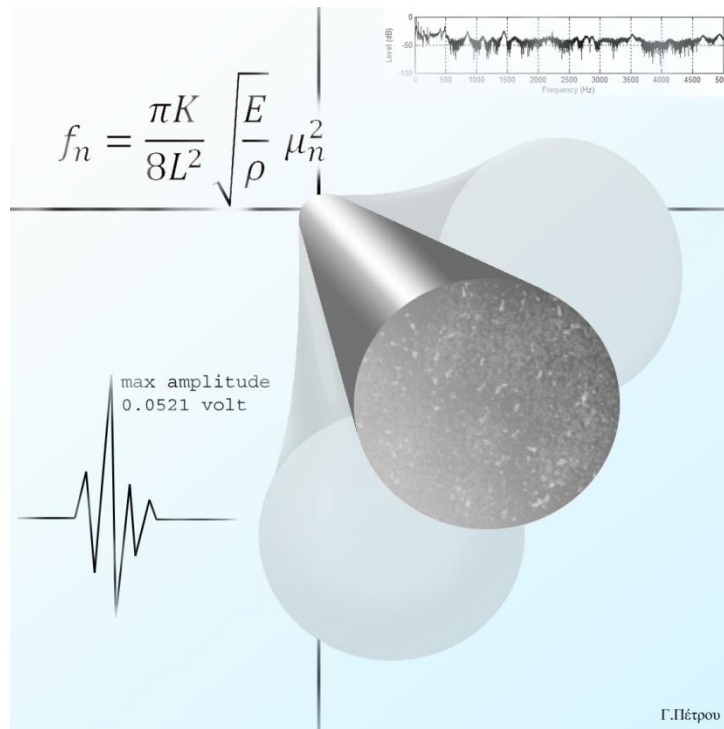


# Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Κρήτης

## Τμήμα Μουσικής Τεχνολογίας & Ακουστικής

Εύρεση ιδιοσυχνοτήτων μεταλλικής ράβδου και υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας με δυναμικές τεχνικές.



Σπουδαστής: Πέτρου Γιώργος

Επιβλέπων Καθηγητής: Κουζούπης Σπύρος

**Ρέθυμνο 2010**

## Περίληψη

Στην πτυχιακή εργασία που ακολουθεί, παρουσιάζουμε μία μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του Young καθώς και την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων που προκύπτουν από την ταλάντωση μίας ράβδου. Για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων θα εφαρμόσουμε δύο διαφορετικούς τρόπους διέγερσης. Την κρουστική διέγερση σε κυλινδρική ράβδο και την εξαναγκασμένη ταλάντωση με διεγέρτη σε ράβδο ορθογώνιας διατομής. Επίσης θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση που προκαλείται από συγκεκριμένης δύναμης κρουστική διέγερση. Από την ανάλυση των σημάτων που θα καταγράψουμε θα βρούμε την φορά του χτυπήματος του σφυριού, λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο λειτουργίας ενός τριαξονικού επιταχυνσιόμετρου. Με την μέθοδο της εξαναγκασμένης ταλάντωσης με διεγέρτη, θα δούμε τους δεσμούς που σχηματίζονται στην ράβδο ρίχνοντας της άμμο την στιγμή της ταλάντωσης. Επίσης θα υπολογίσουμε το σφάλμα που προκαλείται από τις διαστάσεις της ράβδου και την αντίστοιχη μεταβολή που επιφέρει στο μέτρο ελαστικότητας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω για την πολύτιμη βοήθειά τους,  
τον καθηγητή μου Σπύρο Κουζούπη,  
καθώς και τους Σ. Μπρέζα, Ν. Χονδρογιάννη, Ε. Νικάκη, Γ. Ακτενίζογλου.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Το μέτρο ελαστικότητας του Young.....	4
1.2 Εγκάρσια (καμπτικά) κύματα σε ράβδο .....	7
1.3 Διάφορες περιπτώσεις στήριξης ράβδου.....	11
1.3.1 Τρόποι ταλάντωσης ράβδου.....	15

## ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Εργαστηριακός εξοπλισμός.....	16
2.2 Κρουστική διέγερση κυλινδρικής ράβδου.....	19
2.3 Καταγραφή της ταλάντωσης και στους τρεις άξονες.....	24
2.4 Ιδιοσυχνότητες και μέτρο ελαστικότητας κυλινδρικής ράβδου...	29
2.5 Οδήγηση ράβδου ορθογώνιας διατομής με διεγέρτη.....	45
Συμπεράσματα – Προτάσεις για συνέχεια της εργασίας.....	53
Αναφορές – Βιβλιογραφία.....	54

# Κεφάλαιο 1

## 1.1 Μέτρο ελαστικότητας του Young

Για να κατανοήσουμε τον ορισμό του μέτρου ελαστικότητας του Young πρέπει πρώτα να αναφέρουμε κάποιες φυσικές έννοιες.

**Τάση** είναι η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια ενός υλικού και ισούται με:

$$\text{Τάση} = \frac{\text{Δύναμη } (F)}{\text{Εμβαδόν } (S)}$$

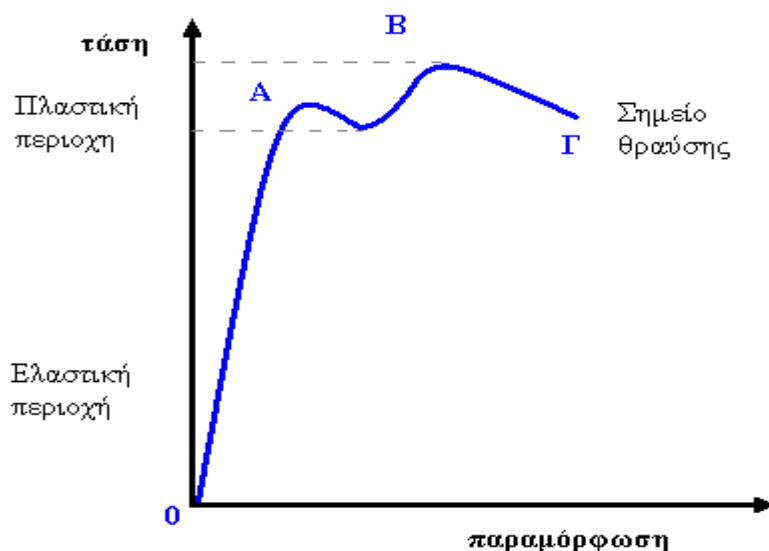
Οι μονάδες μέτρησης της είναι το  $N/m^2$  ή *psi* (λίμπρες ανά τετραγωνική ίντσα)

**Παραμόρφωση** ή **ειδική επιμήκυνση** είναι η μεταβολή στο μήκος ενός υλικού, προς το μήκος του υλικού.

$$\text{Παραμόρφωση} = \frac{\text{Μεταβολή μήκους } (\Delta L)}{\text{Αρχικό μήκος } (L)}$$

Είναι καθαρός αριθμός ο οποίος μπορεί να γραφεί και ως μεταβολή επί τοις εκατό (%)

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της τάσης συναρτήσει της παραμόρφωσης για ένα ισοτροπικό συμπαγές υλικό.



Στο παραπάνω σχήμα η καμπύλη από το μηδέν μέχρι το σημείο A είναι ευθεία. Σε αυτή την περιοχή, η τάση με την παραμόρφωση αυξάνονται γραμμικά. Το κομμάτι αυτό της καμπύλης ονομάζεται **ελαστική περιοχή**. Αν η δύναμη που ασκείται στο υλικό απομακρυνθεί από αυτό (όσο βρίσκεται ακόμα στην ελαστική περιοχή), τότε το υλικό

θα επανέλθει στην αρχική του μορφή (στο αρχικό του μήκος).

Το κομμάτι της καμπύλης από το σημείο Α μέχρι το Β ονομάζεται **πλαστική περιοχή**. Σε αυτό το σημείο της καμπύλης, η παραμόρφωση που θα υποστεί το υλικό θα είναι μόνιμη.

Το σημείο Γ ονομάζεται **σημείο θραύσης** και είναι το σημείο κατάρρευσης του υλικού.

Η σταθερά ή αλλιώς το μέτρο ελαστικότητας του Young, αναφέρεται στην ελαστική περιοχή. Για την ακρίβεια είναι η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος (από το μηδέν έως το Α). Ένας ακριβής ορισμός που μπορούμε να δώσουμε για το μέτρο ελαστικότητας, είναι ο παρακάτω:

«Όταν ασκηθεί κατά μήκος ( $L$ ) ενός ιστροπικού, συμπαγούς υλικού, δύναμη  $F$ , τότε η αναλογία της τάσεως  $F/S$  (όπου  $S$  η διατομή του δοκιμίου) προς την παραμόρφωση  $\Delta L/L$  κατά την κατεύθυνση που ασκείται η δύναμη  $F$ , ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας ή σταθερά του Young και συμβολίζεται με το γράμμα,  $E$ »

$$\text{τάση} = \frac{F}{S}, \text{ σε } Pa = N/m^2$$

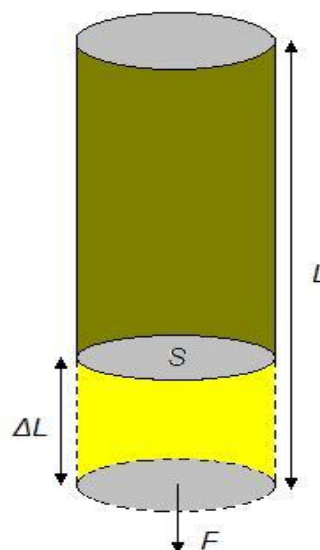
$$\text{παραμόρφωση} = \Delta L/L$$

$$E = \frac{F/S}{\Delta L/L} \quad (Pa)$$

ή

$$\text{Μέτρο Ελαστικότητας} = \frac{\text{Τάση}}{\text{Παραμόρφωση}}$$

Στον ορισμό για το μέτρο ελαστικότητας ( $E$ ) που δώσαμε παραπάνω, θεωρούμε ότι το μήκος  $L$  είναι αρκετά μεγαλύτερο από τις άλλες διαστάσεις του σώματος. Στην ιδανική περίπτωση ελαστικότητας το ( $E$ ) θεωρείται σταθερό. Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε την σταθερά ελαστικότητας για ορισμένα υλικά.

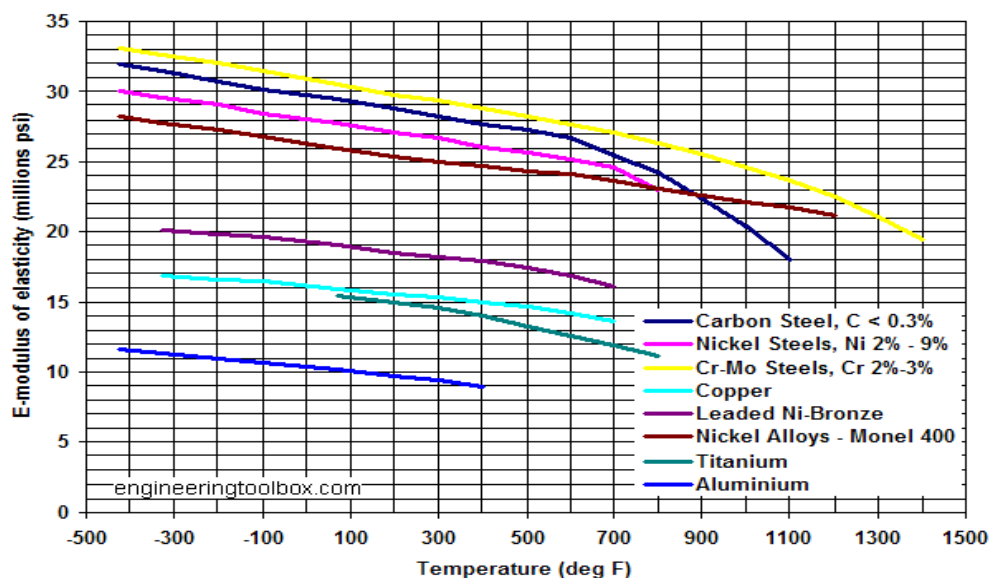


Υλικό	Μέτρο ελαστικότητας E ( $10^9 N/m^2, GPa$ )
Αλουμίνιο	69
Ασήμι	72.4
Ατσάλι	195
Γυαλί	50 - 90
Διαμάντι	1.050 - 1.200
Κράμα Τιτανίου	105 - 120
χρυσός	74.5
Σίδηρο	514
Μαγγάνιο	158
Μαγνήσιο	45
Μόλυβδος	310
Ξύλο	13
Πλατίνα	147
Πλουτόνιο	96.5
Πυρίτιο	110

Το μέτρο ελαστικότητας μεταβάλλεται σε σχέση με την θερμοκρασία. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται το μέτρο ελαστικότητας συναρτήσει της θερμοκρασίας για διάφορα υλικά. Οι μονάδα:

$$1 \text{ psi (lb/in}^2\text{)} = 6894.8 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$$

και η θερμοκρασία είναι σε βαθμούς Φάρεναϊτ (F).



## 1.2 Διάδοση εγκάρσιων (καμπτικών) κυμάτων σε ράβδο

Οι δονήσεις σε μία ράβδο μεταδίδονται με τον ίδιο τρόπο που μεταδίδονται και σε μία χορδή. Βέβαια στις ράβδους, η σχέση της συχνότητας με την τάση είναι λίγο πιο περίπλοκη. Στην πραγματικότητα οι ράβδοι ταλαντώνονται κάτω από μηδενική τάση, διότι οι ελαστικές δυνάμεις που ασκούνται μέσα στη ράβδο, παρέχουν την απαραίτητη δύναμη επαναφοράς.

Όταν μία ράβδος λυγίζει (π.χ. προς τα κάτω), το επάνω μέρος της διαστέλλεται και το κάτω συμπιέζεται. Στην μέση υπάρχει ο κεντρικός άξονας του οποίου το μήκος παραμένει αμετάβλητο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Ένα λεπτό νήμα, το οποίο εκτείνεται παράλληλα και σε απόσταση  $z$  από τον άξονα, συμπιέζεται κατά  $zd\varphi$ . Η παραμόρφωση που προκαλείται είναι ίση με,

$$EdSz \left( \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (1)$$

όπου  $dS$  η διατομή του νήματος και  $E$  το μέτρο ελαστικότητας του Young.

Η ροπή που ασκείται στο κέντρο του άξονα του νήματος είναι,

$$dM = \left[ EdSz \left( \frac{d\varphi}{dx} \right) \right] z$$

και η συνολική ροπή που συμπιέζει το νήμα είναι

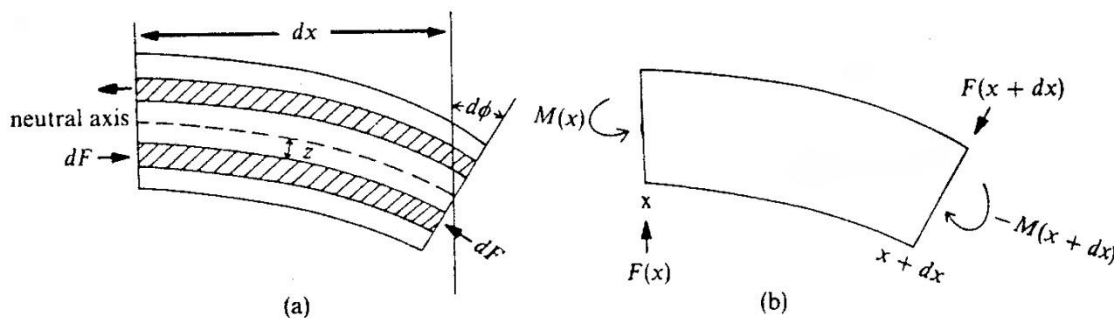
$$M = \int dM = E \frac{d\varphi}{dx} \int z^2 dS \quad (2)$$

Στους υπολογισμούς υπεισέρχεται και μία σταθερά (συμβολίζεται με  $K$ ), η οποία ονομάζεται *γυροσκοπική ακτίνα* και ισούται με:

$$K^2 = \frac{1}{S} \int z^2 dS \quad (3)$$

Όπου  $S = \int dS$  το συνολικό εμβαδόν διατομής της ράβδου. Οι σχέσεις που δίνουν τη γυροσκοπική ακτίνα για ορισμένους κοινούς τύπους διατομών, παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.



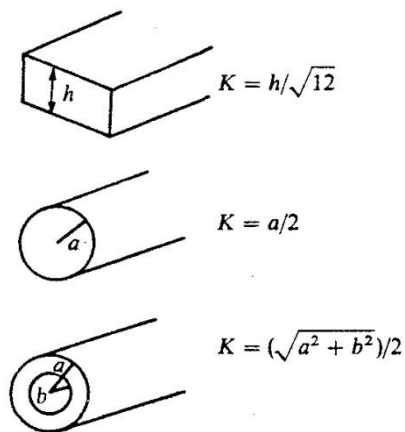


Σχήμα 1: (a) Καμπτική παραμόρφωση σε μεταλλική ράβδο. (b) Ροπή και διατμητικές δυνάμεις σε μεταλλική ράβδο.

Η συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο ισούται με,

$$M = E \frac{d\phi}{dx} SK^2 \cong -ESK^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4)$$

αφού  $d\phi \cong -(\partial^2 y / \partial x^2) dx$ , για μικρές γωνίες ( $d\phi$ ).



Σχήμα 2: Η γυροσκοπική ακτίνα για ορισμένους κοινούς τύπους διατομών

Η καμπτική δύναμη δεν είναι ίδια σε όλα τα μέρη της ράβδου. Για να διατηρηθεί η ισορροπία, εφαρμόζονται οι διατμητικές δυνάμεις  $F(x)$  και  $F(x + dx)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1(b).

$$F dx = (M + dM) - M = dM,$$

και

$$F = \frac{\partial M}{\partial x} = -ESK^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

Αλλά η διατμητική δύναμη  $F$  δεν είναι και αυτή σταθερή. Η συνισταμένη δύναμη  $dF = (\partial F/\partial x)dx$  προκαλεί επιτάχυνση κάθετη στον άξονα της ράβδου. Η εξίσωση της κίνησης είναι:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) dx &= (\rho S dx) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \\ -ESK^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &= \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{EK^2}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

Αυτή είναι μία διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης. Δεν είναι δυνατό να δομηθεί μία γενική λύση από οδεύοντα εγκάρσια κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα  $v$ , όπως στη περίπτωση των διαμηκών κυμάτων. Η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων εξαρτάται από τη συχνότητα, δηλαδή η ράβδος παρουσιάζει *διασπορά*.

Γράφουμε την μετατόπιση σαν μιγαδικό αριθμό,  $\tilde{y} = \tilde{Y}(x)e^{j\omega t}$ .

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = -\omega^2 \tilde{Y} e^{j\omega t} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 \tilde{Y}}{\partial x^4} e^{j\omega t}, \quad \text{άρα} \quad -\omega^2 \tilde{Y} = -\frac{EK^2}{\rho} \frac{\partial^4 \tilde{Y}}{\partial x^4}$$

ή

$$\frac{\partial^4 \tilde{Y}}{\partial x^4} = \frac{\rho \omega^2}{EK^4} \tilde{Y} = \frac{\omega^4}{v^4} \tilde{Y}$$

όπου  $v^2 = \omega K \sqrt{E/\rho} = \omega K c_L$ .

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του κύματος  $v(f)$  είναι ανάλογη της ρίζας της κυκλικής συχνότητας ( $\sqrt{\omega}$ ).

