



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ

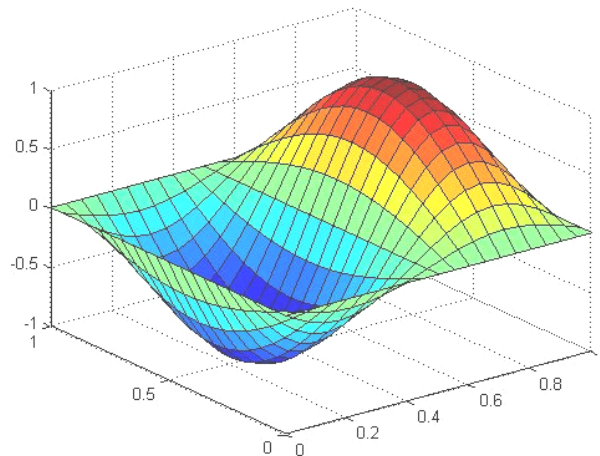
(Τ.Ε.Ι.) ΚΡΗΤΗΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΡΕΘΥΜΝΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ & ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ
ΣΤΗΝ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ.



ΕΛΕΝΗ ΠΟΝΤΙΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΚΟΥΖΟΥΠΗΣ

ΡΕΘΥΜΝΟ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2006

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον Επικ. Καθηγητή του Τ.Ε.Ι Κρήτης Δρ. Σπύρο Κουζούπη για την πολύτιμη βοήθειά του σε επιστημονικό επίπεδο και την υποστήριξή του γενικότερα. Τον Γιάννη Φαμέλη, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Ε.Μ.Π, για τη παροχή συγγραμμάτων και τις εύστοχες παρατηρήσεις.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ :

Περιεχόμενα.....	3
Σχήματα.....	5
Πίνακες.....	7
Περίληψη.....	8
1. Εισαγωγή.....	9
2. Μερικές διαφορικές εξισώσεις.....	11
2.1 Εισαγωγή.....	11
2.2 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες.....	13
2.3 Κατηγοριοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων.....	15
2.4 Καλά τοποθετημένο πρόβλημα.....	17
3. Αριθμητική επίλυση.....	19
3.1 Εισαγωγή.....	19
3.2 Μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς.....	20
3.2.1 Τύποι πεπερασμένων διαφορών.....	20
3.2.2 Διακριτοποίηση.....	25
3.2.3 Σφάλματα.....	27
3.3 Υπερβολικές εξισώσεις.....	30
3.3.1 Ρητές μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών για εξίσωση $1^{\text{ης}}$ τάξης.....	30
3.3.2 Πεπλεγμένες μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών για εξίσωση $1^{\text{ης}}$ τάξης.....	33
3.3.3 Διατύπωση μεθόδων πεπερασμένων διαφορών μέσω πίνακα.....	36
3.3.4 Ρητή μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς για εξίσωση $2^{\text{ης}}$ τάξης.....	39
3.3.5 Πεπλεγμένη μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς για εξίσωση $2^{\text{ης}}$ τάξης.....	41
3.4 Ιδιότητες αριθμητικών μεθόδων.....	45
3.4.1 Ευστάθεια.....	46
3.4.2 Συνέπεια.....	51
3.4.3 Σύγκλιση.....	53
4. Εφαρμογές.....	55
4.1 Εισαγωγή.....	55
4.2 Ταλαντώσεις αβαρούς ελαστικής χορδής.....	56
4.2.1 Αναλυτική λύση.....	57

4.2.2 Ρητή αριθμητική λύση.....	62
4.2.3 Πεπλεγμένη αριθμητική λύση.....	66
4.2.4 Σύγκριση των μεθόδων επίλυσης.....	70
4.3 Παλλόμενη ορθογώνια μεμβράνη.....	73
4.3.1 Αναλυτική λύση.....	73
4.3.2 Ρητή αριθμητική λύση.....	78
Παράρτημα 1 : Κώδικες επίλυσης.....	80
Παράρτημα 2 : Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική.....	90
Βιβλιογραφία.....	92

Σχήματα

Σχήμα 2.1 : Παράδειγμα συνοριακής συνθήκης Dirichlet.....	14
Σχήμα 2.2 : Παράδειγμα συνοριακής συνθήκης Neumann.....	14
Σχήμα 2.3 : Παράδειγμα συνοριακής συνθήκης Robin.....	14
Σχήμα 2.4 : Σχηματική αναπαράσταση προβλήματος αρχικών τιμών.....	16
Σχήμα 2.5 : Σχηματική αναπαράσταση προβλήματος συνοριακών τιμών.....	17
Σχήμα 3.1 : Στάδια αριθμητικής επίλυσης.....	19
Σχήμα 3.2 : Πλέγμα στο επίπεδο χώρου – χρόνου.....	26
Σχήμα 3.3 : (a) Μη ομοιόμορφο πλέγμα, (b) Τετραγωνικό πλέγμα και (c) Ομοιόμορφο πλέγμα.....	26
Σχήμα 3.4 : Μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς x και t	31
Σχήμα 3.5 : Μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς t και ανάδρομης ως προς x	31
Σχήμα 3.6 : Μέθοδος Lax – Friedrichs.....	32
Σχήμα 3.7 : Μέθοδος Lax – Wendroff.....	32
Σχήμα 3.8 : Μέθοδος ανάδρομης διαφοράς ως προς t και κεντρικής ως προς x	34
Σχήμα 3.9 : Μέθοδος Crank-Nicolson.....	34
Σχήμα 3.10 : Μέθοδος Wendroff.....	34
Σχήμα 3.11 : Γνωστοί κόμβοι στο χρονικό επίπεδο t και άγνωστοι κόμβοι στο επίπεδο $t + k$, σε ρητή μέθοδο.....	35
Σχήμα 3.12 : Γνωστοί κόμβοι στο χρονικό επίπεδο t και άγνωστοι κόμβοι στο επίπεδο $t + k$, σε πεπλεγμένη μέθοδο.....	35
Σχήμα 3.13 : Μέθοδος CFL.....	39
Σχήμα 3.14 : Πεπλεγμένη μέθοδος για $\omega = \frac{1}{2}$	42
Σχήμα 3.15 : Πεπλεγμένη μέθοδος για $\omega = \frac{1}{4}$	42
Σχήμα 3.16 : Αλληλεξάρτηση συνέπειας, σύγκλισης και ευστάθειας.....	46
Σχήμα 3.17 : Η διάδοση του σφάλματος για $r = -2$	47
Σχήμα 3.18 : Η διάδοση του σφάλματος για $r = -1$	47
Σχήμα 4.1 : Απεικόνιση διακριτοποιημένου προβλήματος αρχικών και	

συνοριακών τιμών.....	55
Σχήμα 4.2 : Αρχική κατάσταση της χορδής.....	56
Σχήμα 4.3 : Η ταλάντωση της χορδής σύμφωνα με την αναλυτική επίλυση για χρονικό διάστημα μιας περιόδου με $n=50$	61
Σχήμα 4.4 : Η ταλάντωση της χορδής σύμφωνα με την ρητή μέθοδο επίλυση πεπερασμένων διαφορών για χρονικό διάστημα μιας περιόδου.....	65
Σχήμα 4.5 : Η ταλάντωση της χορδής σύμφωνα με την πεπλεγμένη μέθοδο επίλυση πεπερασμένων διαφορών για χρονικό διάστημα μιας περιόδου.....	69
Σχήμα 4.6 : Σχετικό σφάλμα ρητής και πεπλεγμένης αριθμητικής λύσης.....	72
Σχήμα 4.7 : Αρχική κατάσταση της μεμβράνης.....	73
Σχήμα 4.8 : Η ταλάντωση της μεμβράνης σύμφωνα με την αναλυτική μέθοδο επίλυση για χρονικό διάστημα $T=2\text{ sec}$	77
Σχήμα 4.9 : Η ταλάντωση της μεμβράνης σύμφωνα με την ρητή μέθοδο επίλυση πεπερασμένων διαφορών για χρονικό διάστημα $T=2\text{ sec}$	79

Πίνακες

Πίνακας 2.1 : Κατηγορίες μερικών διαφορικών εξισώσεων.....	15
Πίνακας 3.1 : Τύποι πεπερασμένων διαφορών.....	27
Πίνακας 3.2 : Ρητές μέθοδοι πεπερασμένης διαφοράς για μερική διαφορική εξίσωση $a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$	33
Πίνακας 3.3 : Πεπλεγμένες μέθοδοι πεπερασμένης διαφοράς για μερική διαφορική εξίσωση $a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = S(x,t)$, με $a > 0$	35
Πίνακας 4.1 : Σχετικό σφάλμα ρητής και πεπλεγμένης μεθόδου.....	71

Περίληψη

Αφορμή για αυτή την πτυχιακή εργασία ήταν η αριθμητική επίλυση, για ορισμένες απλές περιπτώσεις, της θεμελιώδους για την ακουστική κυματικής εξίσωσης. Έγινε αναπαράσταση των αριθμητικών λύσεων ως κινούμενα γραφήματα, και σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν οι αναλυτικές λύσεις έγιναν συγκρίσεις με τις αριθμητικές.

Η εργασία περιλαμβάνει μία γενική αναφορά και κατηγοριοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων, μία εκ των οποίων είναι και η κυματική εξίσωση. Ακολουθεί ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων επίλυσης, συγκεκριμένα ανάλυση μεθόδων πεπερασμένων διαφορών και η εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων σε συνήθη μοντέλα της ακουστικής που αφορούν την ελαστική χορδή και την μεμβράνη.

Η εργασία χωρίζεται σε τέσσερα κεφάλαια :

Το πρώτο κεφάλαιο είναι η εισαγωγή. Επισημαίνονται οι βασικές έννοιες που θα αναλυθούν και αναφέρονται τα θεωρητικά και υπολογιστικά μέσα που θα χρησιμοποιηθούν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ορίζονται οι ιδιότητές τους, περιγράφεται η κατηγοριοποίησή τους και αναφέρονται χαρακτηριστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις διαφόρων επιστημονικών πεδίων.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στην αριθμητική επίλυση. Αναπαράγονται οι τύποι πεπερασμένων διαφορών και αναπτύσσονται μέθοδοι επίλυσης για υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} και 2^{ης} τάξης. Αναλύονται οι ιδιότητες των μεθόδων επίλυσης και αναπτύσσονται προγραμματιστικές τεχνικές.

Το τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζει την εφαρμογή των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών σε κυματικά προβλήματα χορδής και μεμβράνης. Παρατίθενται η αναλυτική και η αριθμητική λύση καθώς και η μεταξύ τους σύγκριση.

Οι προγραμματιστικές τεχνικές που περιγράφονται, παρατίθενται στο τέλος της εργασίας η οποία ολοκληρώνεται με βιβλιογραφικό πίνακα.

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα μαθηματικό πρότυπο είναι το μαθηματικό πρόβλημα που η επίλυσή του μας επιτρέπει να περιγράψουμε και να προδιαγράψουμε τη συμπεριφορά του αντιστοίχου φυσικού συστήματος όπως αυτό αποκρίνεται σε δεδομένο σύνολο εισόδων. Το μαθηματικό πρότυπο θεωρείται καλά ορισμένο αν η απόκριση ενός φυσικού συστήματος είναι μοναδική για κάθε είσοδο του προβλήματος. Ένα τέτοιο πρότυπο μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα είτε ως συνεχές, μέσω διαφορικών εξισώσεων, είτε ως διακριτό, μέσω ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων. Το συνεχές πρότυπο προκύπτει από το διακριτό αν η απόσταση μεταξύ των διακριτών στοιχείων τείνει στο μηδέν, ενώ αντίστροφα αν οι παράγωγοι του συνεχούς προτύπου αντικατασταθούν από πηλικά διαφορών προκύπτει το διακριτό πρότυπο.

Η κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$, που συναντάται στην ακουστική,

είναι μια μερική διαφορική εξίσωση που λειτουργεί ως μαθηματικό πρότυπο για κυματικά φαινόμενα σε συνεχές μέσο. Τα κύματα που διαδίδονται σε μια χορδή ή σε μια μεμβράνη υπό ταλάντωση ικανοποιούν την κυματική εξίσωση, οπότε η επίλυσή της βοηθά τη μελέτη και τη προσομοίωση των φυσικών αυτών συστημάτων. Ιστορικά, ο D' Alembert (1717 – 1783) εξήγαγε την εξίσωση για χορδή και επέλυσε το πρόβλημα αρχικών τιμών.

Μια μερική διαφορική εξίσωση ως συνεχές πρότυπο μπορεί να επιλυθεί με αναλυτικές μεθόδους όπως, η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών, η υπέρθεση, οι σειρές Fourier, ο μετασχηματισμός Fourier, ο μετασχηματισμός Laplace και η μέθοδος των χαρακτηριστικών. Για την επίλυση του διακριτού προτύπου έχουν αναπτυχθεί αριθμητικές μέθοδοι όπως, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών, η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων και η φασματική μέθοδος.

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών αποδίδεται στον Euler (1707 - 1783), ο οποίος αναζητούσε προσεγγιστικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων. Αναπτύχθηκε όμως συστηματικά μετά το 1945 όταν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές ήταν πλέον διαθέσιμοι. Η μέθοδος αυτή δεν είναι η πιο ακριβής και ευσταθής παρόλα αυτά υλοποιείται εύκολα και αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη πιο περίπλοκων αριθμητικών μεθόδων.

Η επιτυχής επίλυση ενός προβλήματος με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών εξαρτάται από τις δυνατότητες του υπολογιστικού συστήματος και το κώδικα που χρησιμοποιείται. Ο κώδικας που υλοποιεί την μέθοδο μπορεί να αναπτυχθεί με κάποια γλώσσα προγραμματισμού όπως C, C++, FORTRAN ή κάποιο υπολογιστικό περιβάλλον όπως το MATLAB που χρησιμοποιήθηκε στη παρούσα περίπτωση, το MATHEMATICA ή το MAPLE.

2.ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 Εισαγωγή

Μερική διαφορική εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση στην οποία η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από τουλάχιστον δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και τις παραγώγους τους. Η γενική μορφή των εξισώσεων αυτών είναι:

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots\right) = 0 \quad (2.1)$$

όπου $u(x, y, \dots)$ η άγνωστη συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, n ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών, x, y, \dots οι ανεξάρτητες μεταβλητές και F μια πραγματική συνάρτηση.

Η μέγιστη τάξη της παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης καθορίζει και την τάξη της μερικής διαφορικής εξίσωσης. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (2.2)$$

είναι μερική διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης, ενώ η εξίσωση

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (2.3)$$

είναι μερική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης.

Μια συνάρτηση $u = \phi(x, y, \dots)$ ορισμένη σε ένα πεδίο Ω που έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο πεδίο αυτό και για κάθε $(x, y, \dots) \in \Omega$ ικανοποιεί την εξίσωση (2.1), είναι μια λύση της εξίσωσης (2.1). Η γενική λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης εξαρτάται από παραμέτρους, για το λόγο αυτό αναζητούμε μερικές λύσεις, που ικανοποιούν επιπλέον συνθήκες (αρχικές ή συνοριακές).

Η μερική διαφορική εξίσωση (2.1) ονομάζεται γραμμική, όταν η συνάρτηση F είναι γραμμική ως προς την άγνωστη συνάρτηση u και τις μερικές παραγώγους της.

Για παράδειγμα η εξίσωση,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.4)$$

είναι γραμμική σε αντίθεση με την εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (2.5)$$

που είναι μη γραμμική λόγω του όρου $u \frac{\partial u}{\partial x}$. Μια μη γραμμική μερική

διαφορική εξίσωση τάξης ν , χαρακτηρίζεται ως οιονεί γραμμική αν η F είναι γραμμική ως προς τις μερικές παραγώγους τάξης ν .

Μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση $2^{\text{ης}}$ τάξης ονομάζεται ομογενής αν δεν περιλαμβάνει κανέναν όρο ανεξάρτητο της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της. Για παράδειγμα η εξίσωση (2.6) είναι ομογενής αν $G(x,y)=0$ και μη ομογενής αν $G(x,y) \neq 0$.

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = G(x,y) \quad (2.6)$$

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις συναντώνται σε πολλά επιστημονικά πεδία, όπως η φυσική, η χημεία, η βιολογία. Σε προβλήματα φυσικής και μηχανικής σπάνια ορίζονται μερικές διαφορικές εξισώσεις $1^{\text{ης}}$ τάξης και είναι πιο σύνηθες φαινόμενο να χρησιμοποιούνται συστήματα εξισώσεων $1^{\text{ης}}$ τάξης. Στις περισσότερες εφαρμογές συναντώνται μερικές διαφορικές εξισώσεις $2^{\text{ης}}$ τάξης, τουλάχιστον ως προς μια μεταβλητή.

Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα μερικών διαφορικών εξισώσεων $2^{\text{ης}}$ τάξης είναι:

- Η κυματική εξίσωση, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$, που περιγράφει κυματικά φαινόμενα.

Εμφανίζεται σε εφαρμογές όπως : Ακουστικά κύματα σε σωλήνες, διαμήκη κύματα σε μπάρες, ταλαντώσεις στρέψης σε ράβδους, ταλαντώσεις εύκαμπτης χορδής, μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας σε μονωμένο καλώδιο χαμηλής αντίστασης.

- Η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας, $\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u$, που περιγράφει τη

κατανομή θερμότητας σε ένα σώμα. Χρησιμοποιείται σε προβλήματα αγωγής θερμότητας σε στερεά σώματα, διάχυσης συγκεντρωμένων ποσοτήτων υγρών ή στερεών στη χημεία, διάχυσης της στροβιλώδους κίνησης ενός υγρού με ιξώδες, τηλεγραφική μεταφορά σε καλώδια χαμηλής επαγωγής ή χωρητικότητας, ισοστάθμιση του φορτίου στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, εξέλιξη των πιθανών διανομών σε τυχαίες διαδικασίες

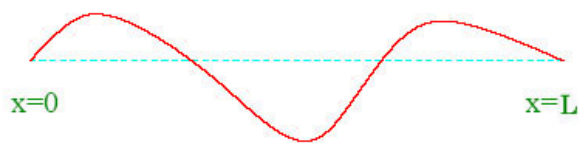
- Η εξίσωση Laplace, $\nabla^2 u = 0$, βασική εξίσωση της θεωρίας δυναμικού.
- Η εξίσωση Helmholtz, $\nabla^2 u + \lambda u = 0$, που χρησιμοποιείται σε κυματικά φαινόμενα για την αντίχρεση συντονισμών.
- Η εξίσωση Poisson, $\nabla^2 u = f(x, y, \dots)$, περιγράφει το βαρυτικό πεδίο στο εσωτερικό ενός σώματος ή το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός φορτισμένου σώματος.
- Η εξίσωση Schrödinger, $\nabla^2 u = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x, y, \dots)] = 0$, που χρησιμοποιείται στη κβαντική μηχανική για κυματικά φαινόμενα σε μόρια και στο πεδίο της υποθαλάσσιας ακουστικής.

2.2 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Μια συνοριακή συνθήκη εκφράζει τη συμπεριφορά της λύσης μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης στο όριο του πεδίου όπου ορίζεται η εξίσωση. Υπάρχουν τρεις πιθανοί τύποι συνοριακών συνθηκών:

- **Συνοριακή συνθήκη Dirichlet.** Προσδιορίζεται η τιμή της λύσης u στη συνοριακή περιοχή. Για παράδειγμα, σε μια χορδή στερεωμένη στα δύο άκρα

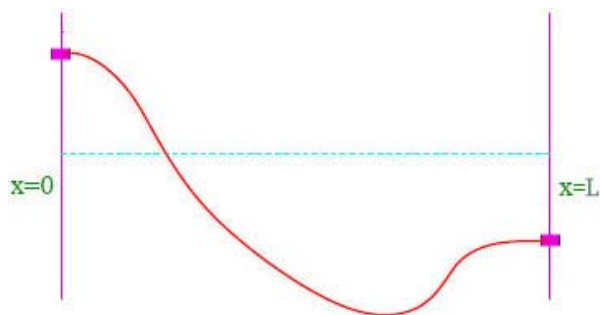
$x=0$ και $x=L$ (σχήμα 2.1), που ικανοποιεί την κυματική εξίσωση, οι συνοριακές συνθήκες είναι : $u(0,t)=u(L,t)=0$.



Σχήμα 2.1

- **Συνοριακή συνθήκη Neumann.** Προσδιορίζεται η ορθή παράγωγος της λύσης u , στη συνοριακή περιοχή. Για παράδειγμα, σε μια χορδή που τα άκρα της προσδένονται σε αβαρείς δακτυλίους και μπορούν να κινούνται ελεύθερα στον άξονα y (σχήμα 2.2), οι συνοριακές συνθήκες είναι:

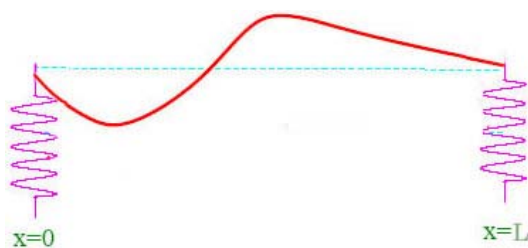
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$



Σχήμα 2.2

- **Συνοριακή συνθήκη Robin's.** Αποτελεί συνδυασμό των δύο παραπάνω συνθηκών . Αν για παράδειγμα, τα άκρα μιας χορδής στηριχθούν σε δύο ελατήρια (σχήμα 2.3) οι συνοριακές συνθήκες, όπως διαμορφώνονται από τη τάση της χορδής και το νόμο του Hooke, θα είναι :

$$u(0,t) - \frac{T}{k} \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(L,t) - \frac{T}{k} \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$



Σχήμα 2.3

Μια αρχική συνθήκη εκφράζει τη συμπεριφορά της λύσης μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης στην αρχική κατάσταση (συνήθως στο χρονικό πεδίο). Οι ιδιότητες της γραμμικότητας και της ομοιογένειας ορίζονται ανάλογα και για τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Τα προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με τις βοηθητικές συνθήκες σε προβλήματα αμιγώς αρχικών συνθηκών ή προβλήματα Cauchy, σε προβλήματα συνοριακών συνθηκών και σε μικτά προβλήματα.

