



**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
με θέμα

**Μελέτη των καμπυλών Bezier και B-splines και
υλοποίηση προγράμματος σε C++ για την
πειραματική σχεδίασή τους με υπολογιστή**

του **Χατζηνικόλα Μιχαήλ**

Επιβλέπων Δρ. Μηχ. **Νικόλαος Σ. Πετράκης**
Καθηγητής Εφαρμογών

**Χανιά,
Απρίλιος 2015**

Ο φοιτητής Χατζηνικόλας Μιχαήλ δηλώνει υπεύθυνα ότι το κείμενο της παρούσας πτυχιακής αποτελεί προϊόν προσωπικής μελέτης και εργασίας και ότι όλες οι πηγές που χρησιμοποιήθηκαν για τη συγγραφή και τη σύνταξή της δηλώνονται κατάλληλα τόσο στο σώμα του κειμένου όσο και στη βιβλιογραφία. Επίσης δηλώνει υπεύθυνα ότι γνωρίζει πως η λογοκλοπή αποτελεί σοβαρότατο παράπτωμα και ότι είναι ενήμερος για την επέλευση των νόμιμων συνεπειών.

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Εφαρμοσμένων Επιστημών
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών



ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

με θέμα:

**Μελέτη των καμπυλών Bezier και B-splines και
υλοποίηση προγράμματος σε C++ για την
πειραματική σχεδιάσή τους με υπολογιστή.**

ΤΟΥ

Χατζηνικόλα Μιχαήλ

Δευτέρα 27 Απριλίου 2015, ώρα 10:00, Αίθουσα 4

Εξεταστική Επιτροπή: Καθ. Εφαρμ. Νικόλαος Πετράκης (επιβλέπων)
Επικ. Καθ. Αντώνιος Κωνσταντάρας
Εργ. Συνεργάτης Ηρακλής Ρηγάκης

Εν' συντομία

Στόχος της παρούσας πτυχιακής εργασίας ήταν η μελέτη της θεωρίας των καμπυλών Bezier και B-splines και των ιδιοτήτων τους αλλά και εφαρμογή τους στην πράξη. Έτσι, για τον λόγο αυτό αναπτύχθηκε εύχρηστο λογισμικό (μια φόρμα) χρησιμοποιώντας το γραφικό περιβάλλον Microsoft Visual Studio 2012, ώστε ο χρήστης να μπορεί να σχεδιάσει εύκολα, παραμετροποιημένα και με διαδραστικό τρόπο μία καμπύλη Bezier ή μία καμπύλη B-splines.

Έχει διενεργηθεί πλήθος παραδειγμάτων για την επιβεβαίωση της ορθής λειτουργίας της φόρμας και ασφαλώς στα πλαίσια της εργασίας παρουσιάζονται αναλυτικά όλες οι λειτουργίες που παρέχει η φόρμα στο χρήστη της.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία, γίνεται μία προσπάθεια δημιουργίας μίας φόρμας, δηλαδή ένα εκτελέσιμο αρχείο με μορφή ίδια με αυτή ενός “παραθύρου” του λογισμικού των Windows. Η φόρμα αυτή αναπτύσσεται με σκοπό ο χρήστης της να μπορεί να σχεδιάσει με εύκολο και διαδραστικό τρόπο μία καμπύλη Bezier ή μία καμπύλη B-splines. Για την δημιουργία της φόρμας αυτής χρησιμοποιήσαμε το γραφικό περιβάλλον Microsoft Visual Studio 2012, ο χειρισμός του οποίου περιγράφεται στο τέταρτο κεφάλαιο. Ενώ στα κεφάλαια δύο και τρία, παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία των καμπυλών Bezier και B-splines, δίνοντας έμφαση στις ιδιότητές τους. Εν συνεχεία, μέσω του κεφαλαίου τέσσερα, παρουσιάζονται αναλυτικά οι λειτουργίες που παρέχει η φόρμα στο χρήστη της. Ενώ, στα κεφάλαια πέντε και έξι, παραθέτουμε μία σειρά παραδειγμάτων τα οποία αποδεικνύουν την ορθή λειτουργία της φόρμας μας. Τέλος στο κεφάλαιο επτά, αναφέρουμε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε μέσα από την περάτωση της παρούσας εργασίας.

ABSTRACT

This thesis deals with the creation of an executable file form which has the appearance similar to the ‘Windows’ operating system. This form is developed to enable the user to design in an interactive way, a Bezier or a B-splines curve. The software design tool that was used for this form development is the graphics environment of the Microsoft Visual Studio 2012, referenced in chapter four. The second and the third chapters present the Bezier and B-splines in a brief description, highlighting on their properties. The fourth chapter makes a detailed description on the functions of the form that are valuable for the user. In the fifth and sixth chapter some examples are presented which prove the ordinary functionality of the form. Finally, the chapter seven develops some valuable conclusions which derive from the whole project work.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε κατά το ακαδημαϊκό έτος 2014 – 2015 στη Σχολή Εφαρμοσμένων Επιστημών του ΤΕΙ Κρήτης, στο τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών Τ.Ε., υπό την επίβλεψη του κ. Πετράκη Νικολάου. Το αντικείμενο μελέτης είναι η δημιουργία γραφικών παραστάσεων των καμπυλών Bezier και B-Splines, μέσω της ανάπτυξης κώδικα στο γραφικό περιβάλλον Microsoft Visual Studio 2012.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με στήριξαν κατά την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Πετράκη Νικόλαο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αλλά και την δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο, εξαιρετικά ενδιαφέρον θέμα. Επίσης θα ήθελα να τον ευχαριστήσω θερμά και για τις εύστοχες και πολύ χρήσιμες παρατηρήσεις του γύρω από τα θέματα που πραγματεύεται η παρούσα πτυχιακή. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους, που ήταν μαζί μου από την αρχή μέχρι το τέλος αυτής της πτυχιακής εργασίας, για την ενθάρρυνση και την συμπαράστασή τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΤΙΤΛΟΣ.....	ΣΕΛ
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	i
ABSTRACT	i
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	ii
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	iii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΚΑΜΠΥΛΩΝ BEZIER	2
2.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ BEZIER	2
2.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ BEZIER	5
2.3 ΡΗΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ BEZIER	12
2.4 ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ BEZIER	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΚΑΜΠΥΛΩΝ B-SPLINES	16
3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ B-SPLINES.....	18
3.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ B-SPLINES.....	20
3.3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΟΜΒΩΝ	24
3.4 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ B-SPLINES	25
3.5 ΡΗΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ B-SPLINES.....	34
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΤΗΣ ΦΟΡΜΑΣ	38
4.1 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΕΝΟΣ ΝΕΟΥ PROJECT.....	38
4.2 ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ	43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΦΟΡΜΑΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ	46
5.1 ΓΡΑΜΜΗ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ	46
5.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ BEZIER	48
5.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ B-SPLINES.....	50
5.4 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.....	51
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ BEZIER & B-SPLINES ..	53
6.1 ΚΑΜΠΥΛΗ BEZIER.....	53
6.2 ΚΑΜΠΥΛΗ B-SPLINES	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ	63
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	64

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προτού αρχίσουν να χρησιμοποιούνται οι υπολογιστές οι αριθμητικοί υπολογισμοί γίνονταν στο χέρι, χρησιμοποιώντας κατά κύριο πολυωνυμικές συναρτήσεις λόγω της ευκολίας χρήσης τους. Με την ανάπτυξη των υπολογιστών οι ομαλές πολυωνυμικές καμπύλες (splines) απέκτησαν μεγάλη σημασία. Στην αρχή χρησιμοποιήθηκαν για να αντικαταστήσουν τα πολύωνυμα στην παρεμβολή και μετέπειτα στην κατασκευή ομαλών και ευέλικτων σχημάτων στο σχεδιασμό γραφικών υπολογιστών (computer graphics) και άλλων συγγενών πεδίων.

Πιο συγκεκριμένα οι καμπύλες Bezier (Μπεζιέ) και B-splines ερευνήθηκαν στις αρχές του δεκάτου ενάτου αιώνα. Οι καμπύλες Bezier αναπτύχθηκαν για πρώτη φορά το από τον Paul de Casteljaou (Πωλ ντε Καστεγιώ) ενώ αυτός που τις χρησιμοποίησε πρώτος ήταν ο γάλλος μηχανικός Pierre Bezier (Πιέρ Μπεζιέ), για να σχεδιάσει αυτοκινούμενα σώματα (σώματα αυτοκινήτων). Ενώ οι καμπύλες B-splines ερευνήθηκαν από τον Nikola Lovachevsky από το κρατικό πανεπιστήμιο του Καζάν στην Ρωσία. Ο όρος B-spline προτάθηκε από το Isaac Jacob Schoenberg και είναι μια συντομογραφία του βασική πολυωνυμική ομαλή καμπύλη. Οι B-splines αποτελούν γενίκευση των καμπυλών Bezier που στην σειρά τους μπορούν να γενικευτούν στις NURBS (Nonuniform rational B-spline). Οι τρεις αυτές μορφές των καμπυλών σχεδίασης είναι και αυτές που θα εξετάσουμε στην παρούσα πτυχιακή.

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο Καμπυλών Bezier^[1]

Για τη σχεδίαση καμπυλών και επιφανειών με χρήση Η/Υ απαιτούνται οικογένειες συναρτήσεων, οι οποίες: α) επιτρέπουν ακριβή απεικόνιση όλων των καμπυλών και επιφανειών που επιθυμεί ο χρήστης, β) είναι απλές συναρτήσεις που γίνονται εύκολα κατανοητές και γ) η επεξεργασία τους σε Η/Υ είναι εύκολη, αποδοτική και ακριβής, δηλαδή:

- ο υπολογισμός των σημείων και των παραγώγων πρέπει να είναι εύκολος και γρήγορος
- η υπολογιστική διαχείριση των συναρτήσεων δεν πρέπει να είναι ευαίσθητη σε σφάλματα στρογγυλοποίησης
- οι συναρτήσεις πρέπει να έχουν μικρή απαίτηση μνήμης

Μια ευρέως χρησιμοποιούμενη κατηγορία συναρτήσεων για το σκοπό αυτό είναι οι πολυωνμικές. Παρά το γεγονός ότι οι πολυωνμικές συναρτήσεις ικανοποιούν τα δύο τελευταία κριτήρια της παραπάνω λίστας, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός σημαντικών καμπυλών και επιφανειών, όπως είναι οι κωνικές τομές (κύκλος, έλλειψη, παραβολή, υπερβολή), που δε μπορούν να περιγραφούν με ακρίβεια χρησιμοποιώντας πολυώνυμα και τις οποίες πρέπει να περιγράψουμε προσεγγιστικά με χρήση πολυωνύμων. Εμείς θα ασχοληθούμε με μία μεθοδολογία χρήσης πολυωνύμων για παρουσίαση και διαχείριση καμπυλών και επιφανειών με χρήση Η/Υ, τις καμπύλες Bézier.

2.1 Ιδιότητες Καμπυλών Bezier^[2]

Οι καμπύλες Bezier κοινοποιήθηκαν το 1962 από τον γάλλο μηχανικό Pierre Bezier (Πιέρ Μπεζιέ), ο οποίος τις χρησιμοποίησε για να σχεδιάσει σώματα αυτοκινήτων. Οι καμπύλες αναπτύχθηκαν για πρώτη φορά το 1959 από

τον Paul deCasteljau (Πωλ ντε Καστεγιώ) , χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του deCasteljau, μία αριθμητικά ευσταθή μέθοδο για την αξιοποίηση των καμπύλων Bézier.

Μια n-οστού βαθμού καμπύλη Bezier ορίζεται ως:

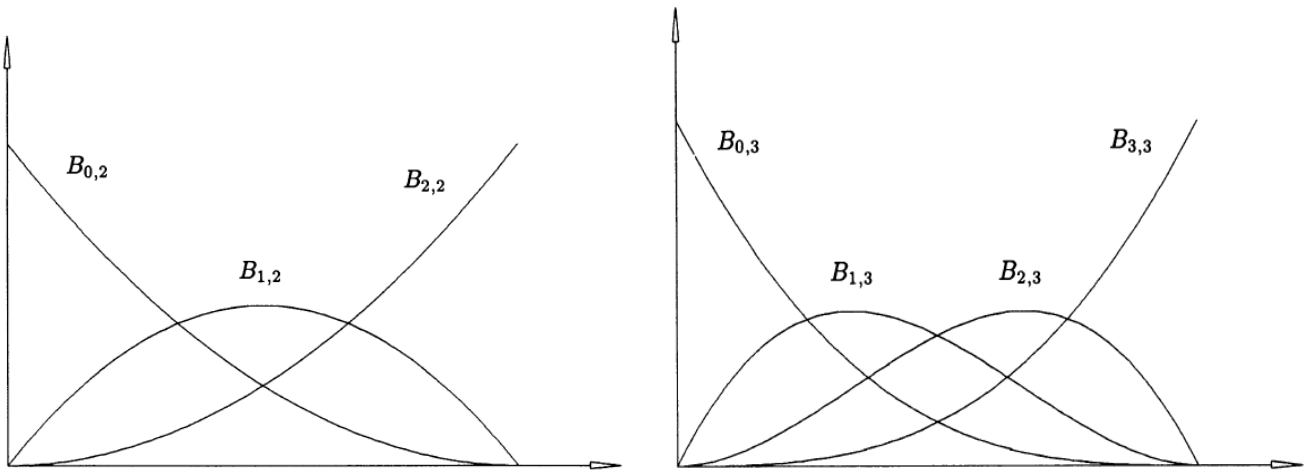
$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot \mathbf{P}_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.1)$$

όπου:

- **n** ο βαθμός της καμπύλης
- **P_i** , όπου i=0 έως n , τα σημεία ελέγχου (control points) της καμπύλης (τα διανύσματα θέσης των σημείων).
- **B_{i,n}(u)** οι βασικές συναρτήσεις (basis functions), που είναι n-οστού βαθμού πολυώνυμα Bernstein τα οποία ορίζονται :
-

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (2.2)$$

Σε κάθε σύστημα αναπαράστασης μίας καμπύλης (ή επιφάνειας) , η επιλογή των συναρτήσεων βάσης (basis functions) καθορίζει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του τελικού σχήματος. Έτσι λοιπόν οι καμπύλες Bezier χρησιμοποιούν τα πολυώνυμα Bernstein (εικόνα 2.1) τα οποία εμφανίζουν κάποιες σημαντικές ιδιότητες [1] :



Εικόνα 2.1: αριστερά: πολυώνυμα Bernstein για $n=2$, δεξιά: για $n=3$

- i. μη αρνητικότητα: $\mathbf{B_{i,n}(u) \geq 0}$ για όλα τα $\mathbf{i,n}$ και $\mathbf{0 \leq u \leq 1}$
- ii. διαμέριση της μονάδας: $\sum_{i=0}^n \mathbf{B_{i,n}(u) = 1}$ για όλα τα $\mathbf{0 \leq u \leq 1}$
- iii. $\mathbf{B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1}$
- iv. το $\mathbf{B_{i,n}(u)}$ έχει ακριβώς ένα μέγιστο (ολικό) στο διάστημα $\mathbf{[0,1]}$, και αυτό είναι στο $\mathbf{u=i/n}$
- v. συμμετρία : για κάθε \mathbf{n} το σύνολο των πολυωνύμων $\{\mathbf{B_{i,n}(u)}\}$ είναι συμμετρικά σε σχέση με το $\mathbf{u=1/2}$
- vi. αναδρομικός ορισμός : $\mathbf{B_{i,n}(u) = (1-u) B_{i,n-1}(u) + u B_{i-1,n-1}(u)}$ και ορίζουμε $\mathbf{B_{i,n}(u) \equiv 0}$ αν $\mathbf{i < 0}$ ή $\mathbf{i > n}$
- vii. παράγωγοι :

$$B'_{i,n}(u) = \frac{dB_{i,n}(u)}{du} = n(B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u))$$

$$B_{-1,n-1}(u) \equiv B_{n,n-1}(u) \equiv 0$$

Εικόνα 2.2: Παράγωγος Πολυωνύμων Bernstein

Από την ιδιότητα (vii) παράγεται η γενική έκφραση για τις παραγώγους των καμπύλων Bezier (εικόνα 2.3) [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'(u) &= \frac{d \left(\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i \right)}{du} = \sum_{i=0}^n B'_{i,n}(u) \mathbf{P}_i \\ &= \sum_{i=0}^n n (B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u)) \mathbf{P}_i \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(u) (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i) \end{aligned}$$

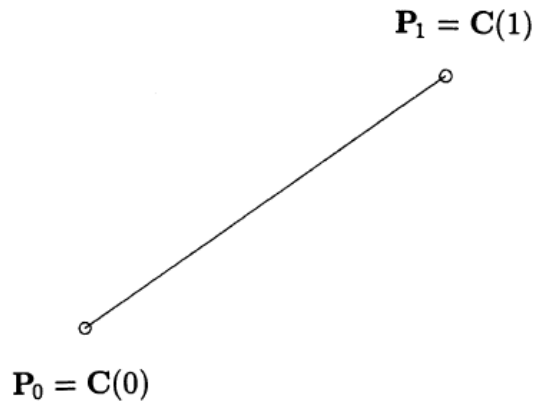
Εικόνα 2.3: Παράγωγος Καμπυλών Bezier

Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να σημειώσουμε ότι : α) η παράγωγος μιας n-οστού βαθμού καμπύλης Bezier είναι μία νέα καμπύλη μικρότερη κατά έναν βαθμό (n-1), β) οι εκφράσεις των παραγώγων στα σημεία αρχής και τέλους της καμπύλης (u=0 και u=1) είναι συμμετρικές εξαιτίας της συμμετρίας των πολυωνύμων Bernstein, γ) η k παράγωγος σε ένα καταληκτικό σημείο της καμπύλης εξαρτάται μόνο από τα k+1 σημεία ελέγχου σε εκείνο το σημείο.

2.2 Παραδείγματα Εφαρμογής Καμπυλών Bezier

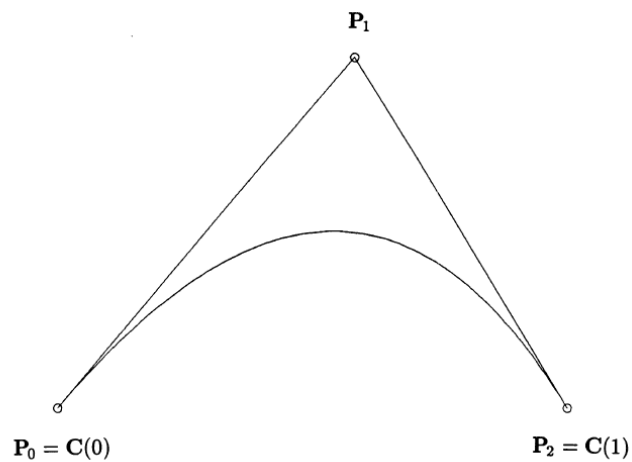
Στην παρούσα ενότητα θα αναφερθούμε σε κάποια παραδείγματα καμπυλών Bezier, με βάση τις εξισώσεις (2.1 και 2.2) που αναφέραμε παραπάνω. Έτσι έχουμε:

- για **n=1** η εξίσωση 2.2 γίνεται $\mathbf{B}_{0,1}(u) = 1-u$ και $\mathbf{B}_{1,1}(u)=u$ και η εξίσωση 2.1 παίρνει τη μορφή $\mathbf{C}(u)=(1-u)\mathbf{P}_0+u\mathbf{P}_1$. Αυτό που προκύπτει είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα από το \mathbf{P}_0 έως το \mathbf{P}_1 το οποίο είναι μία 1ου βαθμού καμπύλη Bezier (εικόνα 2.4)[1]. Ουσιαστικά πρόκειται για μία γραμμική παρεμβολή μεταξύ των δύο σημείων.



Εικόνα 2.4: Καμπύλη Bezier πρώτου βαθμού

- Για $n=2$ από τις εξισώσεις 2.1 και 2.2 έχουμε $C(u)=(1-u)^2P_0+2u(1-u)P_1+u^2P_2$. Προκύπτει, δηλαδή, ένα παραβολικό τόξο (καμπύλη Bezier 2ου βαθμού) από το P_0 έως το P_2 (εικόνα 2.5) [1].



Εικόνα 2.5: Καμπύλη Bezier δευτέρου βαθμού

Αξίζει, σε αυτό το σημείο, να παρατηρήσουμε ότι:

- το πολύγωνο που δημιουργείται από $\{P_0, P_1, P_2\}$ ονομάζεται πολύγωνο ελέγχου (convex hull) και προσεγγίζει το σχήμα της καμπύλης με σχετική ακρίβεια.
- $P_0=C(0)$ και $P_2=C(1)$

- το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο αρχής της καμπύλης έχει την ίδια κατεύθυνση με το πρώτο τμήμα του πολυγώνου, παρόμοια το τελευταίο τμήμα του πολυγώνου δίνει την κλίση του εφαπτόμενου διανύσματος στο τελευταίο σημείο ή πιο απλά οι εφαπτόμενες κατευθύνσεις στα καταληκτικά σημεία της καμπύλης είναι παράλληλες στα ευθύγραμμα τμήματα $\mathbf{P}_0\text{-}\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2\text{-}\mathbf{P}_1$.
- η καμπύλη περιέχεται μέσα στο τρίγωνο $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ και αυτό το χαρακτηριστικό αποτελεί και την ιδιότητα του κυρτού πολυγώνου σύμφωνα με την οποία οι καμπύλες Bezier περιέχονται μέσα στο κυρτό πολύγωνο που δημιουργούν τα σημεία ελέγχου τους.

Μπορούμε να πούμε, λοιπόν, ότι η μία καμπύλη Bezier δημιουργείται μετά από συνδυασμό γραμμικών παρεμβολών. Αυτό που μπορούμε να το δούμε καλύτερα μέσα από την παρακάτω εικόνα (εικόνα 2.6), όπου φαίνεται η γραμμική παρεμβολή μίας καμπύλης Bezier δευτέρου βαθμού.

$$C(u) = \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(u) \cdot \mathbf{P}_i$$

$\mathbf{P}_i : \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 : \text{σημεία ελέγχου}$

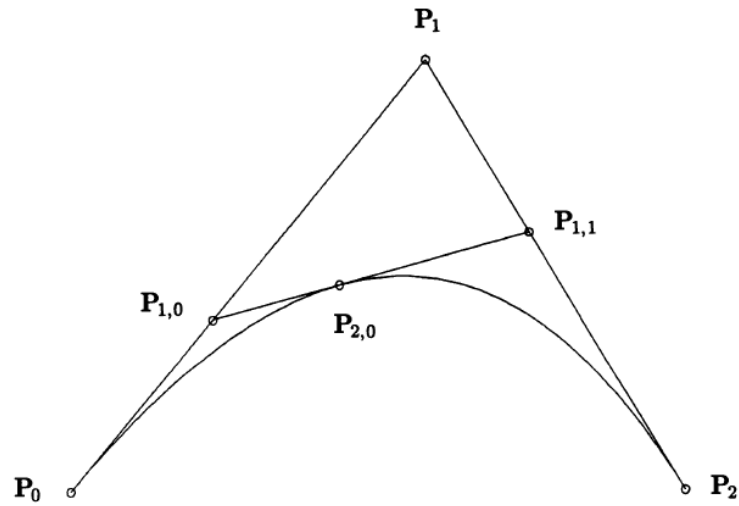
$$C(u) = (1-u)^2 \cdot \mathbf{P}_0 + 2u(1-u) \cdot \mathbf{P}_1 + u^2 \cdot \mathbf{P}_2 \Rightarrow$$

$$C(u) = (1-u) \cdot \underbrace{((1-u) \cdot \mathbf{P}_0 + u \cdot \mathbf{P}_1)}_{\text{Γρ. παρεμβολή}} + u \cdot \underbrace{((1-u) \cdot \mathbf{P}_1 + u \cdot \mathbf{P}_2)}_{\text{Γρ. παρεμβολή}}$$

Γραμμική παρεμβολή

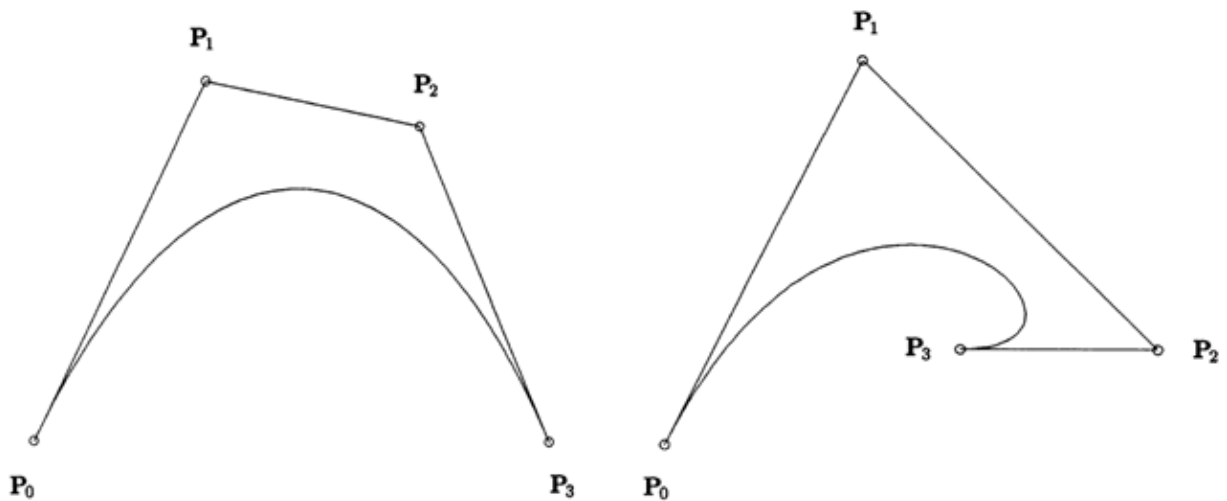
Εικόνα 2.6: Γραμμική παρεμβολή καμπύλης δευτέρου βαθμού.

