Λεωνίδας Κατσούγκρης
Επιβλέπων καθηγητής Ταξιάρχης Παπακώστας
Καθηγητής Τμήματος Φυσικών Πόρων

28 Ιανουαρίου 2014

English Summary

This work studies the basic equations of elasticity. The presentation is actually taken from the classical book of Landau-Lifshitz.Then we proceed to the equations of thermoelasticity: an insulating (thermally and electrically) material is thermally radiated through a laser pulse for instance, this launches an elastic wave. The thermal heating couples with the elastice wave. We present small time interior estimates in the linear homogeneous case, used there for the numerical solution of the initial-boundary value problem in the inhomegenous or nonlinear case [?]. These describe the temporal evolution of the the thermal and elastic disturbance till it reaches the boundary.

Ελληνική Σύνοψη

Στην εργρασία αυτή μελετώνται οι βασικές εξισώσεις της ελαστικότητας. Η περιγραφή αποτελεί την παρουσίαση της μετάφρασης των αντίστοιχων κεφαλαίων από το κλασσικό έργο των Landau-Lifshitz. Στη συν΄χεια προχωράμε στις εξισώσεις της θερμοελαστκότητας: ενα θερμικά και ηλεκτρικά μονομώνο υλικό σώμα ακτινοβολείται θερμικά π.χ. μέσω ενός παλμού Laser, που προκαλεί τη διέγερση ενός ελαστικού κύματος. Παρουσιάζονται οι σχετικές εκτιμήσεις εσωτερικού και μικρού χρόνου στη γραμμική και ομογενή περίπτωση, οι οποιες απαιτούνται για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων στην ανομοιγενή ή και στη μη γραμμική περίπτωση, [;]. Αυτές αντιστοιχούν στο χρόνο που η θερμική και ελαστική διαταραξή δεν έχουν φθάσει στο σύνορο του υλικού σώματος

Κεφάλαιο 1

ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ: εσωτερικές εκτιμήσεις

1.1 Οι βασικές εξισώσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την διάδοση ελαστικού κύματος που οδηγείται από την θέρμανση του ελαστικού σώματος το οποίο θεωρούμε ότι περιγράφεται από ένα χωριο $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ και χαρακτηρίζεται από τις σταθερές

- ρ: πυκνότητα
- K μέτρο συμπιεστότητας
- E μέτρο Young
- σ πηλίκο Poison
- μ μέτρο δυσκαμψίας
- α συντελεστης θερμικής διαστολής
- C_p, C_v θερμοχωρηιτκότητες υπο σταθερή πίεση και υπό σταθερό όγκο.
- κ θερμική αγωγιμότητα

Συνδεόνται δε ως

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

Θεωρουμε αποκλιμακωμένες χωρο-χρονικές συντεταγμένες $\lambda \underline{x}, \tau t$ όταν

$$\lambda = \frac{C_p - C_v}{\alpha C_v}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}}\lambda, \quad \eta = \frac{\mu\tau^2}{\rho\lambda}, \quad \widehat{\kappa} = \frac{\tau\kappa}{C_v\lambda^2} \quad \widehat{\alpha} = \frac{\tau^2\alpha}{\lambda}$$

Τότε οι εξισώσεις που περιγράφουν το πεδίο μετατόπισης και θερμοκρασίας

$$\underline{u} : \mathbf{R} \times \Omega \to \mathbf{R}^3, \quad T : \mathbf{R} \times \Omega \to \mathbf{R}$$

γράφονται για $\theta = div(\underline{u})$:

$$\underline{u}_{tt} = \Delta_3 \underline{u} + \eta \nabla \theta + \widehat{\alpha} \nabla T$$

και

$$(T + \theta)_t = \widehat{\kappa} \Delta_3 T + h(t, \underline{x})$$

1.2 Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Θεωρούμε χωρίο $\mathcal{P} \subset [0, T] \times \Omega$ που θα ορίσουμε αργότερα και συνάρτηση περιορισμού ζ, $supp(\zeta) \subset \mathcal{P}$ και

$$\mathcal{P}_t = \mathcal{P} \cap \Sigma_t, \quad \Sigma_t = \{(t, \underline{x})/\underline{x} \in \Omega/\}$$

1.2.1 Ενέργεια για την κυματική εξίσωση της συμπίεσης

Λαμβάνοντας την απόκλιση στην κυματική εξίσωση λαμβάνουμε την κυματική εξίσωση

$$\theta_{tt} = (1 + \eta)\Delta_3 \theta + \frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\kappa}} \left[(T + \theta)_t - h\right]$$

Πολλαπλασιάζοντας με θ_t και ολοκληρώνοντας στο $\mathcal{P}_t$ οδηγούμαστε εισάγοντας την ενέργεια

$$E_0(t) = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} \left(\theta_t^2 + (1 + \eta)|\nabla \theta|^2\right)$$

στην ανίσωση εφαρμόζοτας την ανισότητα Young

$$\frac{dE_0}{dt} \leq \gamma_0 E_0 + \phi_0(t)$$

όπου ο όρος πηγής είναι

$$\phi_1(t) = \frac{\widehat{\alpha}}{4\widehat{\kappa}}(T_t^2 + h^2)$$

και ο ρυθμός

$$\gamma_0 = \frac{\widehat{\alpha}}{4\widehat{\kappa}}$$

Άμεση ολοκλήρωση δίδει

$$E_0(t) \leq e^{\gamma_0 t} \left(E_0(0) + \int_0^t \phi_0(t')dt'\right)$$

1.2.2 Ενέργεια για την κυματική εξίσωση του στροβιλισμου της μετατόπισης

Λαμβάνοντας την περιστροφή στην κυματική εξίσωση λαμβάνουμε την κυματική εξίσωση για το διανυσματικό πεδίο $\underline{\chi} = $ ςυρλ$(\underline{u})$:

$$\underline{\chi}_{tt} = \Delta_3 \underline{\chi}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\zeta^2 \underline{\chi}_t$ και ολοκληρώνοντας στο $\mathcal{P}_t$ οδηγύμαστε για την ενέργεια

$$E_0(t) = \int_{\mathcal{P}_t} \zeta^2 \frac{1}{2} \left(|\underline{\chi}_t|^2 + |\nabla \underline{\chi}|^2 \right)$$

στην εξίσωση

$$\frac{dE_1}{dt} \leq \gamma_2 E_1$$

όπου ο ρυθμός

$$\gamma_2 = \epsilon + 1$$

Άμεση ολοκλήρωση δίδει

$$E_0(t) \leq e^{\gamma_2 t} E_0(0)$$

1.2.3 Ενέργεια για την κυματική εξίσωση της μετατόπισης

Πολλαπλασιάζοντας με $\underline{u}_t$ και ολοκληρώνοντας στο $\mathcal{P}_t$ οδηγύμαστε για την ενέργεια

$$E_1(t) = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} \left(|\underline{u}_t|^2 + |\nabla \underline{u}|^2 + \eta^2 \theta^2 \right)$$

στην εξίσωση

$$\frac{dE_1}{dt} \leq \gamma_1 E_1 + \phi_1(t)$$

όπου ο όρος πηγής είναι

$$\phi_1(t) = \frac{\widehat{\alpha}}{4\widehat{\kappa}} (T^2 + h^2)$$

και ο ρυθμός

$$\gamma_1 = \frac{\widehat{\alpha}}{4\widehat{\kappa}}$$

Άμεση ολοκλήρωση δίδει

$$E_1(t) \leq e^{\gamma_1 t} \left(E_1(0) + \int_0^t \phi_1(t') dt' \right)$$

1.2.4 Ενέργεια για την εξίσωση της θερμότητας

Πολλαπλασιάζοντας με T και ολοκληρώνοντας στο $\mathcal{P}_t$ οδηγύμαστε για την ενέργεια

$$E_2(t) = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} \left(T^2 + |\nabla T|^2 + \eta^2 \theta^2 \right)$$

στην εξίσωση

$$\frac{dE_2}{dt} \leq \gamma_1 E_1 + \phi_2(t)$$

όπου ο όρος πηγής είναι

$$\phi_2(t) = \frac{\widehat{\alpha}}{4\widehat{\kappa}} (T^2 + h^2)$$

και ο ρυθμός

$$\gamma_2 = \frac{\widehat{\alpha}}{4\widehat{\kappa}}$$

Άμεση ολοκλήρωση δίδει

$$E_1(t) \leq e^{\gamma_1 t}\left(E_1(0) + \int_0^t \phi_1(t')dt'\right)$$

Επίσης πολλαπλασιάζοντας με T_t και λαμβάνουμε ότι:

$$\ldots$$

Σχόλια παραγωγίζοντας λαμβάνουμε εκτιμήσεις παρόμοιες εκτιμήσεις για τις ανώτερες παραγώγους των $\underline{u}, T$.

Τα χωρια τα οποία θα θεωρήσουμε ορίζονται από πολυώνυμα σε τρεις μεταβλητές:

$$\mathcal{P}_{j,\epsilon,\eta} = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 / (\epsilon - \epsilon^j)\eta \leq P(\underline{x}) \leq (1 + \epsilon - \epsilon^j)\}$$

και $\Pi_{\epsilon,\eta} = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 / \epsilon\eta \leq P(\underline{x}) \leq (1+\epsilon)\}$Η χρήση της ανισότητα ς Sobolevστις τρεις διαστάσεις δηλαδή για $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$

$$\left(\int_{\mathbf{R}^3} |f|^6\right)^{1/3} \leq C\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla f|^2$$

Παράλληλα σημαντικές είναι οι γενικευμένες ανισότητες Hardy ([ΠΔ3]) και $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \{P = 0\})$

$$\int_{\mathbf{R}^3} P^{-\frac{2}{m}}|f|^2 \leq C\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla f|^2$$

και

$$\int_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{|\nabla P|}{P}\right)^2 |f|^2 \leq C\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla f|^2$$

Στη συνέχεια θεωρώντας τη μέθοδο Nash-DeGiorgi-Moser όπως παρουσιάζεται στην [ΠΔ2], στις εκτιμήσεις:

$$\sup_{\mathcal{P}_{\eta,eps}\cap\Sigma_t} |\underline{u}| \leq e^{\gamma_2 t}E_2(0)$$

$$\sup_{\mathcal{P}_{\eta,eps}\cap\Sigma_t} |\underline{\chi}| \leq e^{\gamma_1 t}E_1(0)$$

$$\sup_{\mathcal{P}_{\eta,eps}\cap\Sigma_t} |\nabla\underline{u}| \leq D(\eta,\epsilon)e^{c\gamma_1 t}E_1(0)$$

$$\sup_{\mathcal{P}_{\eta,eps}\cap\Sigma_t} |\underline{\theta}| \leq D(\eta,\epsilon)e^{c\gamma_0 t}E_0(0)$$

$$\sup_{\mathcal{P}_{\eta,eps}\cap\Sigma_t} |\underline{\chi}| \leq D(\eta,\epsilon)\left(e^{c\gamma_1 t}E_1(0) + e^{c\gamma_0 t}E_0(0)\right)$$

$$\sup_{\mathcal{P}_{\eta,eps}\cap\Sigma_t} |T| \leq D(\eta,\epsilon)e^{c\gamma_3 t}E_3(0)$$

$$\sup_{\mathcal{P}_{\eta,eps}\cap\Sigma_t} |T| \leq D(\eta,\epsilon)e^{c\gamma_3 t}E_3(0)$$

Βιβλιογραφία

[LL] Landau L. D., Lifshitz E. M. Thoery of elasticity, Butterworth-Heinemann.

[PPV] D. Pliakis , T. Papakostas, F. Vallianatos, *A first principles approach to understand the physics of precursory accelerating seismicity*, Annals of Geophysics, **55**,(1),2013

[PP] Papakostas T., Pliakis D. *Local interior estimates for the Einstein-Euler equations*, Journal of Physics Conf.Proc. **453**, (2013)

[PM] Pliakis D., Minardi S., *An iterative shadowgraphic* , JOSA A, (2009)

[PD1] Pliakis D., *On the volume of nodal sets*, `arxiv: 1304.7143`

[PD2] Pliakis D., *Nash-Moser estimates for variable coefficient PDE's* (Notes in Greek)

[PD3] Pliakis D., *Generalized Hardy's inequality and certain of its applications* to appear Asian Journal of Math

[PD4] Pliakis D., *Thermoelasticity estimates*, ADITAL LLC Technical Report 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§.1 Ο Τανυστής Παραμόρφωσης (The Strain Tensor)

Η μηχανική των στερεών σωμάτων, θεωρούμενα ως συνεχή σωματίδια, διαμορφώνουν την θεωρία της ελαστικότητας. †

Υπό την δράση δυνάμεων, τα στερεά σώματα παραμορφώνονται σε κάποιον βαθμό. Δηλαδή, αλλάζουν, σε σχήμα και όγκο. Η παραμόρφωση ενός σώματος ορίζεται με μαθηματικούς όρους ως εξής. Η θέση οποιουδήποτε σημείου μέσα στο σώμα καθορίζεται από τη θέση διανύσματος **r** (με συνιστώσες $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$) σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Όταν το σώμα παραμορφώνεται κάθε σημείο εντός του σώματος μετατοπίζεται. Ας λάβουμε υπ' όψιν ένα συγκεκριμένο σημείο, κι ας υποθέσουμε πως η θέση διανύσματος πριν την παραμόρφωση είναι **r** και μετά την παραμόρφωση έχει μια διαφορετική τιμή $\mathbf{r}'$ (με συνιστώσες x'_i). Η μετατόπιση αυτού του σημείου λόγω της παραμόρφωσης μας δίνεται από το διάνυσμα **r'-r** το οποίο θα παραστήσουμε με το σύμβολο **u**:

$$u_i = x'_i - x_i. \tag{1.1}$$

Το διάνυσμα **u** ονομάζεται *διάνυσμα μετατόπισης*. Οι συντεταγμένες x'_i του μετατοπισμένου σημείου, είναι φυσικά, συνάρτηση των συντεταγμένων x_i του σημείου πριν την μετατόπιση. Επομένως το διάνυσμα μετατόπισης u_i είναι επίσης μια συνάρτηση των συντεταγμένων x_i. Αν το διάνυσμα **u** είναι αποτέλεσμα της συνάρτησης x_i, τότε μπορούμε να καθορίσουμε πλήρως την παραμόρφωση του σώματος.

Όταν ένα σώμα υποστεί παραμόρφωση, οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων του αλλάζουν. Ας θεωρήσουμε ότι δύο σημεία βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Αν η ακτίνα διανύσματος που τα ενώνει πριν την παραμόρφωση είναι dx_i , η ακτίνα διανύσματος που ενώνει τα δύο ίδια σημεία μέσα στο παραμορφωμένο σώμα θα είναι, $dx'_i = dx_i + du_i$. Η απόσταση μεταξύ των σημείων είναι $dl = \sqrt{(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2)}$ πριν την παραμόρφωση , και $dl = \sqrt{(dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2)}$ μετά την παραμόρφωση. Έτσι αθροίζοντας, μπορούμε να γράψουμε $dl^2 = dx_i{}^2,\ dl'^2 = dx'_i{}^2 = (dx_i + du_i)^2$. Αντικαθιστώντας $du_i = (\partial u_i/\partial x_k)dx_k$, μπορούμε να γράψουμε

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_i\,dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}dx_k\,dx_l$$

Αφού το άθροισμα βγαίνει κι από τα δύο προσφύματα *i* και *k* στο δεύτερο μέρος στα δεξιά, αυτό το μέρος μπορεί να γραφτεί σε μια πιο σαφή - συμμετρική μορφή:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)dx_i\,dx_k$$

Στο τρίτο μέρος εναλλάσσουμε τα προσφύματα i και l. Τότε το dl'^2 παίρνει την τελική μορφή:

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik}\,dx_i\,dx_k \tag{1.2}$$

† Οι βασικές εξισώσεις που αφορούν την θεωρία της ελαστικότητας εδραιώθηκαν την δεκαετία του 1980 από τους Cauchy και Poisson

Όπου ο τανυστής u_{ik} ορίζεται ως

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{1.3}$$

Αυτές οι παραστάσεις δίνουν την αλλαγή σε μήκος όταν ένα σώμα παραμορφώνεται. Ο τανυστής u_{ik} ονομάζεται τανυστής παραμόρφωσης (strain tensor). Καταλαβαίνουμε από τον ορισμό του πως είναι συμμετρικός, π.χ.

$$u_{ik} = u_{ki} \tag{1.4}$$

Όπως κάθε συμμετρικός τανυστής, ο u_{ik} μπορεί να διαγωνιοποιηθεί σε οποιοδήποτε σημείο. Αυτό σημαίνει πως, σε οποιοδήποτε σημείο, μπορούμε να διαλέξουμε συντεταγμένες με τέτοιο τρόπο ώστε μόνο οι διαγώνιες συνιστώσες u_{11}, u_{22}, u_{33} του τανυστή u_{ik} να διαφέρουν του μηδενός. Αυτές οι συνιστώσες, οι βασικές τιμές του τανυστή παραμόρφωσης μπορούν να φανερωθούν από τον τύπο $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$. Βεβαίως πρέπει να θυμόμαστε, πως αν ο τανυστής u_{ik} έχει διαγωνιοποιθεί σε οποιοδήποτε σημείο μέσα στο σώμα, δεν θα έχει απαραίτητα διαγώνια μορφή και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο

Αν ο τανυστής παραμόρφωσης έχει διαγωνιοποιηθεί σε ένα σημείο, το στοιχείο του μήκους (1.2) κοντά του γίνεται

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik})\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k \\ &= (1 + 2u^{(1)})\,\mathrm{d}{x_1}^2 + (1 + 2u^{(2)})\,\mathrm{d}{x_2}^2 + (1 + 2u^{(3)})\,\mathrm{d}{x_3}^2 \end{aligned}$$

Βλέπουμε πως η παράσταση είναι το άθροισμα τριών διαφορετικών όρων. Αυτό σημαίνει πως η παραμόρφωση σε οποιοδήποτε όγκο μπορεί να θεωρηθεί πως απαρτίζεται από άλλες ανεξάρτητες παραμορφώσεις προς τρείς όμοιες κάθετες κατευθύνσεις, δηλαδή αυτές των κύριων αξόνων του τανυστή παραμόρφωσης. Κάθε μία από αυτές τις τρείς παραμορφώσεις είναι μια απλή προέκταση (ή συμπίεση) προς την αντίστοιχη κατεύθυνση: το μήκος dx1 κατά μήκος του πρώτου κύριου άξονα γίνεται $\mathrm{d}x'_1 = \sqrt{(1 + 2u^{(1)})}\,\mathrm{d}x_1$, και όμοια για τους άλλους δύο άξονες. Η τιμή $\sqrt{(1 + 2u^{(i)})} - 1$ είναι συνεπώς ίδια με την σχετική προέκταση $(\mathrm{d}x'_i - \mathrm{d}x_i)/\mathrm{d}x_i$ κατά μήκος του *i* κύριου άξονα.

Στην πράξη, σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις, οι παραμορφώσεις είναι μικρές. Αυτό σημαίνει πως η διαφοροποίηση σε οποιαδήποτε απόσταση μέσα στο σώμα είναι μικρή σε σχέση με την αρχική απόσταση. Με άλλα λόγια, οι ανάλογες επεκτάσεις είναι μικρές σε σχέση με το σύνολο. Ως ακόλουθο θεωρούμε πως όλες οι τανύσεις είναι μικρής κλίμακας.

Αν ένα σώμα υποστεί μικρή παραμόρφωση, όλα τα στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης θα είναι μικρά, αφού δίνουν, όπως έχουμε δει, τις σχετικές αλλαγές σε μήκη μέσα στο σώμα. Το διάνυσμα μετατόπισης u_i, μπορεί πάντως μερικές φορές να είναι μεγάλο, ακόμα κι αν οι παραμορφώσεις είναι μικρές. Για παράδειγμα, ας σκεφτούμε μια μακριά λεπτή ράβδο. Ακόμα και στην περίπτωση μιας μεγάλης απόκλισης, κατά την οποία οι άκρες της ράβδου μετακινούνται αρκετά, οι προεκτάσεις και οι συμπιέσεις μέσα στο κοντάρι θα είναι μικρές.

Εκτός από κάποιες ειδικές περιπτώσεις, † το διάνυσμα μετατόπισης, στην περίπτωση μίας μικρής παραμόρφωσης θα είναι μικρό. Για αυτό είναι ξεκάθαρο πως ένα

---

† Το οποίο συμπεριλαμβάνει, εκτός από παραμόρφωση λεπτών ράβδων, και την παραμόρφωση λεπτών επιφανειών, οι οποίες δημιουργούν κυλινδρικές επιφάνειες. Πρέπει επίσης να αποκλείσουμε την περίπτωση όπου η παραμόρφωση ενός τρισδιάστατου σώματος συνοδεύεται από μια περιστροφή μέσα από μια τετελεσμένη γωνία.

τρισδιάστατο σώμα (π.χ. ένα σώμα του οποίου οι διαστάσεις είναι μικρές) δεν μπορεί να παραμορφωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε τα μέρη του να μετακινηθούν σε μια υπολογίσιμη απόσταση χωρίς την παρουσία αισθητών επεκτάσεων και συρρικνώσεων μέσα στο σώμα.

Για τις λεπτές ράβδους θα συζητήσουμε στο κεφάλαιο II. Σε άλλες περιπτώσεις το u_i και τα παράγωγά του είναι μικρού μεγέθους όταν πρόκειται για μικρές παραμορφώσεις, και γι' αυτό μπορούμε να παραμελήσουμε τον τελευταίο όρο της παράστασης (1.3), αφού είναι ο δεύτερος μικρότερος. Έτσι, όταν πρόκειται για μικρές παραμορφώσεις, ο τανυστής παραμόρφωσης μας δίνεται από

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \qquad (1.5)$$

Οι σχετικές επεκτάσεις των στοιχείων του μήκους προς τους κύριους άξονες του τανυστή παραμόρφωσης (σε ένα δοσμένο σημείο) είναι, προς υψηλότερη σειρά ποσοτήτων, $\sqrt{(1+2u^{(i)})} - 1 \approx u^{(i)}$ π.χ. είναι βασικές τιμές του τανυστή u_{ik}.

Ας μελετήσουμε ένα στοιχείο απειροελάχιστου όγκου $\mathrm{d}V$, και να βρούμε τον όγκο του $\mathrm{d}V'$ μετά από την παραμόρφωση. Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε τους κύριους άξονες του τανυστή παραμόρφωσης, στο συγκεκριμένο σημείο, ως άξονες συντεταγμένων. Στη συνέχεια τα στοιχεία του μήκους $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3$ κατά μήκος αυτών των αξόνων, γίνονται μετά την παραμόρφωση $\mathrm{d}x'_1 = (1+u^{(1)})\mathrm{d}x_1$ κτλ. Ο όγκος $\mathrm{d}V$ είναι το προϊόν $\mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3$, καθώς $\mathrm{d}V'$ is $\mathrm{d}x'_1\, \mathrm{d}x'_2\, \mathrm{d}x'_3$. Άρα $\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1+u^{(1)})(1+u^{(2)}) \times (1+u^{(3)})$. Παραμελώντας τους υψηλής-τάξης όρους έχουμε $\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)})$. Το άθροισμα $u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}$ των κύριων τιμών ενός τανυστή είναι αμετάβλητο, και είναι ίσο με το άθροισμα των διαγώνιων συνιστωσών $u_{ii} = u_{11}+u_{22}+u_{33}$ σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Άρα

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1+u_{ii}). \qquad (1.6)$$

Βλέπουμε πως το άθροισμα των διαγώνιων συνιστωσών του τανυστή παραμόρφωσης είναι η σχετική αλλαγή όγκου $(\mathrm{d}V' - \mathrm{d}V)/\mathrm{d}V$.