2.3 Κατηγοριοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις, ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες: ελλειπτικές, παραβολικές και υπερβολικές. Στη περίπτωση γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές όπως η εξίσωση (2.6) ή έστω οιονεί γραμμικής εξίσωσης, οι συντελεστές των παραγώγων δεύτερης τάξης ορίζουν ένα πολώνυμο 2^{ου} βαθμού, του τύπου:

$$G(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = [x \ y] * Q * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } x, y \text{ οι μεταβλητές και}$$

$$Q = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{bmatrix}.$$

Η κατηγοριοποίηση, που παρουσιάζεται στο πίνακα 2.1, βασίζεται στους συντελεστές των μερικών παραγώγων της υψηλότερης τάξης A , B και C και ειδικότερα στην ορίζουσα του πίνακα Q .

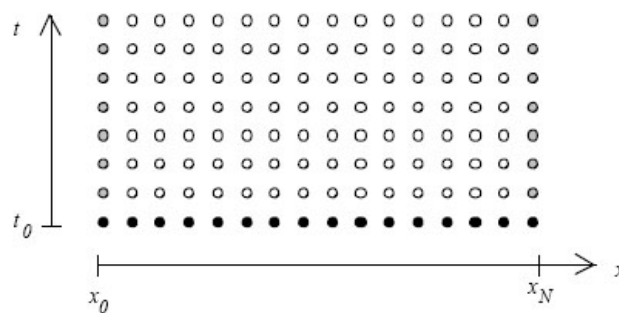
Συνθήκη	Είδος	Παράδειγμα	
$\Delta \nu \quad B^2 - 4AC < 0$	Ελλειπτική	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	Εξίσωση Laplace
$\Delta \nu \quad B^2 - 4AC = 0$	Παραβολική	$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας
$\Delta \nu \quad B^2 - 4AC > 0$	Υπερβολική	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Κυματική εξίσωση

Πίνακας 2.1

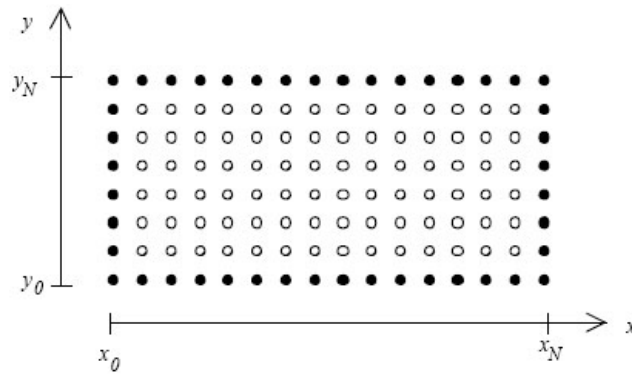
Αν σε μια μερική διαφορική εξίσωση η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από τρεις ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές τότε μπορεί να μην ανήκει μόνο σε μια κατηγορία αλλά σε ένα συνδυασμό κατηγοριών.

Ο τύπος της μερικής διαφορικής εξίσωσης προσδιορίζει τη φύση του προβλήματος που περιγράφεται. Οι παραβολικές εξισώσεις, με χαρακτηριστικό παράδειγμα την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας, εμπεριέχουν χρονική εξάρτηση και περιγράφουν φαινόμενα διάχυσης. Οι λύσεις τους συνήθως μειώνονται εκθετικά στο χρόνο προσεγγίζοντας μια θέση ισορροπίας. Το σήμα και τα σημεία ασυνέχειας διαδίδονται με άπειρη ταχύτητα. Οι υπερβολικές εξισώσεις με χαρακτηριστικό πρότυπο τη κυματική εξίσωση, εξαρτώνται από το χρόνο και περιγράφουν φαινόμενα διάδοσης. Το σήμα διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα ή σε περιορισμένη περιοχή του χώρου, με αποτέλεσμα τα σημεία ασυνέχειας να παραμένουν σταθερά. Αντίθετα με τις προηγούμενες κατηγορίες οι ελλειπτικές εξισώσεις περιγράφουν τη στατική συμπεριφορά ενός μεγέθους σε ορισμένη περιοχή, χωρίς να υπάρχει χρονική εξάρτηση. Χαρακτηριστική ελλειπτική εξίσωση είναι η εξίσωση Laplace.

Οι παραβολικές και υπερβολικές εξισώσεις ορίζονται συνήθως ως προβλήματα αρχικών τιμών ενώ οι ελλειπτικές εξισώσεις ως προβλήματα συνοριακών τιμών. Στα σχήματα 2.4 και 2.5 παρουσιάζονται σχηματικά τα δύο είδη προβλημάτων, με βάση το διακριτοποιημένο πρότυπο.



Σχήμα 2.4 : Σχηματική αναπαράσταση προβλήματος αρχικών τιμών. Οι μαύροι κύκλοι συμβολίζουν τις αρχικές τιμές της συνάρτησης για κάθε x όταν $t = t_0$, οι γκρι τις συνοριακές συνθήκες για συγκεκριμένες τιμές του x και για κάθε τιμή t και οι λευκοί τις άγνωστες τιμές της συνάρτησης που θα υπολογιστούν από τη μερική διαφορική εξίσωση. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί “ διαδίδονται ” κατά τη διεύθυνση που αυξάνεται ο χρόνος από $t = t_0$.



Σχήμα 2.5 : Σχηματική αναπαράσταση προβλήματος συνοριακών τιμών. Οι μαύροι κύκλοι συμβολίζουν τις αρχικές τιμές της συνάρτησης για κάθε συνοριακή θέση και οι λευκοί τις άγνωστες τιμές της συνάρτησης που θα υπολογιστούν από τη μερική διαφορική εξίσωση. Δεν υπάρχει “διάδοση” των αριθμητικών υπολογισμών.

2.4 Καλά τοποθετημένο πρόβλημα

Ένα μαθηματικό πρότυπο που περιλαμβάνει μερικές διαφορικές εξισώσεις και περιγράφει τη συμπεριφορά ενός φυσικού συστήματος πρέπει να παρέχει σωστά αποτελέσματα. Το μαθηματικό πρόβλημα δηλαδή θα πρέπει να είναι καλά τοποθετημένο, πράγμα που εξαρτάται από τις εξισώσεις και τις βοηθητικές συνθήκες του προβλήματος.

Ένα μαθηματικό πρόβλημα ονομάζεται καλά τοποθετημένο αν:

1. Υπάρχει λύση.
2. Η λύση αυτή είναι μοναδική.
3. Η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα.

Σε κάθε πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, οι συναρτήσεις των αρχικών και συνοριακών συνθηκών και οι συντελεστές και μη ομογενείς όροι της μερικής διαφορικής εξίσωσης αποτελούν τα δεδομένα του προβλήματος. Η λύση ενός προβλήματος εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα, αν μικρές μεταβολές των δεδομένων προκαλούν ανάλογες μεταβολές στη λύση.

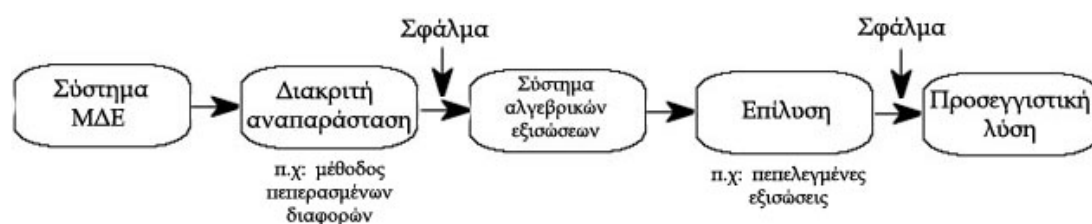
Γενικά δεν πρέπει να ορίζονται πολλές βοηθητικές συνθήκες έτσι ώστε να υπάρχει λύση, αλλά αρκετές ώστε να εξασφαλίζεται η μοναδικότητά της. Για τη συνεχή εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα απαιτούνται βοηθητικές συνθήκες κατάλληλου τύπου.

Κατά την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος, το πρόβλημα θεωρείται καλά τοποθετημένο με βάση τα ίδια κριτήρια και αυτό εξαρτάται από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις και βοηθητικές συνθήκες. Η ύπαρξη λύσης, προϋποθέτει τη σύγκλιση μεταξύ αριθμητικής και ακριβούς λύσης ενώ η μοναδικότητα και η συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα, εξαρτώνται από τον ορισμό κατάλληλων βοηθητικών συνθηκών.

3.ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

3.1 Εισαγωγή

Για την επίλυση προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων έχουν αναπτυχθεί αναλυτικοί και αριθμητικοί τρόποι. Αν και οι αναλυτικοί μέθοδοι παρέχουν ακριβείς λύσεις, μειονεκτούν γιατί κάθε μέθοδος επιλύει ορισμένα είδη προβλημάτων μόνο, καταλήγοντας πολλές φορές σε περίπλοκες εκφράσεις. Δεν είναι εξάλλου λίγες οι περιπτώσεις που είναι αδύνατο να καταλήξουμε σε αναλυτική λύση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων όπως η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών, η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων και η φασματική μέθοδος. Στο σχήμα 3.1 παρουσιάζονται τα βήματα που ακολουθούνται για να υπολογιστεί η αριθμητική προσέγγιση.



Σχήμα 3.1: Στάδια αριθμητικής επίλυσης.

Η καταλληλότητα μιας αριθμητικής μεθόδου για την επίλυση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης εξαρτάται από διάφορους παράγοντες όπως, η εύκολη υλοποίηση του αλγορίθμου, η ακρίβεια και η ευστάθειά του, το ποσό της μνήμης του υπολογιστικού συστήματος που δεσμεύεται και η αναστρεψιμότητά του. Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών υλοποιείται και αναλύεται μαθηματικά πιο εύκολα από τις υπόλοιπες μεθόδους. Ακολουθεί η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων και στο τέλος η φασματική μέθοδος που απαιτεί ιδιαίτερες μαθηματικές γνώσεις με αντάλλαγμα την υψηλή ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών και η φασματική μέθοδος ενδείκνυνται για συνήθης συννοριακές περιοχές, δηλαδή συννοριακές περιοχές που ορίζονται σε σταθερό σύστημα συντεταγμένων, σε αντίθεση με τη μέθοδο

πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται σε μη κανονικές συνοριακές περιοχές.

3.2 Μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών προϋπήρξε των υπολοίπων μεθόδων και συνίσταται στην αντικατάσταση κάθε παραγώγου της μερικής διαφορικής εξίσωσης με προσεγγιστικά πηλικά διαφορών - βάση του θεωρήματος Taylor - , έτσι ώστε το πρόβλημα να μεταβληθεί σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Τα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα μεταβλητών συντελεστών ή μη γραμμικά προβλήματα και με μικρή υπολογιστική προσπάθεια μπορεί να παρέχει ποσοτικές προσεγγίσεις. Τα μειονεκτήματα της μεθόδου είναι αφενός πως δεν παρέχει ποιοτικές πληροφορίες για τη λύση και είναι δύσκολο να εκτιμήσουμε την ασυμφωνία ανάμεσα σε αυτή τη προσέγγιση και την ακριβή λύση.

3.2.1 Τύποι πεπερασμένων διαφορών

Αν $u(x,t)$ μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, η πρώτη μερική παράγωγός της ως προς το x και το t αντίστοιχα ορίζεται ως:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} \quad (3.2)$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε τις παραπάνω μερικές παραγώγους με τα πηλικά διαφορών αντίστοιχα:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \approx \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} \quad (3.4)$$

Η απόκλιση μεταξύ του ηλίκου διαφοράς και της παραγώγου που προσεγγίζει, ονομάζεται σφάλμα προσέγγισης και εξαρτάται από τη συμπεριφορά της u στο σημείο (x, t) και τις τιμές των h και k . Η ανάλυση του σφάλματος προσέγγισης βασίζεται στο θεώρημα του Taylor.

Θεώρημα Taylor. Έστω πως η συνάρτηση $u(x, t)$ και όλες οι μερικές της παράγωγοι, τάξης έως και $n+1$, είναι συνεχείς στο διάστημα $\Omega = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ και (x_0, t_0) είναι σημείο του Ω . Για κάθε (x, t) που ανήκει στο Ω , υπάρχει ξ μεταξύ x και x_0 και τ μεταξύ t και t_0 τέτοιο ώστε $u(x, t) = P_n(x, t) + R_n(x, t)$. Όπου, P_n το πολυώνυμο Taylor n βαθμού για δύο μεταβλητές,

$$P_n(x, t) = u(x_0, t_0) + \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) * (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) * (t - t_0) \right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_0, t_0) * (x - x_0)(t - t_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_0, t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2} \right] +$$

$$+ \dots + \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)! j!} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j} \partial t^j}(x_0, t_0) * (x - x_0)^{n-j} (t - t_0)^j \right]$$

και R_n το υπόλοιπο:

$$R_n(x, t) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1-j)! j!} \frac{\partial^{n+1} u(\xi, \tau)}{\partial x^{n+1-j} \partial t^j} (x - x_0)^{n+1-j} (t - t_0)^j$$

Ο τύπος (3.3) και το αντίστοιχο σφάλμα εξάγονται με το θεώρημα Taylor. Αν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της u και είναι συνεχής και $h > 0$, από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει,

$$u(x+h, t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) * h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, t) * \frac{h^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, t) * \frac{h}{2}$$

όπου $x < \xi < x + h$.

Ο τύπος,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, t) * \frac{h}{2} \quad (3.5)$$

ονομάζεται **τύπος πρόδρομης διαφοράς** για τη $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Αλλάζοντας το πρόσημο του h στο τύπο (3.5) προκύπτει ο **τύπος ανάδρομης διαφοράς** για τη $\frac{\partial u}{\partial x}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, t) * \frac{h}{2} \quad (3.6)$$

όπου $x - h < \xi < x$.

Από τους τύπους (3.5) και (3.6) συμπεραίνουμε πως όσο μικρότερη είναι η τιμή του h τόσο μικρότερο και το σφάλμα προσέγγισης. Επειδή όταν το $h \rightarrow 0 \Rightarrow h^2 < h$ θα ήταν προτιμότερο το σφάλμα προσέγγισης στο τύπο πεπερασμένης διαφοράς να είναι ανάλογο του h^2 και όχι του h . Με το θεώρημα Taylor μπορούμε να εξάγουμε των **τύπο κεντρικής διαφοράς** για τη $\frac{\partial u}{\partial x}$ στην οποία το σφάλμα προσέγγισης είναι ανάλογο του h^2 . Με το

θεώρημα Taylor,

$$u(x+h, t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) * h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) * \frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_1, t) * \frac{h^3}{6} \quad (3.7)$$

και

$$u(x-h, t) = u(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) * h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) * \frac{h^2}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_2, t) * \frac{h^3}{6} \quad (3.8)$$

όπου $x < \xi_1 < x+h$ και $x-h < \xi_2 < x$. Από τους τύπους (3.7) και (3.8) προκύπτει :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} - \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_1,t) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_2,t) \right] * \frac{h^2}{12} \quad (3.9)$$

Αν η $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ είναι συνεχής και $\xi_1 < \xi < \xi_2$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής ο τύπος (3.9) απλοποιείται,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi,t) \quad (3.10)$$

όπου $x-h < \xi < x+h$.

Οι παραπάνω προσεγγίσεις, που χρησιμοποιούνται περισσότερο, βασίζονται σε δυο γνωστές τιμές της u για να υπολογιστεί μια νέα. Χρησιμοποιώντας τρεις ή περισσότερες τιμές της u μπορούμε να κάνουμε πιο ακριβείς προσεγγίσεις. Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας τρεις τιμές της συνάρτησης u , ο τύπος πρόδρομης διαφοράς για τη $\frac{\partial u}{\partial x}$ μπορεί να υπολογιστεί από το θεώρημα Taylor ως εξής :

$$u(x+h,t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) * h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) * \frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_1,t) * \frac{h^3}{6} \quad (3.11)$$

$$u(x+2h,t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) * 2h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) * 2h^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_2,t) * \frac{4h^3}{3} \quad (3.12)$$

Από τους τύπους (3.11) και (3.12), προκύπτει,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{4u(x+h,t) - 3u(x,t) - u(x+2h,t)}{2h} \quad (3.13)$$

όπου το σφάλμα είναι ανάλογο του h^2 .

Ο αντίστοιχος τύπος για ανάδρομη διαφορά είναι,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{-4u(x+h,t) + 3u(x,t) + u(x+2h,t)}{2h} \quad (3.14)$$

όπου το σφάλμα είναι ανάλογο του h^2 .

Οι προσεγγίσεις αυτές όμως απαιτούν περισσότερες βοηθητικές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος, αφού πρέπει να υπολογιστούν δύο αρχικά σημεία.

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν οι τύποι πεπερασμένων διαφορών για μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης, οι αντίστοιχοι τύποι των μερικών παραγώγων ως προς t και των μικτών παραγώγων της u .

Από τους τύπους (3.11) και (3.12) υπολογίζεται ο τύπος πρόδρομης διαφοράς για τη προσέγγιση της $2^{\text{ης}}$ παραγώγου $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Με κατάλληλους υπολογισμούς προκύπτει,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \approx \frac{u(x+2h,t) - 2u(x+h,t) + u(x,t)}{h^2} \quad (3.15)$$

όπου το σφάλμα είναι ανάλογο του h .

Ο αντίστοιχος τύπος για ανάδρομη διαφορά είναι,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \approx \frac{u(x-2h,t) - 2u(x-h,t) + u(x,t)}{h^2} \quad (3.16)$$

όπου το σφάλμα είναι ανάλογο του h .

Από τους τύπους (3.7) και (3.8) προκύπτει ο τύπος κεντρικής διαφοράς,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \quad (3.17)$$

όπου το σφάλμα είναι ανάλογο του h^2 .

Ο τύπος πρόδρομης διαφοράς για τη μικτή παράγωγο $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.5) και τον αντίστοιχο τύπο για τη 1^η παράγωγο ως προς t ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) &\approx \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,t+k) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) &\approx \frac{u(x+h,t+k) - u(x,t+k) - u(x+h,t) + u(x,t)}{hk} \end{aligned} \quad (3.18)$$

όπου το σφάλμα είναι ανάλογο του $h+k$.

Αντίστοιχα ο τύπος ανάδρομης διαφοράς είναι,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) \approx \frac{u(x-h,t-k) - u(x,t-k) - u(x-h,t) + u(x,t)}{hk} \quad (3.19)$$

όπου το σφάλμα είναι ανάλογο του $h+k$, ενώ ο τύπος κεντρικής διαφοράς είναι,

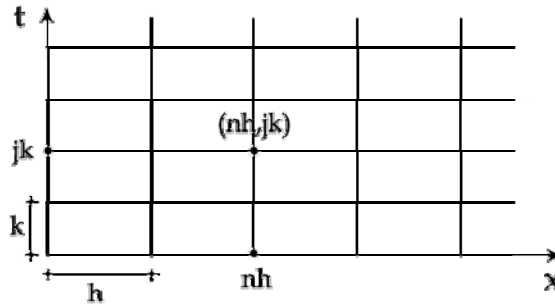
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t+k) - u(x-h,t+k) - u(x+h,t-k) + u(x-h,t-k)}{4hk} \quad (3.20)$$

όπου το σφάλμα είναι ανάλογο του h^2+k^2 .

3.2.2 Διακριτοποίηση

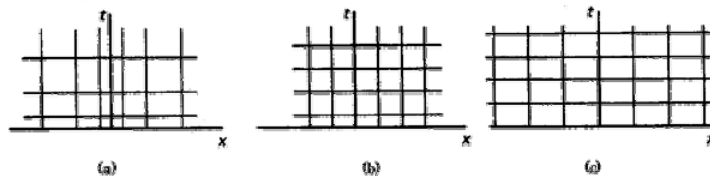
Με την εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, υπολογίζονται οι λύσεις μόνο σε ορισμένα σημεία του πεδίου τιμών, έτσι ώστε το πρόβλημα να επιλύεται με πεπερασμένη διαδικασία. Για την επίλυση ενός προβλήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων ορίζουμε στο επίπεδο xt ένα πλέγμα, δηλαδή ένα σύνολο σημείων $(x_n, t_j) = (x_0 + nh, t_0 + jk)$, όπου $n, j \in \mathbb{Z}$ και (x_0, t_0) είναι σημείο αναφοράς.

Το αριθμητικό πλέγμα αποτελεί διακριτοποιημένη αναπαράσταση του γεωμετρικού πεδίου στο οποίο θα επιλυθεί το πρόβλημα. Τα σημεία (x_n, t_j) ονομάζονται κόμβοι και οι θετικοί αριθμοί h και k είναι τα διαστήματα πλέγματος (βήματα) στους άξονες x και t .



Σχήμα 3.2: Πλέγμα στο επίπεδο χώρου – χρόνου.

Αν το h μεταβάλλεται με το n και το k με το j , το πλέγμα είναι μη ομοιόμορφο. Αν τα h και k είναι σταθερά το πλέγμα είναι ομοιόμορφο και τέλος στη περίπτωση που $h = k = \text{σταθερά}$, το πλέγμα είναι τετραγωνικό.



Σχήμα 3.3: (a) Μη ομοιόμορφο πλέγμα, (b) Τετραγωνικό πλέγμα και (c) Ομοιόμορφο πλέγμα.

Συμβολίζουμε την τιμή της $u(x, y)$ στο κόμβο (x_n, t_j) ως $u_n^j = u(x_n, t_j)$, οπότε οι τύποι των πεπερασμένων διαφορών απλοποιούνται όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.1, όπου το $O(h)$, $O(k), \dots$ συμβολίζουν το αντίστοιχο σφάλμα προσέγγισης. Το σύμβολο O που χρησιμοποιείται για το σφάλμα προσέγγισης ορίζεται ως εξής:

Αν $g(y) = O(y^n)$, $y \in \Omega \Rightarrow |g(y)| \leq cy^n$, $\forall y \in \Omega$, όπου c θετική σταθερά.