Θεωρώντας λοιπόν μία συγκεκριμένη τιμή του u , $u=u_0$, έχουμε γραμμική παρεμβολή δύο καμπυλών Bezier 1ου βαθμού και μας δίνουν τα νέα σημεία $\mathbf{P}_{1,0}=(1-u_0)\mathbf{P}_0+u_0\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_{1,1}=(1-u_0)\mathbf{P}_1+u_0\mathbf{P}_2$. Κατόπιν με νέα γραμμική παρεμβολή ανάμεσα στα σημεία $\mathbf{P}_{1,0}$ και $\mathbf{P}_{1,1}$ παίρνουμε το $\mathbf{P}_{2,0}=(1-u_0)\mathbf{P}_{1,0}+u_0\mathbf{P}_{1,1}$ και προκύπτει ότι $C(u_0)=\mathbf{P}_{2,0}$. Αυτή η διαδικασία φαίνεται σχηματικά και παρακάτω (εικόνα 2.7)[1]:



Εικόνα 2.7: Γραμμική παρεμβολή μεταξύ των σημείων $P_{1,0}$ και $P_{1,1}$

- Για $n=3$ αντίστοιχα έχουμε $C(u)=(1-u)^3+3u(1-u)^2P_1+3u^2(1-u)P_2+u^3P_3$. Μερικές περιπτώσεις καμπυλών Bezier 3ου βαθμού είναι οι εξής (εικόνα 2.8)[1]:

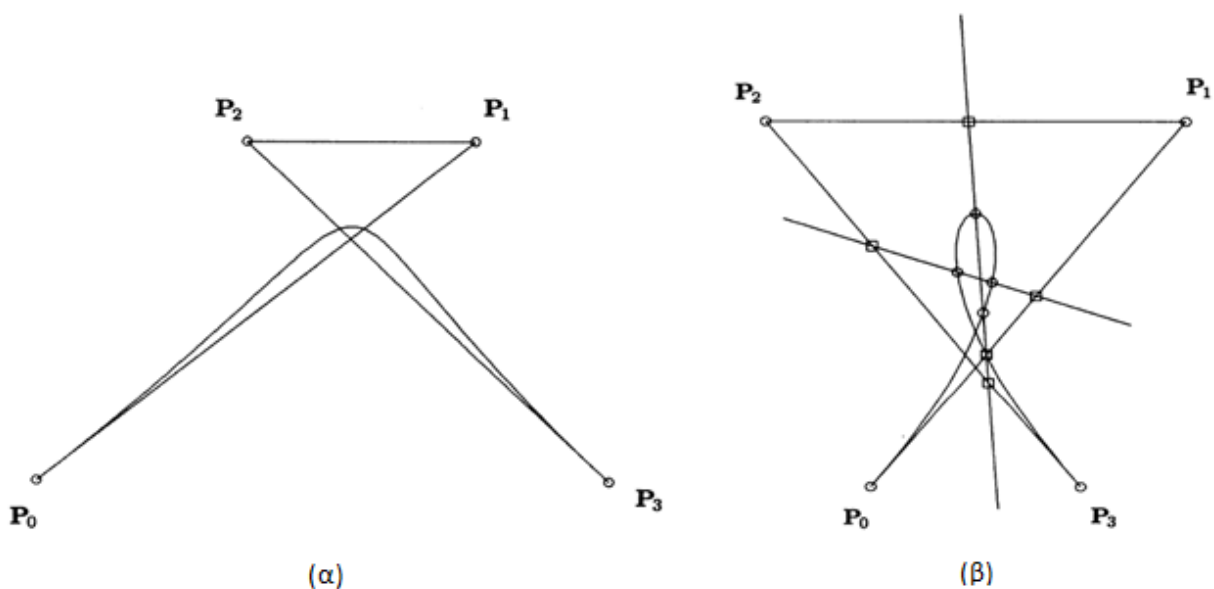


Εικόνα 2.8: Καμπύλες Bezier τρίτου Βαθμού

Για τις καμπύλες τρίτου βαθμού μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

- τα πολύγωνα ελέγχου προσεγγίζουν τα σχήματα των καμπυλών.

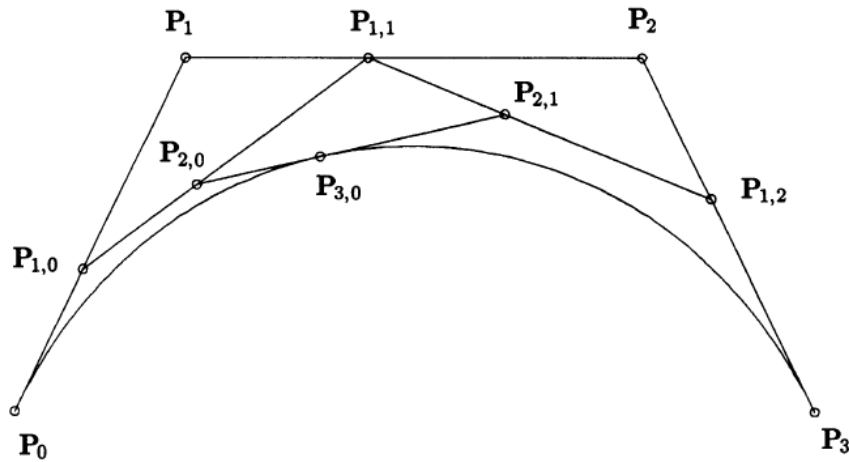
- $P_0=C(0)$ και $P_3=C(1)$
- οι εφαπτόμενες κατευθύνσεις στα καταληκτικά σημεία της καμπύλης είναι παράλληλες στα ευθύγραμμα τμήματα P_1-P_0 και P_3-P_2 .
- ισχύει η ιδιότητα του κυρτού πολυγώνου
- καμία ευθεία γραμμή δεν τέμνει την καμπύλη περισσότερες φορές από όσες τέμνει το πολύγωνο ελέγχου της (για τριδιάστατη καμπύλη δεν αναφερόμαστε πλέον σε ευθεία γραμμή αλλά σε επίπεδο) , το γεγονός αυτό εξηγεί και την ιδιότητα των καμπυλών Bezier να ακολουθούν 'στενά' τα πολύγωνα ελέγχου τους και να μην στρέφονται περισσότερο από ότι αυτά (εικόνα 2.9 β).
- αρχικά (στο $u=0$) η καμπύλη 'στρίβει' στην ίδια κατεύθυνση με τα $P_0P_1P_2$, στο $u=1$ 'στρίβει' στην κατεύθυνση των $P_1P_2P_3$ (εικόνα 2.9 β).
- μία 'στροφή' (βρόχος) στο πολύγωνο ελέγχου μπορεί να συνεπάγεται και 'στροφή' στην καμπύλη αλλά μπορεί και όχι (εικόνα 2.9 α,β)[1].



Εικόνα 2.9: Καμπύλες Bezier τρίτου βαθμού.

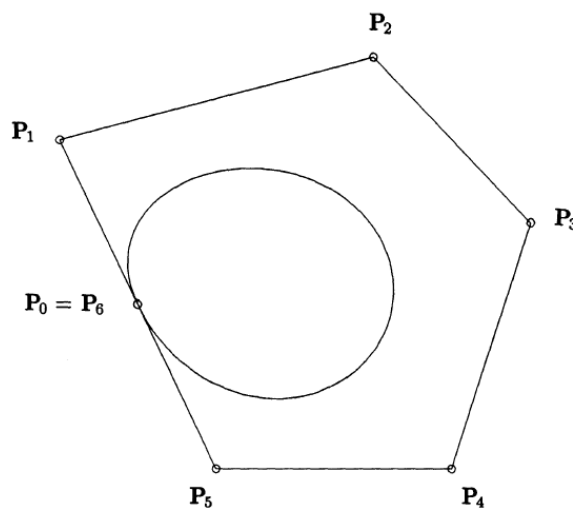
Η διαδικασία κατά την οποία σχεδιάζεται μία κυβική καμπύλη Bezier με τις διαδοχικές γραμμικές παρεμβολές, όπως περιγράψαμε αναλυτικά παραπάνω για την

καμπύλη 2ου βαθμού, και για συγκεκριμένο $u=u_0$ παρουσιάζεται σχηματικά παρακάτω (εικόνα 2.10)[1]:



Εικόνα 2.10: Διαδικασία σχεδίασης καμπύλη Bezier τρίτου βαθμού.

- Τέλος εξετάζοντας μια καμπύλη 6ου βαθμού (εικόνα 2.11[1]) $n=6$ παρατηρούμε ότι η καμπύλη 'στρέφεται' και 'κλείνει' ομαλά . Αυτό συμβαίνει διότι το σημείο αρχής της καμπύλης συμπίπτει με το τελικό της σημείο $C(0)$ ($=C(1)$) επειδή τα ευθύγραμμα τμήματα P_1-P_0 και P_6-P_5 είναι παράλληλα. Με τη φράση 'κλείνει' ομαλά εννοούμε ότι τα διανύσματα των εφαπτομένων στο $u=0$ και στο $u=1$ έχουν την ίδια διεύθυνση.



Εικόνα 2.11: Καμπύλη έκτου βαθμού

Εκτός από τις προαναφερθείσες ιδιότητες οι καμπύλες Bezier είναι αμετάβλητες στους συνήθεις μετασχηματισμούς όπως περιστροφή, μετακίνηση και αλλαγή μεγέθους. Εφαρμόζεται μετασχηματισμός στην καμπύλη εφαρμόζοντας τον στο πολύγωνο ελέγχου της καμπύλης.

Γενικεύοντας, για καμπύλες n-οστού βαθμού $C_n(P_0, \dots, P_n)$ έχουμε :

$$C_n(P_0, \dots, P_n) = (1-u)C_{n-1}(P_0, \dots, P_{n-1}) + uC_{n-1}(P_1, \dots, P_n) \quad (2.3)$$

Αυτό προκύπτει από τον αναδρομικό ορισμό των συναρτήσεων βάσης (πολυώνυμα Bernstein) των καμπυλών Bezier. Αν λοιπόν θέσουμε $u=u_0$ και δηλώσουμε $P_{0,i}$ όπου P_i τότε η εξίσωση 2.3 παράγει έναν αναδρομικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό του σημείου $C(u_0)=P_{n,0}(u_0)$ σε μία n-οστού βαθμού καμπύλη Bezier :

$$P_{k,i}(u_0) = (1 - u_0) P_{k-1,i}(u_0) + u_0 P_{k-1,i+1}(u_0) \quad \text{for } \begin{cases} k = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n - k \end{cases}$$

Εικόνα 2.12: Αλγόριθμος deCasteljau

Η σχέση της παραπάνω εικόνας (εικόνα 2.12) ονομάζεται Αλγόριθμος του deCasteljau και παράγει τον τριγωνικό πίνακα σημείων που σχηματικά παρατίθεται παρακάτω (εικόνα 2.13):

P_0					
P_1	$P_{1,0}$	$P_{2,0}$			
P_2	$P_{1,1}$	\vdots			
\vdots	\vdots	\vdots	$P_{n-1,0}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	$P_{n,0} = C(u_0)$	
\vdots	\vdots	\vdots	$P_{n-1,1}$		
P_{n-2}	\vdots				
P_{n-1}	$P_{1,n-2}$	$P_{2,n-2}$			
P_n	$P_{1,n-1}$				

Εικόνα 2.13: Τριγωνικός πίνακας σημείων, του αλγορύθμου deCastejau

2.3 Ρητές Καμπύλες Bezier

Παρά το γεγονός ότι τα πολυώνυμα προσφέρουν πλήθος πλεονεκτημάτων για την παρουσίαση καμπυλών, εμφανίζουν αδυναμία ακριβούς περιγραφής σημαντικών καμπυλών και επιφανειών όπως οι κύκλοι, οι ελλείψεις, οι υπερβολές, οι κύλινδροι, οι κώνοι, οι σφαίρες κλπ. Για αυτόν ακριβώς το λόγο χρησιμοποιούμε όπως είναι γνωστό από τα κλασσικά μαθηματικά, λόγους πολυωνύμων (ρητές συναρτήσεις) που μπορούν να περιγράψουν όλες τις κωνικές τομές και έχουν τη μορφή:

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)} \quad y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)} \quad (2.4)$$

όπου $\mathbf{X}(u)$, $\mathbf{Y}(u)$, $\mathbf{W}(u)$ πολυώνυμα και κάθε μία από τις συναρτήσεις συντεταγμένων έχει τον ίδιο παρονομαστή.

Έτσι, λοιπόν, η εξίσωση μίας n-οστού βαθμού ρητής καμπύλης Bezier φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (εικόνα 2.14):

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i} \quad 0 \leq u \leq 1$$

Εικόνα 2.14: Εξίσωση ρητής καμπύλης Bezier

όπου :

- $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)$ οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου και $\mathbf{B}_{i,n}(u)$ οι συναρτήσεις βάσης όπως ακριβώς και στις απλές καμπύλες Bezier.
- w_i είναι σταθερές και ονομάζονται βάρη.

Όπως παρατηρούμε από την παραπάνω εικόνα, ο αριθμητής και ο παρονομαστής έχουν αρκετά κοινά σημεία, οδηγώντας μας έτσι στο να ορίσουμε μία πιο

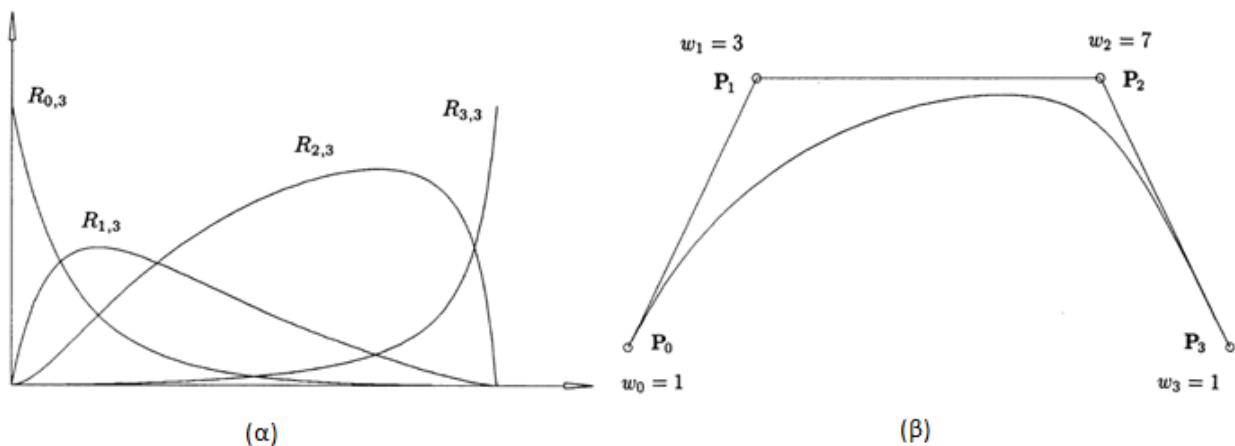
απλοποιημένη έκφραση για την εξίσωση των ρητών συναρτήσεων Bezier (εικόνα 2.15).

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) \mathbf{P}_i \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$R_{i,n}(u) = \frac{B_{i,n}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(u)w_j}$$

Εικόνα 2.15: Απλοποιημένη εξίσωση ρητών καμπυλών Bezier

Τα $\mathbf{R}_{i,n}(\mathbf{u})$ είναι ρητές συναρτήσεις βάσης για την ρητή καμπύλη Bezier, και ιδιότροπα συναρτήσεις βάσης για κυβική ρητή καμπύλη, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (εικόνα 2.16α),



Εικόνα 2.16: α) Συναρτήσεις βάσης ρητής καμπύλης Bezier τρίτου βαθμού, β) η αντίστοιχη ρητή καμπύλη Bezier τρίτου βαθμού.

Επίσης, έχουν ιδιότητες που μπορούν να εξαχθούν από την εξίσωση 2.5 ενώ ταυτόχρονα διαθέτουν τις αντίστοιχες ιδιότητες των πολυωνύμων Bernstein οι οποίες είναι :

- i. μη αρνητικότητα : $\mathbf{R}_{i,n}(\mathbf{u}) \geq 0$ για όλα τα i, n και $0 \leq u \leq 1$

- ii. διαμέριση της μονάδας : $\sum_{i=0}^n \mathbf{R}_{i,n}(\mathbf{u}) = \mathbf{1}$ για όλα τα $0 \leq \mathbf{u} \leq 1$
- iii. $\mathbf{R}_{0,n}(\mathbf{0}) = \mathbf{R}_{n,n}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$
- iv. το $\mathbf{R}_{i,n}(\mathbf{u})$ έχει ακριβώς ένα μέγιστο (ολικό) στο διάστημα $[0,1]$
- v. αν θέσουμε $w_i=1$ για όλα τα i , τότε $\mathbf{R}_{i,n}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_{i,n}(\mathbf{u})$ για όλα τα i , έτσι λοιπόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα $\mathbf{B}_{i,n}(\mathbf{u})$ είναι μία ειδική περίπτωση των $\mathbf{R}_{i,n}(\mathbf{u})$ και ότι οι απλές καμπύλες Bezier που αναλύθηκαν στην προηγούμενη ενότητα είναι ένα υποσύνολο των ρητών με βάρος $w_i=1$.

Από τις παραπάνω ιδιότητες παράγονται οι ακόλουθες γεωμετρικές ιδιότητες των ρητών καμπυλών Bezier :

- ιδιότητα κυρτού πολυγώνου : οι καμπύλες περιέχονται στο κυρτό πολύγωνο που ορίζεται από τα σημεία ελέγχου της καμπύλης (\mathbf{P}_i)
- περιστροφή, μετακίνηση και αλλαγή μεγέθους εφαρμόζονται στις καμπύλες , εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς αυτούς στα σημεία ελέγχου
- καμία ευθεία γραμμή δεν τέμνει την καμπύλη περισσότερες φορές από όσες την τέμνει το πολύγωνο ελέγχου της , ιδιότητα που συναντήθηκε και στις απλές πολυωνυμικές καμπύλες Bezier
- $\mathbf{C}(\mathbf{0})=\mathbf{P}_0$ και $\mathbf{C}(\mathbf{1})=\mathbf{P}_n$
- η k παράγωγος στο $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ ($\mathbf{u}=\mathbf{1}$) εξαρτάται από τα πρώτα (τελευταία) $k+1$ σημεία ελέγχου και βάρη , συγκεκριμένα $\mathbf{C}'(\mathbf{0})$ και $\mathbf{C}'(\mathbf{1})$ είναι παράλληλα στα $\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0$ και $\mathbf{P}_n-\mathbf{P}_{n-1}$ αντίστοιχα

- οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier είναι ειδική περίπτωση των ρητών όπως παρατηρήθηκε και στην ιδιότητα (v) των $\mathbf{R}_{i,n}(\mathbf{u})$.

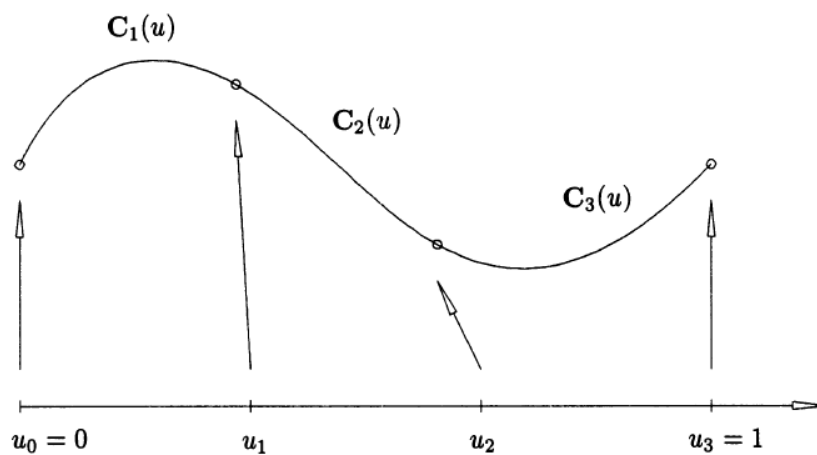
2.4 Μειονεκτήματα καμπυλών Bezier

Εν κατακλείδι, παρά τις σχεδιαστικές ευκολίες που παρέχουν οι καμπύλες Bezier εμφανίζουν και σημαντικά μειονεκτήματα, ειδικά σε καμπύλες που αποτελούνται από ένα μοναδικό τμήμα Bezier (ρητό ή μη,) τα οποία είναι :

- Ανάγκη για μεγάλο αριθμό σημείων για υψηλού βαθμού καμπύλης (για \mathbf{n} σημεία ο βαθμός είναι $\mathbf{n-1}$).
- Ανάγκη υψηλού βαθμού καμπύλης για παρεμβολή σε πολύπλοκα σχήματα.
- Δεν είναι ο καλύτερος τρόπος για διεπιδραστική σχεδίαση, μετακινώντας ένα σημείο ελέγχου δεν έχουμε τοπική αλλαγή της καμπύλης αλλά συνολική.

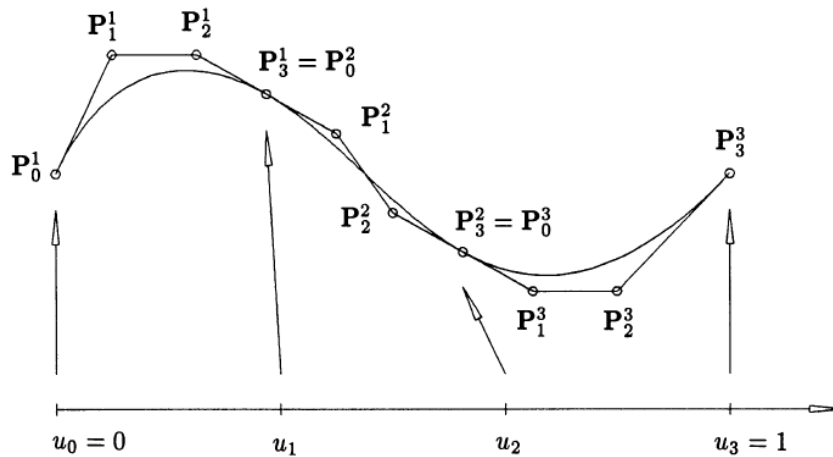
3. Θεωρητικό Υπόβαθρο Καμπυλών B-Splines_[1,3]

Η λύση για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα είναι να χρησιμοποιούνται τμήματα από παραμετρικές καμπύλες που ενώνονται διαδοχικά. Κάθε τμήμα, της καμπύλης, αντιστοιχεί σε ένα τμήμα της παραμέτρου $u \in [0,1]$ και οι παραμετρικές τιμές $u_0 = 0 < u_1 < u_2 < u_3 = 1$ ονομάζονται breakpoints. Τα τμήματα συμβολίζονται με $C_i(u)$ $1 \leq i \leq m$ Όπου m ο αριθμός των τμημάτων καμπύλης βαθμού n .



Εικόνα 3.1: Σχηματική απεικόνιση μιας πολυωνυμικής καμπύλης με τρία τμήματα

Τα τμήματα $C_i(u)$ κατασκευάζονται έτσι ώστε να ενώνονται με συνέχεια στα όρια τους (η οποία δεν είναι απαραίτητως ίδια σε κάθε break point). Η συνολική καμπύλη $C(u)$ εμφανίζει C^k συνέχεια στο breakpoint u_i εάν ισχύει: $C_i^{(j)}(u_i) = C_{i+1}^{(j)}(u_i) \quad \forall j \quad 0 \leq j \leq k$. Ένα παράδειγμα καμπύλης, αποτελούμενης από διαδοχικά συνεχή τμήματα, απεικονίζεται στην παραπάνω εικόνα (εικόνα 3.1). Ενώ στην εικόνα 3.2, φαίνεται η ίδια καμπύλη σε μορφή Bezier. Όπως βλέπουμε, για να κατασκευάσουμε με καμπύλες Bezier μία φαινομενικά απλή καμπύλη χρειαζόμαστε ένα μεγάλο πλήθος σημείων, που όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το γεγονός αυτό, αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα των καμπυλών Bezier.



