολοκληρώσουμε ως προς το φάσμα στο (2.55)

$$q = \kappa' \int (I_p - I) d\mathbf{\Omega} = c\kappa'(U_p - U). \quad (2.61)$$

Γενικά, ο συντελεστής απορρόφησης για αέρια σε υψηλές θερμοκρασίες εξαρτάται πλήρως από τη συχνότητα, και η έννοια του γκρι σώματος αντιπροσωπεύει μία σημαντική εξιδανίκευση. Αυτή η εξιδανίκευση είναι πολύ χρήσιμη για να ξεκαθαρίσουμε τις σχέσεις που διέπουν αυτά τα φαινόμενα που δεν σχετίζονται με την φασματική κατανομή της ακτινοβολίας. Όμως, σε συγκεκριμένες σημαντικές οριακές περιπτώσεις, τις οποίες θα συζητήσουμε αργότερα, θα εισάγουμε έναν συντελεστή απορρόφησης κ' με τον κατάλληλο τρόπο σε σχέση με τη συχνότητα. Σε αυτή την προσέγγιση τα φασματικά χαρακτηριστικά της ακτινοβολίας μπορούν να αγνοηθούν και οι εξισώσεις (2.60) και (2.61) μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Οι επόμενες δύο ενότητες ασχολούνται με τις κατά προσέγγιση περιγραφές της γωνιακής κατανομής του πεδίου ακτινοβολίας.

§10. Η προσέγγιση της διάχυσης

Είναι φανερό από τα (2.55) και (2.56) ότι η απώλεια ακτινοβόλας ενέργειας q δεν είναι μία αποκλειστική λειτουργία της γωνιακής κατανομής της ακτινοβολίας, αλλά ορίζεται μόνο από ολοκληρώματα ως προς την κατεύθυνση, από την πυκνότητα της ακτινοβόλας ενέργειας ή τη ροή. Εάν ήταν δυνατό να αντικαταστήσουμε την εξίσωση της ακτινικής μεταφοράς, που εξαρτάται από την κατεύθυνση, από κάποιες άλλες εξισώσεις που δίδουν την φασματική πυκνότητα και ροή, τότε γενικά το πρόβλημα της γωνιακής κατανομής της ακτινοβολίας θα προέκυπτε κατά την εξέταση της επίδρασης της ακτινοβολίας στην κατάσταση και την κίνηση του ρευστού. Μία τέτοια εξίσωση υπάρχει στην εξίσωση συνέχειας (2.29), που για την εν μέρει- σταθερή περίπτωση είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_v = \kappa'_v(U_{vp} - U_v). \quad (2.62)$$

Μία δεύτερη εξίσωση που σχετίζει την ροή της ακτινοβόλας ενέργειας και την πυκνότητα και συμπληρώνει το σύστημα εξισώσεων μπορεί να προκύψει μόνο με έναν κατά προσέγγιση τρόπο.

Η εξίσωση (2.62) προέκυψε από την ολοκλήρωση της εξίσωσης μεταφοράς (2.34) ως προς όλες τις γωνίες. Ας πολλαπλασιάσουμε τώρα την εξίσωση μεταφοράς (2.34) από μία μονάδα διανύσματος κατεύθυνσης Ω και ας ολοκληρώσουμε ως προς όλες τις γωνίες. Σημειώνοντας ότι η ολοκλήρωση του όρου $\kappa'_v I_{vp}$ που είναι ανεξάρτητος της κατεύθυνσης, εξαφανίζεται, και ανακαλώντας τον όρο της ροής (2.3), προκύπτει ότι

$$\int \Omega(\Omega \cdot \nabla I_v) d\Omega = -\kappa'_v \mathbf{S}_v. \quad (2.63)$$

Η ροή $\mathbf{S}_v = \int \Omega I_v d\Omega$ εξαφανίζεται σε ένα ιστροπικό πεδίο ακτινοβολίας. Το ολοκλήρωμα στην αριστερή πλευρά μπορεί εύκολα να υπολογιστεί αν η ένταση I_v είναι ανεξάρτητη της γωνίας *

$$\int \Omega(\Omega \cdot \nabla I_v) d\Omega = \frac{1}{3} \int \nabla I_v d\Omega = \frac{c}{3} \nabla U_v. \quad (2.64)$$

Η εξαφάνιση αυτής της έκφρασης σημαίνει πως η ιστροπία του πεδίου ακτινοβολίας απαιτεί τη σταθερότητα της πυκνότητας της ακτινοβόλας ενέργειας στο χώρο. Εάν το πεδίο ακτινοβολίας είναι ανιστροπικό, τότε η ροή και το ολοκλήρωμα (2.63) είναι και τα δύο διαφορετικά του μηδενός. Όμως, στην περίπτωση ασθενούς ανιστροπίας το ολοκλήρωμα μπορεί ξανά να αναπαρασταθεί με μία πρώτη προσέγγιση με τη μορφή του (2.64), με το να υποθέσουμε ότι η ένταση είναι ελάχιστα εξαρτημένη από τη γωνία έτσι ώστε μπορούμε να τη θεωρούμε ανεξάρτητη της γωνίας στο ολοκλήρωμα. Αυτό αποφέρει μία κατά προσέγγιση

σχέση ανάμεσα στη ροή και την πυκνότητα της ακτινοβολίας

$$\mathbf{S}_v = -\frac{l'_v c}{3} \nabla U_v, \quad (2.65)$$

* Ας βρούμε το στοιχείο i th του διανυσματικού ολοκληρώματος, αντικαθιστώντας τον διανυσματικό $\Omega \cdot \nabla$ από $\Omega_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ και έχοντας στο μυαλό τη συνθήκη πρόσθεσης για επαναλαμβανόμενα στοιχεία

$$\int \Omega_i \Omega_k \frac{\partial I_v}{\partial x_k} d\Omega = \frac{\partial I_v}{\partial x_k} \int \Omega_i \Omega_k d\Omega = \frac{\partial I_v}{\partial x_k} \frac{4\pi}{3} \delta_{ik} = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial I_v}{\partial x_i} = \frac{c}{3} \frac{\partial U_v}{\partial x_i},$$

αφού προκύπτει ότι $\int I_v d\Omega = 4\pi I_v = c U_v$; (2.64)

όπου $I_v' = 1/\kappa_v'$ είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή απορρόφησης.

Χωρίζοντας και τις δύο πλευρές του (2.65) από την ενέργεια ενός φωτονίου $h\nu$ προκύπτει η συνηθισμένη σχέση σωματιδιακής διάχυσης ανάμεσα στη ροή του φωτονίου \mathbf{J}_v και την πυκνότητά του φωτονίου N_v

$$\mathbf{J}_v = -D_v \nabla N_v, \quad D_v = \frac{l'_v c}{3}.$$

Ο συντελεστής διάχυσης για τα φωτόνια D_v είναι ανάλογος με το συντελεστή διάδοσης για άτομα ή μόρια λ είναι η ταχύτητα των φωτονίων και l'_v είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή τους. Μία σημαντική διαφορά, όμως, έγκειται μεταξύ της διάχυσης των ατόμων και της διάχυσης των φωτονίων. Το άτομο δεν εξαφανίζεται σε μία σύγκρουση, μόνο αλλάζει κατεύθυνση στην κίνησή του λ μέση ελεύθερη διαδρομή που εμφανίζεται στην εξίσωση για τον συντελεστή διάχυσης είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή σύγκρουσης. Το φωτόνιο, όμως, αφού διανύσει μία μέση απόσταση l'_v , απορροφάται από το ρευστό και, εάν το ρευστό είναι σε μία κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας η ενέργεια του φωτονίου, ως αποτέλεσμα συγκρούσεων μεταξύ των ατόμων, ηλεκτρονίων και λοιπά, κατανέμεται σύμφωνα με τους νόμους της στατιστικής ισορροπίας. Στο σημείο απορρόφησης νέα φωτόνια εκπέμπονται με διαφορετικές συχνότητες και σε κυκλικές κατευθύνσεις. Εξετάζοντας την διάχυση των φωτονίων μίας δεδομένης συχνότητας, ανάμεσα σε όλα τα νέα φωτόνια κοιτάμε μόνο αυτά που βρίσκονται στην ίδια συχνότητα. Η διαδικασία συνεχίζεται όταν το φωτόνιο απορροφάται, και ύστερα δημιουργείται ξανά. Αφού ξαναδημιουργηθεί, το φωτόνιο έχει ίσες πιθανότητες να κατευθυνθεί προς κάθε κατεύθυνση, και αυτό αντιστοιχεί στον ισοτροπικό σκεδασμό των ατόμων ύστερα από σύγκρουση*.

Όσο για την διάχυση των ατόμων, η προσέγγιση της διάχυσης είναι εφαρμόσιμη μόνο σε μικρές βαθμίδες της πυκνότητας της ακτινοβολίας. Η τελευταία θα έπρεπε να αλλάξει λίγο σε μία απόσταση της τάξεως της μέσης ελεύθερης διαδρομής της ακτινοβολίας l'_v . Το πεδίο ακτινοβολίας για μικρές βαθμίδες είναι σχεδόν ισοτροπικό, και ήταν αυτή η συνθήκη που

χρησιμοποιήθηκε ως βάση για την παραγωγή της εξίσωσης διάχυσης (2.65). Στην πραγματικότητα, τα φωτόνια που φτάνουν σε ένα συγκεκριμένο σημείο προέρχονται πρωταρχικά από μία περιοχή με διαστάσεις της τάξεως της μέσης ελεύθερης διαδρομής. Εάν η πυκνότητα της ακτινοβολίας σε αυτή την περιοχή είναι σχεδόν σταθερή, τότε τα φωτόνια φτάνουν σε ένα συγκεκριμένο σημείο ενιαία από όλες τις κατευθύνσεις και αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το πεδίο ακτινοβολίας σε αυτό το σημείο είναι ισοτροπικό.

* Αν ο σκεδασμός φωτονίων λαμβάνεται υπόψη κατά την ακτινική μεταφορά, τότε για την ασθενή ανισοτροπία προκύπτει και πάλι μία σχέση διάχυσης τύπου (2.65). Αυτή η σχέση περιέχει τη μέση ελεύθερη διαδρομή που αντιστοιχεί σε έναν συντελεστή ολικής διάβρωσης που είναι ίσος με το άθροισμα των συντελεστών απορρόφησης και σκεδασμού. Εάν ο σκεδασμός είναι ανισοτροπικός, τότε, όπως και στην περίπτωση της διάχυσης των ατόμων, ο συντελεστής σκεδασμού αντικαθιστάται από το συντελεστή μεταφοράς $\kappa_s(1-\cos\theta)$, όπου $\cos\theta$ είναι η μέση τιμή του συνημίτονου της γωνίας σκεδασμού.

Σε μία ενδιάμεση επιφάνεια κενή από ρευστό η πυκνότητα αλλάζει πολύ γρήγορα σε σχέση με μία απόσταση της τάξεως της μέσης ελεύθερης διαδρομής και η γωνιακή κατανομή των φωτονίων είναι πολύ ανισοτροπική, δηλαδή, τα φωτόνια αφήνουν το σώμα ρευστού στην κατεύθυνση του κενού, ενώ κανένα δεν φτάνει από το κενό. Έτσι, η προσέγγιση της διάχυσης μπορεί να οδηγήσει σε εκτιμητά λάθη όταν εφαρμόζεται κοντά σε μία κενή μέση επιφάνεια.

Στην περίπτωση των σωμάτων που είναι οπτικά παχιά οι βαθμίδες της πυκνότητας είναι μικρές και η προσέγγιση της διάχυσης είναι έγκυρη. Αν χ είναι η χαρακτηριστική κλίμακα κατά μήκος της οποίας η πυκνότητα της ακτινοβολίας έχει μια σημαντική αλλαγή (το χ είναι της τάξεως των διαστάσεων του σώματος), τότε η τάξη της ροής της διάχυσης δίνεται από

$$\mathbf{S}_v = -\frac{l'_v c}{3} \nabla U_v \sim \frac{l'_v}{x} c U_v.$$

Όσο πιο μεγάλο είναι το οπτικό πάχος του σώματος x/l'_v , τόσο πιο μικρή είναι η αλλαγή στην πυκνότητα της ακτινοβολίας κατά τη μέση ελεύθερη διαδρομή (αυτή η αλλαγή είναι της τάξεως $l'_v \nabla U_v \sim (l'_v/x) U_v$), τόσο πιο μικρή είναι η ροή S_v σε σύγκριση με $U_v c$, και τόσο πιο ακριβής είναι η προσέγγιση της διάχυσης. Αν το οπτικό πάχος του σώματος είναι της τάξεως της ενότητας, τότε $l'_v/x \sim 1$, και $S_v \sim c U_v$. Στην περίπτωση ενός οπτικά λεπτού σώματος έχουμε $l'_v/x > 1$ και η ροή, που υπολογίζεται σύμφωνα με τη φόρμουλα της διάχυσης, γίνεται μεγαλύτερη από $c U_v$. Αυτό είναι φυσικά αδύνατον και απλά δείχνει την μη εφαρμοσιμότητα της προσέγγισης της διάχυσης σε οπτικά λεπτά σώματα.

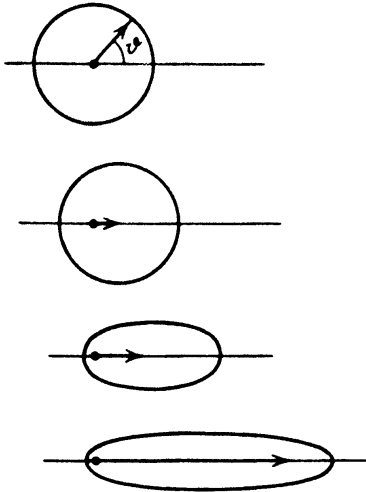
Η ροή S_v δεν μπορεί ποτέ να είναι μεγαλύτερη από $c U_v$. Η ισότητα $S_v = c U_v$ αντιστοιχεί στην περίπτωση που όλα τα φωτόνια που κινούνται προς την ίδια ακριβώς κατεύθυνση, στην περίπτωση της μέγιστης ανισοτροπίας. Η ποσότητα $c U_v$ είναι ορίζεται μερικές φορές ως κινητική ροή. Η αναλογία της ροής στην κινητική ροή $S_v/c U_v$ είναι μία μέτρηση της ανισοτροπίας του πεδίου ακτινοβολίας και στα πλαίσια της προσέγγισης της διάχυσης είναι της τάξεως του αντίστροφου του οπτικού πάχους του σώματος l'_v/x . Για την πλήρη ισοτροπία $S_v/c U_v = 0$, όταν όλα τα φωτόνια κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση τότε

$S_{\nu}/cU_{\nu}=1$. Άρα, αυτή η αναλογία ροής περιέχεται πάντα μέσα στα όρια $0 \leq S_{\nu}/cU_{\nu} \leq 1$. Η εξάρτηση της ροής από το βαθμό ανισοτροπίας της γωνιακής κατανομής της ακτινοβολίας, σε μία δεδομένη πυκνότητα ακτινοβόλας ενέργειας, απεικονίζεται σχηματικά στα πολικά διαγράμματα της έντασης στο Σχ.2.9. Οι περιοχές όλων των διαγραμμάτων είναι οι ίδιες και χαρακτηρίζουν την πυκνότητα της ακτινοβόλας ενέργειας, ενώ τα μήκη των βελών χαρακτηρίζουν τις ροές. Τα πεδία ακτινοβολίας διαφορετικών πυκνοτήτων μπορούν να δώσουν την ίδια ενέργεια ροής. Όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα για μία δεδομένη ροή, τόσο πιο χαμηλή είναι η αναλογία S_{ν}/cU_{ν} , και τόσο πιο ισοτροπικό είναι το πεδίο ακτινοβολίας.