Τύπος πρόδρομων διαφορών για τη $\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t_j) = \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{h} + O(h)$	(3.21)
Τύπος ανάδρομων διαφορών για τη $\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t_j) = \frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{h} + O(h)$	(3.22)
Τύπος κεντρικών διαφορών για τη $\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t_j) = \frac{u_{n+1}^j - u_{n-1}^j}{2h} + O(h^2)$	(3.23)
Τύπος κεντρικών διαφορών για τη $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t_j) = \frac{u_{n-1}^j - 2u_n^j + u_{n+1}^j}{h^2} + O(h^2)$	(3.24)
Τύπος πρόδρομων διαφορών για τη $\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial u}{\partial t}(x_n, t_j) = \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{k} + O(k)$	(3.25)
Τύπος ανάδρομων διαφορών για τη $\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial u}{\partial t}(x_n, t_j) = \frac{u_n^j - u_n^{j-1}}{k} + O(k)$	(3.26)
Τύπος κεντρικών διαφορών για τη $\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial u}{\partial t}(x_n, t_j) = \frac{u_n^{j+1} - u_n^{j-1}}{2k} + O(k^2)$	(3.27)
Τύπος κεντρικών διαφορών για τη $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_n, t_j) = \frac{u_n^{j-1} - 2u_n^j + u_n^{j+1}}{k^2} + O(k^2)$	(3.28)

Πίνακας 3.1 : Τύποι πεπερασμένων διαφορών.

3.2.3 Σφάλματα

Για το προσδιορισμό της καλύτερης προσεγγιστικής μεθόδου χρειάζεται να συγκρίνουμε τα σφάλματα που προκύπτουν σε κάθε περίπτωση. Σφάλμα μιας αριθμητικής μεθόδου ονομάζεται η διαφορά του αποτελέσματός της από το αποτέλεσμα της αναλυτικής επίλυσης. Το υπολογιστικό αυτό σφάλμα διαχωρίζεται σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με το λόγο για τον οποίο εμφανίζεται.

Το σφάλμα προσέγγισης ή σφάλμα αποκοπής είναι αποτέλεσμα του πεπερασμένου αριθμού βημάτων που ακολουθούνται σε ένα υπολογισμό ενώ απαιτείται άπειρος αριθμός βημάτων για να παραχθεί ακριβές αποτέλεσμα.

Οφείλεται δηλαδή σε προσεγγίσεις, όπως η παραγραφή όρων που προκύπτουν από την ανάπτυξη του θεωρήματος Taylor. Είναι η διαφορά μεταξύ της μερικής διαφορικής εξίσωσης και της εξίσωσης πεπερασμένης διαφοράς που τη προσεγγίζει. Εκτός όμως από αυτό υπάρχουν δύο επιπλέον σφάλματα. Το σφάλμα θέσης και το σφάλμα στρογγυλοποίησης.

Το σφάλμα θέσης (διακριτοποίησης) οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε νέα τιμή $u_n^j = u(x_n, t_j)$ που υπολογίζεται, βασίζεται σε προηγούμενες προσεγγιστικές τιμές. Η αντικατάσταση της συνεχούς συνάρτησης με μια διακριτοποιημένη εισάγει ένα σφάλμα στο πρόβλημα που συνήθως έχει κανονικότητα και δεν είναι τελείως τυχαίο. Το σφάλμα αυτό εξαρτάται από τον αλγόριθμο επίλυσης που θα ακολουθηθεί.

Το σφάλμα στρογγυλοποίησης δημιουργείται κατά των υπολογισμό των τιμών, λόγω του περιορισμένου αριθμού ψηφίων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Το σφάλμα αυτό υπάρχει πάντα και είναι τυχαίο.

Τα σφάλματα προσέγγισης και θέσης τείνουν να εξαλειφθούν όσο αυξάνεται ο αριθμός των διακριτών σημείων του πλέγματος, δηλαδή όσο μειώνονται τα διαστήματα h και k . Σε αυτή τη περίπτωση όμως αυξάνεται το σφάλμα στρογγυλοποίησης καθώς και ο υπολογιστικός χρόνος.

Η επιλογή των διαστημάτων του πλέγματος είναι τελικά προϊόν συμβιβασμού μεταξύ του σφάλματος προσέγγισης και του σφάλματος στρογγυλοποίησης. Έστω πως υπολογίζουμε τη παράγωγο $\frac{\partial u}{\partial t}$ με το τύπο πρόδρομων διαφορών (3.25). Συμβολίζουμε την ακριβής λύση ως v_n^j , τη προσεγγιστική λύση ως U_n^j και το σφάλμα ως e_n^j , οπότε :

$$v_n^j = U_n^j + e_n^j$$

Υποθέτουμε πως το σφάλμα είναι φραγμένο και η μέγιστη τιμή του είναι E δηλαδή,

$$|e_n^j| \leq E, \quad \forall n, j$$

ενώ φραγμένη είναι και η 2^η παράγωγος με μέγιστη τιμή M , δηλαδή :

$$\left| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) \right| \leq M, \quad \forall x,t$$

Σύμφωνα με το τύπο πρόδρομων διαφορών :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_n, t_j) = \frac{v_n^{j+1} - v_n^j}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x_n, \tau_j), \quad t_j < \tau_j < t_{j+1}$$

Αντικαθιστώντας από τους προηγούμενους τύπους προκύπτει :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_n, t_j) = \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} + \frac{e_n^{j+1} - e_n^j}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x_n, \tau_j)$$

Το ολικό σφάλμα θα είναι φραγμένο,

$$\left| \frac{e_n^{j+1} - e_n^j}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x_n, \tau_j) \right| \leq \left| \frac{e_n^{j+1} - e_n^j}{k} \right| + \left| \frac{k}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x_n, \tau_j) \right| \leq \frac{2E}{k} + \frac{Mk}{2}$$

και η μέγιστη τιμή του θα προσεγγίζει το άπειρο καθώς $k \rightarrow 0$ ή $k \rightarrow \infty$. Αποδεικνύεται λοιπόν πως το συνολικό σφάλμα γίνεται μέγιστο στη περίπτωση που το βήμα τείνει στο μηδέν, οπότε αυξάνεται το σφάλμα στρογγυλοποίησης, αλλά και όταν το βήμα γίνεται πολύ μεγάλο με αποτέλεσμα να αυξάνονται το σφάλμα προσέγγισης και το σφάλμα θέσης.

3.3 Υπερβολικές εξισώσεις

Οι υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν συνήθως φαινόμενα μετάδοσης, δηλαδή την εξέλιξη ενός μεγέθους ως προς κάποια άλλα. Η ακριβής λύση τους υπολογίζεται συνήθως με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών. Εναλλακτικά, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα και να παρέχει μια αριθμητική προσέγγιση της λύσης.

3.3.1 Ρητές μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών για εξίσωση 1^{ης} τάξης

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών στην υπερβολική εξίσωση 1^{ης} τάξης,

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (3.29)$$

όπου a μη μηδενική σταθερά.

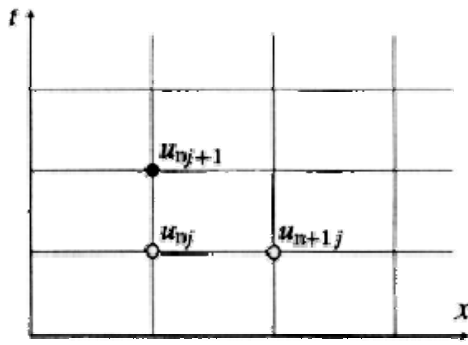
Ορίζουμε ένα πλέγμα xt , με $x_n = nh$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $t_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Συμβολίζουμε ως u_n^j την τιμή της $u(x, t)$ στο κόμβο (x_n, t_j) και U_n^j τη λύση της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών που προσεγγίζει τη λύση u_n^j της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους στον τύπο (3.29) με τις πεπερασμένες διαφορές των τύπων (3.21) και (3.25), προκύπτει η **μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς x και t** , με σφάλμα προσέγγισης $O(k+h)$:

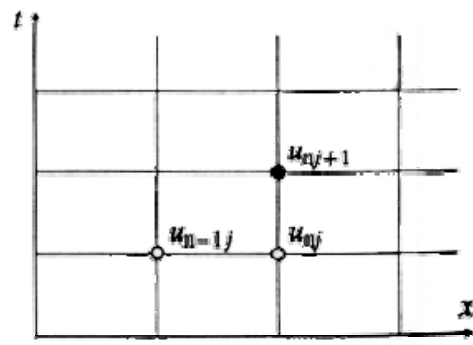
$$a \frac{U_{n+1}^j - U_n^j}{h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} = 0 \quad (3.30)$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.22) και (3.25), προκύπτει η **μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς t και ανάδρομης ως προς x** , με σφάλμα προσέγγισης $O(k+h)$:

$$a \frac{U_n^j - U_{n-1}^j}{h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} = 0 \quad (3.31)$$



Σχήμα 3.4 : Μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς x και t .



Σχήμα 3.5 : Μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς t και ανάδρομης ως προς x .

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.23) και (3.25), προκύπτει η **μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς t και κεντρικής ως προς x** , με σφάλμα προσέγγισης $O(k + h^2)$:

$$a \frac{U_{n+1}^j - U_{n-1}^j}{2h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} = 0 \quad (3.32)$$

Αντικαθιστώντας στο τύπο (3.32) τον όρο U_n^j με το μέσο όρο των δύο εκατέρωθέν του - χωρικά - κόμβων, προκύπτει η **μέθοδος Lax – Friedrichs**, με σφάλμα προσέγγισης $O(k + h^2)$:

$$a \frac{U_{n+1}^j - U_{n-1}^j}{2h} + \frac{U_n^{j+1} - \frac{(U_{n-1}^j + U_{n+1}^j)}{2}}{k} = 0 \quad (3.33)$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.23) και (3.27), προκύπτει η **μέθοδος κεντρικής διαφοράς ως προς t και x** , με σφάλμα προσέγγισης $O(k^2 + h^2)$:

$$a \frac{U_{n+1}^j - U_{n-1}^j}{2h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^{j-1}}{2k} = 0 \quad (3.34)$$

Από τη σχέση (3.29) προκύπτει :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

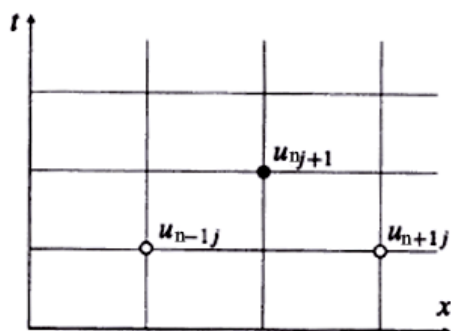
Οπότε η σειρά Taylor :

$$u(x, t+k) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)k + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)\frac{k^2}{2} + O(k^3) \Rightarrow$$

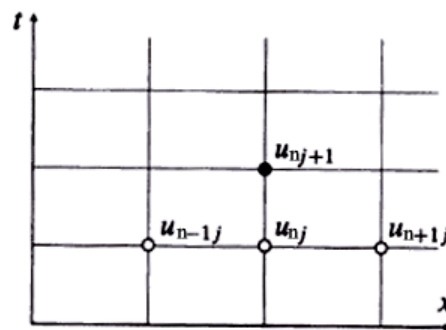
$$u(x, t+k) = u(x, t) - a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)k + \frac{a^2 k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O(k^3)$$

Αντικαθιστώντας τους τύπους (3.23) και (3.24) στη προηγούμενη σχέση, προκύπτει η **μέθοδος Lax - Wendroff**, με σφάλμα προσέγγισης $O(k^2 + h^2)$:

$$U_n^{j+1} = U_n^j - \frac{ka}{2h}(U_{n+1}^j - U_{n-1}^j) + \frac{k^2 a^2}{2h^2}(U_{n-1}^j - 2U_n^j + U_{n+1}^j) \quad (3.35)$$



Σχήμα 3.6 : Μέθοδος Lax - Friedrichs.



Σχήμα 3.7 : Μέθοδος Lax - Wendroff.

Οι παραπάνω μέθοδοι επίλυσης ονομάζονται ρητές ως προς το χρόνο γιατί σε κάθε τύπο υπάρχει μόνο ένας όρος που πρέπει να υπολογιστεί στο επόμενο χρονικό βήμα, με βάση τους διαθέσιμους όρους των προηγούμενων χρονικών επιπέδων.

Μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς x και t	$a \frac{U_{n+1}^j - U_n^j}{h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} = 0$	(3.30)
Μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς t και ανάδρομης ως προς x	$a \frac{U_n^j - U_{n-1}^j}{h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} = 0$	(3.31)
Μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς t και κεντρικής ως προς x	$a \frac{U_{n+1}^j - U_{n-1}^j}{2h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} = 0$	(3.32)
Μέθοδος Lax – Friedrichs	$a \frac{U_{n+1}^j - U_{n-1}^j}{2h} + \frac{U_n^{j+1} - \frac{(U_{n-1}^j + U_{n+1}^j)}{2}}{k} = 0$	(3.33)
Μέθοδος κεντρικής διαφοράς ως προς t και x	$a \frac{U_{n+1}^j - U_{n-1}^j}{2h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^{j-1}}{2k} = 0$	(3.34)
Μέθοδος Lax - Wendroff	$U_n^{j+1} = U_n^j - \frac{ka}{2h} (U_{n+1}^j - U_{n-1}^j) + \frac{k^2 a^2}{2h^2} (U_{n-1}^j - 2U_n^j + U_{n+1}^j)$	(3.35)

Πίνακας 3.2 : Ρητές μέθοδοι πεπερασμένης διαφοράς για μερική διαφορική εξίσωση

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

3.3.2 Πεπλεγμένες μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών για εξίσωση 1^{ης} τάξης

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών στην υπερβολική εξίσωση 1^{ης} τάξης:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = S(x, t) \quad -\infty < x < \infty, \quad a > 0 \quad (3.36)$$

Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους στον τύπο (3.36) με τις πεπερασμένες διαφορές των τύπων (3.22) και (3.26), προκύπτει η **μέθοδος ανάδρομης διαφοράς ως προς x και t** , με σφάλμα προσέγγισης $O(k+h)$:

$$a \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_n^{j+1}}{h} + \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_{n+1}^j}{k} = S_{n+1}^{j+1} \quad (3.37)$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.23) και (3.26), προκύπτει η **μέθοδος ανάδρομης διαφοράς** ως προς t και **κεντρικής** ως προς x , με σφάλμα προσέγγισης $O(k+h^2)$:

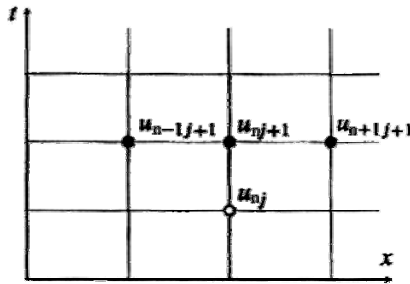
$$a \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_{n-1}^{j+1}}{2h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} = S_n^{j+1} \quad (3.38)$$

Ορίζεται ακόμη η **μέθοδος Crank-Nicolson**, με σφάλμα προσέγγισης $O(k+h^2)$:

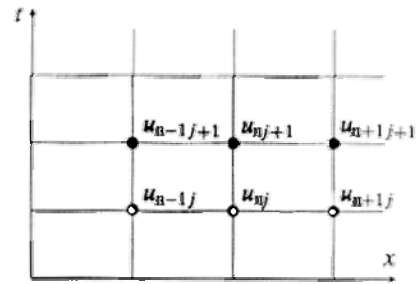
$$a \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_{n-1}^{j+1} + U_{n+1}^j - U_{n-1}^j}{4h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} = S_n^{j+1/2} \quad (3.39)$$

και η **μέθοδος Wendroff**, με σφάλμα προσέγγισης $O(k^2+h^2)$:

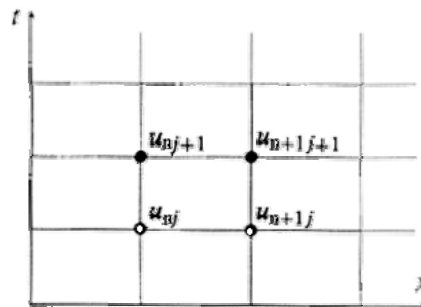
$$a \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_n^{j+1} + U_{n+1}^j - U_n^j}{2h} + \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_{n+1}^j + U_n^{j+1} - U_n^j}{2k} = S_{n+1/2}^{j+1/2} \quad (3.40)$$



Σχήμα 3.8 : Μέθοδος ανάδρομης διαφοράς ως προς t και κεντρικής ως προς x .

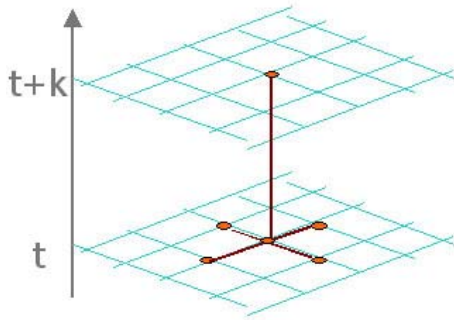


Σχήμα 3.9 : Μέθοδος Crank-Nicolson.

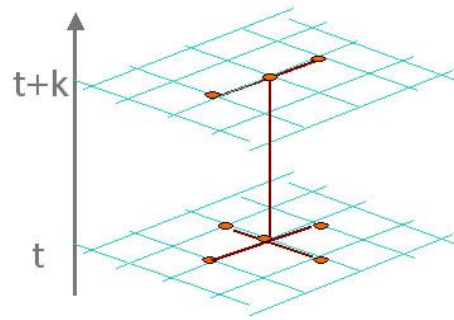


Σχήμα 3.10 : Μέθοδος Wendroff.

Οι παραπάνω μέθοδοι ονομάζονται πεπλεγμένες, γιατί περιέχουν περισσότερους από έναν όρους του επόμενου χρονικού επιπέδου. Τυπικά είναι πιο ευσταθείς από τις ρητές μεθόδους αλλά υλοποιούνται πιο δύσκολα.



Σχήμα 3.11: Γνωστοί κόμβοι στο χρονικό επίπεδο t και άγνωστοι κόμβοι στο επίπεδο $t+k$, σε ρητή μέθοδο.



Σχήμα 3.12: Γνωστοί κόμβοι στο χρονικό επίπεδο t και άγνωστοι κόμβοι στο επίπεδο $t+k$, σε πεπλεγμένη μέθοδο.

Μέθοδος ανάδρομης διαφοράς ως προς x και t	$a \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_n^{j+1}}{h} + \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_{n+1}^j}{k} = S_{n+1}^{j+1}$	(3.37)
Μέθοδος ανάδρομης διαφοράς ως προς t και κεντρικής ως προς x	$a \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_{n-1}^{j+1}}{2h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} = S_n^{j+1}$	(3.38)
Μέθοδος Crank-Nicolson	$a \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_{n-1}^{j+1} + U_{n+1}^j - U_{n-1}^j}{4h} + \frac{U_n^{j+1} - U_n^j}{k} = S_n^{j+1/2}$	(3.39)
Μέθοδος Wendroff	$a \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_n^{j+1} + U_{n+1}^j - U_n^j}{2h} + \frac{U_{n+1}^{j+1} - U_{n+1}^j + U_n^{j+1} - U_n^j}{2k} = S_{n+1/2}^{j+1/2}$	(3.40)

Πίνακας 3.3: Πεπλεγμένες μέθοδοι πεπερασμένης διαφοράς για μερική διαφορική εξίσωση

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = S(x,t), \text{ με } a > 0.$$

3.3.3 Διατύπωση μεθόδων πεπερασμένων διαφορών μέσω πίνακα

Οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών που παρουσιάστηκαν παραπάνω μπορούν να εκφραστούν εναλλακτικά χρησιμοποιώντας πίνακες. Η διατύπωση αυτή διευκολύνει ιδιαίτερα τις πεπλεγμένες μεθόδους. Οι μέθοδοι αυτοί περιλαμβάνουν περισσότερες από μια τιμές της άγνωστης συνάρτησης στο επόμενο χρονικό βήμα με αποτέλεσμα για την επίλυσή τους να απαιτείται ένα σύστημα εξισώσεων. Με την εφαρμογή της διακριτοποιημένης εξίσωσης σε όλους του κόμβους προκύπτει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που είναι εύχρηστο να εκφραστεί μέσω πινάκων. Η μορφή μιας πεπλεγμένης μεθόδου πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιώντας πίνακες είναι,

$$AU^{j+1} = D$$

όπου U^{j+1} ένας πίνακας στήλη που αποτελείται από τις προσεγγιστικές λύσεις που αναζητάμε, A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων και D ο πίνακας που περιλαμβάνει τις γνωστές τιμές της συνάρτησης στα προηγούμενα χρονικά επίπεδα και τους σταθερούς όρους.

Αν το διακριτοποιημένο πρόβλημα αποτελείται από N κόμβους ως προς τη χωρική διάσταση, οι πίνακες U^{j+1} και D θα είναι $N \times 1$ πίνακες ενώ ο A θα είναι $N \times N$ πίνακας. Το σύστημα θα ήταν περίπλοκο να επιλυθεί, λόγω του πλήθους των κόμβων που απαιτούνται για επαρκή ακρίβεια της μεθόδου, αλλά παρατηρείται πως ο πίνακας A είναι αραιός, δηλαδή περιλαμβάνει σχετικά λίγα μη μηδενικά στοιχεία, γιατί κάθε κόμβος εξαρτάται μόνο από γειτονικούς του κόμβους. Ειδικά για διαφορικές εξισώσεις $2^{\text{ης}}$ τάξης αποδεικνύεται πως ο πίνακας A είναι τριδιαγωνικός, δηλαδή τα μη μηδενικά στοιχεία του συγκεντρώνονται μόνο στη κύρια διαγώνιο και τις δύο παράλληλές της γραμμές πάνω και κάτω από αυτή, όπως φαίνεται παρακάτω :

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & \\ & & & & a_N & b_N & \end{bmatrix}$$

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δέσμευση λιγότερης μνήμης αφού αποθηκεύονται μόνο $3 \times N$ στοιχεία αντί για $N \times N$ κατά τον ορισμό του πίνακα A .