Εικόνα 3.2: Η καμπύλη της εικόνας 3.1 όπως φαίνεται με τα πολυωνυμικά τμήματα που αναπαρίστανται σε μορφή Bezier

Όμως και η νέα αυτή μέθοδος έχει κάποιους παράγοντες που την κάνουν δύσχρηστη. Καταρχάς χρησιμοποιεί πλεονάζοντα δεδομένα. Στην συνέχεια δημιουργούνται περιορισμοί στη μετακίνηση των δεδομένων ανάλογα με το πόσο υψηλή είναι η συνέχεια μεταξύ των τμημάτων που πρέπει να διατηρηθεί. Άρα, η επιθυμητή γεωμετρική περιγραφή καμπυλών πρέπει να χρησιμοποιεί σημεία ελέγχου αλλά η επιλογή βαθμού πολυωνύμου να μπορεί να γίνεται ανεξάρτητα. Επομένως η μορφή που πληρεί αυτόν τον κανόνα είναι η :

$$C(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u) \cdot P_i \quad (3.1)$$

- Όπου P_i : τα σημεία ελέγχου
- $f_i(u)$ $i=0, \dots, n$ τμηματικές πολυωνυμικές συναρτήσεις που αποτελούν τη βάση του διανυσματικού χώρου όλων των πολυωνυμικών συναρτήσεων του επιθυμητού βαθμού και της επιθυμητής συνέχειας για δεδομένη αλληλουχία breakpoints, $U = \{u_i\}$, $0 \leq i \leq m$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συνέχεια στα breakpoints επιβάλλεται από τις βασικές συναρτήσεις και όχι από τις θέσεις των σημείων ελέγχου. Με τη μετακίνηση των σημείων ελέγχου δεν μεταβάλλεται η συνέχεια της καμπύλης. Οι Βασικές

συναρτήσεις f_i θα πρέπει να εκλεγούν έτσι ώστε να παρέχουν στις καμπύλες γεωμετρικές ιδιότητες αντίστοιχες με τις Bezier.

Μια επιπλέον σημαντική ιδιότητα είναι το local support. Δηλαδή ο τοπικός έλεγχος της καμπύλης (οι f_i να είναι μη μηδενικές μόνο σε τμήματα του U και όχι σε ολόκληρο το διάστημα U). Εφόσον το P_i πολλαπλασιάζεται με $f_i(u)$, μετακινώντας το P_i επηρεάζεται το σχήμα της καμπύλης μόνο στα υποδιαστήματα όπου η $f_i(u)$ είναι μη μηδενική.

3.1 Ορισμός Βασικών Συναρτήσεων B-Spline

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι ορισμού των βασικών συναρτήσεων B-Spline καθώς και των ιδιοτήτων τους, εδώ θα μελετηθούν οι αναδρομικές σχέσεις των Cox-de Boor οι οποίες αποτελούν την πιο εύχρηστη μέθοδο για εφαρμογές σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

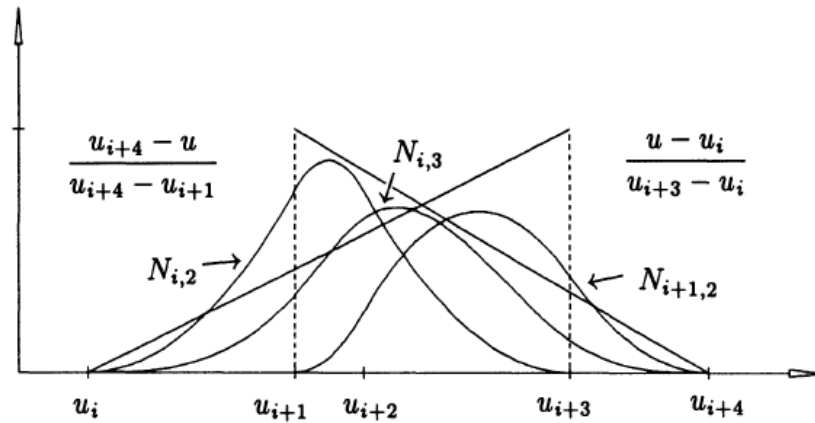
Έστω $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ μη μειούμενη ακολουθία πραγματικών αριθμών με $u_i \leq u_{i+1}$, $i=0, \dots, m-1$. Τα u_i ονομάζονται κόμβοι (knots) και το U διάνυσμα κόμβων. Η i -οστη Βασική Συνάρτηση B-Spline βαθμού p (τάξης $p+1$), ορίζεται ως:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (3.3)$$

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι:

- $N_{i,0}(u)$ είναι η συνάρτηση βήματος, ίση με μηδέν παντού εκτός από το διάστημα $u \in [u_i, u_{i+1})$
- Για $p > 0$, το $N_{i,p}(u)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο $p-1$ βαθμού βασικών συναρτήσεων (εικόνα 3.3).



Εικόνα 3.3: Η αναδρομική συνάρτηση των βασικών συναρτήσεων B-Spline

- Ο υπολογισμός ενός σέτ βασικών συναρτήσεων, απαιτεί προσδιορισμό ενός διανύσματος κόμβων \mathbf{U} καθώς και του βαθμού \mathbf{p} .
- Η εξίσωση 3, μπορεί να δώσει πηλίκo $0/0$. Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε το πηλίκo να ισούται με μηδέν.
- Τα $\mathbf{N}_{i,p}(\mathbf{u})$ είναι τμηματικά πολυώνυμα που ορίζονται σε ολόκληρη την πραγματική γραμμή, γενικά μόνο το διάστημα $[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_m]$ παρουσιάζει ενδιαφέρον.
- Το διάστημα $[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1})$ ονομάζεται **i -οστό εύρος κόμβου** (i -th knot span). Μπορεί το εύρος να είναι και μηδενικό, αφού διαδοχικοί κόμβοι μπορεί να ταυτίζονται.
- Ο υπολογισμός των βασικών συναρτήσεων βαθμού \mathbf{p} βασίζεται στον ακόλουθο πίνακα (εικόνα 3.4):

$N_{0,0}$	$N_{0,1}$	$N_{0,2}$	$N_{0,3}$
$N_{1,0}$	$N_{1,1}$	$N_{1,2}$	$N_{1,3}$
$N_{2,0}$	$N_{2,1}$	$N_{2,2}$	\vdots
$N_{3,0}$	$N_{3,1}$	\vdots	\vdots
$N_{4,0}$	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Εικόνα 3.4: Σχηματική απεικόνιση, υπολογισμού βασικών συναρτήσεων βαθμού \mathbf{p} .

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τον όρο breakpoint που απαιτούσε $\mathbf{u}_i < \mathbf{u}_{i+1}$ για όλα τα i . Στη συνέχεια θα χρησιμοποιείται ο όρος κόμβος (knot) με την υπόθεση ότι $\mathbf{u}_i \leq \mathbf{u}_{i+1}$. Τα breakpoints αντιστοιχούν στο σει των διακριτών τιμών των κόμβων και τα μη μηδενικού μήκους βήματα των κόμβων ορίζουν τα αντικειμενικά διανύσματα των κόμβων. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιούμε τον όρο κόμβος με δύο διαφορετικές έννοιες:

- Τη διακριτή τιμή στο σύνολο \mathbf{U} (που αντιστοιχεί στο breakpoint)
- Το μέλος του συνόλου \mathbf{U} .

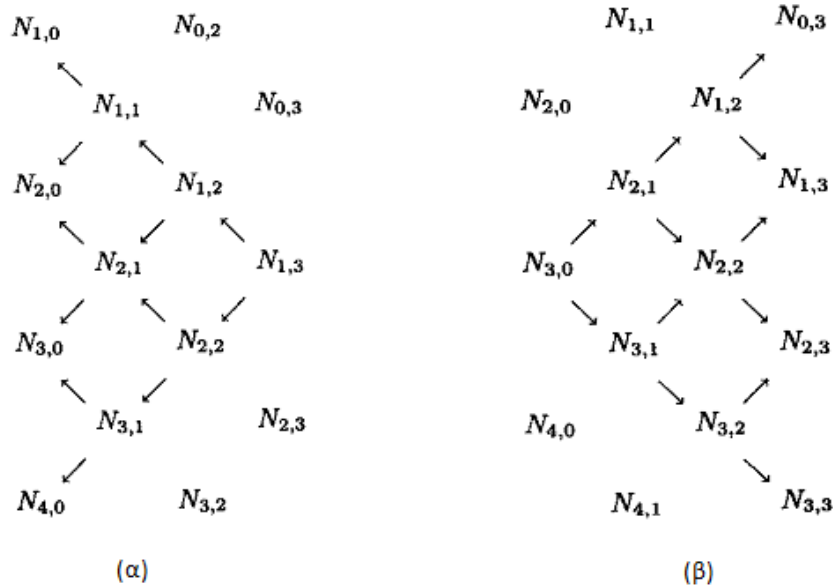
Η παραπάνω διάκριση απαιτείται διότι δύο κόμβοι μπορεί να παίρνουν την ίδια τιμή στο \mathbf{U} .

3.2 Ιδιότητες Βασικών Συναρτήσεων B-Spline

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε ένα πλήθος από τις σημαντικότερες ιδιότητες των βασικών συναρτήσεων B-Spline. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι αυτές οι ιδιότητες, οι οποίες καθορίζουν τα πολλά επιθυμητά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των B-Spline καμπύλων και επιφανειών. Ας υποθέσουμε ένα βαθμό p και ένα διάνυσμα κόμβων $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_m\}$:

- Ιδιότητα τοπικής επίδρασης: $N_{i,p}(\mathbf{u}) = 0$, εκτός του διαστήματος $[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+p+1})$ ή ισοδύναμα, η Βασική συνάρτηση $N_{i,p}(\mathbf{u})$ είναι μη μηδενική για $p+1$ διαστήματα κόμβων: $[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}), [\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{u}_{i+2}), \dots, [\mathbf{u}_{i+p}, \mathbf{u}_{i+p+1})$. Αυτό απεικονίζεται από το παρακάτω τριγωνικό σχήμα (εικόνα 3.5 α). Το $N_{1,3}$ αποτελεί συνδυασμό των $N_{1,0}, N_{2,0}, N_{3,0}$, και $N_{4,0}$. Έτσι το $N_{1,3}$ είναι μη μηδενικό μόνο για τα $\mathbf{u} \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_5)$.
- Σε κάθε εύρος κόμβου $[\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1})$, το πολύ $p+1$ βασικές συναρτήσεις είναι μη μηδενικές: $N_{j-p,p}, \dots, N_{j,p}$. Στο διάστημα $[\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ η μόνη μη μηδενική, μηδενικού βαθμού συνάρτηση είναι η $N_{3,0}$. Ως εκ τούτου, οι μόνες κυβικές συναρτήσεις

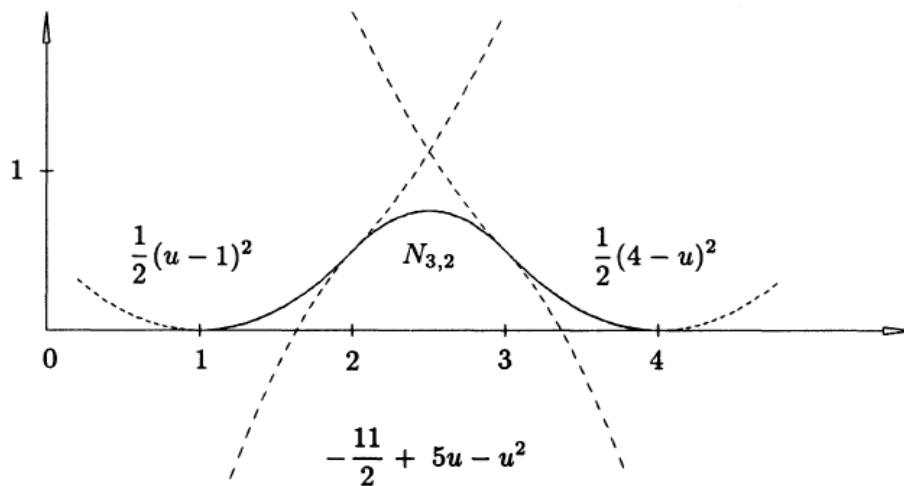
μη μηδενικές στο $[u_3, u_4)$ είναι οι $N_{0,3}, \dots, N_{3,3}$. Η ιδιότητα απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (εικόνα 3.5 β).



Εικόνα 3.5: α) Η βασική συνάρτηση $N_{i,p}(u)$ είναι μη μηδενική για $p+1$ διαστήματα κόμβων, β) Σε κάθε εύρος κόμβου $[u_j, u_{j+1})$, το πολύ $p+1$ βασικές συναρτήσεις είναι μη μηδενικές

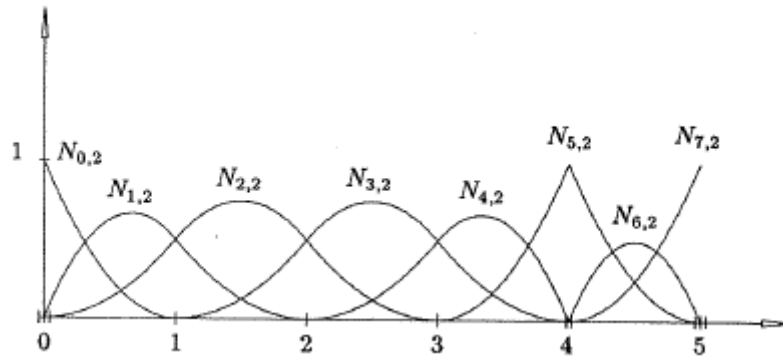
- Η τρίτη ιδιότητα των καμπυλών B-splines είναι αυτή της μη αρνητικότητας, η οποία αποδεικνύεται με τη μέθοδο της επαγωγής για κάθε p , που σημαίνει ότι ισχύει η ιδιότητα του κυρτού περιβλήματος. Για $p=0$, υποθέτουμε ότι ισχύει για $p-1$, $p \geq 0$, με τα i, u να επιλέγονται αυθαίρετα. Έτσι από την πρώτη ιδιότητα και με βάση τις εξισώσεις 3.2 και 3.3, ισχύει ότι, $N_{i,p-1}(u) = 0$ αν $u \notin [u_i, u_{i+p})$. Αλλά για $u \in [u_i, u_{i+p})$ συνεπάγεται ότι ο όρος $\frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i}$ είναι μη αρνητικός. Από την υπόθεση ότι το $N_{i,p-1}(u)$ είναι μη αρνητικό, συμπεραίνουμε ότι ο πρώτος όρος της εξίσωσης 3.3 είναι μη αρνητικός. Το ίδιο ισχύει και για τον δεύτερο όρο και έτσι το $N_{i,p}(u)$ είναι μη αρνητικό.

- Η τέταρτη ιδιότητα είναι αυτή της διαμέρισης της μονάδας, όπου για ένα τυχαίο εύρος κόμβων, $[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1})$, ισχύει $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(\mathbf{u}) = 1$ για κάθε $\mathbf{u} \in [\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1})$.
- Όλες οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων υπάρχουν στο εσωτερικό ενός εύρους κόμβου (όπου η βασική συνάρτηση είναι πολυώνυμο) (εικόνα 3.6). Πάνω σε έναν κόμβο η βασική συνάρτηση $N_{i,p}(\mathbf{u})$ είναι $\mathbf{p-k}$ φορές παραγωγίσιμη, όπου \mathbf{k} η πολλαπλότητα του κόμβου. Έτσι, αυξάνοντας το βαθμό αυξάνεται η συνέχεια, ενώ αυξάνοντας την πολλαπλότητα του κόμβου, μειώνεται η συνέχεια.



Εικόνα 3.6: Τα πολυωνυμικά κομμάτια (παραβολές), που αποτελούν την $N_{3,2}$.

- Εκτός της περίπτωσης $\mathbf{p=0}$, κάθε βασική συνάρτηση $N_{i,p}(\mathbf{u})$ διαθέτει μοναδικό μέγιστο (ολικό). Προκειμένου να κατανοήσουμε την επίδραση των πολλαπλών κόμβων υποθέτουμε τις συναρτήσεις $N_{0,2}$, $N_{1,2}$, $N_{2,2}$, $N_{5,2}$ και $N_{6,2}$ της παρακάτω εικόνας (εικόνα 3.7)



Εικόνα 3.7: Οι μη μηδενικές δευτέρου βαθμού βασικές συναρτήσεις $U=\{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$.

Ανακαλώντας το διάνυσμα κόμβων $U=\{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$, από την εξίσωση 3 και την πρώτη ιδιότητα παρατηρούμε ότι αυτές οι συναρτήσεις υπολογίζονται με τα παρακάτω εύρη κόμβων και είναι μηδέν εκτός αυτών.

$$N_{0,2} : \{0,0,0,1\}$$

$$N_{1,2} : \{0,0,1,2\}$$

$$N_{2,2} : \{0,1,2,3\}$$

$$N_{5,2} : \{3,4,4,5\}$$

$$N_{6,2} : \{4,4,5,5\}$$

Ο όρος πολλαπλότητα γίνεται κατανοητός με δύο διαφορετικούς τρόπους:

- Πολλαπλότητα ενός κόμβου μέσα στο διάνυσμα κόμβων
- Πολλαπλότητα ενός κόμβου αναφορικά με τη συγκεκριμένη βασική συνάρτηση.

Για παράδειγμα, το $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ έχει πολλαπλότητα τρία στο προηγούμενο διάνυσμα κόμβων U . Αλλά σύμφωνα με τις συναρτήσεις $N_{0,2}$, $N_{1,2}$, $N_{2,2}$, $N_{5,2}$, το $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ αποτελεί κόμβο πολλαπλότητας $\mathbf{3,2,1}$ και $\mathbf{0}$ αντίστοιχα. Από την πέμπτη ιδιότητα, η συνέχεια αυτών των συναρτήσεων στο $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ είναι $N_{0,2}$ ασυνεχής, $N_{1,2} \mathbf{C}^0$ συνεχής, $N_{2,2} \mathbf{C}^1$ συνεχής και $N_{5,2}$ ανεπηρέαστη (η $N_{5,2}$ και όλες οι παράγωγοί της είναι μηδέν στο $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, και από τις δύο πλευρές). Η $N_{1,2}$ 'βλέπει' το $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ σαν διπλό κόμβο, και ως εκ τούτου το

C^0 είναι συνεχές. Η $N_{2,2}$ 'βλέπει' όλους τους κόμβους της με πολλαπλότητα 1 και ως εκ τούτου το C^1 είναι συνεχές παντού. Ένα άλλο αποτέλεσμα των πολλαπλών κόμβων (όπως φαίνεται από τις συναρτήσεις) είναι να μειώνουν τον αριθμό των 'φαινομενικών' διαστημάτων στα οποία η συνάρτηση είναι μη μηδενική, π.χ. η $N_{6,2}$ είναι μη μηδενική μόνο στο $u \in [4,5)$ και είναι μόνο το C^0 συνεχές στα $u=4$ και $u=5$.

3.3 Διανύσματα Κόμβων

Μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί στο διάνυσμα κόμβων πολλές φορές, δεν έχουμε όμως αναφέρει τις μορφές που μπορεί να έχει ένα διάνυσμα κόμβων. Έτσι λοιπόν ένα τέτοιο διάνυσμα μπορεί να είναι: α) ομοιόμορφο (Uniform), β) ανοικτό ομοιόμορφο (Open Uniform) και γ) ανομοιόμορφο (Non Uniform).

Στο *ομοιόμορφο* διάνυσμα κόμβων, οι επιμέρους κόμβοι ισαπέχουν μεταξύ τους. Για παράδειγμα έχουν την μορφή: $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$ ή $[0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1.0]$. Ο γενικός τύπος ορισμού του διανύσματος κόμβων είναι:

$$u_{i+1} - u_i = \text{σταθερο}, \forall i \quad (3.4)$$

Στο *ανοικτό ομοιόμορφο* διάνυσμα κόμβων, υπάρχει μια πολλαπλότητα στους ακραίους κόμβους, η οποία ισούται με την τάξη $k = (p+1)$ των βασικών συναρτήσεων. Οι εσωτερικοί κόμβοι είναι ομοιόμορφα διατεταγμένοι, δηλαδή:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = u_1, \quad i \leq k \\ u_{i+1} - u_i = \text{σταθερο}, \quad k \leq i < n+2 \\ u_i = u_{k+(n+1)}, \quad i \geq n+2 \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Δηλαδή για διάφορες τιμές του k έχουμε π.χ : i) $k=2$: $[0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4]$, ii) $k=3$: $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$, iii) $k=4$: $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$.

Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι οι καμπύλες B-Spline με ανοικτό ομοιόμορφο διάλυμα κόμβων, που είναι και αυτές που θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα, έχουν την πολύ βασική ιδιότητα η καμπύλη να παρεμβάλει το αρχικό και τελικό σημείο ελέγχου. Ενώ πρέπει να διευκρινήσουμε ότι, στην ειδική περίπτωση που ο πρώτος κόμβος είναι μηδενικός και η απόσταση των κόμβων είναι μοναδιαία, το ανοικτό ομοιόμορφο διάλυμα τιμών προσδιορίζεται από:

$$u_i = \begin{cases} 0 & 0 \leq i < p+1 \\ i-p & p+1 \leq i < n+1 \\ n-p+1 & n+1 \leq i \leq n+p+1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Τέλος, το ανομοιόμορφο διάλυμα κόμβων μπορεί να παίρνει τιμές ανομοιόμορφα κατανομημένες ή να έχει πολλαπλούς εσωτερικούς κόμβους και μπορεί να είναι περιοδικό ή ανοικτό, π.χ.: [0 0 0 1 1 2 2 2] ή [0 1 2 2 3 4] ή [1 3 7 22 23 23 49 50 50]. Το σημαντικότερο στοιχείο του ανομοιόμορφου διαλύματος κόμβων είναι, ότι για να σχηματίσουμε κύκλους ή άλλες κωνικές τομές με B-Spline, ο μοναδικός τρόπος, είναι με χρήση ανομοιόμορφου διαλύματος κόμβων, όπως τις καμπύλες NURBS.

3.4 Ορισμός και Ιδιότητες Καμπυλών B-Splines

Έχοντας ορίσει τις βασικές συναρτήσεις B-splines καθώς και τα διανύσματα κόμβων, μπορούμε πλέον να ορίσουμε και τις ίδιες τις καμπύλες B-splines. Έτσι μία καμπύλη B-spline ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση (3.7):

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i \quad a \leq u \leq b \quad (3.7)$$

Όπου:

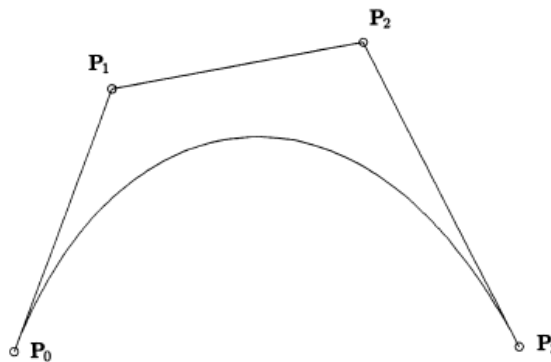
- P_i είναι τα σημεία ελέγχου
- $N_{i,p}(u)$ είναι οι p βαθμού βασικές συναρτήσεις B-Spline :

που ορίζονται στο μη-περιοδικό (και μη ομοιόμορφο) διάνυσμα κόμβων: $U = \{\alpha, \dots, \alpha, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, \dots, b\}$ για $p+1$ α και b και $m+1$ κόμβους (εξ. 3.8). Συνήθως υποθέτουμε ότι $\alpha=0$ και $b=1$. Ενώ, το πολύγωνο που διαμορφώνεται από το P_i , καλείται πολύγωνο ελέγχου. Προκειμένου, τώρα, να υπολογίσουμε ένα σημείο σε μία καμπύλη B-Spline σε μία συγκεκριμένη τιμή του u ακολουθούμε τρία βήματα:

- βρίσκουμε το διάστημα κόμβου στο οποίο ανήκει το βήμα u
- υπολογίζουμε τις μη μηδενικές βασικές συναρτήσεις
- πολλαπλασιάζουμε τις τιμές των μη μηδενικών βασικών συναρτήσεων με τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου

Με βάση την εξίσωση 3.7 αλλά και όσα έχουμε μέχρι τώρα αναφέρει, μπορούμε να παραθέσουμε μία σειρά από ιδιότητες και χαρακτηριστικά που διέπουν τις καμπύλες B-Splines:

- Το πρώτο χαρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι ότι αν $n=p$ και $U=\{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$, τότε η $C(u)$ είναι μια καμπύλη Bezier, παράδειγμα εικόνα 3.8.