Οι εξισώσεις (2.62) και (2.65) για την προσέγγιση διάχυσης αντιπροσωπεύει ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων για δύο άγνωστες λειτουργίες της θέσης, της πυκνότητας της ενέργειας και της ροής της ακτινοβολίας. Οι οριακές συνθήκες στις μέσες επιφάνειες των μέσων με διαφορετικές οπτικές ιδιότητες (με διαφορετικούς συντελεστές διάχυσης) επίσης πρέπει να προστεθούν στο σύστημα.

Προκύπτει από τη συνθήκη της συνέχειας της έντασης της ακτινοβολίας ότι και η πυκνότητα και η ροή είναι συνεχείς σε τέτοιες διεπιφάνειες. Μία ασυνέχεια πυκνότητας στην προσέγγιση της διάχυσης (2.65) θα επιφέρει μια αόριστη ροή και μια ασυνέχεια στη ροή θα οδηγούσε σε μια αφομοίωση της ακτινοβόλας ενέργειας, σε μια αστάθεια στη λύση (βλ. 2.29).

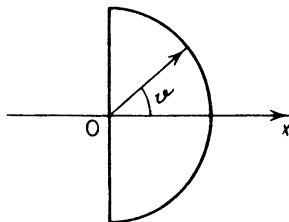
Εικόνα



Σχήμα 2.9. Πολικά διαγράμματα για την κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας σε σχέση με τη γωνία για διαφορετικούς βαθμούς ανισοτροπίας. Η ένταση σε μία δεδομένη γωνία θ χαρακτηρίζεται από το μήκος του διανύσματος της ακτίνας που ξεκινά από το κέντρο. Το μήκος του βέλους χαρακτηρίζει το μέγεθος της ροής. Η ισότητα των πυκνοτήτων της ακτινοβολίας ενέργειας για όλες τις περιπτώσεις αποδίδεται σχηματικά από τις ίσες περιοχές των διαγραμμάτων.

Η διεπιφάνεια ανάμεσα σε ένα ρευστό και μία κενή περιοχή απαιτεί ιδιαίτερη εξέταση. Αφού το κενό δεν διαθέτει φωτόνια, το πεδίο της ακτινοβολίας στην διεπιφάνεια είναι αυστηρά ανισότροπο (όλα τα φωτόνια κατευθύνονται μόνο προς την κατεύθυνση του κενού) και, αυστηρά μιλώντας, η προσέγγιση της διάχυσης δεν είναι εφαρμόσιμη. Μπορούμε να αποκτήσουμε μία κατά προσέγγιση οριακή συνθήκη από τις παρακάτω υποθέσεις. Ας υποθέσουμε πως η ακτινοβολία που ξεκινά από την επιφάνεια ενός σώματος σε ένα ημισφαιρικό όγκο, στην κατεύθυνση του κενού, έχει μία ισοτροπική γωνιακή κατανομή (η οποία για οπτικά παχιά σώματα, είναι σχεδόν πραγματική).

Εικόνα



Σχήμα 2.10. Πολικό διάγραμμα για την κατανομή της έντασης στην διεπιφάνεια $x=0$, μεταξύ σώματος και κενού. Το κενό είναι στα δεξιά, το σώμα στα αριστερά

Η ένταση στο συμπληρωματικό ημισφαίριο είναι μηδενική, δηλαδή, κανένα φωτόνιο δεν φτάνει από την πλευρά του κενού (Σχ.2.10). Ύστερα στην κενή διεπιφάνεια έχουμε

$$S_v = \frac{cU_v}{2}, \quad (2.66)$$

όπου η ροή είναι η κετεύθυνση του προς τα έξω στην επιφάνεια. Ο παράγοντας $1/2$ αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή του συνημίτονου της γωνίας της κατεύθυνσης της κίνησης των φωτονίων για ισοτροπική κατανομή στο ημισφαίριο. Έχουμε

$$S_v = \int_{\text{hemisphere}} \mathbf{\Omega} I_v d\mathbf{\Omega}; \quad S_v = \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta I_v(\vartheta) 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi I_v \cdot \frac{1}{2} = \pi I_v,$$

αλλά

$$cU_v = \int_{\text{hemisphere}} I_v d\mathbf{\Omega} = \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta I_v = 2\pi I_v.$$

Προκύπτει η εξίσωση (2.66).

Η εξίσωση (2.66) μπορεί να προκύψει επίσημα από τις εξισώσεις για την προσέγγιση της διάχυσης. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η ακόλουθη έκφραση για την ένταση

$$I_v(\mathbf{\Omega}) = \frac{cU_v}{4\pi} \left[1 + \frac{3\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{S}_v}{cU_v} \right] = \frac{cU_v}{4\pi} \left[1 + 3 \cos \vartheta \frac{S_v}{cU_v} \right],$$

όπου ϑ είναι η γωνία ανάμεσα στην κατεύθυνση $\mathbf{\Omega}$ και την κατεύθυνση της ροής S_v , οδηγεί στις εξισώσεις προσέγγισης της διάχυσης (2.62) και (2.65). Με τον άξονα x στην κατεύθυνση της ροής μπορούμε να υπολογίσουμε τις μονόπλευρες ροές στην θετική και αρνητική κατεύθυνση x . Προκύπτει ότι

$$S_{v+} = \frac{cU_v}{4} + \frac{S_v}{2}, \quad S_{v-} = -\frac{cU_v}{4} + \frac{S_v}{2} \quad (2.67)$$

(όπως ήταν αναμενόμενο, $S_v = S_{v+} + S_{v-}$). Εφαρμόζοντας αυτές τις σχέσεις στη διεπιφάνεια μεταξύ σώματος και κενού (ο άξονας x κατευθύνεται προς το κενό) και υποθέτοντας ότι η μονόπλευρη ροή από το κενό είναι $S_{v-} = 0$ προκύπτει ότι $S_v = S_{v+} = cU_v/2$, ονομαστικά η σχέση (2.66). Οι εξισώσεις (2.67) είναι πιο γενικές από την έκφραση για την ένταση. Αυτό εύκολα επιβεβαιώνεται αν εφαρμόσουμε τη σχέση για την ένταση στο σημείο της διεπιφάνειας. Στην αρνητική κατεύθυνση x , για παράδειγμα, $\pi = -1$ και $I_v = -cU_v/8\pi < 0$,

που δεν έχει καμιά φυσική σημασία. Το νόημα είναι ότι η εξίσωση της διάχυσης για την ένταση είναι έγκυρη μόνο για ασθενή ανισοτροπία, όταν ο δεύτερος όρος στις παρενθέσεις παραπάνω είναι πολύ μικρότερος από την ενότητα.

§11. Η προσέγγιση «αναστροφής»

Τώρα εξετάζουμε μια άλλη μέθοδο προσέγγισης της γωνιακής κατανομής της ακτινοβολίας, η οποία χρησιμοποιείται μερικές φορές, σε προβλήματα της μεταφοράς της ακτινοβολίας. Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή ως προσέγγιση Schwarzschild ή ως προσέγγιση «αναστροφής».

Σε αυτή τη μέθοδο συνδυάζουμε σε μια ομάδα όλα τα φωτόνια που κατευθύνονται προς τη θετική κατεύθυνση x στις γωνίες ϑ που ποικίλλουν από 0 σε $\pi/2$, και σε μια άλλη ομάδα όλα εκείνα που κατευθύνονται προς την αντίθετη κατεύθυνση στις γωνίες ϑ από $\pi/2$ σε π (Σχ.2.11). Θα υποθέσουμε ότι η γωνιακή κατανομή σε κάθε ημισφαίριο είναι σχεδόν ισοτροπική και δηλώνει την ένταση προς την ‘εμπρός’ και ‘αντίστροφη’ κατεύθυνση με I_1 και I_2 αντίστοιχα. Η πυκνότητα της ακτινοβολίας της ενέργειας και ροής είναι

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{c} \int I d\Omega = \frac{2\pi}{c} \int_0^{\pi/2} I_1 \sin \vartheta d\vartheta + \frac{2\pi}{c} \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{2\pi}{c} (I_1 + I_2), \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} S &= \int I \cos \vartheta d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_1 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \\ &\quad + 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \pi(I_1 - I_2). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Ο βαθμός ανισοτροπίας δίνεται από

$$\frac{S}{cU} = \frac{I_1 - I_2}{2(I_1 + I_2)} \rightarrow 0 \quad \text{for } I_1 \approx I_2.$$

Στη διεπιφάνεια ανάμεσα στο σώμα και το κενό, όπου ο άξονας x είναι στην κατεύθυνση του προς τα έξω στην επιφάνεια, έχουμε $I_2=0$ και $S/cU= 1/2$ σε συμφωνία με τη συνθήκη (2.66).

Η εξίσωση για τις μέσες μονόπλευρες εντάσεις I_1 και I_2 προκύπτει από τη μέση τιμή της εξίσωσης μεταφοράς για την επίπεδη περίπτωση.

$$\cos \vartheta \frac{dI}{dx} = \kappa'(I_p - I) \quad (2.70)$$

ως προς και τα δύο ημισφαίρια. Μπορούμε να έχουμε (με τη μέση τιμή $\overline{\cos\theta} = \pm 1/2$,

$$\frac{1}{2} \frac{dI_1}{dx} = \kappa'(I_p - I_1); \quad -\frac{1}{2} \frac{dI_2}{dx} = \kappa'(I_p - I_2). \quad (2.71)$$

Αυτό το ζευγάρι εξισώσεων χρησιμεύει για να καθορίσουμε τις μέσες εντάσεις και στα δύο ημισφαίρια. Προσθέτοντας και αφαιρώντας εύκολα φτάνουμε στις εξισώσεις πυκνότητας και ροής ($I_p = cU_p/4\pi$) :

$$\frac{dS}{dx} = \kappa'c(U_p - U); \quad S = -\frac{l'c}{4} \frac{dU}{dx}. \quad (2.72)$$

Η πρώτη εξίσωση είναι η ακριβής εξίσωση συνέχειας (2.62) και η δεύτερη είναι σχεδόν η ίδια όπως η εξίσωση (2.65) για την προσέγγιση της διάχυσης, η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ ο «συντελεστής διάχυσης» είναι ίσος με $l'c/4$ αντί για $l'c/3$. Εξετάζοντας το (2.71) ως ζευγάρι γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε I_1 και I_2 μπορούμε να γράψουμε τις λύσεις τους στη μορφή ολοκληρώματος

$$I_1 = \int_0^\tau I_p e^{-2(\tau-\tau')/2} d\tau'; \quad I_2 = \int_\tau^\infty I_p e^{-2(\tau'-\tau)/2} d\tau'.$$

Εδώ, η συντεταγμένη x έχει αντικατασταθεί από το οπτικό πάχος σύμφωνα με τη σχέση

$$d\tau = \kappa' dx, \quad \tau = \int_0^x \kappa' dx.$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τις εκφράσεις για I_1 και I_2 και θέτοντας $cU_p/4\pi$, προκύπτουν οι ακόλουθες δυο κατά προσέγγιση εκφράσεις ολοκληρωμάτων για την πυκνότητα και τη ροή στην προσέγγιση αναστροφής :

$$U = \frac{1}{2} \int_\tau^\infty U_p e^{-2(\tau'-\tau)/2} d\tau' + \frac{1}{2} \int_0^\tau U_p e^{-2(\tau-\tau')/2} d\tau', \quad (2.73)$$

$$S = -\frac{c}{4} \int_\tau^\infty U_p e^{-2(\tau'-\tau)/2} d\tau' + \frac{c}{4} \int_0^\tau U_p e^{-2(\tau-\tau')/2} d\tau'.$$

Γενικά μιλώντας, η προσέγγιση της διάχυσης στην περίπτωση της ασθενούς ανισοτροπίας φαίνεται να είναι πιο δικαιολογημένη, αν και δεν είναι πολύ διαφορετική από την προσέγγιση αναστροφής.

§12. Τοπική ισορροπία και η προσέγγιση της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας

Η σταθερή κατάσταση της ακτινοβολίας σε ένα αόριστο μέσο σε σταθερή θερμοκρασία θα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Η ένταση είναι ανεξάρτητη από την κατεύθυνση και καθορίζεται από την φόρμουλα Planck. Τα φωτόνια που φτάνουν σε οποιοδήποτε σημείο στο χώρο δημιουργούνται στην περιοχή γύρω από αυτό το σημείο σε αποστάσεις όχι παραπάνω από τις μέσες ελεύθερες διαδρομές. Τα φωτόνια που δημιουργούνται πολύ πιο μακριά απορροφούνται κατά τη μεταφορά. Συνεπώς, μόνο η άμεση εγγύτητα του σημείου συμμετέχει στην εδραίωση της ισορροπίας της έντασης. Ακόμα και αν η θερμοκρασία σε μεγαλύτερη απόσταση είναι διαφορετική από την θερμοκρασία αυτής της περιοχής, δεν υπάρχει καμία πρακτική επίδραση στην ένταση της ακτινοβολίας στο σημείο υπό εξέταση. Αυτό σημαίνει ότι εάν η θερμοκρασία ενός ικανοποιητικά εκτεταμένου και οπτικά παχέως μέσου δεν είναι σταθερή αλλά αλλάζει ικανοποιητικά αργά με την απόσταση, έτσι ώστε οι αλλαγές στις αποστάσεις της τάξεως μιας μέσης ελεύθερης διαδρομής ακτινοβολίας να είναι μικρές, τότε η ένταση θα είναι πολύ κοντά στην τιμή της ισορροπίας που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία του σώματος στο δεδομένο σημείο. Όσο λιγότερο έντονη είναι η αλλαγή της θερμοκρασίας στις αποστάσεις της τάξεως μιας μέσης ελεύθερης διαδρομής ακτινοβολίας, τόσο πιο κοντά θα βρίσκεται η ένταση στην τιμή της ισορροπίας.

