

Σύγχρονες Μαθηματικές Μέθοδοι στην Τομογραφία

Θεόδωρος Φωτιάδης
Επιβλέπων καθηγητής Ταξιάρχης Παπακώστας
Καθηγητής Τμήματος Φυσικών Πόρων

2 Απριλίου 2012

English Summary

This work studies the problem of diffraction tomography. We review the basic issues based on the classic book of Born-Wolf, chapter 13 which we present in rather free translation. The new contribution is the geometric proof of the basic tool of Jones lemma as well as the basic estimates for the wave field and the Radon transform. These are culminated in a Python 3.2.2 code that checks the agreement of the initial model to the observed, and is iteratively improved to attain the real model.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι μέθοδοι μελέτης της ύλης στις διάφορες μορφές συνίστανται ουσιαστικά στην τομογραφία με τη χρήση διαφόρων ειδών ακτινοβολίας. Έτσι με τις μεθόδους τομογραφίας (TM) από τα δεδομένα απορρόφησης της ακτινοβολίας καταλήγουμε στην ανακατασκευή της σύστασης της ύλης μέσω θεμελιωδών νόμων της οπτικής (κύρια της γεωμετρικής: 'ανίχνευση ακτίνων'). Ωστόσο για ακτινοβολία μήκους κύματος που επιτρέπει στο δοσμένο υλικό να προκαλεί φαινόμενα περίθλασης. Η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου επιτυγχάνεται μέσω της εξίσωσης Helmholtz ([BW]) στο χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^3$:

$$\Delta u + nu = 0$$

για τη συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ όταν $n : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού που μελετάμε και έχουμε υποθέσει συνοριακές συνθήκες Dirichlet . Είναι ενδιαφέρον να εξετάσει κανείς το μέγεθος των περιοχών δοσμένης απορρόφησης και να προβεί στην απεικόνισή τους: η μαθηματική περιγραφή αυτής της διαδικασίας συνίσταται στην μελέτη των σταθμικών συνόλων της συνάρτησης u . Στην εργασία [PD1] έχουν αναπτυχθεί οι μέθοδοι που επιτρέπουν την εκτίμηση των σταθμικών συνόλων μέσω τοπικών μέσων τιμών της συνάρτησης n και των παραγών της. Εδώ αφού γίνει η αναπαράσταση των συνόλων αυτών στη γλώσσα Python 3.2.4 στη συνέχεια θα επεκταθούν οι μέθοδοι προκειμένου να συσχετιστεί η μεταβολή της πυκνότητας με την χαμπυλοότητα της επιφάνειας που περιβάλλει το χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ σύμφωνα με τις πρόσφατες μεθόδους των 'γεωμετρικών ροών' που εισάγονται στο [BS] .

Η πτυχιακή περιλαμβάνει μία ελεύθερη μετάφραση του κεφαλαίου 13 απο το κλασικό σύγγραμμα Born-Wolf, 'Principles of Optics'.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία σκέδασης

Ο όρος σκέδαση καλύπτει μια ευρεία σειρά των φαινομένων που συνδέονται με την αλληλεπίδραση κυμάτων με μόρια και υλικά. Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιοριστούμε στις περιπτώσεις που η απόκριση του μέσου στο προσπίπτον κύμα είναι γραμμική και περιγράφεται από μακροσκοπικές παραμετρώς όπως η διηλεκτρική σταθερά η , αντιστοίχως, από το διαθλαστικό δείκτη n τη διηλεκτρική επιδεκτικότητα. Θα υποθέσουμε επίσης ότι η απόκριση είναι χρονικά-ανεξάρτητη, δηλ. στο μακροσκοπικό επίπεδο που οι φυσικές ιδιότητες του μέσου δεν αλλάζουν κατά τη διάρκεια του χρόνου. Τότε κάποιος μιλά για στατική σκεδαση.

2.1 Στοιχεία της βαθμωτής θεωρίας της σκεδασης

2.1.1 Παραγωγή της βασικής ολοκληρωτικής εξίσωσης

Εξετάζουμε ένα μονοχρωματικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$ (δεν παρουσιάζεται ρητά στην επομένη ανάλυση) που προσπίπτει σε ένα γραμμικό, ιστροπικό, μη μαγνητικό μέσο που καταλαμβάνει μια πεπερασμένη περιοχή $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν πηγές στο Ω , το χωρικό τμήμα του μιγαδικού ηλεκτρικού πεδίου ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση που προκύπτει από την κυματική στην περίπτωση μονοχρωματικού κυματικού πεδίου:

$$\Delta E + k^2 E(\underline{x}, \omega) + \nabla (E \cdot \nabla \log \varepsilon) = 0,$$

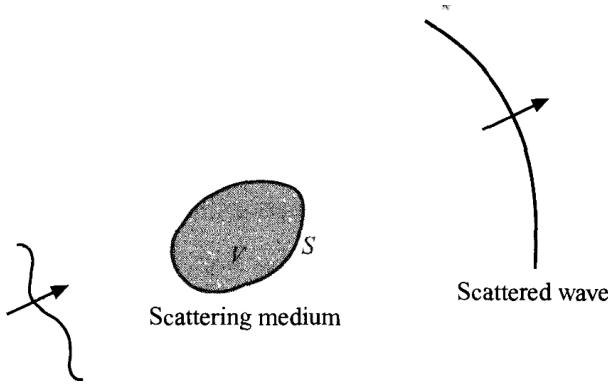
με $\varepsilon = \frac{\omega}{c}$. Σημειώνουμε ότι ο τελευταίος όρος στο αριστερό μέλος συνδέει τις καρτεσιανές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου. Για αυτόν το λόγο η επεξεργασία της σκεδασης βασισμένη σε αυτήν την εξίσωση είναι μάλλον περιπλοκή. Η εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί εάν υποθέσουμε ότι η διηλεκτρική σταθερά, ε μεταβάλλεται αργά στο χώρο και είναι ουσιαστικά σταθερή για αποστάσεις μεγαλύτερες της τάξης του μήκους κύματος $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$. Κάτω από αυτές τις περιστάσεις ο τελευταίος όρος στην αριστερή πλευρά της μπορεί να αγνοηθεί. Έτσι λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\Delta U(\underline{x}, \omega) + k^2 n^2(\underline{x}, \omega) U(\underline{x}, \omega) = 0,$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον τύπο του Maxwell

$$\varepsilon(\underline{x}, \omega) = n^2(\underline{x}, \omega)$$

$n(\underline{x}, \omega)$ είναι ο διαθλαστικός δείκτης του μέσου.