Ένας τριδιαγωνικός πίνακας ορίζεται ως αυστηρά διαγωνίως δομημένος αν ισχύουν οι ανισότητες :

$$|b_1| > |c_1|, \quad |b_n| > |a_n| + |c_n|, \quad |b_N| > |a_N|$$

Η επίλυση ενός τέτοιου συστήματος γίνεται είτε με άμεσες μεθόδους είτε με επαναληπτικές. Χρησιμοποιώντας άμεσες μεθόδους, όπως η μέθοδος απαλοιφής Gauss ή παραλλαγές της όπως η μέθοδος Cramer και η ανάλυση LU, η λύση προσεγγίζεται μετά από ορισμένο αριθμό βημάτων με αποτέλεσμα να υπεισέρχεται ένα σφάλμα στρογγυλοποίησης. Σε συστήματα που οι πίνακες αποτελούνται από πολλούς όρους οι άμεσες μέθοδοι δεν προτιμώνται λόγω του σφάλματος στρογγυλοποίησης, της μειωμένης ταχύτητας και του μεγάλου ποσού μνήμης που απαιτείται. Οι επαναληπτικές μέθοδοι, όπως η μέθοδος Jacobi, η μέθοδος Gauss – Jordan και η μέθοδος Gauss – Seidel, βασίζονται στην διαδοχική βελτίωση των αρχικών προσεγγίσεων της λύσης.

Οι τριδιαγωνικοί πίνακες που χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών είναι συνήθως αυστηρά διαγωνίως δομημένοι. Η ορίζουσα αυτών των πινάκων δεν είναι μηδενική, οπότε το σύστημα δεν είναι αδύνατο, ούτε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Εφαρμόζοντας την μέθοδο απαλοιφής Gauss για τριδιαγωνικό σύστημα δεν χρειάζεται εναλλαγή γραμμών ή στηλών, οι υπολογισμοί είναι ευσταθείς και οδηγούν σε μια μοναδική λύση. Το γραμμικό σύστημα $AU = D$ στη περίπτωση που ο πίνακας A είναι τριδιαγωνικός και αυστηρά διαγωνίως δομημένος επιλύεται με τον αλγόριθμο που ακολουθεί.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Βήμα 1^ο. Ορίζονται τα δεδομένα του προβλήματος :

Ακολουθία a_2, a_3, \dots, a_N , τα στοιχεία της υποδιαγωνίου του A .

Ακολουθία b_1, b_2, \dots, b_N , τα στοιχεία της διαγωνίου του A .

Ακολουθία c_1, c_2, \dots, c_{N-1} , τα στοιχεία της υπερδιαγωνίου του A .

Ακολουθία d_1, d_2, \dots, d_N , τα στοιχεία του πίνακα D .

Οι λύσεις U του γραμμικού συστήματος θα αποθηκευτούν στο πίνακα D .

Βήμα 2^ο. Πρόδρομη αντικατάσταση για απαλοιφή της υποδιαγωνίου.

Για $n = 2, 3, \dots, N$ ορίζονται :

$$ratio = \frac{a_n}{b_{n-1}}$$

$$b_n = b_n - ratio \cdot c_{n-1}$$

$$d_n = d_n - ratio \cdot d_{n-1}$$

Βήμα 3^ο. Ανάδρομη αντικατάσταση και αποθήκευση της λύσης στον D .

Ορίζεται $d_N = \frac{d_N}{b_N}$ και για $n = N-1, N-2, \dots, 1$, υπολογίζεται το :

$$d_n = \frac{(d_n - c_n \cdot d_{n+1})}{b_n}.$$

3.3.4 Ρητή μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς για εξίσωση 2^{ης} τάξης

Η πιο απλή υπερβολική μερική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης είναι η κυματική εξίσωση,

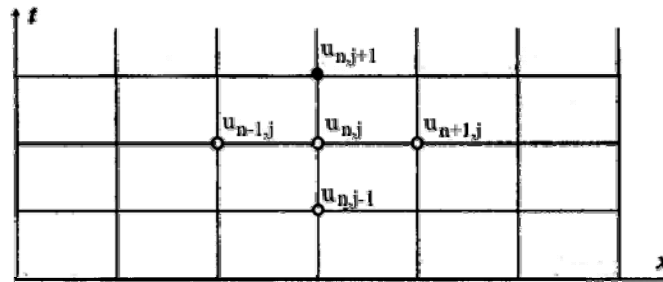
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.41)$$

όπου $c = \text{σταθερά}$.

Ορίζουμε στο πεδίο ορισμού της, $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, ένα ομοιόμορφο πλέγμα xt , με $x_n = nh$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $t_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους από τους τύπους (3.24) και (3.28) προκύπτει η εξίσωση :

$$\frac{U_n^{j-1} - 2U_n^j + U_n^{j+1}}{k^2} - c^2 \frac{U_{n-1}^j - 2U_n^j + U_{n+1}^j}{h^2} = 0 \quad (3.42)$$

με σφάλμα προσέγγισης $O(k^2 + h^2)$. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται μέθοδος Courant – Friederichs – Lewy (CFL), είναι ρητή και περιλαμβάνει τιμές τριών χρονικών επιπέδων, οπότε για να εφαρμοστεί, απαιτούνται οι τιμές U_n^0 και U_n^1 .



Σχήμα 3.13 : Μέθοδος CFL.

Έστω πως οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$U_n^0 = f_n = f(x_n) \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(n,0) = g_n = g(x_n) \quad (3.44)$$

Η αρχική συνθήκη (3.44) σε συνδυασμό με το τύπο (3.27) μεταγράφεται σε,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(n,0) = \frac{u_n^1 - u_n^{-1}}{2k} = g_n \quad (3.45)$$

Για $j=0$, ο τύπος (3.42) $\Rightarrow \frac{U_n^{-1} - 2U_n^0 + U_n^1}{k^2} - c^2 \frac{U_{n-1}^0 - 2U_n^0 + U_{n+1}^0}{h^2} = 0$. Με τη βοήθεια των τύπων (3.43) και (3.45) καταλήγουμε στο τύπο:

$$U_n^1 = \frac{k^2 c^2}{2h^2} (f_{n-1} + f_{n+1}) + \left(1 - \frac{k^2 c^2}{h^2}\right) f_n + k g_n \quad (3.46)$$

Η αρχική συνθήκη (3.43) δεν εισάγει κάποιο σφάλμα αλλά η (3.44) λόγω του τύπου (3.27) περιέχει σφάλμα προσέγγισης $O(k^2)$.

Στη περίπτωση που υπάρχουν δύο χωρικές ανεξάρτητες μεταβλητές η κυματική εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.47)$$

όπου $c = \text{σταθερά}$.

Ορίζουμε ένα ομοιόμορφο τρισδιάστατο πλέγμα, με $x_n = nh$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $t_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \dots$ και $y_m = mq$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους από τους τύπους (3.24) και (3.28) προκύπτει η εξίσωση,

$$U_{nm}^{j+1} = c^2 k^2 \left[\frac{U_{(n-1)m}^j - 2U_{nm}^j + U_{(n+1)m}^j}{h^2} + \frac{U_{n(m-1)}^j - 2U_{nm}^j + U_{n(m+1)}^j}{q^2} \right] + 2U_{nm}^j - U_{nm}^{j-1} \quad (3.48)$$

με σφάλμα προσέγγισης $O(k^2 + h^2)$. Έστω πως οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$U_{nm}^0 = f_{nm} = f(x_{nm}) \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(n, m, 0) = g_{nm} = g(x_{nm}) \quad (3.50)$$

Η αρχική συνθήκη (3.50) σε συνδυασμό με το τύπο (3.27) μεταγράφεται σε :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(n, m, 0) = \frac{u_{nm}^1 - u_{nm}^{-1}}{2k} = g_{nm} \quad (3.51)$$

Για $j = 0$, ο τύπος (3.47) \Rightarrow

$$\Rightarrow U_{nm}^1 = c^2 k^2 \left[\frac{U_{(n-1)m}^0 - 2U_{nm}^0 + U_{(n+1)m}^0}{h^2} + \frac{U_{n(m-1)}^0 - 2U_{nm}^0 + U_{n(m+1)}^0}{q^2} \right] + 2U_{nm}^0 - U_{nm}^{-1}$$

Με τη βοήθεια των τύπων (3.49) και (3.51) καταλήγουμε στο τύπο:

$$U_{nm}^1 = \frac{k^2 c^2}{2h^2} (f_{(n-1)m} + f_{(n+1)m}) + \frac{k^2 c^2}{2q^2} (f_{n(m-1)} + f_{n(m+1)}) + \left(1 - \frac{k^2 c^2}{h^2} - \frac{k^2 c^2}{q^2}\right) f_{nm} + k g_{nm} \quad (3.52)$$

3.3.5 Πεπλεγμένη μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για εξίσωση 2^{ης} τάξης

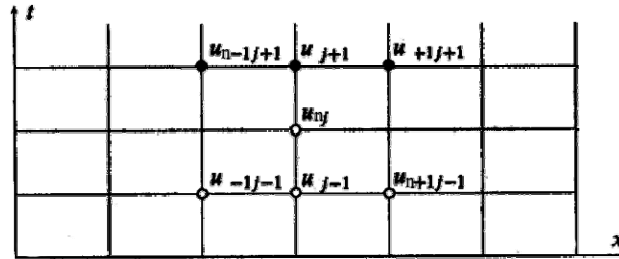
Το πρόβλημα αρχικών συνθηκών (3.41),(3.43),(3.44) μπορεί να επιλυθεί και με πεπλεγμένες μεθόδους, αντικαθιστώντας τη χρονική παράγωγο με τον τύπο κεντρικών διαφορών (3.28) και τη χωρική παράγωγο με το σταθμικό μέσο των κεντρικών διαφορών (3.24) για τρία χρονικά βήματα t_{j-1} , t_j και t_{j+1} . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μέθοδο :

$$\frac{U_n^{j-1} - 2U_n^j + U_n^{j+1}}{k^2} - c^2 \left[\omega \frac{U_{n-1}^{j-1} - 2U_n^{j-1} + U_{n+1}^{j-1}}{h^2} + (1-2\omega) \frac{U_{n-1}^j - 2U_n^j + U_{n+1}^j}{h^2} + \omega \frac{U_{n-1}^{j+1} - 2U_n^{j+1} + U_{n+1}^{j+1}}{h^2} \right] = 0 \quad (3.53)$$

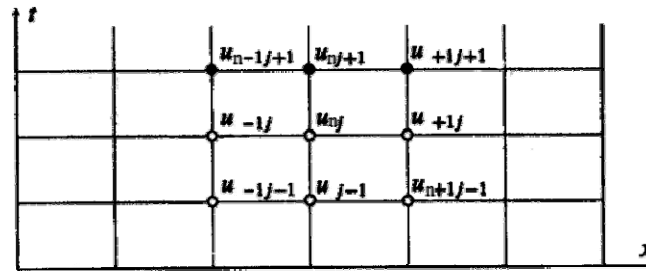
όπου $\omega > 0$. Αν το $\omega = 0$ τότε η μέθοδος του τύπου (3.53) απλοποιείται στη ρητή μέθοδο του τύπου (3.42). Συνήθως κατά την εφαρμογή της μεθόδου

επιλέγονται οι τιμές $\omega = \frac{1}{2}$, οπότε η μέθοδος ονομάζεται Crank-Nicolson και

$\omega = \frac{1}{4}$. Το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου (3.53) είναι $O(k^2 + h^2)$.



Σχήμα 3.14 : Πεπλεγμένη μέθοδος για $\omega = \frac{1}{2}$.



Σχήμα 3.15 : Πεπλεγμένη μέθοδος για $\omega = \frac{1}{4}$.

Στο τύπο (3.53) περιλαμβάνονται τρεις τιμές U_{n-1}^{j+1} , U_n^{j+1} και U_{n+1}^{j+1} , της λύσης στο επόμενο χρονικό στάδιο, οπότε για την επίλυση απαιτείται ένα γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Εκφράζοντας τη πεπλεγμένη μέθοδο μέσω πινάκων, το γραμμικό σύστημα θα έχει τη μορφή, $AU^{j+1} = D$, με τους πίνακες A, U^{j+1} και D να διαμορφώνονται, σύμφωνα με την εξίσωση (3.53) και το τύπο $r = \frac{ck}{h}$, ως εξής :

$$A = \begin{bmatrix} 1+2r^2\omega & -r^2\omega & & & & & \\ -r^2\omega & 1+2r^2\omega & -r^2\omega & & & & \\ & -r^2\omega & 1+2r^2\omega & -r^2\omega & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -r^2\omega & 1+2r^2\omega & -r^2\omega & \\ & & & & -r^2\omega & 1+2r^2\omega & \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$U^{j+1} = \begin{bmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ U_3^{j+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{j+1} \\ U_N^{j+1} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$D = \begin{bmatrix} r^2\omega (U_0^{j+1} + U_0^{j-1} + U_2^{j-1}) + r^2(1-2\omega)(U_0^j + U_2^j) + 2[1-r^2(1-2\omega)]U_1^j - (1+2r^2\omega)U_1^{j-1} \\ r^2\omega (U_1^{j-1} + U_3^{j-1}) + r^2(1-2\omega)(U_1^j + U_3^j) + 2[1-r^2(1-2\omega)]U_2^j - (1+2r^2\omega)U_2^{j-1} \\ \vdots \\ r^2\omega (U_{N-2}^{j-1} + U_N^{j-1}) + r^2(1-2\omega)(U_{N-2}^j + U_N^j) + 2[1-r^2(1-2\omega)]U_{N-1}^j - (1+2r^2\omega)U_{N-1}^{j-1} \\ r^2\omega (U_{N-1}^{j-1} + U_{N+1}^{j-1} + U_{N+1}^{j+1}) + r^2(1-2\omega)(U_{N-1}^j + U_{N+1}^j) + 2[1-r^2(1-2\omega)]U_N^j - (1+2r^2\omega)U_N^{j-1} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Παρατηρούμε πως ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων A είναι τριδιαγωνικός και αυστηρά διαγωνίως δομημένος, οπότε η επίλυση του συστήματος βασίζεται στον Αλγόριθμο 1.

Η πεπλεγμένη μέθοδος περιλαμβάνει τιμές τις άγνωστης συνάρτησης σε τρία χρονικά επίπεδα, οπότε χρειάζεται αρχικά να υπολογιστούν οι τιμές U_n^0 και U_n^1 , $\forall n$. Από την αρχική συνθήκη,

$$U_n^0 = f_n = f(x_n) \quad (3.43)$$

υπολογίζονται οι τιμές της συνάρτησης για $t=0$ και από τη συνθήκη,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(n,0) = g_n = g(x_n) \quad (3.44)$$

αντικαθιστώντας τη παράγωγο με το τύπο κεντρικών διαφορών (3.27) υπολογίζονται οι τιμές της συνάρτησης για $t=1$. Για το χρονικό επίπεδο $t=1$, ο πίνακας A (3.54) παραμένει ίδιος ενώ ο πίνακας D (3.56) μετατρέπεται σε :

$$D = \begin{bmatrix} r^2 \omega U_0^1 + r^2 \omega k (g_0 + g_2) + (1 + 2r^2 \omega) k g_1 + [1 - r^2 (1 - 2\omega)] f_1 + r^2 \left(\frac{1}{2} - \omega \right) (f_0 + f_2) \\ -k r^2 \omega (g_1 + g_3) + r^2 \left(\frac{1}{2} - \omega \right) (f_1 + f_3) + [1 - r^2 (1 - 2\omega)] f_2 + k (1 + 2r^2 \omega) g_2 \\ \vdots \\ -k r^2 \omega (g_{N-2} + g_N) + r^2 \left(\frac{1}{2} - \omega \right) (f_{N-2} + f_N) + [1 - r^2 (1 - 2\omega)] f_{N-1} + k (1 + 2r^2 \omega) g_{N-1} \\ r^2 \omega U_{N+1}^1 - k r^2 \omega (g_{N-1} + g_{N+1}) + r^2 \left(\frac{1}{2} - \omega \right) (f_{N-1} + f_{N+1}) + [1 - r^2 (1 - 2\omega)] f_N + k (1 + 2r^2 \omega) g_N \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

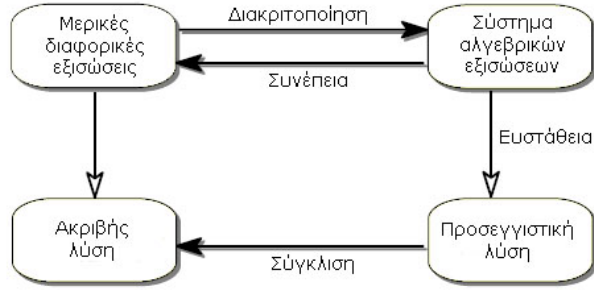
Στη περίπτωση που υπάρχουν δύο χωρικές μεταβλητές στη κυματική εξίσωση, το πρόβλημα εκφράζεται με τις σχέσεις (3.47),(3.49) και (3.50). Ορίζουμε ένα ομοιόμορφο τρισδιάστατο πλέγμα, με $x_n = nh$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $t_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \dots$ και $y_m = mq$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και αντικαθιστούμε τη χρονική παράγωγο με τον τύπο κεντρικών διαφορών (3.28) και τις χωρικές παραγώγους με το σταθμικό μέσο των κεντρικών διαφορών (3.24) για τρία χρονικά βήματα t_{j-1} , t_j και t_{j+1} . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μέθοδο :

$$\begin{aligned}
& \frac{U_{nm}^{j-1} - 2U_{nm}^j + U_{nm}^{j+1}}{k^2} - \\
& -c^2 \left[\omega \frac{U_{(n-1)m}^{j-1} - 2U_{nm}^{j-1} + U_{(n+1)m}^{j-1}}{h^2} + (1-2\omega) \frac{U_{(n-1)m}^j - 2U_{nm}^j + U_{(n+1)m}^j}{h^2} + \omega \frac{U_{(n-1)m}^{j+1} - 2U_{nm}^{j+1} + U_{(n+1)m}^{j+1}}{h^2} \right] - \\
& -c^2 \left[\omega \frac{U_{n(m-1)}^{j-1} - 2U_{nm}^{j-1} + U_{n(m+1)}^{j-1}}{q^2} + (1-2\omega) \frac{U_{n(m-1)}^j - 2U_{nm}^j + U_{n(m+1)}^j}{q^2} + \omega \frac{U_{n(m-1)}^{j+1} - 2U_{nm}^{j+1} + U_{n(m+1)}^{j+1}}{q^2} \right] = 0
\end{aligned}
\tag{3.58}$$

όπου $\omega > 0$.

3.4 Ιδιότητες αριθμητικών μεθόδων

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω αριθμητικές μεθόδους επίλυσης παρατηρείται πως για ορισμένες τιμές του χωρικού και χρονικού βήματος τα αποτελέσματα αποκλίνουν πολύ από την ακριβή λύση και κάποιες φορές δεν επιτυγχάνεται η προσέγγιση. Αυτό είναι αποτέλεσμα φυσικών περιορισμών αλλά και περιορισμών λόγω του ηλεκτρονικού υπολογιστή, που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη. Αφενός το μαθηματικό πρότυπο πρέπει να περιγράφει κατάλληλα το υπό μελέτη φυσικό σύστημα και αφετέρου ο ηλεκτρονικός υπολογιστής έχει περιορισμένους πόρους (π.χ: μνήμη) σε σχέση με το φυσικό μέγεθος του προβλήματος. Για να είναι επιτυχής η επίλυση ενός προβλήματος θα πρέπει η αριθμητική μέθοδος να είναι ευσταθής, συγκλίνουσα και συνεπής. Οι ιδιότητες αυτές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η σύγκλιση της προσεγγιστικής λύσης στην ακριβή λύση προϋποθέτει τη συνέπεια και την ευστάθεια της μεθόδου. Η σχέση αυτή επισημάνθηκε αρχικά το 1920 από τους Courant, Friedrichs και Lewy, το 1940 αναπτύχθηκε από τον von Neumann και διατυπώθηκε τελικά το 1950 από τους Lax και Richtmyer ως θεώρημα.



Σχήμα 3.16 : Αλληλεξάρτηση συνέπειας, σύγκλισης και ευστάθειας.

3.4.1 Ευστάθεια

Μια αριθμητική μέθοδος είναι ευσταθής αν η λύση παραμένει φραγμένη κατά τη διαδικασία επίλυσης. Στον ευσταθή αλγόριθμο δηλαδή, το σφάλμα (οποιοδήποτε είδος) που αναπόφευκτα εμφανίζεται τείνει να μηδενιστεί και όχι να αυξηθεί κατά τη πρόοδο των υπολογισμών.

Είδαμε πως η υπερβολική εξίσωση 1^{ου} βαθμού (3.29) μπορεί να επιλυθεί με τη ρητή μέθοδο πρόδρομης διαφοράς ως προς x και t (3.30). Η μέθοδος αυτή μπορεί να μεταγραφεί ως,

$$U_n^{j+1} = (1+r)U_n^j - rU_{n+1}^j \quad (3.59)$$

όπου : $r = \frac{ak}{h}$. Θεωρούμε πως κατά την επίλυση εμφανίζεται σφάλμα e στο κόμβο (x_b, t_d) που διαδίδεται στα επόμενα στάδια. Αν u_n^j η ακριβής λύση και \tilde{u}_n^j η λύση που επηρεάζεται από το σφάλμα, τότε ισχύουν οι σχέσεις: $\tilde{u}_n^j = u_n^j$, $j < d$; $\tilde{u}_n^j = u_n^j$, $n \neq b$; $\tilde{u}_n^j = u_n^j + e$.