Συγκεκριμένα, η ακτινοβολία θα βρίσκεται πιο κοντά στην ισορροπία για εκείνες τις συχνότητες που είναι περισσότερο απορροφημένες και για τις οποίες η μέση ελεύθερη διαδρομή l_v' είναι πολύ μικρή. Εάν ο συντελεστής θερμοκρασίας είναι τόσο μικρός ώστε οι αλλαγές της θερμοκρασίας για αποστάσεις της τάξεως της μακρύτερης μέσης ελεύθερης διαδρομής l_v' να είναι μικρές για όλες εκείνες τις συχνότητες που έχουν μια σημαντική επίδραση στην ισορροπία της ακτινοβολίας στη συγκεκριμένη θερμοκρασία, τότε η ακτινοβολία θα βρίσκεται σε ισορροπία για το συνολικό φασματικό διάστημα, στη θερμοκρασία που αντιστοιχεί σε εκείνη του σημείου. Η ένταση της ακτινοβολίας θα περιγράφεται τότε ως μια λειτουργία της συχνότητας από τη λειτουργία Planck στη θερμοκρασία του σημείου. Όταν η ακτινοβολία σε κάθε σημείο του μέσου με μία ανομοιόμορφη θερμοκρασία βρίσκεται κοντά στην ισορροπία, τότε το μέσο αντιμετωπίζεται σαν να βρίσκεται σε μία κατάσταση τοπικής θερμοδυναμικής ισορροπίας μεταξύ της ακτινοβολίας και του ρευστού.

Η απαραίτητη συνθήκη για την ύπαρξη τοπικής ισορροπίας- μικρές κλίσεις σε ένα εκτεταμένο και οπτικά παχύ σώμα- χρησιμεύει ταυτόχρονα ως μια αιτιολόγηση για τη χρήση της προσέγγισης της διάχυσης κατά την εξέταση της μεταφοράς της ακτινοβολίας. Στην προσέγγιση της διάχυσης η ροή της ακτινοβολίας είναι ανάλογη στην κλίση της πυκνότητας της ακτινοβολίας. Όμως, εάν η πυκνότητα της ακτινοβολίας είναι κοντά στην τιμή της ισορροπίας, τότε είναι πιθανό να προσεγγίσουμε την πραγματική πυκνότητα στην εξίσωση ροής από την πυκνότητα της ισορροπίας στο δεδομένο σημείο. Άρα, για τοπικές συνθήκες ισορροπίας, η φασματική ροή δίνεται περίπου από

$$\mathbf{S}_v = -\frac{l'_v c}{3} \nabla U_{vp}. \quad (2.74)$$

η συνολική ροή είναι

$$\mathbf{S} = \int_0^\infty \mathbf{S}_v dv = -\frac{c}{3} \int_0^\infty l'_v \nabla U_{vp} dv. \quad (2.75)$$

παραγοντοποιούμε από το ολοκλήρωμα μία μέση τιμή της μέσης ελεύθερης διαδρομής της ακτινοβολίας, που δηλώνουμε με l . Σημειώνοντας ότι $\int_0^\infty U_{vp} dv = U_p = 4\sigma T^4/c$, η εξίσωση (2.75) δίνει

$$\mathbf{S} = -\frac{lc}{3} \nabla U_p = -\frac{16\sigma l T^3}{3} \nabla T. \quad (2.76)$$

Η ροή της ακτινοβολίας ενέργειας σε τοπική ισορροπία είναι ανάλογη στη κλίση της θερμοκρασίας, η μεταφορά ακτινοβολίας είναι ανάλογη στη θερμική συμπεριφορά και ορίζεται ως θερμική συμπεριφορά της ακτινοβολίας. Ο συντελεστής της θερμικής αγωγιμότητας είναι ίσος εδώ με $16\sigma l T^3/3$, και είναι μια λειτουργία της θερμοκρασίας. Όπως στη περίπτωση της συνηθισμένης μοριακής θερμικής συμπεριφοράς, η απώλεια ενέργειας q από το μέσο από την ακτινοβολία είναι ίση με την απόκλιση της ροής της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας (βλ. (2.56)). Αυτές οι απώλειες καθορίζονται από τη θερμοκρασία του ρευστού στο δεδομένο σημείο τη μέση ελεύθερη διαδρομή της ακτινοβολίας (η οποία για ένα δεδομένο ρευστό είναι μία λειτουργία της θερμοκρασίας και της πυκνότητας), και της παραγώγους του χώρου αυτών των ποσοτήτων. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.75) και (2.76), μπορούμε να αποκτήσουμε τον νόμο για τη μέση τιμή της μέσης ελεύθερης διαδρομής σε σχέση με τη πυκνότητα που δίνει τη σωστή τιμή για την ροή της ακτινοβολίας ενέργειας στην περίπτωση που η θερμική ανταλλαγή ακτινοβολίας έχει τον ίδιο χαρακτήρα με τη θερμική συμπεριφορά. Σημειώνοντας έτσι ότι και U_{vp} και U_p εξαρτώνται από τη θέση μόνο μέσα από την εξάρτηση της θερμοότητας, προκύπτει ότι

$$l = \frac{\int_0^\infty l'_v (dU_{vp}/dT) dv}{dU_p/dT} = \frac{\int_0^\infty l'_v (dU_{vp}/dT) dv}{\int_0^\infty (dU_{vp}/dT) dv}. \quad (2.77)$$

διαφοροποιώντας την πυκνότητα της ισορροπίας της ακτινοβολίας που δίνεται από τη φόρμουλα Planck με βάση τη θερμοκρασία, και εισάγοντας την αδιάστατη μεταβλητή της ολοκλήρωσης $u = hv/kT$, προκύπτει η σχέση για τη μέση ελεύθερη διαδρομή

$$l = \int_0^{\infty} l'_v G(u) du, \quad (2.78)$$

όπου ο παράγοντας του βάρους $G(u)$ δίνεται από

$$G(u) = \frac{15}{4\pi^4} \frac{u^4 e^{-u}}{(1 - e^{-u})^2}. \quad (2.79)$$

Η τιμή του l που βγαίνει από τον υπολογισμό της μέσης τιμής της μέσης ελεύθερης διαδρομής της ακτινοβολίας l'_v χρησιμοποιώντας τον παράγοντα βάρους $G(u)$ ονομάζεται μέση ελεύθερη διαδρομή Rosseland. Εάν η μέση ελεύθερη διαδρομή l'_v , που είναι διορθωμένη για την επαγόμενη εκπομπή, εκφράζεται με βάση του ακριβούς συντελεστή απορρόφησης $l'_v = 1/\kappa'_v = 1/\kappa(1 - e^{-u})$, τότε τα (2.78) και (2.79) μπορούν να ξαναγραφτούν ως εξής

$$l = \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa'_v} G'(u) du, \quad G'(u) = \frac{15}{4\pi^4} \frac{u^4 e^{-u}}{(1 - e^{-u})^3}. \quad (2.80)$$

Ο παράγοντας βάρους Rosseland έχει μέγιστη τιμή στο $h\nu \approx 4kT$, και αυτό σημαίνει ότι είναι τα φωτόνια με υψηλή ενέργεια (με ενέργειες πολλές φορές μεγαλύτερες από kT) που κυριαρχούν στη διαδικασία μεταφοράς της ενέργειας.

Σύμφωνα με το (2.76) η ροή της ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής της θερμικής αγωγιμότητας, δηλαδή, όσο μακρύτερη είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή. Δεν θα πρέπει να ξεχνάμε, όμως, ότι αυτή η σχέση είναι έγκυρη μόνο εάν η μέση ελεύθερη διαδρομή δεν είναι αρκετά μεγάλη, διαφορετικά η τοπική ισορροπία και η φόρμουλα (2.76) δεν θα εφαρμόζεται πλέον. Όπως θα δούμε αργότερα, στην αντίθετη οριακή περίπτωση, όταν η μέση ελεύθερη διαδρομή της ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από τις χαρακτηριστικές διαστάσεις του σώματος, η ροή της ακτινοβολίας μειώνεται με την αυξανόμενη μέση ελεύθερη διαδρομή της ακτινοβολίας.

§13. Η σχέση ανάμεσα στη προσέγγιση της διάθλασης και την προσέγγιση της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας

Θεωρείται υποχρεωτικά στην αστροφυσική ότι οι έννοιες της προσέγγισης της διάχυσης και της θερμικής αγωγιμότητας της ακτινοβολίας είναι πανομοιότυπες. Αυτό ισχύει εξαιτίας του γεγονότος ότι τα άστρα και οι αστρικές φωτόσφαιρες, που είναι οπτικά παχιά σώματα με μικρές κλίσεις, πάντα ικανοποιούν ταυτόχρονα τις συνθήκες που οδηγούν σε ασθενή ανισοτροπία του πεδίου ακτινοβολίας, π.χ, σε μία σχέση διάθλασης ανάμεσα στη ροή και την κλίση της πυκνότητας της ακτινοβολίας ενέργειας, και στην ύπαρξη τοπικής ισορροπίας, π.χ, στην αντικατάσταση του U_v από U_{vp} . Έχουμε εκτιμήσει ότι γενικά η απόκλιση από τη τοπική ισορροπία είναι ακόμα λιγότερο έντονη στην περίπτωση μικρών κλίσεων σε οπτικά

παχιά σώματα από ότι είναι ο βαθμός της ανισοτροπίας, δηλαδή εάν η προσέγγιση της διάχυσης είναι έγκυρη, η ύπαρξη τοπικής ισορροπίας είναι ακόμα πιο δικαιολογημένη. Για να δείξουμε αυτό ας υποθέσουμε ότι οι διαστάσεις του σώματος είναι της τάξεως x , που είναι μια χαρακτηριστική κλίμακα για την πυκνότητα της θερμότητας, και των κλίσεων της ροής της ακτινοβολίας. Προκύπτει από την προσέγγιση της διάθλασης (2.62) και (2.65) ότι

$$\frac{S_v}{x} \sim \frac{c(U_{vp} - U_v)}{l'_v}, \quad S_v \sim \frac{l'_v}{x} cU_v,$$

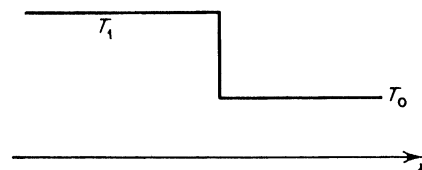
από το οποίο

$$\frac{U_{vp} - U_v}{U_v} \sim \left(\frac{l'_v}{x}\right)^2.$$

Εάν ο βαθμός της ανισοτροπίας, που χαρακτηρίζεται από την αναλογία της ροής της διάχυσης στην κινητική ροή, $S_v/cU_v \approx l'_v/x$ είναι μικρή και $l'_v/x \ll 1$, τότε η σχετική αλλαγή στην πυκνότητα της ακτινοβολίας από την τιμή της ισορροπίας της είναι δεύτερης τάξεως στη μικρή παράμετρο.

Όμως όταν εξετάζουμε προβλήματα με πιο περίπλοκες συνθήκες από αυτές που κυριαρχούν στις αστρικές φωτόσφαιρες, είναι βολικό να δημιουργούμε μία ξεκάθαρη διάκριση ανάμεσα στη προσέγγιση της διάχυσης και της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας.

Εδώ με τον όρο προσέγγιση της διάχυσης εννοούμε τη μέθοδο της κατά προσέγγιση περιγραφής της γωνιακής περιγραφής της ακτινοβολίας στην οποία η ροή της ακτινοβολίας υποτίθεται ότι είναι ανάλογη στη κλίση της ακριβούς πυκνότητας της ενέργειας, ακόμα και εάν διαφέρει αρκετά από τη τιμή της ισορροπίας. Αυτό μπορεί να θεωρείται ως μία βολική διαδικασία για να εξηγήσουμε τα χαρακτηριστικά φαινομένων μεταφοράς για υψηλή ακτινοβολία σε μη ισορροπία που δεν εξαρτώνται από τη φύση της γωνιακής κατανομής των φωτονίων. Μία αυστηρή θεωρητική ανάλυση της γωνιακής κατανομής των φωτονίων θα εμπειρείχε μεγάλη μαθηματική δυσκολία. Η προσέγγιση της διάχυσης, ενώ οδηγεί σε σημαντικά λάθη σε μερικές περιπτώσεις, ως κανόνας δεν αλλάζει την ποιοτική εικόνα των φαινομένων της μεταφοράς της ακτινοβολίας ακόμα και εάν η γωνιακή κατανομή είναι έντονα ανισοτροπική. Αυτό το χαρακτηριστικό της προσέγγισης της διάχυσης την καθιστά κατάλληλη για την κατά προσέγγιση πολλών προβλημάτων που περιλαμβάνουν τη μη ισορροπημένη ακτινοβολία, όπου η χρήση της προσέγγισης της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας θα επέβαλε συγκεκριμένες προϋποθέσεις στη θερμοκρασία του ρευστού που είναι συχνά φυσικά ασήμαντες.