Συχνά είναι βολικό να χρησιμοποιούμε τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης σε σφαιρικές ή κυλινδρικές συντεταγμένες. Εδώ δίνουμε ως αναφορά, την αντίστοιχη φόρμουλα, που εκφράζει τις συνιστώσες ως προς τα παράγωγα των συνιστωσών του διανύσματος μετατόπισης στις ίδιες συντεταγμένες. Σε σφαιρικές – πολικές συντεταγμένες r, θ, ϕ, έχουμε

$$\left.\begin{aligned}
&u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta + \frac{u_r}{r},\\
&2u_{\theta\phi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi\cot\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}, \quad 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta},\\
&2u_{\phi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

Σε κυλινδρικές – πολικές συντεταγμένες r, Φ, z, έχουμε

$$\left.\begin{aligned}
&u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&2u_{\phi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},\\
&2u_{r\phi} = \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

§2. Ο **τανυστής τάσης (the stress tensor)**

Μέσα σε ένα σώμα που δεν έχει υποστεί παραμόρφωση, η δομή των μορίων αντιστοιχεί σε μια κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Όλα τα μέρη του σώματος βρίσκονται σε μηχανική ισορροπία. Αυτό σημαίνει ότι, αν κάποιο τμήμα του σώματος εξεταστεί προσεκτικά, η συνισταμένη των δυνάμεων σ' αυτό το τμήμα θα είναι μηδέν.

Όταν επέλθει παραμόρφωση, η δομή των μορίων αλλάζει, και το σώμα παύει να βρίσκεται στην αρχική κατάσταση ισορροπίας. Τότε προκύπτουν δυνάμεις που τείνουν να επαναφέρουν το σώμα σε ισορροπία. Αυτές οι εσωτερικές δυνάμεις που προκύπτουν όταν ένα σώμα παραμορφώνεται ονομάζονται εσωτερικές τάσεις - δυνάμεις. Αν το σώμα δεν υποστεί καμία παραμόρφωση δεν θα υπάρχουν και εσωτερικές τάσεις.

Οι εσωτερικές τάσεις οφείλονται σε μοριακές δυνάμεις, δηλαδή στις δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των μορίων. Ένας σημαντικός παράγοντας στην θεωρία της ελαστικότητας είναι πως οι μοριακές αυτές δυνάμεις έχουν πολύ μικρή ακτίνα δράσης. Η δράση τους περιορίζεται μόνο στα γειτονικά μόρια που βρίσκονται γύρω τους, όπου στην θεωρία της ελαστικότητας, που είναι μια μακροσκοπική θεωρία, οι μόνες υπολογίσιμες αποστάσεις είναι οι μεγαλύτερες, συγκριτικά με τις αποστάσεις μεταξύ των μορίων. Γι' αυτόν τον λόγο, η ακτίνα δράσης των μοριακών δυνάμεων πρέπει να θεωρηθεί ως μηδέν, στην θεωρία της ελαστικότητας. Μπορούμε να πούμε ότι, οι δυνάμεις που προκαλούν τις εσωτερικές τάσεις είναι, όσο αφορά την θεωρία της ελαστικότητας, δυνάμεις 'κοντινού πεδίου', που δρουν από οποιοδήποτε σημείο μόνο προς άλλα γειτονικά σημεία. Επομένως επακόλουθο είναι ότι, οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε οποιοδήποτε σημείο του σώματος από περιβαλλόμενα τμήματα, δρουν μόνο στην επιφάνεια αυτού του τμήματος.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να πάρουμε και μία επιφύλαξη. Ο παραπάνω ισχυρισμός, δεν ισχύει σε περιπτώσεις που η παραμόρφωση του σώματος οδηγήσει σε μακροσκοπικά ηλεκτρικά πεδία εντός του σώματος (πυροηλεκτρικά – pyroelectric και πιεζοηλεκτρικα - piezoelectric σώματα). Για τέτοια σώματα γίνεται λόγος στο ***ECM***.

Ας μελετήσουμε, τη συνολική δύναμη στο ίδιο τμήμα του σώματος. Πρώτα απ' όλα, αυτή η συνολική δύναμη ισούται με το άθροισμα όλων των δυνάμεων πάνω σε όλο τον όγκο στοιχείων στο συγκεκριμένο τμήμα του σώματος, δηλαδή μπορεί να γραφτεί σαν ολοκλήρωμα όγκου $\int \mathbf{F}\, \mathrm{d}V$, όπου το $\mathbf{F}$ είναι η ισχύς ανά μονάδα όγκου και το $\mathbf{F}\mathrm{d}V$ είναι η ισχύς στο στοιχείο του όγκου $\mathrm{d}V$. Δεύτερον, οι δυνάμεις με τις οποίες διάφορα μέρη του θεωρούμενου τμήματος δρουν το ένα πάνω στο άλλο δεν μπορούν να μας δώσουν τίποτα διαφορετικό του μηδενός στην συνολική δύναμη, εφόσον αναιρούνται με βάση τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα.

---

† Το διάνυσμα $\mathbf{df}$ είναι κατά μήκος της κανονικής μετάβασης προς την κλειστή επιφάνεια. Το ολοκλήρωμα ως προς μια κλειστή επιφάνεια μεταμορφώνεται σε ένα ολοκλήρωμα ως προς τον όγκο που περικλείεται από την επιφάνεια αντικαθιστώντας το στοιχείο της επιφάνειας $\mathrm{d}f_i$ από τον τελεστή $\mathrm{d}V\partial/\partial x_i$.

† Για την ακρίβεια, για να καθορίσουμε την συνολική δύναμη σε ένα παραμορφωμένο τμήμα του σώματος θα πρέπει να μετατρέψουμε σε ολοκλήρωμα, όχι ως προς τις παλιές συντεταγμένες x_i, αλλά ως προς τις συντεταγμένες $\mathbf{x}'_i$ των σημείων του παραμορφωμένου σώματος. Τα παράγωγα (2.1) πρέπει επομένως να ληφθούν ως προς το $\mathbf{x}'_i$. Πάντως, στην εικόνα της μικρότητας της παραμόρφωσης, τα παράγωγα του x_i και $\mathbf{x}'_i$ διαφέρουν μόνο στις ποσότητες υψηλής-σειράς, και έτσι τα παράγωγα μπορούν να θεωρηθούν σε σχέση με τις συντεταγμένες x_i.

Έτσι η απαιτούμενη συνολική δύναμη μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο δοσμένο τμήμα του σώματος, από τα τμήματα που το περιβάλλουν.

Πάντως, αυτές οι δυνάμεις δρουν στην επιφάνεια αυτού του τμήματος, και έτσι η τελική δύναμη μπορεί να αναπαρασταθεί ως το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε όλα τα στοιχεία της επιφάνειας, δηλαδή, σαν ένα ολοκλήρωμα για την επιφάνεια.

Γι' αυτό, για κάθε τμήμα του σώματος, κάθε ένα από τα τρία μέρη $\int F_i \mathrm{d}V$ του αποτελέσματος όλων των εσωτερικών τάσεων, μπορεί να μεταμορφωθεί σε ένα ολοκλήρωμα ως προς την επιφάνεια. Όπως ξέρουμε από την διανυσματική ανάλυση, το ολοκλήρωμα μιας κλίμακας (scalar) ως προς έναν αυθαίρετο (arbitrary) όγκο, μπορεί να μεταμορφωθεί σε ένα ολοκλήρωμα ως προς την επιφάνεια αν η κλιμάκωση είναι απόκλιση - διαφορά ενός διανύσματος. Στην παρούσα υπόθεση έχουμε το ολοκλήρωμα ενός διανύσματος, και όχι μιας κλιμάκωσης. Άρα το διάνυσμα F_i πρέπει να είναι η απόκλιση ενός τανυστή της θέσης δύο, δηλαδή είναι της μορφής

$$F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k \tag{2.1}$$

Ύστερα η ισχύς – δύναμη σε οποιοδήποτε όγκο μπορεί να εκφραστεί ως ένα ολοκλήρωμα προς την κλειστή επιφάνεια που περικλείει αυτόν τον όγκο: †

$$\int F_i \mathrm{d}V = \int \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\mathrm{d}V = \oint \sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k \tag{2.2}$$

Ο τανυστής σ_{ik} ονομάζεται τανυστής τάσης (stress tensor). Όπως βλέπουμε (2.2), το $\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ είναι το στοιχείο υπ' αριθμόν *i,* της ισχύς στο στοιχείο της επιφάνειας *df.* Παίρνοντας στοιχεία επιφάνειας στα επίπεδα των xy, yz, zx, βρίσκουμε ότι το συστατικό σ_{ik} του τανυστή τάσης είναι το υπ' αριθμόν *i* συστατικό της δύναμης-ισχύς σε μονάδα επιφάνειας, κάθετα στον άξονα *xk*. Για παράδειγμα, η ισχύς σε μονάδα επιφάνειας κάθετη στον άξονα x κανονικά προς την περιοχή (π.χ. κατά μήκος του άξονα x), είναι σ_{xx} και οι εφαπτόμενες δυνάμεις (κατά μήκος του άξονα *y* και *z*) είναι σ_{yx} και σ_{zx}.

Η ακόλουθη παρατήρηση αφορά την ένδειξη της δύναμης $\sigma_{ik}\,\mathrm{d}\mathbf{f}_k$. Το ολοκλήρωμα της επιφάνειας (2.2) είναι η δύναμη που ασκείται στον περιβαλλόμενο από την επιφάνεια όγκο, από το μέρος του σώματος που τον περιβάλλει. Η δύναμη, που ασκείται στον όγκο, που περιβάλλεται από την επιφάνεια είναι η ίδια με την αντίθετη ένδειξη. Άρα, για παράδειγμα, η δύναμη που ασκείται από τις εσωτερικές τάσεις στην επιφάνεια του σώματος είναι $-\oint\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$, όπου το ολοκλήρωμα βγαίνει ως προς την επιφάνεια του σώματος, και το **df** επί του εξωτερικού.

Ας καθορίσουμε τη στιγμή που οι δυνάμεις ασκούνται πάνω σε ένα μέρος του σώματος. Η στιγμή της δύναμης **F** μπορεί να γραφτεί σαν ένας αντισυμμετρικός τανυστής της δεύτερης σειράς-τάξης, του οποίου οι συνιστώσες είναι $F_i x_k - F_k x_i$, όπου x_i είναι οι συντεταγμένες του σημείου, πάνω στο οποίο ασκούνται οι δυνάμεις.

† Άρα η στιγμή που οι δυνάμεις ασκούνται πάνω στο στοιχείο όγκου $\mathrm{d}V$ is $(F_i x_k - F_k x_i)\mathrm{d}V$, και η στιγμή που οι δυνάμεις ασκούνται στο σύνολο του όγκου είναι $M_{ik} = \int(F_i x_k - F_k x_i)\mathrm{d}V$.

---

† Η στιγμή άσκησης της δύναμης **F** ορίζεται ως προϊόν διανύσματος **Fxr**, και ξέρουμε από την διανυσματική ανάλυση πως οι συνιστώσες ενός διανυσματικού προϊόντος σχηματίζουν έναν αντισυμμετρικό τανυστή της δεύτερης κατηγορίας-σειράς.

Όπως και ισχύει για οποιοδήποτε όγκο, αυτή η στιγμή μπορεί να εκφραστεί σαν ένα ολοκλήρωμα της επιφάνειας που περικλείει τον όγκο. Αντικαθιστώντας την παράσταση (2.1) για $\boldsymbol{F}_i$, βρίσκουμε ότι

$$M_{ik} = \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) \mathrm{d}V$$
$$= \int \frac{\partial(\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} \mathrm{d}V - \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) \mathrm{d}V$$

Στον δεύτερο όρο, χρησιμοποιούμε το γεγονός πως τα παράγωγα μιας συντεταγμένης όσον αφορά την ίδια την συντεταγμένη είναι ίδια-ενιαία, και όσον αφορά άλλες συντεταγμένες είναι μηδέν (εφόσον οι τρείς συντεταγμένες είναι ανεξάρτητα μεταβλητές); οπότε $\partial x_k/\partial x_l = \delta_{kl}$, όπου δ_{kl} είναι η μονάδα τανυστή. Στον όρο, το ολοκλήρωμα είναι η απόκλιση ενός τανυστή. Το ολοκλήρωμα μπορεί να μεταμορφωθεί σε ένα ολοκλήρωμα προς την επιφάνεια. Το αποτέλεσμα είναι

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) \mathrm{d}f_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) \mathrm{d}V \tag{2.3}$$

Ο τανυστής $\boldsymbol{M}_{ik}$ θα είναι ένα ολοκλήρωμα μόνο της επιφάνειας αν ο τανυστής τάσης έχει συμμετρική μορφή:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \tag{2.4}$$

έτσι ώστε το ολοκλήρωμα όγκου εξαλειφεθεί: η βάση για αυτήν την σημαντική αναφορά θα συζητηθεί περεταίρω στο τέλος αυτού του κεφαλαίου. Η στιγμή άσκησης των δυνάμεων πάνω σε ένα τμήμα του σώματος μπορεί να γραφτεί απλά ως

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) \mathrm{d}V = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) \mathrm{d}f_l . \tag{2.5}$$

Είναι εύκολο να βρούμε τον τανυστή τάσης για ένα σώμα που υποβάλλεται σε ομοιόμορφη συμπίεση από όλες τις πλευρές (υδροστατική συμπίεση - *hydrostatic compression).* Σε αυτήν την περίπτωση μια ίδια πίεση ασκείται σε κάθε σημείο της επιφάνειας του σώματος, και η κατεύθηνση της πίεσης αυτής είναι προς τα μέσα. Αν αυτή η πίεση εκφράζεται από *p*, μια δύναμη $-p\mathrm{d}f_i$ δρα στο στοιχείο επιφάνειας $\mathrm{d}f_i$. Αυτή η δύναμη ως προς τον τανυστή τάσης, πρέπει να είναι $\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$. Γράφοντας $-p\mathrm{d}f_i = -p\delta_{ik}\mathrm{d}f_k$, βλέπουμε πως ο τανυστής τάσης υπό την υδροστατική συμπίεση είναι

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} . \tag{2.6}$$

Οι διαφορετικές του μηδενός συνιστώσες του είναι ίσες με την πίεση.

Στην γενική περίπτωση μιας μη ομαλής – αυθαίρετης παραμόρφωσης, οι μη διαγώνιες συνιστώσες του τανυστή τάσης είναι επίσης διαφορετικές του μηδενός. Αυτό σημαίνει ότι, μόνο μια μη ομαλή δύναμη ή εφαπτόμενες τάσεις δρουν σε κάθε στοιχείο της επιφάνειας. Αυτές οι τάσεις τείνουν να μετακινούν τα στοιχεία της επιφάνειας, συγκριτικά μεταξύ τους.

† Για την ακρίβεια, η πυκνότητα ενός σώματος αλλάζει όταν αυτό παραμορφώνεται. Η αλλαγή αυτή πάντως, βελτιώνει τις ποσότητες υψηλής-σειράς (higher-order quantities) στην περίπτωση μικρών παραμορφώσεων, και γι' αυτό δεν είναι σημαντικό.

Σε κατάσταση ισορροπίας οι εσωτερικές τάσεις, σε κάθε στοιχείο όγκου πρέπει να ισορροπούν, π.χ. πρέπει να έχουμε $F_i = 0$. Οπότε οι εξισώσεις της ισορροπίας για ένα παραμορφωμένο σώμα είναι

$$\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0. \tag{2.7}$$

Αν το σώμα είναι ένα βαρυτικό πεδίο, το άθροισμα **F** + ρ**g** των εσωτερικών τάσεων και η δύναμη της βαρύτητας (ρ**g** ανά μονάδα όγκου) πρέπει να εξαλειφθούν; το $\boldsymbol{\rho}$ είναι η πυκνότητα† και **g** είναι το διάνυσμα επιτάχυνσης της βαρύτητας, με κάθετη φορά προς τα κάτω. Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις της ισορροπίας είναι

$$\partial\sigma_{ik}/\partial x_k + \rho g_i = 0. \tag{2.8}$$

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στην επιφάνεια του σώματος (που είναι και συνήθως η αιτία παραμόρφωσης) εμφανίζονται στις εξισώσεις ισορροπίας. Ας υποθέσουμε ότι το **P** είναι οι εξωτερική δύναμη σε εμβαδόν της επιφάνειας του σώματος, έτσι ώστε μια δύναμη **P** *df* να δρα πάνω στο στοιχείο επιφάνειας *df* . Σε κατάσταση ισορροπίας - αδράνειας, πρέπει να υπάρχει ισορροπία της δύναμης $-\sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k$ των εσωτερικών τάσεων που δρουν σ' αυτό το σημείο. Οπότε πρέπει να έχουμε $P_i\,\mathrm{d}f - \sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k = 0$. Γράφοντας $\mathrm{d}f_k = n_k\,\mathrm{d}f$, , όπου **n** είναι μονάδα διανύσματος κατά μήκος του εξωτερικού της επιφάνειας, βρίσκουμε ότι

$$\sigma_{ik}n_k = P_i \tag{2.9}$$

Αυτή είναι η κατάσταση που πρέπει να ισχύει σε κάθε σημείο της επιφάνειας ενός σώματος, όσο αυτό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Επίσης θα δημιουργήσουμε μια φόρμουλα για να υπολογίσουμε την μέση τιμή του τανυστή τάσης μέσα σε ένα παραμορφωμένο σώμα. Για να το πετύχουμε αυτό, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (2.7) με x_k και ολοκληρώνουμε προς ολόκληρο τον όγκο:

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k\,\mathrm{d}V = \int \frac{\partial(\sigma_{il}x_k)}{\partial x_l}\mathrm{d}V - \int \sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l}\mathrm{d}V = 0$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στα δεξιά μεταμορφώνεται σε ολοκλήρωμα επιφάνειας; στο δεύτερο ολοκλήρωμα βάζουμε $\partial x_k/\partial x_l = \delta_{kl}$. Το αποτέλεσμα είναι $\oint \sigma_{il}x_k\,\mathrm{d}f_l - \int \sigma_{ik}\,\mathrm{d}V = 0$. Αντικαθιστώντας το (2.9) στο πρώτο ολοκλήρωμα βρίσκουμε πως $\oint P_i x_k\,\mathrm{d}f = \int \sigma_{ik}\,\mathrm{d}V = V\bar{\sigma}_{ik}$, όπου V είναι ο όγκος του σώματος και $\bar{\sigma}_{ik}$ είναι η μέση τιμή του τανυστή τάσης. Εφόσον $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, αυτή η φόρμουλα μπορεί να γραφτεί στην συμμετρική μορφή

$$\bar{\sigma}_{ik} = (1/2V)\oint (P_i x_k + P_k x_i)\,\mathrm{d}f. \tag{2.10}$$

Οπότε η μέση τιμή του τανυστή τάσης μπορεί να υπολογιστεί αμέσως, από τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν πάνω στο σώμα, χωρίς να χρειαστεί να λύσουμε την εξίσωση της ισορροπίας-αδράνειας.

Ας γυρίσουμε τώρα πίσω, στην παραπάνω απόδειξη, ότι ο τανυστής τάσης είναι συμμετρικός. Η φυσική κατάσταση που επιβάλλεται, ότι ο τανυστής τάσης M_{ik} πρέπει να αντιπροσωπεύεται από ένα ολοκλήρωμα μόνο ως προς την επιφάνεια, ισχύει όχι μόνο όταν το αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή σ_{ik} (αυτό είναι, το ολοκλήρωμα στο ολοκλήρωμα όγκου στην (2.3)) είναι μηδέν, αλλά και όταν έχει απόκλιση, π.χ. αν

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 2\partial\phi_{ikl}/\partial x_l, \quad \phi_{ikl} = -\phi_{kil}, \tag{2.11}$$

Όπου το ϕ_{ikl} είναι ο οποιοσδήποτε αντισυμμετρικός τανυστής στο πρώτο ζευγάρι καταλήξεων (suffixes). Στην προκειμένη περίπτωση, αυτός ο τανυστής πρέπει να εκφραστεί βάσει των παραγώγων $\partial u_l/\partial x_k$, επομένως ο τανυστής τάσης περιέχει όρους υψηλών παραγώγων όσον αφορά το διάνυσμα μετατόπισης. Στην θεωρία της ελαστικότητας όπως περιγράφεται εδώ, όλοι αυτοί οι όροι πρέπει να θεωρούνται ως υψηλής-σειράς μικρές ποσότητες και μπορούν να παραλειφθούν.

Είναι πάντως σημαντικό, ότι ο τανυστής τάσης μπορεί να μειωθεί εως ότου πάρει μια συμμετρική μορφή, ακόμα κι αν αυτοί οι όροι δεν είναι αμελητέοι. † Ο λόγος είναι πως ο ορισμός (2.1) για τον συγκεκριμένο τανυστή, δεν είναι μοναδικός: κάθε μεταμόρφωση είναι πιθανή, αυτό προέρχεται από την φόρμουλα

$$\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik} = \partial \chi_{ikl}/\partial x_l, \quad \chi_{ikl} = -\chi_{ilk}, \tag{2.12}$$

όπου το χ_{ikl} είναι ο οποιοσδήποτε τανυστής, αντισυμμετρικός στο τελευταίο ζευγάρι καταλήξεων (suffixes). Προφανώς, τα παράγωγα $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ και $\partial\tilde{\sigma}_{ik}/\partial x_k$, τα οποία καθορίζουν την δύναμη ***F***, είναι ίσα. Αν ένα αντισυμμετρικό μέρος του σ_{ik} έχει την μορφή (2.11) τότε ένα μη συμμετρικό σ_{ik} μπορεί να γίνει συμμετρικό από μια μεταμόρφωση αυτού του τύπου. Ο συμμετρικός τανυστής είναι

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ki}) + \partial(\phi_{ilk} + \phi_{kli})/\partial x_l; \tag{2.13}$$

είναι εύκολο να δούμε πως το $\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik}$ έχει την μορφή (2.12) με

$$\chi_{ikl} = \phi_{kli} + \phi_{ilk} - \phi_{ikl} \tag{2.14}$$

(P.C.Martin, O. Parodi και P.S. Pershan 1972)

§3. Η θερμοδυναμική της παραμόρφωσης (The thermodynamics of deformation)

Ας σκεφτούμε ένα παραμορφωμένο σώμα, και ας υποθέσουμε ότι η παραμόρφωση έχει αλλάξει με τέτοιο τρόπο ώστε το διάνυσμα μετατόπισης u_i αλλάζει ελάχιστα κατά δu_i; και ας καθορίσουμε το έργο που παράγεται από τις εσωτερικές τάσεις σ' αυτήν την περίπτωση. Πολλαπλασιάζοντας την δύναμη $F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ με την μετατόπιση, και ολοκληρώνοντας ως προς τον όγκο του σώματος, έχουμε, $\int \delta R \,\mathrm{d}V = \int (\partial\sigma_{ik}/\partial x_k)\delta u_i \,\mathrm{d}V$ όπου το δR δηλώνει το έργο που παράχθηκε από τις εσωτερικές τάσεις ανά μονάδα όγκου. Ολοκληρώνουμε σε μέρη, έχοντας

$$\int \delta R \,\mathrm{d}V = \oint \sigma_{ik}\delta u_i \,\mathrm{d}f_k - \int \sigma_{ik}\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}V.$$

Θεωρώντας ένα αντικείμενο που τείνει προς το άπειρο, του οποίου η παραμόρφωση δεν τείνει προς το άπειρο, κάνουμε την επιφάνεια του ολοκληρώματος στο πρώτο ολοκλήρωμα να τείνει προς το άπειρο; τότε $\sigma_{ik} = 0$ στην επιφάνεια, και το ολοκλήρωμα κάνει μηδέν. Το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορεί, λόγω της χρηστικότητας της συμμετρίας του τανυστή σ_{ik}, να γραφτεί

$$\begin{aligned}\int \delta R \,\mathrm{d}V &= -\frac{1}{2}\int \sigma_{ik}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{2}\int \sigma_{ik}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V \\ &= -\int \sigma_{ik}\delta u_{ik}\,\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Οπότε βρίσκουμε

$$\delta R = -\sigma_{ik}\delta u_{ik} \tag{3.1}$$

Αυτός ο τύπος μας δίνει το έργο δR όσον αναφορά την αλλαγή στον τανυστή παραμόρφωσης.