Σχήμα 2.1: Γενική κατάσταση σκέδασης

Σημειώνουμε ότι στην τελευταία οι καρτεσιανές συνιστώσες του $E(\underline{x}, \omega)$ δεν συνδέεται πλέον και ως εκ τούτου οι συνέπειες είναι ευκολότερες να αναλυθούν. Πραγματικά μπορούμε να πάρουμε μία καλή ιδέα για γενική συμπεριφορά του σκεδασθέντος πεδίου από τη μελέτη της συμπεριφοράς της λύσης της εξίσωσης (3) για μια σταθερή καρτεσιανή συνιστώσα $E(\underline{x}, \omega)$, που σημειώνεται $U(\underline{x}, \omega)$ και έτσι λαμβανουμε την επομενη βαθμωτή εξίσωση, που θα αποτελέσει αφετηρία για την ανάλυση του σκεδασθέντος πεδίου :

$$\Delta U(\underline{x}, \omega) + k^2 n^2(\underline{x}, \omega) U(\underline{x}, \omega) = 0$$

Αργότερα θα υπερβουμε την βαθμωτή προσέγγιση και θα συζητήσουμε για την σκέδαση στα πλαίσια της πλήρους ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Θα είναι βολικό να ξαναγραφει η τελευταία στη μορφή

$$\Delta U(\underline{x}, \omega) + k^2 U(\underline{x}, \omega) = -4\pi F(\underline{x}, \omega) U(\underline{x}, \omega)$$

οπου

$$F(\underline{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi} k^2 [n^2(\underline{x}, \omega) - 1]$$

Η συναρτηση $F(\underline{x}, \omega)$ αποκαλείται συνηθως *σκεδαζον δυναμικο* του μεσου, σε αναλογια με την ορολογία που χρησιμοποιειται στην κβαντική θεωρία της σκέδασης δυναμικου, η οποία διεπεται απο μια εξίσωση που είναι απο μαθηματική αποψη ισοδυναμη με την τελευταία, η χρονικά - ανεξαρτητη εξίσωση του Schrödinger για τα μη σχετικιστικά μορια. Ας εκφρασουμε $U(\underline{x}, \omega)$ ως το αθροισμα του προσπίπτοντος κύματος $U^{(i)}(\underline{x}, \omega)$ και του σκεδασθέντος πεδίου $U^{(s)}(\underline{x}, \omega)$, που μπορούν να θεωρηθουν, όπως οριζεται στην ,

$$U(\underline{x}, \omega) = U^{(i)}(\underline{x}, \omega) + U^{(s)}(\underline{x}, \omega)$$

Το προσπίπτον πεδίο είναι συνηθως ένα επιπεδο κύμα. Ένα τετοιο πεδίο ικανοποιει την εξίσωση του Helmholtz

$$(\Delta + k^2)U^{(i)}(\underline{x}, \omega) = 0$$

σε ολο το διαστημα. Στην αντικατασταση απο την (7) σε (5) και τη χρησιμοποίηση της (8) βλέπουμε ότι το σκεδασθέν πεδίο ικανοποιει την εξίσωση

$$(\Delta + k^2)U^{(s)}(\underline{x}, \omega) = -4\pi F(\underline{x}, \omega)U(\underline{x}, \omega)$$

Μερικές από τις συνεπείες αυτής της διαφορικής εξίσωσης μπορούν καλύτερα να μελετηθούν μετατρέποντας τη σε μια ολοκληρωτική εξίσωση, η οποία μπορεί να γίνει ως εξής: Έστω $G(\underline{x} - \underline{x}')$ η συναρτηση του Green ρολος του τελεστή Helmholtz, δηλ. μια λυση της εξίσωσης

$$(\Delta + k^2)G(\underline{x} - \underline{x}', \omega) = -4\pi\delta(\underline{x} - \underline{x}')$$

οπου δ είναι η τρισδιαστατη συναρτηση δέλτα του Dirac. Ας πολλαπλασιασθουν η (9) με $G(\underline{x} - \underline{x}', \omega)$, (10) με $U^{(s)}(\underline{x}, \omega)$ και αφαιρεστε το αποτελεσμα των εξισωσεων απο καθε αλλη. Αυτό δίνει

$$U^{(s)}(\underline{x}, \omega)\Delta G(\underline{x} - \underline{x}', \omega) - G(\underline{x} - \underline{x}', \omega)\Delta U^{(s)}(\underline{x}, \omega) = 4\pi F(\underline{x}, \omega)U(\underline{x}, \omega)G(\underline{x} - \underline{x}', \omega) - 4\pi U^{(s)}(\underline{x}, \omega)\delta(\underline{x} - \underline{x}')$$

Εναλλάσσουμε $\underline{x}, \underline{x}'$ και υποθεστε οτι η συναρτηση Green είναι συμμετρικη, δηλ. οτι

$$G(\underline{x}, \omega) = G(-\underline{x}, \omega)$$

Έπειτα ενσωματωνουμε και τις δυο πλευρες της (11) σε σχεση με το \underline{x}' σε ολοκληρο τον ογκο Ω , που τίθενται μέσα σε μια μεγαλη σφαιρα ακτινας P , με επικεντρο την αρχή $0 \in \mathbf{R}^3$ περιεχει τον σκεδαστη στο εσωτερικο του. Εάν μετατρεψουμε το ολοκληρωμα ογκου στα αριστερα σε ενα ολοκληρωμα επιφανειας απο την εφαρμογη του θεωρηματος του Green λαμβανουμε, μετα απο απλούς χειρισμους, τον τυπο

$$U^{(s)}(\underline{x}, \omega) = \int_{\Omega} F(\underline{x}', \omega)U(\underline{x}', \omega)G(\underline{x} - \underline{x}', \omega) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} [U^{(s)}(\underline{x}', \omega)\underline{n} \cdot \nabla G(\underline{x} - \underline{x}', \omega) - G(\underline{x} - \underline{x}', \omega)\underline{n} \cdot \nabla U^{(s)}(\underline{x}', \omega)]$$