Σχήμα 2.12. Κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος ενός κρουστικού κύματος

Ας απεικονίσουμε αυτές τις επισημάνσεις με ένα παράδειγμα. Φανταστείτε ένα πεδίο ακτινοβολίας σε ένα σώμα με μία απότομη αλλαγή θερμοκρασίας στην επιφάνεια που διαχωρίζει την θερμή και την ψυχρή περιοχή με $T_1 \gg T_2$, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.12 (μία τυπική περίπτωση ενός ισχυρού κρουστικού κύματος). Η πυκνότητα της ροής U_1 στην περιοχή υψηλής θερμοκρασίας είναι μεγάλη και της τάξεως της τιμής της ισορροπίας της $U_{p1} = 4\sigma T_1^4/c$. Πρακτικά δεν εκπέμπονται καθόλου φωτόνια στη περιοχή χαμηλής θερμοκρασίας και η πυκνότητα της ακτινοβολίας της καθορίζεται από τη ροή που ξεκινά από την επιφάνεια της θερμής περιοχής. Με άλλα λόγια, η πυκνότητα της ακτινοβολίας είναι επίσης ανάλογη με U_1 , και αφού $T_1 \gg T_0$, είναι πολύ πιο υψηλή από την τιμή της ισορροπίας $U_{p0} = 4\sigma T_0^4/c$. Αυτή η περίπτωση, όπως θα δούμε, είναι τελείως διαφορετική από εκείνες για τις οποίες έχουμε τοπική ισορροπία και θερμική συμπεριφορά της ακτινοβολίας. Όμως η προσέγγιση της διάχυσης για τη γωνιακή κατανομή δίνει μία ποιοτικά σωστή εικόνα, όταν δηλώνουμε ότι εάν το ψυχρό σώμα απορροφά φως η πυκνότητα της ακτινοβολίας ενέργειας και η ροή μειώνονται με την απόσταση από τη ζεστή επιφάνεια στο ψυχρό μέσο. Η κλίμακα μήκους για μία αισθητή μείωση σε αυτές τις ποσότητες είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή για την απορρόφηση των φωτονίων στο ψυχρό μέσο. Άρα στο δεδομένο παράδειγμα οι εξισώσεις της διάθλασης για το ψυχρό μέσο που δεν ακτινοβολεί είναι

$$\frac{dS_v}{dx} = -\frac{cU_v}{l'_v}, \quad S_v = -\frac{l'_v c}{3} \frac{dU_v}{dx}.$$

Σύμφωνα με το οπτικό πάχος, μετρημένο από την απότομη αλλαγή της θερμοκρασίας, $\tau_v = \int_0^x \kappa'_v dx$,

$$\frac{dS_v}{d\tau_v} = -cU_v, \quad S_v = -\frac{c}{3} \frac{dU_v}{d\tau_v}.$$

Αυτές οι εξισώσεις αποφέρουν την ακόλουθη λύση για την πυκνότητα της ακτινοβολίας και την ροή

$$S_v = \frac{cU_v}{\sqrt{3}} \sim e^{-\sqrt{3}\tau_v},$$

η οποία δίνει μία ποιοτικά σωστή περιγραφή της εξασθένισης αυτών των ποσοτήτων. Μία πιο αυστηρή προσέγγιση της γωνιακής κατανομής, που είναι πιθανή σε αυτή την απλή

περίπτωση, δίνει μία πιο διαφορετική λύση για την εξασθένηση της ροής και της πυκνότητας στην ψυχρή περιοχή. Αυτές οι ποσότητες έχουν μία εκθετική ολοκληρωματική παρά μια απλή εκθετική συμπεριφορά(βλ. [5]) , και

$$S_v \sim E_3(\tau_v), \quad U_v \sim E_2(\tau_v).$$

Σε αποστάσεις της τάξεως πολλών οπτικών βαθμών από την απότομη αλλαγή της θερμοκρασίας η ακριβής λύση δίνει τιμές για τις φυσικές ποσότητες της ίδιας τάξεως όπως και η προσέγγιση της διάχυσης. Εάν χρησιμοποιούσαμε την προσέγγιση της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας, η απότομη αλλαγή της θερμοκρασίας στο ρευστό θα έπρεπε να εξαπλωθεί, αφού μία ασυνέχεια στην θερμοκρασία θα έχει ως αποτέλεσμα να γίνει η ροή αόριστη $S \sim dT/dx$.

Γενικά η προσέγγιση της διάχυσης πάντα θα δίνει ένα ποιοτικά λογικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, στην οριακή περίπτωση που η γωνιακή κατανομή των φωτονίων έχει μια πλήρη ανισοτροπία και όλα τα φωτόνια στο ψυχρό σώμα κινούνται σε μία κατεύθυνση η ροή είναι $S_v = cU_v$.Από την ακριβή εξίσωση συνέχειας(2.62) βλέπουμε ότι η ροή, όπως στη περίπτωση της διάχυσης, είναι ανάλογη στη κλίση της πυκνότητας της ενέργειας $S_v = -l_v' dU_v/dx$ (ο άξονας x κατευθύνεται κατά μήκος της ακτίνας φωτός) αλλά με έναν συντελεστή αναλογίας τρεις φορές μεγαλύτερο από τον συνηθισμένο συντελεστή διάχυσης. Αυτή η περίπτωση της καθαρής απορρόφησης μιας καθαρής δέσμης φωτός σε ένα σώμα που δεν ακτινοβολεί έχει την ακριβή λύση

$$S_v = cU_v \sim e^{-\tau_v}, \quad \tau_v = \int_0^x \kappa'_v dx,$$

η οποία διαφέρει από τη λύση της προσέγγισης της διάχυσης μόνο από ένα παράγοντα $\sqrt{3}$ στον εκθέτη και από ένα παράγοντα $1/\sqrt{3}$ στη σχέση μεταξύ της ροής και της πυκνότητας . Η ποιοτική διαφορά για $\tau_v \gg 1$ είναι πολύ μεγάλη, αλλά ποιοτικά η προσέγγιση της διάχυσης δίνει ένα φυσικά σωστό αποτέλεσμα, για $\tau_v \sim 1$, ακόμα και το αριθμητικό λάθος είναι μετριασμένο .

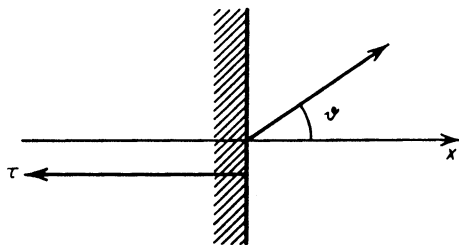
§14. Ισορροπία της ακτινοβολίας στις αστρικές φωτόσφαιρες

Η μελέτη της θερμοκρασίας και των πεδίων της ακτινοβολίας στα περιφερειακά στρώματα (φωτόσφαιρες) των στάσιμων άστρων με σκοπό να καθορίσουμε την φωτεινότητα των άστρων είναι ένα κλασσικό πρόβλημα που χρησίμευσε ως η βάση για την ανάπτυξη της θεωρίας της μεταφοράς της ακτινοβολίας και των μεθόδων επίλυσης της εξίσωσης μεταφοράς*. Αυτό το πρόβλημα μας ενδιαφέρει εδώ όχι μόνο ως ένα κλασσικό παράδειγμα της εφαρμογής της θεωρίας της μεταφοράς της ακτινοβολίας, αλλά επίσης ως ένα μοντέλο στο οποίο , όπως θα δούμε και στο Κεφάλαιο ΙΧ, να μειώσουμε το πρόβλημα της ψύξης ενός μεγάλου όγκου θερμού αέρα από την ακτινοβολία. Τα στάσιμα άστρα απαρτίζονται

από μεγάλες αέριες μάζες σε υψηλές θερμοκρασίες, που ποικίλουν από δεκάδες χιλιάδων βαθμών στην επιφάνεια σε εκατομμύρια και δεκάδες εκατομμυρίων στο κέντρο. Το αέριο διατηρείται σε μηχανική ισορροπία ως αποτέλεσμα ισορροπίας μεταξύ των δυνάμεων της πίεσης που τείνουν να ξεσπάσουν την αέρια σφαίρα, και τις δυνάμεις βαρύτητας που αποτρέπουν ένα τέτοιο αποτέλεσμα.

Η θερμή αέρια σφαίρα- ένα άστρο- ακτινοβολεί από την επιφάνεια του. Η απώλεια ενέργειας αντισταθμίζεται από την ενέργεια που απελευθερώνεται στις πυρηνικές αντιδράσεις που συμβαίνουν στις κεντρικές περιοχές του άστρου. Στα στάσιμα άστρα το ρευστό είναι σε αδράνεια και δεν λαμβάνει χώρα καμία υδροδυναμική κίνηση. Η ενέργεια που απελευθερώνεται στο κέντρο μεταφέρεται στη περιφέρεια του άστρου μόνο με την ακτινοβολία και εκπέμπεται στο χώρο επίσης μόνο με την ακτινοβολία. Αφού δε συμβαίνει καμία πυρηνική αντίδραση η απελευθέρωση ενέργειας στα περιφερειακά στρώματα η σταθερή κατάσταση επιτυγχάνεται μόνο από τη πλήρη αντιστάθμιση της εκπομπής από την απορρόφηση του φωτός σε κάθε στοιχείο όγκου η απώλεια ενέργειας από την ακτινοβολία q είναι ίση με μηδέν και η θερμοκρασία σε κάθε σημείο δεν αλλάζει με το χρόνο[†].

Η ισορροπία μεταξύ της εκπομπής και της απορρόφησης του φωτός στην απουσία απωλειών ακτινοβολίας είναι γνωστή ως η ισορροπία της ακτινοβολίας ενός άστρου. Προκύπτει από τη συνθήκη της ισορροπίας της ακτινοβολίας $q=0$ ότι η απόκλιση της ροής της ακτινοβολίας $\nabla \cdot S$ ισούται επίσης με μηδέν. Η συνολική ροή της ακτινοβολίας μέσα από μια σφαιρική επιφάνεια κάθε ακτίνας r , $4\pi r^2 S$, είναι σταθερή και ισούται με την απελευθέρωση ενέργειας στο κέντρο ανά μονάδα χρόνου ($S \sim 1/r^2$). Οι κατανομές της θερμοκρασίας και της πυκνότητας στο αέριο ως μια λειτουργία της ακτίνας του άστρου καθορίζονται από την ταυτόχρονη μελέτη της μηχανικής ισορροπίας και της μεταφοράς της ακτινοβολίας. Όμως, όταν καθορίζουμε τις κατανομές της θερμοκρασίας και της πυκνότητας στη φωτόσφαιρα το πρόβλημα χωρίζεται σε δύο στάδια. Η κατανομή της θερμοκρασίας ως μία λειτουργία μίας οπτικής συντεταγμένης μπορεί να βρεθεί αν εξετάσουμε την μεταφορά της ακτινοβολίας χωρίς να γνωρίζουμε τίποτε για την κατανομή της πυκνότητας. Ύστερα, αν το επιθυμούμε, η κατανομή της θερμοκρασίας ως μία λειτουργία της ακτίνας μπορεί να βρεθεί αν συμπεριλάβουμε στη διαδικασία τη συνθήκη της μηχανικής ισορροπίας και την εξάρτηση του συντελεστή της απορρόφησης του φωτός ως μία λειτουργία της θερμοκρασίας και της πυκνότητας.



Σχήμα. 2.13. Συντεταγμένες για το πρόβλημα της μεταφοράς της ακτινοβολίας στις αστρικές φωτόσφαιρες.

Ας διαμορφώσουμε το πρόβλημα του καθορισμού της κατανομής της θερμοκρασίας και της

μεταφοράς της ακτινοβολίας στη φωτόσφαιρα ενός άστρου. Αφού μας ενδιαφέρει το στρώμα της επιφάνειας του οποίου το πάχος είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα του άστρου, μπορούμε να αγνοήσουμε την κλίση του και να θεωρήσουμε τη φωτόσφαιρα επίπεδη. Παίρνουμε τον άξονα x στην κατεύθυνση του προς τα έξω στην επιφάνεια του άστρου (Σχ.2.13) και γράφουμε την εξίσωση της μεταφοράς της ακτινοβολίας για την επίπεδη περίπτωση

$$\cos \vartheta \frac{dI_v}{dx} = \kappa'_v(I_{vp} - I_v), \quad (2.81)$$

όπου ϑ είναι η γωνία ανάμεσα στην κατεύθυνση της διάδοσης της ακτινοβολίας και του άξονα x . Σε αυτή την εξίσωση προστίθεται η συνθήκη της ισορροπίας της ακτινοβολίας

$$q = \int_0^\infty dv \int \kappa'_v(I_{vp} - I_v) d\Omega = c \int_0^\infty \kappa'_v(U_{vp} - U_v) dv = 0, \quad (2.82)$$

και την οριακή συνθήκη στην επιφάνεια $x=0$, που δηλώνει ότι κανένα φωτόνιο δεν έρχεται από την πλευρά του κενού

$$I_v(x=0, \vartheta) = 0 \quad \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi. \quad (2.83)$$

Συνήθως συμβαίνει ο συντελεστής απορρόφησης $\kappa_v(T, \rho)$ να έχει την ίδια λειτουργική εξάρτηση από την πυκνότητα του αερίου σε διαφορετικές συχνότητες, έτσι ώστε να μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή $\kappa_v(T, \rho) = \varphi(v, T) f(\rho)$. Σε αυτή την περίπτωση, αντικαθιστώντας το x με την νέα οπτική συντεταγμένη που ορίζεται από $dy = f(\rho)dx$, μπορούμε να διαγράψουμε την ανάγκη του άμεσου καθορισμού της κατανομής της πυκνότητας του αερίου ως λειτουργία του x . Αντίθετα μπορούμε πρώτα να καθορίσουμε τις κατανομές της θερμοκρασίας και της πυκνότητας της ακτινοβολίας ως μία λειτουργία αυτής της νέας οπτικής συντεταγμένης y . Οι εξισώσεις (2.81) – (2.83) περιγράφουν αυτές τις κατανομές πλήρως. Το πρόβλημα έχει μόνο μία αυθαίρετη παράμετρο, τη ροή ακτινοβολίας S , η οποία

στην επίπεδη περίπτωση είναι σταθερή ($q = \nabla \cdot S = \frac{dS}{dx} = 0$) Η ροή S είναι ίση με τη ροή της ενέργειας από $x=-\infty$ και στην πραγματικότητα καθορίζεται από την απελευθέρωση ενέργειας στο κέντρο του άστρου. Την ίδια στιγμή η ροή S αντιπροσωπεύει τη συνολική ροή της ενέργειας της ακτινοβολίας που προέρχεται από την επιφάνεια του άστρου, δηλαδή, την φωτεινότητα της επιφάνειας.

Το πρόβλημα όπως διαμορφώθηκε γενικά παρουσιάζει σημαντικές μαθηματικές δυσκολίες. Η κύρια δυσκολία προέρχεται από το γεγονός ότι η εξίσωση μεταφοράς είναι γραμμική για την φασματική ένταση I_v , ενώ η συνθήκη της ισορροπίας της ακτινοβολίας περιλαμβάνει ποσότητες που είναι ολοκληρωμένες ως προς το σύνολο του φάσματος. Για να κάνουμε πιο απλό το πρόβλημα, εισάγουμε έναν συντελεστή απορρόφησης στο φάσμα κ' και ολοκληρώνουμε την εξίσωση μεταφοράς (2.81) ως προς το φάσμα.