Αν η παραμόρφωση του σώματος είναι σχετικά μικρή, τότε επιστρέφει στην αρχική του μη παραμορφωμένη μορφή όταν οι εξωτερικές δυνάμειςπου προκαλούν την παραμόρφωση σταματήσουν να δρουν. Τέτοιες είδους παραμορφώσεις ονομάζονται **ελαστικές παραμορφώσεις**. Για μεγάλες παραμορφώσεις, η αφαίρεση των εξωτερικών δυνάμεων δεν οδηγεί στην ολική εξαφάνιση της παραμόρφωσης; παραμένει μια *υπολειμματική παραμόρφωση (residual deformation)*, έτσι η κατάσταση του σώματος δεν είναι ίδια με την κατάσταση που υπήρχε πριν δράσουν οι δυνάμεις. Τέτοιες είδους παραμορφώσεις ονομάζονται **πλαστικές παραμορφώσεις.** Παρακάτω (εκτός από το κεφάλαιο IV) θα μελετήσουμε μόνο ελαστικές παραμορφώσεις.

† Με βάση τα γενικά αποτελέσματα της θεωρίας του μικρόκοσμου (πεδία, §32)

Επίσης θα θεωρήσουμε ότι η διαδικασία της παραμόρφωσης γίνεται με τόσο μικρή ταχύτητα ώστε οι θερμοδυναμικές ισορροπίες του σώματος διατηρούνται κάθε στιγμή, σύμφωνα με τις εξωτερικές συνθήκες. Αυτή η υπόθεση σχεδόν πάντα επαληθεύεται στην πράξη. Έτσι η όλη διαδικασία θα είναι θερμοδυναμικά αναστρέψιμη.

Παρακάτω, θα λάβουμε όλες στις θερμοδυναμικές ποσότητες ως εντροπία **S** (entropy S), εσωτερική ενέργεια $\mathscr{E}$ κτλ., σχετικά με την μονάδα όγκου του σώματος, και όχι σχετικά με την μονάδα μάζας όπως στην θα κάναμε στην μηχανική υγρών σωμάτων, και τις παραστήσουμε με τα ανάλογα κεφαλαία γράμματα.
Σ' αυτό το σημείο πρέπει να γίνει η εξής αναφορά. Για την ακρίβεια, οι μονάδες όγκου πριν και μετά την παραμόρφωση πρέπει να τονιστούν, εφόσον γενικά περιέχουν διαφορετικές ποσότητες ύλης. Πρέπει πάντα (εκτός από το κεφάλαιο VI) να συνδέουμε τις θερμοδυναμικές ποσότητες με την μονάδα όγκου του μη παραμορφωμένου σώματος, δηλαδή, με την ποσότητα ύλης που υπάρχει, η οποία μπορεί να καταλαμβάνει διαφορετικό όγκο μετά την παραμόρφωση. Οπότε, η συνολική ενέργεια του σώματος, για παράδειγμα, διατηρείται ολοκληρώνοντας $\mathscr{E}$ ως προς τον όγκο του μη παραμορφωμένου σώματος.

Μια απειροελάχιστη μεταβολή $\mathrm{d}\mathscr{E}$ της εσωτερικής ενέργειας ισούται με τη διαφορά μεταξύ της θερμότητας που δημιουργείται από τη θεωρούμενη μονάδα όγκου και του έργου $\mathrm{d}R$ που παράγεται από τις εσωτερικές τάσεις. Η ποσότητα της θερμότητας για μια αναστρέψιμη διαδικασία είναι, $T\mathrm{d}S$ όπου το T είναι η θερμοκρασία. Άρα $\mathrm{d}\mathscr{E} = T\mathrm{d}S - \mathrm{d}R$; και με το $\mathrm{d}R$ δοσμένο από την (3.1), έχουμε

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = T\mathrm{d}S + \sigma_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik} \qquad (3.2)$$

Αυτή είναι η θεμελιώδης θερμοδυναμική φόρμουλα για παραμορφωμένα σώματα.

Στην περίπτωση της υδροστατικής συμπίεσης, ο τανυστής τάσης είναι $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ (2.6). Τότε $\sigma_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik} = -p\delta_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik} = -p\,\mathrm{d}u_{ii}$. Ωστόσο έχουμε δει (cf.(1.6)), ότι το άθροισμα u_{ii} είναι η σχετική μεταβολή όγκου λόγω της παραμόρφωσης. Αν λάβουμε υ' όψιν την μονάδα όγκου, τότε το u_{ii} είναι απλά η μεταβολή του όγκου αυτού, και το $\mathrm{d}u_{ii}$ είναι το στοιχείο του όγκου $\mathrm{d}V$. Έτσι η θερμοδυναμική φόρμουλα παίρνει την συνηθισμένη της μορφή

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V \qquad (3.2a)$$

Εισάγοντας την (Helmholtz) ελεύθερη ενέργεια του σώματος, $F = \mathscr{E} - TS$, καταλήγουμε στην μορφή

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T + \sigma_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik} \qquad (3.3)$$

των (3.2). Τέλος, η θερμοδυναμική (Gibbs free energy) **Φ** ορίζεται ως

$$\Phi = \mathscr{E} - TS - \sigma_{ik}u_{ik} = F - \sigma_{ik}u_{ik} \qquad (3.4)$$

Αυτή είναι μια γενίκευση της συνηθισμένης παράστασης $\Phi = \mathscr{E} - TS + pV$. † A Αντικαθιστώντας την (3.4) στην (3.3), βρίσκουμε

$$\mathrm{d}\Phi = -S\mathrm{d}T - u_{ik}\,\mathrm{d}\sigma_{ik} \qquad (3.5)$$

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές στην (3.2) και (3.3) είναι S, u_{ik} και T, u_{ik} αντίστοιχα. Οι συνιστώσες του τανυστή τάσης μπορούν να αποκτηθούν διαφοροποιώντας το $\mathscr{E}$ or F ως προς τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης, για συνεχή εντροπία S ή θερμοκρασία T αντίστοιχα:

$$\sigma_{ik} = (\partial\mathscr{E}/\partial u_{ik})_S = (\partial F/\partial u_{ik})_T \qquad (3.6)$$

Παρόμοια, διαφοροποιώντας το Φ σε σχέση με τις συνιστώσες σ_{ik}, μπορούμε να αποκτήσουμε στις συνιστώσες u_{ik}:

$$u_{ik} = -(\partial\Phi/\partial\sigma_{ik})_T. \qquad (3.7)$$

§4. Ο νόμος του Hooke (Hooke's law)

Για να μπορούμε να εφαρμόσουμε την γενική φόρμουλα της θερμοδυναμικής σε οποιαδήποτε περίπτωση, πρέπει να γνωρίζουμε την ελεύθερη ενέργεια *F* του σώματος ως λειτουργία του τανυστή τάσης. Αυτή η παράσταση αποκομίζεται εύκολα, γνωρίζοντας το γεγονός πως η παραμόρφωση είναι μικρή και επεκτείνοντας την ελεύθερη ενέργεια σε δυνάμεις των u_{ik}. Προς το παρών πρέπει να λάβουμε υπόψη μόνο ισοτροπικά σώματα. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για κρύσταλλα θα συζητηθούν στο §10.

Αν λάβουμε υπ' όψιν ένα παραμορφωμένο σώμα, που βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη θερμοκρασία (ίδια θερμοκρασία σε κάθε του σημείο), τότε θεωρούμε την μη παραμορφωμένη του κατάσταση, ως κατάσταση του σώματος, κατά την απουσία εξωτερικών δυνάμεων και στην ίδια θερμοκρασία; αυτή η τελευταία κατάσταση είναι απαραίτητη για λογαριασμό της θερμικής διαστολής (βλ. §6). Στη συνέχεια για $u_{ik} = 0$, οι εσωτερικές τάσεις ισούνται επίσης με μηδέν, δηλαδή $\sigma_{ik} = 0$. Αφού $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$, επακολουθεί πως δεν υπάρχει γραμμικός όρος (linear term) στην διαστολή του *F* σε δυνάμεις του u_{ik}.

Στη συνέχεια, εφόσον η ελεύθερη ενέργεια είναι μια μεταβλητή, κάθε όρος της διαστολής του ***F*** πρέπει να είναι επίσης μεταβλητός. Δύο ανεξάρτητες δευτεροβάθμιες μεταβλητές μπορούν να δημιουργηθούν από τις συνιστώσες του συμμετρικού τανυστή u_{ik}: μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως το τετραγωνικό άθροισμα των διαγώνιων συνιστωσών $(u_{ii}{}^2)$ και το άθροισμα των τετραγώνων όλων των συνιστωσών $(u_{ik}{}^2)$. Διαστέλλοντας το *F* σε δυνάμεις του u_{ik}, έχουμε επομένως ως όρους της δεύτερης σειράς

$$F = F_0 + \tfrac{1}{2}\lambda u_{ii}{}^2 + \mu u_{ik}{}^2 \tag{4.1}$$

Αυτή είναι η γενική παράσταση της ελεύθερης ενέργειας ενός παραμορφωμένου ισοτροπικού σώματος. Οι ποσότητες *λ* και *μ* ονομάζονται *σαθροί συντελεστές* (*Lame coefficients).*

Έχουμε δει στο §1 ότι η μεταβολή σε όγκο στην παραμόρφωση, μας δίνεται από το άθροισμα u_{ii}. Αν αυτό το άθροισμα είναι μηδενικό, τότε ο όγκος του σώματος δεν έχει μεταβληθεί από την παραμόρφωση, μόνο το σχήμα του έχει αλλάξει. Μια τέτοια παραμόρφωση ονομάζεται *διάτμηση (pure shear).*

Η αντίθετη περίπτωση είναι αυτή, μιας παραμόρφωσης η οποία προκαλεί μεταβολή στον όγκο του σώματος αλλά δεν προκαλεί αλλαγή στο σχήμα του. Κάθε στοιχείο όγκου του σώματος διατηρεί και το σχήμα του. Έχουμε δει στο §1 ότι ο τανυστής μιας τέτοιας παραμόρφωσης είναι $u_{ik} = \text{constant} \times \delta_{ik}$. Μια τέτοια παραμόρφωση ονομάζεται *υδροστατική συμπίεση (hydrostatic compression).*

Οποιαδήποτε παραμόρφωση μπορεί να αναπαρασταθεί σαν το άθροισμα της διάτμησης και υδροστατικής συμπίεσης. Για να το κάνουμε αυτό χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μόνο την ταυτότητα

$$u_{ik} = (u_{ik} - \tfrac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) + \tfrac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \tag{4.2}$$

Ο πρώτος όρος στα δεξιά είναι προφανώς μια διάτμηση, εφόσον το άθροισμα των διαγώνιων όρων είναι μηδέν $(\delta_{ii} = 3)$. Ο δεύτερος όρος είναι μία υδροστατική συμπίεση.

Σαν γενική παράσταση για την ελεύθερη ενέργεια ενός παραμορφωμένου ισοτροπικού σώματος, είναι βολικό να αντικαταστήσουμε την (4.1) με μια άλλη

† Στην περίπτωση της υδροστατικής συμπίεσης, η παράσταση (3.4) γίνεται $\Phi = F + pu_{ii} = F + p(V - V_0)$, όπου $V - V_0$ είναι η μεταβολή όγκου, που είναι αποτέλεσμα της παραμόρφωσης. Άρα, βλέπουμε ότι ο όρος του Φ που χρησιμοποιείται εδώ διαφέρει κατά έναν όρο $-pV_0$ από τον ορισμό $\Phi = F + pV$.

φόρμουλα, χρησιμοποιώντας αυτή τη διάσπαση-αποσύνθεση μιας άναρχης παραμόρφωσης σε διάτμηση και υδροστατική συμπίεση. Παίρνουμε ως τις δύο δευτεροβάθμιες ανεξάρτητες μεταβλητές, τα αθροίσματα των τετραγωνικών συνιστωσών των δύο όρων στην (4.2). Έτσι το F γίνεται.†

$$F = \mu(u_{ik} - \tfrac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll})^2 + \tfrac{1}{2}Ku_{ll}^2 \tag{4.3}$$

Οι ποσότητες *K* και *μ* ονομάζονται, *υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας (bulk modulus ή modulus of hydrostatic compression)* και *διατμητική παραμόρφωση* ή *μέτρο διάτμησης (shear modulus or modulus of rigidity)* αντίστοιχα. Το K σχετίζεται με τις σαθρές μεταβλητές (Lame coefficients) ως εξής

$$K = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu \tag{4.4}$$

Σε μια κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, η ελεύθερη ενέργεια είναι ελάχιστη. Αν δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις στο σώμα, τότε το F σαν συνάρτηση του u_{ik} πρέπει να έχει ελάχιστο για $u_{ik} = 0$. Αυτό σημαίνει πως η τετραγωνική φόρμα (4.3) πρέπει να είναι θετική. Αν ο τανυστής u_{ik} είναι τέτοιος ώστε $u_{ll} = 0$, τότε μόνο ο πρώτος όρος παραμένει στην (4.3); αν, απ΄ την άλλη μεριά, ο τανυστής είναι από την φόρμα $u_{ik} = \text{constant} \times \delta_{ik}$, τότε παραμένει μόνο ο δεύτερος όρος. Έτσι επακολουθεί ότι, μια απαραίτητη προϋπόθεση, ώστε η φόρμα (4.3) να είναι θετική είναι ότι καθένας από τους συντελεστές K και μ πρέπει να είναι θετικοί. Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας και η διατμητική παραμόρφωση είναι πάντα θετικά:

$$K > 0,\ \mu > 0 \tag{4.5}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την γενική θερμοδυναμική σχέση (3.6) για να καθορίσουμε τον τανυστή τάσης. Για να υπολογίσουμε τα παράγωγα $\partial F/\partial u_{ik}$, γράφουμε το ολοκό διαφορικό$\mathrm{d}F$ (για σταθερή θερμοκρασία)

$$\mathrm{d}F = Ku_{ll}\,\mathrm{d}u_{ll} + 2\mu(u_{ik} - \tfrac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik})\,\mathrm{d}(u_{ik} - \tfrac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik})$$

In the second term, multiplication of the first parenthesis by δ_{ik} gives zero, leaving

Στον δεύτερο όρο, ο πολλαπλασιασμός της πρώτης παρένθεσης με δ_{ik} μας δίνει μηδέν, αφήνοντας $\mathrm{d}F = Ku_{ll}\,\mathrm{d}u_{ll} + 2\mu(u_{ik} - \tfrac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik})\,\mathrm{d}u_{ik}$ ή γράφοντας $\mathrm{d}u_{ll} = \delta_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik}$,

$$\mathrm{d}F = [Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \tfrac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik})]\,\mathrm{d}u_{ik}.$$

Οπότε ο τανυστής τάσης είναι

$$\sigma_{ik} = Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \tfrac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) \tag{4.6}$$

Αυτή η παράσταση καθορίζει τον τανυστή τάσης, σε σχέση με τον τανυστή παραμόρφωσης ενός ισοτροπικού σώματος. Μας δείχνει ότι, αν η παραμόρφωση είναι μια διάτμηση ή μια καθαρή υδροστατική συμπίεση, η σχέση μεταξύ σ_{ik} και u_{ik} καθορίζεται μόνο από το μέτρο διάτμησης ή υδροστατικής συμπίεσης αντίστοιχα.

† Ο σταθερός όρος *Fo* είναι η ελεύθερη ενέργεια του μη παραμορφωμένου σώματος, και δεν μας ενδιαφέρει περεταίρω. Και γι' αυτό θα το παραλείψουμε, για συντομία, έχοντας το F ως την ελεύθερη ενέργεια της παραμόρφωσης (η ελαστική ελεύθερη ενέργεια).

Είναι δύσκολο να διατηρήσουμε την φόρμουλα μετατροπής που εκφράζει το u_{ik} σε σ_{ik}. Για να το κάνουμε αυτό βρίσκουμε το άθροισμα σ_{ii} των διαγώνιων όρων. Εφόσον το άθροισμα κάνει μηδέν για τον δεύτερο όρο της (4.6), έχουμε $\sigma_{ii} = 3Ku_{ii}$, ή

$$u_{ii} = \sigma_{ii}/3K \tag{4.7}$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την παράσταση στην (4.6) και έτσι καθορίζοντας το u_{ik}, βρίσκουμε ότι

$$u_{ik} = \delta_{ik}\sigma_{ll}/9K + (\sigma_{ik} - \tfrac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll})/2\mu \tag{4.8}$$

Το οποίο μας δίνει τον τανυστή παραμόρφωσης σε σχέση με τον τανυστή τάσης.

Η εξίσωση (4.7) δείχνει πως η σχετική μεταβολή όγκου (u_{ii}) σε οποιαδήποτε παραμόρφωση ενός ισοτροπικού σώματος εξαρτάται μόνο από το άθροισμα σ_{ii} των διαγώνιων συνιστωσών του τανυστή παραμόρφωσης, και η σχέση μεταξύ u_{ii} και σ_{ll} καθορίζεται μόνο από τον της υδροστατικής συμπίεσης. Στην υδροστατική συμπίεση ενός σώματος, ο τανυστής τάσης είναι $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$. άρα σ' αυτήν την περίπτωση από την (4.7), έχουμε

$$u_{ii} = -p/K. \tag{4.9}$$

Εφόσον οι παραμορφώσεις είναι μικρής κλίμακας, τα u_{ii} και p είναι μικρές ποσότητες και μπορούμε να γράψουμε την αναλογία u_{ii}/p της σχετικής μεταβολής όγκου ως προς την πίεση, στην διαφορική φόρμα $(1/V)(\partial V/\partial p)_T$. Οπότε

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

Η ποσότητα $1/K$ ονομάζεται συντελεστής υδροστατικής συμπίεσης (η πιο απλά συντελεστής συμπίεσης - coefficient of compression).

Βλέπουμε από την (4.8) πως ο τανυστής παραμόρφωσης u_{ik} είναι μια γραμμική λειτουργία του τανυστή τάσης σ_{ik}. Και η παραμόρφωση είναι ανάλογη των ασκούμενων δυνάμεων. Αυτός ο νόμος, ο οποίος ισχύει για μικρής κλίμακας παραμορφώσεις ονομάζεται *νόμος του Hooke.* †

Μπορούμε επίσης να δώσουμε μια εύχρηστη φόρμα της παράστασης για την ελεύθερη ενέργεια ενός παραμορφωμένου σώματος, η οποία βγαίνει αμέσως από το γεγονός ότι *F* είναι δευτεροβάθμιο στον τανυστή παραμόρφωσης. Σύμφωνα με το θεώρημα του Euler, $u_{ik}\partial F/\partial u_{ik} = 2F$, από όπου, εφόσον $\partial F/\partial u_{ik} = \sigma_{ik}$, έχουμε

$$F = \tfrac{1}{2}\sigma_{ik}u_{ik} \tag{4.10}$$

Αν αντικαταστήσουμε σ' αυτήν την φόρμουλα το u_{ik} ως γραμμικούς συνδυασμούς των συνιστωσών σ_{ik} η ελαστική ενέργεια θα αναπαρασταθεί σαν δευτεροβάθμια συνάρτηση του σ_{ik}. Ξανά εφαρμόζοντας το θεώρημα του Euler, έχουμε $\sigma_{ik}\partial F/\partial\sigma_{ik} = 2F$, και μια σύγκριση με την (4.10) δείχνει ότι

$$u_{ik} = \partial F/\partial\sigma_{ik}. \tag{4.11}$$

Πάντως, πρέπει να δώσουμε έμφαση, στο ότι, παρόλο που η φόρμουλα $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$ είναι μια γενική συνάφεια της θερμοδυναμικής, η αντίστροφη φόρμουλα (4.11) είναι εφαρμόσιμη, μόνο αν ισχύει και ο νόμος του Hooke.

---

† Ο νόμος του Hooke είναι εφαρμόσιμος σχεδόν σε όλες τις ελαστικές παραμορφώσεις. Ο λόγος είναι ότι οι παραμορφώσεις συνήθως παύουν να είναι ελαστικές όταν είναι τόσο μικρές που ο νόμος του Hooke είναι μια καλή προσέγγιση. Υλικά όπως το λάστιχο εξαιρούνται.

†† Οι έξι συνιστώσες του τανυστή u_{ik} δεν είναι εντελώς ανεξάρτητες, αφού εκφράζονται σαν παράγωγα τριών μόνο ανεξάρτητων συναρτήσεων, οι συνιστώσες του διανύσματος **u** (βλ. §7, πρόβλημα 9). Αλλά οι έξι συνιστώσες u_{ik} μπορούν εξ' ορισμού να χαρακτηριστούν αυθαίρετες – άναρχες.

§5. Ομοιογενείς παραμορφώσεις (Homogeneous deformations)

Ας θεωρήσουμε μερικές απλές περιπτώσεις ονομαζόμενες *ομοιογενείς παραμορφώσεις (homogeneous deformations),* δηλαδή τις περιπτώσεις στις οποίες ο τανυστής παραμόρφωσης είναι συνεχής – σταθερός καθ' όλον τον όγκο του σώματος. †† Για παράδειγμα, η υδροστατική συμπίεση, που ήδη συζητήθηκε, είναι μια ομοιογενής παραμόρφωση.

Πρώτα λαμβάνουμε υπ' όψιν, μια απλή επέκταση (ή συμπίεση) μιας ράβδου, που βρίσκεται κατά μήκος του άξονα z, και αφήνουμε δυνάμεις να δράσουν στις άκρες της, οι οποίες δυνάμεις την τεντώνουν προς τις δύο κατευθύνσεις. Αυτές οι δυνάμεις δρουν ομοιόμορφα στις άκρες της ράβδου; η δύναμη σε μονάδα επιφάνειας είναι *p*.

Εφόσον η παραμόρφωση είναι ομοιογενής, δηλαδή, το u_{ik} είναι σταθερό σε όλο το σώμα, ο τανυστής τάσης σ_{ik} θα είναι επίσης σταθερός, και έτσι μπορεί να καθοριστεί κατ' ευθείαν από τις περιοριστικές συνθήκες (boundary conditions (2.8)). Δεν υπάρχει καμία εξωτερική δύναμη στις πλευρές της ράβδου και επομένως $\sigma_{ik}n_k = 0$. Αφού η διανυσματική μονάδα **n** στην πλαϊνή πλευρά της ράβδου είναι κάθετη στον άξονα z, δηλ. $n_z = 0$, και ως επακόλουθο, όλες οι συνιστώσες σ_{ik} εκτός της σ_{zz} είναι μηδέν. Στην άκρη της επιφάνειας έχουμε $\sigma_{zi}n_i = p$, or $\sigma_{zz} = p$.