όπου \underline{n} είναι το κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$. Το πρώτο ολοκλήρωμα στα δεξιά της (12) λαμβανεται μονο κατα τη διαρκεια της σκεδασης κατα ογκο Ω και οχι πανω απο το συνολο του ογκου Ω της μεγάλης σφαιρας, επειδη το σκεδάζον δυναμικο F εξαφανιζει ολο το εξωτερικο της Ω οπως προκυπτει απο τον ορισμο της (6). Μεχρι τώρα δεν εχουμε επιλεξει συγκεκριιμένη συνάρτηση Green, δηλ. καποια συγκεκριμενη λυση της τελευταίας εξίσωσης. Μονο εχουμε υποθεσει οτι είναι συμμετρική. Θα κανουμε τωρα την επιλογη

$$G(\underline{x} - \underline{x}', \omega) = \frac{e^{ik|\underline{x} - \underline{x}'|}}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

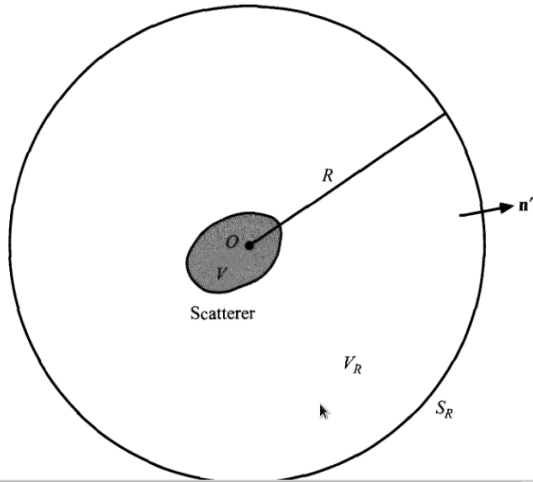
που καλείται *συναρτηση Green του τελεστή Helmholtz εξωτερικού χώρου*. Φαινεται ευλογο οτι αρκετα μακρια απο τον σκεδαστη, το σκεδασθεν πεδιο $U^{(s)}(\underline{x}, \omega)$ θα συμπεριφερθει επίσης ως εξερχομενο σφαιρικο κυμα, οπως υποθέτουμε. Κατω απο αυτες τις περιστασεις καποιος θα ανεμενε οτι στο οριο $R \rightarrow \infty$, το ολοκληρωμα επιφανειας στα δεξια της (12) δεν θα συμβαλει στο συνολικο πεδιο. Ως εκ τούτου θα παραλειψουμε και την (12) στη συνεχεια μειώνεται σε

$$U^{(s)}(\underline{x}, \omega) = \int_{\Omega} F(\underline{x}', \omega)U(\underline{x}', \omega) \frac{e^{ik|\underline{x} - \underline{x}'|}}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

Υποθέτουμε ότι το προσπιπτον κύμα στο σκεδαστη είναι ενα μονοχρωματικο επιπεδο κυμα μοναδιαιου πλάτους και συχνοτητας ω , που διαδιδεται στην κατευθυνση που ορίζεται από ένα πραγματικο μοναδιαίο διάνυσμα \underline{s}_0 .

Το χρονικα-ανεξαρτητο μερος του προσπιπτοντος πεδιου τοτε δινεται απο την εκφραση

$$U^{(i)}(\underline{x}', \omega) = e^{ik\underline{s}_0 \cdot \underline{x}'}$$



Σχήμα 2.2: Γενική κατάσταση σκέδασης

Και προκύπτει από την (7) και την (14) ότι

$$U(\underline{x}, \omega) = e^{iks_0 \cdot \underline{x}} + \int_{\Omega} F(\underline{x}', \omega) U(\underline{x}', \omega) \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

Αυτή είναι η βασική εξίσωση για τον καθορισμό του συνολικού πεδίου $U(\underline{x}, \omega)$ (προσπίπτον + σκεδασθέν) και αποκαλείται *ολοκληρωτική εξίσωση της σκέδασης*. Πρέπει να σημειωθεί, εντούτοις, ότι είναι μόνο μια ολοκληρωτική εξίσωση για το συνολικό πεδίο $U(\underline{x}, \omega)$ στα σημεία του εσωτερικού του σκεδάζοντος όγκου Ω . Μόλις είναι γνωστή η λύση σε ολό το Ω , η λύση στα εξωτερικά σημεία του Ω μπορούν να ληφθούν με την αντικατάσταση της λύσης στο 'εσωτερικό' πρόβλημα μέσα στο ολοκληρώμα της (16). Αντίθετα από τη διαφορική εξίσωση (9), οποιαδήποτε λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (16) έχει απαραίτητως τη σωστή (εξερχομένη) συμπεριφορά μακριά από το σκεδαστή, όπως τώρα θα επαληθεύσουμε από τους άμεσους υπολογισμούς.

Έστω $Q \in \Omega$ ένα σημείο στον σκεδάζοντα όγκο Ω και P ένα σημείο μακριά από αυτόν. επίσης έστω $\underline{x}'(Q)$ το διάνυσμα θέσης του Q και $\underline{x} = r\underline{s}$, $|\underline{s}|^2 = 1$ το διάνυσμα θέσης του P και έστω το N να είναι το ίχνος της καθέτου που φέρεται από το Q στην OP (βλ. το σχέδιο 3). Τότε προφανώς, όταν το \underline{x} είναι αρκετά μεγάλο

$$|\underline{x} - \underline{x}'| \sim |\underline{x}|r - s|\underline{x}'|$$

και

$$\frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \sim \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ks_0 \cdot \underline{x}'}$$

Σχετικά με την χρήση της προσεγγίσης της (18) στο ολοκληρώμα της (16) βλέπουμε ότι