Θέτουμε τώρα:  $\tilde{Y}(x) = \tilde{A}e^{\gamma x}$  και αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \gamma^4 \tilde{A} e^{\gamma x} &= \frac{\omega^4}{v^4} \tilde{A} e^{\gamma x} \\ \gamma^2 &= \pm \frac{\omega^2}{v^2} = \pm k^2 \end{aligned} \quad (6)$$

ή

$$\gamma = \pm \frac{\omega}{v} = \pm k \quad \text{ή} \quad \pm j \frac{\omega}{v} = \pm j k \quad (7)$$

Έχουμε ορίσει τον κυματάριθμο σαν  $k = \omega/v$ . Η πλήρης λύση είναι το άθροισμα τεσσάρων όρων, όπου ο καθένας αντιστοιχεί σε μία από τις ρίζες της εξίσωσης (7).

$$\tilde{y}(x, t) = e^{j\omega t} (\tilde{A}e^{kx} + \tilde{B}e^{-kx} + \tilde{C}e^{jkx} + \tilde{D}e^{-jkx}). \quad (8)$$

Εφόσον  $e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x$  και  $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$ , ένας άλλος τρόπος για να γραφτεί η εξίσωση (8) είναι:

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \varphi) [A \cosh kx + B \sinh kx + C \cos kx + D \sin kx], \quad (9)$$

Όπου  $A, B, C$  και  $D$  σταθερές.

Εφόσον η εξίσωση της κίνησης είναι μία διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης, έχουμε τέσσερις ανεξάρτητες σταθερές. Επομένως χρειαζόμαστε τέσσερις συνοριακές συνθήκες (δύο σε κάθε άκρο), για τον προσδιορισμό των σταθερών.

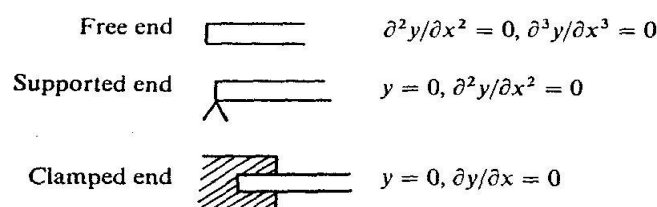
### 1.3 Μερικές περιπτώσεις στήριξης ράβδου

Τώρα θα περιγράψουμε για κάθε άκρο της ράβδου, τρεις διαφορετικές περιπτώσεις στήριξης: *ελεύθερο*, *πακτωμένο* και *απλά στηριγμένο*. Για κάθε μία περίπτωση και σε κάθε άκρο, θα έχουμε δύο συνοριακές συνθήκες.

Στην περίπτωση του *ελεύθερου* άκρου, δεν μπορεί να ασκηθεί δύναμη ροπής και διατμητική δύναμη, άρα η δεύτερη και η τρίτη παράγωγος είναι ίσες με το μηδέν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.

Στην περίπτωση του *απλά στηριγμένου* άκρου, η μετατόπιση  $y$  είναι μηδέν, και η καμπτική δύναμη (η δεύτερη παράγωγος του  $y$ ), είναι μηδέν.

Στην περίπτωση του *πακτωμένου* άκρου, η μετατόπιση  $y$  και η πρώτη παράγωγος της, είναι μηδέν.



Σχήμα 3: Τρεις διαφορετικές περιπτώσεις στήριξης ενός άκρου μίας ράβδου.

**Παράδειγμα 1:** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία ράβδο μήκους  $L$  που είναι ελεύθερη και στα δύο άκρα της. Οι συνοριακές συνθήκες στο σημείο  $x = 0$  είναι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 = k^2(A - C) \cos(\omega t + \varphi) \quad ,$$

και

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 = k^3(B - D) \cos(\omega t + \varphi)$$

από όπου προκύπτει ότι  $A = C$  και  $B = D$ , οπότε η γενική λύση [σχέση (9)] γίνεται:

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \varphi) [A(\cosh kx + \cos kx) + B(\sinh kx + \sin kx)] \quad (10)$$

Στο σημείο  $x = L$ , οι συνοριακές συνθήκες γίνονται:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 = \cos(\omega t + \varphi) k^2 [A(\cosh kL - \cos kL) + B(\sinh kL - \sin kL)] \quad ,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 = \cos(\omega t + \varphi) k^3 [A(\sinh kL + \sin kL) + B(\cosh kL - \cos kL)] .$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να έχουν κοινές λύσεις, μόνο για συγκεκριμένες τιμές της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ . Εξισώνοντας τις σχέσεις στις αγκύλες με το μηδέν και διαιρώντας την πρώτη με την δεύτερη, προκύπτει:

$$\frac{\cosh kL - \cos kL}{\sinh kL + \sin kL} = \frac{\sinh kL - \sin kL}{\cosh kL - \cos kL} .$$

Πολλαπλασιάζοντας χιαστί και γνωρίζοντας ότι

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \text{ έχουμε:}$$

$$\cosh^2 kL - 2 \cosh kL \cos kL + \cos^2 kL = \sinh^2 kL - \sin^2 kL ,$$

$$2 - 2 \cosh kL \cos kL = 0 ,$$

ή

$$\cosh kL = \frac{1}{\cos kL} \quad (11)$$

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης μπορούν να προκύψουν από τις γραφικές παραστάσεις αυτών των δύο τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ωστόσο αυτό δεν είναι αρκετά πρακτικό μιας και η γραφική παράσταση του υπερβολικού συνημίτονου αυξάνει εκθετικά. Μία εναλλακτική λύση είναι να κάνουμε χρήση των παρακάτω ταυτοτήτων:

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

και

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}$$

έτσι η σχέση (11) γίνεται

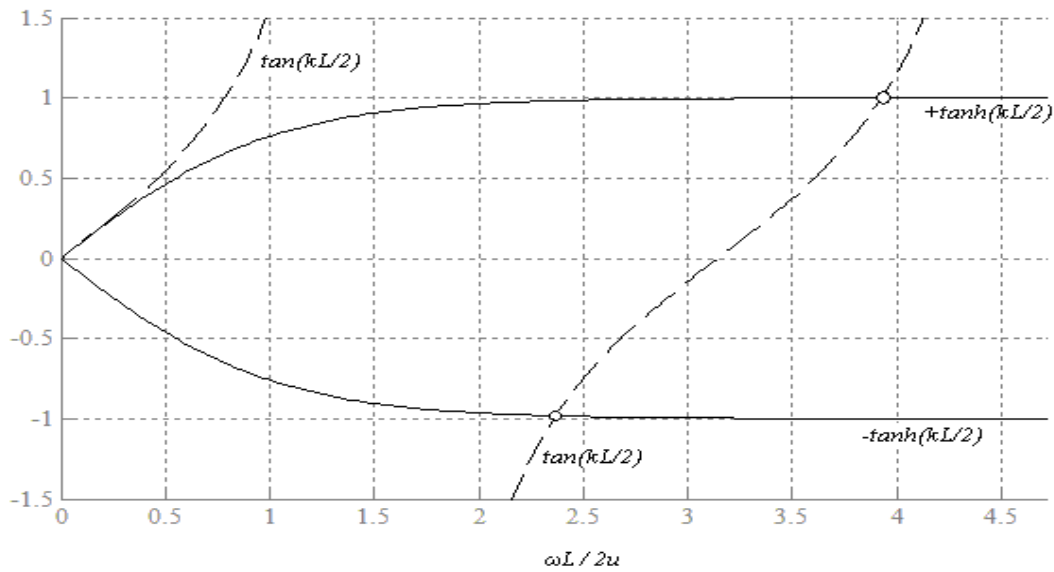
$$\tan(kL/2) = \pm \tanh(kL/2) . \quad (12)$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω εξίσωσης, φαίνεται στο Σχήμα (4) . Τα σημεία τομής των καμπλών μας δίνουν τις ρίζες  $\omega L/2v = \pi/4(3.011^2, 5^2, \dots)$ . Αλλά  $v^2 = \omega K \sqrt{E/\rho}$  όπως και  $\omega^2 = (v^2 \pi^2 / 4L^2)(3.011^2, 5^2, 7^2, \dots)$ , και οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν από τη σχέση

$$f_n = \frac{\pi K}{8L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} [3.011^2, 5^2, 7^2 \dots (2n + 1)^2]. \quad (13)$$

Οι συχνότητες και οι δεσμοί, για τους τέσσερις τρόπους ταλάντωσης της ράβδου, δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Frequency (Hz)	Wavelength (m)	Θέσεις δεσμών (m from end of 1-m bar)
$f_1 = 3.5607K/L^2 \sqrt{E/\rho}$	$1.330L$	0.224, 0.776
$2.756f_1$	$0.800L$	0.132, 0.500, 0.868
$5.404f_1$	$0.572L$	0.094, 0.356, 0.644, 0.906
$8.933f_1$	$0.445L$	0.073, 0.277, 0.500, 0.723, 0.927

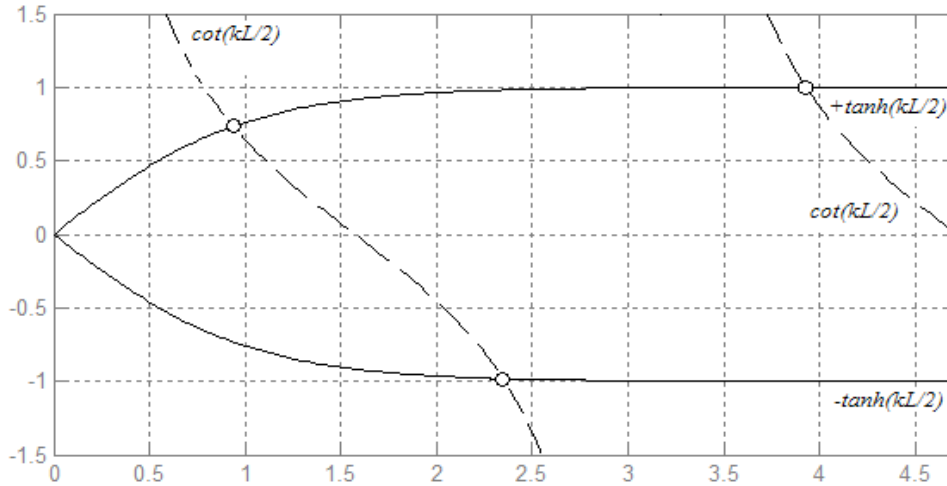


Σχήμα 4: Γραφική παράσταση της σχέσης (12).

**Παράδειγμα 2:** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία ράβδο μήκους  $L$ , πακτωμένη στο ένα άκρο  $x = 0$  και ελεύθερη στο άλλο άκρο  $x = L$ . Οι συνοριακές συνθήκες στο σημείο  $x = 0$  είναι  $A + C = 0 = B + D$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση που προκύπτει και μας δίνει τις τιμές των ριζών είναι

$$\cot(kL/2) = \pm \tanh(kL/2) \quad (14)$$

Οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν από το Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Γραφική παράσταση της σχέσης (14).

$$f_n = \frac{\pi K}{8L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} [1.194^2, 2.988^2, 5^2 \dots (2n - 1)^2]. \quad (15)$$

Η χαμηλότερη συχνότητα είναι  $f_1 = (0.5598K/L^2)\sqrt{E/\rho}$ , η οποία είναι περίπου το 1/6 της χαμηλότερης συχνότητας της ίδιας μπάρας στην περίπτωση ελεύθερου άκρου και στις δύο πλευρές. Οι ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν, σε σχέση με την πρώτη, είναι:  $f_2 = 6.267f_1$ ,  $f_3 = 17.55f_1$ ,  $f_4 = 35.39f_1$  κλπ.

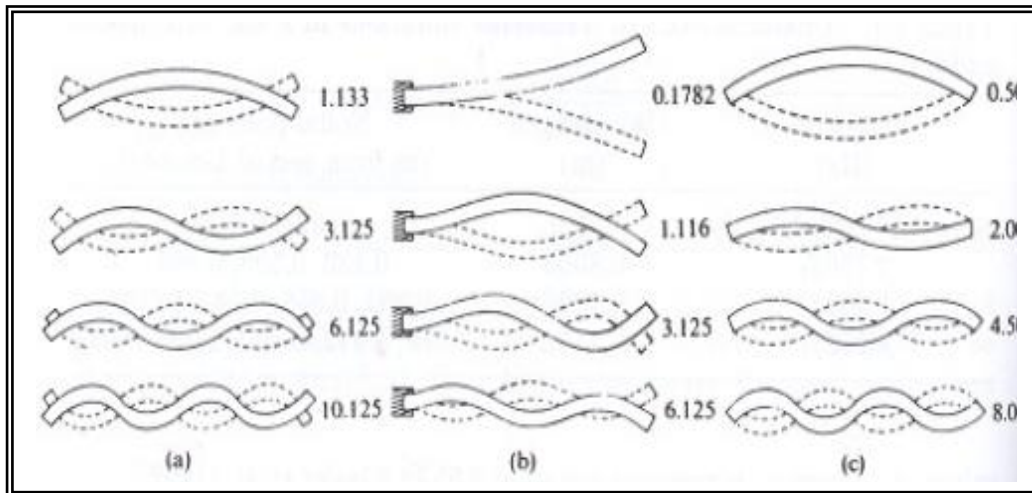
**Παράδειγμα 3:** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία ράβδο μήκους  $L$ , απλά στηριγμένη και στα 2 άκρα. Οι συχνότητες δίνονται από την παρακάτω σχέση.

$$f_n = \frac{\pi K}{8L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} m^2 \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Αυτές οι συχνότητες είναι αρκετά χαμηλότερες από αυτές που δίνονται από την σχέση (12), αφού τα μήκη κύματος είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα της περίπτωσης με τα ελεύθερα άκρα (όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6).

### 1.3.1 Τρόποι ταλάντωσης της ράβδου

Για κάθε μία από τις περιπτώσεις στήριξης που αναφέραμε παραπάνω, υπάρχει και ο αντίστοιχος τρόπος ταλάντωσης. Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται οι τέσσερις πρώτοι τρόποι ταλάντωσης για κάθε μία περίπτωση στήριξης.



Σχήμα 6. Βλέπουμε τους εγκάρσιους τρόπους ταλάντωσης για (a) στήριξη ράβδου ελεύθερη και στα δύο άκρα, (b) πακτωμένη στο ένα άκρο και (c) απλά στηριγμένη στα δύο της άκρα. Οι αριθμοί δίπλα από τον κάθε τρόπο είναι σχετικοί με τη συχνότητα. Για την ακρίβεια ισούται με  $\pi^2/8$ . Για να πάρουμε τις κανονικές συχνότητες αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον κάθε αριθμό με το  $(\pi K/L^2)\sqrt{E/\rho}$ .



## Κεφάλαιο 2

### 2.1 Πειραματικός εξοπλισμός

Για την εκτέλεση των πειραμάτων χρησιμοποιήθηκε ο εξής εξοπλισμός:

1 Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής (*Intel(R), Pentium(R) D CPU 3.40 GHz 3.42 GHz, 2.00 GB of RAM*) με το λειτουργικό σύστημα των *Windows XP*.

2. Η κάρτα συλλογής δεδομένων της *National Instruments 6062E*. Η *6062E* είναι μία κάρτα PCMCIA με αναλογικές εισόδους 16 SE/8 DI, ανάλυση εισόδου 12 bits, μέγιστη συχνότητα δειγματοληψίας 500 kS/s, ευαισθησία εισόδου  $\pm 0.05$  to  $\pm 10$  V, αναλογικές εξόδους 2, ανάλυση εξόδου 12 bits, output rate 850 kS/s ευαισθησία εξόδου  $\pm 10$  V, ψηφιακές εξόδους 8, counter timers 2.

3. Η επικοινωνία της *6062E* με τα σήματα εισόδου και εξόδου γίνονται μέσω της εξωτερικής κάρτας υποδοχής εισόδων-εξόδων *SCC-68* της *National Instruments*.

4. Η *SCC-68* έχει τέσσερις υποδοχές για εξωτερικές κάρτες εισόδου. Σε αυτές συνδέθηκαν οι *SCC-ACC01* κάρτες εισόδου για ενεργά επιταχυνσιόμετρα. Η *SCC-ACC01* περνάει το σήμα μέσα από ένα 0.8 Hz highpass filter, το ενισχύει και έπειτα το δρομολογεί μέσα από ένα 19 kHz lowpass Bessel filter και σε ένα buffer εξόδου. Επίσης έχει ένα σταθερό gain 2 ώστε το μέγιστο σήμα εισόδου να είναι  $\pm 5$  V. Η *SCC-ACC01* επίσης παρέχει ένα συνεχές ρεύμα της τάξης των 4 mA για την διέγερση του επιταχυνσιόμετρου.

5. Ο ενισχυτής και 'conditioner' για τα επιταχυνσιόμετρα της *PCB PIEZOTRONOCIS<sup>INC.</sup> 482A16*.

6. Το επιταχυνσιόμετρο της *Endevco, 35A*. Το *35A* είναι ένα ενεργό επιταχυνσιόμετρο τριών αξόνων, με ευαισθησία  $x = 5.097$  mV/g,  $y = 4.807$  mV/g,  $z = 5.205$  mV/g.

7. Το κρουστικό σφυράκι *2321* της *Endevco*, με ευαισθησία  $185 \times 10^{-4}$  Volt/Newton.

8. Την γεννήτρια συχνοτήτων *HM 8030-5*.

9. Τον αναλογικό παλμογράφο *HM 303-6*.

10. Τον ενισχυτή *2718* της *Bruel & Kjaer*.

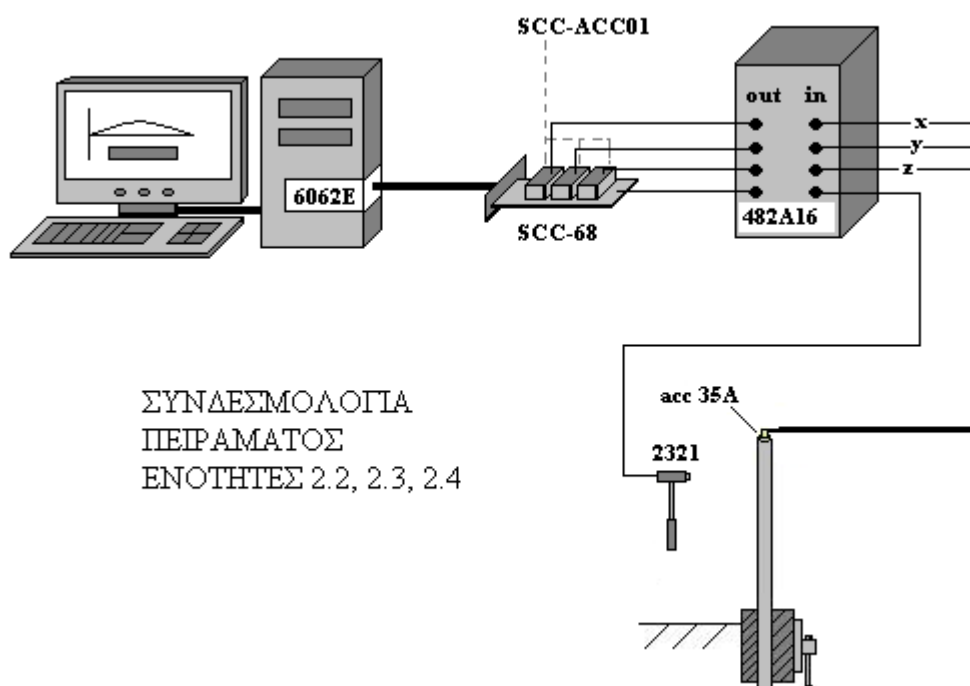
ο οποίος έχει κατασκευαστεί για να οδηγεί μικρούς διεγέρτες.

11. Τον διεγέρτη (mini-shaker) *4810* της *Bruel & Kjaer*.