Από τις γενική παράσταση (4.8) που συνδέει τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης και τανυστή τάσης, παρατηρούμε ότι όλες οι συνιστώσες u_{ik} με $i \neq k$ ισούνται με μηδέν. Για τις υπόλοιπες συνιστώσες βρίσκουμε

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p, \quad u_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)p. \tag{5.1}$$

Οι συνιστώσες u_{zz} μας δίνουν την σχετική επιμήκυνση της ράβδου. Ο συντελεστής του *p* ονομάζεται *συντελεστής επιμήκυνσης (coefficient of extension),* και το αντίθετό του είναι το *μέτρο ελαστικότητας (modulus of extension* ή *Young's modulus)*, E:

$$u_{zz} = p/E, \tag{5.2}$$

όπου

$$E = 9K\mu/(3K + \mu). \tag{5.3}$$

Οι συνιστώσες u_{xx} και u_{yy} μας δίνουν την σχετική συμπίεση της ράβδου στην κάθετη κατεύθυνση. Η αναλογία της κάθετης συμπίεσης προς την διάμηκες προέκταση ονομάζεται *λόγος εγκάρσιας/ορθής παραμόρφωσης ή λόγος Poisson (Poisson's ratio) σ*:†

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}, \tag{5.4}$$

όπου

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(3K - 2\mu)/(3K + \mu) \tag{5.5}$$

Εφόσον το K και μ είναι πάντα θετικά, ο λόγος Poisson μπορεί να ποικίλει μεταξύ -1 (για K=0) και ½ (για μ=0). Άρα ††

$$-1 \leqslant \sigma \leqslant \tfrac{1}{2}. \tag{5.6}$$

Τέλος η σχετική αύξηση στον όγκο της ράβδου είναι

$$u_{ii} = p/3K. \tag{5.7}$$

Η ελεύθερη ενέργεια της τεντωμένης ράβδου μπορεί να υπολογιστεί αμέσως από την φόρμουλα (4.10). Αφού μόνο οι συνιστώσες σ_{zz} δεν είναι μηδενικές, έχουμε $F = \frac{1}{2}\sigma_{zz}u_{zz}$ από όπου

$$F = p^2/2E. \tag{5.8}$$

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε, τα Ε και σ αντί των Κ και μ. αυτά και ο δεύτερος σαθρός συντελεστής μας δίνονται σε Ε και σ από

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= E\sigma/(1-2\sigma)(1+\sigma), \\ \mu &= E/2(1+\sigma),\ K = E/3(1-2\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Θα γράψουμε εδώ την γενική φόρμουλα της §4, με τον συντελεστή να εκφράζεται σε όρους των Ε και σ. Η ελεύθερη ενέργεια είναι

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}{}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}{}^2\right) \tag{5.10}$$

Ο τανυστής τάσης μας δίνεται ως προς τον τανυστή παραμόρφωσης από

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\delta_{ik}\right) \tag{5.11}$$

αντίστροφα,

$$u_{ik} = [(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\sigma_{ll}\delta_{ik}]/E \tag{5.12}$$

Αφού η φόρμουλα (5.11) και (5.12) χρησιμοποιούνται συχνά, θα τους δώσουμε μια μορφή συνιστωσών:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{xx} + \sigma(u_{yy}+u_{zz})], \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{yy} + \sigma(u_{xx}+u_{zz})], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx}+u_{yy})], \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma}u_{xy},\ \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\sigma}u_{xz},\ \sigma_{yz} = \frac{E}{1+\sigma}u_{yz}, \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Και αντίστροφα

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})], \\ u_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})], \\ u_{zz} &= \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})], \\ u_{xy} &= \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy},\ u_{xz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xz},\ u_{yz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{yz}. \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

† Η χρήση του σ για να υποδηλώνει τον λόγο Poisson και σ_{ik} για να υποδηλώνει τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης δεν μπορεί να οδηγήσει σε αμφιβολίες, εφόσον το τελευταίο πάντα έχει παράγωγα.

††Στην πράξη, ο λόγος Poisson ποικίλει μόνο μεταξύ 0 και ½. Δεν υπάρχουν υλικά γνωστά για τα οποία $\sigma < 0$, δηλαδή, που θα διασταλούν κάθετα όταν τεντωθούν οριζόντια. Μπορούμε να αναφέρουμε ότι το άνισο: ty $\sigma > 0$ αντιστοιχεί σε $\lambda > 0$. όπου λ είναι ο σαθρός συντελεστής (lame coefficient) που προβάλει στην (4.1). με άλλα λόγια και οι δύο όροι στην (4.1), καθώς και στην (4.3), είναι πάντα θετικοί στην πράξη, παρ' όλα αυτά, αυτό δεν είναι θερμοδυναμικά απαραίτητο. Τιμές κοντά στο ½ (π.χ. για το λάστιχο) αντιστοιχούν σε διατμητική παραμόρφωση (συντελεστής ακαμψίας), η οποία είναι μικρή σε σχέση με τον συντελεστής συμπιεστότητας.

Ας μελετήσουμε τώρα την συμπίεση της ράβδου της οποίας οι πλευρές στερεωμένες με τέτοιο τρόπο που δεν μπορούν να μετακινηθούν. Οι εξωτερικές δυνάμεις, οι οποίες προκαλούν την συμπίεση, εφαρμόζουν στις άκρες της ράβδου και δρουν κατά το μήκος της, το οποίο μήκος θεωρούμε ότι βρίσκεται στον άξονα z. Μια τέτοια παραμόρφωση ονομάζεται *μονόπλευρη συμπίεση (unilateral compression).* Αφού η ράβδος παραμορφώνεται μόνο προς την κατεύθυνση – z, μόνο η συνιστώσα u_{zz} του u_{ik} είναι διαφορετική του μηδενός. Έτσι από την (5.11) έχουμε

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}, \quad \sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}$$

Ξανά παριστάνοντας την δύναμη συμπίεσης με *p* ($\sigma_{zz} = p$, το οποίο είναι αρνητικό για μια συμπίεση), έχουμε

$$u_{zz} = p(1+\sigma)(1-2\sigma)/E(1-\sigma) \tag{5.15}$$

Ο συντελεστής του *p* ονομάζεται *συντελεστής μονόπλευρης συμπίεσης (coefficient of unilateral compression).* Για τις αντίστροφες τάσεις έχουμε

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p\sigma/(1-\sigma) \tag{5.16}$$

Τέλος, η ελεύθερη ενέργεια της ράβδου είναι

$$F = p^2(1+\sigma)(1-2\sigma)/2E(1-\sigma). \tag{5.17}$$

§6. Παραμορφώσεις με αλλαγή θερμοκρασίας

Ας μελετήσουμε τώρα παραμορφώσεις οι οποίες συνοδεύονται με μια αλλαγή στην θερμοκρασία του σώματος; αυτό μπορεί να συμβεί είτε σαν αποτέλεσμα της διαδικασίας της παραμόρφωσης, είτε από εξωτερικούς παράγοντες.

Θα θεωρήσουμε ως μη παραμορφωμένη κατάσταση, την κατάσταση του σώματος κατά την απουσία εξωτερικών δυνάμεων σε συγκεκριμένη θερμοκρασία T_0. Αν το σώμα βρίσκεται σε μια θερμοκρασία T διαφορετική από T_0, τότε ακόμα κι αν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, το σώμα θα έχει υποστεί παραμόρφωση, λόγω των θερμικών διαστολών. Στην διαστολή της ελεύθερης ενέργειας F(T), θα υπάρξουν γραμμικοί όροι, καθώς και τετραγωνικοί, στον τανυστή παραμόρφωσης. Από τις συνιστώσες του τανυστή u_{ik}, της δεύτερης σειράς, μπορούμε να δημιουργήσουμε μόνο μία γραμμική ποσοτική κλίμακα, το άθροισμα u_{ll} των διαγώνιων συνιστωσών. Επίσης θα θεωρήσουμε ότι η αλλαγή θερμοκρασίας $T-T_0$ η οποία συνοδεύει την παραμόρφωση είναι μικρή. Μετά απ' αυτό, θα υποθέσουμε ότι ο συντελεστής του u_{ll} κατά την διαστολή του F (που πρέπει να εξαφανιστεί για $T-T_0$) είναι απλά ανάλογες της διαφοράς $T-T_0$. Οπότε βρίσκουμε ότι η ελεύθερη ενέργεια είναι (αντί για (4.3))

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T-T_0)u_{ll} + \mu(u_{ik} - \tfrac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll})^2 + \tfrac{1}{2}Ku_{ll}^2, \tag{6.1}$$

Όπου ο συντελεστής του $T-T_0$ έχει γραφτεί ως – $K\alpha$. Οι ποσότητες μ, Κ και α μπορούν εδώ να θεωρηθούν σταθερές; Αν αφήσουμε να εξαρτηθούν στην θερμοκρασία τότε αυτό μπορεί να οδηγήσει σε όρους υψηλής σειράς.
Διαφοροποιώντας το F ως προς το u_{ik}, αποκομίζουμε τον τανυστή τάσης:

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T-T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \tfrac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}). \tag{6.2}$$

Ο πρώτος όρος μας δίνει τις επιπρόσθετες τάσεις, που δημιουργούνται από την αλλαγή θερμοκρασίας. Στην ελεύθερη θερμική διαστολή του σώματος (εξωτερικές δυνάμεις όντας απούσες), δεν μπορούν να υπάρχουν εσωτερικές τάσεις. Εξισώνοντας το σ_{ik} στο μηδέν, βρίσκουμε ότι, ο u_{ik} είναι από × δ_{ik}, και

$$u_{ll} = \alpha(T-T_0). \tag{6.3}$$

Αλλά το u_{ll} είναι η σχετική αλλαγή όγκου που προκλήθηκε από την παραμόρφωση. Οπότε το α είναι απλά ο *θερμικός συντελεστής διαστολής (thermal expansion coefficient)* του σώματος.
Ανάμεσα στους διάφορους (θερμοδυναμικούς) τύπους της παραμόρφωσης, οι ισοθερμικές (isothermal) και αδιαβατικές (adiabatic) παραμορφώσεις είναι σημαντικές. Στις ισοθερμικές παραμορφώσεις, η θερμοκρασία του σώματος δεν αλλάζει. Σύμφωνα με αυτό πρέπει να βάλουμε $T-T_0$ στην (6.1), επιστρέφοντας στην συνηθισμένη φόρμουλα; οι συντελεστές Κ και μ μπορούν γι' αυτό να ονομαστούν *ισοθερμικά μέτρα (isothermal moduli).*

Μια παραμόρφωση θεωρείται αδιαβατική όταν δεν υπάρχει ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ των διάφορων μερών του σώματος (ή, φυσικά μεταξύ του σώματος και του περιβάλλοντος που υπάρχει γύρω του). Η εντροπία S παραμένει σταθερή - συνεχής. Είναι το παράγωγο $-\partial F/\partial T$ της ελεύθερης ενέργειας όσον αφορά την θερμοκρασία. Διαφοροποιώντας την παράσταση (6.1), έχουμε έως τους όρους της πρώτης σειράς στο u_{ik}.

$$S(T) = S_0(T) + K\alpha u_{ll} \tag{6.4}$$

Βάζοντας το S σταθερό, μπορούμε να υπολογίσουμε την αλλαγή της θερμοκρασίας $T-T_0$ λόγω της παραμόρφωσης, που επομένως είναι ανάλογη του u_{ll} :

$$C_v(T-T_0)/T_0 = -K\alpha u_{ll} \tag{6.5}$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την παράσταση για $T-T_0$ στην (6.2), παίρνουμε για σ_{ik} μια παρόμοια παράσταση,

$$\sigma_{ik} = K_{\text{ad}} u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \tfrac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}), \tag{6.6}$$

με το ίδιο μέτρο διάτμησης μ αλλά με διαφορετικό συντελεστή συμπιεστότητας K_{ad}. Η σχέση μεταξύ του αδιαβατικού συντελεστή K_{ad} και του κανονικού ισοθερμικού συντελεστή K μπορεί επίσης να υπολογιστεί απ' ευθείας από την θερμοδυναμική φόρμουλα

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \frac{T(\partial V/\partial T)_p{}^2}{C_p},$$

όπου C_p είναι η συγκεκριμένη θερμότητα ανά μονάδα όγκου σε σταθερή πίεση. Αν V είναι ο όγκος που καταλαμβάνεται από υλικό που πριν την παραμόρφωση καταλάμβανε μονάδα όγκου, τα παράγωγα $\partial V/\partial T$ και d $\partial V/\partial p$ δίνουν τις σχετικές αλλαγές όγκου, σε θερμότητα και συμπίεση αντίστοιχα. Αυτό είναι,

$$(\partial V/\partial T)_p = \alpha, \quad (\partial V/\partial p)_S = -1/K_{\text{ad}}, \quad (\partial V/\partial p)_T = -1/K.$$

Επομένως βρίσκουμε πως η σχέση μεταξύ αδιαβατικών και ισοθερμικών μέτρων είναι†

$$1/K_{\text{ad}} = 1/K - T\alpha^2/C_p, \ \mu_{\text{ad}} = \mu. \tag{6.7}$$

Για τα αδιαβατικά. Μέτρο ελαστικότητας Young και λόγος Poisson, εύκολα βρίσκουμε

$$E_{\text{ad}} = \frac{E}{1 - ET\alpha^2/9C_p}, \quad \sigma_{\text{ad}} = \frac{\sigma + ET\alpha^2/9C_p}{1 - ET\alpha^2/9C_p}. \tag{6.8}$$

Στην πράξη, $ET\alpha^2/C_p$ είναι συνήθως μικρό, και γι' αυτό αρκετά ακριβές για να βάλουμε

$$E_{\text{ad}} = E + E^2T\alpha^2/9C_p, \qquad \sigma_{\text{ad}} = \sigma + (1+\sigma)ET\alpha^2/9C_p. \tag{6.9}$$

Στην ισοθερμική παραμόρφωση, ο τανυστής τάσης μας δίνεται ως προς την ελεύθερη ενέργεια:

$$\sigma_{ik} = (\partial F/\partial u_{ik})_T.$$

Απ' την άλλη, για σταθερή εντροπία έχουμε (βλ. (3.6))

$$\sigma_{ik} = (\partial \mathscr{E}/\partial u_{ik})_S,$$

όπου $\mathscr{E}$ είναι η εσωτερική ενέργεια. Επομένως, η παράσταση που αναλογεί στην (4.3) καθορίζει, για αδιαβατηκές παραμορφώσεις, όχι την ελεύθερη ενέργεια αλλά την εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα όγκου:

$$\mathscr{E} = \tfrac{1}{2}K_{\text{ad}}u_{ll}{}^2 + \mu(u_{ik} - \tfrac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik})^2. \tag{6.1}$$

†Για να παράγουμε αυτές τις φόρμουλες από (6.5) και (6.6), πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και την φόρμουλα θερμοδυναμικής $C_p - C_v = T\alpha^2K$.

§7. Η εξίσωση της ισορροπίας για ισοτροπικά σώματα.

Ας παράγουμε τώρα την εξίσωση της ισορροπίας για ισοτροπικά σώματα. Για να το κάνουμε αυτό αντικαθιστούμε στις γενικές εξισώσεις (2.7)

$$\partial\sigma_{ik}/\partial x_k + \rho g_i = 0$$

την παράσταση (5.11) για τον τανυστή τάσης. έχουμε

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}.$$

αντικαθιστώντας

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

καταλήγουμε στην εξίσωση της ισορροπίας στην μορφή

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k{}^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0. \tag{7.1}$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να γραφτούν πιο κατάλληλα σε διανυσματική μορφή. Οι ποσότητες $\partial^2 u_i/\partial x_k{}^2$ είναι συνιστώσες του διανύσματος $\triangle\mathbf{u}$. και $\partial u_l/\partial x_l \equiv \operatorname{div}\mathbf{u}$. Έτσι οι εξισώσεις της ισορροπίας μετατρέπονται σε

$$\triangle\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\,\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = -\rho\mathbf{g}\frac{2(1+\sigma)}{E}. \tag{7.2}$$

Μερικές φορές βολεύει να μεταμορφώσουμε αυτήν την εξίσωση χρησιμοποιώντας την ταυτότητας διανύσματος $\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = \triangle\mathbf{u} + \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}$. Τότε η (7.2) γίνεται

$$\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u} = -\rho\mathbf{g}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \tag{7.3}$$

Έχουμε γράψει τις εξισώσεις ισορροπίας για ένα ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο, αφού αυτή είναι και η δύναμη του σώματος που εμπλέκεται συχνότερα στην θεωρία της ελαστικότητας. Αν υπάρχουν άλλες σωματικές δυνάμεις, το διάνυσμα $\rho\mathbf{g}$ στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης θα πρέπει να αντικατασταθεί ανάλογα.

Μια πολύ σημαντική περίπτωση είναι αυτή όπου, εκεί που προκαλείται η παραμόρφωση του σώματος, όχι από σωματικές δυνάμεις αλλά από δυνάμεις που ασκούνται στην επιφάνειά του. Τότε η εξίσωση της ισορροπίας γίνεται

$$(1-2\sigma)\triangle\mathbf{u} + \mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{7.4}$$

ή

$$2(1-\sigma)\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - (1-2\sigma)\,\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u} = 0. \tag{7.5}$$

Οι εξωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται στην λύση μόνο μέσα από τις περιοριστικές συνθήκες. Παίρνοντας την διαφορά της παράστασης (7.4) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\operatorname{div}\mathbf{grad} \equiv \triangle,$$

βρίσκουμε

$$\triangle\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{7.6}$$

δηλ. div u (το οποίο καθορίζει την μεταβολή όγκου λόγω της παραμόρφωσης) είναι μια αρμονική λειτουργία. Παίρνοντας την Λαπλασιανή της εξίσωσης (7.4) τότε έχουμε

$$\triangle \triangle \mathbf{u} = 0, \tag{7.7}$$

Δηλαδή, σε κατάσταση ισορροπίας το διάνυσμα μετατόπισης καλύπτει την *ετεροαρμονική εξίσωση (biharmonic equation).* Αυτά τα αποτελέσματα συνεχίζουν να ισχύουν σε ένα ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο (αφού το δεξί μέρος της εξίσωσης (7.2) μας δίνει μηδενική διαφορά), αλλά δεν ισχύουν σε γενικές περιπτώσεις εξωτερικών δυνάμεων που ποικίλουν στο σώμα.

Το γεγονός ότι το διάνυσμα μετατόπισης καλύπτει την ετεροαρμονική εξίσωση, φυσικά, δεν σημαίνει ότι το γενικό ολοκλήρωμα των εξισώσεων της ισορροπίας (υπό την απουσία σωματικών δυνάμεων) είναι ένα αυθαίρετο ετεροαρμονικό διάνυσμα; πρέπει να θυμόμαστε πως η συνάρτηση $\mathbf{u}(x, y, z)$ επίσης καλύπτει την διαφορική εξίσωση κατώτερης-σειράς (7.4). Πάντως, είναι πιθανό, να εκφράσουμε το γενικό ολοκλήρωμα των εξισώσεων της ισορροπίας σε σχέση με τα παράγωγα ενός αυθαίρετου διανύσματος (βλ. πρόβλημα 10).

Αν το σώμα θερμανθεί ανομοιόμορφα, ένας επιπρόσθετος όρος εμφανίζεται στην εξίσωση της ισορροπίας. Ο τανυστής τάσης πρέπει να συμπεριλαμβάνει τον όρο

$$-K\alpha(T-T_0)\delta_{ik}$$

(βλ. (6.2)), και $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ αντίστοιχα περιλαμβάνει έναν όρο

$$-K\alpha\partial T/\partial x_i = -[E\alpha/3(1-2\sigma)]\partial T/\partial x_i.$$

Έτσι η εξίσωση της ισορροπίας παίρνει την μορφή

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u} = \alpha\,\mathbf{grad}\,T. \tag{7.8}$$

Ας δούμε τώρα την περίπτωση μιας *επίπεδης παραμόρφωσης (plane deformation),* κατά την οποία η μια συνιστώσα του διανύσματος μετατόπισης (u_z) είναι μηδέν, ενώ οι συνιστώσες u_x, u_y εξαρτώνται μόνο από τους *x* και *y*. Οι συνιστώσες u_{zz}, u_{xz}, u_{yz} του τανυστή παραμόρφωσης στη συνέχεια εξαφανίζονται παρομοίως, και έτσι εξαφανίζονται και οι συνιστώσες σ_{xz}, σ_{yz} του τανυστή τάσης (αλλά όχι η διαμήκης τάση σ_{zz}, η ύπαρξη της οποίας είναι συνέπεια της σταθερότητας του μήκους του σώματος στην κατεύθυνση z).†

Εφόσον όλες οι ποσότητες είναι ανεξάρτητες της συντεταγμένης z, οι εξισώσεις της ισορροπίας (κατά την απουσία εξωτερικών σωματικών δυνάμεων) $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0$ μειώνονται σ' αυτήν την περίπτωση δύο εξισώσεων:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \tag{7.9}$$

Οι περισσότερες γενικές εξισώσεις $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ που καλύπτουν αυτές τις εξισώσεις είναι της μορφής

$$\sigma_{xx} = \partial^2\chi/\partial y^2, \qquad \sigma_{xy} = -\partial^2\chi/\partial x\partial y, \qquad \sigma_{yy} = \partial^2\chi/\partial x^2, \tag{7.10}$$

†Η χρήση της θεωρίας των εξισώσεων ενός συμπλέγματος μεταβλητών, παρέχει πολύ ισχυρές μεθόδους για την επίλυση επίπεδων προβλημάτων στην θεωρία της ελαστικότητας. Βλ. N.I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd English ed., P. Noordhoff, Groningen 1963.

όπου χ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση των χ και y. Είναι εύκολο να καταλήξουμε σε μια εξίσωση η οποία να καλύπτεται από αυτή την συνάρτηση. Μια τέτοια εξίσωση πρέπει να υπάρχει εφόσον οι ποσότητες σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} μπορούν να εκφραστούν ως δύο ποσότητες u_x, u_y και γι' αυτό δεν θεωρούνται ανεξάρτητες. Χρησιμοποιώντας την φόρμουλα (5.13), βρίσκουμε, για μια απλή-σκέτη παραμόρφωση,

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = E(u_{xx} + u_{yy})/(1+\sigma)(1-2\sigma).$$

Αλλά

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \triangle\chi, \qquad u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u},$$

και εφόσον από (7.6) div u είναι αρμονική, καταλήγουμε ότι η συνάρτηση χ καλύπτει την εξίσωση

$$\triangle\triangle\chi = 0, \tag{7.11}$$

δηλ. είναι ετεροαρμονική. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται *συνάρτηση τάσης (stress function).* Όταν το απλό-σκέτο πρόβλημα έχει λυθεί και η συνάρτηση χ μας είναι γνωστή, η διαμήκης τάση σ_{zz} υπολογίζεται αμέσως από την φόρμουλα

$$\sigma_{zz} = \sigma E(u_{xx} + u_{yy})/(1+\sigma)(1-2\sigma) = \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

ή

$$\sigma_{zz} = \sigma\triangle\chi. \tag{7.12}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Υπολογίστε την παραμόρφωση μιας ράβδου (με μήκος l) η οποία στέκεται κάθετα προς το βαρυτικό πεδίο.