Υστερα προκύπτει για την ολοκληρωμένη ένταση $I = \int_0^\infty I_v dv$ η σχέση

$$\cos \vartheta \frac{dI}{dx} = \kappa'(I_p - I), \quad I_p = \int_0^\infty I_{\nu p} dv = \frac{cU_p}{4\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi}. \quad (2.84)$$

Μετατρέποντας σε μία οπτική συντεταγμένη, μετρημένη από την επιφάνεια προς τη φωτόσφαιρα, $d\tau = -\kappa' dx$, $\tau = -\int_0^x \kappa' dx$ προκύπτει ότι

$$\cos \vartheta \frac{dI}{d\tau} = I - I_p(T). \quad (2.85)$$

Η οριακή συνθήκη (2.83) παίρνει τη μορφή

$$I(\tau = 0, \vartheta) = 0 \quad \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi, \quad (2.86)$$

και η συνθήκη της ισορροπίας της ακτινοβολίας (2.82) είναι

$$\int I d\Omega = \int I_p d\Omega, \quad U = U_p = \frac{4\sigma T^4}{c} \quad (2.87)$$

(η σταθερή ροή S είναι $S = \int \cos \vartheta I d\Omega$).

Αν και η ακτινοβολία είναι ανισοτροπική, το ολοκλήρωμα ως προς τη γωνία της ολοκληρωμένης έντασης, δηλαδή η ολοκληρωμένη πυκνότητα της ακτινοβολίας σε κάθε σημείο, είναι ίση με την τιμή της ισορροπίας της U_p . Ή, πιο συγκεκριμένα, η θερμοκρασία του ρευστού σε κάθε σημείο, ελεγχόμενη από τη μεταφορά της ακτινοβολίας, καθορίζεται από την πυκνότητα της ακτινοβολίας στο σημείο $U=U_p$.

Ακόμα και στην πιο απλοποιημένη μορφή της η λύση του συστήματος (2.85)-(2.87) (το λεγόμενο πρόβλημα του Milne) είναι πολύ περίπλοκη από μαθηματικής απόψεως. Μία κατά προσέγγιση λύση αυτού του συστήματος θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα. Όμως, θα δημιουργήσουμε μία εξίσωση ολοκληρώματος ανάλογη αυτού του συστήματος, η οποία μπορεί να λειτουργήσει ως η βάση για να βρούμε μία ακριβή λύση. Χρησιμοποιούμε μία φράση ολοκληρώματος για την ένταση του τύπου του (2.32), η οποία στην επίπεδη περίπτωση μπορεί να γραφτεί με μία μορφή που προκύπτει άμεσα από τη διαφορική εξίσωση (2.85) για I :

$$I(\vartheta, \tau) = \int_\tau^\infty I_p[T(\tau')] e^{-\frac{\tau'-\tau}{\cos \vartheta}} \frac{d\tau'}{\cos \vartheta}, \quad \frac{\pi}{2} > \vartheta > 0. \quad (2.88)$$

$$I(\vartheta, \tau) = - \int_0^\tau I_p[T(\tau')] e^{-\frac{\tau'-\tau}{\cos \vartheta}} \frac{d\tau'}{\cos \vartheta}, \quad \pi > \vartheta > \frac{\pi}{2}. \quad (2.89)$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει την ένταση της ακτινοβολίας που διαδίδεται στην επιφάνεια. Η ολοκλήρωση πραγματοποιείται από $\tau = \infty$, αφού η φωτόσφαιρα θεωρείται πως είναι ημιαόριστη. Η δεύτερη εξίσωση αντιστοιχεί στην ακτινοβολία που διαδίδεται μέσα στο άστρο, λαμβάνοντας υπόψη ότι κανένα φωτόνιο δεν προέρχεται από το κενό.

Ας υπολογίσουμε την πυκνότητα της ακτινοβολίας $U = (1/c) \int I d\Omega$, χρησιμοποιώντας την πρώτη εξίσωση για την ολοκλήρωση σύμφωνα με ϑ από 0 ως $\pi/2$, και την δεύτερη εξίσωση για το ολοκλήρωμα $\pi/2 < \vartheta < \pi$:

$$\begin{aligned} cU &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta \int_\tau^\infty I_p e^{-\frac{\tau'-\tau}{\cos \vartheta}} \frac{d\tau'}{\cos \vartheta} \\ &\quad - 2\pi \int_{\pi/2}^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\tau I_p e^{-\frac{\tau'-\tau}{\cos \vartheta}} \frac{d\tau'}{\cos \vartheta}. \end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης, εισάγοντας στο πρώτο ολοκλήρωμα τη μεταβλητή $w = 1/\cos \vartheta$ και στο δεύτερο $w = -1/\cos \vartheta$, σημειώνοντας τον ορισμό του εκθετικού ολοκληρώματος (2.44) και θέτοντας $I_p = cU_p/4\pi$, προκύπτει ότι

$$U = \frac{1}{2} \int_\tau^\infty U_p E_1(\tau' - \tau) d\tau' + \frac{1}{2} \int_0^\tau U_p E_1(\tau - \tau') d\tau'. \quad (2.90)$$

Ανακαλώντας τη συνθήκη της ισορροπίας της ακτινοβολίας $U = U_p \sim T^4$ προκύπτει τελικά μία εξίσωση ολοκληρώματος για την ολοκληρωμένη ισορροπία της πυκνότητας U_p , ή αντίστοιχα για T^4 ,

$$U_p(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty U_p(\tau') E_1(|\tau' - \tau|) d\tau'. \quad (2.91)$$

Επίσης για μελλοντική αναφορά γράφουμε την φράση ολοκληρώματος για τη ροή στην επίπεδη περίπτωση, που υπολογίζεται με έναν τρόπο παρόμοιο με την πυκνότητα* :

$$S = \frac{c}{2} \int_\tau^\infty U_p E_2(\tau' - \tau) d\tau' - \frac{c}{2} \int_0^\tau U_p E_2(\tau - \tau') d\tau'. \quad (2.92)$$

Από το (2.91) είναι φανερό ότι η λύση $U_p(\tau)$ καθορίζεται σε ένα σταθερό παράγοντα. Αυτός ο παράγοντας αντιστοιχεί στην αυθαίρετη τιμή της ροής S .

§15. Λύση στο πρόβλημα επίπεδης φωτόσφαιρας

Τώρα ψάχνουμε μία λύση στο πρόβλημα που δημιουργήθηκε στην προηγούμενη ενότητα με τη χρήση της προσέγγισης της διάχυσης. Βρίσκοντας τη μέση τιμή των εξισώσεων διάχυσης ως προς το φάσμα και εισάγοντας το μέσο συντελεστή απορρόφησης κ' και τη μέση τιμή της μέσης ελεύθερης διαδρομής $l' = l/\kappa'$, γράφουμε αυτές τις εξισώσεις ως εξής

$$\frac{dS}{dx} = c\kappa'(U_p - U), \quad (2.93)$$

$$S = -\frac{l'c}{3} \frac{dU}{dx}. \quad (2.94)$$

Κατά την αντικατάσταση της συντεταγμένης x από το οπτικό πάχος τ ($d\tau = -\kappa' dx$), προκύπτει ότι

$$\frac{dS}{d\tau} = c(U - U_p), \quad (2.95)$$

$$S = \frac{c}{3} \frac{dU}{d\tau}. \quad (2.96)$$

Η εξίσωση (2.95) δείχνει την ισότητα της συνθήκης ισορροπίας της ακτινοβολίας $U=U_p$ και τη συνθήκη της σταθερότητας της ροής $S=const$. Στην περίπτωση που εξετάζεται η συνθήκη της εξίσωσης της ακτινοβολίας οδηγεί επίσης σε μία ακριβή ισοδυναμία μεταξύ της προσέγγισης της διάχυσης και της προσέγγισης της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας, αφού χάρη στην ισότητα $U=U_p$

$$S = \frac{c}{3} \frac{dU_p}{d\tau} = \frac{4}{3} \sigma \frac{dT^4}{d\tau}. \quad (2.97)$$

Λύνοντας την εξίσωση (2.97) και εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη (2.66)

$$S = 2\sigma T_0^4, \quad (2.98)$$

για τη ροή S με όρους της θερμοκρασίας της επιφάνειας T_0 προκύπτει η ακόλουθη κατανομή της θερμοκρασίας και της πυκνότητας της ακτινοβολίας σύμφωνα με το οπτικό πάχος :

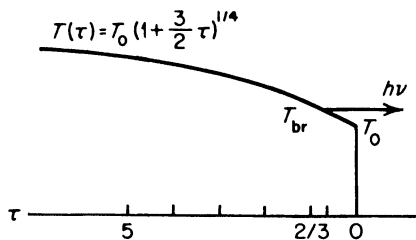
$$U = U_p = \frac{4\sigma T^4}{c} = \frac{4\sigma T_0^4}{c} (1 + \frac{3}{2}\tau). \quad (2.99)$$

* Για το σημείο $\tau=0$ αυτή η εξίσωση έχει ήδη προκύψει στην §7, εξίσωση (2.45). Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε τις ακριβείς εξισώσεις για την πυκνότητα (2.90) και τη ροή στην επίπεδη περίπτωση (2.92) με εκείνες που προέκυψαν στην προσέγγιση 'αναστροφής' (2.73). Η τελευταία διαφέρει από την πρώτη στους αριθμητικούς συντελεστές στην αντικατάσταση των συνηθισμένων εκθετών από εκθετικά ολοκληρώματα.

Η θερμοκρασία της φωτεινότητας της επιφάνειας (εξ ορισμού $S = \sigma T_{br}^4$) δίνεται από $T_{br} = 2^{1/4} T_0 \approx 1.2 T_0$.

Η θερμοκρασία της φωτεινότητας είναι κάπως πιο υψηλή από την πραγματική θερμοκρασία της επιφάνειας T_0 . Αυτό είναι φανερό, αφού τα φωτόνια που ξεκινούν από την επιφάνεια δημιουργούνται σε ένα στρώμα που ακτινοβολεί κοντά στην επιφάνεια με ένα πάχος της τάξεως της μέσης ελεύθερης διαδρομής (το οπτικό πάχος είναι της τάξεως της ενότητας). Η θερμοκρασία του στρώματος που ακτινοβολεί είναι ελαφρώς πιο υψηλή από τη θερμοκρασία της επιφάνειας (Σχ.2.14) και επομένως η 'θερμοκρασία' της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας είναι επίσης ελαφρώς υψηλότερη.

Εικόνα



Σχήμα 2.14. Κατανομή της

θερμοκρασίας κατά μήκος μιας οπτικής
 συντεταγμένης σε μία επίπεδη
 φωτόσφαιρα σύμφωνα με την
 προσέγγιση της διάχυσης

Η θερμοκρασία της φωτεινότητας είναι η ίδια με την θερμοκρασία του σώματος σε ένα οπτικό βάθος $\tau=2/3$. Μπορούμε να πούμε ότι αυτό το βάθος αντιστοιχεί κατά προσέγγιση στο κέντρο του στρώματος που ακτινοβολεί.

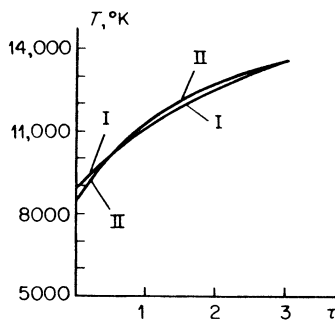
Μία ακριβής αναλυτική λύση έχει βρεθεί για το πρόβλημα της ισορροπίας της ακτινοβολίας σε μία φωτόσφαιρα που θεωρείται «γκρι ύλη». Αυτή η λύση ικανοποιεί την ακριβή εξίσωση του ολοκληρώματος (2.91). Το πρόβλημα έχει επίσης λυθεί από διάφορες μεθόδους

προσέγγισης, κάποιες που είναι πιο ακριβείς από την προσέγγιση της διάχυσης. (Αυτό το πρόβλημα, ένα από τα λίγα στην θεωρία της μεταφοράς της ακτινοβολίας που μπορεί να λυθούν ακριβώς, συνήθως χρησιμεύει ως μία πάγια μέθοδος για τον έλεγχο διαφορετικών μεθόδων προσέγγισης.)

Η θερμοκρασία της επιφάνειας T_o που προέκυψε από την ακριβή λύση για την ίδια ροή S , δηλαδή, για την ίδια θερμοκρασία φωτεινότητας T_{br} , είναι τελικά ελαφρώς χαμηλότερη από τη δεδομένη από την προσέγγιση της διάχυσης. Ονομαστικά, στην ακριβή λύση $T_o^4 = (\sqrt{3}/4)T_{br}^4$, $T_o = 0.811T_{br}$, ενώ στην προσέγγιση της διάχυσης $T_o^4 = \frac{1}{2}T_{br}^4$, $T_o = 0.841T_{br}$.

Οι κατανομές της θερμοκρασίας ως λειτουργίας του οπτικού πάχους είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους στην ακριβή λύση και στην λύση της διάχυσης (Σχ.2.15). Αυτό δείχνει ότι μπορεί να επιτευχθεί κάποια ακρίβεια από την προσέγγιση της διάχυσης. Όπως αναμένεται, το λάθος με την προσέγγιση της διάχυσης είναι μικρότερο, όσο πιο μεγάλο είναι το οπτικό πάχος, τόσο πιο μακριά είμαστε από το όριο. Όσο $\tau \rightarrow \infty$ η ακριβής λύση $U_p(\tau)$ πλησιάζει ασυμπτωτικά την λύση της διάχυσης (2.99). Αυτό μπορεί να επαληθευτεί άμεσα από τις εκφράσεις ολοκληρωμάτων για την πυκνότητα και τη ροή (2.91) και (2.92). Η χρησιμότητα μίας τέτοιας ασυμπτωτικής ανάλυσης έγκειται στο γεγονός ότι δείχνει τον τρόπο με τον οποίο οι προσεγγίσεις της διάχυσης και της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας προκύπτουν από την ασυμπτωτική φύση της ακριβούς λύσης.

Εικόνα



Σχήμα 2.15. Σύγκριση της κατανομής της θερμοκρασίας σε μία επίπεδη φωτόσφαιρα, που υπολογίζεται από την προσέγγιση της διάχυσης (I) και από την ακριβή λύση (II). Η φωτεινότητα της θερμοκρασίας είχε θεωρηθεί πως είναι $10,500^\circ\text{K}$. Το σχήμα δίνεται από την [1].