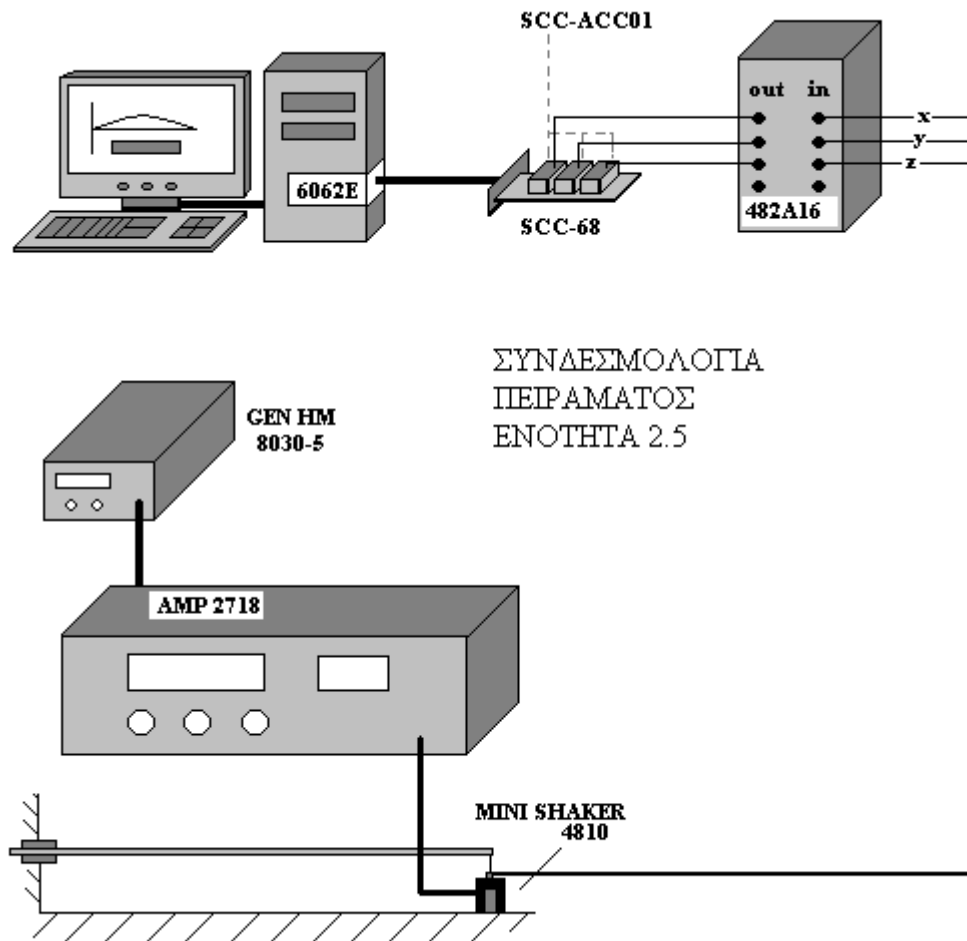
Το λειτουργικό που χρησιμοποιήθηκε για την καταγραφή και την επεξεργασία του σήματος καθώς και τα διαγράμματα του σήματος συναρτήσει του χρόνου, είναι το Sound and Vibration Assistant της National Instruments. Τα υπόλοιπα διαγράμματα που παρουσιάζονται έχουν γίνει στο Microsoft Office Excel 2007 με την χρήση της επιλογής 'Export to Excel' του Sound & Vibration Assistant. Οι θεωρητικοί υπολογισμοί των ιδιοσυχνοτήτων καθώς και ο υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας πραγματοποιήθηκε σε περιβάλλον MATLAB.

Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζονται οι συνδεσμολογίες για τις πειραματικές διαδικασίες.

Στο πρώτο σχήμα βλέπουμε τα σήματα που βγαίνουν από το κρουστικό σφυρί και το επιταχυνσιόμετρο και ακολουθούν την πορεία των συσκευών που απεικονίζονται, μέχρι τον υπολογιστή, που καταγράφονται.



Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η ροή του σήματος της γεννήτριας που μέσω του ενισχυτή οδηγεί τον διεγέρτη, καθώς και το σήμα του επιταχυνσιόμετρου που καταλήγει στον υπολογιστή.

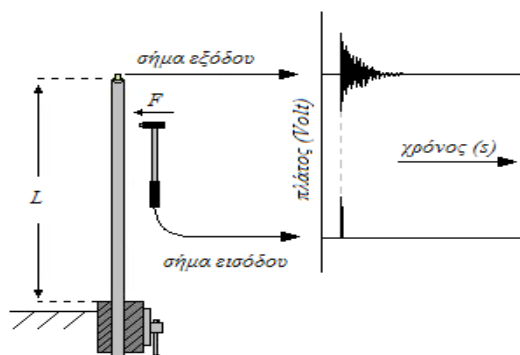


## 2.2 Κρουστική διέγερση κυλινδρικής ράβδου

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά μίας κυλινδρικής ράβδου μετά από κρουστική διέγερση. Όταν λέμε συμπεριφορά εννοούμε τους τρόπους με τους οποίους ταλαντώνεται η ράβδος, τις ιδιοσυχνότητες και το πλάτος της ταλάντωσης συγκριτικά με τη δύναμη που ασκήσαμε. Θα μελετήσουμε επίσης την επιτάχυνση που προκαλείται στη ράβδο, καθώς και το χρόνο απόσβεσης της ταλάντωσης. Καλό είναι να κάνουμε μία αναφορά στα σήματα που θα προκύψουν.

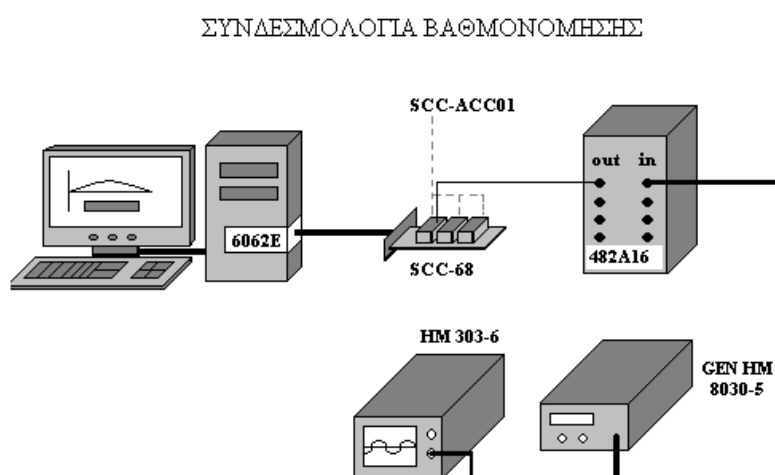
Στο πείραμα της διέγερσης της ράβδου με κρούση έχουμε δύο σήματα. Το σήμα που βγάζει στην έξοδο του το κρουστικό σφυρί θα το ονομάσουμε σήμα εισόδου και το σήμα που βγάζει στην έξοδο του το επιταχυνσιόμετρο (που είναι στερεωμένο στην ράβδο), θα το ονομάσουμε σήμα εξόδου. Το σήμα εισόδου μοιάζει με παλμό και περιλαμβάνει μία ευρεία φασματική περιοχή με περίπου ίδια ενέργεια ανά οκτάβα. Το σήμα εξόδου αναπαριστά την ταλάντωση της ράβδου στο χρόνο έπειτα από την κρουστική διέγερση. Μέσω της ανάλυσής του σήματος εξόδου, μπορούμε να διακρίνουμε χαρακτηριστικά τα οποία μας δίνουν στοιχεία για την ράβδο. Συγκεκριμένα, η διέγερση που προκαλεί το χτύπημα, τροποποιείται από το υλικό και στην έξοδο προκύπτει το τροποποιημένο σήμα. Εφόσον το σήμα της εισόδου περιλαμβάνει μία ευρεία φασματική περιοχή, το χτύπημα θα διεγείρει τη ράβδο στην αντίστοιχη συχνοτική περιοχή. Όμως το κάθε σώμα, ανάλογα με το υλικό, την πυκνότητά, το μέτρο ελαστικότητας του, το σχήμα του και άλλα χαρακτηριστικά, ταλαντώνεται με συγκεκριμένους τρόπους. Έτσι το πλάτος της ταλάντωσης μεγιστοποιείται μόνο για τις ιδιοσυχνότητες του υλικού. Άρα το σήμα που θα πάρουμε στην έξοδο του συστήματος (σήμα εξόδου), θα μας δώσει τις ιδιοσυχνότητες του υλικού που αντιστοιχούν στον κάθε τρόπο ταλάντωσης του.

Για το συγκεκριμένο πείραμα χρησιμοποιήσαμε το επιταχυνσιόμετρο 35A της *Endevco* και για κρουστικό σφυρί το 2321 της ίδιας εταιρίας. Η ράβδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν μεταλλική, κυλινδρική, ακτίνας  $a = 5 \text{ mm}$ , μήκους  $x = 0.841 \text{ m}$  και μάζας  $m = 0.520 \text{ Kg}$ . Έπειτα υπολογίσθηκε η πυκνότητα της ράβδου  $\rho = 7872.6 \text{ kg/m}^3$ . Στερεώσαμε με μία μέγγενη σταθερά το ένα άκρο της ( $x = 0$ ) και στο άλλο προσαρμόσαμε το επιταχυνσιόμετρο ( $x = L$ ). Με αρχή το σημείο στήριξης, έχουμε  $L = 0.709 \text{ m}$ .



## Βαθμονόμηση

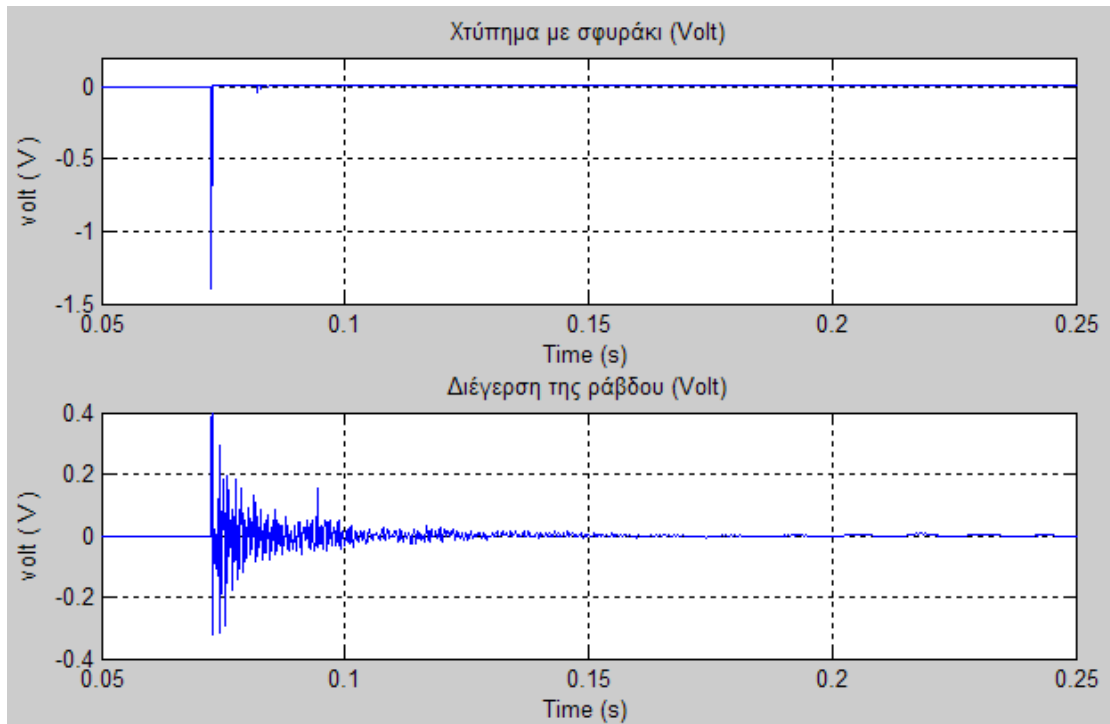
Για να βεβαιωθούμε ότι η τιμή της τάσης που εμφανίζεται στην έξοδο του H/Y, είναι ίση με αυτή που εφαρμόζεται στην είσοδο του conditioner, δηλαδή ίση με τη πραγματική έξοδο του επιταχυνσιόμετρου, χρησιμοποιήσαμε μία γεννήτρια συχνοτήτων και έναν παλμογράφο και τροφοδοτήσαμε τον H/Y (μέσω της αλυσίδας των συσκευών που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα), με ρεύμα τάσης 20 mV (περίπου ίσο με 4 g σε σχέση με την ευαισθησία του επιταχυνσιόμετρου). Η τάση που εμφανίστηκε στην οθόνη του παλμογράφου ήταν ίση με αυτήν που εμφανίστηκε στην οθόνη του υπολογιστή. Έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η βαθμονόμηση πραγματοποιήθηκε με επιτυχία.



Έπειτα προχωρήσαμε στην πειραματική διαδικασία. Οι αρχικές ρυθμίσεις του προγράμματος για καταγραφή του σήματος, είναι οι εξής:

*Signal input from: Acceleration SCC1 Mod2\_ai0*  
*Signal input Range ( max 5 – min( -5))*  
*Scaled Units (V)*  
*Acquisition mode (Continuous Samples)*  
*Samples to read (1k)*  
*Rate (Hz)\_10k*

Χτυπήσαμε μία φορά τη ράβδο και καταγράψαμε τα σήματα εισόδου και εξόδου. Έπειτα εισάγαμε τα σήματα στο Matlab για την επεξεργασία τους. Στο πρώτο διάγραμμα εμφανίζονται τα σήματα εισόδου και εξόδου σε Volt (V) συναρτήσει του χρόνου (s).

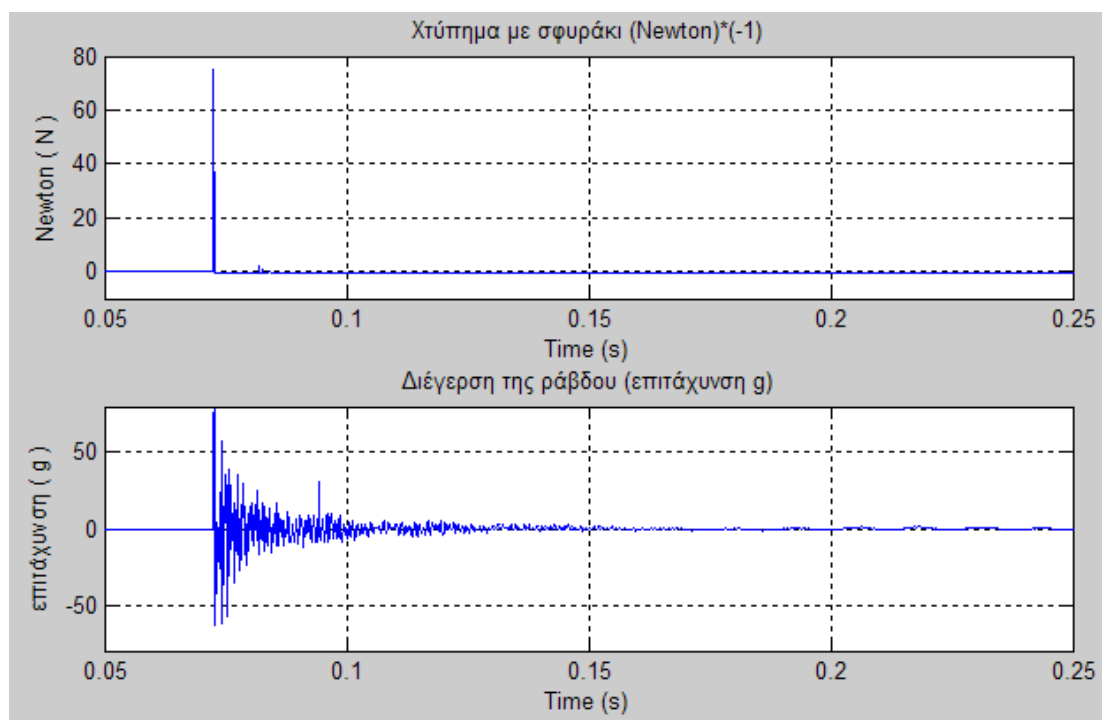


Παρατηρούμε από το διάγραμμα, τον παλμό που προήλθε από την κρούση (σήμα εισόδου) ο οποίος δεν έχει μεγάλη χρονική διάρκεια, καθώς και την ταλάντωση της ράβδου (σήμα εξόδου), η οποία διαρκεί περίπου 0.2 s. Βέβαια η ταλάντωση συνεχίζεται με πολύ μικρό πλάτος και μετά τα 0.2 s, άλλα για την αναλυτικότερη απεικόνιση της θεωρήσαμε σωστό να επιλέξουμε αυτό το χρονικό κομμάτι. Ωστόσο μπορούμε να κάνουμε μία σύντομη ανάλυση της απόσβεσης της ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0.0725$  s ξεκινά να αυξάνεται το πλάτος της ταλάντωσης, όπου παίρνει την μέγιστη τιμή του μετά από 0.0002 s, τη χρονική  $t_1 = 0.0727$  s, με  $V = 0.0398$  V. Το πλάτος πέφτει στο 5% της μέγιστης τιμής του τη χρονική στιγμή  $t_2 = 0.12$  s, δηλαδή μετά από 0.0473 s και στο 1% την χρονική στιγμή 0.23 s δηλαδή μετά από 0.1573 s από τη στιγμή  $t_1$ . Δηλαδή η ταλάντωση διήρκησε περίπου 0.23 s μέχρι να πέσει το πλάτος της στο 1%.

Επίσης παρατηρούμε, πρώτα στο σήμα εισόδου, έναν δεύτερο παλμό περίπου 0.01 s μετά τον πρώτο (πολύ μικρότερο από αυτόν), ο οποίος οφείλεται στην αναπήδηση του σφυριού που τυχόν επήλθε κατά την κρούση. Αυτό το σφάλμα έχει αντίκτυπο και στο σήμα εξόδου. Παρατηρούμε ότι, στο χρονικό διάστημα στο οποίο φθίνει η ταλάντωση της ράβδου, εμφανίζεται μία κορυφή με μία μικρή καθυστέρηση συγκριτικά με τον δεύτερο παλμό.

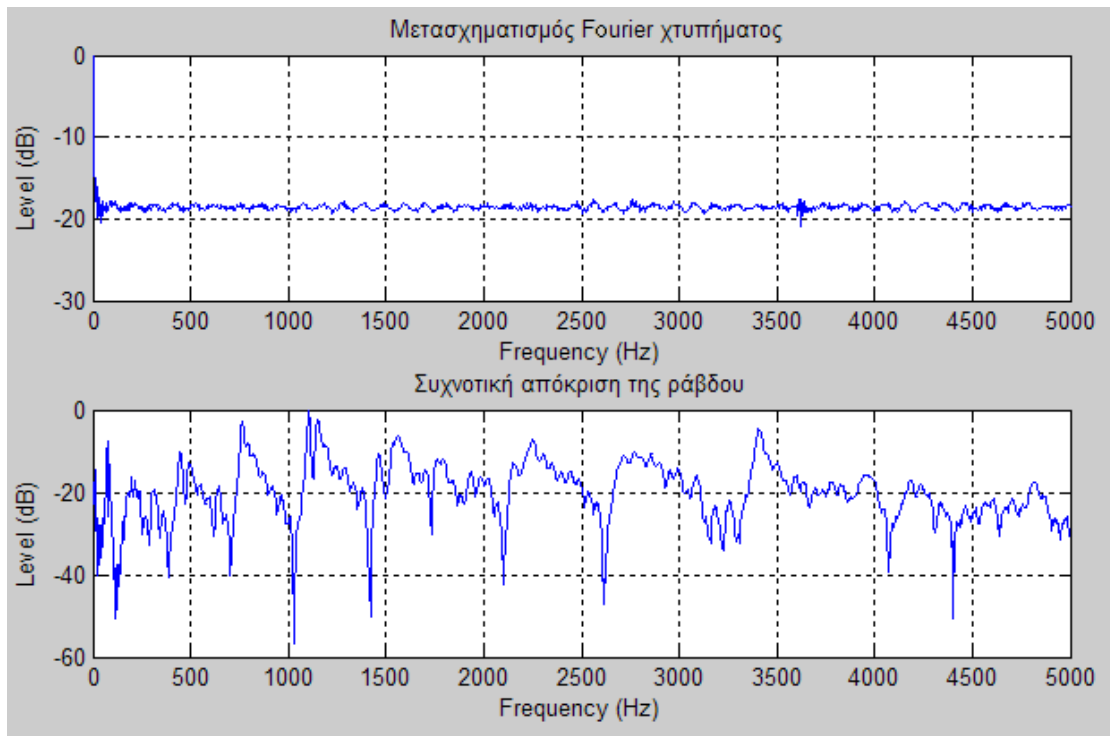
Στο επόμενο διάγραμμα λάβαμε υπόψη τα χαρακτηριστικά του επιταχυνσιόμετρου και του σφυριού και δημιουργήσαμε τα διαγράμματα εισόδου και εξόδου, σε μονάδες Newton και g, αντίστοιχα. Αυτό μας βοηθάει να έχουμε μία εικόνα του φυσικού μεγέθους που λαμβάνει χώρα στο σύστημα που μελετάμε.