ΛΥΣΗ. Παίρνουμε τον άξονα z κατά μήκος του άξονα της ράβδου, και το επίπεδο x y στο επίπεδο της βάσης της. Οι εξισώσεις της ισορροπίας είναι $\partial\sigma_{xi}/\partial x_i = \partial\sigma_{yi}/\partial x_i = 0$, $\partial\sigma_{zi}/\partial x_i = \rho g$. Στις πλευρές της ράβδου όλες οι συνιστώσες σ_{ik} εκτός σ_{zz} πρέπει να μηδενιστούν, και στο πάνω μέρος της ράβδου $z = l)$ $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. Η λύση των εξισώσεων της ισορροπίας που καλύπτει αυτές τις συνθήκες είναι $\sigma_{zz} = -\rho g(l-z)$, με όλα τα άλλα σ_{ik} να είναι μηδέν. Από σ_{ik} βρίσκουμε πως u_{ik} είναι $= u_{yy} = \sigma\rho g(l-z)/E, u_{zz} = -\rho g(l-z)/E, u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0$, οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε τις συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης, $u_x = \sigma\rho g(l-z)x/E,\ u_y = \sigma\rho g(l-z)y/E,\ u_z = -(\rho g/2E)\{l^2-(l-z)^2-\sigma(x^2+y^2)\}$.
Η παράσταση για u_z καλύπτει την οριακή συνθήκη $u_z = 0$ μόνο σε ένα σημείο στην κάτω μέρος της ράβδου. Οπότε η λύση που βρήκαμε δεν ισχύει κοντά στο κάτω μέρος της ράβδου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Υπολογίστε την παραμόρφωση μιας κούφιας σφαίρας (με εξωτερική και εσωτερική ακτίνα R_2 και R_1) με εσωτερική πίεση p_1 και εξωτερική p_2.

ΛΥΣΗ. Χρησιμοποιούμε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες, με αρχή συντεταγμένων στο κέντρο της σφαίρας. Το διάνυσμα μετατόπισης u είναι παντού ακτινικό, και είναι μια συνάρτηση του r μόνο. Οπότε $\mathbf{curl}\,\mathbf{u} = 0$. και η εξίσωση (7.5) γίνεται $\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$. Άρα

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2u)}{\mathrm{d}r} = \text{constant} \equiv 3a,$$

ή $u = ar + b/r^2$. Οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης είναι (βλ. φόρμουλα (1.7)) $u_{rr} = a - 2b/r^3$, $u_{\theta\theta} = u_{\phi\phi} = a + b/r^3$. Η ακτινική τάση είναι $a + b/r^3$.

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\{(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}\} = \frac{E}{1-2\sigma}a - \frac{2E}{1+\sigma}\frac{b}{r^3}.$$

Τα σταθερά α και b καθορίζονται από τις οριακές συνθήκες:

$\sigma_{rr} = -p_1$ at $r = R_1$ και $\sigma_{rr} = -p_2$ at $r = R_2$. Οπότε βρίσκουμε

$$a = \frac{p_1R_1^3 - p_2R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\cdot\frac{1-2\sigma}{E},\quad b = \frac{R_1^3R_2^3(p_1-p_2)}{R_2^3 - R_1^3}\cdot\frac{1+\sigma}{2E}.$$

Για παράδειγμα, η διανομή τάσης σε μια κούφια σφαίρα με πίεση $p_1 = p$ στο εσωτερικό και $p_2 = 0$ στο εξωτερικό μας δίνεται από

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1 - \frac{R_2^3}{r^3}\right),\quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1 + \frac{R_2^3}{2r^3}\right).$$

Για ένα λεπτό σφαιρικό κέλυφος με πάχος $h = R_2 - R_1 \ll R$ έχουμε περίπου

$$u = pR^2(1-\sigma)/2Eh,\quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \tfrac{1}{2}pR/h,\quad \bar{\sigma}_{rr} = \tfrac{1}{2}p,$$

όπου $\bar{\sigma}_{rr}$ είναι η μέση τιμή της ακτινικής τάσης ως προς το πάχος του κελύφους.

Η διανομή τάσης σε ένα άπειρα ελαστικό αντικείμενο με σφαιρική κοιλότητα (με ακτίνα R) το οποίο δέχεται υδροστατική συμπίεση, υπολογίζεται βάζοντας $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $p_1 = 0$, $p_2 = p$:

$$\sigma_{rr} = -p\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right),\quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = -p\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right).$$

Στην επιφάνεια της κοιλότητας οι εφαπτόμενες τάσεις $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = -3p/2$ υπερβαίνουν την πίεση στο άπειρο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Υπολογίστε την παραμόρφωση μιας συμπαγής σφαίρας (με ακτίνα R) βρισκόμενη στο δικό της βαρυτικό πεδίο.

ΛΥΣΗ. Η δύναμη της βαρύτητας σε μονάδα μάζας σε ένα σφαιρικό σώμα είναι $-g\mathbf{r}/R$ Αντικαθιστώντας αυτήν την παράσταση στην θέση του **g** της εξίσωσης (7.3) καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση για την ακτινική μετατόπιση:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2u)}{\mathrm{d}r}\right)=\rho g\frac{r}{R}.$$

Η λύση για $r=0$ όπου καλύπτει την συνθήκη $\sigma_{rr}=0$ for $r=R$ είναι

$$u=-\frac{g\rho R(1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)}r\left(\frac{3-\sigma}{1+\sigma}-\frac{r^2}{R^2}\right).$$

Να σημειώσουμε, πώς το υλικό συμπιέζεται $(u_{rr}<0)$ μέσα σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $R\sqrt{\{(3-\sigma)/3(1+\sigma)\}}$ και τεντώνεται στο εξωτερικό της $(u_{rr}>0)$. Η πίεση στο κέντρο της σφαίρας είναι $(3-\sigma)g\rho R/10(1-\sigma)$

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Υπολογίστε την παραμόρφωση ενός κυλινδρικού σωλήνα (με εξωτερική και εσωτερική ακτίνα R_2 και R_1). με μια πίεση *p* στο εσωτερικό και καθόλου πίεση στο εξωτερικό του.†

ΛΥΣΗ. Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες, με τον άξονα z κατά μήκος τον άξονα του σωλήνα. Όταν η πίεση είναι ομοιόμορφη κατά μήκος του σωλήνα, η παραμόρφωση είναι ένα καθαρό ακτινικό διάνυσμα $u_r=u(r)$. Όμοια με το πρόβλημα 2, έχουμε

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(ru)}{\mathrm{d}r}=\text{constant}\equiv 2a.$$

Άρα $u=ar+b/r$. Οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης είναι (βλ. φόρμουλα (1.8)) $u_{rr}=\mathrm{d}u/\mathrm{d}r=a-b/r^2$, $u_{\phi\phi}=u/r=a+b/r^2$. Από τις συνθήκες $\sigma_{rr}=0$ σε $r=R_2$ και $\sigma_{rr}=-p$ σε $r=R_1$, βρίσκουμε

$$a=\frac{pR_1^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\cdot\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E},\quad b=\frac{pR_1^{\,2}R_2^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\cdot\frac{1+\sigma}{E}$$

Η διανομή τάσης μας δίνεται από την φόρμουλα

$$\sigma_{rr}=\frac{pR_1^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\left(1-\frac{R_2^{\,2}}{r^2}\right),\quad \sigma_{\phi\phi}=\frac{pR_1^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\left(1+\frac{R_2^{\,2}}{r^2}\right),$$

$$\sigma_{zz}=2p\sigma R_1^{\,2}/(R_2^{\,2}-R_1^{\,2}).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. Υπολογίστε την παραμόρφωση ενός κυλίνδρου που περιστρέφεται ομοιόμορφα γύρα από τον άξονά του.

ΛΥΣΗ. Αντικαθιστώντας την δύναμη της βαρύτητας στην (7.3) με την φυγόκεντρο δύναμη $\rho\Omega^2 r$ (όπου Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα), έχουμε σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες την παρακάτω εξίσωση για την μετατόπιση $u_r=u(r)$:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(ru)}{\mathrm{d}r}\right)=-\rho\Omega^2 r.$$

Η οριστική λύση για $r=0$ που καλύπτει και την συνθήκη $\sigma_{rr}=0$ για $r=R$ είναι

$$u=\frac{\rho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)}r[(3-2\sigma)R^2-r^2]$$

† Στα προβλήματα 4,5 και 7 θεωρούμε πως το μήκος του κυλίνδρου διατηρείται σταθερό, έτσι ώστε να μην υπάρξει διαμήκης παραμόρφωση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6. Υπολογίστε την παραμόρφωση μιας ανομοιόμορφα θερμαινόμενης σφαίρας, με σφαιρικά συμμετρική διανομή θερμότητας.

ΛΥΣΗ. Σε σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες, η εξίσωση (7.8) για μια καθαρά ακτινική παραμόρφωση είναι

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2u)}{dr}\right) = \alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\frac{dT}{dr}.$$

Η οριστική λύση για $r = 0$ και η οποία καλύπτει τις συνθήκες $\sigma_{rr} = 0$ για $r = R$ είναι

$$u = \alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\left\{\frac{1}{r^2}\int_0^r T(r)r^2\,dr + \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma}\frac{r}{R^3}\int_0^R T(r)r^2\,dr\right\}$$

Η θερμοκρασία $T(r)$ υπολογίζεται από την τιμή για την οποίο η σφαίρα, θερμαίνεται ομοιόμορφα, θεωρείται ως μη παραμορφωμένη. Στην παραπάνω φόρμουλα θεωρούμε ότι η ζητούμενη θερμοκρασία είναι αυτή της εξωτερικής επιφάνειας της σφαίρας, έτσι ώστε $T(R) = 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7. Όμοια με το πρόβλημα 6, υπολογίστε την παραμόρφωση, αλλά για έναν ανομοιόμορφα θερμαινόμενο κύλινδρο, με αξονικά συμμετρική διανομή θερμότητας.

ΛΥΣΗ. Όμοια σε κυλινδρικά πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$u = \alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\left\{\frac{1}{r}\int_0^r T(r)r\,dr + (1-2\sigma)\frac{r}{R^2}\int_0^R T(r)r\,dr\right\}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8. Υπολογίστε την παραμόρφωση ενός άπειρα ελαστικού αντικειμένου, με συγκεκριμένη διανομή θερμότητας $T(x, y, z)$ τέτοια ώστε η θερμοκρασία τείνει προς μια σταθερή τιμή T_0 προς το άπειρο.

ΛΥΣΗ. Η εξίσωση (7.8) έχει μια προφανή λύση στην οποία **curl u=0** και

$$\text{div}\,\mathbf{u} = \alpha(1+\sigma)[T(x, y, z) - T_0]/3(1-\sigma).$$

Το διάνυσμα **u**, του οποίου η απόκλιση είναι μια καθορισμένη συνάρτηση που ορίζεται σε όλο τον χώρο και τείνει προς το άπειρο, και του οποίου η καμπύλη είναι παρόμοια μηδέν, μπορεί να γραφτεί, όπως ξέρουμε από την διανυσματική ανάλυση στην μορφή

$$\mathbf{u}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\,\mathbf{grad}\int\frac{\text{div}'\,\mathbf{u}(x', y', z')}{r}\,dV',$$

όπου

$$r = \sqrt{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}}$$

Έτσι έχουμε την γενική λύση του προβλήματος στην μορφή

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha(1+\sigma)}{12\pi(1-\sigma)}\,\mathbf{grad}\int\frac{T'-T_0}{r}\,dV', \tag{1}$$

όπου $T' \equiv T(x', y', z')$.

Αν μια περιορισμένη ποσότητα θερμότητας q εμπλέκεται μέσα σε ένα πολύ μικρό όγκο στην αρχή, η διανομή θερμοκρασίας μπορεί να γραφτεί $T - T_0 = (q/C)\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, όπου C είναι η ακριβής θερμότητα του αντικειμένου. Το ολοκλήρωμα στην (1) τότε είναι q/Cr, και η παραμόρφωση δίνεται από

$$\mathbf{u} = \frac{\alpha(1+\sigma)q}{12\pi(1-\sigma)C}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9. Βρείτε τις εξισώσεις της ισορροπίας για ένα ισοτροπικό σώμα (υπό την απουσία σωματικών δυνάμεων) ως προς τις συνιστώσες του τανυστή τάσης.

ΛΥΣΗ. Το απαιτούμενο σύστημα εξισώσεων περιέχει τις τρείς εξισώσεις

$$\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0 \qquad (1)$$

και επίσης τις εξισώσεις που προκύπτουν από το γεγονός ότι οι τρείς διαφορετικές συνιστώσες u_{ik} δεν είναι ανεξάρτητες ποσότητες. Για να παράγουμε αυτές τις εξισώσεις, πρώτα γράφουμε στο σύστημα των διαφορικών σχέσεων που καλύπτονται από τις συνιστώσες του τανυστή u_{ik}. Βλέπουμε πως οι ποσότητες

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

καλύπτουν όμοια τις σχέσεις

$$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{lm}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial x_i \partial x_l}.$$

Εδώ είναι μόνο έξι ουσιαστικά διαφορετικές σχέσεις, δηλαδλη αυτές που απευθύνονται στις ακόλουθες τιμές των *i,k,l m*:1122,1133,2233,1123,2213,3312. Όλες αυτές οι τιμές μπορούν να αντληθούν αν η παραπάνω εξίσωση του τανυστή συνάπτει προς *l* and *m*:

$$\triangle u_{ik} + \frac{\partial^2 u_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i \partial x_l}. \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας εδώ u_{ik} ως προς σ_{ik} σύμφωνα με (5.12) και χρησιμοποιώντας την (1), καταλήγουμε στις απαιτούμενες εξισώσεις:

$$(1+\sigma)\triangle\sigma_{ik} + \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \qquad (3)$$

Αυτές οι εξισώσεις συνεχίζουν να ισχύουν και στην παρουσία σταθερών εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα.

Συνάπτοντας την εξίσωση (3) σε σχέση με τα προσφύματα *i* και *k,* βρίσκουμε πως η $\triangle\sigma_{ll} = 0$, i.e. σ_{ll} είναι μια αρμονική συνάρτηση. Παίρνοντας το Λαπλασιανό της εξίσωσης (3), τότε βρίσκουμε ότι $\triangle\triangle\sigma_{ik} = 0$, δηλ. οι συνιστώσες σ_{ik} είναι ετεροαρμονικές συναρτήσεις. Αυτά τα αποτελέσματα επακολουθούν επίσης από (7.6) και (7.7), αφού σ_{ik} και u_{ik} έχουν γραμμική σχέση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10. Εκφράστε το γενικό ολοκλήρωμα των εξισώσεων της ισορροπίας (υπό την απουσία σωματικών δυνάμεων) ως ένα αυθαίρετο ετεροαρμονικό διάνυσμα. (B. G. Galerkin 1930).

ΛΥΣΗ. Είναι φυσιολογικό να ψάξουμε μια λύση της εξίσωσης (7.4) στην μορφή

$$\mathbf{u} = \triangle\mathbf{f} + A\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{f}.$$

Οπότε $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = (1+A)\,\mathrm{div}\,\triangle\mathbf{f}$. αντικαθιστώντας στην (7.4), έχουμε

$$(1-2\sigma)\triangle\triangle\mathbf{f} + [2(1-\sigma)A + 1]\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\triangle\mathbf{f} = 0.$$

Από αυτό βλέπουμε ότι, αν **f** είναι ένα αυθαίρετο ετεροαρμονικό διάνυσμα ($\triangle\triangle\mathbf{f} = 0$), τότε

$$\mathbf{u} = \triangle\mathbf{f} - \frac{1}{2(1-\sigma)}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{f}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11. Εκφράστε τις τάσεις σ_{rr}, $\sigma_{\phi\phi}$, $\sigma_{r\phi}$ για μια επίπεδη παραμόρφωση (σε πολικές συντεταγμένες r,φ) σαν παράγωγα της λειτουργίας της τάσης.

ΛΥΣΗ. Εφόσον οι απαιτούμενες παραστάσεις δεν μπορούν να εξαρτώνται στην επιλογή της αρχικής γραμμής του *Φ*, δεν περιέχουν το *Φ*. επομένως μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής: μεταμορφώνουμε τα Καρτεσιανά παράγωγα (7.10) σε παράγωγα των *r*, *Φ* και χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα ώστε $\sigma_{rr} = (\sigma_{xx})_{\phi=0}, \sigma_{\phi\phi} = (\sigma_{yy})_{\phi=0}, \sigma_{r\phi} = (\sigma_{xy})_{\phi=0}$, η γωνία *Φ* μετράται από τον άξονα του x. Οπότε

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\phi^2}, \qquad \sigma_{\phi\phi} = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}, \qquad \sigma_{r\phi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\phi}\right).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12. Υπολογίστε την διανομή τάσης σε ένα άπειρο ελαστικό αντικείμενο, έχοντας μια σφαιρική κοιλότητα και υποβαλλόμενο σε ομοιογενή παραμόρφωση προς το άπειρο.

ΛΥΣΗ. Μια γενική ομοιογενής παραμόρφωση μπορεί να παρασταθεί σαν ένας συνδυασμός μιας ομοιογενούς υδροστατικής επέκτασης (ή συμπίεσης) και μιας ομοιογενούς διάτμησης. Το πρώτο έχει αναλυθεί στο Πρόβλημα 2 και έτσι μας μένει μόνο να σκεφτούμε την διάτμηση.
Ας θεωρήσουμε πως $\sigma_{ik}^{(0)}$ είναι ένα ομοιογενές πεδίο τάσης που θα συναντούσαμε σε όλους τους χώρους αν δεν υπήρχε η κοιλότητα: σε μια καθαρή διάτμηση $\sigma_{ii}^{(0)}$. Το αντίστοιχο διάνυσμα μετατόπισης ορίζεται από $\mathbf{u}^{(0)}$, και ψάχνουμε την λύση στην μορφή $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)}$, όπου η παράσταση $\mathbf{u}^{(1)}$ που προκύπτει από την παρουσία της κοιλότητας είναι μηδέν στο άπειρο.

Κάθε λύση της ετεροαρμονικής εξίσωσης μπορεί να γραφτεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός κεντρικών συμμετρικών επιλύσεων και των παραγώγων τους σε διάφορες σειρών. Οπότε, η πιο γενική μορφή ετεροαρμονικού διανύσματος $\mathbf{u}^{(1)}$ που εξαρτάται μόνο στις συνιστώσες στου σταθερού τανυστή $\sigma_{ik}^{(0)}$ ως παράμετροι και τείνει προς το άπειρο, είναι

$$u_i^{(1)} = A\sigma_{ik}^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) + B\sigma_{kl}^{(0)}\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}\left(\frac{1}{r}\right) + C\sigma_{kl}^{(0)}\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}r. \tag{1}$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την παράσταση στην εξίσωση (7.4), βρίσκουμε

$$(1-2\sigma)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} = [2(1-2\sigma)C + (A+2C)]\sigma_{kl}^{(0)}\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}\frac{1}{r} = 0,$$

όπου $A = -4C(1-\sigma)$. Δυο περεταίρω σχέσεις μεταξύ των σταθερών A,B,C υπολογίζονται από τις συνθήκες που επικρατούν στην επιφάνεια της κοιλότητας: $(\sigma_{ik}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(1)})n_k = 0$ for $r = R$ (όπου R είναι η ακτίνα της κοιλότητας, η αφετηρία βρίσκεται στο κέντρο της, και **n** είναι μια διανυσματική μονάδα παράλληλη προς **r**). Ένας κατά κάποιο τρόπο υπολογισμός μήκους, χρησιμοποιώντας την (1), μας δίνει τα εξής:

$$B = CR^2/5, \qquad C = 5R^3(1+\sigma)/2E(7-5\sigma).$$

η τελική παράσταση για την διανομή τάσης είναι

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)}&\left\{1 + \frac{5(1-2\sigma)}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \frac{3}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^5\right\} + \\ &+ \frac{15}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left\{\sigma - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right\}(\sigma_{il}^{(0)}n_k n_l + \sigma_{kl}^{(0)}n_i n_l) + \\ &+ \frac{15}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left\{-5 + 7\left(\frac{R}{r}\right)^2\right\}\sigma_{lm}^{(0)}n_l n_m n_i n_k + \\ &+ \frac{15}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left\{1 - 2\sigma - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right\}\delta_{ik}\sigma_{lm}^{(0)}n_l n_m.\end{aligned}$$

Για να αποκομίσουμε την διανομή τάσης για αυθαίρετο $\sigma_{ik}^{(0)}$(όχι καθαρή διάτμηση), $\sigma_{ik}^{(0)}$σ' αυτήν την παράσταση πρέπει να αντικατασταθεί από $\sigma_{ik}^{(0)}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}^{(0)}$και η παράσταση

$$\tfrac{1}{3}\sigma_{ll}^{(0)}\left[\delta_{ik}+\frac{R^3}{2r^3}(\delta_{ik}-3n_in_k)\right]$$

που αντιστοιχεί σε μια παραμόρφωση ομοιογενή προς το άπειρο (Πρόβλημα 2) πρέπει να προστεθεί. Εδώ μπορούμε να γράψουμε την γενική φόρμουλα για τις τάσεις στην επιφάνεια της κοιλότητας:

$$\sigma_{ik}=\frac{15}{7-5\sigma}\Big\{(1-\sigma)(\sigma_{ik}^{(0)}-\sigma_{il}^{(0)}n_ln_k-\sigma_{kl}^{(0)}n_ln_i)+$$

$$+\sigma_{lm}^{(0)}n_ln_mn_in_k-\sigma\sigma_{lm}^{(0)}n_ln_m\delta_{ik}+\frac{5\sigma-1}{10}\sigma_{ll}^{(0)}(\delta_{ik}-n_in_k)\Big\}.$$

Κοντά στην κοιλότητα οι τάσεις υπερβαίνουν κατά πολύ τις τάσεις στο άπειρο, αλλά αυτό συμβαίνει μόνο για μια μικρή απόσταση (η *συγκέντρωση των τάσεων - concentration of stresses).* Για παράδειγμα, αν το αντικείμενο υποβληθεί σε μια ομοιογενή επιμήκυνση (μόνο $\sigma_{zz}^{(0)}$ διαφορετικό του μηδενός), η μεγαλύτερη τάση εμφανίζεται στον ''ισημερινό'' της κοιλότητας, όπου

$$\sigma_{zz}=\frac{27-15\sigma}{2(7-5\sigma)}\sigma_{zz}^{(0)}.$$

§8. Ισορροπία ενός ελαστικού σώματος δεσμευμένο από ένα επίπεδο (Equilibrium of an elastic medium bounded by a plane)

Ας σκεφτούμε ένα ελαστικό σώμα που καταλαμβάνει μισό-χώρο, δηλαδή, δεμένο από την μία πλευρά με ένα άπειρο επίπεδο, και ας υπολογίσουμε την παραμόρφωση του σώματος που προκαλείται από δυνάμεις ασκούμενες στις ελεύθερες του επιφάνειες.† Η διανομή αυτών των δυνάμεων πρέπει να καλύπτουν μόνο μία κατάσταση: πρέπει να τείνουν προς το άπειρο με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχει παραμόρφωση προς το άπειρο. Σ' αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις της ισορροπίας μπορούν να ενοποιηθούν σε μια γενική μορφή (J.Boussinesq 1885).