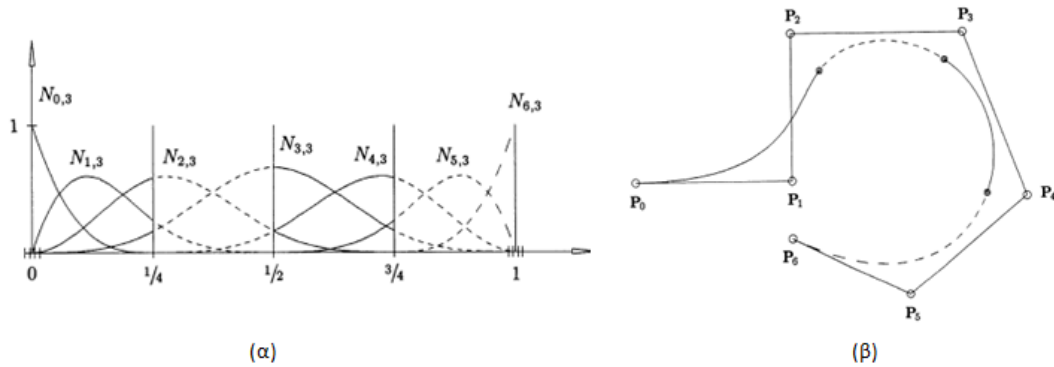


Εικόνα 3.8: Κυβική καμπύλη B-Spline, πάνω στο $U=\{0,0,0,0,1,1,1,1\}$ δηλαδή μία κυβική καμπύλη Bezier

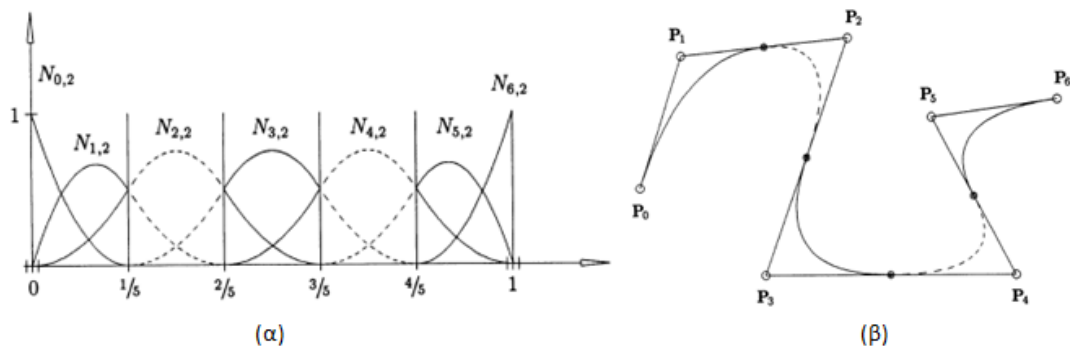
- Η $C(u)$, είναι μια τμηματική πολυωνυμική καμπύλη (εφόσον τα $N_{i,p}(u)$ είναι τμηματικά πολώνυμα), ο βαθμός είναι p , ο αριθμός των control points $n+1$ και ο αριθμός των κόμβων $m+1$. Τα παραπάνω συνδέονται σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$m=n+p+1 \quad (3.8)$$

Οι παρακάτω εικόνες 3.9 και 3.10 απεικονίζουν βασικές συναρτήσεις, καθώς και τμήματα καμπυλών B-Spline με τα αντίστοιχα διανύσματα κόμβων.



Εικόνα 3.9: α) Κυβικές βασικές συναρτήσεις με $U=\{0,0,0,0,1/4,1/2,3/4, 1,1,1,1, \}$ β) κυβική καμπύλη με χρήση των βασικών συναρτήσεων του σχήματος α

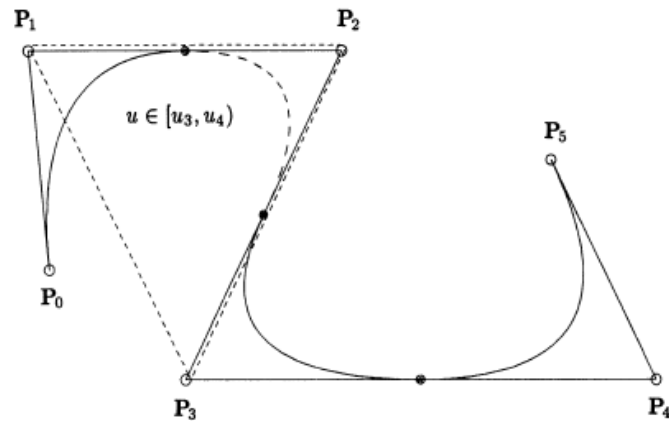


Εικόνα 3.10: α) Τετραγωνικές βασικές συναρτήσεις με $U= \{0,0,0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1,1,1\}$, β) Τετραγωνική καμπύλη με χρήση των βασικών συναρτήσεων του α

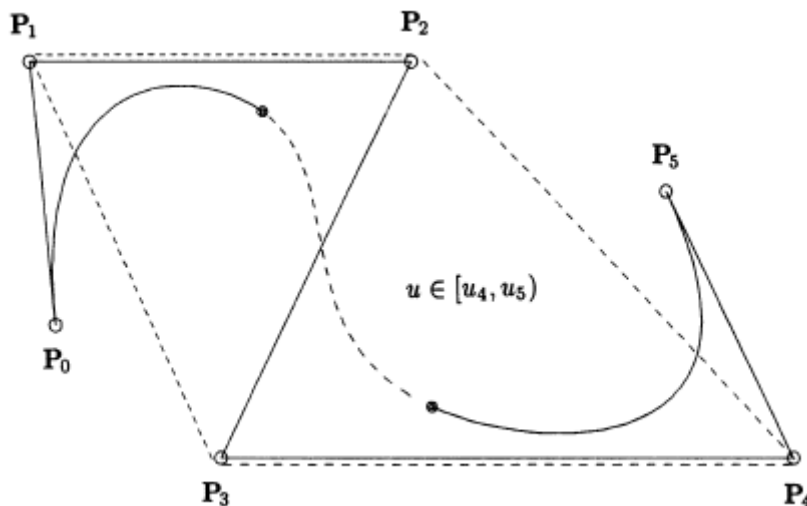
Και στα δύο σχήματα τα διακεκομμένα τμήματα αντιστοιχούν στα διαφορετικά πολώνυμα (διανύσματα κόμβων) που ορίζουν την καμπύλη.

- iii. Παρεμβολή άκρων: $C(0)= P_0$ και $C(1)= P_n$
- iv. Ιδιότητα ισχυρού κυρτού περιβλήματος: Η καμπύλη περιέχεται στο κυρτό περίβλημα του πολυγώνου ελέγχου της. Στην πραγματικότητα αν $u \in [u_i, u_{i+1})$,

$p \leq i < m - p - 1$, τότε η $C(u)$ βρίσκεται μέσα στο κυρτό περίβλημα των σημείων ελέγχου P_{i-p}, \dots, P_i (εικόνα 3.11, 3.12).

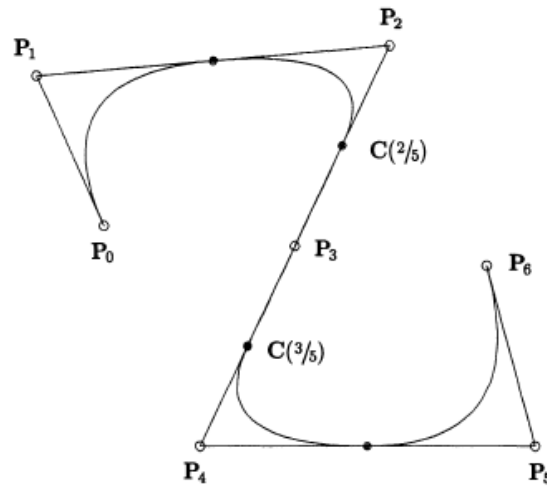


Εικόνα 3.11: η ιδιότητα του ισχυρού κυρτού περιβλήματος για μία τετραγωνική καμπύλη B-Spline. Για $u \in [u_i, u_{i+1})$, η $C(u)$ περιέχεται στο τρίγωνο $P_{i-2}P_{i-1}P_i$



Εικόνα 3.12: Η ιδιότητα του ισχυρού κυρτού περιβλήματος για μία κυβική καμπύλη B-Spline. Για $u \in [u_i, u_{i+1})$, η $C(u)$ περιέχεται στο τρίγωνο $P_{i-3}P_{i-2}P_{i-1}P_i$

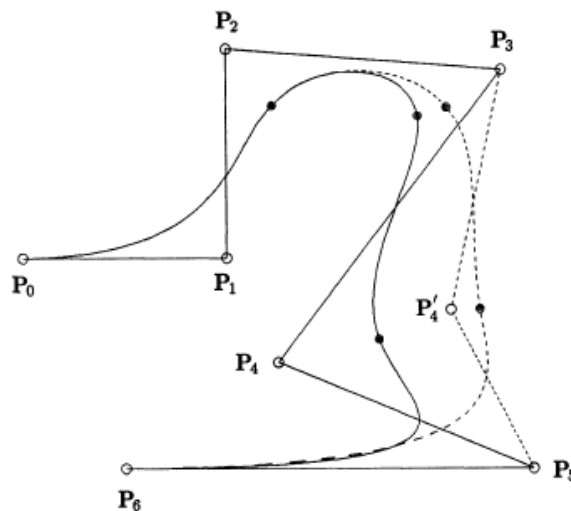
Αυτό προκύπτει τόσο από την ιδιότητα της μη αρνητικότητας όσο και από την ιδιότητα της διαμέρισης της μονάδας της $N_{i,p}(u)$ αλλά και από την 2^η ιδιότητα των βασικών Συναρτήσεων B-Spline σύμφωνα με την οποία: $N_{j,p}(u)=0$ για $j < i - p$ και $j > i$ όταν $u \in [u_i, u_{i+1})$. Στην εικόνα 3.13 φαίνεται πώς κατασκευάζουμε μία τετραγωνική καμπύλη η οποία περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα.



Εικόνα 3.13: Τετραγωνική καμπύλη B-Spline στο $U=\{0,0,0,0,1/5,2/5,3/5,4/5,1,1,1\}$. Η καμπύλη είναι μία ευθεία γραμμή μεταξύ των $C(2/5)$ και $C(3/5)$.

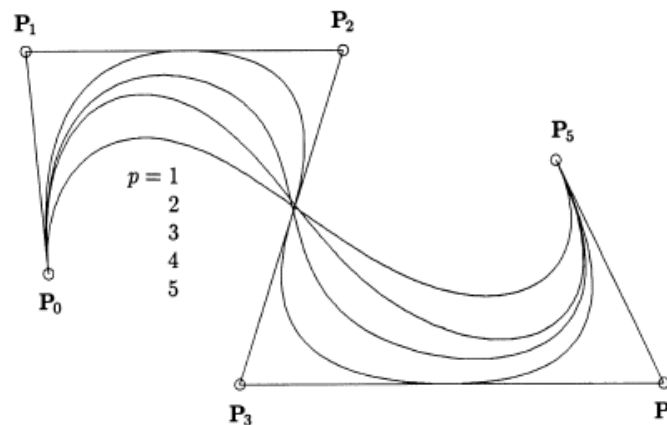
Εφόσον τα P_2, P_3 και P_4 είναι συγγραμμικά, η ιδιότητα του ισχυρού κυρτού περιβλήματος, αναγκάζει την καμπύλη να γίνει ένα ευθύγραμμο τμήμα από το $C(2/5)$ έως το $C(3/5)$.

- ν. Σχέδιο τοπικής τροποποίησης: μετακινώντας το P_i η $C(u)$ μεταβάλλεται μόνο στο διάστημα $[u_i, u_{i+p+1})$. Αυτό προκύπτει από την δεύτερη ιδιότητα των βασικών συναρτήσεων B-Spline όπου: $N_{j,p}(u)=0$ για $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$. (εικόνα 3.14)



Εικόνα 3.14: Τετραγωνική καμπύλη B-Spline στο $U=\{0,0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,1,1,1\}$, μετακινώντας το P_4 στο P'_4 , η καμπύλη μεταβάλλεται στο διάστημα $[1/4,1)$.

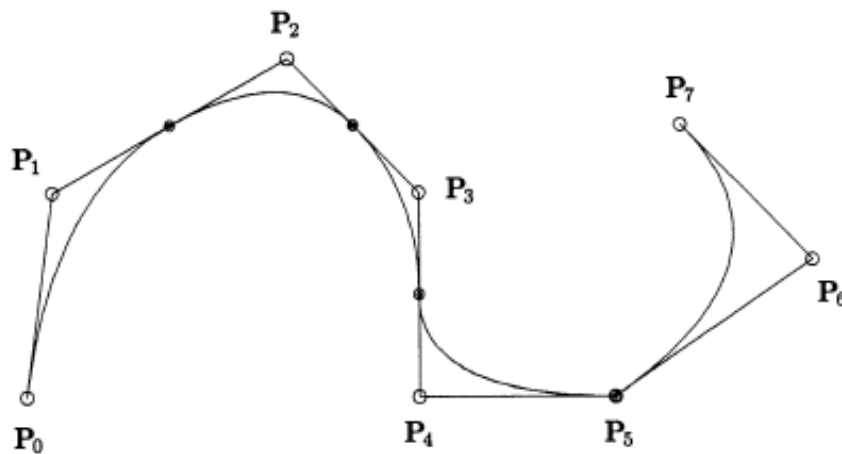
- vi. Το πολύγωνο ελέγχου, αναπαριστά μία τμηματική γραμμική προσέγγιση της καμπύλης, η προσέγγιση αυτή βελτιώνεται με εισαγωγή κόμβων ή με αύξηση του βαθμού. Σαν γενικό κανόνα θεωρούμε ότι: όσο μικρότερος ο βαθμός της καμπύλης, τόσο στενότερα ακολουθεί μία B-Spline καμπύλη το πολύγωνο ελέγχου της (εικόνα 3.15). Οι καμπύλες της εικόνας 3.15, ορίζονται χρησιμοποιώντας τα ίδια έξι σημεία ελέγχου καθώς και τα διανύσματα κόμβων $\mathbf{C}(\mathbf{u}_0)$ για κάθε δοσμένο \mathbf{u}_0 . Η πιο ακραία περίπτωση είναι για $p=1$ όπου κάθε σημείο $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ αποτελεί μόλις μία γραμμική παρεμβολή μεταξύ δύο σημείων ελέγχου. Σε αυτή την περίπτωση, η καμπύλη ταυτίζεται με το πολύγωνο ελέγχου.



Εικόνα 3.15: καμπύλες B-Spline διαφορετικού βαθμού, χρησιμοποιώντας το ίδιο πολύγωνο ελέγχου.

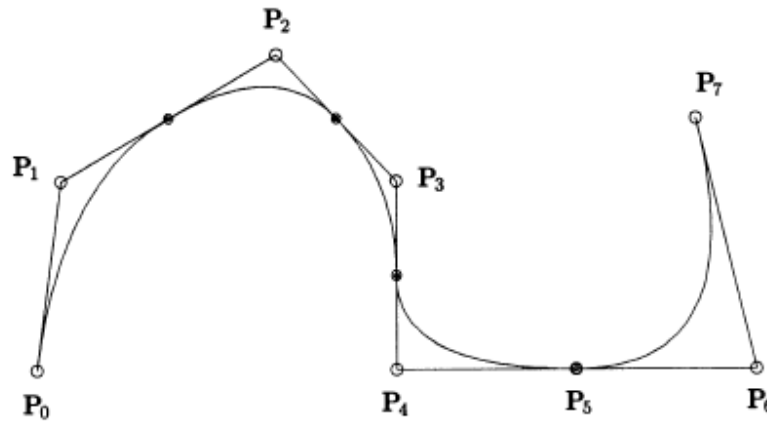
- vii. Μετακινώντας την καμπύλη από το $\mathbf{u}=0$ στο $\mathbf{u}=1$, οι συναρτήσεις $\mathbf{N}_{i,p}(\mathbf{u})$ συμπεριφέρονται σαν διακόπτες. Καθώς το \mathbf{u} κινείται ένα κόμβο πίσω, μια συνάρτηση $\mathbf{N}_{i,p}(\mathbf{u})$ (και ως εκ τούτου τα αντίστοιχα \mathbf{P}_i) απενεργοποιείται και ενεργοποιείται η επόμενη.
- viii. Η καμπύλη δευτέρου βαθμού εφάπτεται του πολυγώνου ελέγχου στο μέσο του κάθε τμήματος. Αυτό δεν συμβαίνει για καμπύλες μεγαλύτερου βαθμού.

ix. Η συνέχεια και η διαφορισιμότητα του $C(\mathbf{u})$ προκύπτουν από τις συναρτήσεις $N_{i,p}(\mathbf{u})$ (εφόσον η $C(\mathbf{u})$ αποτελεί γραμμικό συνδιασμό των $N_{i,p}(\mathbf{u})$). Ως εκ τούτου η $C(\mathbf{u})$ είναι απείρως διαφορίσιμη στο εσωτερικό των διανυσμάτων κόμβων και τουλάχιστον $\mathbf{p}-\mathbf{k}$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη σε ένα κόμβο πολλαπλότητας \mathbf{k} . Στην εικόνα 3.16 φαίνεται μία τετραγωνική καμπύλη ($\mathbf{p}=2$). Η καμπύλη είναι C^1 συνεχής (η πρώτη παράγωγος είναι συνεχής αλλά η δεύτερη όχι) και όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν πολλαπλότητα $\mathbf{1}$. Στον διπλό κόμβο $\mathbf{u}=4/5$, η $C(\mathbf{u})$ είναι μόνο κατά C^0 συνεχής και ως εκ τούτου παρουσιάζει ένα σημείο ανάκαμψης (cusp) (οπτική ασυνέχεια).



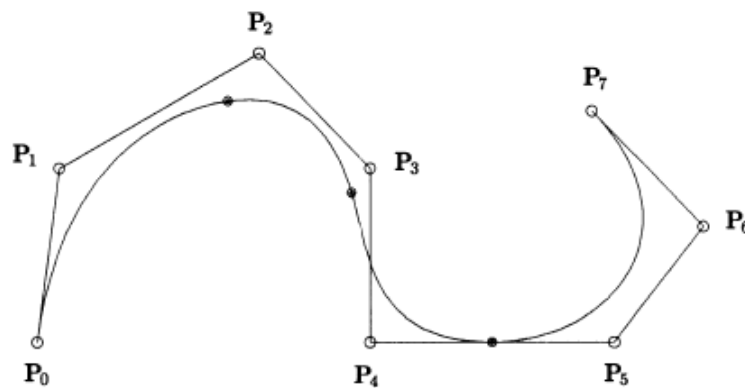
Εικόνα 3.16: Τετραγωνική καμπύλη στο $\mathbf{U}=\{0,0,0,1/5,2/5,3/5,4/5,4/5,1,1,1\}$, με σημείο ανάκαμψης $\mathbf{u}=4/5$.

Στην παρακάτω εικόνα 3.17 φαίνεται μία τετραγωνική καμπύλη που ορίζεται στο ίδιο διάνυσμα κόμβων. Ως εκ τούτου, οι δύο καμπύλες χρησιμοποιούν τις ίδιες βασικές συναρτήσεις $N_{i,p}(\mathbf{u})$ αλλά η καμπύλη της εικόνας 3.17 είναι C^1 συνεχής στο $\mathbf{u}=4/5$. Αυτό δεν είναι εμφανές, αλλά μπορούμε να το διακρίνουμε με την έκφραση της. Αποτελεί απλή συνέπεια του γεγονότος ότι οι ασυνεχείς συναρτήσεις μπορούν μερικές φορές να συνδυαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε το αποτέλεσμα να είναι συνεχές. Τα σημεία $\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6$, είναι συγγραμικά και το μήκος $(\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5)=\text{μήκος}(\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6)$.



Εικόνα 3.17: Τετραγωνική καμπύλη στο $U=\{0,0,0,1/5,2/5,3/5,4/5,4/5,1,1,1\}$, η πρώτη παράγωγος είναι συνεχής στο $u=4/5$.

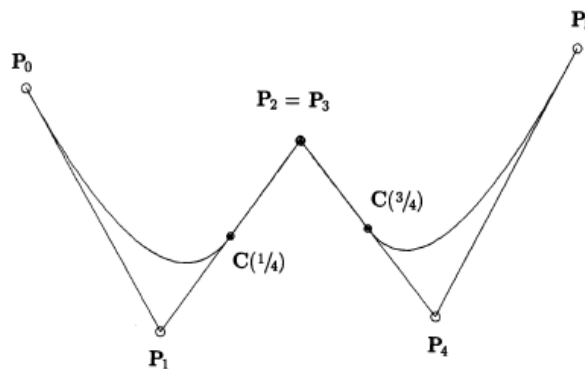
Η εικόνα 3.18 απεικονίζει κυβική καμπύλη που είναι μόνο κατά C^2 συνεχής στα $u=1/4$ και $u=1/2$ και μόνο κατά C^1 συνεχής στον διπλό κόμβο $u=3/4$. Με το μάτι αντιλαμβανόμαστε τις ασυνέχειες στην δεύτερη παράγωγο αλλά όχι στην τρίτη ή σε μεγαλύτερες παραγώγους. Ως εκ τούτου οι κυβικές καμπύλες είναι γενικώς κατάλληλες για οπτικούς λόγους.



Εικόνα 3.18: Κυβική καμπύλη με $U=\{0,0,0,1/4,1/2,3/4,3/4,1,1,1,1\}$, συνέχεια C^2 στα $u=1/4$ και $u=1/2$ και συνέχεια C^1 στο $u=3/4$.

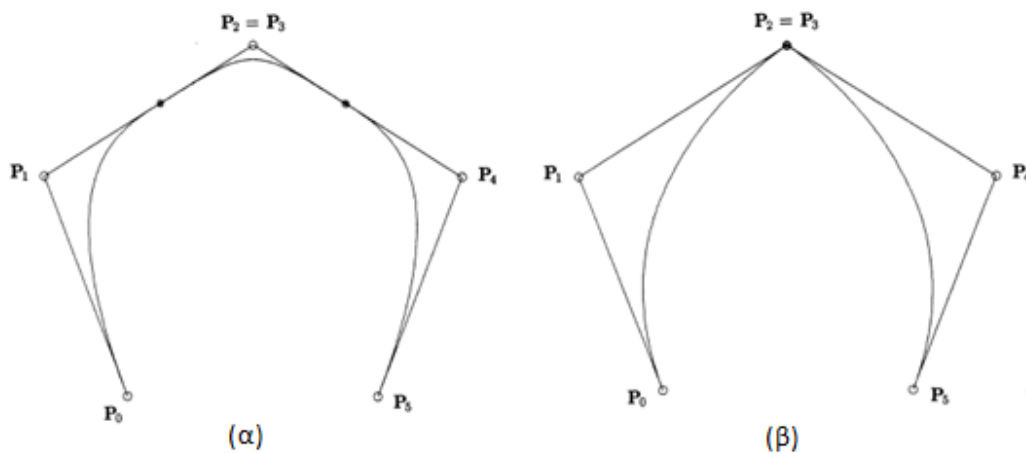
- x. Είναι πιθανό (μερικές φορές χρήσιμο) να χρησιμοποιήσουμε πολλαπλά σημεία ελέγχου (συμπίπτοντα). Η εικόνα 3.19 απεικονίζει μία τετραγωνική καμπύλη, με διπλό σημείο ελέγχου $P_2 = P_3$. Το ενδιαφέρον σημείο αυτής της καμπύλης, βρίσκεται μεταξύ των $C(1/4)$ και $C(3/4)$. Πράγματι, $C(1/2)=P_2=P_3$ και τα τμήματα της καμπύλης μεταξύ των $C(1/4)$ και $C(1/2)$, και $C(1/2)$ και $C(3/4)$,

αποτελούν ευθείες γραμμές. Αυτό προκύπτει από την 5^η ιδιότητα των καμπυλών B-Spline σύμφωνα με την οποία η $C(u)$ είναι το κυρτό περίβλημα των $P_1P_2P_3$ (μία γραμμή) αν το $u \in [1/4, 1/2)$. Κατ' επέκταση, εφόσον ο κόμβος $u=1/2$ έχει πολλαπλότητα 1, η καμπύλη θα πρέπει εκεί να έχει συνέχεια C^1 . Παρ' όλα αυτά παρουσιάζει σημείο ανάκαμψης – cusp (οπτική ασυνέχεια). Το γεγονός αυτό αποτελεί επακόλουθο του μεγέθους του διανύσματος της πρώτου παραγώγου που τείνει στο μηδέν (συνέχεια) στο $u=1/2$.



Εικόνα 3.19: Τετραγωνική καμπύλη στο $U=\{0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,1,1\}$, $P_2=P_3$ είναι ένα διπλό σημείο ελέγχου.

Οι εικόνες 3.20α,β, αποτελούν παραδείγματα κυβικών καμπυλών που χρησιμοποιούν το ίδιο πολύγωνο ελέγχου συμπεριλαμβανομένου και του διπλού σημείου ελέγχου $P_2 = P_3$ αλλά με διαφορετικά διανύσματα κόμβων.



Εικόνα 3.20: κυβικές καμπύλες με διπλά σημεία ελέγχου $P_2=P_3$ α): $U=\{0,0,0,0,1/4,3/4,1,1,1,1\}$, β) $U=\{0,0,0,0,1/2,1/2,1,1,1,1\}$.

3.5 Ρητές καμπύλες B- Spline

Μία p-βαθμού καμπύλη NURBS ορίζεται από τον εξής τύπο:

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i}, a \leq u \leq b \quad (3.9)$$

Όπου

- $\{P_i\}$ είναι τα σημεία ελέγχου (που σχηματίζουν το πολύγωνο ελέγχου)
- $\{w_i\}$ είναι τα βάρη
- $\{N_{i,p}(u)\}$ οι βασικές συναρτήσεις p βαθμού όπως ορίζονται στο μη περιοδικό (ανομοιόμορφο) διάνυσμα κόμβων.