Ο άξονας του επιταχυνσιόμετρου που καταγράψαμε την ταλάντωση, έχει ευαισθησία  $5097 \times 10^{-6} V/g$ . Επομένως διαιρέσαμε τις τιμές του σήματος με την ευαισθησία του συγκεκριμένου άξονα του επιταχυνσιόμετρου για να προκύψει η επιτάχυνση σε μονάδες, g. Το ίδιο κάναμε και με το σφυράκι του οποίου η ευαισθησία είναι  $185 \times 10^{-4} V/N$ . Επίσης πολλαπλασιάσαμε το σήμα εισόδου με το (-1) για να πάρουμε τις θετικές τιμές της δύναμης.



Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι ένα χτύπημα δύναμης 75 Newton προκάλεσε στην ράβδο μέγιστη επιτάχυνση 78 g. Ωστόσο η ταλάντωση σε μία κυλινδρική ράβδο, εναλλάσσεται μεταξύ των δύο αξόνων του επιπέδου στο οποίο ταλαντώνεται. Οπότε, αν εξαιρέσουμε το χρονικό σημείο της κρούσης όπου το διάνυσμα του χτυπήματος ταυτίζεται με τον άξονα της κίνησης της ράβδου, δεν μπορούμε να έχουμε μία πλήρη αναπαράσταση της ταλάντωσης της ράβδου από το σήμα του ενός άξονα, αφού η ράβδος ταλαντώνεται σε ένα επίπεδο. Στην επόμενη ενότητα θα δώσουμε μία πλήρη εικόνα της ταλάντωσης της κυλινδρικής ράβδου χρησιμοποιώντας και τους δύο άξονες.

Έπειτα κάναμε μετασχηματισμό Fourier στα σήματα για να έχουμε μία εικόνα των ιδιοσυχνοτήτων της ράβδου καθώς και του φάσματος του παλμού.



Από τον μετασχηματισμό Fourier παρατηρούμε το αναμενόμενο φάσμα *εισόδου* και τις συχνότητες στις οποίες ταλαντώνεται η ράβδος κάποιες εκ των οποίων είναι οι ιδιοσυχνότητες που αντιστοιχούν στους τρόπους ταλάντωσης ενώ κάποιες άλλες αντιστοιχούν στους διαμήκεις τρόπους. Εδώ είναι χρήσιμο να αναφέρουμε ότι όλα τα επιταχυνσιόμετρα λαμβάνουν και την κάθετη στον άξονά τους ταλάντωση σε ένα ποσοστό έως και 10%. Αυτή η απώλεια είναι αναπόφευκτη και οι μέθοδοι για να εξακριβώσουμε ποιές ιδιοσυχνότητες αντιστοιχούν στον εγκάρσιο τρόπο ταλάντωσης είναι δύο:

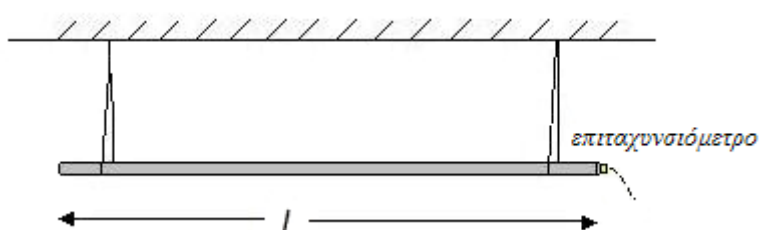
1. Να τοποθετήσουμε ένα επιπλέον επιταχυνσιόμετρο στον άξονα των διαμηκών κυμάτων και αφού καταγράψουμε τα σήματα εγκάρσιων και διαμηκών κυμάτων και κάνοντας μετασχηματισμό Fourier, να αφαιρέσουμε τις συχνότητες που θα προκύψουν.
2. Να υπολογίσουμε θεωρητικά τις ιδιοσυχνότητες του συγκεκριμένου υλικού και να επιλέξουμε κατά προσέγγιση από το σήμα μας τις συχνότητες που αντιστοιχούν στις θεωρητικές.

(Ωστόσο με τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων της ράβδου θα ασχοληθούμε σχολαστικά σε επόμενη ενότητα).



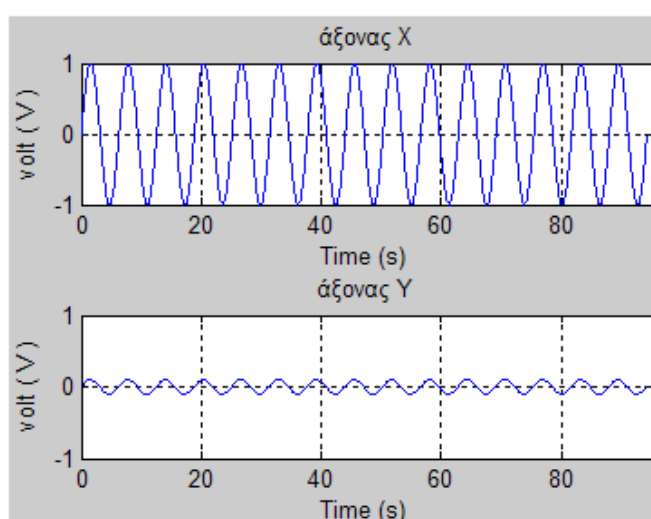
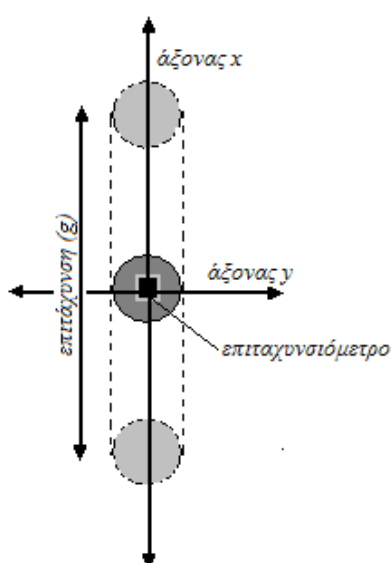
### 2.3 Μέτρηση ταλάντωσης κυλινδρικής ράβδου και στους τρεις άξονες

Για την κατανόηση της συμπεριφοράς και του τρόπου με τον οποίο ταλαντώνεται μία ράβδος, θα πρέπει να εξετάσουμε την κίνησή της και στους τρεις άξονες. Για αυτό το πείραμα επιλέξαμε την περίπτωση όπου η ράβδος είναι ελεύθερη και στα δύο άκρα της. Έτσι κερδίσαμε και έναν βαθμό ελευθερίας στον άξονα που εκτείνεται παράλληλα με την ράβδο, χωρίς ωστόσο να ασχοληθούμε διεξοδικά με τα διαμήκη κύματα. Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται ο τρόπος στήριξης της ράβδου. Η ράβδος στηρίζεται σε δύο λάστιχα και το επιταχυνσιόμετρο είναι προσαρμοσμένο στην άκρη της ράβδου (όπως φαίνεται στο σχήμα).

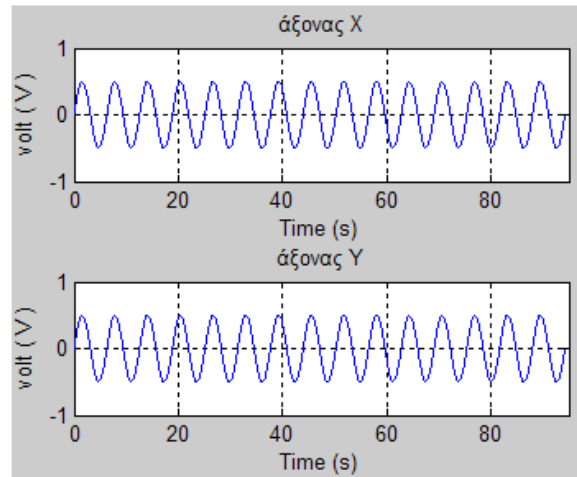
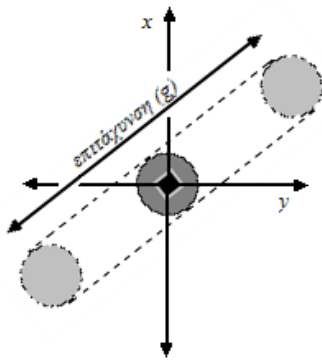


Πριν προχωρήσουμε στην πειραματική διαδικασία θα δούμε ένα θεωρητικό μοντέλο του σήματος εξόδου σχετικά με τον εγκάρσιο τρόπο ταλάντωσης της ράβδου, για τους δύο άξονες ( $x$ ,  $y$ ) των οποίων το επίπεδο είναι κάθετο στο μήκος  $L$  της ράβδου. Θεωρούμε ότι η ράβδος κάνει μία τέλεια ημιτονοειδή ταλάντωση και έχουμε απώλεια της τάξης του 10% σε κάθε άξονα για την κάθετη σ' αυτόν ταλάντωση.

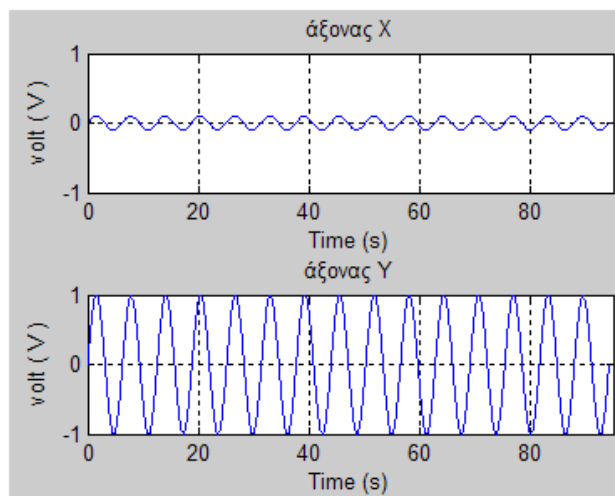
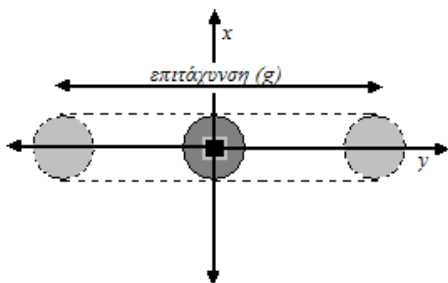
Εδώ βλέπουμε το σήμα που προκύπτει από την ταλάντωση της ράβδου κατά μήκος του άξονα  $x$ .



Εδώ βλέπουμε το σήμα που προκύπτει από την ταλάντωση της ράβδου κατά μήκος της γωνίας  $\pi/4$  σε σχέση με τους άξονες  $x, y$ .



Και τέλος παρατηρούμε το σήμα που προκύπτει απ την ταλάντωση της ράβδου στον άξονα  $y$ .

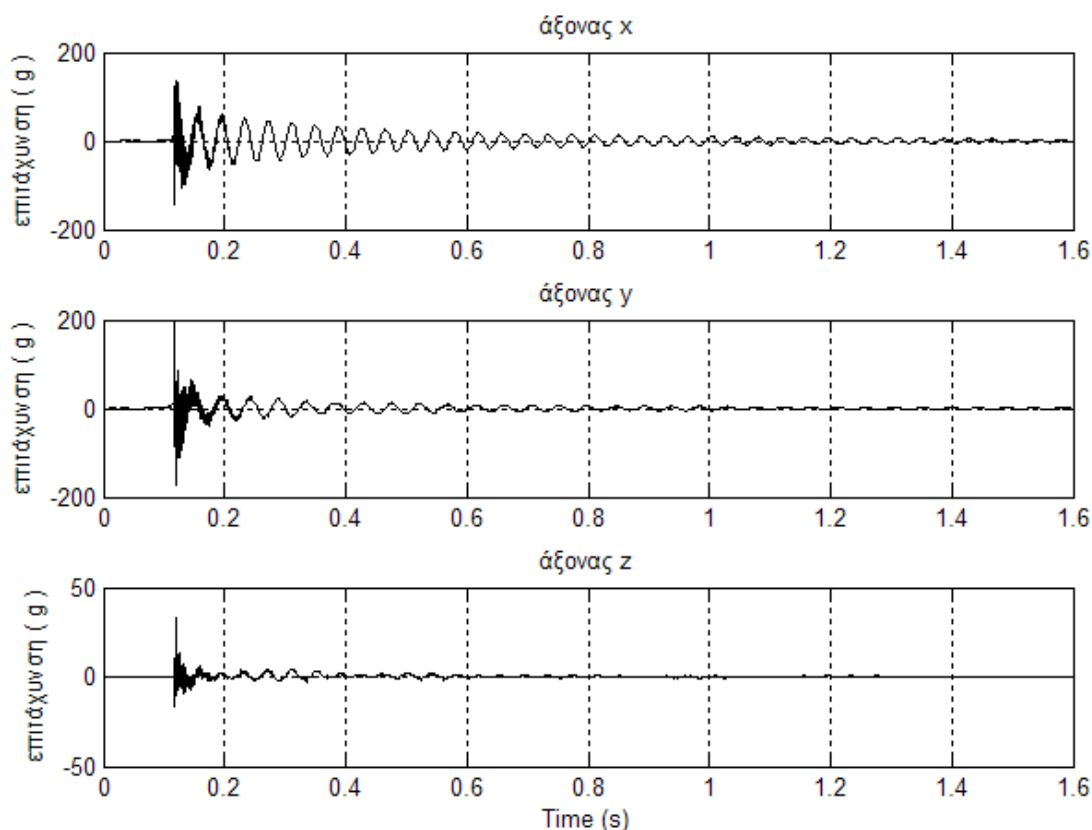


Τα παραπάνω σχήματα είναι ένα θεωρητικό μοντέλο για να κατανοήσουμε την έξοδο του επιταχυνσιόμετρου σε σχέση με την κίνηση της ράβδου. Στην πραγματικότητα η ράβδος ταλαντώνεται στο επίπεδο με ακανόνιστη πορεία (στα πλαίσια της ταλάντωσης πάντα) και πολλές φορές ξεφεύγει και από το σημείο 'μηδέν' όπου είναι η θέση ισορροπίας της.

Εφόσον ξεκαθαρίσαμε τον τρόπο με τον οποίο ανταποκρίνεται το επιταχυνσιόμετρο στο επίπεδο της διατομής της ράβδου, μπορούμε να προχωρήσουμε στο πείραμα, στο οποίο θα λάβουμε υπόψη και την διαμήκη ταλάντωση της ράβδου.

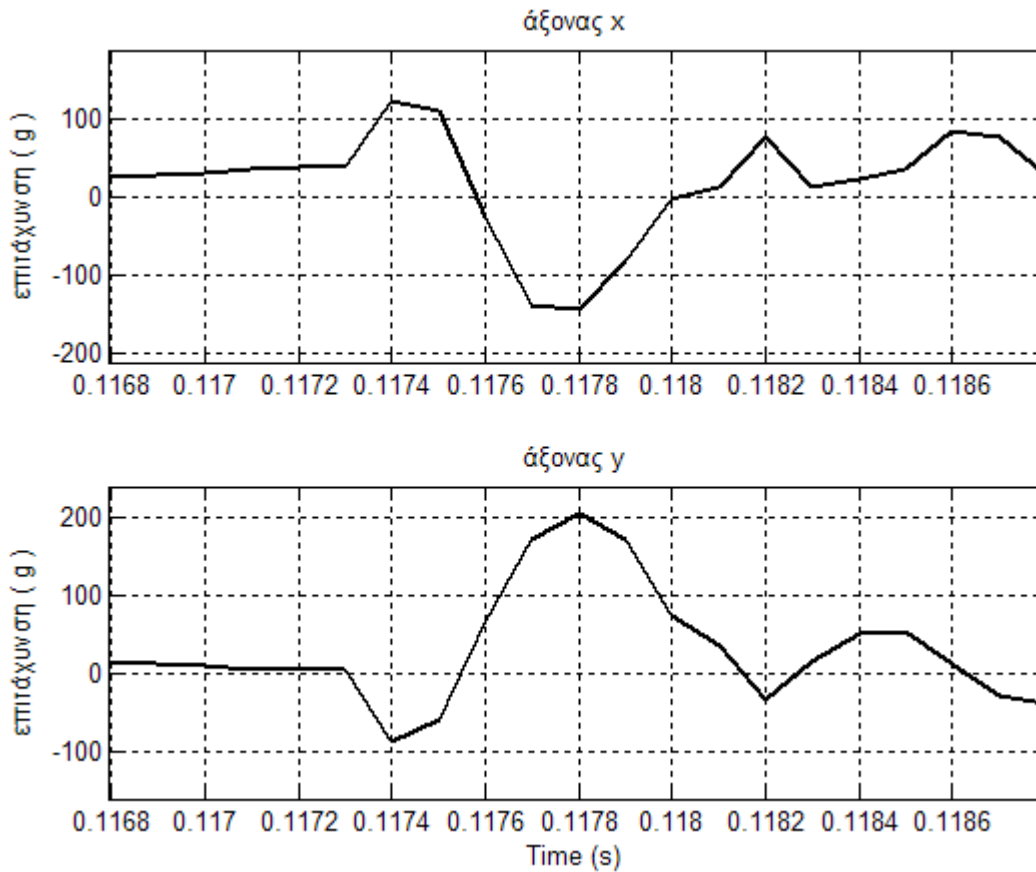
Χτυπήσαμε την ράβδο με το σφυράκι, κάθετα στον άξονα της σε ένα σημείο 3-5 mm από την μία της άκρη (στην οποία είναι στερεωμένο το επιταχυνσιόμετρο) και καταγράψαμε τα σήματα x, y, z του επιταχυνσιόμετρου. Έπειτα με την ενδεικτική από τον κατασκευαστή τιμή ευαισθησίας για τον κάθε άξονα, μετατρέψαμε την τάση σε μονάδες επιτάχυνσης, g.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα σήματα της εξόδου του επιταχυνσιόμετρου και για τους τρεις άξονες που προκύπτουν από κρουστική διέγερση κάθετη στον άξονα της ράβδου.

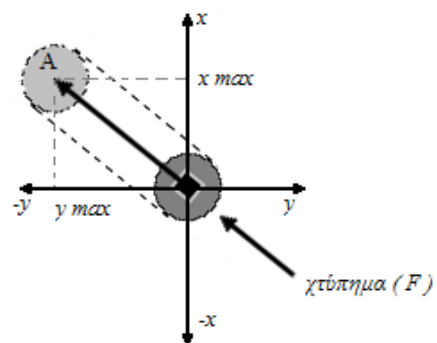


Από τα σήματα παρατηρούμε ότι το σήμα που αντιστοιχεί στον άξονα x μοιάζει με μία φθίνουσα ημιτονοειδή ταλάντωση. Παρόμοιο είναι και το σήμα του άξονα y, μόνο που βλέπουμε να έχει ένα μέγιστο στην αρχή της διέγερσης, μεγαλύτερο από αυτό του x και έπειτα το πλάτος της ταλάντωσής του μειώνεται απότομα. Το σήμα του άξονα z είναι όπως περιμέναμε. Έχει πολύ μικρότερο πλάτος από τους άλλους δύο και στη συνέχεια ταλαντώνεται με μη περιοδικά εναλλασσόμενο πλάτος.

Θα ήταν καλό να μπορούσαμε να διαπιστώσουμε από τα σήματα από ποιά πλευρά προήλθε το χτύπημα στη ράβδο, αφού η δυνατή ατάκα κατά τον άξονα y σε συνδυασμό με το μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης του άξονα x μας γεννά αυτή την απορία. Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε τη χρονική περιοχή της αρχής της διέγερσης ( $t_0 = 0.1173$  s) κατά τους δύο άξονες x, y.