Η εξίσωση της ισορροπίας (7.4) ισχύει για τον χώρο που καταλαμβάνεται από το σώμα

$$\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + (1-2\sigma)\triangle\mathbf{u} = 0. \tag{8.1}$$

Ψάχνουμε μια λύση αυτής της εξίσωσης στην μορφή

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{grad}\,\phi \tag{8.2}$$

όπου Φ είναι κάποια κλιμάκωση και το διάνυσμα **f** καλύπτει τις Λαπλασιανές εξισώσεις:

$$\triangle\mathbf{f} = 0 \tag{8.3}$$

Αντικαθιστώντας την (8.2) στην (8.1), καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση για *Φ*:

$$2(1-\sigma)\triangle\phi = -\mathrm{div}\,\mathbf{f}. \tag{8.4}$$

Παίρνουμε την ελεύθερη επιφάνεια του ελαστικού σώματος ως επίπεδο - *xy*; το σώμα βρίσκεται σε z›0. Γράφουμε τις συναρτήσεις f_x και f_y σαν τα παράγωγα – *z* κάποιων συναρτήσεων g_x και g_y:

$$f_x = \partial g_x/\partial z, \qquad f_y = \partial g_y/\partial z. \tag{8.5}$$

Αφού f_x και f_y είναι αρμονικές συναρτήσεις, μπορούμε να επιλέξουμε την συνάρτηση g_x και g_y για να καλύψουν την Λαπλασιανή εξίσωση:

$$\triangle g_x = 0, \qquad \triangle g_y = 0. \tag{8.6}$$

Η εξίσωση (8.4) τότε γίνεται

$$2(1-\sigma)\triangle\phi = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + f_z\right).$$

Αφού g_x, g_y και f_z είναι αρμονικές συναρτήσεις, βλέπουμε μια συνάρτηση *Φ* που καλύπτει αυτήν την εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως

$$\phi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}\left(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + \psi, \tag{8.7}$$

† Η πιο άμεση και συνηθισμένη μέθοδος επίλυσης αυτού του προβλήματος είναι η χρησιμοποίηση της μεθόδου Fourier στην εξίσωση (8.1). Σε αυτήν την περίπτωση πάντως, πρέπει να υπολογιστούν μερικά πολύπλοκα ολοκληρώματα. Η μέθοδος που δίνεται παρακάτω είναι βασισμένη σε έναν αριθμό επινοήσεων, αλλά οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι.

όπου ψ είναι πάλι μια αρμονική συνάρτηση:

$$\triangle\psi = 0. \tag{8.8}$$

Οπότε η δυσκολία του να υπολογίσουμε την μετατόνιση **u** μειώνεται στο να βρούμε τις συναρτήσεις $g_x, g_y, f_z, \psi,$ οι οποίες καλύπτουν την εξίσωση του Laplace.

Τώρα θα γράψουμε τις συνθήκες δέσμευσης οι οποίες πρέπει να καλύπτονται στην ελεύθερη επιφάνεια του σώματος (το επίπεδο z=0). Εφόσον η μονάδα εξωτερικού κανονικού διανύσματος **n** βρίσκεται στην αντίθετη κατεύθυνση – z, επακολουθεί από την γενική φόρμουλα (2.9) ότι $\sigma_{iz} = -P_i$. Χρησιμοποιώντας για σ_{ik} την γενική παράσταση (5.11) και ορίζοντας τις συνιστώσες του διανύσματος **u** ως βοηθητικές ποσότητες g_x, g_y, f_z και ψ, αποκομίζουμε μετά από έναν απλό υπολογισμό τις περιοριστικές – δεσμευτικές συνθήκες

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\right]_{z=0} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)+2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\right]_{z=0} \\
&\qquad = -2(1+\sigma)P_x/E, \\
&\left[\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}\right]_{z=0} + \left[\frac{\partial}{\partial \upsilon}\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)+2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\right]_{z=0} \\
&\qquad = -2(1+\sigma)P_y/E,
\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left\{f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)+2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\right]_{z=0} = -2(1+\sigma)P_z/E. \tag{8.10}$$

Οι συνιστώσες P_x, P_y, P_z των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στην επιφάνεια είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων *x* και *y,* και τείνουν προς το άπειρο.

Η φόρμουλα με την οποία οι βοηθητικές τιμές g_x, g_y, f_z και ψ είχαν οριστεί, δεν τις προσδιορίζει απαράμιλλα. Γι' αυτό μπορούμε επιβάλουμε μια επιπρόσθετη αυθαίρετη συνθήκη σε αυτές τις ποσότητες, και είναι βολικό να εξαφανίσουμε την ποσότητα στις παρενθέσεις της (8.9) :†

$$(1-2\sigma)f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)+4(1-\sigma)\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \tag{8.11}$$

Οι συνθήκες (8.9) γίνονται απλά

$$\left[\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\right]_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_x, \quad \left[\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}\right]_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_y. \tag{8.12}$$

Οι εξισώσεις (8.10)-(8.12) φτάνουν για να καθορίσουν πλήρως τις αρμονικές συναρτήσεις g_x, g_y, f_z και ψ.

Για να κάνουμε τα πράγματα πιο απλά, πρέπει να σκεφτούμε την περίπτωση όπου η ελεύθερη επιφάνεια ενός ελαστικού ‘μισού-χώρου’ οφείλεται σε μια συγκεντρωμένη δύναμη **F**, δηλ. μία η οποία ασκείται πάνω σε μια επιφάνεια τόσο μικρή που μπορεί να θεωρηθεί ως σημείο. Το αποτέλεσμα αυτής της δύναμης είναι το ίδιο με αυτό των δυνάμεων επιφάνειας που δίνονται από $\mathbf{P} = \mathbf{F}\delta(x)\delta(y)$, με την αρχή-αφετηρία να βρίσκεται στο σημείο άσκησης της δύναμης. Αν γνωρίζουμε την λύση για μια συγκεντρωμένη δύναμη, μπορούμε αμέσως να βρούμε τη λύση για κάθε διανομή δύναμης $\mathbf{P}(x, y)$. Για, αν

$$u_i = G_{ik}(x, y, z) F_k \tag{8.13}$$

είναι η μετατόπιση λόγω της δράσης μιας συγκεντρωμένης δύναμης **F** ασκούμενη στην αφετηρία, τότε η μετατόπιση προκαλούμενη από τις δυνάμεις $\mathbf{P}(x, y)$ μας δίνεται από το ολοκλήρωμα††

$$u_i = \iint G_{ik}(x - x', y - y', z)\ P_k(x', y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \tag{8.14}$$

Ξέρουμε από την θεωρία δυναμικής ότι μια αρμονική συνάρτηση f η οποία είναι μηδέν στο άπειρο έχει ένα συγκεκριμένο κανονικό παράγωγο $\partial f/\partial z$ στο επίπεδο z=0 δίνεται από την φόρμουλα

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\iint\left[\frac{\partial f(x', y', z)}{\partial z}\right]_{z=0}\frac{\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'}{r},$$

όπου

$$r = \sqrt{\{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2\}}.$$

Αφού οι ποσότητες $\partial g_x/\partial z$, $\partial g_y/\partial z$και αυτές εντός των παρενθέσεων της εξίσωσης (8.10) καλύπτουν την εξίσωση του Laplace, ενώ οι εξισώσεις (8.10) και (8.12) καθορίζουν τις τιμές των απλών – κανονικών παραγώγων στο επίπεδο z=0, έχουμε

$$f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\iint\frac{P_z(x', y')}{r}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

$$= \frac{1+\sigma}{\pi E}\cdot\frac{F_z}{r}, \tag{8.15}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\cdot\frac{F_x}{r}, \qquad \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\cdot\frac{F_y}{r}, \tag{8.16}$$

Όπου τώρα $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$.

† Δεν θα αποδείξουμε εδώ ότι αυτή η κατάσταση μπορεί να επιβληθεί; αυτό είναι επακόλουθο της απουσίας αντίφασης στο αποτέλεσμα.

†† Με μαθηματικούς όρους, G_{ik} είναι ο τανυστής Green όσον αφορά τις εξισώσεις της ισορροπίας ενός ημί-άπειρου αντικειμένου.

Οι παραστάσεις για τις συνιστώσες του απαιτούμενου διανύσματος **u** συμπεριλαμβάνει τα παράγωγα των g_x, g_y σε σχέση με to x, y, z, αλλά όχι g_x, g_y Για να υπολογίσουμε $\partial g_x/\partial x, \partial g_y/\partial y$ διαφοροποιούμε τις εξισώσεις (8.16) ως προς x και y αντίστοιχα:

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial x \partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E}\cdot\frac{F_x x}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 g_y}{\partial y \partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E}\cdot\frac{F_y y}{r^3}.$$

Τώρα, ολοκληρώνοντας προς z από ∞ έως z, έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_x}{\partial x} &= \frac{1+\sigma}{\pi E}\cdot\frac{F_x x}{r(r+z)}, \\ \frac{\partial g_y}{\partial y} &= \frac{1+\sigma}{\pi E}\cdot\frac{F_y y}{r(r+z)}. \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

Δεν θα σταματήσουμε την ολοκλήρωση των υπόλοιπων υπολογισμών, οι οποίοι είναι στοιχειώδεις αλλά κοπιαστικοί. Βρίσκουμε τα f_z και $\partial\psi/\partial z$ από τις εξισώσεις (8.11), (8.15) και (8.17). γνωρίζοντας το $\partial\psi/\partial z$ είναι εύκολο να υπολογίσουμε τα $\partial\psi/\partial x$ και $\partial\psi/\partial y$ολοκληρώνοντας ως προς z και στην συνέχεια διαφοροποιώντας ως προς x και y. Έτσι αποκομίζουμε όλες τις ποσότητες που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε το διάνυσμα μετατόπισης από (8.2), (8.5) και (8.7). οι παρακάτω είναι οι τελικές φόρμουλες

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)x}{r(r+z)}\right]F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)}F_x + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]x}{r^3(r+z)^2}(xF_x+yF_y)\right\}, \\ u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)y}{r(r+z)}\right]F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)}F_y + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]y}{r^3(r+z)^2}(xF_x+yF_y)\right\}, \\ u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{2(1-\sigma)}{r} + \frac{z^2}{r^3}\right]F_z + \left[\frac{1-2\sigma}{r(r+z)} + \frac{z}{r^3}\right](xF_x+yF_y)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

Συγκεκριμένα, η μετατόπιση σημείων στην επιφάνεια του σώματος μας δίνεται βάζοντας z=0:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\cdot\frac{1}{r}\left\{-\frac{(1-2\sigma)x}{r}F_z + 2(1-\sigma)F_x + \frac{2\sigma x}{r^2}(xF_x+yF_y)\right\}, \\ u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\cdot\frac{1}{r}\left\{-\frac{(1-2\sigma)y}{r}F_z + 2(1-\sigma)F_y + \frac{2\sigma y}{r^2}(xF_x+yF_y)\right\}, \\ u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\cdot\frac{1}{r}\left\{2(1-\sigma)F_z + (1-2\sigma)\frac{1}{r}(xF_x+yF_y)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

---

† Το αντίστοιχο πρόβλημα για ένα αυθαίρετο άπειρο ισοτροπικό αντικείμενο έχει επιλυθεί από τον I. M. Lifshitz και (*Zhurnal eksperimental'noĭ i teoreticheskoĭ fiziki* **17**, 783, 1947).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Καθορίστε την παραμόρφωση ενός άπειρου ελαστικού σώματος όταν μια δύναμη F ασκείται σε μια μικρή περιοχή μέσα του (W. Thomson 1848).†

ΛΥΣΗ .If we consider the deformation at distances r which are large compared with the dimension of the region where the force is applied, we can suppose that the force is applied at a point. The equation of equilibrium is (cf. (7.2)).
Αν λάβουμε υπ' όψιν την παραμόρφωση σε αποστάσεις r οι οποίες είναι μεγάλες συγκριτικά με την μικρή περιοχή όπου ασκείται η δύναμη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη ασκείται σε ένα σημείο. Η εξίσωση της ισορροπίας είναι (cf. (7.2)).

$$\triangle \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}\,\mathbf{F}\delta(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

Όπου $\delta(\mathbf{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ είναι η αφετηρία που βρίσκεται στο σημείο όπου ασκείται η δύναμη. Ψάχνουμε την λύση στην μορφή $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$, όπου $\mathbf{u}_0$ καλύπτει την εξίσωση τύπου - Poisson

$$\triangle \mathbf{u}_0 = -\frac{2(1+\sigma)}{E}\,\mathbf{F}\delta(\mathbf{r}). \qquad (2)$$

Στην συνέχεια έχουμε για $\mathbf{u}_1$ την εξίσωση

$$\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_1 + (1-2\sigma)\triangle\mathbf{u}_1 = -\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_0. \qquad (3)$$

Η λύση της εξίσωσης (2) η οποία τείνει προς το άπειρο είναι $\mathbf{u}_0 = (1+\sigma)\mathbf{F}/2\pi E r$.
Παίρνοντας την καμπύλη της εξίσωσης (3), έχουμε $\triangle\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_1 = 0$. Στο άπειρο πρέπει να έχουμε $\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_1 = 0$. Αλλά μια αρμονική συνάρτηση σε όλο τον χώρο και που είναι μηδέν στο άπειρο, πρέπει να είναι όμοια μηδέν. Άρα $\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_1 = 0$, και έτσι μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{u}_1 = \mathbf{grad}\,\phi$. Από την (3) αποκομίζουμε $\mathbf{grad}\,\{2(1-\sigma)\triangle\phi + \mathrm{div}\,\mathbf{u}_0\} = 0$.
Οπότε επακολουθεί ότι η ποσότητα εντός της παρένθεσης είναι σταθερή, και πρέπει να είναι μηδέν στο άπειρο; γι' αυτό έχουμε σε όλο τον χώρο

$$\triangle\phi = -\frac{\mathrm{div}\,\mathbf{u}_0}{2(1-\sigma)} = -\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Αν ψ είναι μια λύση της εξίσωσης $\triangle\psi = 1/r$, τότε

$$\phi = -\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{grad}\,\psi.$$

Παίρνοντας την λύση $\psi = \frac{1}{2}r$, η οποία δεν έχει ιδιομορφίες, αποκομίζουμε

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{grad}\,\phi = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}\,\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{F}}{r},$$

Όπου n είναι μια μονάδα διανύσματος παράλληλη της θέσης διανύσματος **r**. Τα τελικά αποτελέσματα είναι

$$\mathbf{u} = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}\cdot\frac{(3-4\sigma)\mathbf{F} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{F})}{r}.$$

Τοποθετώντας αυτήν την φόρμουλα στην μορφή (8.13) βρίσκουμε τον τανυστή Green για τις εξισώσεις της ισορροπίας για ένα άπειρο ισοτροπικό αντικείμενο:†

$$G_{ik} = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}\left[(3-4\sigma)\delta_{ik} + n_i n_k\right]\frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_k}\right].$$

†Το γεγονός ότι οι συνιστώσες του τανυστή G_{ik} είναι ομοιογενείς συναρτήσεις πρώτου-βαθμού (πρώτης σειράς) των συντεταγμένων x, y, z, είναι αποδεδειγμένο από φιλονικίες ομοιογένειας εφαρμοζόμενες στην εξίσωση (1), όπου το αριστερό μέρος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δεύτερων παραγώγων των συνιστωσών του διανύσματος **u**, και το δεξί μέρος είναι μια ομοιογενής συνάρτηση τρίτου βαθμού-σειράς $(\delta(a\mathbf{r}) = a^{-3}\delta(\mathbf{r}))$. Αυτό συνεχίζει να ισχύει στην γενική περίπτωση ενός αυθαίρετου ισοτροπικού σώματος.

§9. Στερεά σώματα σε επαφή (Solid bodies in contact)

Ας υποθέσουμε ότι δύο στερεά σώματα βρίσκονται σε επαφή, σε ένα σημείο το οποίο δεν είναι ένα ιδιόμορφο σημείο σε κάθε μια από τις επιφάνειες. Η (Fig. 1a) δείχνει μια διατομή των δύο επιφανειών κοντά στο σημείο επαφής 0. Οι επιφάνειες έχουν ένα κοινό εφαπτόμενο επίπεδο στο 0, το οποίο λαμβάνουμε ως επίπεδο- *xy*. Θεωρούμε την θετική κατεύθυνση-z πως βρίσκεται μέσα οποιοδήποτε από τα δύο σώματα (δηλ. σε αντίθετες κατευθύνσεις για τα δύο σώματα) και ορίζουμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες ως z και z'.

Κοντά σε ένα σημείο κανονικής επαφής με το επίπεδο- *xy*, η εξίσωση της επιφάνειας μπορεί να γραφτεί

$$z = \kappa_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \tag{9.1}$$

όπου η άθροιση είναι κατανοητή για τις τιμές 1,2 των επαναλαμβανόμενων παραγώγων *α, β,* ($x_1 = x$, $x_2 = y$) και ο$\kappa_{\alpha\beta}$ ……είναι συμμετρικός τανυστής της δεύτερης σειράς, ο οποίος χαρακτηρίζει την καμπύλωση της επιφάνειας: οι κύριες αξίες του τανυστή $\kappa_{\alpha\beta}$ είναι $1/2R_1$ και $1/2R_2$ όπου R_1 και R_2 είναι οι κύριες ακτίνες της καμπύλωσης της επιφάνειας στο σημείο επαφής. Μια παρόμοια σχέση για την επιφάνεια του άλλου σώματος κοντά στο σημείο επαφής μπορεί να γραφτεί.

$$z' = \kappa'_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \tag{9.2}$$

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι τα δύο αυτά σώματα πιέζονται μεταξύ τους από ασκούμενες δυνάμεις, και φτάνουν σε μια μικρή απόσταση *h*.† Τότε μια παραμόρφωση προκύπτει κοντά στο αρχικό σημείο επαφής, και τα δύο σώματα βρίσκονται σε επαφή σε ένα μικρό αλλά υπολογίσιμο μέρος των επιφανειών τους. u_zκαι u'_z είναι οι συνιστώσες (κατά μήκος του άξονα z και z' αντίστοιχα) των αντίστοιχων διανυσμάτων μετατόπισης για σημεία στις επιφάνειες των δύο σωμάτων. Οι διακεκομμένες γραμμές στην Fig. 1b μας δείχνουν τις επιφάνειες, όπως θα ήταν υπό την απουσία οποιασδήποτε παραμόρφωσης, ενώ οι μη διακεκομμένες γραμμές μας δείχνουν τις επιφάνειες των παραμορφωμένων σωμάτων; Τα γράμματα z και z' υποδηλώνουν τις αποστάσεις μεταξύ των εξισώσεων (9.1) και (9.2). Φαίνεται αμέσως από την εικόνα πως η εξίσωση

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) = h,$$

ή

$$(\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h, \tag{9.3}$$

υπάρχει παντού στην περιοχή επαφής. Σε σημεία έξω από την περιοχή επαφής έχουμε

$$z + z' + u_z + u'_z < h.$$

†Αυτό το πρόβλημα επαφής στην θεωρία ελαστικότητας λύθηκε πρώτα από τον H. Hertz (1882).

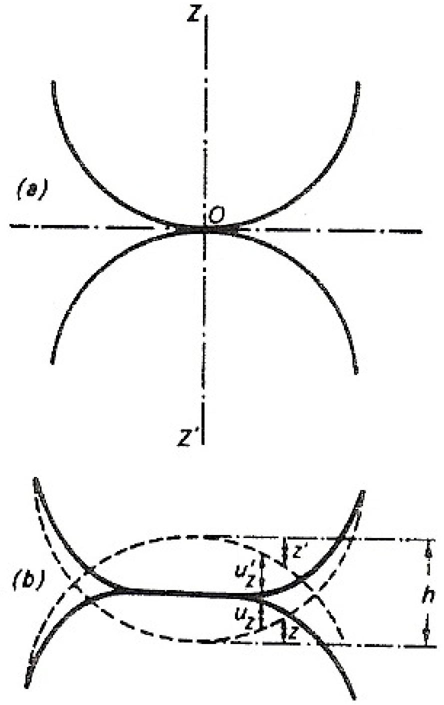

FIG. 1

Επιλέγουμε τους άξονες x και y ως κύριους άξονες του τανυστή $\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}$. Ορίζοντας τις κύριες αξίες αυτού με A και B, μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (9.3) ως

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h. \tag{9.4}$$

Οι ποσότητες A και B σχετίζονται με την ακτίνες (radii) της καμπυλότητας R_1, R_2 και R'_1, R'_2, με μια φόρμουλα η οποία θα δοθεί χωρίς απόδειξη

$$2(A+B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2},$$

$$4(A-B)^2 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2}\right)^2 + 2\cos 2\phi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2}\right),$$

όπου Φ είναι η γωνία μεταξύ των κανονικών τμημάτων των οποίων η ακτίνες καμπυλότητας είναι R_1 και R'_1. Η ακτίνες καμπυλότητας θεωρούνται θετικές αν το κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται μέσα στο ενδιαφερόμενο σώμα, και αρνητικές για την αντίθετη περίπτωση

Ορίζουμε από $P_z(x, y)$ την πίεση μεταξύ των δύο παραμορφωμένων σωμάτων σε σημεία εντός του πεδίου επαφής; φυσικά έξω από το πεδίο επαφής $P_z = 0$. Για να καθορίσουμε την σχέση μεταξύ P_z και των διανυσμάτων u_z, u'_z, μπορούμε με αρκετή ακρίβεια να θεωρήσουμε τις επιφάνειες ως επίπεδες-σκέτες (plane) και να χρησιμοποιήσουμε την φόρμουλα που βρήκαμε στην §8. Σύμφωνα με την τρίτη φόρμουλα (8.19) and (8.14), η μετατόπιση u_z υπό την δράση φυσιολογικών δυνάμεων

$P_z(x, y)$ μας δίνεται από

$$\left.\begin{aligned} u_z &= \frac{1-\sigma^2}{\pi E}\iint \frac{P_z(x', y')}{r}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y', \\ u'_z &= \frac{1-\sigma'^2}{\pi E'}\iint \frac{P_z(x', y')}{r}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y', \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

όπου σ, σ' and E, E' είναι ο λόγος Poisson και το μέτρο ελαστικότητας Young των δύο σωμάτων. Εφόσον $P_z = 0$

Έξω από την περιοχή επαφής, η ενοποίηση επεκτείνεται μόνο σε αυτήν την περιοχή. Να σημειώσουμε ότι, από αυτήν την φόρμουλα, αναλογία u_z/u'_z είναι σταθερή:

$$u_z/u'_z = (1-\sigma^2)E'/(1-\sigma'^2)E. \tag{9.6}$$

Οι σχέσεις (9.4) και (9.6) μαζί μας δίνουν τις μετατοπίσεις u_z, u'_z σε κάθε σημείο του πεδίου επαφής (παρότι (9.5) στην (9.6), φυσικά, σχετίζεται επίσης με σημεία έξω από το πεδίο επαφής).

Αντικαθιστώντας την παράσταση (9.5) στην (9.4), έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\sigma^2}{E}+\frac{1-\sigma'^2}{E'}\right)\iint \frac{P_z(x', y')}{r}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' = h - Ax^2 - By^2. \tag{9.7}$$

Αυτή η εξίσωση παραγώγων καθορίζει την διανομή της πίεσης P_z για την περιοχή της επαφής. Η λύση της μπορεί να βρεθεί σε αναλογία με τα ακόλουθα αποτελέσματα της θεωρίας της δυναμικής (potential theory). Η ιδέα χρησιμοποίησης αυτής της αναλογίας προκύπτει ως εξής: πρώτον, το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέρος της εξίσωσης (9.7) προέρχεται από έναν τύπο που συχνά συναντάμε στην θεωρία της δυναμικής, όπου τέτοια ολοκληρώματα μας δίνουν την δυναμική μιας αλλαγής διανομής; δεύτερον, η δυναμική μέσα σε ένα ομοιόμορφα αλλαγμένο ελλειψοειδές είναι μια συνάρτηση δεύτερου βαθμού των συντεταγμένων.