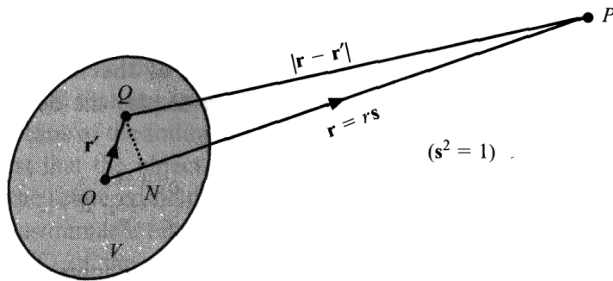
$$U(r\underline{s}, \omega) \sim e^{iks_0 \cdot \underline{x}} + U^{(s)}(r\underline{s}, \omega)$$

όπου

$$U^{(s)}(r\underline{s}, \omega) = f(\underline{s}, \underline{s}_0; \omega) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Και

$$f(\underline{s}, \underline{s}_0; \omega) = \int_{\Omega} F(\underline{x}', \omega) U(\underline{x}', \omega) e^{-iks \cdot \underline{x}'}$$



Σχήμα 2.3:

Λεπτομερέστερη μαθηματική ανάλυση δείχνει ότι η εκφραση στα δεξιά της (19), μαζί με την (20) και την (21), είναι η ασυμπτωτική προσέγγιση του ολικού πεδίου $U(\underline{x}, \omega)$ όταν η ποσότητα $k'r \rightarrow \infty$ με την κατεύθυνση \underline{s} δοσμένη.

Η τελευταία σχέση επιβεβαιώνει ότι μακριά από τον σχεδαστή το σχεδασθέν πεδίο $U^{(s)}(\underline{x}, \omega)$ συμπεριφέρεται ως εξερχόμενο σφαιρικό κύμα, όπως αναμενεται. Η συνάρτηση $f(\underline{s}, \underline{s}_0, \omega)$ αποκαλείται πλάτος σκέδασης και παίζει έναν σημαντικό ρόλο στη θεωρία της σκέδασης.

2.2 Η προσέγγιση Born

Στις περισσότερες καταστάσεις πρακτικού ενδιαφέροντος δεν είναι δυνατόν να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση του δυναμικού σχεδασής σε κλειστή μορφή. Κάποιος πρέπει, επομένως, να προσπαθήσει να τη λύσει με κάποια προσεγγιστική τεχνική. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος που χρησιμοποιείται είναι η μέθοδος διαταραξών, στην οποία οι διαδοχικοί όροι στο ανάπτυγμα διαταραχών λαμβανονται από την επαναληψη των προηγούμενων, υπό τον όρο ότι το μεσο σχεδάζει μαλλον ασθενώς. Αρχικά θα συζητήσουμε την προσέγγιση της χαμηλότερης - τάξης που έχει πολλές χρήσιμες συνεπειες και που παρέχει μια γενική εικόνα στα διαφορα χαρακτηριστικά γνωρισματα της σχεδασής. Θα εξετάσουμε εν συντομία τους ανωτερας τάξης όρους. Από το ανάπτυγμα για το σχεδάζον δυναμικο είναι σαφες ότι ενα μεσο θα σχεδασει ασθενώς εάν ο διαθλαστικος δείκτης του διαφερεει ελαφρως απο την μονάδα. Κάτω απο αυτες τις συνθηκες είναι ευλογο να υποθεσει κανεις ότι μια απο αυτες θα αποκτησει μια καλη προσέγγιση για τον συνολικο πεδίο U εφ'οσον ο όρος

$$U = U^{(i)} + U^{(s)}$$

σύμφωνα με το ολοκληρωμα στην (16) αντικαθισταται απο $U^{(i)}$ κατοπιν λαμβανει ως πρώτη προσέγγιση στη λυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης της σχεδασής, την εκφραση (απο τώρα και στο εξης δεν επιδεικνυουμε πλέον την εξάρτηση των διαφόρων ποσοτήτων από τη συχνότητα ω)

$$U(\underline{x}) \approx U_1(\underline{x}) \equiv e^{ik\underline{s}_0 \cdot \underline{x}} + \int_{\Omega} F(\underline{x}') e^{ik\underline{s}_0 \cdot \underline{x}} \frac{e^{ik|\underline{x} - \underline{x}'|}}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

Αυτή η προσεγγιστική λύση αναφέρεται γενικά ως προσέγγιση του Born η, με μεγαλύτερη ακρίβεια, πρώτης τάξης προσέγγιση Born (ή η πρώτη προσέγγιση Born). Θα συζητήσουμε τώρα μερικές από τις συνεπειές της. Συχνά κάνουμε τις μετρήσεις μακριά από τον σχεδαστή, και μπορούμε ευκολα να

καθορίσουμε τη συμπεριφορά του μακρινου πεδίου. Για αυτο το λόγο αντικαθιστούμε για το σφαιρικο κυμα στην την προσεγγιση και βρισκουμε οτι

$$U(r\underline{s}) \sim e^{i\underline{s}_0 \cdot \underline{x}} + f_1(\underline{s}, \underline{s}_0) \frac{e^{ikr}}{r}$$

ας $kr \rightarrow \infty$, \underline{s} δοσμένη, οπου

$$f_1(\underline{s}, \underline{s}_0) = \int_{\Omega} F(\underline{x}) e^{i\underline{\ell} \cdot \underline{x}'}, \quad \underline{\ell} = \underline{s} - \underline{s}_0$$

Η εκφραση (24) για το πλατος σκέδασης $f_1(\underline{s}, \underline{s}_0)$ εχει σημαντικες φυσικες επιπτώσεις. Για να το δουμε αυτο εισαγουμε αρχικα το μετασχηματισμο κατα Fourier του δυναμικου σκέδασης,

$$\widehat{F}(\underline{x}i) = \int_{\Omega} F(\underline{x}) e^{i\underline{\xi} \cdot \underline{x}}$$

η οποία προφανώς σημαινει οτι

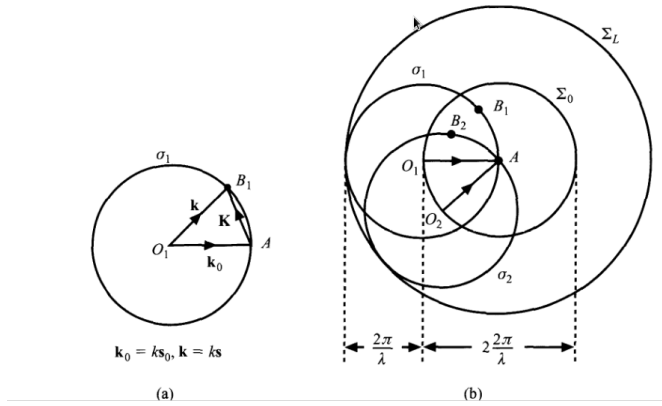
$$f_1(\underline{s}, \underline{s}_0) = \widehat{F}(k(\underline{s} - \underline{s}_0)), \quad k = |\underline{\xi}|$$