Υποθέτουμε ότι $a=0$, $b=1$ και $w_i > 0$ για όλα τα i . Θέτοντας

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j} \quad (3.10)$$

τότε η εξίσωση 3.9 γίνεται:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)P_i \quad (3.11)$$

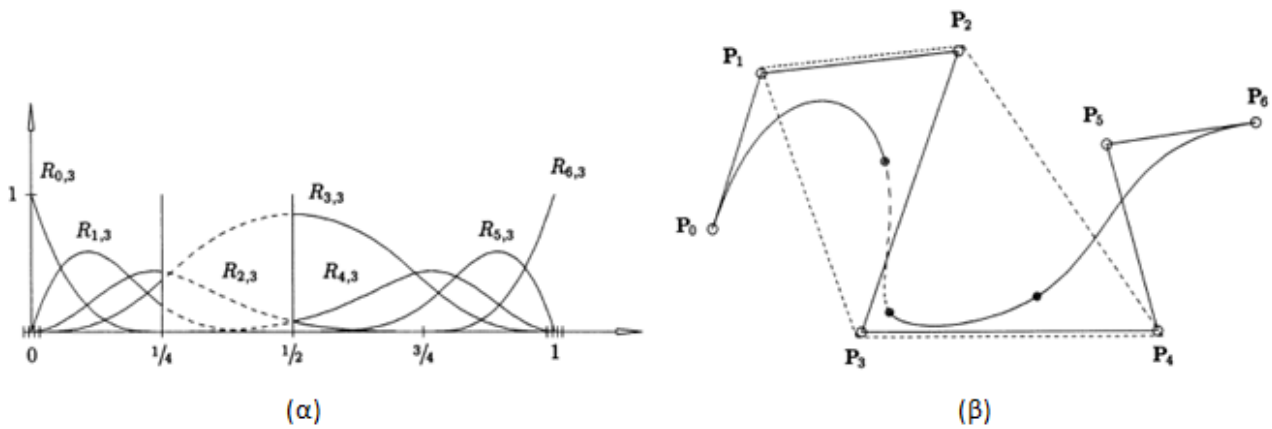
Οι $\{R_{i,p}(u)\}$ είναι οι ρητές βασικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι τμηματικά ρητές στο διάστημα $u \in [0, 1]$.

Οι $\{R_{i,p}(u)\}$ έχουν τις παρακάτω ιδιότητες, οι οποίες προκύπτουν από την εξίσωση 3.10 και τις αντίστοιχες ιδιότητες των $N_{i,p}(u)$:

1. Μη αρνητικότητα: $\mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u}) \geq \mathbf{0}$, για όλα τα i, p και $\mathbf{u} \in [0, 1]$
2. Διαμέριση της μονάδας: $\sum_{i=0}^n \mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u}) = \mathbf{1}$ για όλα τα $\mathbf{u} \in [0, 1]$
3. $\mathbf{R}_{0,p}(\mathbf{0}) = \mathbf{R}_{n,p}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$
4. Για $p > 0$, όλες οι $\mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u})$ έχουν ένα μέγιστο στο διάστημα $\mathbf{u} \in [0, 1]$
5. Τοπικός έλεγχος: $\mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ για $\mathbf{u} \notin [u_i, u_{i+p+1})$. Επιπλέον, σε κάθε διάστημα κόμβων το πολύ $p+1$ των $\mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u})$ είναι μη μηδενικές. Γενικά: οι $\mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u})$ είναι μη μηδενικές στο $[u_i, u_{i+1})$.
6. Όλες οι παράγωγοι των $\mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u})$ βρίσκονται στο εσωτερικό ενός διαστήματος κόμβων όπου υπάρχει μία ρητή συνάρτηση με μη μηδενικό παρανομαστή. Σε ένα κόμβο, η $\mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u})$ είναι $p-k$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη, όπου k είναι η πολλαπλότητα του κόμβου.
7. Αν $w_i = 1$ για όλα τα i , τότε $\mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u}) = \mathbf{N}_{i,p}(\mathbf{u})$ για όλα τα i , οι $\mathbf{N}_{i,p}(\mathbf{u})$ αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των $\mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u})$. Στην πραγματικότητα, για κάθε $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, αν $w_i = \mathbf{a}$ για όλα τα i τότε $\mathbf{R}_{i,p}(\mathbf{u}) = \mathbf{N}_{i,p}(\mathbf{u})$ για όλα τα i .

Σύμφωνα με τις ιδιότητες 1 και 7 προκύπτουν τα ακόλουθα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των καμπύλων NURBS:

- a) $\mathbf{C}(\mathbf{0}) = \mathbf{P}(\mathbf{0})$ και $\mathbf{C}(\mathbf{1}) = \mathbf{P}_n$ γεγονός που προκύπτει από την ιδιότητα 3
- b) Ομοιόμορφος μετασχηματισμός: μπορούμε να εφαρμόσουμε οποιονδήποτε ομοιόμορφο μετασχηματισμό στην καμπύλη εφαρμόζοντας τον αντίστοιχο μετασχηματισμό στα σημεία ελέγχου της (βλ ιδιότητα 4). Επίσης η προοπτική προβολή δεν μεταβάλλει τις καμπύλες NURBS, γεγονός πολύ χρήσιμο στα γραφικά υπολογιστών.
- c) Ιδιότητα ισχυρού κυρτού περιβλήματος: αν $\mathbf{u} \in [u_i, u_{i+1})$, τότε η $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ βρίσκεται μέσα στο κυρτό περίβλημα των σημείων ελέγχου $\mathbf{P}_{i,p}, \dots, \mathbf{P}_i$ (βλέπε εικόνα 3.21) όπου η $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ για $\mathbf{u} \in [1/4, 1/2)$ (διακεκομμένο τμήμα) περιέχεται στο κυρτό περίβλημα $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4\}$, (διακεκομμένη περιοχή), γεγονός που προκύπτει από τις ιδιότητες 1, 2, 5.

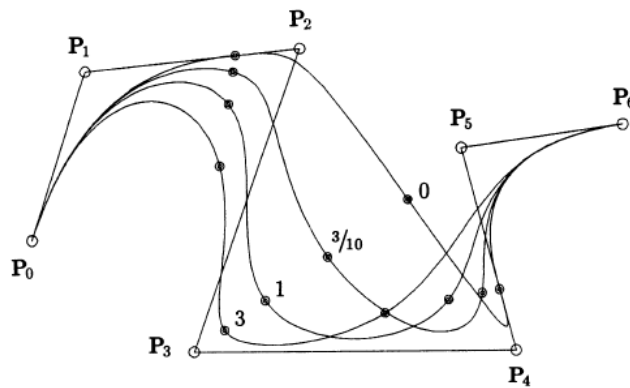


Εικόνα 3.21: $U = \{0,0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,1,1,1\}$ και $\{w_0, \dots, w_6\} = \{1,1,1,3,1,1,1\}$ (a) οι σχετικές βασικές συναρτήσεις, (b) Μια κυβική καμπύλη NURBS.

- d) Η $C(\mathbf{u})$ είναι απείρως διαφορίσιμη στο εσωτερικό των διανυσμάτων κόμβων και $\mathbf{p-k}$ φορές διαφορίσιμη στον κόμβο με πολλαπλότητα \mathbf{k} .
- e) Variation diminishing property: κανένα επίπεδο δεν έχει περισσότερες τομές με την καμπύλη από αυτό του πολυγώνου ελέγχου.
- f) Μια καμπύλη NURBS χωρίς εσωτερικούς κόμβους είναι μία ρητή καμπύλη Bezier, εφόσον η $N_{i,p}(\mathbf{u})$ υποβιβάζεται στη $B_{i,n}(\mathbf{u})$. Οι καμπύλες NURBS περιέχουν μη ρητές καμπύλες B-Spline και ρητές και μη ρητές καμπύλες Bezier .
- g) Τοπική μεταβολή: αν το σημείο ελέγχου P_i μετακινηθεί ή το βάρος w_i μεταβληθεί, τότε επηρεάζεται μόνο το τμήμα της καμπύλη που βρίσκεται στο διάστημα $\mathbf{u} \in [u_i, u_{i+p+1})$, γεγονός που προκύπτει από την ιδιότητα 5.

Η παραπάνω ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για διαδραστικό σχεδιασμό σχημάτων. Με χρήση καμπύλων NURBS, αν μετακινήσουμε τα σημεία ελέγχου και τροποποιήσουμε τα βάρη, επιτυγχάνουμε τοπικό έλεγχο του σχήματος. Επιπλέον η κίνηση ενός σημείου για σταθερή τιμή του \mathbf{u} και μεταβαλλόμενο βάρος είναι ευθεία γραμμή. Στην εικόνα 3.22 το \mathbf{u} είναι σταθερό και αυτό που αλλάζει είναι το w_3 . Αν ισχύει: $B = C(\mathbf{u}; w_3 = 0)$, $N = C(\mathbf{u}; w_3 = 1)$

τότε η ευθεία γραμμή που ορίζεται από τα \mathbf{B} και \mathbf{N} διέρχεται του \mathbf{P}_3 , και για $0 < w_3 < \infty$, η $\mathbf{B}_3 = \mathbf{C}(\mathbf{u}, w_3)$ βρίσκεται στο τμήμα μεταξύ \mathbf{B} και \mathbf{P}_3 .



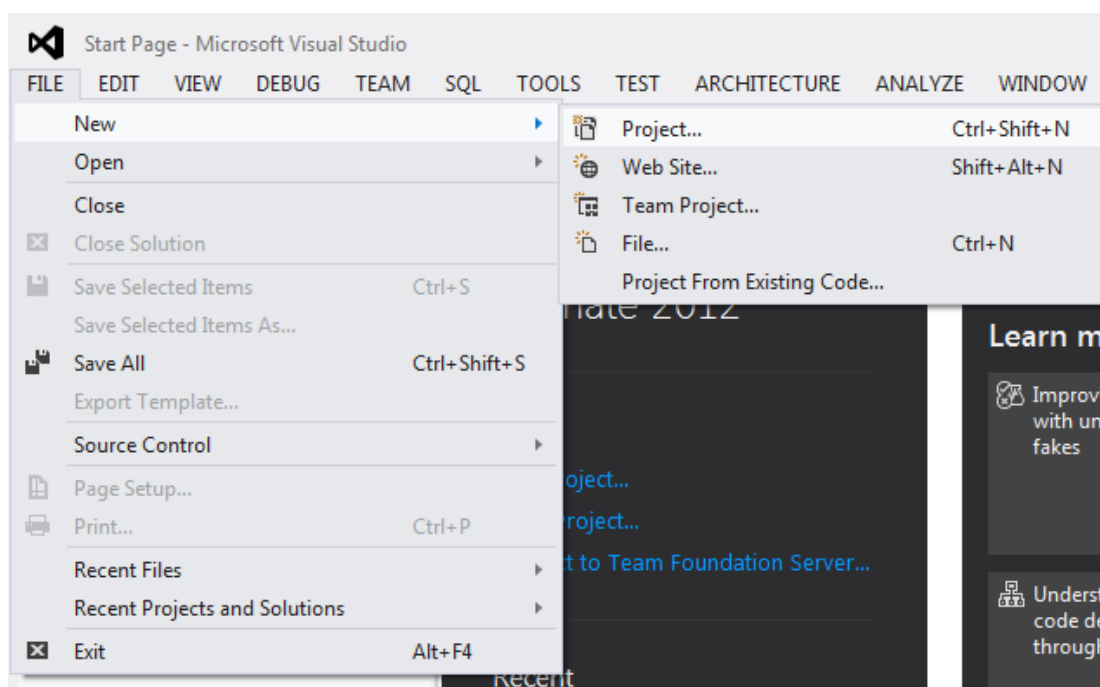
Εικόνα 3.22: Ρητές καμπύλες B-Spline με το w_3 να αλλάζει.

4. Περιβάλλον Δημιουργίας της Φόρμας

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μία προσπάθεια παρουσίασης του προγράμματος που χρησιμοποιήσαμε για την εγγραφή του κώδικά μας και την ανάπτυξη της φόρμας μας. Ταυτόχρονα παρουσιάζεται όλη η απαιτούμενη διαδικασία για την δημιουργία μίας νέας εφαρμογής (project). Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι το πρόγραμμα που χρησιμοποιήσαμε ήταν το Microsoft Visual Studio 2012.

4.1 Δημιουργία Ενός Νέου Project

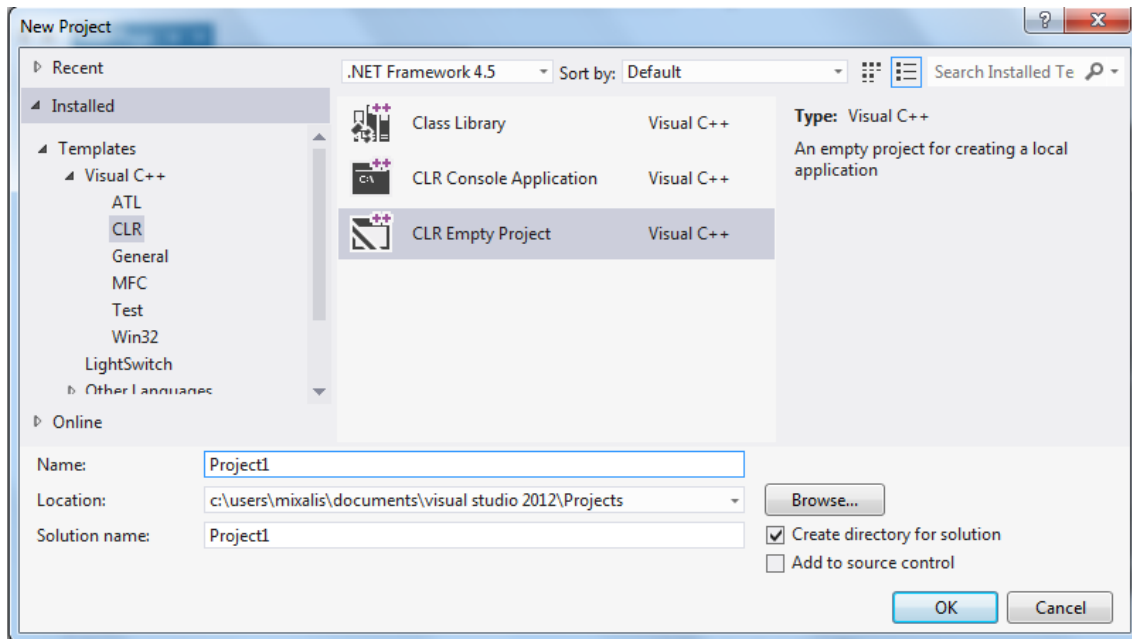
Για να δημιουργήσουμε ένα νέο project ακολουθούμε την εξής διαδικασία: FILE > New > Project... (εικόνα 4.1).



Εικόνα 4.1: Βήμα 1 για την δημιουργία ενός νέου project.

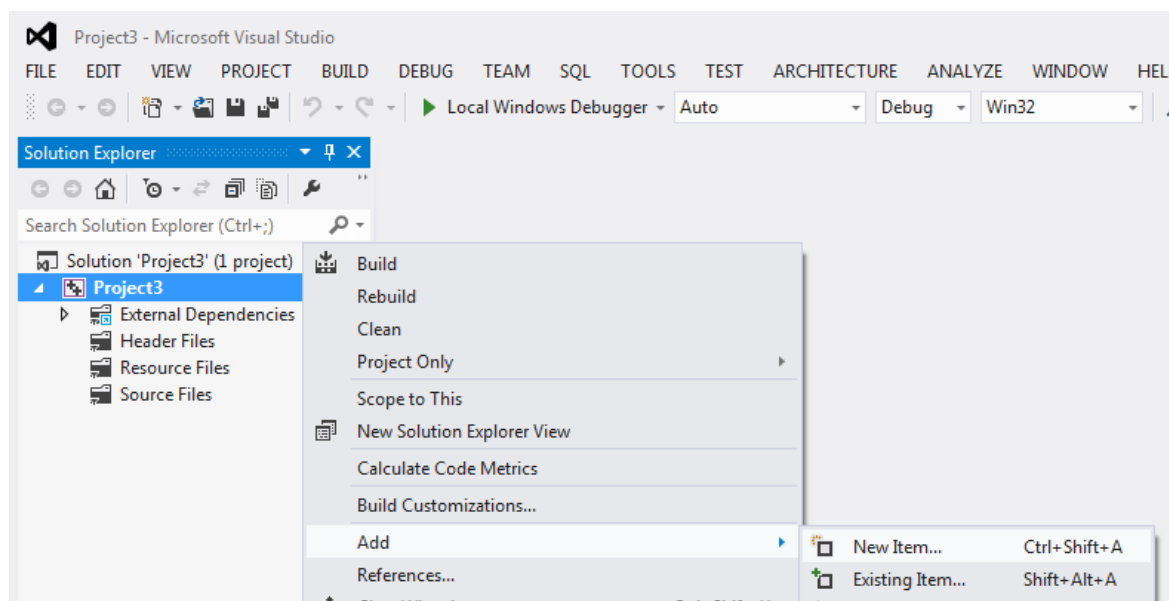
Στη συνέχεια ανοίγει ένα νέο παράθυρο (εικόνα 4.2), στο οποίο επιλέγουμε από τις καρτέλες Installed > Templates > Visual C++ την επιλογή CLR. Στη συνέχεια επιλέγουμε το CLR Empty Project. Στην κάτω μεριά στο κουτάκι “Name” δίνουμε το όνομα του project μας, και στο από κάτω κουτάκι επιλέγουμε το σημείο μέσα στο

σκληρό δίσκο που θα γίνει η αποθήκευση του project μας. Στη συνέχεια πατάμε “Ok” για να προχωρήσουμε.



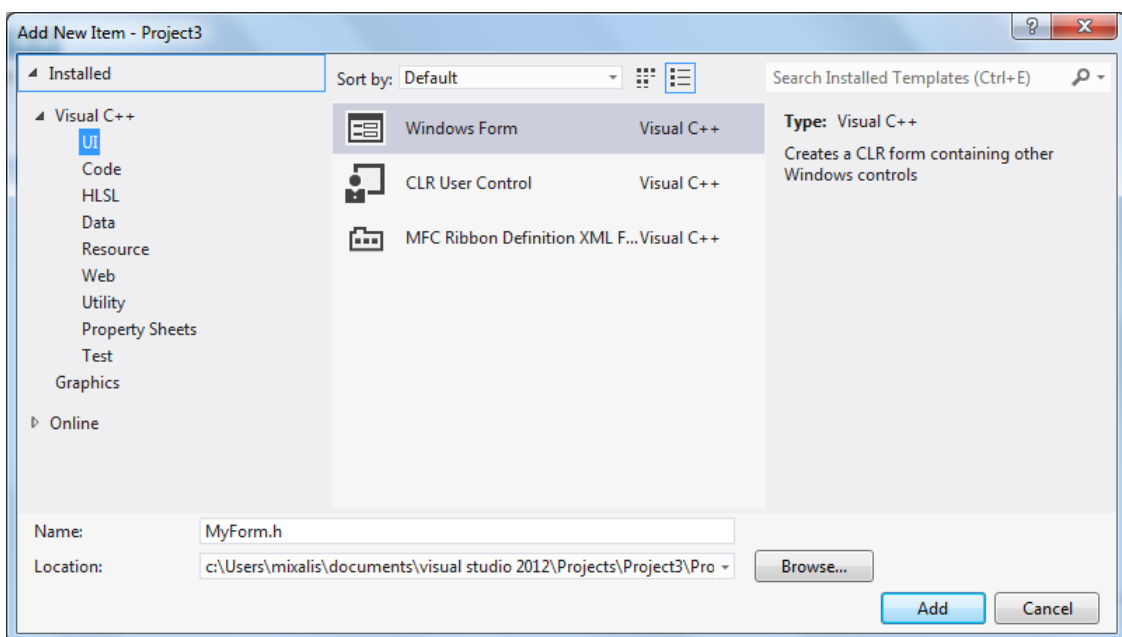
Εικόνα 4.2: Βήμα 2 για την δημιουργία ενός νέου project.

Αφού περιμένουμε μερικά δευτερόλεπτα μέχρι το πρόγραμμα να δημιουργήσει το project μας, η επιφάνεια εργασίας μας παίρνει την μορφή της παρακάτω εικόνας (εικόνα 4.3).



Εικόνα 4.3: Βήμα 1 για την δημιουργία ενός νέου αρχείου “Windows Form Application”.

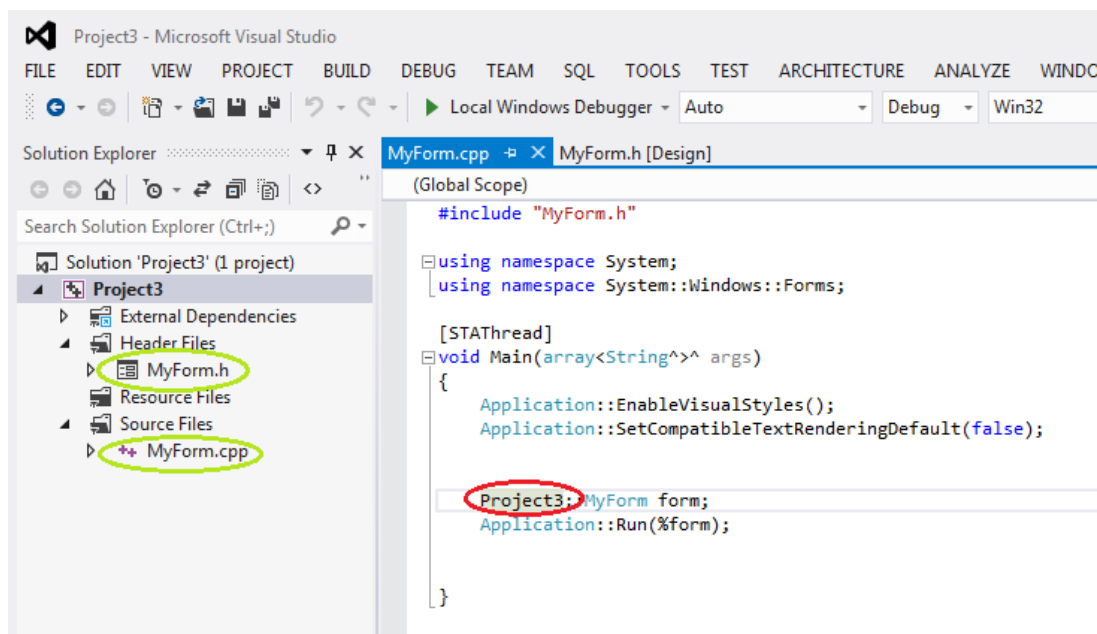
Από το σημείο αυτό και μετά πρέπει να δημιουργήσουμε ένα νέο αρχείο της μορφής “Windows Form Application”, αφού το τελικό μας αποτέλεσμα θέλουμε να είναι μία Φόρμα εκτελέσιμη σε λογισμικό Windows. Το πρώτο βήμα που ακολουθούμε για να γίνει αυτό είναι ότι προσθέτουμε ένα νέο αντικείμενο στο project μας. Για να γίνει αυτό κάνουμε δεξί κλικ στο όνομα του project μας (Project3 στο συγκεκριμένο παράδειγμα), και επιλέγουμε Add > New Item... . Το παράθυρο που εμφανίζεται στην οθόνη μας τότε είναι αυτό της παρακάτω εικόνας (εικόνα 4.4).



Εικόνα 4.4: Βήμα 2 για την δημιουργία ενός νέου αρχείου “Windows Form Application”.