Οπότε το σφάλμα ορίζεται ως :

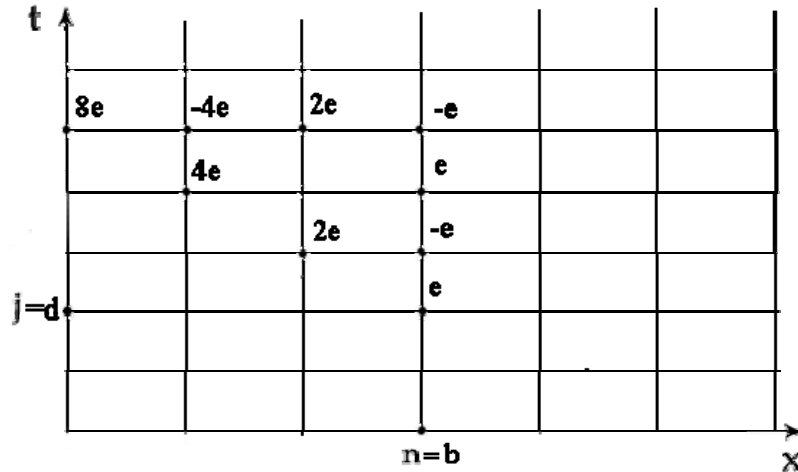
$$\tilde{u}_n^j = u_n^j + e \quad (3.60)$$

Από τη σχέση (3.59) που είναι γραμμική προκύπτει :

$$e_n^{j+1} = (1+r)e_n^j - re_{n+1}^j \quad (3.61)$$

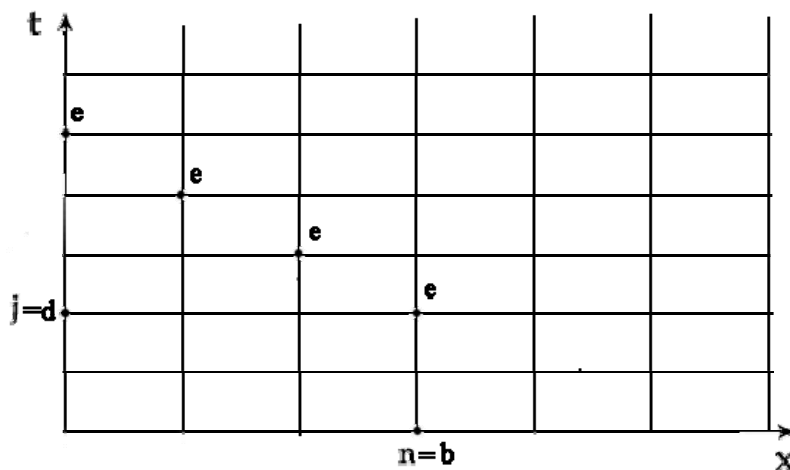
Μπορούμε να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά του σφάλματος για διάφορες τιμές του r .

- Αν $r = -2$, η (3.61) $\Rightarrow e_n^{j+1} = -e_n^j + 2e_{n+1}^j$. Παρατηρούμε πως το σφάλμα αυξάνεται στα επόμενα βήματα υπολογισμών.



Σχήμα 3.17: Η διάδοση του σφάλματος για $r = -2$.

- Αν $r = -1$, η (3.61) $\Rightarrow e_n^{j+1} = e_{n+1}^j$. Παρατηρούμε πως το σφάλμα δεν αυξάνεται στα επόμενα βήματα υπολογισμών.



Σχήμα 3.18: Η διάδοση του σφάλματος για $r = -1$.

- Αν $r = -\frac{1}{2}$, η (3.61) $\Rightarrow e_n^{j+1} = \frac{e_{n+1}^j - e_n^j}{2}$. Παρατηρούμε πως το σφάλμα τείνει να μειωθεί στα επόμενα βήματα υπολογισμών.

- Αν $r=0$, η (3.61) $\Rightarrow e_n^{j+1} = e_n^j$. Παρατηρούμε πως το σφάλμα δεν αυξάνεται στα επόμενα βήματα υπολογισμών.
- Αν $r=1$, η (3.61) $\Rightarrow e_n^{j+1} = 2e_n^j - e_{n+1}^j$. Παρατηρούμε πως το σφάλμα αυξάνεται στα επόμενα βήματα υπολογισμών.

Όταν το σφάλμα αυξάνεται ο αλγόριθμος είναι ασταθής οπότε και αναξιόπιστος για υπολογισμούς. Για την αποφυγή αυτού του φαινομένου πρέπει να υιοθετηθούν περιορισμοί για την τιμή του r , δηλαδή περιορισμοί που αφορούν τα διαστήματα του πλέγματος και τη ταχύτητα διάδοσης.

Μπορούμε να ορίσουμε πότε μια μέθοδος πεπερασμένων διαφορών θεωρείται ευσταθής γενικότερα. Θεωρούμε πως το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών,

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \begin{array}{l} 0 < x < L \\ 0 < t < T \end{array} \quad (3.62)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L \quad (3.63)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (3.64)$$

επιλύεται με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών,

$$L U_n^j = 0, \quad \begin{array}{l} n = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, J \end{array} \quad (3.65)$$

$$U_n^0 = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.66)$$

$$U_0^j = U_{N+1}^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.67)$$

όπου L ένας τελεστής πεπερασμένων διαφορών. Η μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς (3.65) – (3.67) ονομάζεται ασυνεχώς ευσταθής αν υπάρχει σταθερά K , ανεξάρτητη των h , k , f , τέτοια ώστε :

$$\| U^j \| \leq K \| f \|, \quad \text{για } 0 \leq jk \leq T \quad (3.68)$$

Ο συμβολισμός $\| \bullet \|$ αντιπροσωπεύει μια γενική νόρμα. Μπορεί για παράδειγμα να είναι η νόρμα του μεγίστου L^∞ ,

$$\|f(x)\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

ή η ενεργειακή νόρμα L^2 :

$$\|f(x)\| = \left\{ \int_0^1 f(x)^2 dx \right\}^{1/2}$$

Αν ισχύει η σχέση (3.68) και το χρονικό βήμα k είναι συνάρτηση του χωρικού βήματος h , η μέθοδος ονομάζεται συνεχώς ευσταθής.

Σύμφωνα με τη συνθήκη CFL μια μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς, υπάρχει δυνατότητα να είναι ευσταθής, μόνο αν το αριθμητικό πεδίο εξάρτησής της είναι υποσύνολο του μαθηματικού πεδίου εξάρτησής της.

Η ευστάθεια μιας μεθόδου μπορεί να αναλυθεί με τη μέθοδο Fourier ή von Neumann και τη φασματική μέθοδο ή μέθοδο πίνακα.

Κατά την εφαρμογή της **μεθόδου von Neumann** οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος πεπερασμένης διαφοράς αναλύονται με διακριτές σειρές Fourier και ελέγχεται η συμπεριφορά των αρμονικών συνιστωσών* μέσω της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών. Η αριθμητική μέθοδος που αναλύεται είναι ευσταθής αν η εξίσωση πεπερασμένης διαφοράς δεν επιτρέπει στους αρμονικούς να αυξηθούν κατά την επίλυση.

Κατ' αρχήν υποθέτουμε πως η λύση του προβλήματος πεπερασμένης διαφοράς μπορεί να εκφραστεί ως υπέρθεση αρμονικών της μορφής :

$$\xi^j e^{i\beta n}, \quad (3.69)$$

όπου β : η τάξη του αρμονικού, $0 \leq \beta \leq 2\pi$.

Ελέγχουμε τη συμπεριφορά της αριθμητικής μεθόδου για έναν αρμονικό, αντικαθιστώντας τον τύπο (3.69) στην εξίσωση πεπερασμένης διαφοράς και λύνοντας προς το λόγο $\frac{\xi^{j+1}}{\xi^j}$. Το πλάτος του λόγου αυτού ονομάζεται

* Αρμονικές συνιστώσες ή απλώς αρμονικοί ονομάζονται τα ημιτονοειδή κύματα, κατάλληλης συχνότητας, φάσης και ορισμένου πλάτους, από τα οποία συντίθεται κάθε περιοδικό κύμα σύμφωνα με τη θεωρία Fourier.

παράγοντας ενίσχυσης και εξαρτάτε από την τάξη του αρμονικού β . Η συνθήκη που εξασφαλίζει την ευστάθεια σύμφωνα με το κριτήριο von Neumann είναι :

$$\left| \frac{\xi^{j+1}}{\xi^j} \right| \leq 1 \quad \forall \beta \in [0, 2\pi) \quad (3.70)$$

Εξετάζοντας την ευστάθεια της αριθμητικής μεθόδου για έναν μόνο αρμονικό, υποθέτουμε πως δεν υφίσταται αλληλεπίδραση μεταξύ των τρόπων ταλάντωσης και για αυτό το λόγο περιορίζεται η χρήση του κριτηρίου von Neumann σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις σταθερών συντελεστών. Επιπλέον παρατηρούμε πως οι συνοριακές συνθήκες δεν λαμβάνονται υπόψη στο παραπάνω κριτήριο, οπότε η συνθήκη είναι απαραίτητη για την ευστάθεια μιας μεθόδου αλλά δεν την εξασφαλίζει.

Η εφαρμογή της **φασματικής μεθόδου**, απαιτεί τη διατύπωση της μεθόδου πεπερασμένης διαφοράς με πίνακα. Έστω πως η εξίσωση πεπερασμένης διαφοράς έχει τη μορφή ,

$$U^{j+1} = A U^j + B^j \quad (3.71)$$

όπου U : πίνακας στήλη των τιμών της άγνωστης συνάρτησης.

A : πίνακας συντελεστών.

B^j : πίνακας στήλη που περιλαμβάνει τα δεδομένα του προβλήματος.

Αν U_n^j η ακριβής λύση του προβλήματος και \tilde{U}_n^j η λύση που επηρεάζεται από σφάλμα στις αρχικές συνθήκες, η διαφορά τους ικανοποιεί την μέθοδο (3.71), οπότε :

$$\begin{aligned} U^{j+1} = A U^j &\Rightarrow \\ \Rightarrow U^{j+1} = A^{j+1} U^0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \|U^{j+1}\| = \|A^{j+1} U^0\| &\Rightarrow \\ \Rightarrow \|U^{j+1}\| \leq \|A^{j+1}\| \|U^0\| & \end{aligned}$$

Η μέθοδος είναι ευσταθής αν υπάρχει θετική σταθερά K ανεξάρτητη των h, k, U^0 , τέτοια ώστε να ισχύει,

$$\|A^{j+1}\| \leq K \quad (3.72)$$

και γενικότερα :

$$\|A\| \leq 1 \quad (3.73)$$

Μια τρίτη μέθοδος για ανάλυση της ευστάθειας, που εφαρμόζεται κυρίως σε διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές και μη γραμμικές εξισώσεις, είναι η **ενεργειακή μέθοδος**. Σε αυτή τη περίπτωση χρησιμοποιούνται οι ιδιότητες συγγενών συναρτήσεων προς τη λύση της εξίσωσης πεπερασμένης διαφοράς, με σκοπό να προκύψουν αφαιρετικά απαραίτητες συνθήκες που εξασφαλίζουν την ευστάθεια. Η δυσκολία αυτής της μεθόδου έγκειται στην εύρεση κατάλληλων συναρτήσεων.

3.4.2 Συνέπεια

Μια αριθμητική μέθοδος θεωρείται συνεπής ως προς τη μερική διαφορική εξίσωση που προσεγγίζει, αν καθώς τα βήματα σε χρονικό και χωρικό πεδίο τείνουν στο μηδέν, το σφάλμα προσέγγισης τείνει να μηδενιστεί. Αυτό σημαίνει πως οι μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι δυνατόν να ανακτηθούν από τις αλγεβρικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στην αριθμητική επίλυση.

Αν συμβολίσουμε με D τον διαφορικό τελεστή,

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.74)$$

και με L τον τελεστή πρόδρομης πεπερασμένης διαφοράς ως προς x και t , τότε η υπερβολική εξίσωση 1^{ης} τάξης (3.29) μεταγράφεται ως,

$$Du(x,t) = 0 \quad (3.75)$$

και η μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς x και t (3.30), μεταγράφεται ως :

$$L U_n^j = 0 \quad (3.76)$$

Το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου πεπερασμένης διαφοράς στον κόμβο (x_n, t_j) θα ισούται με :

$$T u_n^j = L U_n^j - D u_n^j \quad (3.77)$$

Αν v η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (3.75), τότε το σφάλμα προσέγγισης απλοποιείται σε :

$$T v_n^j = L v_n^j \quad (3.78)$$

Αν $T v_n^j \rightarrow 0$ καθώς $h, k \rightarrow 0$ η μέθοδος θεωρείται συνεπής ως προς την μερική διαφορική εξίσωση που αναλύεται, δηλαδή προσεγγίζει τη συγκεκριμένη μερική διαφορική εξίσωση και όχι κάποια άλλη.

Η μέθοδος πρόδρομης διαφοράς ως προς x και t (3.30) πληροί τον παραπάνω ορισμό. Αναπτύσσοντας τη σειρά Taylor προκύπτει :

$$\begin{aligned} v_n^{j+1} &= v_n^j + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_n * k + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)_n * \frac{k^2}{2} + O((k)^3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_n^{j+1} - v_n^j}{k} &= \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_n + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)_n * \frac{k}{2} + O((k)^2) \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} v_{n+1}^j &= v_n^j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_n * h + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_n * \frac{h^2}{2} + O((h)^3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_{n+1}^j - v_n^j}{h} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_n + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_n * \frac{h}{2} + O((h)^2) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Οπότε το σφάλμα προσέγγισης από τις σχέσεις (3.75), (3.76), (3.77) και (3.78) υπολογίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned}
T v_n^j &= L v_n^j \Rightarrow \\
\Rightarrow T v_n^j &= a \left(\frac{\partial v}{\partial h} \right)_n^j + a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial h^2} \right)_n^j * \frac{h}{2} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_n^j + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)_n^j * \frac{k}{2} + O((k)^2 + (h)^2) \Rightarrow \\
\Rightarrow T v_n^j &= a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial h^2} \right)_n^j * \frac{h}{2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)_n^j * \frac{k}{2} + O((k)^2 + (h)^2) \Rightarrow \\
\Rightarrow T v_n^j &= O(k+h)
\end{aligned}$$

Άρα η μέθοδος είναι συνεπής.

3.4.3 Σύγκλιση

Η έννοια της σύγκλισης σχετίζεται με τη σύγκριση των λύσεων της μερικής διαφορικής εξίσωσης και της αριθμητικής μεθόδου που τη προσεγγίζει. Μια αριθμητική μέθοδος συγκλίνει αν η αριθμητική – προσεγγιστική - λύση τείνει στην αναλυτική - ακριβή – λύση, για κάθε τιμή των ανεξάρτητων μεταβλητών, καθώς το χρονικό βήμα και το χωρικό βήμα τείνουν στο μηδέν. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε με v_n^j τη λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης σε πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών καλά τοποθετημένο και με U_n^j τη λύση της αντίστοιχης μεθόδου πεπερασμένης διαφοράς, η μέθοδος συγκλίνει αν :

$$\lim_{k, h \rightarrow 0} U_n^j = v(x_n, t_j) \quad (3.81)$$

Αυτό σημαίνει πως το σφάλμα διακριτοποίησης στον κόμβο (x_n, t_j) :

$$\|E_n^j\| = \|v(x_n, t_j) - U_n^j\| \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad k, h \rightarrow 0 \quad (3.82)$$

Στη περίπτωση της πεπερασμένης μεθόδου πρόδρομης διαφοράς ως προς x και t (3.30) ο τελεστής πεπερασμένης διαφοράς L είναι γραμμικός οπότε :

$$L E_n^j = L v_n^j - L U_n^j \Rightarrow L E_n^j = L v_n^j \quad (3.83)$$

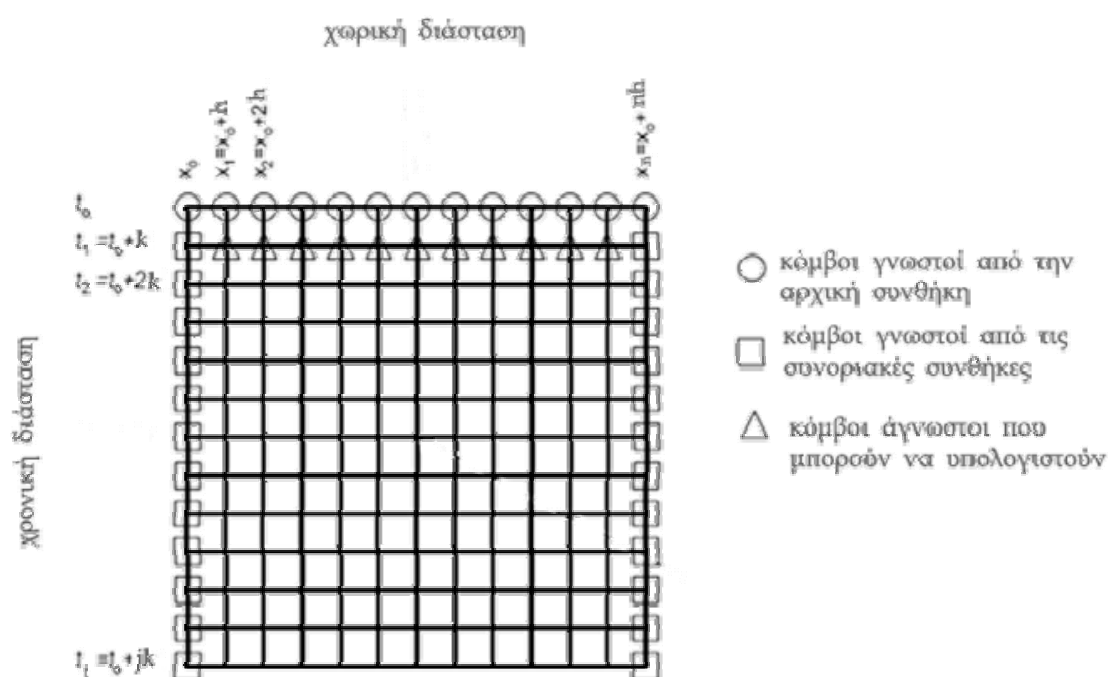
Η σύγκλιση και η ευστάθεια μιας μεθόδου είναι στενά συνδεδεμένες όπως φαίνεται από την ανάπτυξή τους και αυτό εκφράζεται με το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα Lax Equivalence. Μια συνεπής μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για ένα καλά τοποθετημένο γραμμικό πρόβλημα αρχικών συνθηκών θα πρέπει απαραίτητα να είναι ευσταθής για να συγκλίνει.

4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4.1 Εισαγωγή

Οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών που αναπτύχθηκαν έχουν σκοπό τον υπολογισμό της τιμής της άγνωστης συνάρτησης σε κάθε κόμβο. Από τις αρχικές συνθήκες και τις συνοριακές συνθήκες που ορίζονται σε κάθε πρόβλημα μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές ορισμένων κόμβων με βάση τις οποίες υπολογίζονται οι υπόλοιπες, όπως για παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1

Στους κώδικες που αναπτύσσονται στο υπολογιστικό περιβάλλον MATLAB, η τιμή κάθε κόμβου αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο ενός πίνακα, δισδιάστατου ή τρισδιάστατου ανάλογα με τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών. Όσο πιο μεγάλη είναι η ανάλυση του πίνακα για δεδομένο χρονικό και χωρικό διάστημα, δηλαδή όσο πιο μικρό είναι το μέγεθος του χρονικού και χωρικού βήματος, τόσο πιο ακριβής είναι η λύση, γιατί το σφάλμα προσέγγισης τείνει στο μηδέν. Με αυτό το τρόπο όμως αυξάνεται ο υπολογιστικός χρόνος και η μέθοδος μπορεί να οδηγήσει σε μη ευσταθής λύση.

4.2 Ταλαντώσεις αβαρούς ελαστικής χορδής

Έστω μια χορδή μήκους L , πακτωμένη στα δύο άκρα η οποία τείνεται από δύναμη που ενεργεί στιγμιαία σε απόσταση $\frac{L}{5}$ από το ένα άκρο, προκαλώντας μια μετατόπιση H όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Αν δεν λάβουμε υπόψη τις δυνάμεις εξασθένησης (π.χ: αντίσταση του αέρα) και το βάρος της χορδής και υποθέσουμε πως η τάση που ασκείται στη χορδή είναι εφαπτομενική της χορδής σε κάθε σημείο, τότε τα εγκάρσια κύματα που διαδίδονται στη χορδή ικανοποιούν την κυματική εξίσωση,

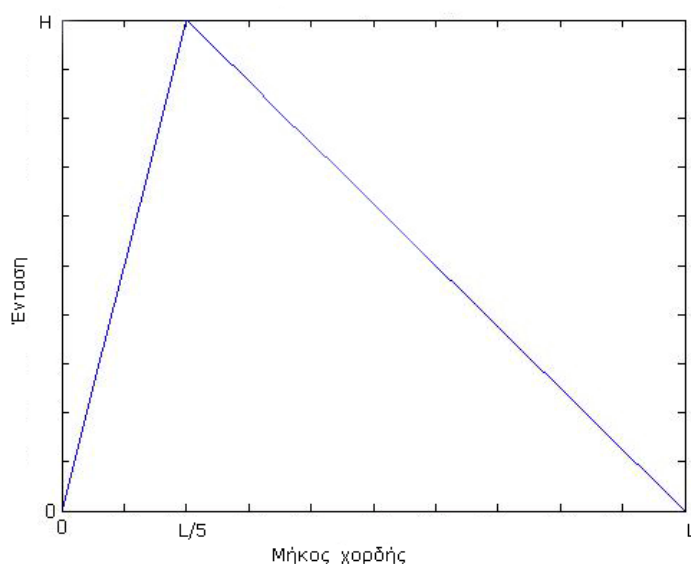
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.1)$$

στο πεδίο ορισμού $0 < x < L$, $t > 0$,

όπου c : η ταχύτητα διάδοσης (σε m/s), $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

T : η τάση που ασκείται στη χορδή (σε N)

μ : η γραμμική πυκνότητα της χορδής (σε kg/m)



Σχήμα 4.2: Αρχική κατάσταση της χορδής.

4.2.1 Αναλυτική λύση

Η αναλυτική λύση της κυματικής εξίσωσης για μια διάσταση μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο d' Alembert.

Η κυματική εξίσωση περιγράφει τα κύματα που διαδίδονται στη χορδή με ταχύτητα c προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά. Οπότε είναι αναμενόμενο οι λύσεις της να διαδίδονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών : $x \pm ct = \text{σταθερά}$.