εκφραζοντας ενα πολυ βασικο αποτελεσμα. Αυτο σημαινει οτι κατα την ακριβεια της πρώτης - τάξης προσεγγιση Born, το (γενικα σύνθετο) πλάτος του σκεδασθεντος κυματος (με μεγαλυτερη ακριβεια, το σκεδαζον πλατος) στην μακρινή ζωνη του σκεδαστή, στην κατευθυνση που καθοριζεται απο το μοναδιαιο διανυσμα \underline{s} , εξαρτάται εξ ολοκληρου απο μια και μονο μια συνιστώσα του Fourier του σκεδάζοντος δυναμικου:

$$\underline{\xi} = k(\underline{s} - \underline{s}_0)$$

Ο απλός αυτός τύπος εχει την αμεση σχεση με το προβλημα της αντίστροφης σκέδασης, δηλ. το προβλημα της απόκτησης πληροφοριών για ενα αντικείμενο απο τις μετρησεις του σκεδασθεντος πεδίου απο αυτο. Αυτος ο τυπος δειχνει οτι εαν ενα επιπεδο κυμα προσπίπτει στο σκεδαστη στην κατευθυνση \underline{s}_0 και το σκεδασθεν πεδιο μετράται στην κατευθυνση \underline{s} , μπορεί κανεις να καθορισει απο τη μια μετρηση μια συνιστωσα του δυναμικου σκεδασης Fourier: δηλαδη που επισημαινονται απο το διανυσμα συχνότητας (διανυσμα στο ξ -διαστημα). Ας εξετάσουμε το συνολο ολων των συνιστωσων Fourier του δυναμικου σκεδασης που μπορεί να συναχθει απο τετοια πειράματα. Αυτο μπορεί να γινει πολυ πιο κομψα με τη βοήθεια της ακολουθης γεωμετρικης κατασκευης: Υποθεστε πρωτα οτι το αντικειμενο ειναι φωτισμενο στην κατευθυνση \underline{s}_0 και το μιγαδικό πλατος του πεδίου σκεδασης μετρηται στην μακρινή ζωνη σε ολες τις πιθανες κατευθυνσεις \underline{s} . Απο αυτες τις μετρησεις μπορεί κανεις να λαβει, συμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις, ολες τις συνιστώσες Fourier \widehat{F} του δυναμικου σκεδασης F που ορίζονται από τα ξ -διανυσματα των οποίων τα τελικα σημεια βρισκονται σε μια σφαιρα S^2 ακτινας $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ με κεντρο το σημειο $-\underline{k}\underline{s}_0$, λ που ειναι το μήκος κυματος που συνδεεται με τη συχνοτητα ω . Θα ομαζουμε αυτή την σφαιρα ως σφαιρα ανακλασης του **Ewald** [δειτε το σχεδιο 4 (α)], ανάλογα με την αντιστοιχια του ορου που χρησιμοποιειται στη θεωρια της περιθλασης των ακτινων- X απο κρυστάλλους, οπου το δυναμικο ειναι η περιοδικη συναρτηση της θεσης (που συζητειται εν συντομια στην 13.1.3).

Εν συνεχεία ας υποθεσουμε οτι το αντικειμενο φωτίζεται από μια διαφορετικη κατεύθυνση πρόσπτωσης και το σκεδαζόμενο πεδιο μετράται παλι στην μακρινή ζωνη σε ολες τις πιθανες κατευθυνσεις \underline{s} . Απο τετοιες μετρησεις καποιος λαμβανει εκεινες τις συνιστωσες Fourier του δυναμικου σκεδασης



Σχήμα 2.4: Σφαίρα Ewald

που ορίζονται από ξ -διανύσματα των οποίων τα τελικά σημεία βρίσκονται σε άλλη σφαίρα ανάκλασης Ewald, S^2 [δείτε το σχέδιο 13.4 (β)]. Εάν το ένα συνεχίζει αυτήν την διαδικασία, για όλες τις πιθανές κατευθύνσεις της πρόσπτωσης \underline{s}_0 , κάποιος μπορεί να καθορίσει όλα εκείνες τις συνιστώσες Fourier του δυναμικού σχεδασής που ορίζονται από $\underline{\xi}$ -διανύσματα των οποίων τα τελικά σημεία καλύπτουν την περιοχή που βρίσκεται σε μια άλλη από τις σφαίρες ανάκλασης του Ewald που συνδέεται με όλες τις πιθανές κατευθύνσεις της πρόσπτωσης. Αυτή η περιοχή είναι το εσωτερικό μιας σφαίρας S^2 ακτίνας $2k = \frac{2p}{\lambda}$, η οποία μπορεί να ονομασθεί *περιορισμένη σφαίρα Ewald*. Από την προηγούμενη συζήτηση καταλήγουμε ότι εάν κάποια ήταν για τη μέτρηση του πεδίου σχεδασής στην μακρινή ζώνη σε όλες τις κατευθύνσεις της πρόσπτωσης και όλες τις πιθανές κατευθύνσεις σχεδασής μπορούμε να καθορίσουμε όλες τις συνιστώσες του Fourier, \hat{F} του δυναμικού σχεδασής που ορίζονται από τα ξ -διανύσματα μήκους

$$|\underline{\xi}| \leq 2k = \frac{4\pi}{\lambda}$$

Τότε θα μπορούσε κανείς να συνθέσει όλες αυτές τις συνιστώσες Fourier να ορίσουν

$$F_{LP}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|\underline{\xi}| \leq 2k} \hat{F}(\underline{\xi}) e^{i\underline{\xi} \cdot \underline{x}}$$