Η λύση της διάχυσης (2.99) δείχνει ότι η σχετική αλλαγή στην ισορροπία της πυκνότητας U_p ως προς μία μέση ελεύθερη διαδρομή μειώνεται με την απόσταση από την επιφάνεια, όσο $\tau \rightarrow \infty$

$$\frac{\Delta U_p}{U_p} \approx \frac{l}{U_p} \frac{dU_p}{dx} = \frac{1}{U_p} \frac{dU_p}{d\tau} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \tau} \approx \frac{1}{\tau}.$$

Τα εκθετικά ολοκληρώματα E_1 και E_2 μειώνονται γρήγορα με μία αύξηση στο επιχείρημα, έτσι ώστε η μόνη περιοχή $|\tau' - \tau| \sim 1$ για το σημείο τ δίνει κάθε σημαντική συνεισφορά στα ολοκληρώματα (2.91) και (2.92). Επομένως, η ολοκλήρωση σε σχέση με τ' από 0 στο τ δεύτερο ολοκλήρωμα και του (2.90) και του (2.92) μπορεί για $\tau \gg 1$ να επεκταθεί στο $-\infty$ ή, ισοδύναμα, η ολοκλήρωση σε σχέση με το $\tau - \tau'$ από 0 στο $\tau \gg 1$ μπορεί να επεκταθεί στην κλίμακα 0 στο ∞ . Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του τ , τόσο πιο μικρό είναι το λάθος που προκαλείται από την αλλαγή στα όρια της ολοκλήρωσης. Ας επεκτείνουμε το $U_p(\tau')$ για το σημείο τ :

$$U_p(\tau') = U_p(\tau) + \frac{dU_p}{d\tau} (\tau' - \tau) + \frac{1}{2} \frac{d^2U_p}{d\tau^2} (\tau' - \tau)^2 + \dots$$

Αφού $U_p(\tau)$ είναι μία λειτουργία που ποικίλλει αργά όσο $\tau \rightarrow \infty$, οι υψηλότερες παράγωγοι γίνονται όλο και μικρότερες. Εντάσσοντας αυτή την επέκταση στα (2.90) και (2.91) και εκτιμώντας τα ολοκληρώματα, προκύπτει ότι (με μία ακρίβεια ανάλογη στις παραγώγους υψηλότερων τάξεων U_p σε σχέση με τ) $S = (c/3)dU_p/d\tau$ από το (2.92) και $d^2U_p/d\tau^2 = 0$ από το (2.91). Αυτά τα αποτελέσματα αντιστοιχούν στις προσεγγίσεις της διάθλασης και της θερμικής συμπεριφοράς της ακτινοβολίας.

Το γεγονός ότι η ολοκληρωμένη πυκνότητα της ακτινοβολίας στο κάθε σημείο είναι ίση με την τιμή ισορροπίας της που αντιστοιχεί στην θερμοκρασία του ρευστού δεν σημαίνει ότι το ίδιο ισχύει και για τις φασματικές πυκνότητες*. Όμως, όσο πιο μακριά από την επιφάνεια είμαστε, τόσο λιγότερες είναι οι σχετικές αλλαγές της θερμοκρασίας ως προς αποστάσεις της τάξεως της μέσης ελεύθερης διαδρομής, και επομένως ως προς αποστάσεις της τάξεως των μέσων ελεύθερων διαδρομών που εξαρτώνται από την πυκνότητα. Έτσι, τοπική ισορροπία υπάρχει για όλα τα σημεία σε μία επαρκή απόσταση από την επιφάνεια, για όλες τις συχνότητες. Εδώ η μέση ελεύθερη διαδρομή $l' = 1/\kappa'$ είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή Rosseland. Η μέθοδος εύρεσης της μέσης τιμής Rosseland μπορεί να επεκταθεί ώστε να συμπεριλαμβάνει ολόκληρη τη φωτόσφαιρα ως την ίδια την επιφάνεια. Γνωρίζοντας την κατανομή της θερμοκρασίας ως μια λειτουργία του μέσου οπτικού πάχους και γνωρίζοντας τις σχέσεις που διέπουν τους συντελεστές απορρόφησης που εξαρτώνται από τη συχνότητα (πιο συγκεκριμένα, η αναλογία τους στους μέσους συντελεστές απορρόφησης κ_n/κ'), μπορούμε να βρούμε το φάσμα της ακτινοβολίας του άστρου από τις σχέσεις που βρήκαμε στην §8 [1-3]. Το φάσμα, γενικά δεν συμπίπτει με το φάσμα Planck που αντιστοιχεί στο T_b , αλλά σε κάποιες περιπτώσεις είναι αρκετά κοντά σε αυτό.

§16. Απώλειες της ενέργειας της ακτινοβολίας ενός θερμού σώματος

Ας εξετάσουμε τις απώλειες της ενέργειας που προκαλούνται από την ακτινοβολία ενός θερμού σώματος. Θα εξετάσουμε συνηθισμένα σώματα ορισμένων διαστάσεων, που γενικά θερμαίνονται ανομοιόμορφα. Η συνολική ενέργεια Q που χάνει το σώμα ανά μονάδα χρόνου είναι, προφανώς, ίση με το ολοκλήρωμα του όγκου της ενέργειας q ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου. Σημειώνοντας ότι $q = \nabla \cdot S$ μπορούμε να γράψουμε†

$$Q = \int q \, dV = \int S_o \, d\Sigma, \quad (2.100)$$

όπου dV είναι ένα στοιχείο όγκου του σώματος, $d\Sigma$ είναι στοιχείο επιφάνειας, και S_o είναι το φυσιολογικό στοιχείο της ροής της ακτινοβολίας διαμέσου της επιφάνειας. Μπορούμε επίσης να γράψουμε $S_o = \sigma T_{br}^4$ όπου T_{br} είναι η φωτεινότητα της θερμοκρασίας της επιφάνειας.

* Με τον ίδιο τρόπο που δεν προκύπτει από $S = \text{const}$ ότι $S_v = \text{const}$;

$$\frac{dS_v}{dx} = \kappa'(U_{vp} - U_v) \neq 0.$$

† Η ποσότητα q μπορεί να αλλάξει τιμή στο σώμα, έτσι ώστε μερικά μέρη του σώματος ψύχονται ενώ άλλα θερμαίνονται από την ακτινοβολία.

Η φωτεινότητα της θερμοκρασίας δεν είναι απαραίτητο να είναι κοντά στη μέση θερμοκρασία T του ανομοιόμορφα θερμού σώματος. Στην περίπτωση ενός οπτικά παχέως σώματος, του οποίου η διάσταση x είναι πολύ μεγαλύτερη από την μέση ελεύθερη διαδρομή l (ας πούμε, που αντιστοιχεί σε μία μέση θερμοκρασία), η σειρά του μεγέθους της ροής είναι

$$S_o \sim lc \frac{U_p}{x} \sim \frac{l}{x} \sigma T^4 \ll \sigma T^4; \quad T_{br} \sim \left(\frac{l}{x}\right)^{1/4} T.$$

Για $(l/x)^{1/4} \ll 1$, τότε, $T_{br} \ll T$. Η φωτεινότητα της θερμοκρασίας είναι πιο κοντά στην θερμοκρασία της επιφάνειας. Μόνο στην περίπτωση σωμάτων που είναι αρκετά λεπτά οπτικά μπορεί η φωτεινότητα της θερμοκρασίας να είναι κοντά στη μέση θερμοκρασία του σώματος (οι θερμοκρασίες T_{br} και T μπορούν επίσης να είναι κοντά μεταξύ τους όταν το σώμα διατηρείται με κάποιους τρόπους σε μία σταθερή θερμοκρασία).

Ας εξετάσουμε τώρα ένα οπτικά λεπτό σώμα, του οποίου οι διαστάσεις είναι αρκετά μικρές σε σύγκριση με μία κατάλληλη μέση ελεύθερη διαδρομή ενός φωτονίου *. Εάν το οπτικό πάχος του σώματος x/l είναι μικρό, τότε όλα τα φωτόνια που δημιουργούνται σε οποιοδήποτε σημείο στο σώμα ξεκινούν από την επιφάνεια. Μόνο ένα κλάσμα φωτονίων,

της τάξεως του $x/l \ll 1$, απορροφούνται κατά τη διάρκεια της μεταφοράς τους. Η πυκνότητα της ακτινοβολίας στο σώμα είναι της τάξεως x/l της τιμής της ισορροπίας του, και είναι επομένως αισθητά χαμηλότερη από την ισορροπία της πυκνότητας της ακτινοβολίας (η ακτινοβολία είναι αισθητά εκτός ισορροπίας). Στην πραγματικότητα, σύμφωνα με το (2.32) η ένταση της ακτινοβολίας σε οποιοδήποτε σημείο είναι ίση με το ολοκλήρωμα ως προς την πυκνότητα των πηγών κατά μήκος της ακτίνας μέσα στα όρια του σώματος. Αφού το σώμα είναι οπτικά λεπτό, $\int_s^s \kappa'_v ds \sim x''/l_v \ll 1$, και ο εκθετικός παράγοντας που χαρακτηρίζει την απορρόφηση των φωτονίων είναι κοντά στην ενότητα. Επομένως, η ένταση $I_v \sim (x/l_v)I_{vp}$, και η πυκνότητα της ακτινοβολίας που προέκυψε από την ολοκλήρωση ως προς όλες τις γωνίες $U_v \sim (x/l_v)U_{vp}$. Ολοκληρώνοντας το U_v ως προς το φάσμα και εισάγοντας τη συχνότητα της μέσης ελεύθερης διαδρομής l_1 , προκύπτει $U_v \sim (x/l_1)U_p \ll U_p$. Η ποσότητα της ενέργειας που απορροφάται ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου είναι ένα κλάσμα της τάξεως του x/l_1 της ενέργειας που εκπέμπεται ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου. Αυτό είναι αλήθεια επειδή η αναλογία αυτών των ποσοτήτων είναι U/U_p , όπως μπορούμε να δούμε και από τη σχέση (2.61) για q . Επομένως, στην περίπτωση ενός οπτικά λεπτού σώματος η ενέργεια που χάνεται από το ρευστό ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου τελικά είναι ίση με την ενέργεια που εκπέμπεται (με μία ακρίβεια της τάξεως x/l_1), δηλαδή, στον ολοκληρωμένο συντελεστή εκπομπής

$$J = \int_0^\infty J_v dv = c \int_0^\infty \kappa'_v U_{vp} dv. \quad (2.101)$$

*Δηλώνουμε τη μέση ελεύθερη διαδρομή της συχνότητας για την περίπτωση ενός λεπτού σώματος οπτικά με l_1 , ώστε να αποφύγουμε κάθε σύγχυση με την ελεύθερη διαδρομή Rosseland l που χαρακτηρίζει ένα οπτικά παχύ σώμα. Όπως θα δούμε παρακάτω, ο νόμος για την εύρεση της μέσης τιμής της απορρόφησης ως προς το συνολικό φάσμα στην περίπτωση ενός οπτικά λεπτού σώματος διαφέρει από τον αντίστοιχο νόμο Rosseland.

Βγάζουμε εκτός της ολοκληρωμένη τιμή της μέσης τιμής του συντελεστή απορρόφησης, που δηλώνεται με κ_1 και που από τον ορισμό είναι ίση με το αντίστροφο της μέσης ελεύθερης διαδρομής l_1 . Η εξίσωση (2.101) γίνεται

$$J = \kappa_1 U_p c = \frac{4\sigma T^4}{l_1}. \quad (2.102)$$

Εξισώνοντας τις (2.102) και (2.101) προκύπτει ο νόμος για την εύρεση της μέσης τιμής της μέσης ελεύθερης διαδρομής για ένα οπτικά λεπτό σώμα

$$\kappa_1 = \frac{1}{l_1} = \frac{\int_0^\infty \kappa'_v U_{vp} dv}{\int_0^\infty U_{vp} dv} = \int_0^\infty \kappa'_v G_1(u) du. \quad (2.103)$$

Η λειτουργία του βάρους είναι

$$G_1(u) = \frac{15}{\pi^4} \frac{u^3}{e^u - 1}, \quad u = \frac{h\nu}{kT}. \quad (2.104)$$

Σύμφωνα με τον ακριβή συντελεστή απορρόφησης έχουμε

$$\kappa_1 = \frac{1}{l_1} = \int_0^\infty \kappa'_v G'_1(u) du, \quad (2.105)$$

$$G'_1(u) = (1 - e^{-u})G_1(u) = \frac{15}{\pi^4} e^{-u} u^3. \quad (2.106)$$

Αυτή η μέθοδος είναι διαφορετική από τη μέθοδο Rosseland (2.77) στο ότι στην μέθοδο Rosseland είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή ή το αντίστροφο του συντελεστή απορρόφησης που βρίσκουμε την μέση τιμή με μία λειτουργία βάρους που είναι ανάλογη με την παράγωγο σε σχέση με τη θερμοκρασία της λειτουργίας Planck. Από την άλλη πλευρά, ο ολοκληρωμένος συντελεστής εκπομπής (2.102) χαρακτηρίζεται από μια μέση ελεύθερη διαδρομή που προκύπτει από την εύρεση της μέσης τιμής του ίδιου του συντελεστή απορρόφησης με μία λειτουργία βάρους ανάλογη στη λειτουργία Planck. Η συνολική ενέργεια που χάνεται από ένα θερμό οπτικά λεπτό σώμα δίνεται από το συντελεστή εκπομπής που ολοκληρώνεται ως προς τον όγκο

$$Q = \int q dV = \int J dV. \quad (2.107)$$

Σημειώνουμε ότι ένα οπτικά παχύ σώμα ψύχεται κυρίως από την ακτινοβολία που έρχεται «από την επιφάνεια», ενώ στην περίπτωση ενός οπτικά λεπτού σώματος ο συνολικός όγκος συμμετέχει στην διαδικασία ψύξης. Φυσικά, είναι πιθανό να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ροής της ακτινοβολίας από την επιφάνεια ακόμα και σε αυτή την περίπτωση και να γράψουμε το (2.107) με τη μορφή ενός ολοκληρώματος για την επιφάνεια, αφού η σχέση $q = \nabla \cdot \mathbf{S}$ είναι πάντα έγκυρη. Όμως, στην περίπτωση της ψύξης όγκου αυτή η ερμηνεία των απωλειών ενέργειας είναι καθαρά επίσημη, ενώ στην περίπτωση ενός οπτικά παχέως σώματος τα φωτόνια που εκπέμπονται δημιουργούνται στην πραγματικότητα στο στρώμα της επιφάνειας. Αντίστοιχα, το φάσμα της ακτινοβολίας ενός οπτικά παχέως σώματος είναι αρκετά κοντά στο φάσμα Planck που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία της φωτεινότητας T_{br} ή στη θερμοκρασία της επιφάνειας. Το φάσμα της ακτινοβολίας ενός οπτικά λεπτού σώματος

μπορεί να είναι αισθητά διαφορετικό από το φάσμα Planck που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία του σώματος, αν ο συντελεστής απορρόφησης του ρευστού εξαρτάται αυστηρά από τη συχνότητα. Σε αυτή την περίπτωση το φάσμα χαρακτηρίζεται από τη λειτουργία της συχνότητας $\kappa_\nu U_{\nu p}$.