Αν $u(x,t)$ η λύση της εξίσωσης (4.1) μπορούμε αλλάζοντας μεταβλητές να θεωρήσουμε $u(x,t) = v(w,z)$, όπου :

$$w = x + ct \text{ και } z = x - ct.$$

Οι παράγωγοι της εξίσωσης (4.1) μεταγράφονται ως:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = c \left(\frac{\partial v}{\partial w} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη κυματική εξίσωση προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow 4 \frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial w} = g(w) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \int g(w) dw \Rightarrow v = f_1(w) + f_2(z)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (4.1) διατυπώνεται σύμφωνα με τη μέθοδο d' Alembert ως :

$$u = f_1(x+ct) + f_2(x-ct) \quad (4.2)$$

Η παραπάνω λύση αναπαριστά δύο κύματα που οδεύουν με ίση ταχύτητα προς αντίθετες διευθύνσεις. Για απλές αρμονικές κινήσεις υποθέτουμε πως οι συναρτήσεις f_1 και f_2 αποτελούνται από ένα ημιτονικό και ένα συνημιτονικό όρο, οπότε η εξίσωση (4.2) μεταγράφεται ως,

$$u(x,t) = A \sin(\omega t - kx) + B \cos(\omega t - kx) + C \sin(\omega t + kx) + D \cos(\omega t + kx) \quad (4.3)$$

όπου k : κυματάριθμος, $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

ω : η κυκλική συχνότητα (σε rad/sec)

λ : το μήκος κύματος (σε m)

Εφόσον τα δύο άκρα της χορδής είναι πακτωμένα, οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος θα είναι:

$$u(0,t) = 0 \quad (4.4)$$

$$u(L,t) = 0 \quad (4.5)$$

Από τις σχέσεις (4.3) και (4.4) προκύπτει πως $A = -C$ και $B = -D$, άρα η εξίσωση (4.3) μετασχηματίζεται στην:

$$u(x,t) = A [\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)] + B [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] \quad (4.6)$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες,

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad \text{και} \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

προκύπτει:

$$u(x,t) = -2 [A \cos \omega t - B \sin \omega t] \sin kx \quad (4.7)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (4.5) και τη σχέση (4.7) προκύπτει ότι $\sin kL = 0 \Rightarrow \frac{\omega L}{c} = n\pi$ με $n = 1, 2, 3, \dots$, οπότε οι ιδιοσυχνότητες της χορδής

είναι $f_n = n \left(\frac{c}{2L} \right)$. Η γενική λύση για μια δονούμενη χορδή με σταθερά άκρα

είναι το άθροισμα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$u = \sum_n (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin k_n x \quad (4.8)$$

Οι συντελεστές A_n και B_n που βασίζονται στις αρχικές συνθήκες, είναι ίσοι με :

$$A_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \sin \frac{n x \pi}{L} dx \quad (4.9)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x,0) \sin \frac{n x \pi}{L} dx \quad (4.10)$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad (4.11)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{5H}{L}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{5} \\ \frac{5H}{4} \left(1 - \frac{x}{L}\right), & \frac{L}{5} \leq x \leq L \end{cases} \quad (4.12)$$

Οπότε οι συντελεστές Fourier για το πρόβλημα είναι: $A_n = 0$ και

$B_n = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right) \frac{25H}{2n^2\pi^2}$. Η γενική λύση του τύπου (4.8) διαμορφώνεται για το συγκεκριμένο πρόβλημα,

$$u(x,t) = \frac{25H}{2\pi^2} \sum_n \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \sin\left(\frac{n x \pi}{L}\right) \quad (4.13)$$

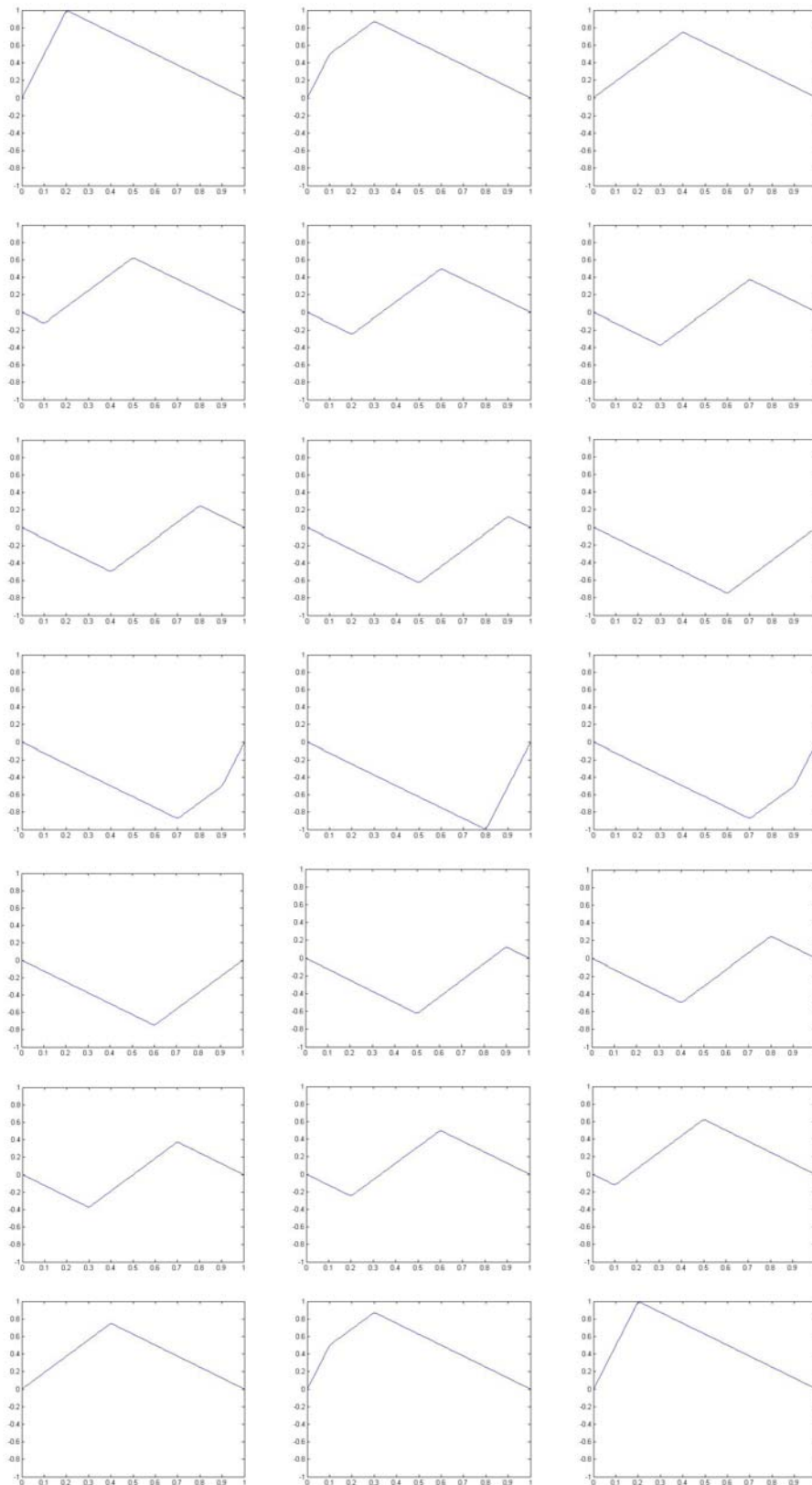
όπου $n = 1, 2, 3, \dots$

Αν το μήκος της χορδής είναι $L = 1 \text{ m}$, η αρχική μετατόπιση της χορδής $H = 1 \text{ m}$ και $c = 4 \text{ m/s}$, η γενική λύση του προβλήματος προκύπτει από την εξίσωση (4.13),

$$u(x,t) = \frac{25}{2\pi^2} \sum_n \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right) \cos(4n\pi t) \sin(n\pi x) \quad (4.14)$$

όπου $n = 1, 2, 3, \dots$.

Υλοποιούμε τη μέθοδο αυτή με το κώδικα 1. Για να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια πρέπει ο αριθμός των τρόπων ταλάντωσης να είναι αρκετά μεγάλος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ορίσαμε $n = 1, \dots, 50$, ώστε η αρχική κατάσταση της χορδής να είναι ακριβής.



Σχήμα 4.3 : Η ταλάντωση της χορδής σύμφωνα με την αναλυτική επίλυση για χρονικό διάστημα μιας περιόδου με $n=1, \dots, 50$. Η απεικόνιση γίνεται με χρονικό βήμα $t=0.025$ sec.

4.2.2 Ρητή αριθμητική λύση

Για την αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος ακολουθούμε τη μέθοδο CFL και χρησιμοποιούμε τους τύπους (3.42) και (3.46).

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια της μεθόδου υποθέτουμε πως η λύση της εξίσωσης (3.42) έχει τη μορφή :

$$U_n^j = \xi^j e^{i\beta x_n} \quad (4.15)$$

Αντικαθιστούμε τον τύπο (4.15) στην εξίσωση πεπερασμένης διαφοράς (3.42) οπότε προκύπτει :

$$\xi^{j+1} e^{i\beta x_n} = 2(1-r^2) \xi^j e^{i\beta x_n} + r^2 (\xi^j e^{i\beta x_{n+1}} + \xi^j e^{i\beta x_{n-1}}) - \xi^{j-1} e^{i\beta x_n}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη ως προς $\xi^j e^{i\beta x_n}$ προκύπτει :

$$\begin{aligned} \xi - 2 + \xi^{-1} - r^2 (e^{i\beta h} + e^{-i\beta h} - 2) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \xi^2 - 2\xi + 1 - 2r^2 \xi [\cos(\beta h) - 1] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \xi^2 + 2\xi \left[2r^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 1 \right] + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Για να υπάρχουν πραγματικές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης θα πρέπει :

$$\begin{aligned} \Delta \geq 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \left(2r^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - 1 \right)^2 - 4 &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| 2r^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - 1 \right| \leq 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow r^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Η μέθοδος είναι ευσταθής αν ισχύει : $r^2 \leq 1$.

Το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου είναι $O(k^2 + h^2)$ οπότε η μέθοδος είναι συνεπής προς την κυματική εξίσωση.

Ο παρακάτω αλγόριθμος περιγράφει τα υπολογιστικά βήματα.

**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ
DIRICHLET, ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ CFL**

Βήμα 1^ο. Ορίζονται τα δεδομένα του προβλήματος :

$alpha \in \mathbb{R}$, η ταχύτητα διάδοσης.

$L \in \mathbb{R}$, το μήκος της χορδής.

$T \in \mathbb{R}_+$, ο χρόνος επίλυσης.

Συνάρτηση $f(x)$, αρχική συνθήκη για τη u .

Συνάρτηση $g(x)$, αρχική συνθήκη για τη $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Συναρτήσεις $c1(t), c2(t)$, συνοριακές συνθήκες.

$h, k \in \mathbb{Z}$, χωρικό και χρονικό βήμα αντίστοιχα.

Βήμα 2^ο. Καθορίζεται το πλέγμα.

Ορίζεται ο αριθμός των χωρικών και χρονικών κόμβων :

$$n = \frac{L}{h} \quad \text{και} \quad m = \frac{T}{k}.$$

Ορίζεται μεταβλητή : $lambda = alpha * \frac{k}{h}$.

Τίθενται περιορισμοί για την ευστάθεια της μεθόδου.

Βήμα 3^ο. Υπολογίζεται η λύση για $t=0$, με βάση τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Βήμα 4^ο. Υπολογίζεται η λύση για $t=k$, με βάση τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Βήμα 5^ο. Υπολογίζονται οι λύσεις για τα υπόλοιπα χρονικά στάδια, με βάση τις λύσεις των ήδη υπολογισμένων χρονικών σταδίων και των συνοριακών τιμών.

Ο κώδικας 2 επιλύει το συγκεκριμένο πρόβλημα, για χρονικό εύρος $T=1s$, χρονικό βήμα $k=1.25 * 10^{-3}$ και χωρικό βήμα $h=0.01$, έτσι ώστε η μέθοδος να είναι ευσταθής.



Σχήμα 4.4 : Η ταλάντωση της χορδής σύμφωνα με την ρητή μέθοδο επίλυση πεπερασμένων διαφορών για χρονικό διάστημα μιας περιόδου. Η απεικόνιση γίνεται με χρονικό βήμα $t = 0.025 \text{ sec}$.

4.2.3 Πεπλεγμένη αριθμητική λύση

Η πεπλεγμένη αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος βασίζεται στη μέθοδο του τύπου (3.53). Ορίζουμε $\omega = \frac{1}{2}$, οπότε ο τύπος (3.53) απλοποιείται ως εξής :

$$\frac{U_n^{j-1} - 2U_n^j + U_n^{j+1}}{k^2} - c^2 \left[\frac{U_{n-1}^{j-1} - 2U_n^{j-1} + U_{n+1}^{j-1}}{2h^2} + \frac{U_{n-1}^{j+1} - 2U_n^{j+1} + U_{n+1}^{j+1}}{2h^2} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+r^2)U_n^{j+1} - \frac{r^2}{2}(U_{n-1}^{j+1} + U_{n+1}^{j+1}) = 2U_n^j - (1+r^2)U_n^{j-1} + \frac{r^2}{2}(U_{n-1}^{j-1} + U_{n+1}^{j-1}) \quad (4.16)$$

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια της μεθόδου θεωρούμε πως η λύση της εξίσωσης (4.16) έχει τη μορφή :

$$U_n^j = \xi^j e^{i\beta x_n} \quad (4.17)$$

Αντικαθιστώντας τη λύση (4.17) στην εξίσωση (4.16) προκύπτει :

$$(1+r^2)\xi - \frac{r^2}{2}\xi(e^{-i\beta h} + e^{i\beta h}) = 2 - (1+r^2)\xi^{-1} + \frac{r^2}{2}\xi^{-1}(e^{-i\beta h} + e^{i\beta h}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi^2 [1+r^2 - r^2 \cos(\beta h)] = 2\xi - [1+r^2 - r^2 \cos(\beta h)]$$

Για να υπάρχουν πραγματικές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης θα πρέπει :

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+r^2 - r^2 \cos(\beta h) \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2r^2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \geq 1$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει πάντα οπότε η μέθοδος είναι ασυνεχώς ευσταθής.

Το σφάλμα της μεθόδου είναι $O(k^2 + h^2)$ οπότε η μέθοδος είναι συνεπής προς τη κυματική εξίσωση.

Στον παρακάτω αλγόριθμο περιγράφονται τα βήματα υπολογισμού που ακολουθούνται.

**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ
ΤΙΜΩΝ DIRICHLET, ΜΕ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟ**

Βήμα 1^ο. Ορίζονται τα δεδομένα του προβλήματος :

$\alpha \in \mathbb{R}$, η ταχύτητα διάδοσης.

$L \in \mathbb{R}$, το μήκος της χορδής.

$T \in \mathbb{R}_+$, ο χρόνος επίλυσης.

Συνάρτηση $f(x)$, αρχική συνθήκη για τη u .

Συνάρτηση $g(x)$, αρχική συνθήκη για τη $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Συναρτήσεις $c1(t), c2(t)$, συνοριακές συνθήκες.

$h, k \in \mathbb{Z}$, χωρικό και χρονικό βήμα αντίστοιχα.

Βήμα 2^ο. Καθορίζεται το πλέγμα.

Ορίζεται ο αριθμός των χωρικών και χρονικών κόμβων :

$$n = \frac{L}{h} \quad \text{και} \quad m = \frac{T}{k}.$$

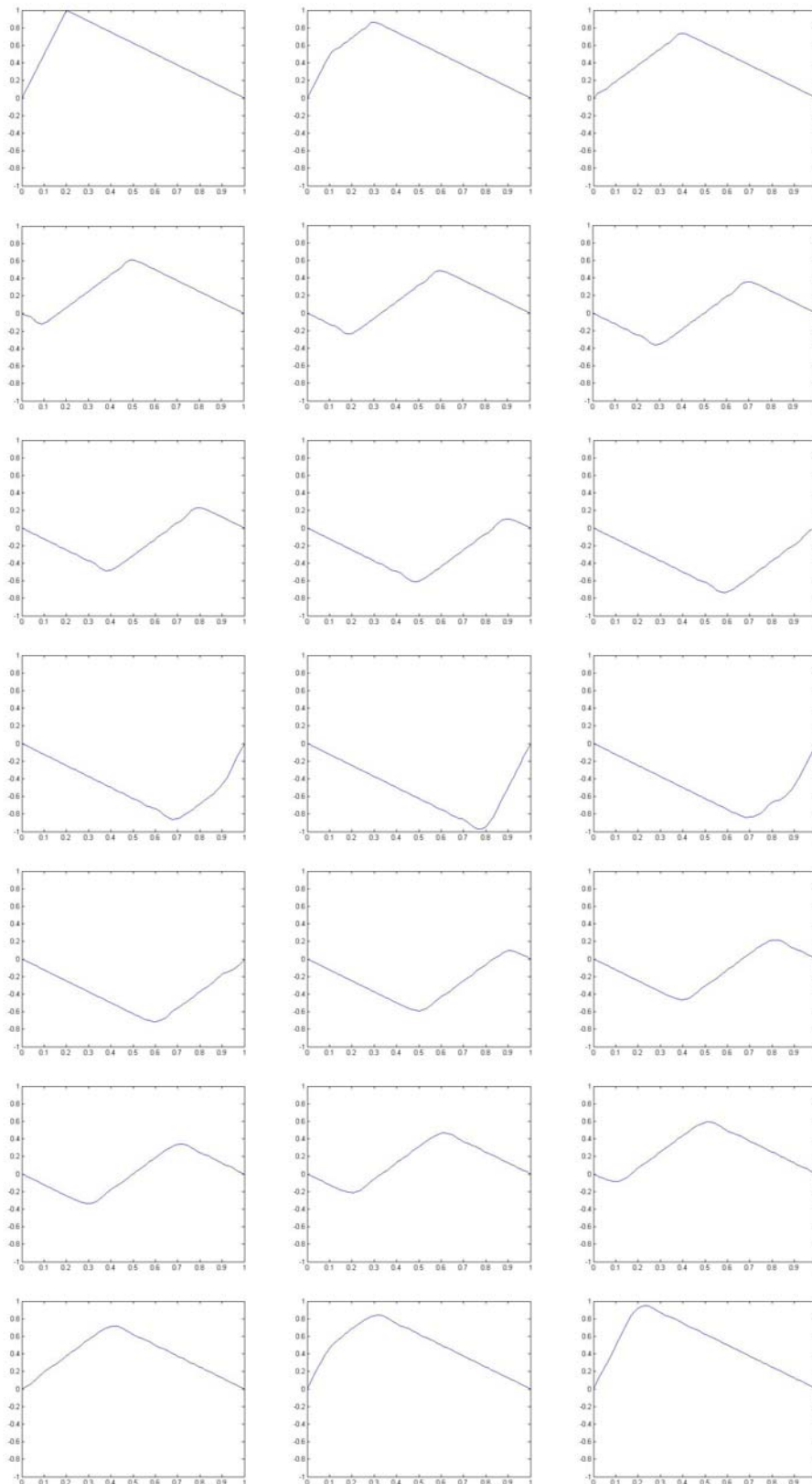
Ορίζεται μεταβλητή : $\lambda = \alpha * \frac{k}{h}$.

Βήμα 3^ο. Υπολογίζεται η λύση για $t=0$, με βάση τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Βήμα 4^ο. Ορίζεται το τριδιαγωνικό σύστημα για $t=k$, και υπολογίζονται οι λύσεις σε κάθε χωρικό κόμβο.

Βήμα 5^ο. Ορίζεται το τριδιαγωνικό σύστημα για τα επόμενα χρονικά στάδια και υπολογίζονται οι λύσεις με βάση τις τιμές της συνάρτησης που ήδη υπολογίστηκαν και τις συνοριακές τιμές.

Ο κώδικας 3 επιλύει το συγκεκριμένο πρόβλημα, για χρονικό εύρος $T=1s$, χρονικό βήμα $k=1.25*10^{-3}$ και χωρικό βήμα $h=0.01$. Παρατηρούμε πως αυτή η μέθοδος είναι λιγότερο ακριβής σε σύγκριση με τη ρητή μέθοδο. Η αστοχία της επίλυσης όμως επηρεάζεται από τη μέθοδο επίλυσης του τριδιαγωνικού συστήματος, η οποία είναι η πιο απλοϊκή.



Σχήμα 4.5 : Η ταλάντωση της χορδής σύμφωνα με την πεπλεγμένη μέθοδο επίλυση πεπερασμένων διαφορών για χρονικό διάστημα μιας περιόδου. Η απεικόνιση γίνεται με χρονικό βήμα $t = 0.025 \text{ sec}$.

4.2.4 Σύγκριση των μεθόδων επίλυσης

Παρατηρήσαμε οπτικά πως η ρητή μέθοδος προσεγγίζει καλύτερα την ακριβή λύση σε σύγκριση με τη πεπλεγμένη μέθοδο. Μπορούμε να καταλήξουμε σε σαφή συμπεράσματα συγκρίνοντας τα σφάλματα των δύο μεθόδων.

Στην ανάλυση αυτή θα εκφράσουμε το σφάλμα με τη μορφή του σχετικού σφάλματος. Αν η ακριβής τιμή συμβολίζεται με u_n^j και η προσεγγιστική τιμή με U_n^j , το σχετικό σφάλμα ορίζεται ως το πηλίκο της ενεργειακής νόρμας της διαφοράς προσεγγιστικής και ακριβούς λύσεως προς την νόρμα του μεγίστου της ακριβούς λύσεως,

$$E = \frac{\|u_n^j - U_n^j\|_2}{\|u_n^j\|_\infty} \quad (4.18)$$

όπου E : το σχετικό σφάλμα.