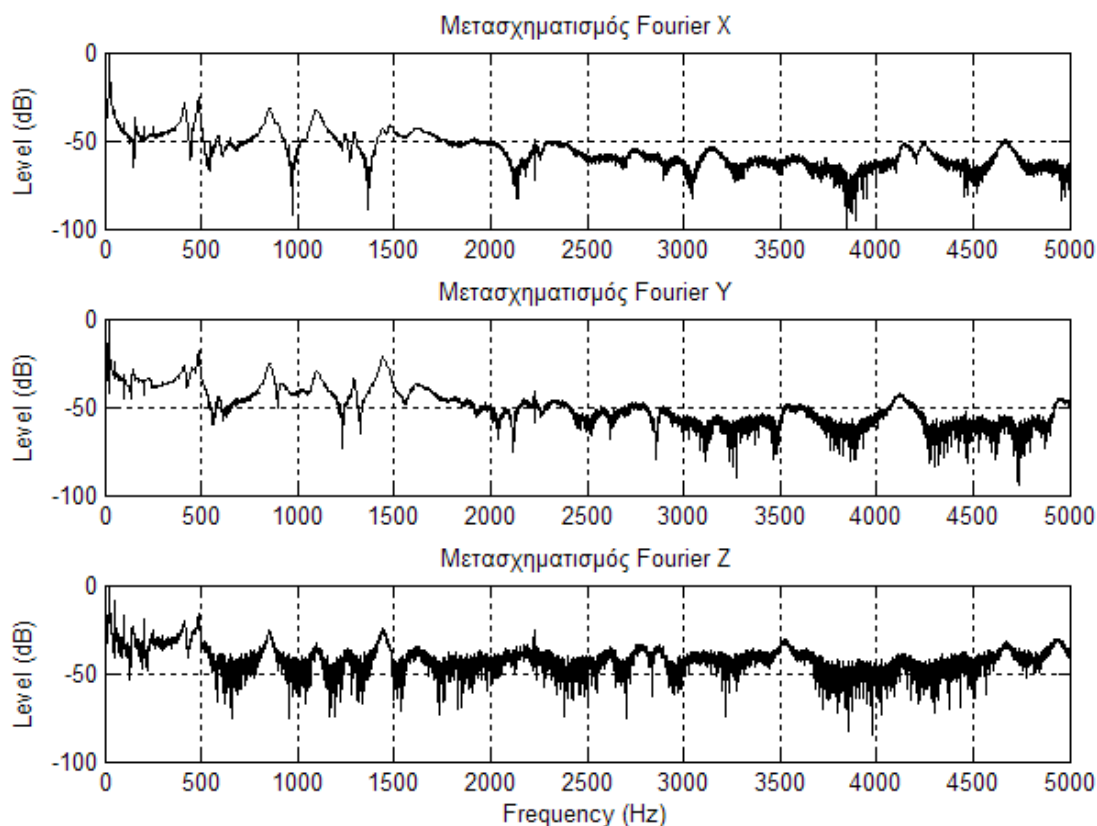


Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή που η ράβδος αρχίζει να επιταχύνει προς την θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$ , ξεκινά να διαγράφει πανομοιότυπη πορεία με παρόμοιο πλάτος προς την αρνητική πλευρά του άξονα  $y$ . Δηλαδή βλέπουμε δύο περίπου ίδια σήματα με διαφορά φάσης  $180^\circ$ . Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η ράβδος διαγράφει τροχιά ταλάντωσης κατά μήκος της διχοτόμου γωνίας των αξόνων  $x, -y$ . Άρα το χτύπημα προήλθε από το  $-x, y$ . Επίσης συμπεραίνουμε ότι το σήμα που καταγράψαμε για τον κάθε άξονα ( $x, y$ ) ξεχωριστά, δεν αναπαριστά από μόνο του το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης αλλά ένα μέρος αυτής. Δηλαδή, αν στον άξονα ( $x, y$ ) φέρουμε τις κάθετες στα μέγιστα των σημάτων  $x, y$ , τότε το σημείο τομής  $A$  των καθέτων με την αρχή των αξόνων  $O$  (αρχική θέση ράβδου), είναι το διάστημα που αναπαριστά το σήμα της μέγιστης ταλάντωσης.



Όπως είχαμε αναφέρει στην προηγούμενη ενότητα, θα προσπαθήσουμε μέσα από το συχνοτικό φάσμα που προκύπτει από το σήμα και των τριών αξόνων, να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις συχνότητες που προκλήθηκαν από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των εγκάρσιων και των διαμηκών κυμάτων.

Στα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε τον μετασχηματισμό Fourier για τους τρεις άξονες.



Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι οι περισσότερες συχνότητες που διακρίνονται με μεγάλο πλάτος (π.χ. 414 Hz, 487 Hz, 854 Hz κ.λπ.) εμφανίζονται και στους τρεις άξονες. Έτσι δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα μόνο από τα διαγράμματα συχνοτήτων, όσον αφορά τον διαχωρισμό των ιδιοσυχνοτήτων από την εγκάρσια και την διαμήκη ταλάντωση. Τα διαγράμματα θα μας ήταν πολύ πιο χρήσιμα εάν γνωρίζαμε κατά προσέγγιση τις ιδιοσυχνότητες που αντιστοιχούν στον κάθε τρόπο ταλάντωσης. Αυτό θα το δούμε στην επόμενη ενότητα, όπου μέσα από την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε και το μέτρο ελαστικότητας του Young.

## 2.4 Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας του Young - Τρεις τρόποι στήριξης.

Για τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων που προκύπτουν από την κρουστική διέγερση της ράβδου, θα χρησιμοποιηθεί η κυματομορφή (τάση σε Volt) από το επιταχυνσιόμετρο σαν συνάρτηση του χρόνου. Έπειτα με μετασχηματισμό Fourier θα καταγραφούν οι ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν. Σε αυτό το βήμα δεν μας απασχολεί το πλάτος της ταλάντωσης (σε μονάδες Volt, g ή  $m/s^2$ ).

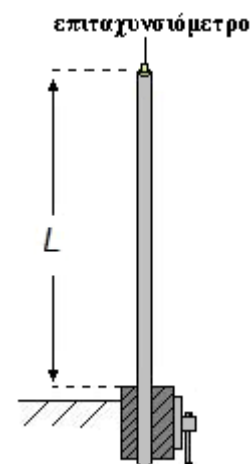
Για το πείραμα χρησιμοποιήθηκε μία μεταλλική κυλινδρική ράβδος ακτίνας  $a = 5 \text{ mm}$ , μήκους  $L = 0.841 \text{ m}$ , βάρους  $m = 0.520 \text{ kg}$  και πυκνότητας  $\rho = 7872.6 \text{ kg/m}^3$ .

Το επιταχυνσιόμετρο που επιλέχθηκε για την πειραματική διαδικασία είναι το μοντέλο 35A της Endevco. Για τις μετρήσεις χρησιμοποιήθηκαν κατά περίπτωση και οι τρεις άξονες του επιταχυνσιόμετρου. Το σφυράκι που χρησιμοποιήθηκε για τη διέγερση της ράβδου είναι το μοντέλο 2321 της Endevco. Η θερμοκρασία του χώρου όπου πραγματοποιήθηκε η πειραματική διαδικασία ήταν από 19 έως 23 βαθμούς Κελσίου.

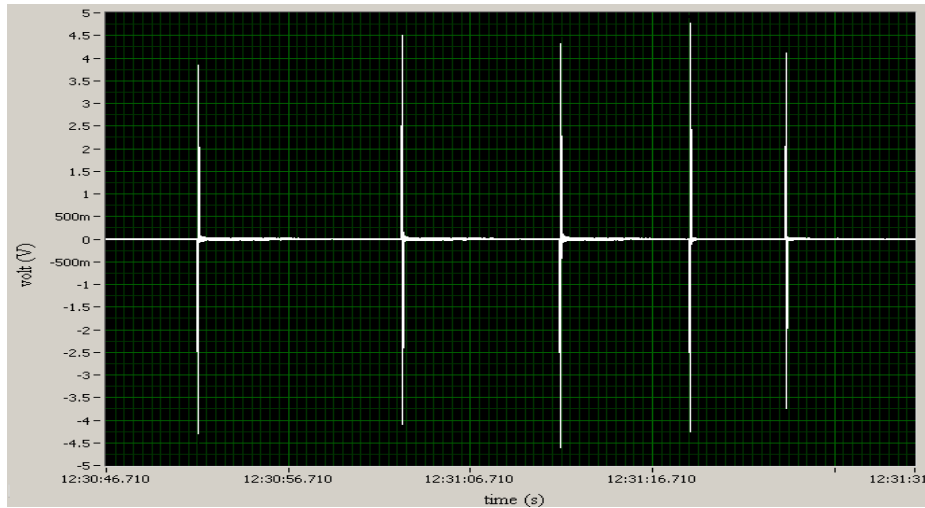
### 2.4.1 Ράβδος πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο

Για το πείραμα της πακτωμένης-ελεύθερης ράβδου, στερεώσαμε σταθερά με μία μέγγενη το ένα άκρο της ράβδου. Στο ελεύθερο άκρο της προσαρμόστηκε το επιταχυνσιόμετρο, (σημείο όπου δεν δημιουργείται δεσμός για αυτόν τον τρόπο στήριξης). Οι αρχικές ρυθμίσεις του συστήματος για την καταγραφή του σήματος, είναι οι εξής:

```
Signal input from: Acceleration SCC1 Mod2_ai0
Signal input Range ( max 5 – min( -5))
Scaled Units (V)
Acquisition mode (Continuous Samples)
Samples to read (1k)
Rate (Hz)_10k
```



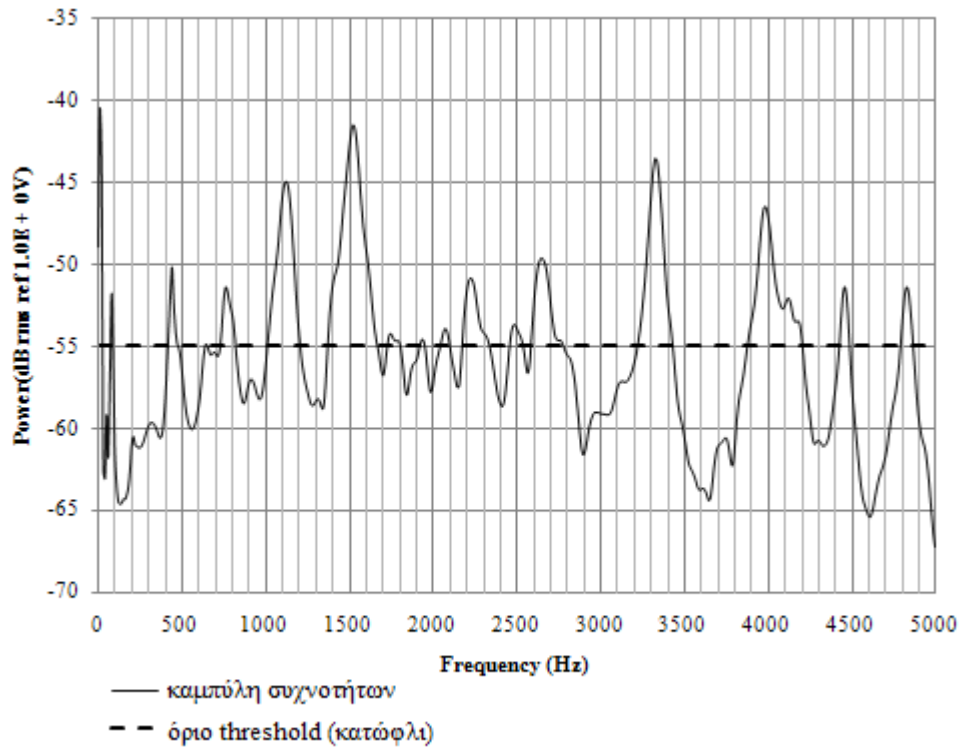
Η ράβδος κτυπήθηκε 5 φορές με μεταλλικό αντικείμενο. Η χρονική διαφορά μεταξύ των κτυπημάτων ήταν 3-4 s. Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται η τάση (Volt) που προκύπτει από τη διέγερση της ράβδου συναρτήσει του χρόνου (s).



Για την ανάλυση του σήματος βρήκαμε το Power Spectrum και κάναμε και averaging, έτσι ώστε να λάβουμε ένα ομαλότερο αποτέλεσμα. Οι παράμετροι του Power Spectrum ρυθμίστηκαν όπως φαίνεται παρακάτω:

*Window (Hanning)*  
*Spectrum type (Power)*  
*Peak conversion (RMS)*  
*Magnitude scale(dB),*  
*Averaging mode(RMS averaging)*  
*weighting mode(Exponential)*  
*Number of averages (444)*

Επίσης για την ανάλυση του σήματος χρησιμοποιήσαμε μία δυνατότητα του προγράμματος, το Peak Search, για το οποίο ορίσαμε μία τιμή threshold (κατωφλίου) σε dB. Αυτό μετά αυτόματα κατέγραψε τα μέγιστα του φάσματος(με τις αντίστοιχες τιμές των συχνοτήτων), πάνω από αυτή την τιμή. Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιήσαμε αυτή τη μέθοδο είναι για να κάνουμε έναν ευκολότερο διαχωρισμό μεταξύ των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρουν από αυτές οι οποίες απλά εμφανίζονται με ένα πολύ μικρό πλάτος και οφείλονται σε άλλους παράγοντες. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε το διάγραμμα των συχνοτήτων μαζί με την ευθεία που δηλώνει την τιμή του κατωφλίου σε dB.



Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτουν οι τιμές των συχνοτήτων που βρίσκονται πάνω από το όριο threshold, καθώς και των αντίστοιχων εντάσεων τους.

<i>Frequency (Hz)</i>	<i>Power (dB rms ref 1,0 E+0 V)</i>
12.2	-40.18
79.0	-51.68
436.3	-49.38
644.9	-53.46
764.8	-50.05
1115.1	-43.58
1524.8	-40.13
1744.9	-52.81
1775.0	-53.22
1934.9	-53.17
2065.1	-52.54
2224.9	-49.43
2484.9	-52.27
2645.0	-48.19
3325.0	-42.14
3975.0	-45.06
4115.0	-50.64
4165.0	-52.03
4454.7	-50.10
4824.8	-50.04



Για την εύρεση του μέτρου ελαστικότητας, θα χρειαστούμε τις ιδιοσυχνότητες της ράβδου. Για να επιτευχθεί ο διαχωρισμός των ιδιοσυχνοτήτων για τους εγκάρσιους τρόπους, θα χρησιμοποιήσουμε μία ενδεικτική τιμή του μέτρου ελαστικότητας για το ατσάλι, με σκοπό να βρούμε προσεγγιστικά τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων. Με βάση τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων που θα προκύψουν θα κάνουμε την επιλογή των αντίστοιχων συχνοτήτων που καταγράφηκαν από την πειραματική διαδικασία. Από την εξίσωση 15, (Ενότητα 1.3) θα υπολογίσουμε τις ιδιοσυχνότητες για τους δέκα πρώτους τρόπους ταλάντωσης.

Για  $E = 1.950 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  (ενδεικτική για το ατσάλι) έχουμε:

(Ο κώδικας που ακολουθεί είναι σε γλώσσα MATLAB)

```
L=0.72; % μήκος ράβδου (m)
rho=7872.6; % πυκνότητα υλικού (kg/m³)
a=0.005; % ακτίνα κυκλικής διατομής (m)
S=pi*a^2; % εμβαδόν κυκλικής διατομής (m²)
E=1.950*10^11; % μέτρο ελαστικότητας του Young (N/m²)
K=a/2; % γυροσκοπική ακτίνα κύκλου (m)

n=4:10;
mu=[1.194^2, 2.988^2, 5^2, (2*n-1).^2]; % μ²
f=mu.*[(pi*K)/(8*L^2)].*sqrt(E/rho) % ιδιοσυχνότητες
```

Στην πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα φαίνονται οι τρόποι ταλάντωσης, στη δεύτερη στήλη οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες (που προέκυψαν για τον κάθε τρόπο με την ενδεικτική τιμή του μέτρου ελαστικότητας), και στην τρίτη στήλη οι αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την πειραματική διαδικασία.

<i>Ιδιοσυχνότητες (τρόποι)</i>	<i>Θεωρητικές τιμές - <math>f_{\theta}</math> (Hz)</i>	<i>Πειραματικές τιμές - <math>f_{\pi}</math> (Hz)</i>
1	13.4	12.2
2	84.2	79.0
3	235.0	205.3
4	461.8	436.3
5	763.4	764.8
6	1140.5	1115.1
7	1592.9	1524.8
8	2120.7	2065.1
9	2723.9	2645.0
10	3402.5	3325.0

Με βάση τη γραφική παράσταση και τον παραπάνω πίνακα, παρατηρούμε ότι η στάθμη της τρίτης ιδιοσυχνότητας (205.3 Hz) είναι κάτω από το όριο που θέσαμε σαν κατώφλι. Με την αντιστοιχία που κάναμε στον προηγούμενο πίνακα,

καταφέραμε να εντοπίσουμε τη συχνότητα που αντιστοιχεί στον τρίτο τρόπο ταλάντωσης, αλλά να επιλέξουμε και να διασταυρώσουμε τις σωστές συχνότητες για τους δέκα πρώτους τρόπους ταλάντωσης.

Η παρακάτω εξίσωση (σχέση(15), Ενότητα 1.3) είναι της μορφής  $f_n = m\mu_n^2$ ,

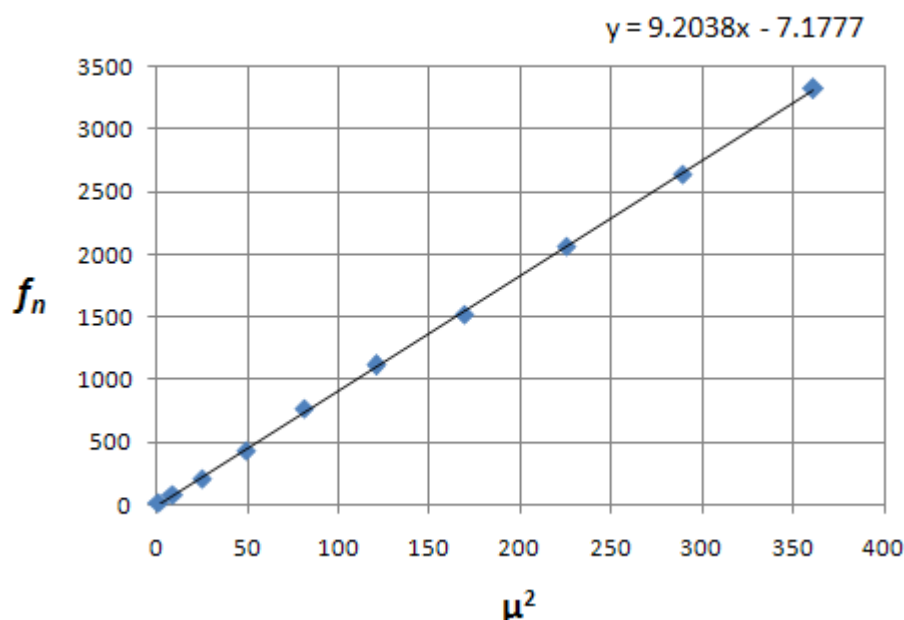
$$f_n = \frac{\pi K}{8L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \mu_n^2, \quad \text{για } \mu_n^2 = [1.194^2, 2.988^2, 5^2 \dots (2n - 1)^2]$$

όπου το m στην προκειμένη περίπτωση δίδεται από:

$$m = \frac{\pi K}{8L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (17)$$

Θα υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας από την κλίση της ευθείας η οποία θα προκύψει από τα σημεία των ιδιοσυχνοτήτων που καταγράψαμε σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές του τετραγώνου των λύσεων που δίνονται από την εξίσωση 15 (Ενότητα 1.3).