Στο νέο παράθυρο, λοιπόν, επιλέγουμε από τις καρτέλες Installed > Visual C++ την επιλογή UI και από τα δεξιά μας, επιλέγουμε το “Windows Form”. Στο κάτω αριστερό μας μέρος δίνουμε το όνομα που θέλουμε να έχει η φόρμα μας (MyForm.h στο συγκεκριμένο παράδειγμα), με κατάληξη πάντα “.h”. Ενώ στο από κάτω κουτάκι επιλέγουμε την τοποθεσία μέσα στο δίσκο που θέλουμε να αποθηκευτεί η φόρμα μας, και η οποία είναι η ίδια με αυτή που είχαμε επιλέξει και για να αποθηκεύσουμε το project στο προηγούμενο στάδιο της διαδικασίας μας. Στη συνέχεια πατάμε “Add” και τώρα στα αριστερά της οθόνης μας μπορούμε να δούμε

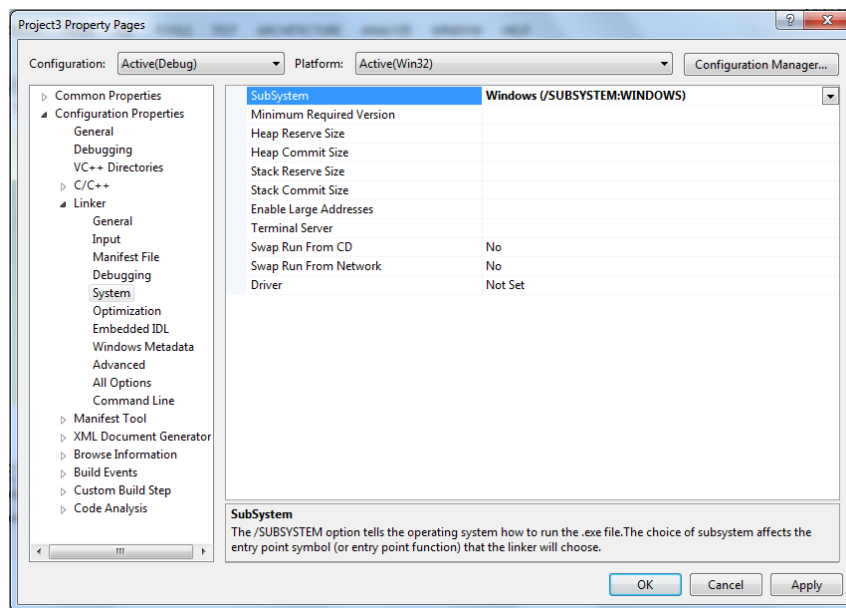
(εικόνα 4.5 πράσινα πλαίσια) ότι στον φάκελο Header Files έχει προστεθεί το αρχείο “MyForm.h” και στο φάκελο Source Files έχει προστεθεί το αρχείο “MyForm.cpp”. Το επόμενο που πρέπει να κάνουμε είναι να ανοίξουμε το αρχείο “MyForm.cpp” και να γράψουμε μία παραγραφούλα με τον κώδικα που φαίνεται στην εικόνα 4.5, έτσι ώστε το αρχείο “MyForm.h” να αναγνωρίζεται από τα windows σαν ένα εκτελέσιμο αρχείο και γενικότερα να έχει τις ιδιότητες μίας φόρμας. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι στον ο κώδικας αυτός είναι ο ίδιος για κάθε “Windows Form” που δημιουργούμε, απλά το μόνο που πρέπει να αλλάζουμε είναι το περιεχόμενο του κόκκινου πλαισίου, μέσα στο οποίο γράφουμε κάθε φορά το όνομα του project μας (Project3 στην περίπτωσή μας).



Εικόνα 4.5: Βήμα 3 για την δημιουργία ενός νέου αρχείου “Windows Form Application”.

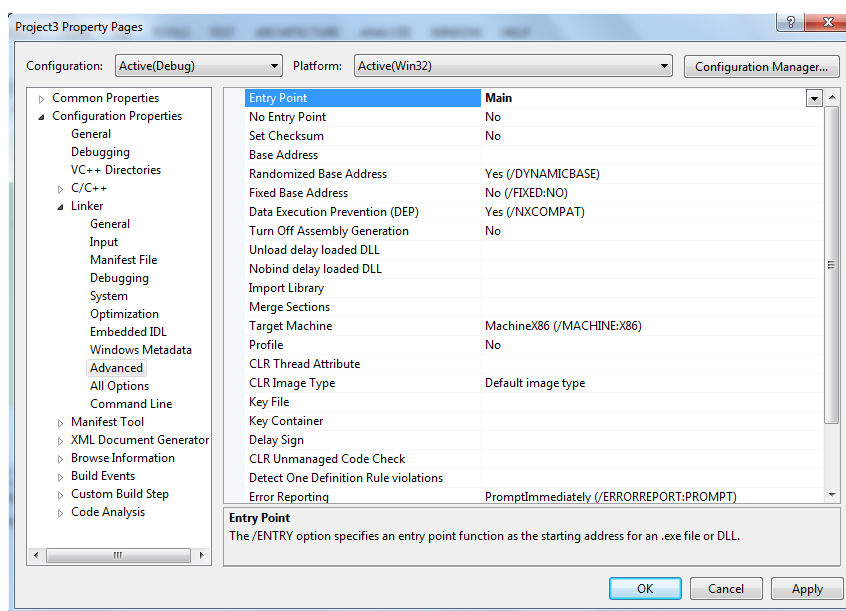
Μετά το πέρας και αυτής της διαδικασίας, πρέπει να κάνουμε δύο ακόμα βήματα για την ολοκλήρωση του project μας. Το πρώτο από αυτά είναι να κάνουμε δεξί κλικ πάνω στο όνομα του project μας και να επιλέξουμε την επιλογή “properties”. Έπειτα στο παράθυρο που ανοίγει επιλέγουμε διαδοχικά την καρτέλα Configuration Properties και την καρτέλα Linker. Από την καρτέλα Linker επιλέγουμε το System και στα δεξιά της οθόνης στο κουτάκι με όνομα SubSystem

επιλέγουμε το “Windows (/SUBSYSTEM:WINDOWS)” (εικόνα 4.6). Με την επιλογή μας αυτή ορίζουμε ότι το αρχείο ‘.exe’ που θα δημιουργηθεί θα «τρέχει» σε λειτουργικό σύστημα Windows.



Εικόνα 4.6: Επιλογή λειτουργικού συστήματος, για το αρχείο .exe που θα δημιουργήσουμε.

Τέλος, από την καρτέλα Linker, επιλέγουμε την καρτέλα Advanced και στα δεξιά της οθόνης γράφουμε στο κουτάκι με ονομασία Entry Point, την λέξη “Main” (εικόνα 4.7).

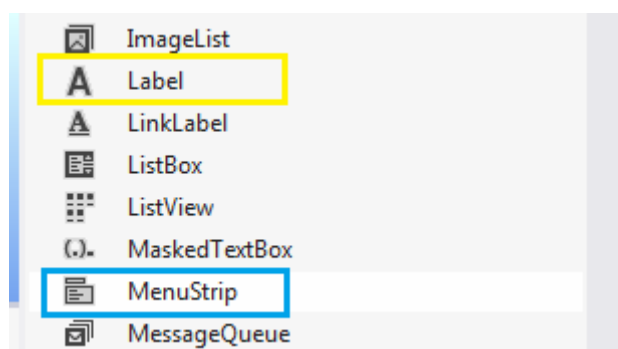


Εικόνα 4.7: Επιλογή σημείου εκκίνησης για το αρχείο .exe.

Κατ' ουσίαν στο κουτάκι αυτό δηλώνουμε ότι ως σημείο εκκίνησης του .exe αρχείου, θα είναι η συνάρτηση “Main”.

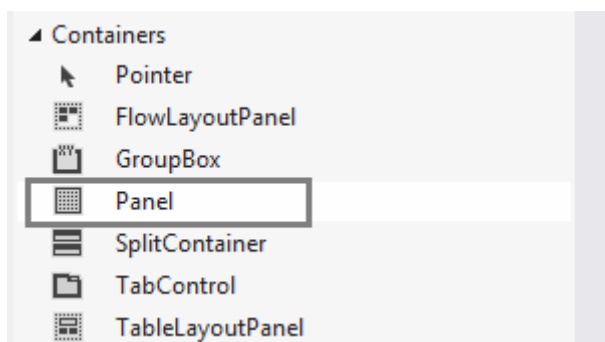
4.2 Εργαλεία Που Χρησιμοποιήθηκαν

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στα εργαλεία (tools) που χρησιμοποιήσαμε για την κατασκευή της φόρμας μας. Αρχικά, χρησιμοποιήσαμε, το “MenuStrip” (εικόνα 4.8), το οποίο μας δίνει την δυνατότητα να εισάγουμε στη φόρμα μας μία μπάρα εργαλείων, δηλαδή κάποιων συγκεκριμένων λειτουργιών που ο χρήστης μπορεί να χρησιμοποιεί ανά πάσα στιγμή. Το δεύτερο εργαλείο που χρησιμοποιήσαμε ήταν αυτό με ονομασία “Label”, το οποίο το χρησιμοποιούμε για να εισάγουμε ένα ονομασία ή κάποιο κείμενο σε ένα μέρος της φόρμας μας.



Εικόνα 4.8: Τα εργαλεία Label και MenuStrip.

Ένα ακόμα εργαλείο, που χρησιμοποιήσαμε ήταν το “panel” (εικόνα 4.9), το οποίο μας βοηθάει να ομαδοποιούμε όλα τα εργαλεία – λειτουργίες, που εισάγουμε μέσα του. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να απενεργοποιούμε εύκολα κομμάτια της φόρμας που δεν θέλουμε να έχει πρόσβαση ο χρήστης.



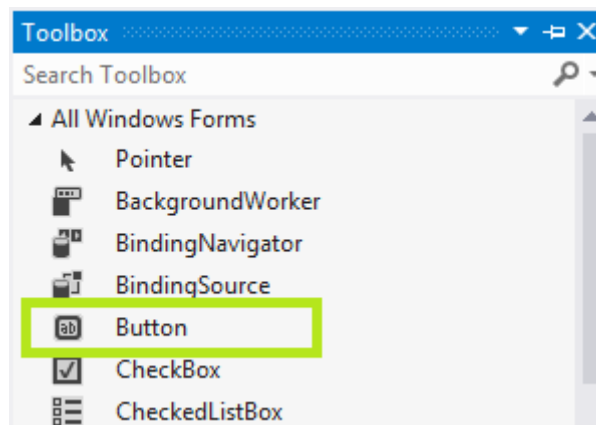
Εικόνα 4.9: Το εργαλείο panel.

Επίσης, δύο από τα σημαντικότερα εργαλεία που διαθέτει το Visual Studio, είναι το “textBox”, κουτί κειμένου, και το SaveFileDialog (εικόνα 4.10). Το πρώτο παρέχει την δυνατότητα στο χρήστη να γράψει μέσα σε αυτό οτιδήποτε κείμενο επιθυμεί, και το δεύτερο να αποθηκεύσει ο χρήστης, το περιεχόμενο ενός textbox.



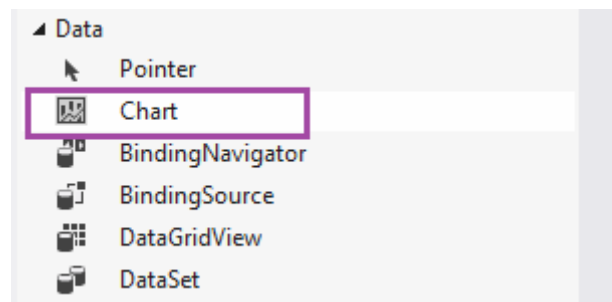
Εικόνα 4.10: Τα εργαλεία TextBox και SaveFileDialog.

Ενώ, ίσως ένα από τα σημαντικότερα και ευρέως χρησιμοποιούμενα εργαλεία, είναι το “Button” (εικόνα 4.11), το οποίο βρίσκει εφαρμογή σε περιπτώσεις που ο χρήστης θέλει να δώσει μία εντολή στη φόρμα για να εκτελέσει κάποια συγκεκριμένη ενέργεια.



Εικόνα 4.11: Το εργαλείο Button.

Τελευταίο, στη λίστα των εργαλείων που χρησιμοποιήσαμε είναι το “Chart” (εικόνα 4.12), το οποίο μας χρησίμευσε για την δημιουργία των γραφικών παραστάσεων, των καμπυλών Bezier και B-splines.

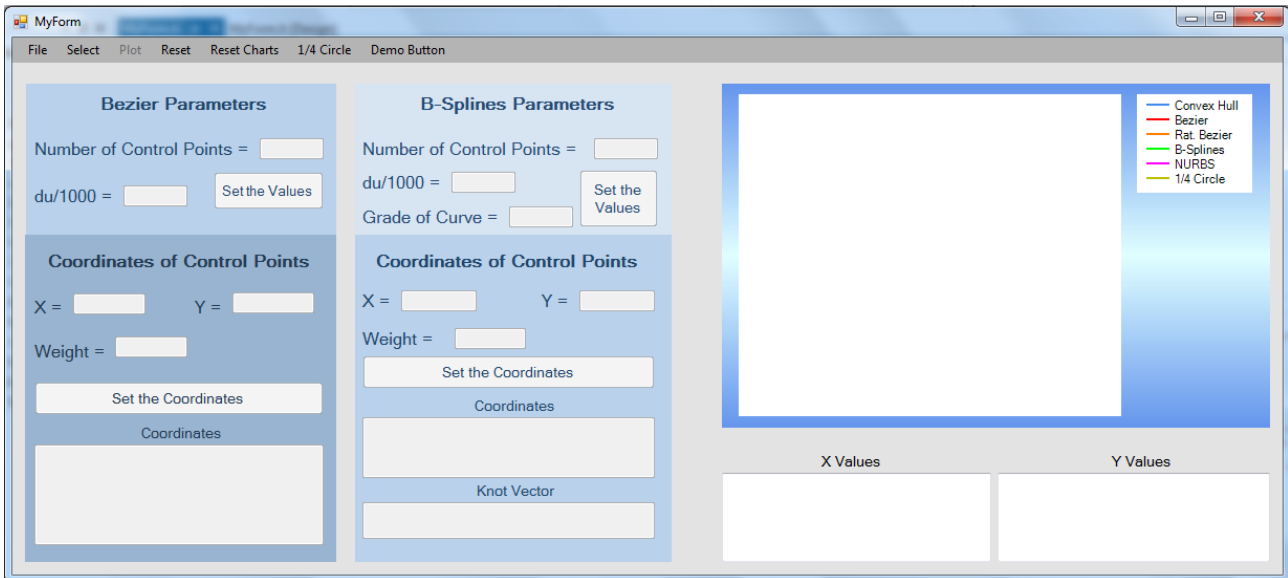


Εικόνα 4.12: Το εργαλείο δημιουργία γραφικών παραστάσεων, Chart

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στο κεφάλαιο 5, θα γίνει μία εκτενέστερη περιγραφή των εργαλείων αυτών που αναφέρθηκαν παραπάνω. Επίσης, θα γίνει μία αναφορά στις λειτουργίες καθενός από αυτά, καθώς επίσης στον τρόπο που αυτά αλληλεπιδρούν – συνδυάζονται μεταξύ τους.

5. Υλοποίηση Φόρμας Σχεδίασης Καμπυλών

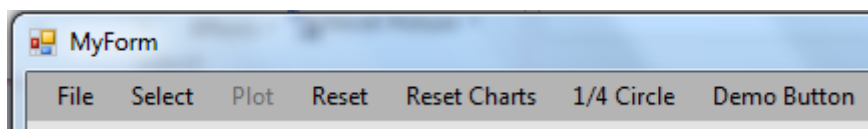
Στην ενότητα αυτή, γίνεται μία παρουσίαση της φόρμας που σχεδιάσαμε στο Microsoft Visual Studio 2012, μέσα από μία εκτενή αναφορά των λειτουργιών και των δυνατοτήτων της. Η τελική μορφή της φόρμας που σχεδιάσαμε είναι αυτή της παρακάτω εικόνας (εικόνα 5.1).



Εικόνα 5.1: Τελική μορφή φόρμας σχεδιασμού καμπυλών Bezier και B-Splines.

5.1 Γραμμή Εργαλείων

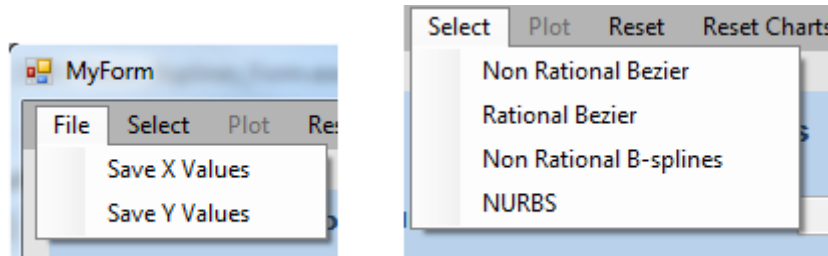
Η δημιουργία του περιβάλλοντος της φόρμας μας, ξεκίνησε με τη δημιουργία μίας μπάρας εργαλείων (εικόνα 5.2).



Εικόνα 5.2: Μπάρα εργαλείων.

Πατώντας το μενού 'File' έχουμε την δυνατότητα να αποθηκεύσουμε το περιεχόμενο των τριών "Text Boxes", με ονομασίες «X values» και «Y values». Τα δύο αυτά Text Boxes περιέχουν, τις τιμές X και Y των σημείων που αποτελούν την γραφική παράσταση που έχει σχεδιάσει ο χρήστης. Ενώ το δεύτερο μενού επιλογής, "Select",

δίνει την δυνατότητα στο χρήστη, να επιλέξει την καμπύλη που θέλει να σχεδιάσει. Όπως φαίνεται και από την παρακάτω εικόνα (εικόνα 5.3), οι επιλογές που έχει ο χρήστης είναι: α) Non Rational Bezier, β) Rational Bezier, γ) Non Rational B-splines και δ) NURBS.



Εικόνα 5.3: Τα μενού επιλογής File και Select.

Στην πρώτη επιλογή ο χρήστης καλείται να δώσει μόνο τον αριθμό των σημείων ελέγχου, τον αριθμό του βήματος, και τις συντεταγμένες X και Y των σημείων ελέγχου. Αξίζει εδώ να αναφέρουμε ότι στην επιλογή '*Non Rational Bezier*' δεν μπορούμε να ρυθμίσουμε την τιμή του βάρους των σημείων, το οποίο ισούται εξ' ορισμού με τη μονάδα. Στην δεύτερη επιλογή '*Rational Bezier*', ο χρήστης έχει την δυνατότητα, πέραν όλων των προηγούμενων ρυθμίσεων, να διαχειριστεί και την παράμετρο του βάρους δίνοντας όποια τιμή θέλει στο εκάστοτε σημείο ελέγχου. Μέσω της τρίτης επιλογής, '*Non Rational B-splines*', παρέχεται η δυνατότητα σχεδιασμού μίας καμπύλης B-spline με ανοικτό ομοιόμορφο διάγραμμα κόμβων. Στην επιλογή αυτή γίνεται από τον χρήστη ορισμός του βήματος της μεταβλητής u , του πλήθους των σημείων ελέγχου και του βαθμού της καμπύλης B-splines. Πρέπει να αναφέρουμε ότι και εδώ ο χρήστης δεν μπορεί να ρυθμίσει το βάρος του εκάστοτε σημείου. Την δυνατότητα αυτή την έχει ο χρήστης στην τέταρτη επιλογή '*NURBS*'.

Μετά το μενού 'Select', συναντάμε την λειτουργία με την ονομασία 'Plot'. Η επιλογή αυτή είναι απενεργοποιημένη, και ενεργοποιείται μόνο όταν ο χρήστης τελειώσει με τον ορισμό όλων των παραμέτρων της καμπύλης. Ενεργοποιημένη, λοιπόν, η λειτουργία 'Plot', δίνει στο χρήστη την δυνατότητα να σχεδιάσει την καμπύλη που αρχικά είχε επιλέξει, από το μενού 'Select'.

Έπειτα, βρίσκουμε την επιλογή 'Reset', η οποία επαναφέρει την φόρμα στην αρχική της κατάσταση, δίνοντας την δυνατότητα στο χρήστη να επιλέξει από την αρχή την καμπύλη που θέλει να σχεδιάσει και να κάνει από την επαναλάβει από την αρχή όλη την διαδικασία μέχρι τον τελικό σχεδιασμό της καμπύλης. Η επιλογή 'Reset' δεν διαγράφει την υπάρχουσα καμπύλη, έτσι ώστε να μπορεί να σχεδιάσει τις επόμενες καμπύλες στο ίδιο γράφημα με την προηγούμενη και έτσι να μπορεί να κάνει οποιαδήποτε σύγκριση θέλει. Όμως σε περίπτωση που θέλει να διαγράψει τις καμπύλες του γραφήματος τότε μπορεί να πατήσει την επιλογή 'Reset Charts'

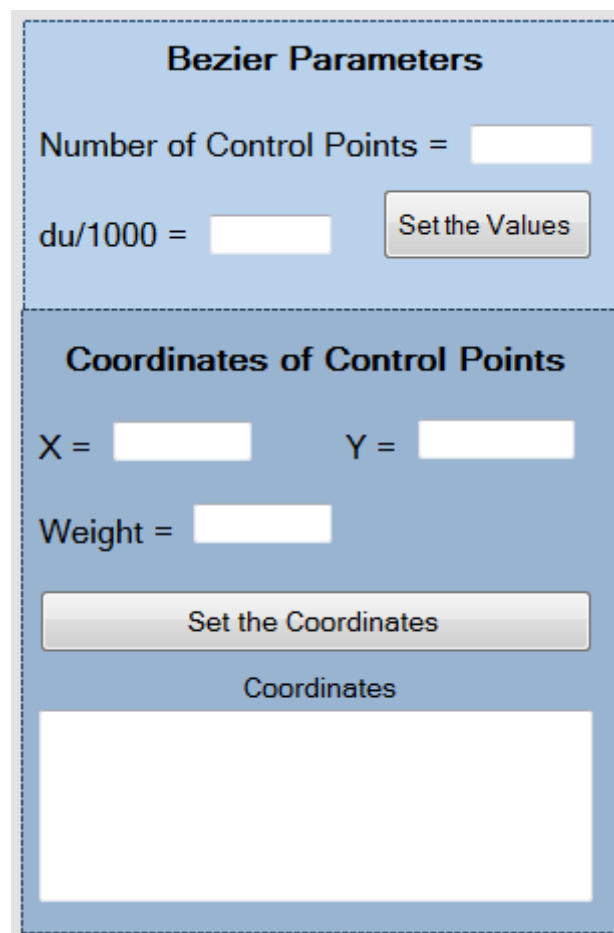
Μία ακόμα επιλογή της γραμμής εργαλείων είναι, η '1/4 Circle', η οποία ευθύνεται για τον απευθείας σχεδιασμό της καμπύλης του πρώτου τεταρτοκυκλίου του μοναδιαίου κύκλου, χρησιμοποιώντας των αλγεβρικό τύπο που το χαρακτηρίζει. Η επιλογή αυτή υπάρχει για την σύγκριση της «αλγεβρικής καμπύλης» του τεταρτοκυκλίου και της καμπύλης που προκύπτει από την σχεδίαση μέσω της επιλογής «Rational Bezier».

Τελευταία επιλογή της γραμμής εργαλείων είναι , η "Demo Button", η οποία διαθέτει δύο υπο-επιλογές, τις "Bezier" και "B-splines". Επιλέγοντας ο χρήστης την επιλογή "Bezier" σχεδιάζεται αυτόματα μία καμπύλη Bezier με βάση κάποια συγκεκριμένα δεδομένα που εμείς έχουμε επιλέξει. Αντίστοιχα, επιλέγοντας ο χρήστης την "B-splines" σχεδιάζεται αυτόματα μία καμπύλη B-spline. Κατ' ουσίαν οι δύο αυτές επιλογές έχουν τον ρόλο δύο έτοιμων παραδειγμάτων. Περισσότερα, για τις δύο αυτές καμπύλες θα γνωρίσουμε στο κεφάλαιο 6.

5.2 Ορισμός των Παραμέτρων μίας Καμπύλης Bezier

Έχοντας επιλέξει ο χρήστης μία εκ των επιλογών 'Non Rational Bezier' ή 'Rational Bezier', αυτόματα ανοίγει το μενού ορισμού των παραμέτρων της καμπύλης Bezier (εικόνα 5.4). Αρχικά ο χρήστης καλείται να εισάγει τον αριθμό των σημείων ελέγχου της καμπύλης ("Number of Control Points"), καθώς επίσης και τον αριθμό του βήματος της μεταβλητής u . Διευκρινίζεται ότι για λόγους ευκολίας ο χρήστης καλείται να δώσει ένα ακέραιο νούμερο, μέχρι το 100, το οποίο στη

συνέχεια μέσα από το πρόγραμμα θα διαιρεθεί με το 1000 για να προκύψει ένα νούμερο μεταξύ του μηδέν και του ένα. Για παράδειγμα, αν ο χρήστης δώσει το νούμερο 10, τότε αυτό μετατρέπεται σε 0.01, και έτσι η μεταβλητή u θα πάρει αρχικά την τιμή 0 και στην επόμενη επανάληψη θα πάρει την τιμή $0 + 0.01$. Αν ο χρήστης εισάγει νούμερο μεγαλύτερο του 100, τότε απλά η καμπύλη που θα προκύψει δεν θα έχει μεγάλη ευκρίνεια. Τέλος, για να εισαχθούν οι τιμές αυτές, ο χρήστης καλείται να πατήσει το κουμπί ‘Set the Values’.



Bezier Parameters

Number of Control Points =

du/1000 =

Coordinates of Control Points

X = Y =

Weight =

Coordinates

Εικόνα 5.4: Μενού εισόδου παραμέτρων καμπυλών Bezier.

Μετά το πάτημα του κουμπιού αυτού, ενεργοποιείται το από κάτω μενού, στο οποίο ο χρήστης καλείται να δώσει τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου. Στα κουτάκια με ονομασίες X και Y, ο χρήστης πληκτρολογεί τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης. Ενώ αν αρχικά είχε επιλέξει την επιλογή “Rational Bezier”, από το μενού “Select”, τότε του δίνεται η δυνατότητα να εισάγει και τιμή βάρους για το κάθε σημείο. Για να ολοκληρωθεί η εισαγωγή των παραμέτρων, ο

χρήστης πρέπει να πατήσει το κουμπί 'Set the Coordinates'. Αυτόματα με το πάτημα του κουμπιού αυτού, οι τιμές που μόλις ορίσαμε φαίνονται στο κουτί κειμένου («TextBox»), με ονομασία Coordinates. Μόλις δώσουμε και τις τελευταίες συντεταγμένες, τότε αυτόματα απενεργοποιείται όλο το μενού "Coordinates of Control Points" και αυτόματα ενεργοποιείται η λειτουργία 'Plot' από την γραμμή εργαλείων.