Με βάση το τύπο (4.18) υπολογίζουμε το σφάλμα της ρητής μεθόδου E_P και της πεπλεγμένης μεθόδου E_{II} , για κάθε χρονικό κόμβο. Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 4.6 και προκύπτει από τον κώδικα που ακολουθεί :

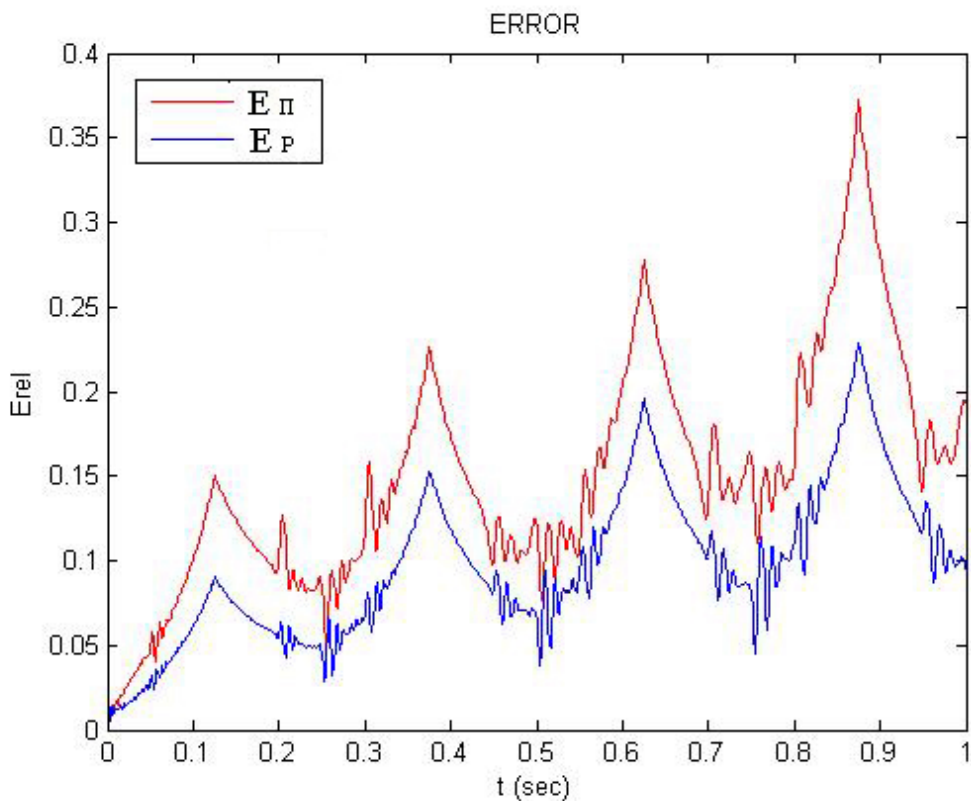
```
% uan : πίνακας αναλυτικής λύσης  
% uri : πίνακας ρητής αριθμητικής λύσης  
% upe : πίνακας πεπλεγμένης αριθμητικής λύσης  
% t : χρονικό διάστημα επίλυσης
```

```
for i=1:length(t);  
errorr(1,i)=norm(uan(i,:)-uri(i,:))/norm(uan(i,:),inf);  
errorp(1,i)=norm(uan(i,:)-upe(i,:))/norm(uan(i,:),inf);  
end  
plot(t,errorr)  
hold on  
plot(t,errorp,'red')
```

Ενδεικτικά στο πίνακα 4.1 συγκεντρώθηκαν τα αποτελέσματα του παραπάνω υπολογισμού για $t=0$ sec και $t=1$ sec.

Πίνακας 4.1 : Σχετικό σφάλμα ρητής και πεπλεγμένης μεθόδου για $t=0 \text{ sec}$ και $t=1 \text{ sec}$.

x (m)	t=0 sec			t=1 sec		
	u αναλυτική	u ρητή	u πεπλεγμένη	u αναλυτική	u ρητή	u πεπλεγμένη
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0100	0.0492	0.0500	0.0500	0.0492	0.0545	0.0457
0.0200	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1079	0.0962
0.0300	0.1508	0.1500	0.1500	0.1508	0.1562	0.1453
0.0400	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2046	0.1941
0.0500	0.2492	0.2500	0.2500	0.2492	0.2501	0.2415
0.0600	0.3000	0.3000	0.3000	0.3000	0.2963	0.2955
0.0700	0.3509	0.3500	0.3500	0.3509	0.3453	0.3453
0.0800	0.3999	0.4000	0.4000	0.3999	0.3929	0.3972
0.0900	0.4490	0.4500	0.4500	0.4490	0.4406	0.4450
0.1000	0.5001	0.5000	0.5000	0.5001	0.4939	0.4988
0.1100	0.5511	0.5500	0.5500	0.5511	0.5426	0.5479
0.1200	0.5999	0.6000	0.6000	0.5999	0.6006	0.5990
0.1300	0.6487	0.6500	0.6500	0.6487	0.6612	0.6448
0.1400	0.7002	0.7000	0.7000	0.7002	0.7176	0.6936
0.1500	0.7517	0.7500	0.7500	0.7517	0.7743	0.7378
0.1600	0.7995	0.8000	0.8000	0.7995	0.8234	0.7784
0.1700	0.8476	0.8500	0.8500	0.8476	0.8582	0.8130
0.1800	0.9015	0.9000	0.9000	0.9015	0.8944	0.8447
0.1900	0.9542	0.9500	0.9500	0.9542	0.9223	0.8702
0.2000	0.9873	1.0000	1.0000	0.9873	0.9440	0.8893
0.2100	0.9913	0.9875	0.9875	0.9913	0.9649	0.9051
0.2200	0.9765	0.9750	0.9750	0.9765	0.9736	0.9170
0.2300	0.9604	0.9625	0.9625	0.9604	0.9724	0.9217
0.2400	0.9495	0.9500	0.9500	0.9495	0.9672	0.9256
0.2500	0.9388	0.9375	0.9375	0.9388	0.9568	0.9262
0.2600	0.9253	0.9250	0.9250	0.9253	0.9422	0.9229
0.2700	0.9115	0.9125	0.9125	0.9115	0.9273	0.9098
0.2800	0.8999	0.9000	0.9000	0.8999	0.9064	0.9016
0.2900	0.8882	0.8875	0.8875	0.8882	0.8837	0.8879
0.3000	0.8751	0.8750	0.8750	0.8751	0.8630	0.8735
0.3100	0.8619	0.8625	0.8625	0.8619	0.8492	0.8545
0.3200	0.8499	0.8500	0.8500	0.8499	0.8395	0.8421
0.3300	0.8380	0.8375	0.8375	0.8380	0.8339	0.8297
0.3400	0.8250	0.8250	0.8250	0.8250	0.8249	0.8182
0.3500	0.8121	0.8125	0.8125	0.8121	0.8168	0.8058
0.3600	0.8000	0.8000	0.8000	0.8000	0.8067	0.7941
0.3700	0.7879	0.7875	0.7875	0.7879	0.7930	0.7851
0.3800	0.7750	0.7750	0.7750	0.7750	0.7817	0.7746
0.3900	0.7622	0.7625	0.7625	0.7622	0.7627	0.7623
0.4000	0.7500	0.7500	0.7500	0.7500	0.7422	0.7528
0.4100	0.7378	0.7375	0.7375	0.7378	0.7310	0.7412
0.4200	0.7250	0.7250	0.7250	0.7250	0.7213	0.7286
0.4300	0.7122	0.7125	0.7125	0.7122	0.7133	0.7154
0.4400	0.7000	0.7000	0.7000	0.7000	0.7056	0.7028
0.4500	0.6877	0.6875	0.6875	0.6877	0.6921	0.6867
0.4600	0.6750	0.6750	0.6750	0.6750	0.6760	0.6699
0.4700	0.6623	0.6625	0.6625	0.6623	0.6611	0.6596
0.4800	0.6500	0.6500	0.6500	0.6500	0.6484	0.6454
0.4900	0.6377	0.6375	0.6375	0.6377	0.6352	0.6376
0.5000	0.6250	0.6250	0.6250	0.6250	0.6199	0.6261
0.5100	0.6123	0.6125	0.6125	0.6123	0.6154	0.6139
0.5200	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6037	0.6011
0.5300	0.5877	0.5875	0.5875	0.5877	0.5913	0.5902
0.5400	0.5750	0.5750	0.5750	0.5750	0.5742	0.5778
0.5500	0.5623	0.5625	0.5625	0.5623	0.5585	0.5615
0.5600	0.5500	0.5500	0.5500	0.5500	0.5464	0.5479
0.5700	0.5376	0.5375	0.5375	0.5376	0.5384	0.5357
0.5800	0.5250	0.5250	0.5250	0.5250	0.5281	0.5249
0.5900	0.5124	0.5125	0.5125	0.5124	0.5146	0.5123
0.6000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5002	0.4991
0.6100	0.4876	0.4875	0.4875	0.4876	0.4846	0.4866
0.6200	0.4750	0.4750	0.4750	0.4750	0.4742	0.4764
0.6300	0.4624	0.4625	0.4625	0.4624	0.4623	0.4637
0.6400	0.4500	0.4500	0.4500	0.4500	0.4504	0.4535
0.6500	0.4376	0.4375	0.4375	0.4376	0.4388	0.4375
0.6600	0.4250	0.4250	0.4250	0.4250	0.4277	0.4223
0.6700	0.4124	0.4125	0.4125	0.4124	0.4115	0.4122
0.6800	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.3954	0.3964
0.6900	0.3876	0.3875	0.3875	0.3876	0.3866	0.3875
0.7000	0.3750	0.3750	0.3750	0.3750	0.3805	0.3775
0.7100	0.3624	0.3625	0.3625	0.3624	0.3634	0.3645
0.7200	0.3500	0.3500	0.3500	0.3500	0.3474	0.3515
0.7300	0.3376	0.3375	0.3375	0.3376	0.3358	0.3363
0.7400	0.3250	0.3250	0.3250	0.3250	0.3254	0.3229
0.7500	0.3124	0.3125	0.3125	0.3124	0.3140	0.3115
0.7600	0.3000	0.3000	0.3000	0.3000	0.3000	0.3013
0.7700	0.2876	0.2875	0.2875	0.2876	0.2882	0.2881
0.7800	0.2750	0.2750	0.2750	0.2750	0.2741	0.2745
0.7900	0.2624	0.2625	0.2625	0.2624	0.2612	0.2611
0.8000	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2503	0.2508
0.8100	0.2376	0.2375	0.2375	0.2376	0.2384	0.2394
0.8200	0.2250	0.2250	0.2250	0.2250	0.2267	0.2255
0.8300	0.2124	0.2125	0.2125	0.2124	0.2117	0.2131
0.8400	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.1965	0.1961
0.8500	0.1876	0.1875	0.1875	0.1876	0.1887	0.1862
0.8600	0.1750	0.1750	0.1750	0.1750	0.1780	0.1770
0.8700	0.1624	0.1625	0.1625	0.1624	0.1633	0.1629
0.8800	0.1500	0.1500	0.1500	0.1500	0.1456	0.1532
0.8900	0.1376	0.1375	0.1375	0.1376	0.1367	0.1371
0.9000	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1297	0.1222
0.9100	0.1124	0.1125	0.1125	0.1124	0.1122	0.1122
0.9200	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.0974	0.0983
0.9300	0.0876	0.0875	0.0875	0.0876	0.0863	0.0883
0.9400	0.0750	0.0750	0.0750	0.0750	0.0780	0.0777
0.9500	0.0624	0.0625	0.0625	0.0624	0.0628	0.0633
0.9600	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.0478	0.0501
0.9700	0.0376	0.0375	0.0375	0.0376	0.0381	0.0360
0.9800	0.0250	0.0250	0.0250	0.0250	0.0254	0.0224
0.9900	0.0124	0.0125	0.0125	0.0124	0.0126	0.0118
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
		$E_r = 0.0150$			$E_r = 0.0911$	
		$E_{II} = 0.0150$			$E_{II} = 0.1909$	



Σχήμα 4.6: Σχετικό σφάλμα ρητής και πεπλεγμένης αριθμητικής λύσης.

Παρατηρούμε πως η πεπλεγμένη μέθοδος είναι λιγότερο ακριβής από τη ρητή. Χρησιμοποιώντας ίσως έναν άλλο τρόπο επίλυσης του τριδιαγωνικού συστήματος, το σφάλμα της πεπλεγμένης μεθόδου θα μπορούσε να μειωθεί. Παρόλα αυτά η πεπλεγμένη μέθοδος διατηρεί το πλεονέκτημα να μην έχει περιορισμούς ως προς την ευστάθεια έναντι της ρητής μεθόδου. Χρησιμοποιώντας μεγαλύτερα βήματα σε χρονικό και χωρικό πεδίο παρατηρούμε πως η ακρίβεια της πεπλεγμένης μεθόδου επηρεάζεται περισσότερο σε σχέση με την ακρίβεια της ρητής μεθόδου.

4.3 Παλλόμενη ορθογώνια μεμβράνη

Η κυματική εξίσωση με δύο ανεξάρτητες χωρικές μεταβλητές,

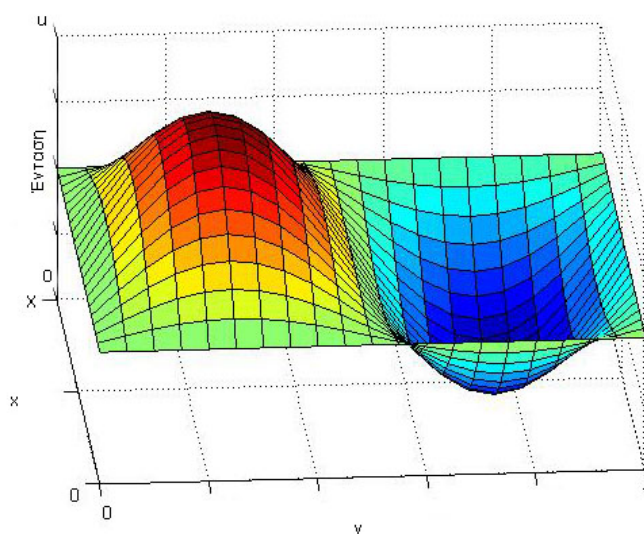
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.19)$$

όπου c : η ταχύτητα διάδοσης (σε m/s), $c = \sqrt{\frac{T}{\mu_s}}$

T : η τάση που ασκείται (σε N)

μ_s : η επιφανειακή πυκνότητα της μεμβράνης (σε kg/m^2),

ικανοποιείται από εγκάρσια κύματα που διαδίδονται σε μεμβράνη. Έστω μια ορθογώνια επίπεδη λεπτή μεμβράνη με πακτωμένες πλευρές μήκους X και Y αντίστοιχα, που διεγείρεται αρχικά όπως φαίνεται στο σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7: Αρχική κατάσταση της μεμβράνης.

4.3.1 Αναλυτική λύση

Επειδή η μεμβράνη έχει ακίνητες πλευρές, οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος θα είναι :

$$u(0, y, t) = 0 \quad (4.20)$$

$$u(X, y, t) = 0 \quad (4.21)$$

$$u(x, 0, t) = 0 \quad (4.22)$$

$$u(x, Y, t) = 0 \quad (4.23)$$

Θεωρούμε πως οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος για τη χρονική στιγμή $t = 0$, είναι:

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y) \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad (4.25)$$

Η λύση του προβλήματος μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, αφού η μερική διαφορική εξίσωση και οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς και γραμμικές. Αναζητούμε λοιπόν λύσεις με τη μορφή γινομένου :

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (4.26)$$

Αντικαθιστώντας το τύπο (4.26) στη κυματική εξίσωση (4.19), προκύπτει :

$$\begin{aligned} X(x)Y(y)T''(t) &= c^2(X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ο τύπος (4.27) οδηγεί σε δύο διαφορικές εξισώσεις :

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \quad (4.28)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \quad (4.29)$$

Αν $\lambda \geq 0$ οδηγούμαστε σε τετριμμένες λύσεις οπότε υποθέτουμε ότι $\lambda = -\kappa^2$, όπου $\kappa > 0$. Σε αυτή τη περίπτωση οι παραπάνω τύποι μεταγράφονται ως εξής,

$$T''(t) + \kappa^2 c^2 T(t) = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \kappa^2 \quad (4.31)$$

όπως και προηγουμένως για να αποφευχθούν οι τετριμμένες λύσεις εκφράζουμε τη (4.31) ως,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2 \Leftrightarrow X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \quad (4.32)$$

και

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \kappa^2 = \mu^2 \Leftrightarrow Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0 \quad (4.33)$$

όπου $\mu > 0$ και $\nu^2 + \mu^2 = \kappa^2$.

Οι τύποι (4.30),(4.32),(4.33) και οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος δημιουργούν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, οι γενικές λύσεις του οποίου είναι,

$$X(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x) \quad (4.34)$$

$$Y(y) = C \cos(\nu y) + D \sin(\nu y) \quad (4.35)$$

$$T(t) = E \cos(c \kappa t) + F \sin(c \kappa t) \quad (4.36)$$

όπου A, B, C, D, E, F αυθαίρετες σταθερές. Η γενική λύση της δισδιάστατης κυματικής εξίσωσης είναι:

$$u(x, y, t) = \sum_n \sum_m \left(A_{nm} \cos(\omega_{nm} t) + B_{nm} \sin(\omega_{nm} t) \right) \sin\left(\frac{m\pi}{X} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{Y} y\right) \quad (4.37)$$

όπου $\omega_{nm} = c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{X}\right)^2 + \left(\frac{n}{Y}\right)^2}$ και

$$A_{nm} = \frac{4}{XY} \int_0^Y \int_0^X \phi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{X} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{Y} y\right) dx dy \quad (4.38)$$

$$B_{nm} = \frac{4}{XY \omega_{nm}} \int_0^Y \int_0^X \psi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{X} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{Y} y\right) dx dy \quad (4.39)$$

Θεωρούμε πως οι διαστάσεις της μεμβράνης είναι $X = 1 \text{ m}$ και $Y = 1 \text{ m}$, η ταχύτητα διάδοσης $c = \frac{1}{\pi}$ και οι αρχικές συνθήκες του

προβλήματος είναι $u(x, y, 0) = \sin(2\pi x) \sin(\pi y)$ και $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$. Οπότε οι συντελεστές Fourier για το πρόβλημα υπολογίζονται,

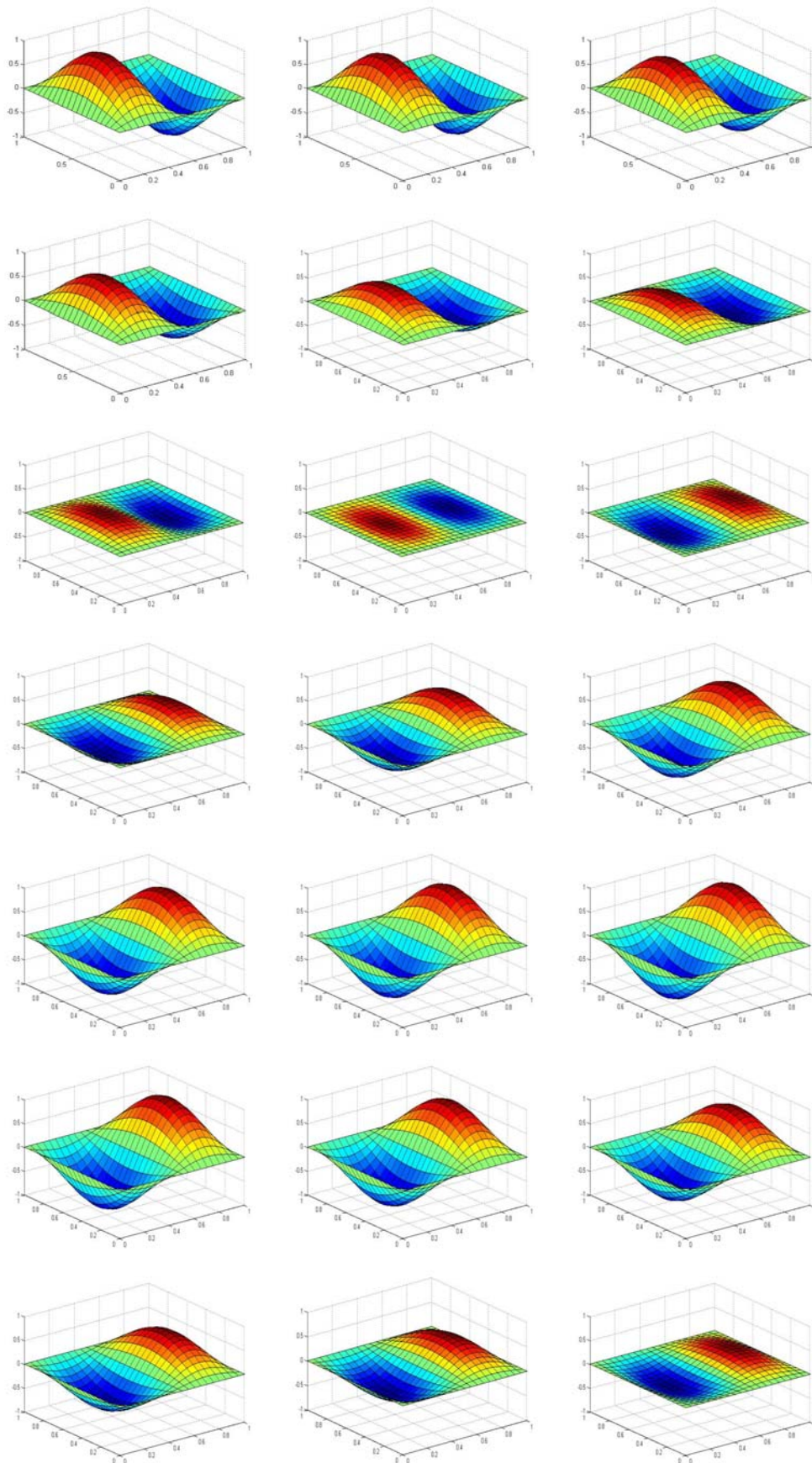
$$A_{nm} = 4 \int_0^1 \int_0^1 \sin(2\pi x) \sin(\pi y) \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) dx dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{nm} = \begin{cases} 0 & , \alpha\nu \quad m \neq 2, \quad n \neq 1 \\ 1 & , \alpha\nu \quad m = 2, \quad n = 1 \end{cases}$$

και $B_{nm} = 0$. Η λύση του προβλήματος είναι,

$$u(x, y, t) = \sin(2\pi x) \sin(\pi y) \cos(\sqrt{5}t)$$

και υλοποιείται με το κώδικα 5.