Αν το ελλειψοειδές $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ αλλάξει μεταβληθεί ομοιόμορφα (με μεταβολή πυκνότητας όγκου *p*), η δυναμική στο ελλειψοειδές μας δίνεται από

$$\phi(x, y, z) = \pi\rho abc\int_0^\infty \left\{1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}-\frac{z^2}{c^2+\xi}\right\}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)\}}}$$

Στην περιοριστική περίπτωση ενός ελλειψοειδούς το οποίο κατά πολύ πάρει επίπεδο σχήμα στην κατεύθυνση-z $(c \to 0)$, έχουμε

$$\phi(x, y) = \pi\rho abc\int_0^\infty \left\{1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}\right\}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi\}}}$$

Περνώντας στο όριο $c \to 0$ πρέπει, φυσικά, να βάλουμε z=0 για σημεία εντός του ελλειψοειδούς. Η δυναμική *Φ(x, y, z)* , μπορεί επίσης να γραφτεί ως

$$\phi(x, y, z) = \iiint \frac{\rho\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}}},$$

όπου η ολοκλήρωση είναι προς τον όγκο του ελλειψοειδούς. Περνώντας στο όριο $c \to 0$, πρέπει να βάλουμε $z = z' = 0$ στην ρίζα; ολοκληρώνοντας προς z' μεταξύ των ορίων

$$\pm c\sqrt{\{1-(x'^2/a^2)-(y'^2/b^2)\}},$$

έχουμε

$$\phi(x, y) = 2\rho c \iint \frac{\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'}{r} \sqrt{\left(1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}\right)},$$

όπου

$$r = \sqrt{\{(x-x')^2+(y-y')^2\}},$$

και το ολοκλήρωμα είναι για την περιοχή εντός του ελλειψοειδούς

$$x'^2/a^2 + y'^2/b^2 = 1.$$

Εξισώνοντας τις δύο παραστάσεις για *Φ(x, y),* αποκομίζουμε την ταυτότητα

$$\iint \frac{\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'}{r} \sqrt{\left(1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}\right)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi ab \int_0^\infty \left(1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}\right) \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi\}}}.$$

Συγκρίνοντας αυτήν την σχέση με την εξίσωση (9.7), βλέπουμε ότι τα δεξιά τους μέρη είναι συναρτήσεις δευτέρου βαθμού των x and y της ίδιας μορφής, και τα αριστερά τους μέρη είναι ολοκληρώματα της ίδιας μορφής. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η περιοχή-πεδίο επαφής (το πεδίο επαφής στην (9.7)) περιορίζεται από μια έλλειψη της μορφής

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

και ότι η συνάρτηση $P_z(x, y)$ πρέπει να είναι της μορφής

$$P_z(x, y) = \text{constant} \times \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Παίρνοντας την σταθερή (constant) έτσι ώστε το ολοκλήρωμα $\iint P_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ στην περιοχή επαφής να είναι ίσο με την καθορισμένη συνολική δύναμη F η φέρνει τα δύο σώματα κοντά, αποκομίζουμε

$$P_z(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}. \tag{9.10}$$

Αυτή η φόρμουλα μας δίνει την διανομή πίεσης για την επιφάνεια της περιοχής επαφής. Να σημειώσουμε ότι η πίεση στο κέντρο αυτής της περιοχής είναι 3/2 φορές η μέση πίεση $F/\pi ab$.

Αντικαθιστώντας την (9.10) στην εξίσωση (9.7) και αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα που έχουμε ως αποτέλεσμα με την (9.8) έχουμε

$$\frac{FD}{\pi}\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}\right)\mathrm{d}\xi/\sqrt{\{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi\}}$$

$$= h - Ax^2 - By^2,$$

where

$$D=\frac{3}{4}\left(\frac{1-\sigma^2}{E}+\frac{1-\sigma'^2}{E'}\right).$$

Αυτή η εξίσωση πρέπει να παραμείνει ίδια για όλες τις τιμές των x και y μέσα στο ελλειψοειδές (9.9); οι συντελεστές των x και y και οι ελεύθεροι όροι πρέπει γι' αυτό να είναι ίσοι για κάθε αντίστοιχη πλευρά. Οπότε βρίσκουμε

$$h=\frac{FD}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi\}}}, \qquad (9.11)$$

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{FD}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{(a^2+\xi)\sqrt{\{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi\}}}\\ B&=\frac{FD}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{(b^2+\xi)\sqrt{\{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi\}}}\end{aligned}\right\} \qquad (9.12)$$

Οι εξισώσεις (9.12) καθορίζουν τους ημι-άξονες a and b της περιοχής επαφής από την δύναμη F (A και B είναι γνωστά ως συγκεκριμένα σώματα). Η σχέση (9.11) τότε μας δίνει την απόσταση προσέγγισης h σαν μια συνάρτηση της δύναμης F. Το δεξί μέρος αυτών των εξισώσεων περιέχει ελλειπτικά ολοκληρώματα.

Οπότε το πρόβλημα των σωμάτων σε επαφή μπορεί να θεωρηθεί ως λυμένο. Η μορφή των επιφανειών (δηλ. οι μετατοπίσεις u_z, u'_z) έξω από την περιοχή επαφής καθορίζεται από την ίδια φόρμουλα (9.5) και (9.10); οι τιμές των ολοκληρωμάτων μπορούν να βρεθούν αμέσως από την αναλογία με την δυναμική έξω από ένα αλλαγμένο ελλειψοειδές. Τέλος, η φόρμουλες της §8 μας επιτρέπουν επίσης, να υπολογίσουμε την παραμόρφωση σε διάφορα σημεία των σωμάτων (αλλά φυσικά, μόνο για αποστάσεις μικρές σχετικά με τις διαστάσεις των σωμάτων).

Ας εφαρμόσουμε αυτές τις φόρμουλες στην περίπτωση επαφής ανάμεσα σε δύο σφαίρες με ακτίνες R and R'. Εδώ A=B=1/2R $+1/2R'$. Είναι ξεκάθαρο από την συμμετρία ότι a=b, δηλ. το πεδίο επαφής είναι ένας κύκλος. Από την (9.12) βρίσκουμε ότι η ακτίνα a αυτού του κύκλου είναι

$$a=F^{1/3}\{DRR'/(R+R')\}^{1/3}. \qquad (9.13)$$

το h σ' αυτήν την περίπτωση είναι διαφορετικό μεταξύ του αθροίσματος $R+R'$ και της απόστασης μεταξύ των κέντρων των σφαιρών. Από (9.10) αποκομίζουμε την παρακάτω σχέση μεταξύ F και h:

$$h = F^{2/3}\left[D^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right]^{1/3}. \tag{9.14}$$

Να σημειώσουμε ότι h είναι ανάλογο του $F^{2/3}$; αντίστροφα, η δύναμη F ποικίλει σαν $h^{3/2}$. Μπορούμε να γράψουμε επίσης την δυναμική ενέργεια U των σφαιρών που βρίσκονται σε επαφή. Αφού $-F = -\partial U/\partial h$ έχουμε

$$U = h^{5/2}\frac{2}{5D}\sqrt{\frac{RR'}{R+R'}}. \tag{9.15}$$

Τέλος, να αναφέρουμε ότι μια σχέση της μορφής $h = \text{constant}\times F^{2/3}$ ή $F = \text{constant}\times h^{3/2}$, δεν ισχύει μόνο για σφαιρικά αντικείμενα αλλά επίσης και για άλλα μετρήσιμα αντικείμενα βρισκόμενα σε επαφή. Αυτό διακρίνεται εύκολα από τις ομοιότητες. Αν κάνουμε την αντικατάσταση

$$a^2 \to \alpha a^2 \qquad b^2 \to \alpha b^2 \qquad F \to \alpha^{3/2}F$$

όπου α είναι μια αυθαίρετη σταθερή, οι εξισώσεις (9.12) παραμένουν απαράλλαχτες. Στην εξίσωση (9.11), η δεξιά πλευρά πολλαπλασιάζεται επί α, και έτσι το h πρέπει να αντικατασταθεί από αh αν αυτή η εξίσωση πρέπει να παραμείνει απαράλλαχτη. Άρα επακόλουθο είναι ότι F πρέπει να είναι ανάλογη του $h^{3/2}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Υπολογίστε τον χρόνο κατά τον οποίο δύο συγκρουόμενες ελαστικές σφαίρες παραμένουν σε επαφή.

ΛΥΣΗ. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο το κέντρο της μάζας των δύο σφαιρών βρίσκεται σε ακινησία, η ενέργεια πριν την σύγκρουση είναι ίση με την κινητική ενέργεια της σχετικής κίνησης /2 μv^2, όπου v είναι η σχετική ταχύτητα των συγκρουόμενων σφαιρών και $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ η μειωμένη τους μάζα. Κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης, η συνολική ενέργεια είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας, όπου μπορεί να γραφτεί 1/2μh^2 , και της δυναμικής ενέργειας (9.15). Από τον νόμο διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$\mu\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + kh^{5/2} = \mu v^2, \qquad k = \frac{4}{5D}\sqrt{\frac{RR'}{R+R'}}.$$

Η μέγιστη προσέγγιση h_0 των σφαιρών αντιστοιχεί στον χρόνο όταν η σχετική τους ταχύτητα h=0, και είναι $h_0 = (\mu/k)^{2/5} v^{4/5}$.

Ο χρόνος *t* κατά τον οποίο η σύγκρουση λαμβάνει χώρα (ποικίλει από 0 μέχρι h_0 και αντίστροφα) είναι

$$\tau = 2\int_0^{h_0} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{(v^2 - kh^{5/2}/\mu)}} = 2\left(\frac{\mu^2}{k^2 v}\right)^{1/5} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^{2/5})}},$$

ή

$$\tau = \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(2/5)}{5\Gamma(9/10)}\left(\frac{\mu^2}{k^2 v}\right)^{1/5} = 2{\cdot}94\left(\frac{\mu^2}{k^2 v}\right)^{1/5}.$$

Χρησιμοποιώντας την στατική φόρμουλα που αποκομίστηκε στο κείμενο επίλυσης αυτού του προβλήματος, έχουμε παραμελήσει ελαστικές ταλαντώσεις των σφαιρών που οδηγούν σε σύγκρουση. Αν αναγνωρίσουμε αυτό, η ταχύτητα v πρέπει να είναι μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου. Στην πράξη πάντως, η εγκυρότητα της θεωρίας είναι περιορισμένη λόγω της αυστηρή απαίτησης, ότι οι επακόλουθες παραμορφώσεις δεν πρέπει να ξεπεράσουν το όριο ελαστικότητας της ύλης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Υπολογίστε τις διαστάσεις του πεδίου επαφής και την διανομή πίεσης όταν δυο κύλινδροι πιέζονται μεταξύ τους, (περιστρεφόμενοι στον άξονά τους)

ΛΥΣΗ. Σε αυτή την περίπτωση το πεδίο επαφής είναι μια στενή λωρίδα κατά μήκος των κυλίνδρων. Το πλάτος της 2α και η διανομή πίεσης κατά μήκος μπορεί να βρεθεί από τις φόρμουλες στο κείμενο φτάνοντας στο όριο $b/a \to \infty$. Η διανομή πίεσης θα είναι της μορφής $P_z(x) = \text{constant} \times \sqrt{(1 - x^2/a^2)}$, όπου *x* είναι οι συντεταγμένες κατά μήκος της λωρίδας; Ισορροπώντας την πίεση για να μας δώσει την δύναμη *F* ανά μονάδα μήκους, αποκομίζουμε

$$P_z(x) = \frac{2F}{\pi a}\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}.$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την παράσταση στην (9.7) και ολοκληρώνοντας ως προς (9.8), έχουμε

$$A = \frac{4DF}{3\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(a^2+\xi)^{3/2}\xi} = \frac{8DF}{3\pi a^2}.$$

Μια από τις ακτίνες καμπυλότητας κυλινδρικής επιφάνειας τείνει προς το άπειρο, και η άλλη είναι η ακτίνα του κυλίνδρου; σ' αυτήν την περίπτωση επομένως, $A = 1/2R + 1/2R'$. $B = 0$. έχουμε τέλος για το πλάτος του πεδίου επαφής

$$a = \sqrt{\left(\frac{16DF}{3\pi} \cdot \frac{RR'}{R+R'}\right)}.$$

§10. Οι ελαστικές ιδιότητες των κρυστάλλων (The elastic properties of crystals)

Η μεταβολή της ελεύθερης ενέργειας κατά την ισοθερμική συμπίεση ενός κρυστάλλου είναι, όπως συμβαίνει με τα ισοτροπικά σώματα, μια δευτεροβάθμια συνάρτηση του τανυστή παραμόρφωσης. Παρ' όλα αυτά, σε αντίθεση με ότι ισχύει για τα ισοτροπικά σώματα, αυτή η συνάρτηση περιέχει παραπάνω από δύο συντελεστές. Η γενική μορφή της ελεύθερης ενέργειας ενός παραμορφωμένου κρυστάλλου είναι

$$F = \tfrac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}, \tag{10.1}$$

όπου λ_{iklm} είναι ο τανυστής της τέταρτης σειράς, και ονομάζεται *τανυστής μέτρου ελαστικότητας (elastic modulus tensor).* Εφόσον ο τανυστής παραμόρφωσης έχει συμμετρική μορφή, το γινόμενο $u_{ik}u_{lm}$ δεν αλλάζει όταν τα προσφύματα *i, k, ή l, m, ή I, l και k, m,* εναλλάσσονται. Οπότε παρατηρούμε ότι ο τανυστής λ_{iklm} μπορεί να οριστεί έτσι ώστε να έχει τις ίδιες συμμετρικές ιδιότητες:

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}. \tag{10.2}$$

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι ο αριθμός διαφορετικών συνιστωσών ενός τανυστή της τέταρτης σειράς που έχει αυτές τις συμμετρικές ιδιότητες είναι γενικά 21.†

Σύμφωνα με την παράσταση (10.1) περί της ελεύθερης ενέργειας, ο τανυστής τάσης για ένα κρύσταλλο δίνεται σε σχέση με τον τανυστή παραμόρφωσης από

$$\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik} = \lambda_{iklm}u_{lm}; \tag{10.3}$$

βλ. επίσης την τελευταία υποσημείωση αυτού του μέρους.

Αν ο κρύσταλλος αποκτήσει συμμετρία, θα υπάρξουν σχέσεις μεταξύ των διάφορων συνιστωσών του τανυστή λ_{iklm} έτσι ώστε ο αριθμός ανεξάρτητων συνιστωσών να είναι μικρότερος από 21.

Θα συζητήσουμε αυτές τις σχέσεις για κάθε πιθανό τύπο μακροσκοπικής συμμετρίας κρυστάλλων δηλ. για κάθε μία από τις τάξεις κρυστάλλων, χωρίζοντάς τες σε αντίστοιχα συστήματα κρυστάλλων (βλέπε SP 1, §§130, 131).

(1). *Τρικλινές σύστημα (Triclinic system).* Η τρικλινής συμμετρία (κατηγορίες C_1 και C_i) δεν θέτει περιορισμούς στις συνιστώσες του τανυστή λ_{iklm}, και το σύστημα συντεταγμένων μπορεί να επιλεχθεί αυθαίρετα σε σχέση με την συμμετρία. Και τα 21 στοιχεία ελαστικότητας είναι διαφορετικά του μηδενός και ανεξάρτητα. Πάντως η αυθαιρεσία της επιλογής του συστήματος συντεταγμένων μας επιτρέπει να εκμεταλλευτούμε επιπλέον πράγματα στις συνιστώσες του τανυστή. Αφού η αφετηρία του συστήματος συντεταγμένων που σχετίζεται με το σώμα ορίζεται από τρείς τιμές (γωνία περιστροφής), μπορούν να υπάρξουν τρείς τέτοιες συνθήκες; για παράδειγμα, τρείς από τις συνιστώσες μπορούν να ληφθούν ως μηδέν. Μετά οι ανεξάρτητες τιμές οι οποίες περιγράφουν τις ελαστικές ιδιότητες του κρυστάλλου θα είναι 18 μη-μηδενικά στοιχεία και 3 γωνίες θα ορίζουν την αφετηρία των αξόνων στον κρύσταλλο.

† Κάτι άλλο που χρησιμοποιείται για λ_{iklm} είναι το $\lambda_{\alpha\beta}$, με α και β να παίρνουν τις τιμές από 1 ως 6 σε αντιστοιχία με *xx, yy, zz, yz, zx, xy.*

(2).*Μονοκλινές σύστημα (Monoclinic system).* Ας σκεφτούμε την κατηγορία C_s; παίρνουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με το επίπεδο-*xy* ως το επίπεδο της συμμετρίας. Στην ανάκλαση σ' αυτό το επίπεδο, οι συντεταγμένες υπερβαίνουν της παραμόρφωσης $x \to x, y \to y, z \to -z$. Οι συνιστώσες ενός τανυστή μεταλλάσσονται σαν παράγωγα των αντίστοιχων συντεταγμένων. Γι' αυτό είναι σαφές, ότι στην παραμόρφωση που αναφερθήκαμε, όλες οι συνιστώσες λ_{iklm} των οποίων τα προσφύματα συμπεριλαμβάνουν το z για ακαθόριστο αριθμό (1 ή 3) θα αλλάξουν (sign), ενώ οι άλλες συνιστώσες θα παραμείνουν ίδιες. Από την συμμετρία του κρυστάλλου, πάντως, όλες οι τιμές που χαρακτηρίζουν τις ιδιότητές του (συμπεριλαμβάνοντας όλες τις συνιστώσες λ_{iklm}) πρέπει να παραμείνουν ίδιες στην ανάκλαση (reflection) στο επίπεδο της συμμετρίας. Οπότε είναι προφανές ότι, όλες οι συνιστώσες με ακαθόριστο αριθμό προσφυμάτων (suffixes) z πρέπει να είναι μηδέν. Σύμφωνα με αυτό, η γενική παράσταση για την ελαστική ελεύθερη ενέργεια ενός κρυστάλλου που ανή κει στο μονοκλινές σύστημα είναι

$$\begin{aligned} F = {} & \tfrac{1}{2}\lambda_{xxxx}u_{xx}^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_{yyyy}u_{yy}^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + \lambda_{xxzz}u_{xx}u_{zz} + \\ & + \lambda_{yyzz}u_{yy}u_{zz} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz}u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz}u_{yz}^2 + 2\lambda_{xxxy}u_{xx}u_{xy} + \\ & + 2\lambda_{yyyx}u_{yy}u_{yx} + 2\lambda_{xyzz}u_{xy}u_{zz} + 4\lambda_{xzyz}u_{xz}u_{yz}. \end{aligned} \qquad (10.4)$$

Αυτό περιέχει 13 ανεξάρτητους συντελεστές. Μια παρόμοια παράσταση αποκομίζεται για την κατηγορία C_2, καθώς και για την κατηγορία C_{2h} η οποία περιέχει και τα δύο στοιχεία συμμετρίας (C_2 και σ_h). Στο δοσμένο ερώτημα, πάντως, οι κατευθύνσεις ενός μόνο άξονα συντεταγμένων (του *z*) είναι αμετάβλητες; αυτές του x και y μπορεί να έχουν άναρχες κατευθύνσεις στο κάθετο επίπεδο. Αυτή η αυθαιρεσία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία ενός συντελεστή, π.χ. ο λ_{xyzz} εξαφανίζεται με την κατάλληλη επιλογή αξόνων. Ύστερα οι 13 τιμές οι οποίες ορίζουν τις ελαστικές ιδιότητες του κρυστάλλου θα είναι 12 μη-μηδενικά στοιχεία και μια γωνία που ορίζει την αφετηρία των αξόνων στο επίπεδο-xy.

(3) *Ορθορομβικό σύστημα (Orthorhombic system).* Σε όλες τις περιπτώσεις αυτού του συστήματος (C_{2v}, D_2, D_{2h}), η επιλογή του συστήματος συντεταγμένων καθορίζεται από την συμμετρία, και η παράσταση που αποκομίζεται για την ελεύθερη είναι η ίδια για κάθε κατηγορία.

Ας σκεφτούμε για παράδειγμα, την κατηγορία D_{2h}, παίρνουμε τα τρία επίπεδα συμμετρίας ως επίπεδα συντεταγμένων. Ανακλάσεις σε κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα είναι μεταμορφώσεις κατά τις οποίες μία συντεταγμένη αλλάζει συμβολισμό και οι άλλες δύο παραμένουν ίδιες. Είναι επομένως φανερό ότι οι μόνες μη-μηδενικές συνιστώσες λ_{iklm} είναι αυτές των οποίων τα προσφύματα (suffixes) περιέχουν κάθε ένα από x, y, z, όμοιες φορές ζυγούς αριθμούς; οι άλλες συνιστώσες θα έπρεπε να αλλάξουν σύμβολο στην αντανάκλαση σε κάποιο επίπεδο συμμετρίας. Οπότε η γενική παράσταση της ελεύθερης ενέργειας στο ορθορομβικό σύστημα είναι

$$\begin{aligned} F = {} & \tfrac{1}{2}\lambda_{xxxx}u_{xx}^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_{yyyy}u_{yy}^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + \lambda_{xxzz}u_{xx}u_{zz} + \\ & + \lambda_{yyzz}u_{yy}u_{zz} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz}u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz}u_{yz}^2. \end{aligned} \qquad (10.5)$$

Περιέχει εννέα στοιχεία (moduli) ελαστικότητας.

4) *Τετραγωνικό σύστημα (Tetragonal system).* Ας σκεφτούμε την κατηγορία C_{4v} ; παίρνουμε τον άξονα C_4 ως άξονα του x, και ο x και y άξονας είναι κάθετοι σε δύο από τα κάθετα επίπεδα συμμετρίας. Οι ανακλάσεις σε αυτά τα δύο επίπεδα φανερώνουν μεταμορφώσεις

$$x \to -x, \qquad y \to y, \qquad z \to z$$

και

$$x \to x, \qquad y \to -y, \qquad z \to z;$$

όλες οι συνιστώσες λ_{iklm} με μονό αριθμό προσφυμάτων έτσι εξαλείφονται. Μια περιστροφή μιας γωνίας $1/4\pi$ στον άξονα C_4 είναι η μεταμόρφωση

$$\tfrac{1}{4} \quad x \to y, \qquad y \to -x, \qquad z \to z.$$

Οπότε έχουμε

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy}, \qquad \lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz}, \qquad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz}.$$

Οι μεταμορφώσεις που απομένουν στην κατηγορία C_{4v} δεν δημιουργούν περεταίρω καταστάσεις. Άρα η ελεύθερη ενέργεια των κρυστάλλων στο τετραγωνικό σύστημα είναι

$$F = \tfrac{1}{2}\lambda_{xxxx}(u_{xx}{}^2 + u_{yy}{}^2) + \tfrac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}{}^2 + \lambda_{xxzz}(u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}{}^2 + 2\lambda_{xzxz}(u_{xz}{}^2 + u_{yz}{}^2). \qquad (10.6)$$

Περιέχε έξι στοιχεία ελαστικότητας.

Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα αποκομίζεται για τις άλλες κατηγορίες του τετραγωνικού συστήματος όπου η φυσική επιλογή των αξόνων καθορίζεται από την συμμετρία (D_{2d}, D_4, D_{4h}). Στις κατηγορίες C_4, S_4, C_{4h}, απ' την άλλη, μόνο η επιλογή του άξονα του z είναι μοναδική (κατά μήκος του άξονα C_4 ή S_4). Οι απαιτήσεις της συμμετρίας τότε επιτρέπουν άλλη μια συνιστώσα $\lambda_{xxxy} = -\lambda_{yyyx}$ επιπρόσθετη σε αυτές που εμφανίζονται στην (10.6). Αυτές οι συνιστώσες μπορεί να δημιουργούνται για να εξαλείφονται αφού επιλέξουμε κατάλληλα τις κατευθύνσεις των x και y αξόνων, και ύστερα μειώνονται προς την μορφή (10.6).