που ονομάζεται *προσεγγισή κατώτερης στάθμης* του δυναμικού σχεδασής. Το σχεδάζον δυναμικό περιέχει όλα τις συνιστώσες Fourier, που δίνονται με τον αντιστροφο της (25), δηλαδή

$$F(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \hat{F}(\underline{\xi}) e^{i\underline{\xi} \cdot \underline{x}}$$

όπου η ολοκλήρωση εκτείνεται σε ολόκληρο το ξ -χώρο. Επειδή η προηγούμενη ανάλυση είναι βασισμένη στην βαθμωτή προσεγγισή που θεωρήθηκε σιωπηρά ότι το σχεδάζον δυναμικό δεν διαφέρει αρκετά σε αποστάσεις της τάξης του μήκους κυματός. Κατω από αυτές τις περιστάσεις η προσέγγισή χαμηλής στάθμης του δυναμικού σχεδασής μπορεί να αναμενεται ως μία καλή προσεγγισή στην αληθινό σχεδάζον δυναμικό. Η σημασία της ανισοτητας της (28) γίνεται κάπως πιο εμφανής εκφράζοντας την αποψη των χωρικών περιόδων Δx_i του δυναμικού σχεδασής, καθορισμένη από τους τυπους

$$\Delta x_i = \frac{2\pi}{|\xi_i|}$$

οπου $\xi_i, i = 1, 2, 3$ είναι οι καρτεσιανες συνιστώσες του διανυσματος \underline{k} . Οσον αφορά τις χωρικές περιόδους, η ανισότητα της (28) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\Delta x_i)^2} \leq \frac{4}{\lambda^2}$$

Η ανισότητα στη συνέχεια επιφέρει ότι

$$|\Delta x_i| \geq \frac{\lambda}{2}$$

Αυτή η ανισότητα δείχνει ότι οι μετρήσεις του σχεδασθέντος πεδίου στη μακρινή ζώνη μπορούν στην καλύτερη περίπτωση να παράσχουν πληροφορίες για τη δομή του σχεδαστή στις λεπτομέρειες της τάξης του μισού μήκους κύματος. Δεν υπάρχει καμμία απλή ερμηνεία της ανισότητας (32) για την τρισδιάστατη περίπτωση αλλά περιμενουμε, χοντρικά ότι η προσέγγιση χαμηλής στάθμης περιεχει πληροφορίες σχετικές με τις λεπτομερειες του αντικειμένου με όριο της τάξης του μήκους κυματος.

Το θέμα της απόκτησης πληροφορίας σχετικά με λεπτομερειες μικροτερες από το μήκος κυματος, με μεγαλύτερη ακριβεια, για τις υψηλές χωρικές συνιστώσες συχνότητας, με ξ-διανυσματα που έχουν άκρα έξω από την περιορισμένη σφαιρα του Ewald ($|\underline{\xi}| > \frac{4\pi}{\lambda}$) και έχει μελετηθεί από πολλους συγγραφείς στα πλαίσια της γενικής θεωρίας της υπερανάλυσης και προσέγγισης. Η δυνατότητα εξαγωγής τέτοιων πληροφοριών από χαμηλής χωρικής συχνότητας δεδομένα είναι συνεπεια της πολυδιαστατης μορφής (θεώρημα Plancherel- Polya). Με την μονοδιαστατη μορφη του το θεωρημα βεβαιώνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier \hat{F} μιας συναρτησης f συμπαγούς φορέα είναι η οριακή τιμή στον πραγματικό $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ μιας ακέραιας αναλυτικής συναρτησης μιας μιγαδικής $k \in \mathbf{C}$. Ως εκ τούτου, κατ' αρχήν, σαν συνεπεια από την εκδοχή τριών διαστασεων αυτού του θεωρήματος, \hat{f} μπορεί αναλυτικά να συνεχιστεί και μετά την περιορισμένη σφαιρα Ewald στο ξ-διαστημα. Ωστόσο, στην πράξη μόνο ένα πολύ μικρο ευρος παρεκτασης είναι εφικτό λόγω των επιπτώσεων του θορυβου και των ασταθειων.

2.2.1 Σκέδαση από περιοδικά δυναμικά

Θα εξηγήσουμε την προηγούμενη ανάλυση εξετάζοντας σκέδαση από περιοδικά δυναμικά. Η ασθενής σκέδαση αντικειμένου που καταλαμβάνει μια περιοχή Ω που έχει τη μορφή του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου

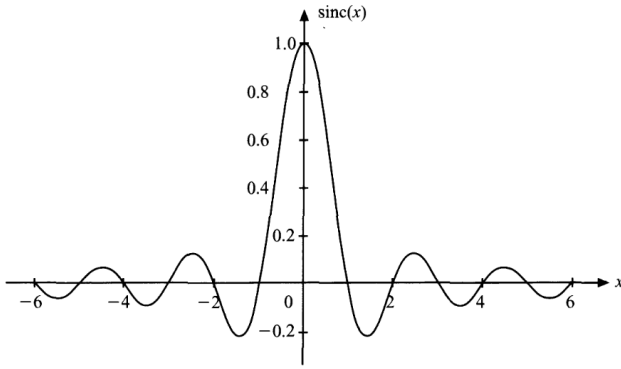
$$|x_1| \leq \frac{A_1}{2}, \quad |x_2| \leq \frac{A_2}{2}, \quad |x_3| \leq \frac{A_3}{2}$$

Υποθετούμε ότι το σχεδάζον δυναμικό $F(\underline{x})$ του αντικειμένου είναι περιοδικό στις τρεις αξονικές κατευθύνσεις, με περιόδους $\Delta x_i = a_i$. Μπορούμε επείτα να αναπτύξουμε το δυναμικό σκέδασης σε τριπλή σειρά Fourier

$$F(\underline{x}) = \sum_{\underline{\ell} \in \mathbf{Z}^3} g_{\underline{\ell}} e^{2\pi i Q(\underline{\ell}, \underline{x})}, \quad Q(\underline{\ell}, \underline{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\ell_i x_i}{a_i}$$

οταν $\underline{x} \in \Omega$, και όταν $\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus \Omega$ όπου $\underline{\ell} \in \mathbf{Z}^3$ διατρέχουν όλες τις ακέραιες τιμές και $g_{\underline{\ell}}$ είναι σταθερές. Ο μετασχηματισμός Fourier, ορίζεται από την (25), των δυναμικών (35) δίνεται από την εκφραση

$$\hat{F}(\underline{\xi}) = A_1 A_2 A_3 \pi^3 \sum_{\underline{\ell} \in \mathbf{Z}^3} g_{\underline{\ell}} S(\underline{\ell}; \underline{\xi})$$