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται τα σημεία  $(\mu_n^2, f_n)$  καθώς και την ευθεία που προκύπτει μετά την προσαρμογή στα δεδομένα.



Η κλίση της ευθείας προκύπτει ότι είναι:  $m = 9.2038$

Γνωρίζοντας την κλίση της ευθείας μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας του Young (E) λύνοντας τη σχέση (17) ως προς E.

$$E = \frac{64\rho m^2 L^4}{K^2 \pi^2} \quad (18)$$

```
L=0.72; % μήκος ράβδου (m)
rho=7872.6; % πυκνότητα υλικού ρ (kg/m³)
a=0.005; % ακτίνα κυκλικής διατομής (m)
K=a/2; % γυροσκοπική ακτίνα κύκλου (m)

m=9.204;
E=(m^2*64*L^4*rho)/(K^2*pi^2) % μέτρο ελαστικότητας του
Young (N/m²)
```

Το μέτρο ελαστικότητας του Young προκύπτει:

$$E = 1.859 * 10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)} .$$

Από την εξίσωση που δίνει τις ιδιοσυχνότητες της ράβδου (εξ. 15, Ενότητα 1.3), θα υπολογίσουμε τις θεωρητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων με μέτρο ελαστικότητας  $E = 1.859 * 10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)}$ .

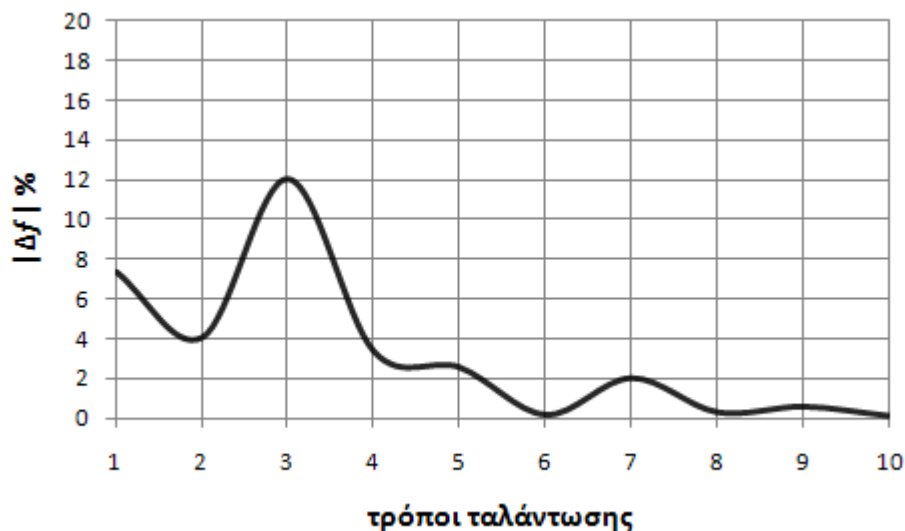
```
L=0.72; % μήκος ράβδου (m)
rho=7872.6; % πυκνότητα υλικού (kg/m³)
a=0.005; % ακτίνα κυκλικής διατομής (m)
S=pi*a^2; % εμβαδόν κυκλικής διατομής (m²)
E=1.859*10^11; % μέτρο ελαστικότητας του Young (N/m²)
K=a/2; % γυροσκοπική ακτίνα κύκλου (m)

n=4:10;
mu=[1.194^2, 2.988^2, 5^2, (2*n-1).^2]; % μ²
f=mu.*[(pi*K)/(8*L^2)]*sqrt(E/rho) % ιδιοσυχνότητες
```

Στην πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα φαίνονται οι τρόποι ταλάντωσης, στη δεύτερη στήλη οι αντίστοιχες θεωρητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων, στην τρίτη στήλη οι αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την πειραματική διαδικασία και στην τέταρτη στήλη η διαφορά τους.

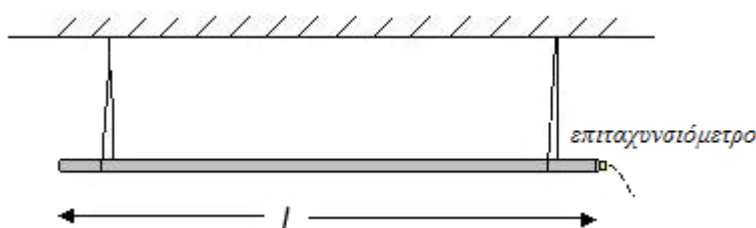
Ιδιοσυχνότητες (τρόποι)	Θεωρητικές τιμές - $f_{\theta}$ (Hz)	Πειραματικές τιμές - $f_{\pi}$ (Hz)	$\Delta f = f_{\theta} - f_{\pi}$ (Hz)
1	13.1	12.2	0.9
2	82.2	79.0	3.2
3	230.1	205.3	24.8
4	450.9	436.3	14.6
5	745.4	764.8	-19.4
6	1113.5	1115.1	-1.6
7	1555.3	1524.8	30.5
8	2070.6	2065.1	5.5
9	2659.6	2645.0	14.6
10	3322.2	3325.0	-2.8

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι οι συχνότητες των δέκα πρώτων τρόπων ταλάντωσης που καταγράψαμε (και βρίσκονται πάνω από το όριο που θέσαμε σαν κατώφλι, με εξαίρεση την τρίτη ιδιοσυχνότητα), πλησιάζουν στις συχνότητες που υπολογίσαμε με το θεωρητικό μοντέλο, με μέγιστη ποσοστιαία διαφορά από τις πειραματικές τιμές το 12% για τη τρίτη ιδιοσυχνότητα και ελάχιστη το 0.08% για τη δέκατη ιδιοσυχνότητα. Στην παρακάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται η ποσοστιαία διαφορά  $\Delta f$  από τις πειραματικές τιμές για κάθε τρόπο ταλάντωσης.



#### 2.4.2 Ράβδος ελεύθερη και στα δύο άκρα

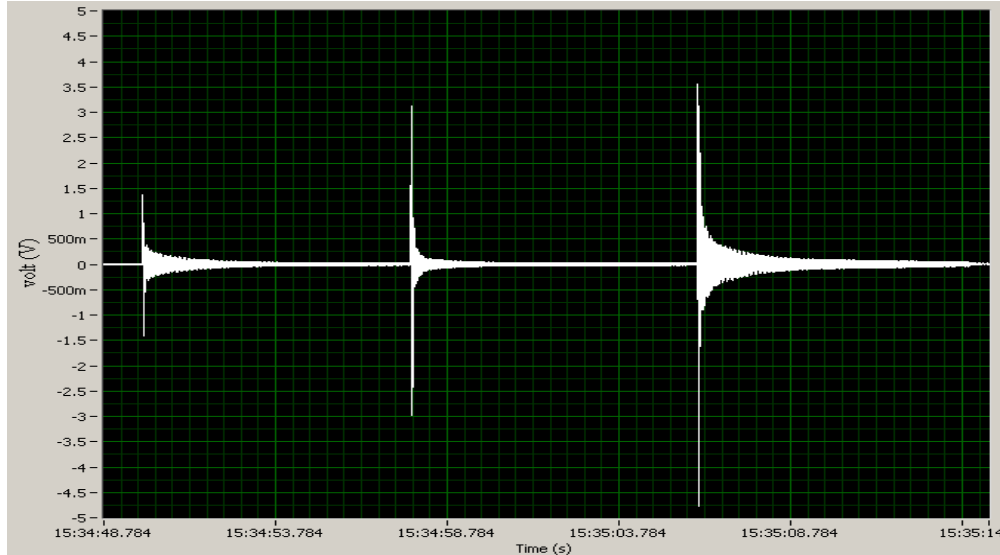
Για την μέτρηση των ιδιοσυχνοτήτων της ράβδου στην περίπτωση της ελεύθερης και στα δύο άκρα στήριξης, χρησιμοποιήσαμε μια βάση στην οποία τοποθετήθηκαν δύο λάστιχα, όπου στηρίζαμε συμμετρικά την ράβδο από τα άκρα της. Τοποθετήσαμε το επιταχυνσιόμετρο σε σημείο όπου δεν δημιουργείται δεσμός ταλάντωσης για αυτόν τον τρόπο στήριξης (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).



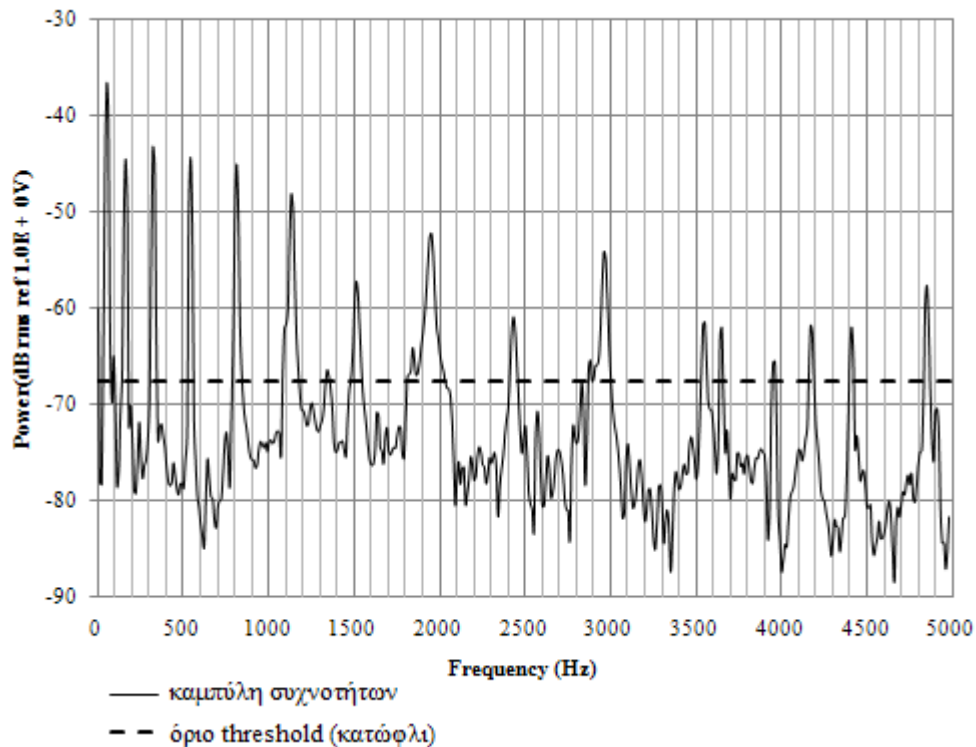
Οι παράμετροι που ορίσαμε για την καταγραφή του σήματος, είναι οι εξής.

Signal input from : Acceleration SCC1 Mod2\_ai0  
 Signal input Range ( max 5 - min -5)  
 Scaled Units (V)  
 Acquisition mode (Continuous Samples)  
 Samples to read (1k)  
 Rate (Hz) 10k

Η ράβδος κτυπήθηκε 3 φορές με μεταλλικό αντικείμενο και καταγράφηκε το σήμα. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται η τάση (σε Volt) που προκύπτει από τη διέγερση της ράβδου συναρτήσει του χρόνου (s).



Με τον ίδιο τρόπο που πραγματοποιήσαμε το πείραμα της πακτωμένης ράβδου, χρησιμοποιήσαμε το Power Spectrum του προγράμματος για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων. Επίσης ορίσαμε ως threshold (κατώφλι) την τιμή  $-67.67\text{dB}$ .



Από τη γραφική παράσταση που προέκυψε, βρήκαμε τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων καθώς και τις αντίστοιχες στάθμες τους.

<i>Frequency (Hz)</i>	<i>Power ( dB rms ref 1.0E+0V)</i>
61.8	-46.47
99.8	-65.56
170.2	-47.02
333.2	-48.61
549.7	-46.70
820.2	-48.27
1096.3	-64.40
1142.2	-52.15
1523.5	-61.90
1964.5	-61.08
1993.9	-61.76
2434.7	-59.67
2845.3	-62.71
2965.2	-63.35
3553.2	-52.81
3656.3	-54.99
4183.0	-61.08
4425.6	-54.60
4854.1	-54.16

Χρησιμοποιήσαμε μία ενδεικτική τιμή του μέτρου ελαστικότητας για να υπολογίσουμε τις θεωρητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων.

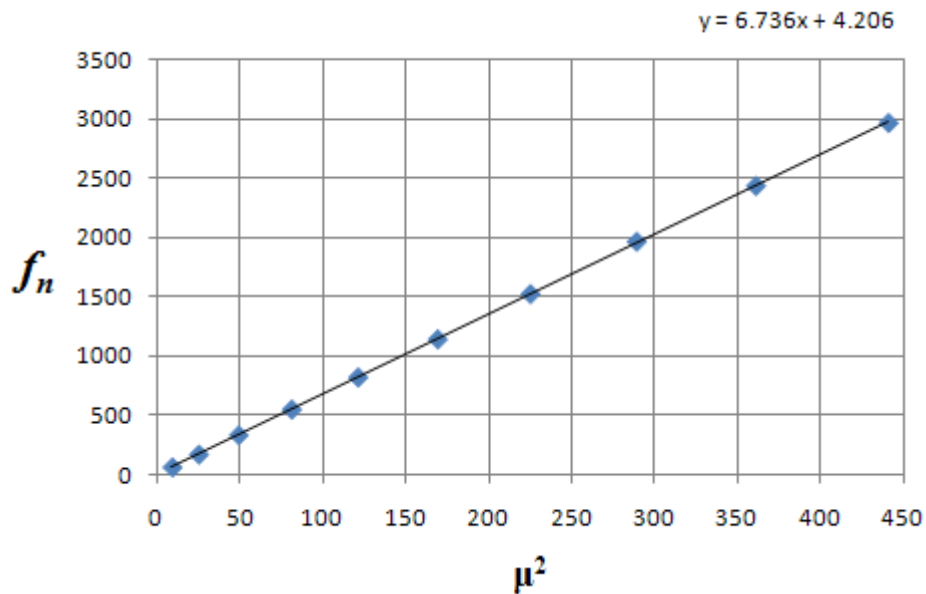
```
L=0.841;           % μήκος ράβδου (m)
rho=7872.6;       % πυκνότητα υλικού (Kgr/m3)
a=0.005;         % ακτίνα κυκλικής διατομής (m)
S=pi*a^2;        % εμβαδόν κυκλικής διατομής (m2)
E=1.95*10^11;    % μέτρο ελαστικότητας του Young (N/m2)
K=a/2;           % γυροσκοπική ακτίνα κύκλου (m)

n=2:10;
mu=[3.011^2, (2*n+1).^2];
f=mu.*[(pi*K)/(8*L^2)]*sqrt(E/rho)
```

Στην πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα παρουσιάζονται οι τρόποι ταλάντωσης, στη δεύτερη στήλη οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες που προέκυψαν για τον κάθε τρόπο με την ενδεικτική τιμή του μέτρου ελαστικότητας και στην τρίτη στήλη οι αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την πειραματική διαδικασία.

Ιδιοσυχνότητες (τρόποι)	Θεωρητικές τιμές - $f_{\theta}$ (Hz)	Πειραματικές τιμές - $f_{\pi}$ (Hz)
1	62.6	61.8
2	172.7	170.2
3	338.5	333.2
4	559.6	549.7
5	835.9	820.2
6	1167.5	1142.2
7	1554.3	1523.5
8	1996.5	1964.5
9	2493.9	2434.7
10	3046.5	2965.2

όπως και στην προηγούμενη ενότητα, θα υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας από την κλίση της ευθείας η οποία θα προκύψει από τα σημεία των ιδιοσυχνοτήτων που καταγράψαμε σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές του τετραγώνου των λύσεων που δίνονται από την εξίσωση 12 (Κεφ. 1.3).



Η κλίση της ευθείας είναι  $m=6.736$  και το μέτρο ελαστικότητας είναι

$L=0.841;$	% μήκος ράβδου (m)
$\rho=7872.6;$	% πυκνότητα υλικού ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ )
$a=0.005;$	% ακτίνα κυκλικής διατομής (m)
$S=\pi \cdot a^2;$	% εμβαδόν κυκλικής διατομής ( $\text{m}^2$ )
$K=a/2;$	% γυροσκοπική ακτίνα κύκλου (m)
$m=6.736;$	
$E = \frac{m^2 \cdot 64 \cdot L^4 \cdot \rho}{(K^2 \cdot \pi^2)}$ % μέτρο ελαστικότητας του Young ( $\text{N}/\text{m}^2$ )	

$$E = 1.854 \cdot 10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)} .$$

Οι θεωρητικές τιμές βρέθηκαν γρήγορα μέσω του κάτωθι κώδικα.

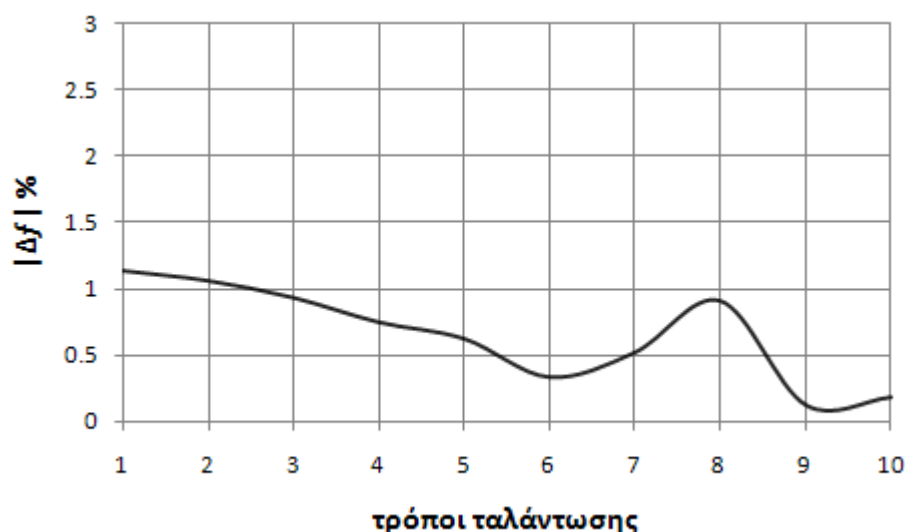
```
L=0.841;           % μήκος ράβδου (m)
rho=7872.6;       % πυκνότητα υλικού (Kg/m³)
a=0.005;         % ακτίνα κυκλικής διατομής (m)
S=pi*a^2;        % εμβαδόν κυκλικής διατομής (m²)
E=1.854*10^11;   % μέτρο ελαστικότητας του Young (N/m²)
K=a/2;           % γυροσκοπική ακτίνα κύκλου (m)

n=2:10;
mu=[3.011^2, (2*n+1).^2];
f=mu.*((pi*K)/(8*L^2))*sqrt(E/rho)
```

Στην πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα φαίνονται οι τρόποι ταλάντωσης, στη δεύτερη στήλη οι αντίστοιχες θεωρητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων, στην τρίτη στήλη οι αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την πειραματική διαδικασία και στην τέταρτη στήλη η διαφορά τους.

Ιδιοσυχνότητες (τρόποι)	Θεωρητικές τιμές - $f_{\theta}$ (Hz)	Πειραματικές τιμές - $f_{\pi}$ (Hz)	$\Delta f = f_{\theta} - f_{\pi}$ (Hz)
1	61.1	61.8	-0.7
2	168.4	170.2	-1.8
3	330.1	333.2	-3.1
4	545.6	549.7	-4.1
5	815.1	820.2	-5.1
6	1138.4	1142.2	-3.8
7	1515.6	1523.5	-7.9
8	1946.7	1964.5	-17.8
9	2431.7	2434.7	-3
10	2970.6	2965.2	5.4

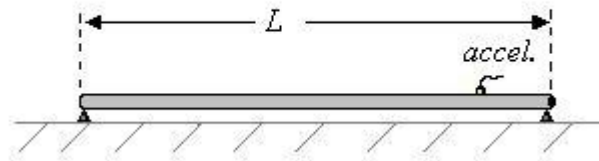
Στην παρακάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται η ποσοστιαία διαφορά  $\Delta f$  από τις πειραματικές τιμές για κάθε τρόπο ταλάντωσης.