5.3 Ορισμός των Παραμέτρων μίας Καμπύλης B-Splines

Για τον σχεδιασμό μίας καμπύλης B-Splines, ο χρήστης πρέπει να επιλέξει μία εκ των επιλογών Non Rational B-splines ή NURBS. Διαλέγοντας μία εκ των δύο αυτόματα ενεργοποιείται το μενού ορισμού των παραμέτρων μίας καμπύλης B-splines (εικόνα 5.5).

B-Splines Parameters

Number of Control Points =

du/1000 =

Grade of Curve =

Coordinates of Control Points

X = Y =

Weight =

Coordinates

Knot Vector

Εικόνα 5.5: Μενού εισόδου παραμέτρων καμπυλών B-splines.

Το πρώτο μενού που ενεργοποιείται, έχει αρκετές ομοιότητες, με το αντίστοιχο μενού των καμπυλών Bezier, αφού και σε αυτό ο χρήστης εισάγει τον αριθμό των σημείων

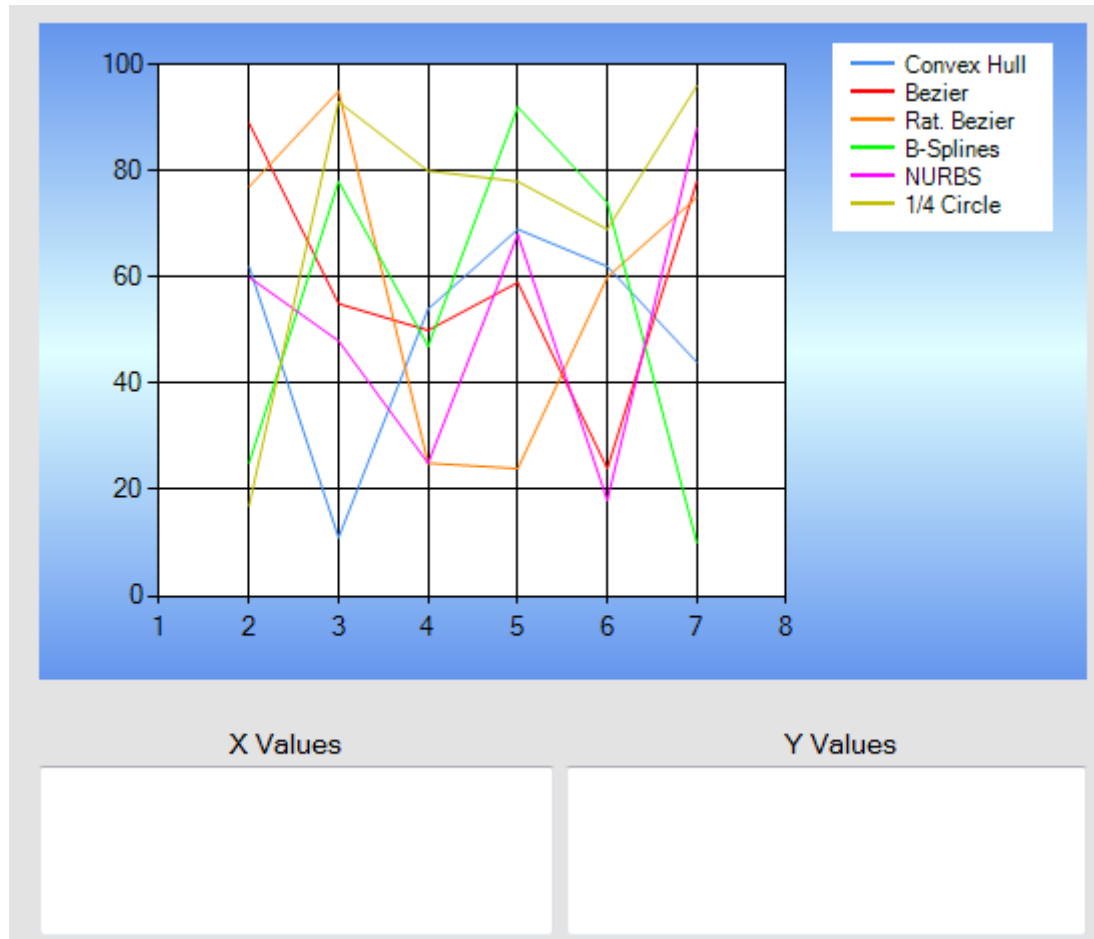
ελέγχου της καμπύλης και τον αριθμό του βήματος της μεταβλητής u . Σε αντίθεση τώρα με τις καμπύλες Bezier, ο χρήστης καλείται να εισάγει και τον αριθμό που δείχνει το βαθμό της καμπύλης (grade of curve). Κάτι τέτοιο δεν συνέβαινε με τις καμπύλες Bezier, αφού σε αυτές ο βαθμός της καμπύλης είναι κατά ένα νούμερο μικρότερος από τον αριθμό των σημείων ελέγχου. Ακόμα με χρήση του κουμπιού ‘Set the Values’ ,ορίζονται – καταχωρούνται, στο πρόγραμμα οι τιμές που πληκτρολόγησε ο χρήστης και αυτόματα ενεργοποιείται το μενού που βρίσκεται από κάτω και έχει ονομασία “Coordinates of Control Points”. Ταυτόχρονα με το πάτημα, του κουμπιού ‘Set the Values’, δημιουργείται και το διάνυσμα κόμβων, και οι τιμές του εμφανίζονται στο κουτί με ονομασία (Knot Vector).

Στη συνέχεια και αφού ενεργοποιηθεί το δεύτερο μενού επιλογών, Coordinates of Control Points, ο χρήστης καλείται να εισάγει τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης, με αντίστοιχο τρόπο με αυτόν στις καμπύλες Bezier. Τονίζεται ότι, η επιλογή weight δίνεται στον χρήστη μόνο σε περίπτωση που επιλέξει την επιλογή NURBS, από το μενού επιλογών “Select”. Επίσης, εισάγοντας τις συντεταγμένες του τελευταίου σημείου ελέγχου, αυτόματα ενεργοποιείται η λειτουργία “Plot”, από την γραμμή εργαλείων.

5.4 Γραφική Παράσταση Καμπυλών

Όπως έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα η σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων, διενεργείται μέσω της επιλογής “Plot” από το μενού εργαλείων. Έτσι με το πάτημα του “Plot” η καμπύλη που είχαμε αρχικά επιλέξει σχεδιάζεται στο περιβάλλον δημιουργίας γραφικών παραστάσεων, “Chart” (εικόνα 5.6). Όπως μπορούμε να δούμε από την παρακάτω εικόνα, το μπλε χρώμα αναφέρεται στο πολύγωνο ελέγχου της εκάστοτε καμπύλης, το κόκκινο χρώμα αναφέρεται στις (μη ρητές) καμπύλες Bezier, το πορτοκαλί χρώμα απευθύνεται στις ρητές καμπύλες Bezier, το πράσινο στις (μη ρητές) καμπύλες B-splines, το μωβ στις καμπύλες NURBS και το λαδί στη καμπύλη του τεταρτοκυκλίου του μοναδιαίου κύκλου.

Στην από κάτω μεριά του διαγράμματος βρίσκονται δύο κουτιά κειμένου, μέσα στα οποία γράφονται οι συντεταγμένες των σημείων που απαρτίζουν την καμπύλη που σχεδιάστηκε τελευταία. Το αριστερό κουτάκι περιλαμβάνει τις συντεταγμένες X των σημείων αυτών, ενώ το δεξιό κουτάκι περιλαμβάνει τις συντεταγμένες Y των σημείων.



Εικόνα 5.6: Το περιβάλλον δημιουργίας γραφικών παραστάσεων και τα κουτιά κειμένου των συντεταγμένων των σημείων της καμπύλης.

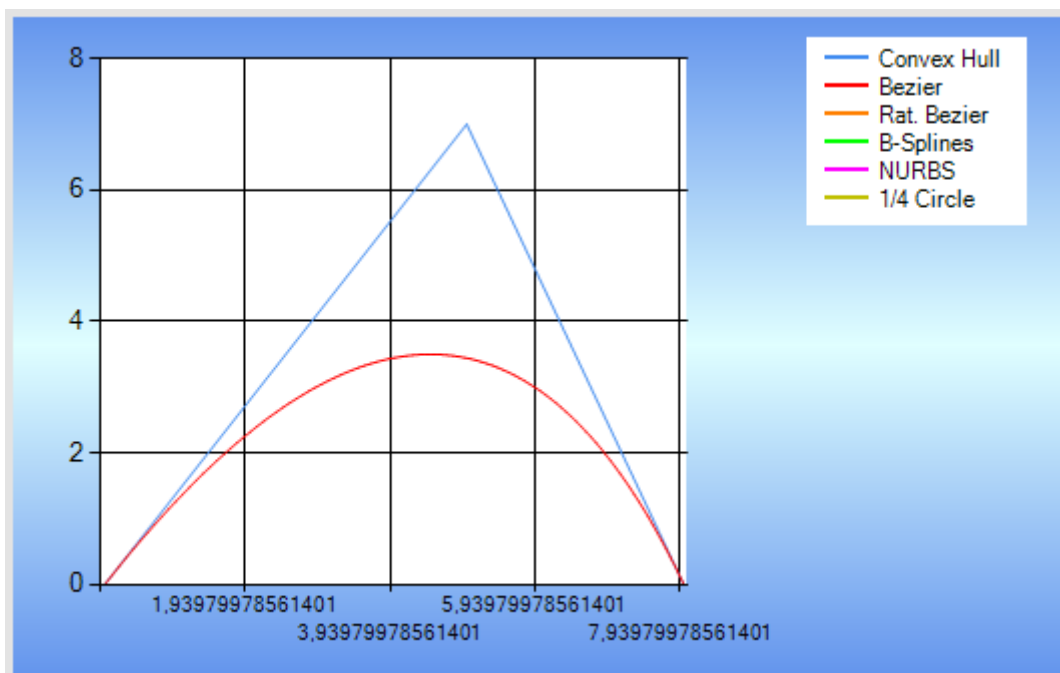
Στο κεφάλαιο αυτό γνωρίσαμε τις λειτουργίες των εργαλείων και των κουμπιών που αποτελούν την φόρμα, καθώς επίσης και τις δυνατότητες που παρέχονται στον χρήστη της φόρμας. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζονται κάποια χρήσιμα παραδείγματα που τεκμηριώνουν την ορθή λειτουργία της φόρμας που δημιουργήσαμε.

6. Παραδείγματα Καμπυλών Bezier και B-Splines

Όπως προαναφέραμε στην ενότητα αυτή περιλαμβάνονται ορισμένα παραδείγματα καμπυλών Bezier και B-Splines, κάποια εκ των οποίων είναι όμοια με εκείνα που παρουσιάστηκαν στα κεφάλαια 2 και 3. Η παρουσίαση των παραδειγμάτων έχει απότερο σκοπό την τεκμηρίωση της ορθής λειτουργίας της φόρμας αλλά και για την τεκμηρίωση μέρους της θεωρίας που αναφέρθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια.

6.1 Καμπύλες Bezier

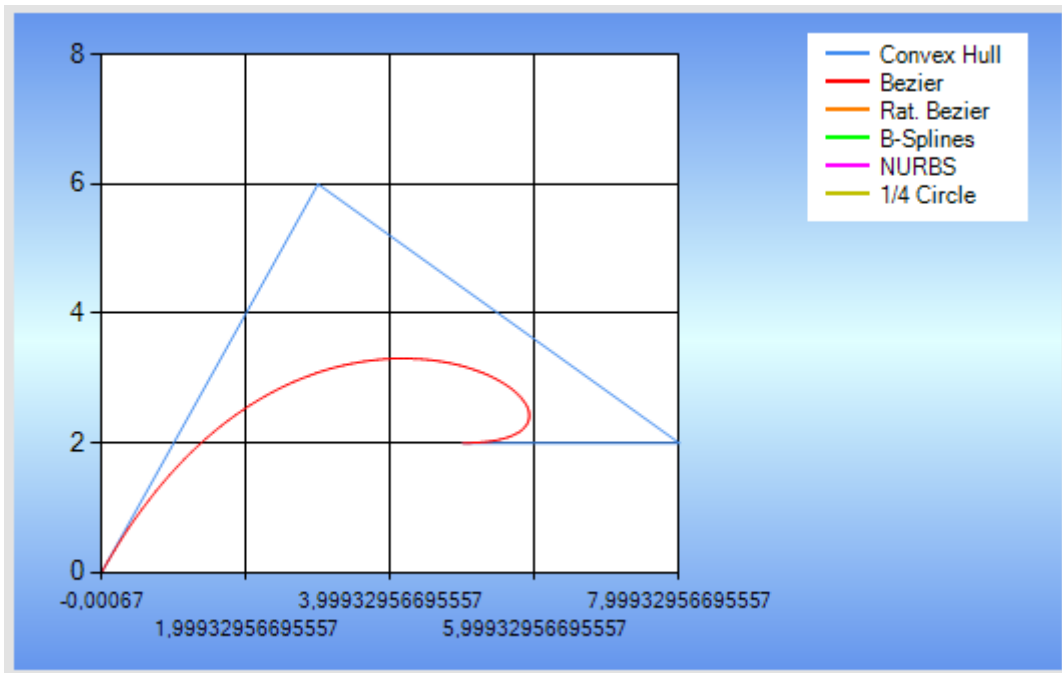
Η πρώτη καμπύλη (εικόνα 6.1) που αναπαραστήσαμε, είναι όμοια με αυτή της εικόνας 2.7 και αποτελεί μία καμπύλη Bezier δευτέρου βαθμού με σημεία ελέγχου $P_0(0,0)$, $P_1(5,7)$, $P_2(8,0)$.



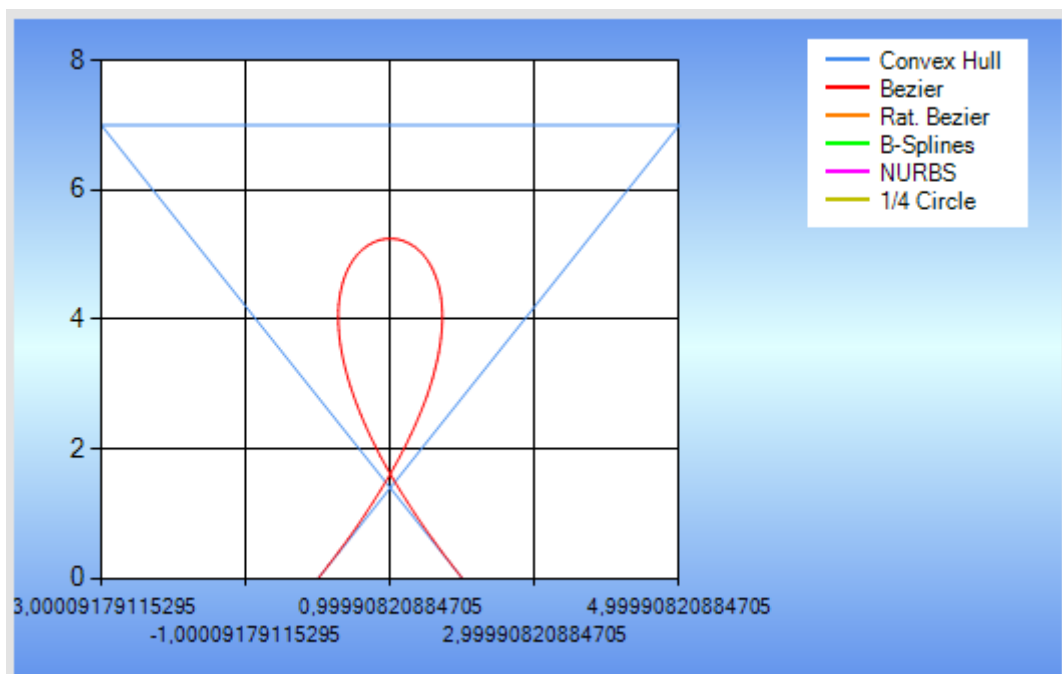
Εικόνα 6.1: Καμπύλη Bezier δευτέρου βαθμού.

Οι καμπύλες που ακολουθούν είναι καμπύλες τρίτου βαθμού με την πρώτη (εικόνα 6.2) να έχει σημεία ελέγχου τα $P_0(0,0)$, $P_1(3,6)$, $P_2(8,2)$, $P_3(5,2)$, την δεύτερη (εικόνα 6.3) να έχει σημεία ελέγχου τα $P_0(0,0)$, $P_1(5,7)$, $P_2(-3,7)$, $P_3(2,0)$ και την τρίτη να έχει σημεία ελέγχου τα $P_0(0,0)$, $P_1(1,5)$, $P_2(3,2)$, $P_3(5,6)$. Οι δύο πρώτες καμπύλες είναι

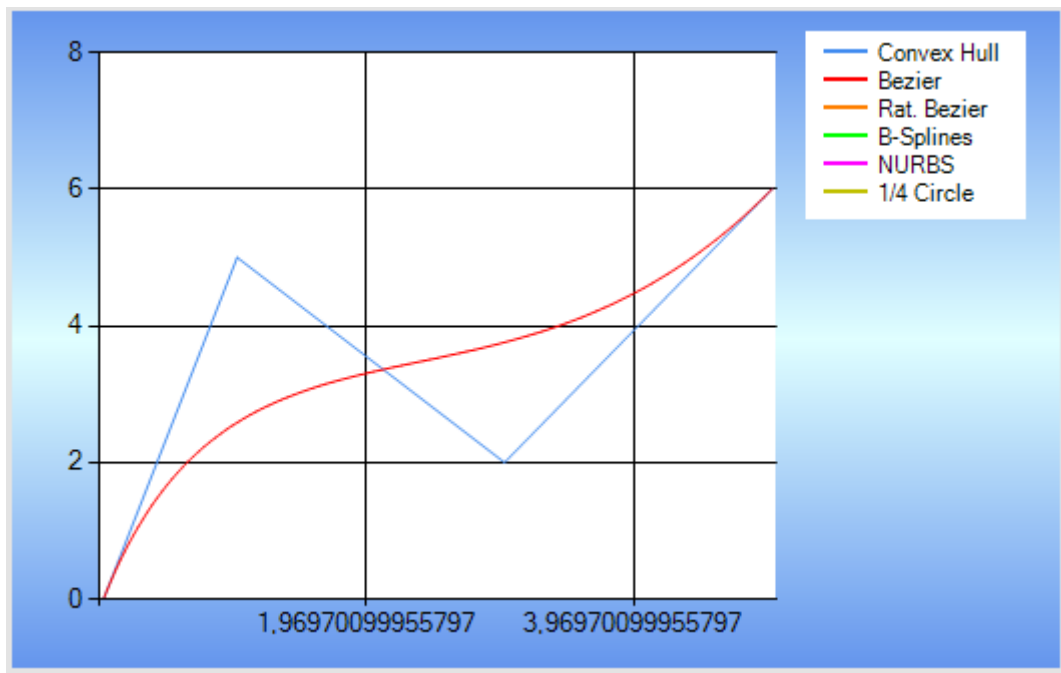
όμοιες με εκείνες των εικόνων 2.8 και 2.9 αντίστοιχα. Ενώ η τρίτη καμπύλη (εικόνα 6.4) αποτελεί το παράδειγμα της καμπύλης εκείνης που δημιουργείται πατώντας, ο χρήστης το “Demo Button”, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 5.



Εικόνα 6.2: Καμπύλη Bezier τρίτου βαθμού.

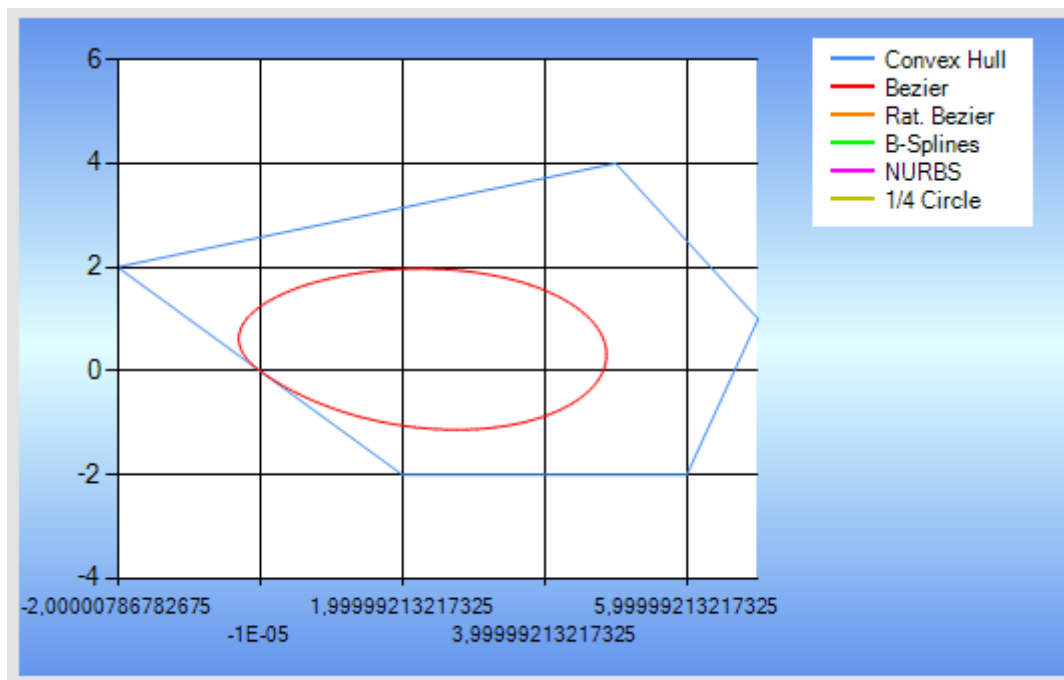


Εικόνα 6.3: Καμπύλη Bezier τρίτου βαθμού.



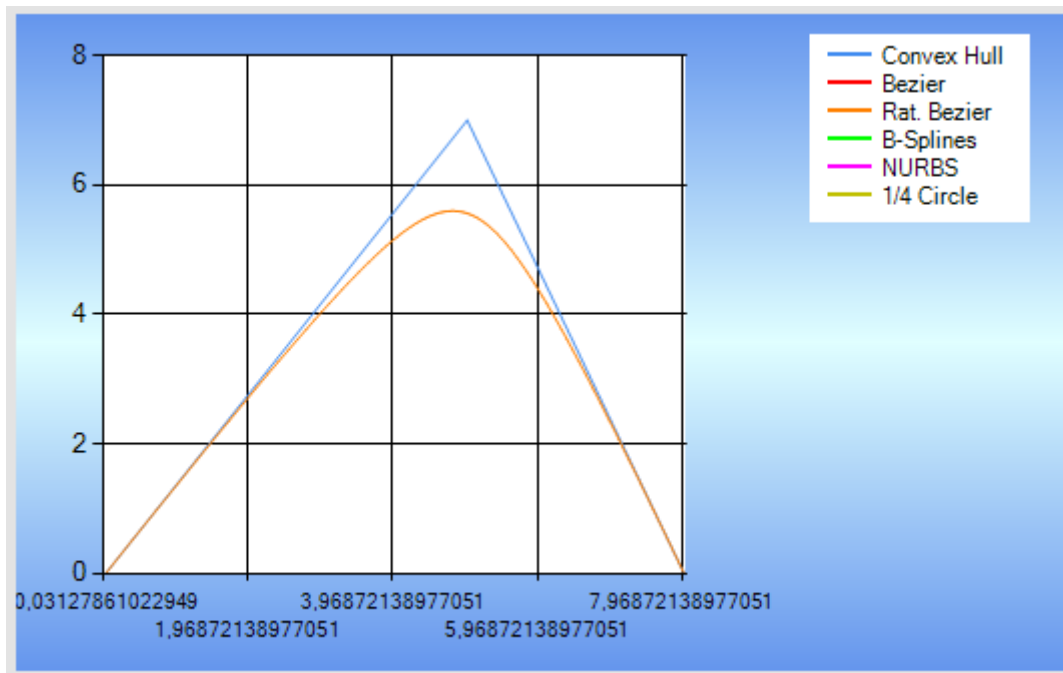
Εικόνα 6.4: Καμπύλη Bezier τρίτου βαθμού.

Ενώ στην εικόνα που ακολουθεί (εικόνα 6.5), παρακάτω, παρουσιάζεται μία καμπύλη Bezier έκτου βαθμού, με σημεία ελέγχου τα $P_0(0,0)$, $P_1(-2,2)$, $P_2(5,4)$, $P_3(7,1)$, $P_4(6,-2)$, $P_5(2,-2)$, $P_6(0,0)$. Η καμπύλη αυτή είναι όμοια με αυτή που παρουσιάστηκε στη εικόνα 2.11 του κεφαλαίου 2.