Σχήμα 2.5: Η συνάρτηση Shannon sinc

με

$$S(\underline{\ell}, \underline{\xi}) = \text{sinc} \left[\frac{A_1}{2} \left(\frac{2\ell_1}{\alpha_1} - \frac{\xi_1}{\pi} \right) A_1 \right] \cdot \text{sinc} \left[\frac{A_2}{2} \left(\frac{2\ell_2}{\alpha_2} - \frac{\xi_2}{\pi} \right) A_2 \right] \cdot \text{sinc} \left[\frac{A_3}{2} \left(\frac{2\ell_3}{\alpha_3} - \frac{\xi_3}{\pi} \right) A_3 \right]$$

Οπου

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

Η συναρτηση sinc παρίσταται γραφικά στο σχήμα 13.5. Βλέπουμε οτι μειωνεται απο την τιμη στο $x = 0$ στη μηδενικη τιμη $x = \pm \frac{1}{2}$ και τοτε ταλαντώνεται με ταχεια μείωση του πλάτους. Ας υποθέσουμε τώρα οτι οι γραμμικες διαστάσεις του ογκου σχεδασης ειναι μεγαλες σε συγκριση με τις περιόδους δηλαδή οτι

$$A_i \gg \alpha_i$$

Κάτω απο αυτες τις περισταςεις οι λόγοι $\frac{A_i}{\alpha_i}$ θα πρεπει να ειναι μεγαλοι σε σχεση με τη μονάδα και, συνεπώς, λαμβανοντας υπόψη τη συμπεριφορά της συναρτησης sinc η εκφραση S και ως εκ τουτου επισης ο μετασχηματισμος κατα Fourier του δυναμικου σχεδασης θα εχει τις μη αμελητες τιμες μονο οταν

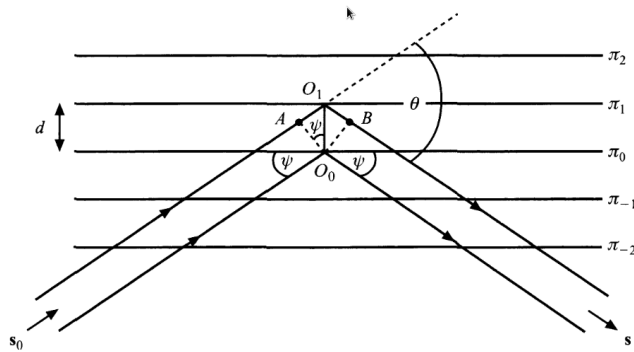
$$\xi_i \approx \frac{2\pi\ell_i}{\alpha_i}$$

Η τελευταία σχέση (το αναλογο στην κβαντικη μηχανικη εξισωση μεταφορας της ορμής) βεβαιώνει οτι η ενταση του σχεδασθεντος πεδιου στην μακρινή ζωνη ειναι σημαντικη μονο στις κατευθυνσεις $\underline{s} = (s_1, s_2, s_3)$

$$s_i - s_{0i} = \frac{\ell_i \lambda}{\alpha_i}$$

οπου \underline{s}_0 ειναι το μοναδιαίο διάνυσμα \underline{s}_0 στην κατευθυνση της διάδοσης του προσπίπτοντος επιπέδου κυματος.

Οι σχέσεις (41) ειναι γενικευσεις των αντιστοιχων τυπων για μονοδιαστατα και δισδιαστατα φράγματα περιθλασης (μερικες φορες αποκαλουμενα γραμμικά φράγματα και διδιάστατα φράγματα αντιστοιχα). Εντούτοις, υπάρχει μια ουσιαστικη διαφορα. Ενώ για τα γραμμικά φράγματα οι εξισωσεις έχουν λυσεις για κατευθυνσεις \underline{s} της περιθλασης (εκει που ειναι μια τετοια εξισωση για τα γραμμικά και τετραγωνικά φράγματα), αυτο δεν ειναι ετσι για τα τρισδιαστατα φράγματα (επισης αποκαλουονται φράγματα χωρου). Έτσι το σύνολο τριών εξισωσεων για μονο δυο ανεξαρτητες συνιστωσες \underline{s} (έστω



Σχήμα 2.6: Νόμος Bragg

s_1, s_2), καθώς οι τρεις συνιστώσες που σχετίζονται με την εξίσωση $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$. Ως εκ τούτου οι τρεις εξισώσεις μπορούν να ικανοποιηθούν μόνο για μερικές συγκεκριμένες τιμές του λ εάν οι άλλες παραμετροί στη δεξιά πλευρά καθορισθούν. Αυτό υπονοεί ότι ενώ τα γραμμικά φράγματα και τα τετραγωνικά φράγματα παράγουν ένα συνεχές φάσμα με το προσπιπτον φως που περιέχει ένα ευρύ των μηκών κυματος, τα φράγματα χωρού είναι επιλεκτικά: με κάθε μέγιστο έντασης, που ορίζεται από τριάδα ακεραίων αριθμών $\underline{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbf{Z}^3$, υπάρχει ένα χαρακτηριστικό μήκος κυματος που συνδεονται.

Μεχρι τώρα έχουμε συζητήσει τις θέσεις των μεγίστων των εντασεων του σχεδασθέντος πεδίου στη μακρινή ζώνη. Οι πραγματικές τιμές των μεγίστων, τα οποία είναι αναλογα του τετραγώνου του συντελεστή του σχεδασθέντος πεδίου, είναι σύμφωνα με την (23) και την (26) αναλογα προς $|\hat{F}(k(\underline{s} - \underline{s}_0))|^2$. Ως εκ τούτου εάν οι συντελεστές Fourier, $g_{\underline{\ell}}$ του σχεδάζοντος δυναμικού είναι γνωστοί, τα μέγιστα όρια έντασης μπορούν να υπολογισθούν.