### 2.4.3 Απλή στήριξη και στα δύο άκρα

Για το πείραμα της απλής στήριξης, στερεώσαμε τα άκρα της ράβδου σε δύο βάσεις όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Το επιταχυνσιόμετρο στερεώθηκε σε σημείο όπου δεν δημιουργούνται δεσμοί για τους πρώτους τρόπους ταλάντωσης με βάση το σχήμα 6 (Κεφ. 1.3.1) .

Οι αρχικές ρυθμίσεις του συστήματος για την καταγραφή του σήματος, είναι οι εξής:

```
Signal input from : Acceleration SCC1 Mod2_ai0
Signal input Range (max 5 , min -5)
Scaled Units (V)
Acquisition mode (Continuous Samples)
Samples to read (1k)
Rate (Hz)_2k
```

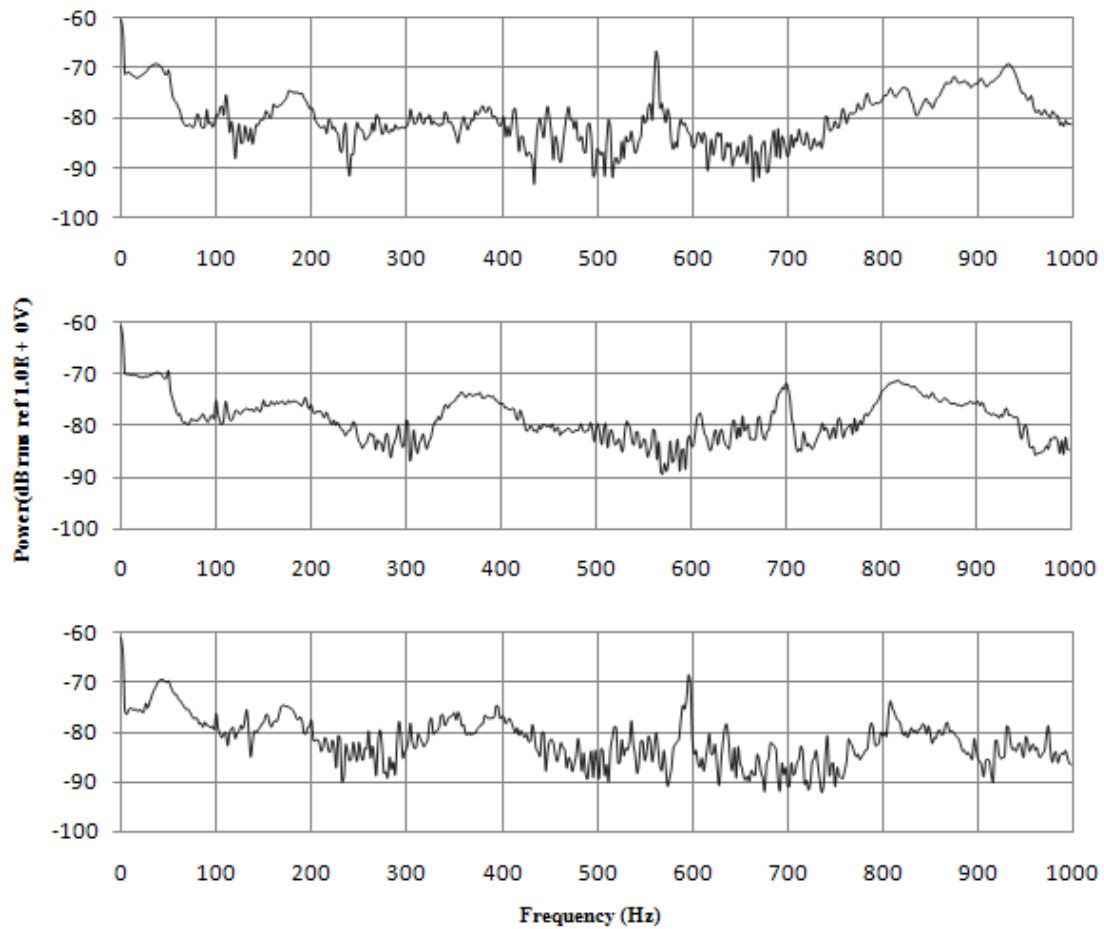
Πραγματοποιήσαμε αρκετές μετρήσεις, αλλά λόγω του τρόπου στήριξης, το πλάτος της ταλάντωσης των εγκάρσιων κυμάτων ήταν πολύ μικρό, με αποτέλεσμα να πάρουμε ένα πολύ πλούσιο συχνοτικό φάσμα που αποτελείται από συχνότητες που ανήκουν και στους εγκάρσιους και στους διαμήκεις τρόπους ταλάντωσης. Επίσης ένα άλλο πρόβλημα ήταν ότι για κάθε διαφορετικό σημείο που χτυπούσαμε κατά μήκος της ράβδου παίρναμε και διαφορετικό συχνοτικό φάσμα.

Λόγω των παραπάνω προβλημάτων, αποφασίσαμε να υπολογίσουμε πρώτα τις θεωρητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων και μετά να επιλέξουμε τις αντίστοιχες συχνότητες από το φάσμα της μέτρησης. Για μέτρο ελαστικότητας πήραμε τον μέσο όρο των τιμών των δύο προηγούμενων τρόπων στήριξης, δηλαδή:  $E = 1.857 * 10^{11} \text{ N/m}^2$  .

```
L=0.841; % μήκος ράβδου (m)
rho=7872.6; % πυκνότητα υλικού (Kg/m³)
a=0.005; % ακτίνα κυκλικής διατομής (m)
S=pi*a^2; % εμβαδόν κυκλικής διατομής (m²)
E=1.857*10^11; % μέτρο ελαστικότητας του Young (N/m²)
K=a/2; % γυροσκοπική ακτίνα κύκλου (m)

n=1:10;
mu=[n^2];
f=mu.*[(pi*K)/(8*L^2)]*sqrt(E/rho)
```

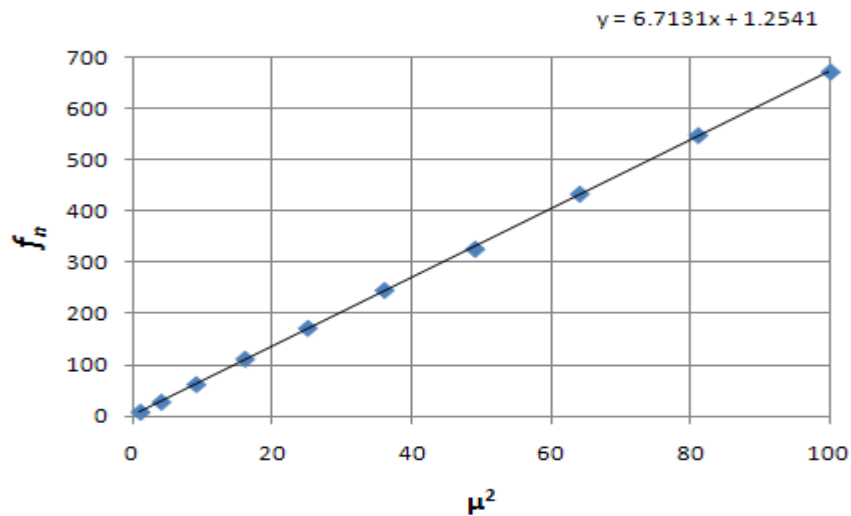
Παρακάτω βλέπουμε τα συχνοτικά διαγράμματα από τρεις διαφορετικές μετρήσεις. Παρατηρούμε το πλούσιο συχνοτικό τους περιεχόμενο καθώς και τις διαφορές μεταξύ των τριών.



Στον επόμενο πίνακα αντιστοιχίζονται οι θεωρητικές ιδιοσυχνότητες με τις πειραματικές τιμές των συχνοτήτων. Οι πειραματικές τιμές συχνοτήτων πάρθηκαν και από τις τρεις μετρήσεις.

Ιδιοσυχνότητες (τρόποι)	Θεωρητικές τιμές - $f_{\theta}$ (Hz)	Πειραματικές τιμές - $f_{\pi}$ (Hz)
1	6.7	7
2	27.0	26.8
3	60.7	61.2
4	107.8	110.6
5	168.5	170.9
6	242.7	244.9
7	330.3	325.1
8	431.4	432.6
9	546.0	547
10	674.1	671

Έπειτα με βάση τις ιδιοσυχνότητες που υπολογίσθηκαν σχεδιάσαμε την ευθεία που προκύπτει από τα σημεία  $(\mu_n^2, f_n)$  και από την οποία θα προκύψει η κλίση της (όπου  $n=1,2,3\dots$ ).



Η κλίση της ευθείας είναι  $m = 6.7131$ . Με βάση αυτό υπολογίζουμε το μέτρο ελαστικότητας από τη σχέση (18):

```
L=0.841;           % μήκος ράβδου (m)
rho=7872.6;       % πυκνότητα υλικού (Kg/m³)
a=0.005;         % ακτίνα κυκλικής διατομής (m)
S=pi*a^2;        % εμβαδόν κυκλικής διατομής (m²)
K=a/2;           % γυροσκοπική ακτίνα κύκλου (m)

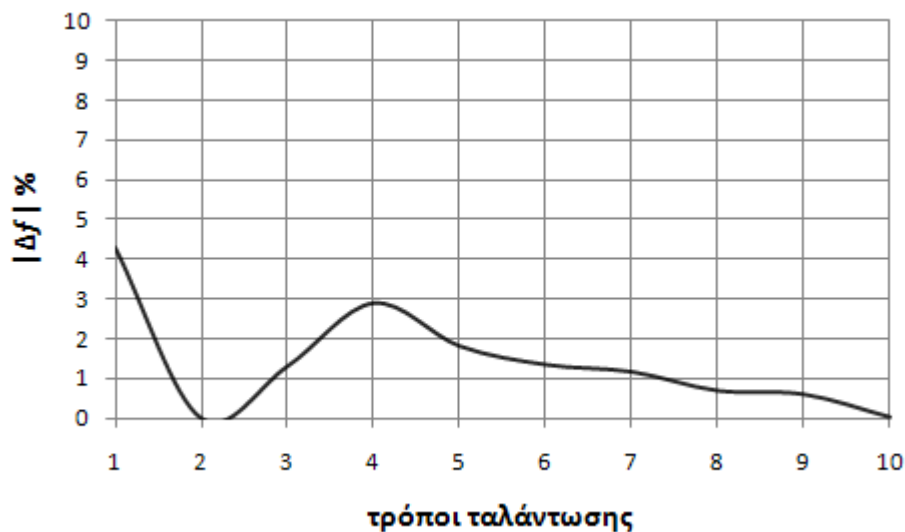
m= 6.7131;
E=(m^2*64*L^4*rho)/(K^2*pi^2) % μέτρο ελαστικότητας του
Young (N/m²)
```

Το μέτρο ελαστικότητας είναι  $E = 1.841 * 10^{11} \text{ N/m}^2$

Με βάση την παραπάνω τιμή του μέτρου ελαστικότητας, θα υπολογισθούν οι δέκα πρώτες ιδιοσυχνότητες. Στην πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα φαίνονται οι τρόποι ταλάντωσης, στη δεύτερη στήλη οι αντίστοιχες θεωρητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων, στην τρίτη στήλη οι αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την πειραματική διαδικασία και στην τέταρτη στήλη η διαφορά τους.

Ιδιοσυχνότητες (τρόποι)	Θεωρητικές τιμές - $f_{\theta}$ (Hz)	Πειραματικές τιμές $f_{\pi}$ (Hz)	$\Delta f = f_{\theta} - f_{\pi}$ (Hz)
1	6.7	7	-0.3
2	26.8	26.8	0
3	60.4	61.2	-0.8
4	107.4	110.6	-3.2
5	167.8	170.9	-3.1
6	241.6	244.9	-3.3
7	328.9	325.1	3.8
8	429.6	432.6	-3
9	543.7	547	-3.3
10	671.2	671	0.2

Στην παρακάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται η ποσοστιαία διαφορά  $\Delta f$  από τις πειραματικές τιμές για κάθε τρόπο ταλάντωσης.



Ωστόσο δεν μπορούμε να θεωρήσουμε αξιόπιστο τον παραπάνω υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας από τον συγκεκριμένο τρόπο στήριξης, διότι σε κάθε μέτρηση, και για κάθε διαφορετικό σημείο όπου χτυπούσαμε κατά μήκος της ράβδου, λαμβάναμε και διαφορετικό συχνοτικό φάσμα. Αν εξαιρέσουμε ορισμένες συχνότητες που εμφανίζονταν συχνά, οι υπόλοιπες άλλαζαν σε πολύ μεγάλο βαθμό από τις προηγούμενες μετρήσεις. Επίσης το συχνοτικό φάσμα ήταν τόσο πυκνό που θα μπορούσαμε για διαφορετική θεωρητική τιμή του μέτρου ελαστικότητας να αντιστοιχίσουμε άλλες συχνότητες με αποτέλεσμα το μέτρο ελαστικότητας να αλλάξει κατά πολύ. Τα προβλήματα αυτά οφείλονται στον μικρό βαθμό ελευθερίας που έχει η ράβδος για να ταλαντωθεί αφού και τα δύο της άκρα είναι στερεωμένα σε σταθερά σημεία. Έτσι οι στάθμες των συχνοτήτων από τους εγκάρσιους και τους διαμήκεις τρόπους ταλάντωσης (αλλά και του θορύβου) βρίσκονται πολύ κοντά

μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να περιπλέκεται το φάσμα και να μας δυσκολεύει στην ανάλυση.

Από τις τιμές του μέτρου ελαστικότητας που υπολογίσαμε για κάθε τρόπο στήριξης, ο μέσος όρος είναι:  $E = 1.851 * 10^{11} (N/m^2)$ . Βέβαια, αν ληφθούν υπόψη κάποιοι παράγοντες όπως η μικρή μεταβολή της συχνότητας σε κάθε πειραματική διαδικασία, η θερμοκρασία, η ακρίβεια με την οποία μετρήσαμε τις διαστάσεις της ράβδου (1 mm), τότε αντιλαμβανόμαστε ότι μπορεί να υπάρχει μία μικρή απόκλιση στην τιμή του μέτρου ελαστικότητας.

Λαμβάνοντας υπόψη μας όλα τα παραπάνω μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η πειραματική μέθοδος που ακολουθήσαμε για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας είναι αξιόπιστη.

## 2.5 Οδήγηση ράβδου ορθογώνιας διατομής με διεγέρτη

Σε αυτήν την ενότητα θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας για μία ράβδο ορθογώνιας διατομής. Αυτό θα γίνει με την ίδια μεθοδολογία που ακολουθήσαμε στις προηγούμενες ενότητες, μόνο που αυτή τη φορά για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων θα οδηγήσουμε την ράβδο με διεγέρτη και όχι με κρουστική διέγερση.

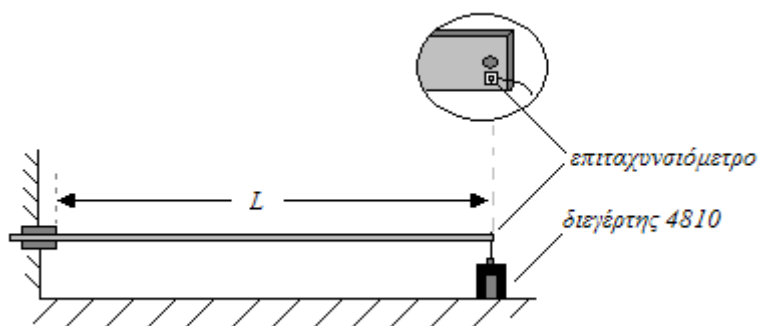
Επίσης θα επιχειρήσουμε να εντοπίσουμε τους δεσμούς και τις κοιλίες της ταλάντωσης της ράβδου, ρίχνοντας άμμο επάνω στην ράβδο κατά την διάρκεια του κάθε συντονισμού.

Για το πείραμα χρησιμοποιήσαμε μία ράβδο μήκους  $L = 0.514 \text{ m}$ , ορθογώνιας διατομής, ύψους  $h = 0.0038 \text{ m}$ , πλάτους  $b = 0.04 \text{ m}$ , και βάρους  $m = 0.605 \text{ kg}$ . Υπολογίσαμε την πυκνότητα του υλικού που είναι  $\rho = 7734.7 \text{ kg/m}^3$ . Γνωρίζουμε ότι η ράβδος είναι από ανοξείδωτο χάλυβα.

Επίσης χρησιμοποιήσαμε τον διεγέρτη 4810 της *Bruel & Kjaer*, το επιταχυνσιόμετρο 35A της *Endevco* και τη γεννήτρια συχνοτήτων *HM 8030-5*.

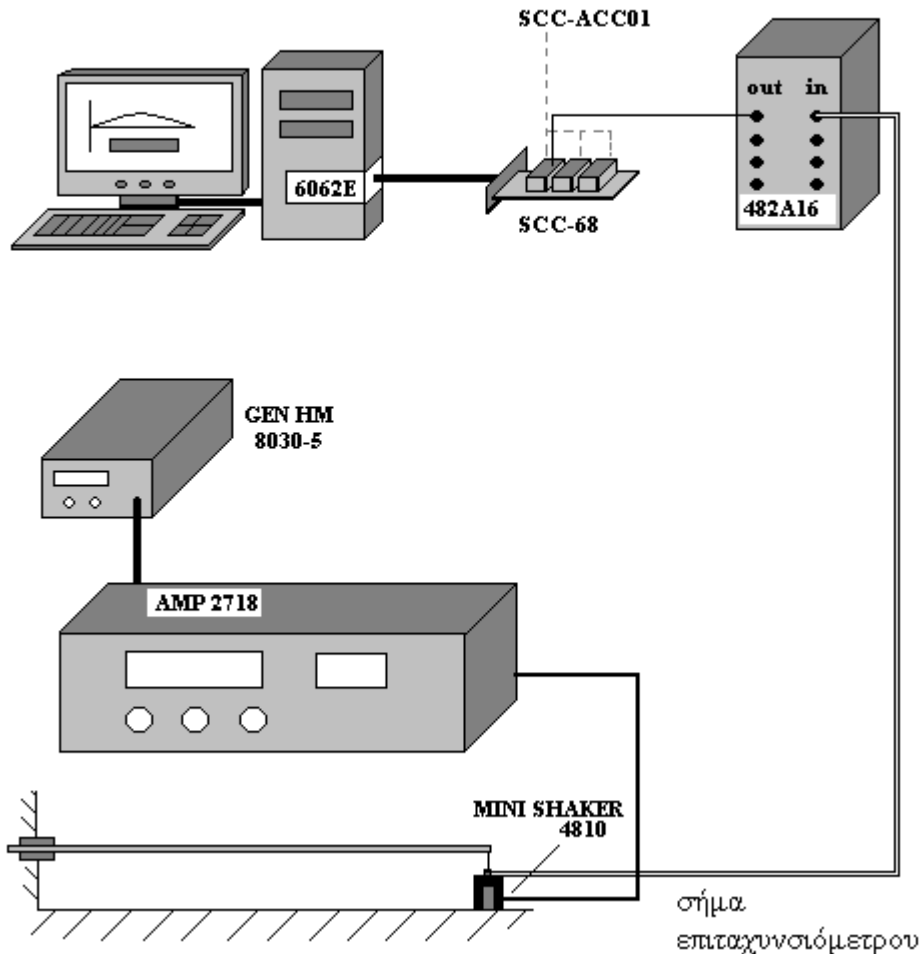
### Βαθμονόμηση

Στερεώσαμε σταθερά το ένα άκρο της ράβδου ( $x = 0$ ) και στο ελεύθερο της άκρο προσαρμόσαμε τον διεγέρτη. Στο ίδιο σημείο στερεώσαμε και το επιταχυνσιόμετρο όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Επιλέξαμε από τη γεννήτρια κάποιες συχνότητες για να διεγείρουμε την ράβδο και καταγράψαμε το σήμα της εξόδου του επιταχυνσιόμετρο. Έπειτα με το μετασχηματισμό Fourier του σήματος που καταγράψαμε, ταυτοποιήσαμε τις τιμές των συχνοτήτων που ορίσαμε στη γεννήτρια και αυτών που πήραμε στην έξοδο του επιταχυνσιόμετρο. Η βαθμονόμηση πραγματοποιήθηκε με επιτυχία.

## ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΑ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ



### Πειραματική Διαδικασία

Για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων θα ήταν χρήσιμο να γνωρίζουμε κατά προσέγγιση που βρίσκονται οι συχνότητες που αντιστοιχούν σε κάθε τρόπο ταλάντωσης, για να οδηγήσουμε την ράβδο με τον διεγέρτη σε αυτές τις περιοχές και να εντοπίσουμε με ακρίβεια τις συχνότητες χωρίς να χρειαστεί να ψάξουμε σε όλο το συχνοτικό φάσμα. Ο ένας τρόπος ήταν με αυτόματη σάρωση συχνοτήτων της γεννήτριας και ο άλλος με κρουστική διέγερση.

**Σάρωση (sweep):** Ορίσαμε στην γεννήτρια μία συχνότητα εκκίνησης 40 Hz, και μία τελική συχνότητα 2 kHz. Ο χρόνος ο οποίος ορίσαμε για την διάρκεια του σαρώματος είναι 15 s. Θεωρήσαμε σκόπιμο να βάλουμε όσο μεγαλύτερο χρονικό διάστημα γίνεται, για να προλάβουν να επιτευχθούν οι συντονισμοί, μιάς και ασκούμε στη ράβδο εξαναγκασμένη ταλάντωση. Καταγράψαμε το σήμα μέσω του

επιταχυνσιόμετρον και προχωρήσαμε στη συχνοτική ανάλυση. Πραγματοποιήθηκαν αρκετές μετρήσεις με σάρωση, ωστόσο ξεχώρισαν μόνο μερικές συχνότητες οι οποίες εμφανίζονταν με μεγάλο πλάτος σε όλες τις μετρήσεις. Κατόπιν προχωρήσαμε στην κρουστική διέγερση για να έχουμε μία πληρέστερη εικόνα του φάσματος της ταλάντωσης και να ταυτοποιήσουμε τις συχνότητες που θα προκύψουν με αυτές της σάρωσης.

**Κρουστική διέγερση:** Όμοια με την προηγούμενη ενότητα, ασκήσαμε 2 έως 5 χτυπήματα στην ράβδο (πραγματοποιήθηκαν πολλές μετρήσεις), και καταγράψαμε το σήμα. Έπειτα επιλέξαμε τις συχνότητες που ξεχώρισαν και τις ταυτοποιήσαμε με αυτές του παραδείγματος της σάρωσης.

Οι συχνοτικές περιοχές που παρουσίασαν κορυφές και στους δύο τρόπους διέγερσης είναι :

Συχνότητα (Hz)
10 – 12
69 – 74
185 – 203
276 – 284
438 – 444
1035 – 1095

Γνωρίζοντας αυτές τις συχνότητες, επιχειρήσαμε να υπολογίσουμε με το θεωρητικό μοντέλο (Εξ.15, Ενót.1.3) τις ιδιοσυχνότητες της ράβδου, χρησιμοποιώντας μία τιμή του μέτρου ελαστικότητας που να προσεγγίζει αυτές τις τιμές των συχνοτήτων.

```
L=0.486;           % μήκος ράβδου (m)
rho=7734.7;        % πυκνότητα υλικού (kg/m³)
h=0.0038;          % ακτίνα κυκλικής διατομής (m)
E=1.6*10^11;       % μέτρο ελαστικότητας του Young (N/m²)
K=h/sqrt(12);      % γυροσκοπική ακτίνα ορθογωνίου (m)

n=4:10;
mu=[1.194^2,2.988^2,5^2,(2*n-1).^2]; % μ²
f=mu.*[((pi*K)/(8*L^2))*sqrt(E/rho)] % ιδιοσυχνότητες
```

Στην πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα φαίνονται οι τρόποι ταλάντωσης και στη δεύτερη στήλη οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες που προέκυψαν για τον κάθε τρόπο για την ενδεικτική τιμή του μέτρου ελαστικότητας.



<i>Ιδιορυθμοί (τρόποι)</i>	<i>Θεωρητικές τιμές - <math>f_{\theta}</math> (Hz)</i>
<i>1</i>	<i>11.8</i>
<i>2</i>	<i>74.0</i>
<i>3</i>	<i>207.4</i>
<i>4</i>	<i>406.5</i>
<i>5</i>	<i>671.9</i>
<i>6</i>	<i>1003.7</i>
<i>7</i>	<i>1401.9</i>
<i>8</i>	<i>1866.4</i>
<i>9</i>	<i>2397.3</i>
<i>10</i>	<i>2994.5</i>

Με βάση τις θεωρητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων που προέκυψαν προχωρήσαμε στον ακριβή εντοπισμό των ιδιοσυχνοτήτων, οδηγώντας την ράβδο με τον διεγέρτη. Επάνω στην ράβδο τοποθετήσαμε ομοιόμορφα μία λεπτή στρώση από άμμο ώστε να παρατηρήσουμε το φαινόμενο του συντονισμού. Η άμμος οδηγήθηκε από τα σημεία που υπήρχε ταλάντωση στα σημεία που υπήρχε δεσμός. Τη συχνότητα όπου το φαινόμενο ήταν πιο έντονο, καταγράψαμε ως ιδιοσυχνότητα της ράβδου.

Προχωρήσαμε στην πειραματική διαδικασία και εντοπίσαμε τις επτά πρώτες ιδιοσυχνότητες της ράβδου. Στον πρώτο τρόπο ταλάντωσης (ιδιοσυχνότητα 12 Hz) δεν εμφανίζεται το φαινόμενο με την άμμο γιατί είναι πολύ χαμηλής συχνότητας η ταλάντωση. Παρακάτω παρουσιάζονται οι φωτογραφίες του φαινομένου αφού έχει μεταφερθεί η άμμος στους δεσμούς του εκάστοτε τρόπου ταλάντωσης. Ολόκληρο το φαινόμενο υπό μορφή βίντεο υπάρχει σε cd στο τέλος της εργασίας.

**2ος τρόπος - 74 Hz**



**3ος τρόπος - 203 Hz**



**4ος τρόπος 431 Hz**



**5ος τρόπος 690 Hz**



**6ος τρόπος 1035 Hz**



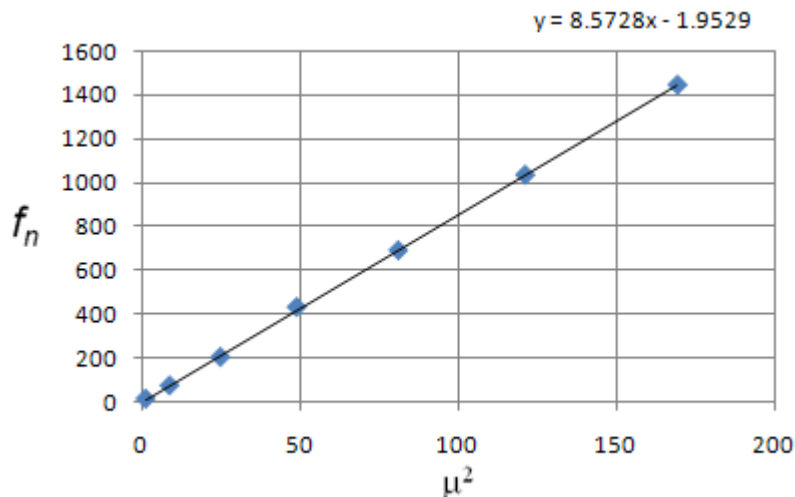
**7ος τρόπος 1446 Hz**



Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται οι συχνότητες που προκαλούν τον μέγιστο συντονισμό για κάθε τρόπο ταλάντωσης. Δηλαδή οι ιδιοσυχνότητες του της ράβδου.

Ιδιοσυχνότητες (τρόποι)	Πειραματικές τιμές $f_n$ (Hz)
1	12
2	73
3	203
4	431
5	690
6	1035
7	1446

Από τις ιδιοσυχνότητες που προέκυψαν σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές του τετραγώνου των λύσεων που δίνονται από την εξίσωση 15 (Ενότητα 1.3), θα υπολογίσουμε με προσαρμογή δεδομένων την ευθεία και την κλίση της που θα μας οδηγήσει στην εύρεση του μέτρου ελαστικότητας.



Τώρα που γνωρίζουμε την κλίση της ευθείας  $m = 8.5728$  θα υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας.

```

L=0.486;           % μήκος ράβδου (m)
rho=7734.7;       % πυκνότητα υλικού ρ (kg/m3)
h=0.0038;        % ακτίνα κυκλικής διατομής (m)
K=h/sqrt(12);    % γυροσκοπική ακτίνα κύκλου (m)

m=8.5728;
E=(m^2*64*L^4*rho)/(K^2*pi^2) % μέτρο ελαστικότητας του
                                % Young (N/m2)

```

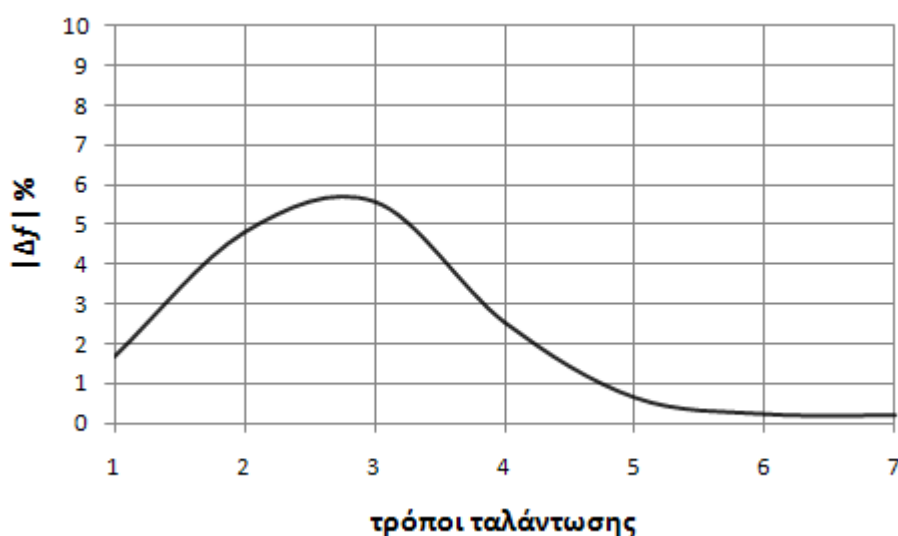
Το μέτρο ελαστικότητας είναι  $E = 1.709 * 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

Τώρα θα υπολογίσουμε τις θεωρητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων με βάση την παραπάνω τιμή του μέτρου ελαστικότητας.

Στην πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα φαίνονται οι τρόποι ταλάντωσης, στη δεύτερη στήλη οι αντίστοιχες θεωρητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων, στην τρίτη στήλη οι αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την πειραματική διαδικασία και στην τέταρτη στήλη η διαφορά τους.

Ιδιορυθμοί (τρόποι)	Θεωρητικές τιμές - $f_{\theta}$ (Hz)	Πειραματικές τιμές $f_{\pi}$ (Hz)	$\Delta f = f_{\theta} - f_{\pi}$ (Hz)
1	12.2	12	0.2
2	76.5	73	3.5
3	214.3	203	11.3
4	420.1	431	-10.9
5	694.4	690	4.4
6	1037.3	1035	2.3
7	1448.8	1446	2.8

Στην παρακάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται η ποσοστιαία διαφορά  $\Delta f$  από τις πειραματικές τιμές για κάθε τρόπο ταλάντωσης.



Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε τις αποκλίσεις που μπορεί να υπάρχουν στο μέτρο ελαστικότητας λόγω του σφάλματος της μέτρησης των διαστάσεων της ράβδου. Επίσης θα κατανοήσουμε καλύτερα την ποσοστιαία σχέση που έχει η μεταβολή της πυκνότητας με το μέτρο ελαστικότητας.

Η ράβδος ορθογώνιας διατομής που πραγματοποιήσαμε το προηγούμενο πείραμα έχει όπως αναφέραμε και στην αρχή της ενότητας, ύψος  $h = 0.0038 \text{ m}$ , πλάτος  $b = 0.04 \text{ m}$ , μήκος  $L = 0.514 \text{ m}$  και βάρος  $m = 0.605 \text{ kg}$ . Η πυκνότητα της είναι  $\rho = 7734.7 \text{ kg/m}^3$ .

Για ένα σφάλμα μέτρησης του ύψους  $h$  της τάξης των  $\pm 0.1$  mm έχουμε σφάλμα στην πυκνότητα ίσο με:

Διαφορά σε mm	Διαφορά στην πυκνότητα $Kg/m^3$	Ποσοστιαία διαφορά στην πυκνότητα- %
+0.1	189.6	2.45
-0.1	218.3	2.82

Η διαφορά αυτή δείχνει μικρή άλλα εάν αναλογιστούμε ότι το ατσάλι με 20% πρόσμιξη νικελίου έχει πυκνότητα  $7933 kg/m^3$  και με 40% πρόσμιξη νικελίου  $8169 kg/m^3$ , δηλαδή διαφορά  $236 kg/m^3$ , αντιλαμβανόμαστε ότι το σφάλμα που προκαλεί το 0.1 mm του ύψους της ράβδου είναι πολύ μεγάλο. Για να κατανοήσουμε καλύτερα το μέγεθος αυτού του σφάλματος, θα υπολογίσουμε τη διαφορά που επιφέρει στο μέτρο ελαστικότητας.

Διαφορά σε mm	Μέτρο ελαστικότητας $\frac{N}{m^2} * 10^{11}$	Διαφορά στο μέτρο ελαστικότητας $N/m^2$	Ποσοστιαία διαφορά στην πυκνότητα από την κανονική τιμή του E %
+0.1	1.667	0.042	2.52
-0.1	1.757	0.048	2.73

Παρατηρούμε ότι η ποσοστιαία διαφορά είναι περίπου ίδια με αυτή της πυκνότητας. Άρα κατανοούμε ότι ένα σημαντικό πρόβλημα για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας, είναι ο υπολογισμός της πυκνότητας του υλικού αν αναλογιστούμε ότι κατά μήκος της ράβδου το πάχος της δεν είναι ίδιο.

## Συμπεράσματα

Η μεθοδολογία την οποία ακολουθήσαμε για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας, βασίστηκε στη εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων της ράβδου. Ένα βασικό πρόβλημα που προέκυψε είναι ότι το πλάτος των εγκάρσιων κυμάτων δεν είναι πάντα αρκετά μεγάλο με αποτέλεσμα οι στάθμες του φάσματος των ιδιοσυχνοτήτων να μην είναι πάντα ευδιάκριτες. Για τον εντοπισμό τους χρησιμοποιήσαμε αρχικά θεωρητικές εξισώσεις που παρέχουν τις ιδιοσυχνότητες της ράβδου και έπειτα αναζητήσαμε τις ιδιοσυχνότητες που προέκυψαν από το πείραμα βασιζόμενοι στις θεωρητικές τιμές. Ένα άλλο πρόβλημα που προκύπτει σε αυτό το βήμα είναι ότι χρειαζόμαστε το μέτρο ελαστικότητας και την πυκνότητα της ράβδου. Η πυκνότητα υπολογίζεται από τις διαστάσεις και το βάρος με κάποιες μικρές αποκλίσεις. Η τιμή του μέτρου ελαστικότητας που επιλέγουμε γίνεται με βάση το υλικό. Δηλαδή γνωρίζουμε ότι ο χάλυβας έχει μέτρο ελαστικότητας από  $1.8$  έως  $2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ . Άρα θα επιλέξουμε μία τιμή που βρίσκεται ανάμεσα στις παραπάνω τιμές και προσεγγίζει (με τον θεωρητικό υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων) τις συχνότητες που καταγράψαμε και είναι ευδιάκριτες στο σήμα μας. Δηλαδή αν στο σήμα που καταγράψαμε ξεχωρίζουν από το πλάτος τους οι συχνότητες  $72 \text{ Hz}$  και  $450 \text{ Hz}$  και με την θεωρητική προσέγγιση βρούμε για μία τιμή  $A$  του μέτρου ελαστικότητας ότι η δεύτερη και η τέταρτη ιδιοσυχνότητα βρίσκονται στα  $82 \text{ Hz}$  και  $460 \text{ Hz}$  θα ελαττώσουμε ελάχιστα την τιμή  $A$ , αφού η ιδιοσυχνότητα είναι ανάλογη του μέτρου ελαστικότητας και οι τιμές θα πλησιάσουν περισσότερο σε αυτές που υπάρχουν στο σήμα μας. Με βάση την τιμή του μέτρου ελαστικότητας για την οποία οι θεωρητικές και οι πειραματικές τιμές συχνοτήτων πλησιάσουν όσο το δυνατόν περισσότερο, θα αναζητήσουμε στο σήμα που καταγράψαμε και τις υπόλοιπες τιμές των ιδιοσυχνοτήτων.

## Προτάσεις για συνέχεια της εργασίας

Μέσα από την παραπάνω πτυχιακή εργασία γεννήθηκαν απορίες και για άλλα ζητήματα τα οποία σχετίζονται με τις ταλαντώσεις και το μέτρο ελαστικότητας και θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν στο μέλλον σαν εργασίες. Ένα από αυτά είναι η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας μίας ράβδου που προκύπτει κατά την ταλάντωση για δεδομένο μέτρο ελαστικότητας και δύναμη διέγερσης. Επίσης θα μπορούσε να εφαρμοστεί η παραπάνω μεθοδολογία για υλικά με γνωστή πυκνότητα και μέτρο ελαστικότητας με σκοπό να αξιολογηθεί η ακρίβεια της μεθόδου, καθώς και να αναλυθούν τα σφάλματα που προκύπτουν.

## Αναφορές - Βιβλιογραφία

Digilov, R.M. (2008), “Flexural vibration test of a cantilever beam with a force sensor - fast determination of Young's modulus” *Eur. J. Phys.* 29 589.

Engineers Edge, διαθέσιμο στην ιστοσελίδα  
[http://www.engineersedge.com/properties\\_of\\_metals.htm](http://www.engineersedge.com/properties_of_metals.htm) (10- 3- 2010)

Ganci, S. (2009), “A simple experiment on flexural vibrations and Young’s modulus measurement” *Phys. Educ.* 44 236.

Haeberli, W. (2009), “Laboratory exercises on oscillation modes of pipes” *Am. J. Phys.* 77 (3).

Honeywell Sensotec, “Frequently Asked Questions”, διαθέσιμο στην ιστοσελίδα  
[http://www.sensotec.com/accelerometer\\_faq.asp?27](http://www.sensotec.com/accelerometer_faq.asp?27) (16- 1- 2010)

Moloney, M. J. (2005) “Measuring and calculating bar flexural vibration frequencies” *Am. J. Phys.* 73 (5).

Neville, H. Fletcher & Thomas, D. Rossing, *The physics of musical instruments*, Springer Science, New York 1998.

The Engineering Toolbox, διαθέσιμο στην ιστοσελίδα  
[http://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d\\_773.html](http://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d_773.html) (10- 3 -2010)

Tyagi, S. and Lord, Arthur E. Jr. (1980) “ Simple and inexpensive apparatus for Young’s modulus measurement”, *Am. J. Phys.* 48 (3).

Willson, F. and Lord, Arthur E. Jr. (1972) “Young’s modulus determination via simple, inexpensive static and dynamic measurements” *AJP Volume 41 / 655*.

«Σύνδεσμος καθηγητών σχεδιασμού και τεχνολογίας Κύπρου», διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://www.texnologia.com/kataskebes-Structures/ypologismos2.htm> (10- 3- 2010)