Ας συγκρίνουμε τις απώλειες ενέργειας ακτινοβολίας ανά μονάδα όγκου του σώματος (την αναλογία ψύξης ανά μονάδα όγκου) και εκείνες ανά μονάδα περιοχής επιφάνειας (ροή από την επιφάνεια) για περιπτώσεις οπτικά παχίων και οπτικά λεπτών σωμάτων. Εάν οι γραμμικές διαστάσεις του σώματος είναι της τάξεως x , τότε η περιοχή της επιφάνειάς του είναι της τάξεως x^2 και ο όγκος του της τάξεως x^3 . Η αναλογία ψύξης ανά μονάδα περιοχής επιφάνειας για ένα οπτικά παχύ σώμα είναι της τάξεως

$$\frac{Q}{x^2} \sim S \sim \frac{l}{x} \sigma T^4 \ll \sigma T^4, \quad \frac{l}{x} \ll 1, \quad (2.108)$$

και η αναλογία ψύξης ανά μονάδα όγκου είναι

$$\frac{Q}{x^3} \sim \frac{S}{x} \sim \frac{1}{x} \frac{l}{x} \sigma T^4 \sim \left(\frac{l}{x}\right)^2 \frac{\sigma T^4}{l} \ll \frac{\sigma T^4}{l}. \quad (2.109)$$

Στην περίπτωση ενός οπτικά λεπτού σώματος όμως,

$$\frac{Q}{x^2} \sim \frac{Jx^3}{x^2} \sim \frac{x}{l_1} \sigma T^4 \ll \sigma T^4; \quad \frac{x}{l_1} \ll 1, \quad (2.110)$$

$$\frac{Q}{x^3} \sim J \sim \frac{\sigma T^4}{l_1}, \quad \frac{x}{l_1} \ll 1. \quad (2.111)$$

Ας συγκρίνουμε τις σχετικές απώλειες ενέργειας δύο σωμάτων περίπου στην ίδια μέση θερμοκρασία: ένα από τα σώματα έχει μεγάλες διαστάσεις και είναι παχύ οπτικά, ενώ το άλλο έχει μικρές διαστάσεις και είναι λεπτό οπτικά. Υποθέτουμε ότι και για τα δύο σώματα οι πυκνότητες και οι θερμοκρασίες είναι σχεδόν ίσες έτσι ώστε οι μέσες ελεύθερες διαδρομές l και l_1 (οι οποίες είναι λειτουργίες της θερμοκρασίας και της πυκνότητας του ρευστού μόνο) είναι της ίδιας τάξεως. Ως κανόνας, οι διαφορετικές μέθοδοι για να βρούμε τις μέσες τιμές ως προς το φάσμα δεν οδηγούν σε μεγάλες αριθμητικές διαφορές ανάμεσα στις μέσες ελεύθερες διαδρομές l και l_1 συνήθως δεν διαφέρουν σε παραπάνω παράγοντες από δύο έως τέσσερεις. Από τις εξισώσεις (2.108) και (2.110) είναι φανερό ότι οι απώλειες και στις δύο περιπτώσεις ανά μονάδα περιοχής επιφάνειας είναι λιγότερες από σT^4 . Μόνο ένα σώμα του οποίου οι διαστάσεις είναι της τάξεως της μέσης ελεύθερης διαδρομής (ένα οπτικό πάχος της τάξεως της ενότητας, $x \sim l \sim l_1$) εκπέμπει από την επιφάνειά του μία ροή ακτινοβολίας ενέργειας που αντιστοιχεί σε ένα τέλειο μαύρο σώμα σε μία θερμοκρασία της τάξεως της μέσης θερμοκρασίας του σώματος. Ας εξετάσουμε τις απώλειες ανά μονάδα όγκου (ή ανά μονάδα μάζας) ενός παχέως σώματος οπτικά. Εδώ, ο ρυθμός στον οποίο ψύχεται η μάζα είναι πολύ χαμηλότερος από την περίπτωση ενός λεπτού

σώματος οπτικά. Στην τελευταία περίπτωση ο ρυθμός είναι της τάξεως του ολοκληρωμένου συντελεστή εκπομπής $J \sim \sigma T^4 / l_1$ ως προς τον όγκο και ανεξάρτητος από τις διαστάσεις. Το φυσικό αίτιο για αυτό είναι ξεκάθαρο : τα φωτόνια που εκπέμπονται μέσα στο παχύ οπτικά στρώμα «εγκλωβίζονται» μέσα στο σώμα και δεν μπορούν να εξέλθουν, αφού απορροφούνται κατά τη διάρκεια της μεταφοράς τους μέσα στο σώμα.

§17. Υδροδυναμικές εξισώσεις που υπολογίζουν την ενέργεια της ακτινοβολίας, την πίεση και την ανταλλαγή της θερμότητας της ακτινοβολίας.

Στην §9 δείξαμε μία μέθοδο με την οποία υπολογίζουμε την αλληλεπίδραση ανάμεσα στην ακτινοβολία και το ρευστό, η οποία περιορίζεται απλά στον καθορισμό της εκπομπής του φωτός και της απορρόφησής του. Η πίεση της ακτινοβολίας και η ενέργεια θεωρήσαμε πως είναι μικρές σε σύγκριση με την ενέργεια και την πίεση του ρευστού. Σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες ή σε ένα πολύ αραιό αέριο, η ενέργεια και η πίεση της ακτινοβολίας δεν μπορούν να θεωρηθούν τόσο μεγάλες καθώς οι διαστάσεις του αέριου σώματος είναι μεγάλες συγκριτικά με τη μέση ελεύθερη διαδρομή της ακτινοβολίας. Είναι φανερό στην περίπτωση της τοπικής ισορροπίας μεταξύ της ακτινοβολίας και του ρευστού, όπου $U = U_p = 4\sigma T^4 / c$ και η πίεση της ακτινοβολίας είναι $p_v = U_p / 3 = 4/3 \sigma T^4 / c$, ότι η ενέργεια και η πίεση της ακτινοβολίας πρέπει να προστεθεί στην εσωτερική ενέργεια και πίεση του ρευστού, και ότι ο όρος της μεταφοράς της θερμότητας της ακτινοβολίας θα πρέπει να συμπεριληφθεί στις υδροδυναμικές εξισώσεις. Ας δείξουμε πώς αυτό το συμπέρασμα προκύπτει από τις γενικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα του ρευστού και της ακτινοβολίας.

Για να γράψουμε σε πλήρη μορφή τους νόμους της διατήρησης της ενέργειας και της ορμής για το σύστημα ρευστό – ακτινοβολία (που γενικά δεν βρίσκεται σε ισορροπία), μας εξυπηρετεί να ξεκινήσουμε με τη διαφορική μορφή των εξισώσεων, οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις «συνέχειας» για τις ποσότητες που διατηρούνται. Αυτές οι εξισώσεις διαμορφώθηκαν στο Κεφάλαιο I για τη ροή ενός τέλει αερίου υπό την απουσία ακτινοβολίας (εξισώσεις (1.7) και (1.10)). Οι εξισώσεις για το σύστημα ρευστό – ακτινοβολία μπορούν εύκολα να προκύψουν από μία γενίκευση των (1.7) και (1.10) (υπενθυμίζουμε ότι εξετάζουμε μόνο μη σχετικιστικές κινήσεις). Για παράδειγμα, προσθέτουμε στην πυκνότητα της ορμής ρu την πυκνότητα της ορμής της ακτινοβολίας G , και στον τανυστή της πυκνότητας της ορμής της ροής Π_{ik} του ρευστού προσθέτουμε τον τανυστή της πυκνότητας της ορμής της ροής της ακτινοβολίας T_{ik} . Ο τελευταίος είναι, φυσικά, ισοδύναμος με τον τανυστή πίεσης Maxwell για ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, προσθέτουμε την ολοκληρωμένη πυκνότητα της ακτινοβολίας ενέργειας ... στην πυκνότητα της ενέργειας του ρευστού και στην πυκνότητα της ενέργειας της ροής του ρευστού προσθέτουμε την ολοκληρωμένη ροή της ακτινοβολίας ενέργειας ..., διάνυσμα Poynting. Υπενθυμίζουμε ότι η ορμή της ακτινοβολίας σχετίζεται με το διάνυσμα Poynting από τη σχέση $G = S/c^2$. Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν οι εξισώσεις ενέργειας

και ορμής για το σύστημα ρευστό – ακτινοβολία

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i + G_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\Pi_{ik} + T_{ik}) = 0, \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} + U \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho u_k \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + S_k \right\} = 0. \quad (2.113)$$

Η εξίσωση συνέχειας προφανώς παραμένει η ίδια, αφού η ακτινοβολία «δεν έχει μάζα»*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0.$$

Οι εξισώσεις (2.112) και (2.113), που διαμορφώθηκαν παραπάνω απλά από τη γενίκευση των υδροδυναμικών εξισώσεων έχουν μία καθαρή και συγκεκριμένη σημασία. Μπορούν επίσης να προκύψουν από έναν αυστηρά επίσημο τρόπο ξεκινώντας από τις εξισώσεις διατήρησης που είναι γραμμένες για το τεσσάρων διαστάσεων διάνυσμα ενέργειας – ορμής για το σύστημα ρευστό-ακτινοβολία, και ύστερα εφαρμόζοντας τη μη σχετικιστική προσέγγιση στο διάνυσμα που σχετίζεται με το ρευστό.

Οι ποσότητες που χαρακτηρίζουν την ακτινοβολία που συμπεριλαμβάνονται στις εξισώσεις (2.112) και (2.113) μπορούν να ερμηνευτούν με δύο τρόπους. Όταν αντιμετωπίζονται ως στοιχεία ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εκφράζονται με όρους των εντάσεων E και H του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου

$$U = \frac{E^2 + H^2}{8\pi},$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = c^2 \mathbf{G}, \quad (2.114)$$

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_i E_k - H_i H_k + \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + H^2) \right\}.$$

Είναι μόνο απαραίτητο να κρατήσουμε στο μυαλό μας ότι η ακτινοβολία είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που αλλάζει γρήγορα μορφή · η περίοδος των ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με τις φορές της μακροσκοπικής ροής, και έτσι είναι κατανοητό ότι οι παραπάνω εξισώσεις περιέχουν χρονικά μεσοτιμημένες ποσότητες

που μεσοτιμήθηκαν ως προς μία περίοδο μεγάλη σε σύγκριση με την περίοδο ταλάντωσης.

*Όταν $U \sim \varepsilon < \rho c^2$.

Στην προσέγγιση από πλευράς κβαντικής- μηχανικής οι μακροσκοπικές ποσότητες U , S , και T_{ik} εκφράζονται με όρους της λειτουργίας της κατανομής των φωτονίων. Εάν $f(\nu, \Omega, r, t)$ είναι η λειτουργία κατανομής στο σημείο r τη χρονική στιγμή t για μία συγκεκριμένη συχνότητα ν και μία συγκεκριμένη κατεύθυνση κίνησης των φωτονίων Ω , τότε, όπως φαίνεται και στην §1 του παρόντος κεφαλαίου,

$$\begin{aligned}
 U &= \int h\nu f d\Omega d\nu, \\
 S &= \int h\nu c \Omega f d\Omega d\nu, \\
 T_{ik} &= \int \Omega_i \Omega_k h\nu f d\Omega d\nu *.
 \end{aligned}
 \tag{2.115}$$

Επεκτείνοντας τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που αλλάζουν μορφή γρήγορα στα ολοκληρώματα Fourier, μπορούμε να ξαναπαρουσιάσουμε αυτά τα πεδία ως μία υπέρθεση αρμονικών ταλαντώσεων διαφορετικών συχνοτήτων. Στη μεσοτίμηση ως προς το χρόνο οι όροι που περιέχονται στις σχέσεις για U , S_i , και T_{ik} που είναι σε τετραγωνική κατανομή σε σχέση με τα στοιχεία του πεδίου και που είναι προϊόντα ποσοτήτων που περιέχουν διαφορετικές συχνότητες εξαφανίζονται. Παραμένουν μόνο τετραγωνικοί όροι που περιέχουν προϊόντα των συστατικών Fourier που αντιστοιχούν στην ίδια συχνότητα. Επομένως, η ενέργεια, η ορμή και η ενέργεια της ακτινοβολίας και η ορμή των ροών ξαναπαρουσιάζονται ως μία γραμμική υπέρθεση των όρων που αντιστοιχούν σε διαφορετικές συχνότητες. Αυτό μας επιτρέπει να εισάγουμε την έννοια μίας έντασης ακτινοβολίας σε μία δεδομένη συχνότητα $I_\nu(\Omega, r, t)$ και να εκφράσουμε τις μακροσκοπικές ποσότητες με όρους ολοκληρωμάτων για την ένταση ως προς το φάσμα και ως προς την κατεύθυνση της διάδοσης της ακτινοβολίας

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega d\nu, \\
 S &= \int \Omega I_\nu d\Omega d\nu, \\
 T_{ik} &= \frac{1}{c} \int \Omega_i \Omega_k I_\nu d\Omega d\nu.
 \end{aligned}
 \tag{2.116}$$

Αυτή η γραμμική υπέρθεση μας επιτρέπει επίσης να εξετάσουμε την κβαντική – μηχανική προσέγγιση της έντασης ως ένα προϊόν της ενέργειας των φωτονίων και της λειτουργίας κατανομής ($I_\nu = h\nu c f$).

* Η ενέργεια ενός φωτονίου είναι $h\nu$, η ορμή του είναι $\Omega h\nu/c$, και η ροή του στοιχείου ith της ορμής στην κατεύθυνση kth είναι $\Omega_i \Omega_k (h\nu/c)c$., από το οποίο προκύπτει η έκφραση για το διάνυσμα της ροής της ορμής T_{ik} .