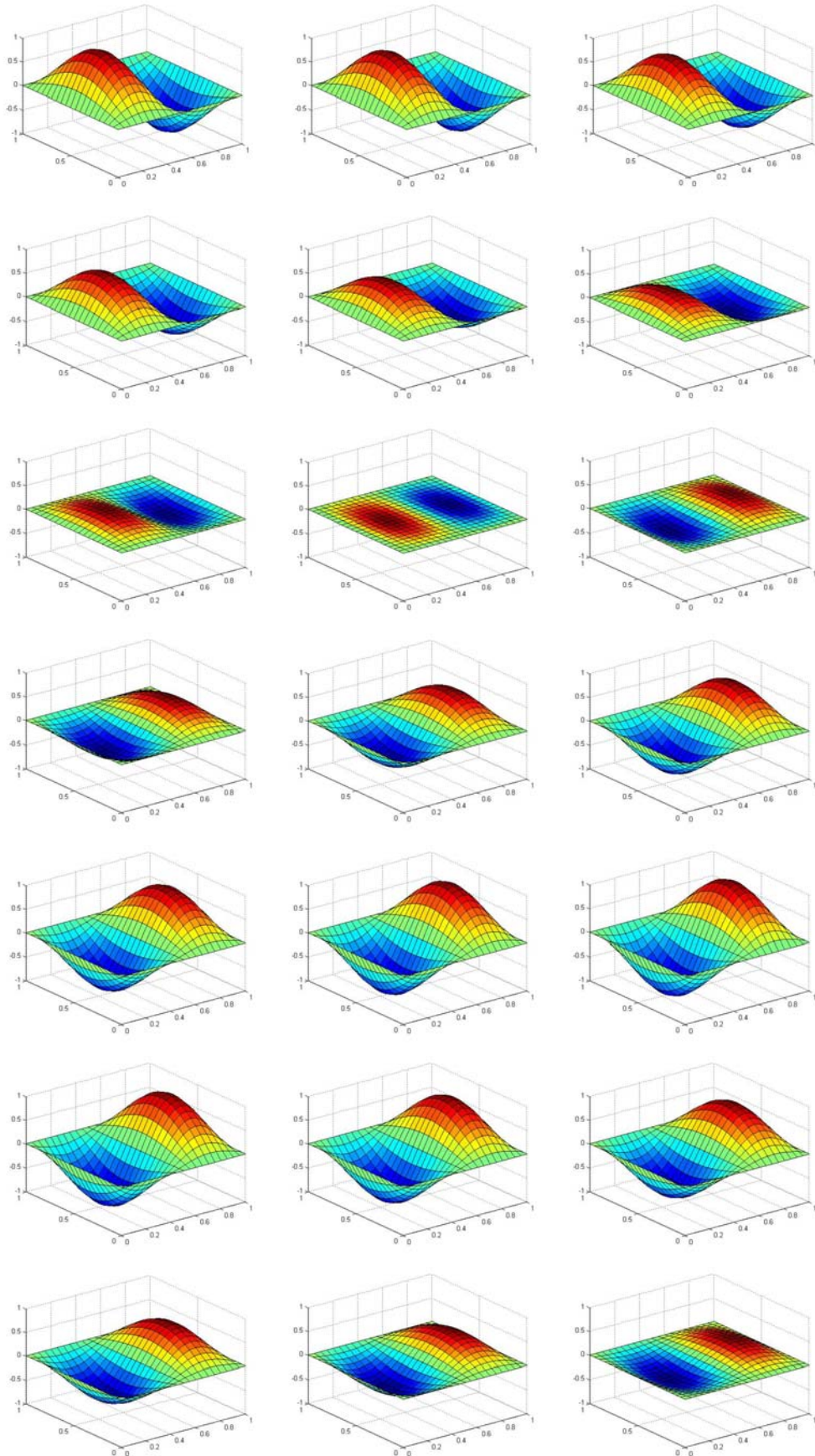


Σχήμα 4.8 : Η ταλάντωση της μεμβράνης σύμφωνα με την αναλυτική μέθοδο επίλυση για χρονικό διάστημα $T=2\text{ sec}$. Η απεικόνιση γίνεται με χρονικό βήμα $t=0.1\text{ sec}$.

4.3.2 Ρητή αριθμητική λύση

Για την ρητή αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος χρησιμοποιούμε τους τύπους (3.48) και (3.52). Ο κώδικας 6 επιλύει το συγκεκριμένο πρόβλημα, για χρονικό εύρος $T=2\text{ sec}$ με χρονικό βήμα $k=0.01$ και χωρικά βήματα $h=r=0.05$, έτσι ώστε η μέθοδος να είναι ευσταθής.

Τα βήματα του αλγορίθμου είναι ανάλογα με τη περίπτωση της χορδής, δηλαδή ορίζονται οι είσοδοι, καθορίζεται το πλέγμα, υπολογίζονται οι λύσεις στα δύο πρώτα χρονικά στάδια από τις αρχικές συνθήκες και με επαναλαμβανόμενη διαδικασία προσεγγίζεται η λύση για κάθε διακριτό σημείο.



Σχήμα 4.9: Η ταλάντωση της μεμβράνης σύμφωνα με την ρητή μέθοδο επίλυση πεπερασμένων διαφορών για χρονικό διάστημα $T=2$ sec. Η απεικόνιση γίνεται με χρονικό βήμα $t=0.1$ sec.

Παράρτημα 1: Κώδικες επίλυσης

Κώδικας 1: Αναλυτική λύση για το πρόβλημα χορδής (§ 4.2).

```
% Here the initial shape of the string is that of a triangle
% String is plucked a distance s (0<s<L) from origin and is pulled a
% distance H away from rest position

clear all;

L=1;      % Length of string
T=1;     % Time interval of solution
h=0.01;  % space step, Change this
k=h/8;   % time step, Change this
c=4;     % constant (phase speed)
n=L/h;
m=T/k;
x=0:h:L;
t=0:k:T;
uf=zeros(length(t),length(x));
uf(:,1)=0;
uf(:,n+1)=0;
s=L/5;   %point of excitation at x axis
H=1;    %first excitation at y axis

for j=1:m+1;
    for i=2:n;
        for modes=1:50;

f(modes)=(25*H/(2*(modes^2)*pi^2))*(sin(modes*pi/5))*(cos(modes*pi*c*
t(j)/L))*sin(modes*pi*x(i)/L);
            end
            uf(j,i)=sum(f);
        end
    end
end

uf
figure(1)
plot(x,uf(1,:));title('Initial shape of
string');xlabel('Length');ylabel('Amplitude');
[X,TT]=meshgrid(x,t);
figure(2)
surf(X,TT,uf);ylabel('Time (s)');xlabel('Space (m)')
figure(3)
a=plot(x,uf(1,:))
set(a,'erasemode','xor');
axis([0 1 -1 1]);
for j=1:m+1;
    set(a,'xdata',x,'ydata',uf(j,:));
    pause(0.01)
    %M(j)=getframe;
%with active lines 43,45,46,47 export a video with the solution
end
%mov = avifile('paradeigma01.avi')
%mov = addframe(mov,M);
%mov = close(mov);
```

Κώδικας 2: Ρητή αριθμητική μέθοδος επίλυσης για το πρόβλημα χορδής (§ 4.2).

```
% Here the initial shape of the string is that of a triangle
% String is plucked a distance s (0<s<L) from origin and is pulled a
% distance H away from rest position

clear all;

L=1;      % Length of string
T=1;     % Time interval of solution
c1=0;    % u(0,t)=c1 boundary condition
c2=0;    % u(L,t)=c2 boundary condition
h=0.01;  % space step, Change this
k=h/8;   % time step, Change this
alpha=4; % constant (phase speed)
lambda=alpha*k/h % But lambda^2 should be less than 1
n=L/h;
m=T/k;
x=0:h:L;
t=0:k:T;
u=zeros(length(t),length(x));
u(:,1)=c1;
u(:,n+1)=c2;
s=L/5;
H=1;
% Initial condition for time = 0 (Time step 0)
% Compute the initial f(x) here (Replace appropriately)
for i=1:floor(s/h)+1;
    u(1,i)=(H/s)*(i-1)*h;
end
for i=floor(s/h)+2:n+1;% Initial condition for time = 0 (Time step 0)
    u(1,i)=(H/(s-L))*((i-1)*h-L);
end
figure(1)
plot(x,u(1,:));title('Initial shape of string');
xlabel('Length');ylabel('Amplitude');

% Initial condition for the next time step (Time step 1)
% Sample and include the proper g(x) here (if necessary)
for i=1:n-1;
    u(2,i+1)=(1-lambda^2)*u(1,i+1)+lambda^2/2*(u(1,i+2)+u(1,i));
% g(x) also goes here if other than zero
end

for j=3:m+1 % j is the time index
    for i=2:n
        u(j,i)=2*(1-lambda^2)*u(j-1,i)+lambda^2*(u(j-1,i+1)+u(j-1,i-1))-
u(j-2,i);
    end
end
size(u)
u
lambda
[X,TT]=meshgrid(x,t);
figure(2)
surf(X,TT,u);ylabel('Time (s)');xlabel('Space (m)');
az=-77;el=30;view(az,el)
figure(3)
```

```
a=plot(x,u(1,:))
set(a,'erasemode','xor');
axis([0 1 -1 1]);
for j=1:m+1;
    set(a,'xdata',x,'ydata',u(j,:));
    pause(0.01)
    %M(j)=getframe;
%with activate lines 58,60,61,62 you can export a video with the
solution
end
%mov = avifile('paradeigma02.avi')
%mov = addframe(mov,M);
%mov = close(mov);
```

Κώδικας 3: : Πεπλεγμένη αριθμητική μέθοδος επίλυσης για το πρόβλημα χορδής με χρήση της μεθόδου Gauss (§ 4.2).

```

% Here the initial shape of the string is that of a triangle
% String is plucked a distance s (0<s<L) from origin and is pulled a
% distance H away from rest position

clear all;

L=1;      % Length of string
T=1;     % Time interval of solution
c1=0;    % u(0,t)=c1 boundary condition
c2=0;    % u(L,t)=c2 boundary condition
h=0.01;  % space step, Change this
k=h/8;   % time step, Change this
alpha=4; % constant (phase speed)
lambda=alpha*k/h
n=L/h;    % Space related
m=T/k;    % Time related
x=0:h:L;
t=0:k:T;
u=zeros(length(t),length(x));
u(:,1)=c1;
u(:,n+1)=c2;
s=L/5;
H=1;

% Initial condition for time = 0 (Time step 0)
% Compute the initial f(x) here (Replace appropriately)

for i=1:floor(s/h)+1;
    u(1,i)=(H/s)*(i-1)*h;
end
for i=floor(s/h)+2:n+1;% Initial condition for time = 0 (Time step 0)
    u(1,i)=(H/(s-L))*((i-1)*h-L);
end
figure(1)
plot(x,u(1,:));title('Initial shape of string');
xlabel('Length');ylabel('Amplitude');

% Initial condition for the next time step (Time step 1)
% Sample and include the proper g(x) here (if necessary)
% set matrix of coefficients a

sub=[0 ((-lambda^2)/2)*ones(1,n-2)];
diag=(1+lambda^2)*ones(1,n-1);
sup=[((-lambda^2)/2)*ones(1,n-2) 0];
data=u(1,2:n);
trid=Tridiag(sub,diag,sup,data);
u(2,2:n)=trid(1,:);

%solution for the next time nodes

for j=3:m+1;
    data(1,1)=((lambda^2)/2)*(u(j,1)+u(j-2,1)+u(j-2,3))+2*u(j-1,2)-
(1+lambda^2)*u(j-2,2);
    for i=2:n-2;
        data(1,i)=((lambda^2)/2)*(u(j-2,i)+u(j-2,i+2))+2*u(j-1,i+1)-
(1+lambda^2)*u(j-2,i+1);
    end
end

```

```

        end
        data(1,n-1)=((lambda^2)/2)*(u(j-2,n-1)+u(j-
2,n+1)+u(j,n+1))+2*u(j-1,n)-(1+lambda^2)*u(j-1,n);
        trid=Tridiag(sub,diag,sup,data);
        u(j,2:n)=trid;
end

figure(2)
plot(x,u(2,:))
size(u)
[X,TT]=meshgrid(x,t);
figure(2)
surf(X,TT,u);ylabel('Time (s)');xlabel('Space (m)');az=-
77;el=30;view(az,el)

figure(3)
c=plot(x,u(1,:))
set(c,'erasemode','xor');
axis([0 1 -1 1]);

for j=1:m+1;
    set(c,'xdata',x,'ydata',u(j,:));
    pause(0.01)
    %M(j)=getframe; %with active lines 74,76,77,78 export a
video with the solution
end
%mov = avifile('paradeigma03.avi')
%mov = addframe(mov,M);
%mov = close(mov);

```

Κώδικας 4: Συνάρτηση επίλυσης τριδιαγωνικού συστήματος.

```
function trid=Tridiag(sub,diag,sup,data)

% Tridiag(sub,diag,sup,data):
% Tridiagonal system solve
% Input:
% sub = subdiagonal vector
% diag = diagonal vector
% sup = superdiagonal vector
% data = righthand side vector
% Output:
% trid = solution vector

n=length(diag);

% forward elimination

for k=2:n
    factor = sub(k)/diag(k-1);
    diag(k)=diag(k)-factor*sup(k-1);
    data(k)=data(k)-factor*data(k-1);
end

% back substitution

trid(n)=data(n)/diag(n);
for k= n-1:-1:1
    trid(k)=(data(k)-sup(k)*trid(k+1))/diag(k);
end
```

Κώδικας 5: Αναλυτική λύση για το πρόβλημα μεμβράνης (§ 4.3).

```
% membrane with initial conditions
% u(x,y,0)=sin(2pix)sin(pi*y) and u'(x,y,0)=0
% analitical solution

clear all;

X=1;      % Length of one side
Y=1;      % Length of the other side
T=2;     % Time interval of solution
c1=0;     % u(0,y,t)=c1 boundary condition
c2=0;     % u(X,y,t)=c2 boundary condition
c3=0;     % u(x,0,t)=c3 b.c
c4=0;     % u(x,Y,t)=c4 b.c
h=0.05;   % x space step, Change this
r=0.05;   % y space step, Change this
k=0.01;   % time step, Change this
c=1/pi;   % constant (phase speed)
xlambda=c*k/h % But this should be less than 1
ylambda=c*k/r % But this should be less than 1
n=X/h;
l=Y/r;
m=T/k;

x=0:h:X;
y=0:r:Y;
t=0:k:T;

u=zeros(length(y),length(x),length(t));
u(:,1,:)=c1;
u(:,n+1,:)=c2;
u(1,:,:)=c3;
u(l+1,:,:)=c4;

for z=1:m+1
    for j=1:l+1;
        for i=1:n+1;
            u(j,i,z)=sin(2*pi*x(i))*sin(pi*y(j))*cos(sqrt(5)*t(z));
        end
    end
end

[A,B] = meshgrid(x,y)

figure(1)
surf(A,B,u(:,:,1));
title('first state');
ylabel('y');xlabel('x');

figure(2)
a=surf(A,B,u(:,:,1));
set(a,'erasemode');
axis([0 1 0 1 -1 1])
for z=1:m+1;
    set(a,'xdata',x,'ydata',y,'zdata',u(:,:,z));
    pause(0.1)
    % M(z)=getframe;
```

```
%active lines 59,61,62,63 in order to export video with the solution
end
% mov = avifile('paradeigma4.avi')
% mov = addframe(mov,M);
% mov = close(mov);
```

Κώδικας 6: Ρητή αριθμητική μέθοδος επίλυσης για το πρόβλημα μεμβράνης (§ 4.3).

```

% membrane with initial conditions
% u(x,y,0)=sin(2pix)sin(pi*y) and u'(x,y,0)=0
% implicit numerical solution
clear all;

X=1;      % Length of one side
Y=1;      % Length of the other side
T=2;     % Time interval of solution
c1=0;     % u(0,y,t)=c1 boundary condition
c2=0;     % u(X,y,t)=c2 boundary condition
c3=0;     % u(x,0,t)=c3 b.c
c4=0;     % u(x,Y,t)=c4 b.c
h=0.05;   % x space step, Change this
r=0.05;   % y space step, Change this
k=0.01;   % time step, Change this
c=1/pi;   % constant (phase speed)
xlambdac=c*k/h % But this should be less than 1
ylambdac=c*k/r % But this should be less than 1
n=X/h;
l=Y/r;
m=T/k;
x=0:h:X;
y=0:r:Y;
t=0:k:T;

w=zeros(length(y),length(x),length(t));
w(:,1,:)=c1;
w(:,n+1,:)=c2;
w(1,:,:)=c3;
w(l+1,:,:)=c4;

%t=0
% Compute the initial f(x) here (Replace appropriately)
for j=2:l;
    for i=2:n;
        w(j,i,1)=sin(2*pi*(i-1)*h)*sin(pi*(j-1)*r);
    end
end

%t=1
%Sample and include the proper g(x) here (if necessary)
for j=2:l;
    for i=2:n;
        w(j,i,2)=xlambdac^2/2*(w(j-1,i,1)+w(j+1,i,1))+ylambdac^2/2*
(w(j,i-1,1)+w(j,i+1,1))+(1-xlambdac^2-ylambdac^2)*w(j,i,1);
        % g(x) also goes here if other than zero
    end
end

%t=...
for z=3:m+1;
    for j=2:l;
        for i=2:n;
            w(j,i,z)=xlambdac^2*(w(j-1,i,z-1)+w(j+1,i,z-1)-2*w(j,i,z-1))
+ylambdac^2*(w(j,i-1,z-1)+w(j,i+1,z-1)-2*w(j,i,z-1))+2*w(j,i,z-1)-
w(j,i,z-2);

```



```

        end
    end
end

[A,B] = meshgrid(x,y)

figure(1)
surf(A,B,w(:,:,1));
title('first state');
ylabel('y');xlabel('x');

figure(2)
a=surf(A,B,w(:,:,1));
set(a,'erasemode');
axis([0 1 0 1 -1 1])
for z=1:m+1;
    set(a,'xdata',x,'ydata',y,'zdata',w(:,:,z));
    pause(0.1)
    % M(z)=getframe;
% active 73,75,76,77 in order to export video with the solution
end
% mov = avifile('paradeigma5.avi')
% mov = addframe(mov,M);
% mov = close(mov);

```

Παράρτημα 2 : Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική.

Backward difference	Ανάδρομη διαφορά
Boundary condition	Συνοριακή συνθήκη
Boundary value problem	Πρόβλημα συνοριακών τιμών
Centered difference	Κεντρική διαφορά
Consistency	Συνέπεια
Continuous model	Συνεχές πρότυπο
Convergence	Σύγκλιση
Diagonal	Διαγώνιος
Direct method	Άμεση μέθοδος
Discrete model	Διακριτό πρότυπο
Discretization	Διακριτοποίηση
Elliptic equation	Ελλειπτική εξίσωση
Explicit method	Ρητή μέθοδος
Finite difference method	Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
Finite element method	Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων
Forward difference	Πρόδρομη διαφορά
Grid	Πλέγμα
Homogeneous	Ομογενής
Hyperbolic equation	Υπερβολική εξίσωση
Implicit method	Πεπλεγμένη μέθοδος
Initial condition	Αρχική συνθήκη
Initial value problem	Πρόβλημα αρχικών τιμών
Iterative method	Επαναληπτική μέθοδος
Linear	Γραμμικός
Mean value theorem	Θεώρημα μέσης τιμής
Mesh	Πλέγμα
Method of characteristics	Μέθοδος των χαρακτηριστικών
Nodes (mesh points ή nodal points)	Κόμβος
Norm	Νόρμα
Normal derivate	Ορθή παράγωγος
Order	Τάξη
Parabolic equation	Παραβολική εξίσωση
Partial differential equation (PDE)	Μερική διαφορική εξίσωση
Quasi - linear	Οιονεί γραμμική

Round-off error	Σφάλμα στρογγυλοποίησης
Sectionally continuous	Τμηματικά συνεχής
Separation of variables	Χωρισμός μεταβλητών
Sparse matrix	Αραιός πίνακας
Spectral method	Φασματική μέθοδος
Stability	Ευστάθεια
Strictly diagonally dominant	Αυστηρά διαγωνίως δομημένος
Subdiagonal	Υποδιαγώνιος
Superdiagonal	Υπερδιαγώνιος
Superposition principle	Αρχή της υπέρθεσης
Truncation error	Σφάλμα προσέγγισης
Tridiagonal matrix	Τριδιαγωνικός πίνακας
Wave equation	Κυματική εξίσωση
Well - posed problem	Καλά τοποθετημένο πρόβλημα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Duchateau Paul – Zachmann David. *Applied partial differential equation*, DOVER PUBLICATIONS, New York 1989.
 - Haberman Richard. *Elementary applied partial differential equations*, PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
 - D' Acunto Berardino. *Computational methods for PDE in mechanics*, World Scientific Publishing, 2004.
 - G. J. Borse. *Numerical Methods with MATLAB*, PWS Publishing Company, Boston 1997.
 - Trefethem N. Lloyd. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*, CORNELL UNIVERSITY, New York 1996.
<http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/nick.trefethe/pdetext.html>
 - Walet Niels. *2C1: Further mathematical methods*, Version: October 23, 2002.
<http://walet.phy.umist.ac.uk/2C1>
 - Almgren Robert. *CSC446 Numerical Methods for PDEs*, <http://math.toronto.edu>.
 - Keffer D. *Derivation of a Numerical Method for solving Hyperbolic PDEs, Derivation of a Numerical Method for solving a single linear parabolic PDE*
The Most Elementary Method: The Euler Method, Derivation of a Numerical Method for solving a single linear parabolic PDE, Department of Chemical Engineering, University of Tennessee, October 2001, www.clausius.engr.utk.edu.
 - Press H. William – Teukolsky A. Saul - Vetterling T. William – Flannery P. Brian. *Numerical Recipes in C*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
 - Peir'ο Joaquim – Sherwin Spencer. *Handbook of Materials Modeling. Volume I: Methods and Models*, Department of Aeronautics, Imperial College, London, UK 2005.
-
- Παπαμύχος Ε. *Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με εφαρμογές στη μηχανική*, Εκδόσεις Τζιόλα Θεσσαλονίκη 2004.
 - Boyce E. William – D'Prima C. Richard. *Στοιχειώδεις διαφορικές εξισώσεις και προβλήματα συνοριακών τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.
 - Κραββαρίτης Δ. Χ. – Παντελίδης Γ. Ν. *Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων*, εκδόσεις ΖΗΤΗ Θεσσαλονίκη 2003.