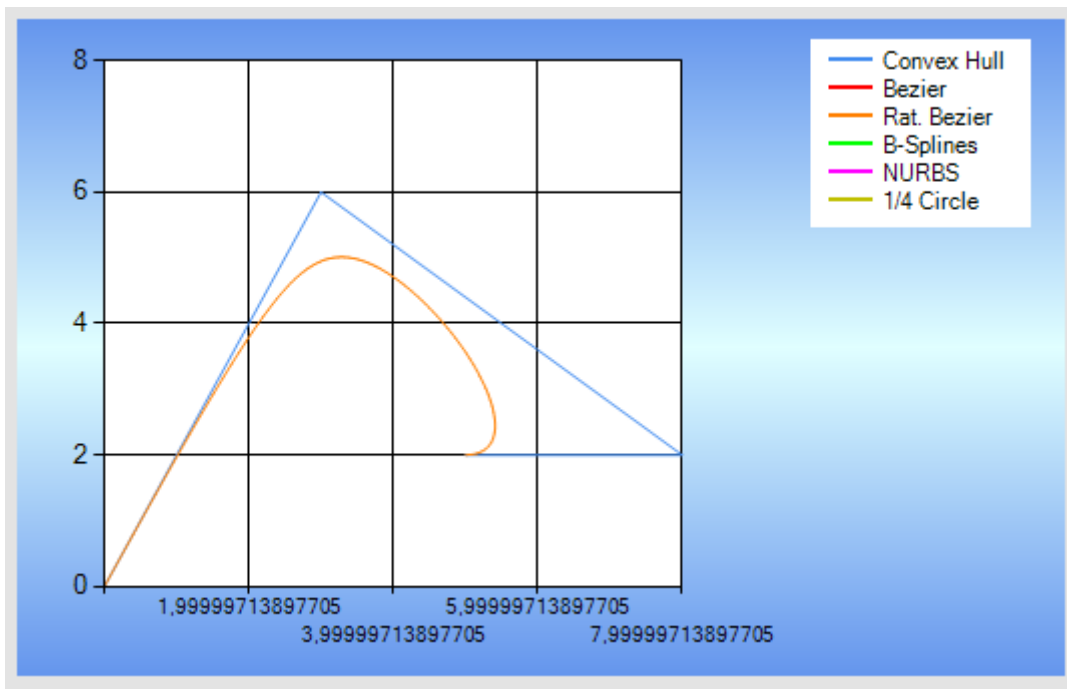
Εικόνα 6.5: Καμπύλη Bezier έκτου βαθμού.

Θέλοντας τώρα να τονίσουμε το χαρακτηριστικό του βάρους ενός σημείου ελέγχου, σχεδιάσαμε κάποιες από τις προαναφερθείσες καμπύλες σαν ρητές καμπύλες Bezier. Με τον τρόπο αυτό δώσαμε σε ένα σημείο, κάθε καμπύλης, μεγάλη τιμή του βάρους για να δούμε την αλλαγή που παρουσιάστηκε.



Εικόνα 6.6: Ρητή καμπύλη Bezier, δευτέρου βαθμού, με τιμή του βάρους ίση με 4, για το δεύτερο σημείο ελέγχου.

Έτσι η παραπάνω εικόνα (εικόνα 6.6), δείχνει μία ρητή καμπύλη Bezier με σημεία ελέγχου τα $P_0(0,0, w=1)$, $P_1(5,7, w=4)$, $P_2(8,0, w=1)$. Επίσης η εικόνα που ακολουθεί δείχνει μία ρητή καμπύλη Bezier, τρίτου βαθμού, με σημεία ελέγχου τα $P_0(0,0, w=1)$, $P_1(3,6, w=5)$, $P_2(8,2, w=1)$, $P_3(5,2, w=1)$.

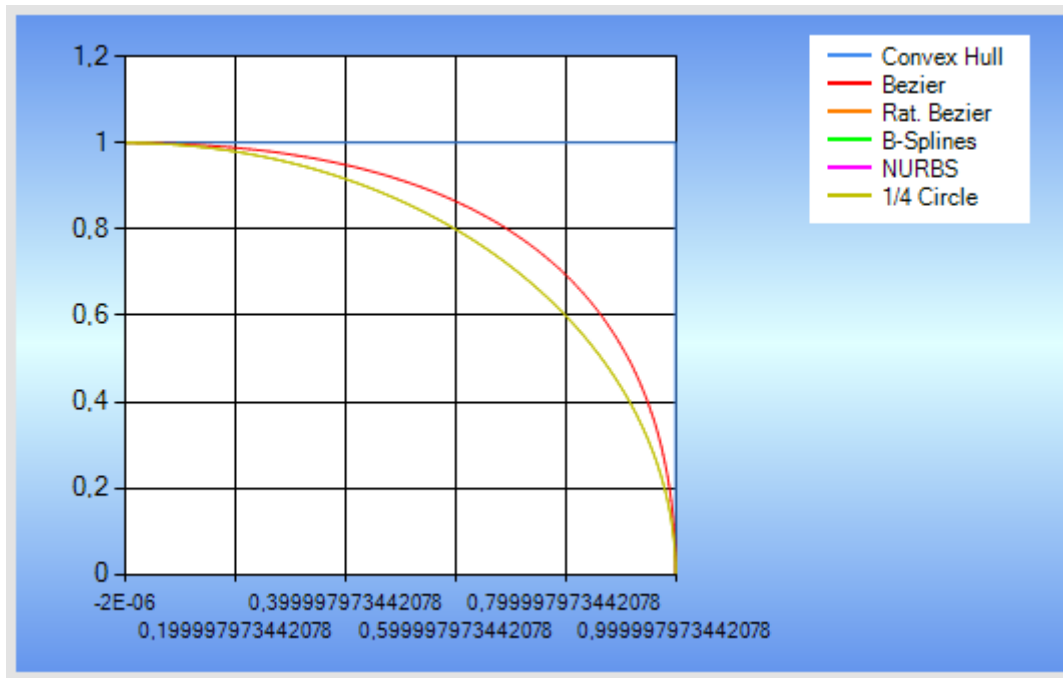


Εικόνα 6.7: Ρητή καμπύλη Bezier, δευτέρου βαθμού, με τιμή του βάρους ίση με 5, για το δεύτερο σημείο ελέγχου.

Να αναφέρουμε ότι, οι καμπύλες των εικόνων 6.6 και 6.7 είναι ίδιες με αυτές των εικόνων 6.1 και 6.2 αντίστοιχα, με την μόνη διαφορά να έγκειται στο βάρος του δεύτερου σημείου.

Όπως είδαμε, λοιπόν, από τα παραπάνω παραδείγματα, το βάρος που χαρακτηρίζει ένα σημείο ελέγχου μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την μορφή της εκάστοτε καμπύλης. Το γεγονός αυτό, είναι που επιτρέπει στις ρητές καμπύλες Bezier να αναπαριστούν καμπύλες που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν από τις απλές καμπύλες Bezier.

Έτσι στο παράδειγμα που ακολουθεί προσπαθήσαμε να σχεδιάσουμε το πρώτο τεταρτοκύκλιο του μοναδιαίου κύκλου χρησιμοποιώντας την εξίσωση των απλών καμπυλών Bezier και για σημεία ελέγχου τα $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$ (εικόνα 6.8).

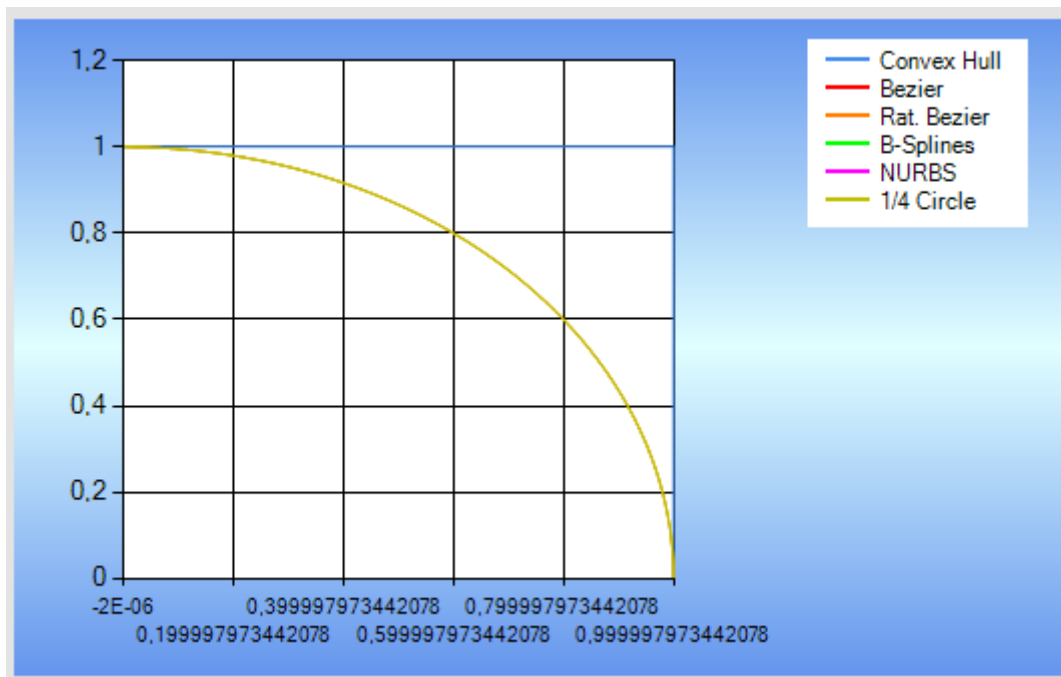


Εικόνα 6.8: Μη ρητή καμπύλη Bezier δευτέρου βαθμού (κόκκινο χρώμα), αλγεβρική αναπαράσταση καμπύλης πρώτου τεταρτοκυκλίου μοναδιαίου κύκλου (λαδί χρώμα).

Ενώ για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε την καμπύλη που προέκυψε με την πραγματική καμπύλη που αντιστοιχεί στο πρώτο τεταρτοκύκλιο του μοναδιαίου κύκλου, αναπαράξαμε και την καμπύλη που περιγράφεται από τις αλγεβρικές εξισώσεις του (εξίσωση 6.1).

$$x(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad , \quad y(u) = \frac{2u}{1+u^2} \quad (6.1)$$

Όπως παρατηρούμε λοιπόν, οι δύο καμπύλες έχουν αρκετά μεγάλη απόκλιση μεταξύ τους. Κάτι που δεν συμβαίνει αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση των ρητών καμπυλών Bezier και τα σημεία ελέγχου $P_0(1,0, w=1)$, $P_1(1,1, w=1)$, $P_2(0,1, w=2)$. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι θέτοντας την τιμή του βάρους ίση με δύο για το τελευταίο σημείο ελέγχου, η δύο καμπύλες συμπίπτουν μεταξύ τους (εικόνα 6.9).



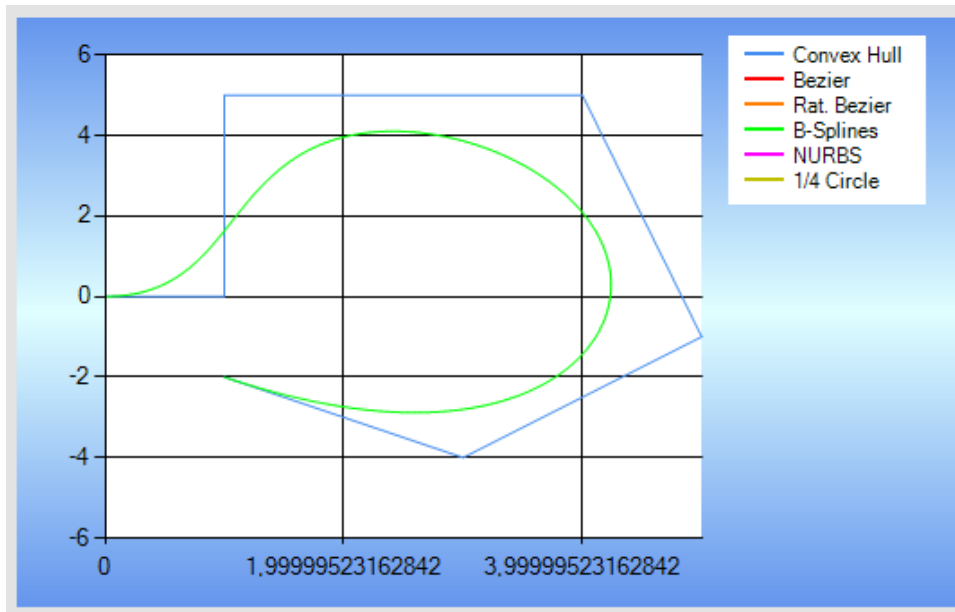
Εικόνα 6.9: Ρητή καμπύλη Bezier δευτέρου βαθμού (πορτοκαλί χρώμα), αλγεβρική αναπαράσταση καμπύλης πρώτου τεταρτοκυκλίου μοναδίαου κύκλου (λαδί χρώμα).

Αξίζει σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι επηρεάζοντας το βάρος ενός μόνο σημείου επηρεάζεται όλη η μορφή της καμπύλης. Το γεγονός, λοιπόν, ότι μία τοπική αλλαγή σε κάποιο μέρος της καμπύλης επηρεάζει όλη την μορφή της, αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα των καμπυλών Bezier, που όμως όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα δεν συμβαίνει με τις καμπύλες B-splines.

6.2 Καμπύλες B-Splines

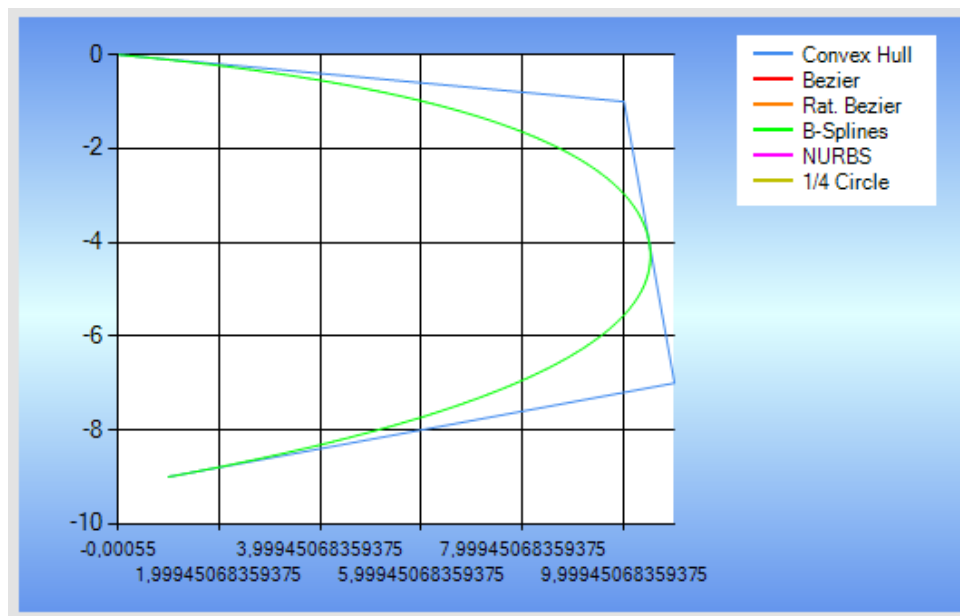
Η πρώτη καμπύλη (εικόνα 6.10) που αναπαραστήσαμε, είναι όμοια με αυτή της εικόνας 3.9 και αποτελεί μία καμπύλη Bezier τετάρτου βαθμού με επτά σημεία ελέγχου $P_0(0,0)$, $P_1(1,0)$, $P_2(1,5)$, $P_0(4,5)$, $P_1(5,-1)$, $P_2(3,-4)$, $P_0(1,-2)$. Πρέπει σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι η καμπύλη αυτή σχεδιάζεται και στην περίπτωση που ο χρήστης έχει πατήσει την επιλογή “B-splines” του “Demo Button”. Όπως θα παρατηρήσουμε και από την εικόνα η καμπύλη λόγω του βαθμού της έχει

απομακρυνθεί από το πολύγωνο ελέγχου της. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο αφού αποτελεί γενικό χαρακτηριστικό όλων των καμπυλών B-splines.



Εικόνα 6.10: Καμπύλη B-spline τετάρτου βαθμού, με επτά σημεία ελέγχου.

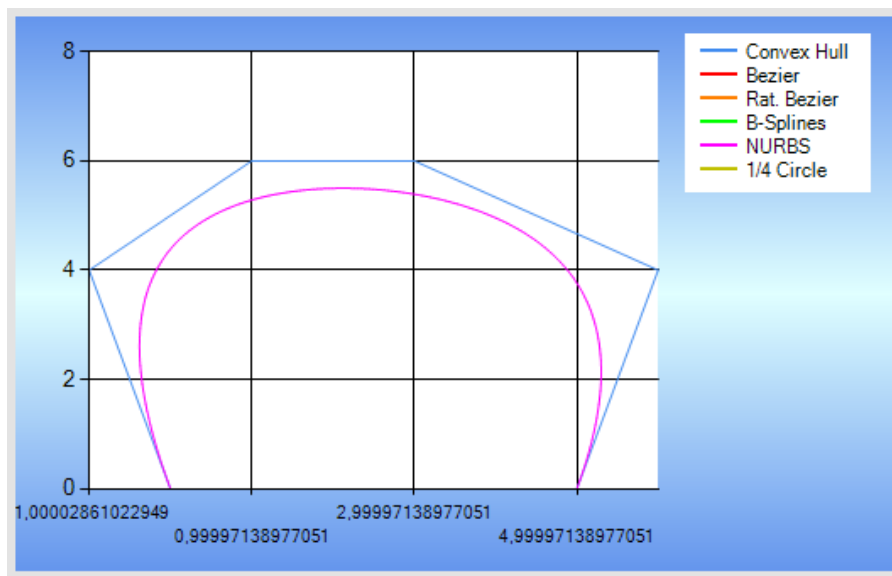
Στην εικόνα (εικόνα 6.11) που ακολουθεί παρουσιάζεται μία καμπύλη δευτέρου βαθμού με τέσσερα σημεία ελέγχου: $P_0(0,0)$, $P_1(10,-1)$, $P_2(11,-7)$, $P_3(1,-9)$.



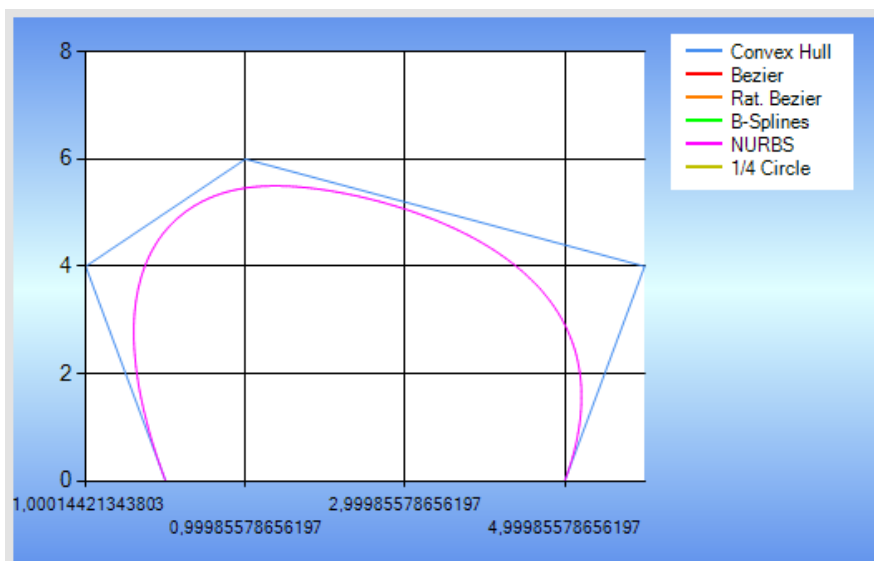
Εικόνα 6.11: Καμπύλη B-spline δευτέρου βαθμού, με τέσσερα σημεία ελέγχου.

Όπως βλέπουμε σε αυτή την εικόνα (εικόνα 6.11), η καμπύλη είναι εφαπτόμενη στο πολύγωνο ελέγχου κάτι που είναι φυσιολογικό εφόσον πρόκειται για μία καμπύλη δευτέρου βαθμού.

Στις εικόνες που ακολουθούν, (εικόνες 6.12, 6.13), αρχικά παρουσιάζεται μία καμπύλη NURBS τετάρτου βαθμού με έξι σημεία ελέγχου: $P_0 (0,0)$, $P_1 (-1,4)$, $P_2 (1,6)$, $P_3 (3,6)$, $P_4 (6,4)$, $P_5 (5,0)$. Ενώ στην συνέχεια φαίνεται η ίδια καμπύλη, με πολλαπλότητα στο σημείο ελέγχου P_2 , δηλαδή το P_3 είναι ίδιο με το P_2 .

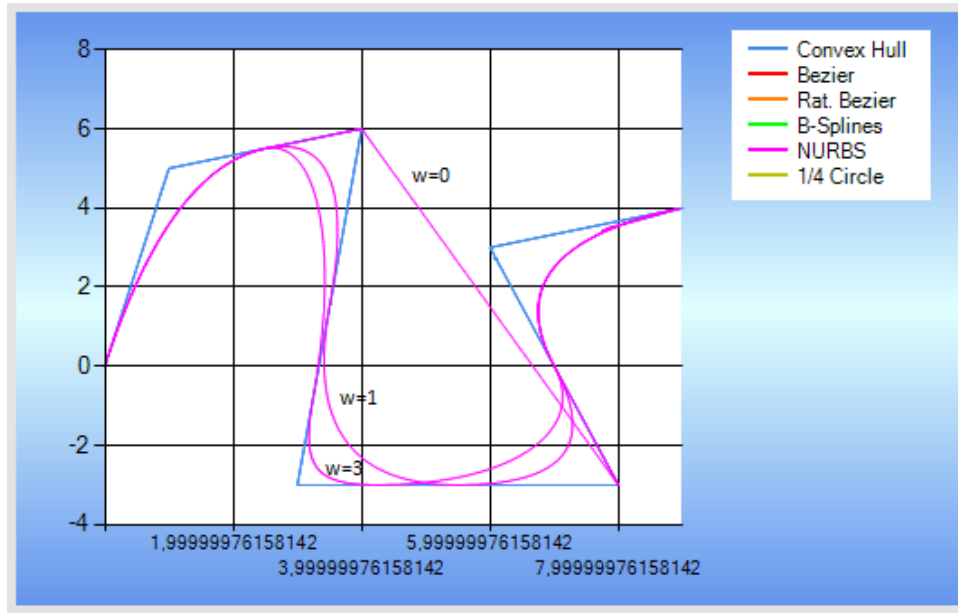


Εικόνα 6.12: Καμπύλη NURBS δευτέρου βαθμού χωρίς πολλαπλότητα.



Εικόνα 6.13: Καμπύλη NURBS δευτέρου βαθμού με πολλαπλότητα σημείου.

Τέλος, στην εικόνα που ακολουθεί παρουσιάζεται μία καμπύλη δευτέρου βαθμού, όμοια με αυτή της εικόνας 3.22, με επτά σημεία ελέγχου: $P_0(0,0)$, $P_1(1,5)$, $P_2(4,6)$, $P_3(3,-3)$, $P_4(8,-3)$, $P_5(6,3)$, $P_6(9,4)$, για την οποία όμως αλλάζει το βάρος του σημείου P_3 . Οι τιμές που παίρνει το βάρος είναι: α) 0, β) 1 και γ) 3.



Εικόνα 6.14: Καμπύλη δευτέρου βαθμού με επτά σημεία ελέγχου, για διαφορετικές τιμές του βάρους του σημείου P_3 .

Είδαμε, λοιπόν σε αυτή την ενότητα κάποιες από τις διαφορές μεταξύ των καμπυλών Bezier και B-splines, όπως αυτή της σχέσης εξάρτησης βαθμού και σημείων ελέγχου της καμπύλης, καθώς και αυτή της πολυπλοκότητας των καμπυλών με μικρό πλήθος σημείων ελέγχου.

7. Συμπεράσματα – Μελλοντική Εργασία

Κοιτάζοντας όλα όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα, αφορικά με τις καμπύλες Bezier και B-splines, μπορούμε να καταλάβουμε την τεράστια σημασία των καμπυλών αυτών, καθώς με τη χρήση απλών αλγορίθμων μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε ένα πολύ μεγάλο πλήθος καμπυλών. Αυτός ήταν και ο κύριος στόχος μας με την κατασκευή της φόρμας που αναπτύξαμε, δηλαδή η κατασκευή σύνθετων καμπυλών με ένα τρόπο απλό και διαδραστικό.

Παρόλα αυτά, θέλοντας να θέσουμε την εργασία αυτή σαν βάση για κάποια μελλοντική εργασία, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένας επόμενος στόχος, θα ήταν η κατασκευή μίας φόρμας ή γενικότερα μίας εφαρμογής, η οποία θα παρέχει την δυνατότητα στον χρήστη εκτός από καμπύλες να σχεδιάζει και επιφάνειες, τόσο σε δισδιάστατη (2D) μορφή όσο και σε τρισδιάστατη (3D).

Βιβλιογραφία

- [1] L. Piegl. W. Tiller, “The NURBS Book”, second edition, publications of Springer, 1997.
- [2] G. Farin., “Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, A Practical Guide”, Fourth Edition, Academic Press, 1988.
- [3] N. M. Patrikalakis. T. Maekawa., “Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing”, Springer, 2002.