Είναι γνωστό ότι τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, οι συχνότητες, και οι κατευθύνσεις της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και, επομένως, οι ολοκληρωμένες ποσότητες U , S και T_{ik} εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο μετριοούνται. Οι ολοκληρωμένες ποσότητες που περιέχονται στις εξισώσεις (2.112) και (2.113) υπάγονται σε ένα στάσιμο, «εργαστηριακό» σύστημα συντεταγμένων, όπου το δεδομένο σωματίδιο ρευστού κινείται με ταχύτητα u . Είναι πιο βολικό, όμως, να χρησιμοποιούμε τις παραμέτρους της ακτινοβολίας που μετριοούνται στο σύστημα συντεταγμένων του σωματιδίου, το σύστημα στο οποίο το σωματίδιο βρίσκεται σε αδράνεια. Πράγματι, είναι η πυκνότητα της ενέργειας της ακτινοβολίας ενός ρευστού σε αδράνεια που είναι ίση με την τιμή της ισορροπίας $U_p = 4\sigma T^4$ στην κατάσταση πλήρους θερμοδυναμικής ισορροπίας και είναι η ροή της ακτινοβολίας ενός ρευστού σε αδράνεια που έχει το χαρακτηρισμό διάχυσης. Η ακτινοβολία μεταφέρεται μαζί με το κινούμενο ρευστό και η συνολική ροή συμπεριλαμβάνει αυτή την ακτινοβολία που μεταφέρεται.

Ας μετατρέψουμε τις ποσότητες U , S και T_{ik} στις (2.112) και (2.113) σε αντίστοιχες ποσότητες που εντάσσονται σε ένα σύστημα συντεταγμένων που συνοδεύει τα κινούμενα σωματίδια του ρευστού. Εάν το σώμα κινείται με μη σχετικιστικές ταχύτητες $u/c \ll 1$, έτσι ώστε να είναι πιθανό να παραλείψουμε αυτούς τους όρους ανάλογους με u/c , η μετατροπή στο κινούμενο σύστημα συντεταγμένων δίνει (βλ. [6])

$$U = U',$$

$$S_i = S'_i + u_i U' + u_k T'_{ik}, \quad (2.117)$$

$$T_{ik} = T'_{ik}.$$

Ας εισάγουμε τις μετατρεμμένες ποσότητες στις εξισώσεις (2.112) και (2.113).

Σημειώνουμε ότι η ορμή της ακτινοβολίας G_i είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με την ορμή του ρευστού ρu_i και έτσι μπορεί να παραληφθεί*. Επεκτείνοντας το διάνυσμα της ορμής της ροής του ρευστού καθώς $\Pi_{ik} = \rho u_i u_k + p \delta_{ik}$, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T'_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} + U' \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho u_k \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + S'_k + u_k U' + u_i T'_{ik} \right\} = 0$$

(αυτές οι εξισώσεις προέκυψαν από τον Belen'kii [7]).

Ας εξετάσουμε την περίπτωση θερμοδυναμικής ισορροπίας μεταξύ της ακτινοβολίας και του ρευστού. Η πυκνότητα της ακτινοβολίας ενέργειας είναι λοιπόν ίση με την τιμή της ισορροπίας της $U' = 4\sigma T^4/c$.

* Στην πραγματικότητα, αν η ακτινοβολία ενέργεια είναι συγκρίσιμη με την ενέργεια του ρευστού, δηλαδή, $U \sim \rho u^2$, τότε η ορμή της ακτινοβολίας που είναι της τάξεως $G \sim U/c$ είναι μικρότερη από την ορμή του ρευστού u/c εξαιτίας ενός παράγοντα ρu :

$$G \sim \frac{U}{c} \sim \frac{u}{c} \rho u.$$

Η ροή της ακτινοβολίας ενέργειας S'_k με βάση το ρευστό είναι σχεδόν ανάλογη στην κλίση της ισορροπίας της πυκνότητας της ακτινοβολίας. Σύμφωνα με τη σχέση (2.76) για τη θερμική συμπεριφορά της ακτινοβολίας

$$S'_k = -\frac{lc}{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{4\sigma T^4}{c} \right) = -\frac{16\sigma l T^3}{3} \frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

Το διάνυσμα της ορμής της ροής προκύπτει πολύ απλά από το (2.116), αν σημειώσουμε ότι για την τοπική ισορροπία το πεδίο ακτινοβολίας είναι σχεδόν ισοτροπικό και ότι η ένταση μόνο εξαρτάται ελαφρώς από τη γωνία. Βρίσκουμε λοιπόν ότι

$$T'_{ik} = \frac{U'_p}{3} \delta_{ik} = p_v \delta_{ik},$$

όπου $p_v = 1/3 U'_p$ είναι η πίεση της ακτινοβολίας. Εντάσσοντας αυτές τις ποσότητες στις εξισώσεις (2.118) βρίσκουμε για την περίπτωση της τοπικής ισορροπίας ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (p + p_v) = 0, \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} + U_p \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ u_k \left(\rho \varepsilon + U_p + \frac{\rho u^2}{2} + p + p_v \right) - \frac{lc}{3} \frac{\partial U_p}{\partial x_k} \right\} = 0, \quad (2.120)$$

όπου $U_p = 3p_v = 4\sigma T^4/c$. Οι εξισώσεις της ορμής και της ενέργειας του συστήματος είναι τώρα σε κλειστή μορφή αφού όλες οι ποσότητες που περιγράφουν την ακτινοβολία εκφράζονται με όρους της θερμοκρασίας και των οπτικών ιδιοτήτων του ρευστού.

Αν η ακτινοβολία δεν βρίσκεται σε τοπική θερμοδυναμική ισορροπία με το ρευστό, τότε η εξίσωση της μεταφοράς της ακτινοβολίας πρέπει να προστεθεί στο (2.118). Η εξίσωση της μεταφοράς της ακτινοβολίας για ένα κινούμενο μέσο που λαμβάνει υπόψη όρους της τάξεως u/c αναλύεται στην [8].

§18. Ο αριθμός των φωτονίων ως μία σταθερά του κλασσικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Το πεδίο της ακτινοβολίας χαρακτηρίζεται από την πυκνότητα και τη ροή της ενέργειας (η πυκνότητα της ορμής είναι ανάλογη στην τελευταία) - αυτές οι ποσότητες καθορίζονται από τις εξισώσεις (2.114). Είναι αξιοσημείωτο το ότι στην κλασσική θεωρία είναι πιθανό να εισάγουμε άλλη μια χαρακτηριστική ποσότητα που συμπίπτει με τον αριθμό των φωτονίων στο πεδίο. Εκ πρώτης όψεως ο αριθμός των φωτονίων είναι, εξ' ορισμού, μία κβαντική έννοια, δεν έχει χώρο, και δεν μπορεί να οριστεί στην κλασσική θεωρία. Ας θυμηθούμε,

όμως, ότι στην κλασσική μηχανική το ολοκλήρωμα $\oint p dq = h \left(n + \frac{1}{2} \right)$ το οποίο αποφέρει τον αριθμό της κβαντικής κατάστασης ενός ταλαντωτή εμφανίζεται ως μια αδιαβατική σταθερά. Παρομοίως, ο αριθμός των φωτονίων σε ένα δεδομένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα πρέπει να είναι μία αδιαβατική σταθερά. Επιπλέον, θα πρέπει να είναι μία ποσότητα σταθερού χρόνου και μία σχετικιστική σταθερά.

Η ποσότητα που είναι ανάλογη στον αριθμό των φωτονίων δίνεται από

$$N \sim \iint \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') + \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (2.121)$$

όπου το ολοκλήρωμα διεξάγεται ως προς r και r' (τα dr και dr' δηλώνουν στοιχεία του όγκου). Η σύνθεση αυτής της έκφρασης μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητή αν αλλάξουμε τις μεταβλητές r και $\rho = r' - r$. Διορθώνουμε το σημείο r και γράφουμε ένα ολοκλήρωμα ως προς τον όγκο $d\rho$ σε πολικές συντεταγμένες με κέντρο το σημείο r

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \int \mathbf{E}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) \frac{\rho^2 d\rho d\Omega_\rho}{\rho^2},$$

όπου $d\Omega_\rho$ είναι ένα στοιχείο στερεάς γωνίας για το σημείο r .

Η παραπάνω έκφραση είναι της ίδιας τάξεως μεγέθους όπως $E^2(r)\bar{\lambda}$ όπου $\bar{\lambda}$ είναι μία μέση απόσταση στην οποία η συσχέτιση μεταξύ του πεδίου σε ένα δεδομένο σημείο $E(r)$ και του πεδίου στην εγγύτητα αυτού του σημείου διατηρείται. Δημιουργώντας μία ανάλογη έκφραση χρησιμοποιώντας το H , βρίσκουμε ότι, στην σωστή τάξη μεγέθους

$$N \sim \int (E^2 + H^2)\bar{\lambda} d\mathbf{r} \sim \int U(\mathbf{r})\bar{\lambda} d\mathbf{r}.$$

Ας δημιουργήσουμε τώρα το (2.121) για τον αριθμό των φωτονίων. Εξετάζουμε ένα πεδίο

το οποίο δεν περιέχει ούτε ελεύθερες ούτε δεσμευμένες φορτώσεις. Τότε $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ και $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Ο αριθμός των φωτονίων στο δεδομένο διάστημα συχνότητας dn είναι ίσος με την ενέργεια του πεδίου που περιέχεται σε αυτό το διάστημα που διαχωρίζεται με $h\nu$. Για να καθορίσουμε τη φασματική ενέργεια επεκτείνουμε το πεδίο σε ένα ολοκλήρωμα Fourier ως προς τον χώρο

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$

Χάρη στις εξισώσεις για το πεδίο κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, τα στοιχεία Fourier $E_{\mathbf{k}}$ είναι λειτουργίες του χρόνου που είναι ανάλογος σε $\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t)$, όπου $\omega_{\mathbf{k}} = ck$ ($\omega_{\mathbf{k}} = 2\pi\nu_{\mathbf{k}}$). Εισάγουμε για κάθε κατεύθυνση του διανύσματος του κύματος \mathbf{k} τις κατευθύνσεις της φωτεινής πόλωσης n_1 και n_2 , που είναι κάθετες στο \mathbf{k} . Τα στοιχεία Fourier ενός πεδίου με την δεδομένη πόλωση είναι

$$E_{k_1} = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_1 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}.$$

Οι ποσότητες E_{k_2} , H_{k_1} , και H_{k_2} ορίζονται παρομοίως. Η ενέργεια των κυμάτων (με τη δεδομένη πόλωση) που διαδίδονται στην κατεύθυνση \mathbf{k} είναι ανάλογη με

$$\varepsilon_{k_1} \sim |E_{k_1} + H_{k_2}|^2, \quad \varepsilon_{k_2} \sim |E_{k_2} - H_{k_1}|^2.$$

Ο αντίστοιχος αριθμός φωτονίων με τη δεδομένη συχνότητα είναι ανάλογος με

$$f_{\mathbf{k}} = f_{k_1} + f_{k_2} = \frac{\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}}{h\nu_{\mathbf{k}}} \sim \frac{\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}}{k}.$$

Ο συνολικός αριθμός φωτονίων στο πεδίο είναι ανάλογος με

$$N \sim \int f_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}.$$

Εντάσσοντας τις εκφράσεις για E_{k_i} , κλπ, και κάνοντας κάποιες απλές μετατροπές, βρίσκουμε ότι

$$N \sim \iiint [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_1 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}] [\mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_1 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}'] \frac{d\mathbf{k}}{k} + \dots$$

στο οποίο ολοκλήρωμα προσθέτονται ανάλογοι όροι στα $E^* n_2$, $H^* n_1$ και $H^* n_2$. Αυτή η έκφραση μπορεί να γραφτεί ως ένα απλό ολοκλήρωμα

$$N \sim \iiint \{ [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_2] + [\text{same terms in } \mathbf{H}] \} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{k}}{k}. \quad (2.122)$$

Προκύπτει από τη συνθήκη $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, ότι τα κύματα είναι εγκάρσια και ότι οι ποσότητες

$$E_{k_3} = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_3 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

και H_k είναι ίσες με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι το (2.122) δεν θα αλλάξει αν προσθέσουμε στο ολοκλήρωμα την ποσότητα

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_3 \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_3 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{k}}{k},$$

που είναι ίση με μηδέν. Αλλά, αφού προστίθεται αυτή η ποσότητα, η έκφραση στις παρενθέσεις στο (2.122) θα πάρει μία κλιμακωτή μορφή $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')$, αφού n_1 , n_2 και n_3 διαμορφώνουν τρεις κάθετες κατευθύνσεις. Ως αποτέλεσμα προκύπτει

$$N \sim \iiint [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') + \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}')] e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{k}}{k}.$$

Εκτιμώντας το ολοκλήρωμα $\frac{\int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\mathbf{k}}{k}$ προκύπτει το (2.121), το οποίο αποδεικνύει την παραπάνω μας δήλωση ότι η ποσότητα που ορίστηκε στο (2.121) είναι ανάλογη με τον αριθμό των φωτονίων στο πεδίο.

Πολύ ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι το N είναι γραμμένο ως ένα διπλό ολοκλήρωμα ως προς τον όγκο για ένα δεδομένο $t = \text{const}$. Στη μετατροπή Lorentz τα E και H αλλάζουν, και επιπλέον είναι απαραίτητο να κάνουμε μία μετάβαση σε άλλο όγκο με $t' = \text{const}$. Μία άμεση απόδειξη του ότι η έκφραση N είναι μία σταθερά Lorentz* είναι αρκετά δύσκολη. Αφού t και t' δεν μπορούν να συνυπάρξουν, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του Maxwell για να κάνουμε μία μετάβαση από τα E και H στον όγκο $t = \text{const}$ στα E' και H' στον όγκο $t' = \text{const}$. Όμως, η σχετικιστική σταθερότητα του (2.122) στην πραγματικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι N – ο συνολικός αριθμός φωτονίων σε αυτό τον όγκο – είναι, προφανώς, μία σχετικιστική σταθερά. Είναι σημαντικό εδώ να εξετάσουμε ένα πεδίο ηλεκτρικής εκκένωσης στο οποίο τα φωτόνια ούτε δημιουργούνται ούτε απορροφούνται.

* Σημείωση του εκδότη. Το ότι ο N σε έναν αδέσμευτο άδειο χώρο είναι σταθερός είναι ξεκάθαρο από το γεγονός ότι το ϵ_k είναι ανεξάρτητο του χρόνου.

Βιβλιογραφία

***Physics of shock waves and high- temperature hydrodynamic phenomena by Ya. B. Zel' Dovich, Yu. P. Raizer
(Academy press, New York & London, 1966)***