5) *Ρομβοεδρικό σύστημα (Rhombohedral system).* Ας μελετήσουμε την κατηγορία C_{3v}; παίρνουμε τον άξονα της τρίτης-σειράς ως άξονα z, και τον άξονα y κάθετο σε ένα από τα κάθετα επίπεδα συμμετρίας. Για να βρούμε τους περιορισμούς που επιβάλλονται στις συνιστώσες του τανυστή λ_{iklm} από την παρουσία του άξονα C_3, μας βολεύει, να δημιουργήσουμε μια τυπική μεταμόρφωση χρησιμοποιώντας τις σύνθετες συντεταγμένες $\xi = x + iy, \eta = x - iy$, η συντεταγμένη z παραμένει αμετάβλητη. Μεταμορφώνουμε και τον τανυστή λ_{iklm} στο νέο σύστημα συντεταγμένων, έτσι ώστε τα προσφύματά του πάρουν τις τιμές *ξ, η, z*. Είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι, σε μια περιστροφή μέσα από $2\pi/3$ στον άξονα C_3, οι νέες συντεταγμένες υπερβαίνουν της μεταμόρφωσης $\xi \to \xi e^{2\pi i/3}, \eta \to \eta e^{-2\pi i/3}, z \to z$. Από την συμμετρία, μόνο αυτές οι συνιστώσες λ_{iklm} οι οποίες είναι αμετάβλητες από αυτήν την παραμόρφωση είναι διαφορετικές του μηδενός. Αυτές οι συνιστώσες είναι αυτές των οποίων τα προσφύματα περιλαμβάνουν ξ τρείς φορές, ή το η τρείς φορές (since $e^{2\pi i/3})^3 = e^{2\pi i} = 1$), ή ξ και η τις ίδιες φορές εφόσον (since $e^{2\pi i/3}e^{-2\pi i/3} = 1$), δηλ. $\lambda_{zzzz}, \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \lambda_{\xi\eta zz}, \lambda_{\xi z\eta z}, \lambda_{\xi\xi\xi z}, \lambda_{\eta\eta\eta z}$. Περεταίρω, μια αντανάκλαση στο συμμετρικό επίπεδο κάθετο στον άξονα y μας δίνει την μεταμόρφωση $x \to x, y \to -y, z \to z$. or $\xi \to \eta, \eta \to \xi$. Εφόσον $\lambda_{\xi\xi\xi z}$ γίνεται $\lambda_{\eta\eta\eta z}$ σ' αυτήν την παραμόρφωση, αυτές οι δύο συνιστώσες πρέπει να είναι ίσες. Οπότε, οι κρύσταλλοι του ρομβοεδρικού συστήματος έχουν μόνο έξι στοιχεία ελαστικότητας. Για να αποκομίσουμε μια παράσταση για την ελεύθερη ενέργεια, πρέπει να μορφοποιήσουμε το άθροισμα $\frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}$, στο οποίο τα προσφύματα παίρνουν τις τιμές *ξ,η,z*; εφόσον

το F πρέπει να εκφραστεί σε σχέση με τις συνιστώσες στις συντεταγμένες *x,y,z,* πρέπει εκφράσουμε σε σχέση με αυτά τις συνιστώσες στις συντεταγμένες *ξ,η,z.* Αυτό γίνεται εύκολα, μεταλλεύοντας το γεγονός ότι οι συνιστώσες του τανυστή u_{ik} μεταμορφώνονται σαν παράγωγα-γινόμενα των αντίστοιχων συντεταγμένων. Για παράδειγμα, αφού

$$\xi^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

επακολουθεί ότι

$$u_{\xi\xi} = u_{xx} - u_{yy} + 2iu_{xy}.$$

συνεπώς, η παράσταση για F είναι

$$F = \tfrac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}{}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx}+u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}\{(u_{xx}-u_{yy})^2 + 4u_{xy}{}^2\} + \\ + 2\lambda_{\xi\eta zz}(u_{xx}+u_{yy})u_{zz} + 4\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}{}^2 + u_{yz}{}^2) + 4\lambda_{\xi\xi\xi z}\{(u_{xx}-u_{yy})u_{xz} - 2u_{xy}u_{yz}\}. \quad (10.7)$$

Αυτό περιέχει 6 ανεξάρτητους συντελεστές. Σε ένα όμοιο αποτέλεσμα καταλήγουμε για τις κατηγορίες C_3, και S_6, όπου η επιλογή των αξόνων x και y παραμένει αυθαίρετη. Οι απαιτήσεις της συμμετρίας επιτρέπουν επίσης μια μη μηδενική τιμή της διαφοράς $\lambda_{\xi\xi\xi z} - \lambda_{\eta\eta\eta z}$. Αυτό πάντως, μπορεί να εξαλειφθεί με μια κατάλληλη επιλογή των αξόνων x και y.

(6) *Εξαγωνικό σύστημα (Hexagonal system).* Ας σκεφτούμε την κατηγορία C_6; παίρνουμε τον άξονα της έκτης-σειράς ως άξονα-z, και πάλι χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες $\xi = x+iy,\ \eta = x-iy.$ Σε μια περιστροφή μέσω μιας γωνίας 1/3π στον άξονα z, οι συντεταγμένες *ξ, η* υπερβαίνουν της παραμόρφωσης $\xi \to \xi e^{\pi i/3}$, $\eta \to \eta e^{-\pi i/3}$. Άρα βλέπουμε ότι μόνο αυτές οι συνιστώσες λ_{iklm} είναι μη μηδενικές, οι οποίες περιέχουν τον ίδιο αριθμό προσφυμάτων *ξ* και *η*. Υπάρχουν $\lambda_{zzzz}, \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \lambda_{\xi\eta zz}, \lambda_{\xi z\eta z}$. Από άλλα στοιχεία συμμετρίας στο εξαγωνικό σύστημα δεν προκύπτουν περεταίρω περιορισμοί. Έτσι υπάρχουν μόνο πέντε συντελεστές ελαστικότητας. Η ελεύθερη ενέργεια είναι

$$F = \tfrac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}{}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx}+u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}[(u_{xx}-u_{yy})^2 + 4u_{xy}{}^2] + \\ + 2\lambda_{\xi\eta zz}u_{zz}(u_{xx}+u_{yy}) + 4\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}{}^2 + u_{yz}{}^2). \quad (10.8)$$

Να σημειωθεί ότι μια παραμόρφωση στο επίπεδο – xy (για το οποίο u_{xx}, u_{yy} και u_{xy} είναι διαφορετικά του μηδενός) καθορίζεται από μόνο δύο συντελεστές ελαστικότητας, όσο για ένα ισοτροπικό σώμα; οι ελαστικές ιδιότητες ενός εξαγωνικού κρυστάλλου είναι ισοτροπικές στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα έκτης-σειράς.

Για αυτό το λόγο δεν είναι σημαντική η επιλογή της κατεύθυνσης του άξονα σε αυτό το επίπεδο και δεν επηρεάζει την μορφή του F. Η παράσταση (10.8) γι' αυτό εφαρμόζεται σε όλες τις κατηγορίες του εξαγωνικού συστήματος.

(7) *Κυβικό σύστημα (Cubic system).* Παίρνουμε τους άξονες κατά μήκος των τριών αξόνων τέταρτης-σειράς(τάξης) του κυβικού συστήματος. Εφόσον υπάρχει τετραγωνική συμμετρία (με τον άξονα στην κατεύθυνση z), ο αριθμός διαφορετικών συνιστωσών του τανυστή λ_{iklm} περιορίζεται το πολύ μέχρι τα παρακάτω έξι: $\lambda_{xxxx}, \lambda_{zzzz}, \lambda_{xxzz}, \lambda_{xxyy}, \lambda_{xyxy}, \lambda_{xzxz}$.† Μια περιστροφή γύρω από ½π από τους άξονες x και y μας δίνει αντίστοιχα τις μεταμορφώσεις $x \to x,\ y \to -z,\ z \to y$ και $x \to z,\ y \to y,\ z \to -x$.Οι συνιστώσες στην λίστα είναι γι' αυτό ίσες σε διαδοχικά

ζευγάρια. Οπότε απομένουν μόνο τρείς διαφορετικοί συντελεστές ελαστικότητας. Η ελεύθερη ενέργεια των κρυστάλλων του κυβικού συστήματος είναι

$$F = \tfrac{1}{2}\lambda_{xxxx}({u_{xx}}^2 + {u_{yy}}^2 + {u_{zz}}^2) + \lambda_{xxyy}(u_{xx}u_{yy} + u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ + 2\lambda_{xyxy}({u_{xy}}^2 + {u_{xz}}^2 + {u_{yz}}^2). \qquad (10.9)$$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τον αριθμό των ανεξάρτητων παραμέτρων (συντελεστές ελαστικότητας ή γωνίες που ορίζουν την αφετηρία των αξόνων στον κρύσταλλο) για τις κατηγορίες των διάφορων συστημάτων:

Τρικλινικό	21	Ρομβοεδρικό (C_3, S_6)	7
Μονοκλινικό	13	Ρομβοεδρικό (C_{3u}, D_3, D_{3d})	6
Ορθορομβικό	9	Εξαγωνικό	5
Τετραγωνικό (C_4, S_4, C_{4h})	7	Κυβικό	3
Τετραγωνικό $(C_{4v}, D_{2d}, D_4, D_{4h})$	6		

Ο μικρότερος αριθμός μη μηδενικών συντελεστών ο οποίος είναι πιθανός από κατάλληλη επιλογή των αξόνων συντεταγμένων είναι ίδιος για όλες τις κατηγορίες σε κάθε σύστημα:

Τρικλινικό	18	Ρομβοεδρικό	6
Μονοκλινικό	12	Εξαγωνικό	5
Ορθορομβικό	9	Κυβικό	3
Τετραγωνικό	6		

Όλα όσα συζητήθηκαν παραπάνω, σχετίζονται φυσικά, με μοναδικούς-αδιαίρετους κρυστάλλους. Πολυκρυσταλλικά σώματα των οποίων τα κρυσταλλικά συστατικά (κόκκοι) είναι πολύ μικρά μπορούν να θεωρηθούν ως ισοτροπικά σώματα (αφού ασχολούμαστε με παραμορφώσεις σε περιοχές μεγάλες σχετκά με τις διαστάσεις των κρυσταλλιτών). Όπως κάθε ισοτροπικό σώμα, ένας πολυκρύσταλλος έχει μόνο δύο συντελεστές ελαστικότητας. Μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτοί οι συντελεστές, μπορούν να αποκομισθούν από αυτούς των ατομικών κρυσταλλιτών, υπολογίζοντας απλά τον μέσο όρο. Αυτό πάντως δεν ισχύει. Αν αποδώσουμε την παραμόρφωση ενός πολυκρυστάλλου σε ένα αποτέλεσμα παραμόρφωσης των συστατικών του, τότε θα είναι απαραίτητο να λύσουμε την εξίσωση της ισορροπίας για κάθε κρυσταλίτη ξεχωριστά. Γι' αυτό δεν υπάρχει κάποια γενική σχέση μεταξύ του συντελεστή ελαστικότητας ενός πολυκρυστάλλου και αυτού ενός μοναδικού αδιαίρετου κρυστάλλου της ίδιας υπόστασης.

Τα μέτρα (moduli) ενός ισοτροπικού πολυκρυστάλου, μπορούν να υπολογιστούν με αρκετή ακρίβεια για έναν ακέραιο κρύσταλλο μόνο όταν οι ελαστικές ιδιότητες του ακέραιου κρύσταλου είναι σχεδόν ισοτροπικές.† Με μια πρώτη εκτίμηση, ο συντελεστής ελαστικότητας του πολυκρυστάλλου μπορεί απλά να παρθεί σαν ίσος του 'ισοτροπικού τμήματος' του συντελεστή του ακέραιου κρύσταλλου. Στην παρακάτω προσέγγιση, εμφανίζονται όροι οι οποίοι είναι τετραγωνικοί-(δεύτεροι) στο μικρό 'ανισοτροπικό τμήμα' αυτών των συντελεστών. Έχει βρεθεί †† πως αυτοί οι όροι αντιστάθμισης είναι ανεξάρτητοι του σχήματος των κρυσταλλιτών και της συσχέτισης των προσανατολισμών τους, και μπορούν να υπολογιστούν σε μια γενική μορφή.

---

† Στις κυβικές κατηγορίες το *T* και *Td* δεν είναι άξονες τέταρτης –τάξης. Το ίδιο αποτέλεσμα πάντως αποκομίζεται σ' αυτές τις περιπτώσεις λαμβάνοντας υπ' όψιν τους άξονες τρίτης-τάξης, γύρω από τους οποίους οι περιστροφές κάνουν τους άξονες *x,y,z* να παίρνει ο ένας την θέση του άλλου.

Τέλος, ας μελετήσουμε την θερμική διαστολή των κρυστάλλων. Στα ισοτροπικά σώματα η θερμική διαστολή είναι η ίδια προς κάθε κατεύθυνση, με τέτοιο τρόπο ώστε ο τανυστής παραμόρφωσης στην ελεύθερη θερμική διαστολή είναι (βλ. §6$u_{ik} = \frac{1}{3}\alpha(T - T_0)\delta_{ik}$, όπου α είναι ο συντελεστής διαστολής. Στους κρυστάλλους πάντως έχουμε

$$u_{ik} = \tfrac{1}{3}\alpha_{ik}(T - T_0), \tag{10.10}$$

Όπου α_{ik} είναι ένας τανυστής της δεύτερης τάξης-κατηγορίας, συμμετρικός προς τα προσφύματα I και k. Ας υπολογίσουμε των αριθμό των ανεξάρτητων συνιστωσών αυτού του τανυστή για τους κρυστάλλους του ποικίλου συστήματος. Ο πιο απλός τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι, να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του αλγεβρικού τανυστή ώστε σε κάθε συμμετρικό τανυστή της δεύτερης τάξης αντιστοιχεί ένας *ελλειψοειδής τανυσττής*§. Επακολουθεί ότι από την συμμετρία ότι, για την τρικλινή, μονοκλινή, και ορθορομβική συμμετρία, ο ελλειψοειδής τανυστής έχει τρείς άξονες διαφορετικού μήκους. Για την τετραγωνική, ρομβοεδρική και εξαγωνική συμμετρία, απ' την άλλη, έχουμε ένα *ελλειψοειδές περιστροφής (ellipsoid of revolution)* με τον άξονα συμμετρίας να βρίσκεται κατά μήκος των αξόνων C_4. C_3 και C_6 αντίστοιχα). Τέλος για την κυβική συμμετρία το ελλειψοειδές μετατρέπεται; σε μια σφαίρα. Ένα ελλειψοειδές τριών αξόνων καθορίζεται από τρείς τιμές, ένα ελλειψοειδές περιστροφής από δύο, και μια σφαίρα καθορίζεται από μία (την ακτίνα). Οπότε, ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών του τανυστή α_{ik} στους κρυστάλλους του ποικίλου συστήματος είναι ως εξής: τρικλινές, μονοκλινές και ορθορομβικό, 3; τετραγωνικό, ρομβοεδρικό και εξαγωνικό, 2; κυβικό, 1.

Οι κρύσταλλοι των τριών πρώτων συστημάτων λέγεται πως είναι διαξονικοί, και αυτοί των επόμενων τριών συστημάτων ομοαξονικοί. Να σημειώσουμε πως, η θερμική διαστολή των κρυστάλλων του κυβικού συστήματος καθορίζεται από μία τιμή μόνο, δηλ. συμπεριφέρονται σαν ισοτροπικά σώματα.

---

† Για παράδειγμα, μια μέτρηση της ανισοτροπίας των ελαστικών ιδιοτήτων ενός κυβικού κρυστάλλου είναι η διαφορά $\lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy} - 2\lambda_{xyxy}$ αν αυτό είναι μηδέν, τότε (10.9) μειώνεται στην παράσταση (4.3) για την ελαστική ενέργεια ενός ισοτροπικού σώματος.

††I. M. Lifshitz and L. N. Rozentsveĭg, *Zhurnal éksperimental'noĭ i teoreticheskoĭ fiziki* **16**, 967, 1946.

§ Determined by the equation $\alpha_{ik}x_ix_k = 1$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Υπολογίστε την ελαστική ενέργεια ενός εξαγωνικού κρυστάλλου σε σχέση με τα μέτρα ελαστικότητας λ_{iklm} στις συντεταγμένες *x, y, z,* (ο άξονας χ είναι ο άξονας έκτης-σειράς).

ΛΥΣΗ. Για μια γενική (όχι ορθογώνια) μεταμόρφωση των συντεταγμένων, πρέπει να ξεχωρίσουμε τις *αντικρουόμενες και συμμεταβλητές* (*contravariant και covariant*) συνιστώσες των διανυσμάτων και τανυστών, οι οποίοι-ες έχουν αντίστοιχα μεταμορφωθεί σαν συντεταγμένες x^i και σαν χειριστές διάκρισης $\partial/\partial x^i$. Η κλίμακα (10.1) τότε γράφεται ως

$$F = \tfrac{1}{2}\lambda_{iklm}u^{ik}u^{lm}.$$

Στην παράσταση (10.8) και (10.9), οι συνιστώσες u_{ik} μεταμορφώνονται σαν αντικρουόμενες. Για να αποδείξουμε την σχέση μεταξύ των συνιστωσών λ_{iklm} στις συντεταγμένες *ξ, η, z* and *x,y, z,* πρέπει να αναγνωριστούν ως συμμεταβλητές; Στις Καρτεσιανές συντεταγμένες τα δύο σετ είναι φυσικά ίδια. Για την μεταμόρφωση της (10.7)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right).$$

Μεταμορφώνοντας το λ_{iklm} ως προϊόντα των παραπάνω μας δίνει

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy} = 4\lambda_{\xi\eta\xi\eta} + 2\lambda_{\xi\xi\eta\eta},$$
$$\lambda_{xyxy} = 2\lambda_{\xi\xi\eta\eta},$$
$$\lambda_{xxyy} = 4\lambda_{\xi\eta\xi\eta} - 2\lambda_{\xi\xi\eta\eta},$$
$$\lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz} = 2\lambda_{\xi\eta zz},$$
$$\lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz} = 2\lambda_{\xi z\eta z}.$$

Η ελεύθερη ενέργεια (10.8) σε σχέση με αυτά τα μέτρα (moduli) είναι

$$F = \tfrac{1}{2}\lambda_{xxxx}(u_{xx}+u_{yy})^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxzz}(u_{xx}+u_{yy})u_{zz} + 2\lambda_{xzxz}(u_{xz}^2+u_{yz}^2) + (\lambda_{xxxx}-\lambda_{xxyy})(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Βρείτε τις συνθήκες που απαιτούνται, ώστε η ελαστική ενέργεια ενός κυβικού κρυστάλλου να είναι θετική.

ΛΥΣΗ. Οι πρώτοι δύο όροι στην (10.9) σχηματίζουν μια τετραγωνική (δευτεροβάθμια) μορφή στις τρείς ανεξάρτητες μεταβλητές u_{xx} u_{yy}, u_{zz}. Οι προϋποθέσεις ώστε αυτό να είναι θετικό είναι, η ορίζουσα των συντελεστών του, ένας εκ' των μειζόνων (μικρών), και λ_{xxxx} να είναι θετικά. Ο τρίτος όρος στην (10.9) πρέπει να είναι επίσης θετικός. Αυτές οι συνθήκες μας δίνουν τις ανισότητες

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad -\tfrac{1}{2}\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_1,$$

όπου $\lambda_1 = \lambda_{xxxx}$, $\lambda_2 = \lambda_{xxyy}$, $\lambda_3 = \lambda_{xyxy}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Καθορίστε την εξάρτηση του μέτρου ελαστικότητας Young ενός κυβικού κρυστάλλου στην κατεύθυνση μέσα του.

ΛΥΣΗ. Παίρνουμε τους άξονες συντεταγμένων στις άκρες του κύβου. Κι ας αφήσουμε τον άξονα μιας ράβδου που κόβει από τον κρύσταλλο να είναι κατά μήκος μιας μονάδας διανύσματος n. Ο τανυστής τάσης στην τεντωμένη ράβδο πρέπει να πληρεί τις παρακάτω συνθήκες (1) $\sigma_{ik}n_k = pn_i$, όπου p είναι ελαστική δύναμη σε μονάδα επιφάνειας των άκρων της ράβδου (συνθήκη-κατάσταση στις πλευρές της ράβδου); (2) για κατεύθυνση κάθετη στο n, $\sigma_{ik}t_k = 0$ (συνθήκη στις πλευρές της ράβδου). Ένας τέτοιος τανυστής πρέπει να έχει την μορφή $\sigma_{ik} = pn_in_k$. Υπολογίζοντας τις συνιστώσες σ_{ik} διαφοροποιώντας την (10.9),† και συγκρίνοντάς τις με $\sigma_{ik} = pn_in_k$, βρίσκουμε ότι οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης είναι

$$u_{xx} = p\frac{(\lambda_1 + 2\lambda_2)n_x^2 - \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + 2\lambda_2)}, \quad u_{xy} = p\frac{n_xn_y}{2\lambda_3},$$

Και όμοια για τις συνιστώσες που απομένουν.

Η σχετική επιμήκυνση για την ράβδο είναι $u = (\mathrm{d}l' - \mathrm{d}l)/\mathrm{d}l$, όπου $\mathrm{d}l'$ μας δίνεται από (1.2) και $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}l = n_i$. Για μικρής κλίμακας παραμορφώσεις αυτό μας δίνει $u = u_{ik}n_in_k$. Το μέτρο ελαστικότητας Young καθορίζεται καθώς σαν παράγοντας αναλογικότητας στην $p = Eu$, και μας δίνεται από

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)(n_x^2n_y^2 + n_x^2n_z^2 + n_y^2n_z^2).$$

Το E έχει ακραίες τιμές στις κατευθύνσεις των άκρων (οι άξονες *x,y,z*) και το σώμα διαγωνιοποιείται του κύβου. Κατά μήκος των ακρών,

$$E = (\lambda_1 + 2\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Η κάθετη-εγκάρσια συμπίεση της ράβδου είναι $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz} = -\sigma u$, όπου $\sigma = \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ ενεργεί σαν λόγος Poisson. Σύμφωνα με τις ανισότητες που αντλήσαμε από το πρόβλημα 2, $-1 < \sigma < \frac{1}{2}$.

† Αν το σ_{ik} δεν έχει υπολογιστεί ευθέως από $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}u_{lm}$ αλλά διαφοροποιώντας μια συγκεκριμένη παράσταση για f, τα παράγωγα σε σχέση με u_{ik} with $i \neq k$ μας δίνουν διπλάσιες τιμές για σ_{ik}. Αυτό συμβαίνει επειδή η φόρμουλα $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$ δεν έχει νόημα μόνο σαν παράσταση του γεγονότος ότι $\mathrm{d}F = \sigma_{ik}\mathrm{d}u_{ik}$, και στο άθροισμα $\sigma_{ik}\mathrm{d}u_{ik}$ οι όροι στα διαφορικά $\mathrm{d}u_{ik}$ της κάθε συνιστώσας με $i \neq k$ του συμμετρικού τανυστή εμφανίζονται δυο φορές.