Λόγω της στενής αναλογίας μεταξύ της σχεδασής σε ένα περιοδικό δυναμικό και της περιθλασης του φωτός από ένα φράγμα συνήθως μιλάμε σε τέτοιες καταστάσεις για περίθλασης παρά για σκέδαση.

Τα αποτελέσματα που μόλις επιτύχαμε έχουν στενή σχέση στην τεχνική προσδιορισμού των δομών των στερεών από τα πειράματα περιθλασης των ακτίνων-X. Τα περισσότερα στερεά αποτελούνται από μια περιοδική τοποθέτηση των ατομών στα κρυσταλλικά πλέγματα, η περιοδική δομή καλείται μοναδιαία κυψελίδα. Η απόσταση των γειτονικών ατομών είναι συνήθως της τάξης μιας μονάδας Angstrom (Å). Αυτό είναι το μέγεθος των μηκών κυματος των ακτίνων X που είναι χαρακτηριστικά μεταξύ περίπου 0,1 Å και 10 Å. Το 1912 Max von Laue πρόβλεψε, πριν από την καθιέρωση των θεωριών της ατομικής δομής της ύλης και της φύσης του κύματος των ακτίνων-X, ότι ένα στερεό προξενεί περιθλαση ακτίνων X με παρόμοιο τρόπο όπως ένα φράγμα θα προκαλεί περιθλαση του φωτός. Αυτή η προβλεψη επιβεβαιώθηκε σύντομα από το πείραμα και αυτές οι πρόωρες έρευνες ήταν η προέλευση μιας ιδιαίτερα επιτυχούς και σημαντικής τεχνικής για τη μελέτη της δομής του θεματος, Για να δείξει πως οι βασικοί νόμοι της θεωρίας της περιθλασης των ακτίνων X προκύπτουν από τη θεωρία του δυναμικού σχεδασής θα περιοριστούμε στην απλούστερη περίπτωση των ορθορομβικών κρυστάλλων. Σε ένα τέτοιο κρυστάλλο η μοναδιαία κυψελίδα είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Παίρνουμε τους συντεταγμένους άξονες κατά μήκος των ακμών της μοναδιαίας κυψέλης και τις συμβολίζουμε με $a_i, i = 1, 2, 3$ τα μήκη τους. Ακόμα συμβολίζουμε με A_1, A_2, A_3 τα μήκη των πλευρών του κρυστάλλου και υποθέτουμε ότι $A_i > a_i$. Προφανώς η κατάσταση είναι εντελώς αναλογη με αυτό που έχουμε αντιμετωπίσει κατά την εξέταση της σχεδασής από ένα περιοδικό δυναμικό. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην παρούσα περίπτωση τα

μηκη κυματος της ακτινοβολιας (ακτινες X) ειναι της τάξης των παραμετρων πλεγματος $a_i, i = 1, 2, 3$ ενω στην προηγουμενη περιπτωση (με το φως παρα τις ακτινες X) τα μηκη κυματος ειναι γενικα πολυ μεγαλυτερα απο τις περιόδους των δυναμικων. Αν και περιοριζουμε τη συζητηση μας στη περιθλαση από ορθορομβικούς κρυστάλλους - οι τρικλινείς κρυστάλλους μπορούν να αντιμετωπιστουν κατα παρομοιο τροπο, εάν χρησιμοποιηθει ενα πλαγιο αντί ορθογωνιου συστηματος.

Στα πλαίσια της θεωριας της περιθλασης των ακτινων X απο τους κρυστάλλους, (ειναι γνωστες ως εξισωσεις του von Laue και ειναι οι βασικες εξισωσεις της θεωριας. Καποιος μπορει ευκολα να συμπερανει απο αυτες εναν αλλο σημαντικο νομο της θεωριας με τον ακολουθο τροπο: Ας τετραγωνισουμε και τις δυο πλευρες σε καθε μια απο τις τρεις εξισωσεις και τις προσθέσουμε χρησιμοποιώντας το γεγονος οτι

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1, \quad s_{01}^2 + s_{02}^2 + s_{03}^2 = 1$$

Επειτα λαμβάνουμε την εξισωση

$$2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\lambda}{D}$$

όπου

$$D = \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\ell_i}{a_i} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

και θ ειναι η γωνια της σχεδασης (περιθλαση), δηλ. η γωνια μεταξυ της κατευθυνσης της σχεδασης ($U^{(s)}$) και της κατευθυνσης του προσπιπτοντος ($U^{(i)}$), ετσι ώστε

$$\underline{s} \cdot \underline{s}_0 = \cos \theta$$

Οι ακεραιοι αριθμοι $\ell_i, i = 1, 2, 3$ εχουν εναν κοινο παραγοντα που ειναι ενας ακεραιος αριθμος, πειτε εστω κ , και εαν θεσουμε

$$\ell_i = \kappa \bar{\ell}_i$$

και

$$D = \frac{d}{n}, \quad d = \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\bar{\ell}_i}{a_i} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

(42) γινεται

$$2d \sin \psi = \kappa \lambda$$

όπου

$$\psi = \frac{\theta}{2}$$

Ο τυπος αυτός ειναι ενα αλλο βασικο αποτελεσμα της θεωριας της περιθλασης ακτινων X απο κρυστάλλους, γνωστός ως νόμος Bragg. Έχει μια απλη γεωμετρικη σημασια που τωρα θα συζητησουμε εν συντομια. Εστω ένα πλεγματικό επιπεδο π

$$Q(\bar{\ell}, \underline{x}) = \kappa$$

οπου κ ειναι ενας ακεραιος αριθμος. Περιεχει εναν απειρο αριθμο σημειων πλέγματος (γωνιες των μοναδιαων κυψελίδων). Οι αριθμοι h_1^*, h_2^*, h_3^* ειναι γνωστοι ως δεικτες του Miller του πλεγματικού επιπέδου.

Στη θεωρία της περιθλασης των ακτινών- X από τους κρυστάλλους, ο νόμος Bragg εκφράζει την προϋπόθεση για την εποικοδομητική συμβολή των ακτινών που απεικονίζεται από τα διαδοχικά επίπεδα πλέγματα έτσι ώστε να παραγουν τα μέγιστα έντασης. Για να καταδείξουμε αυτό το γεγονός ως θεωρήσουμε μια παράλληλη ακτίνα, προσπίπτουσα στην κατεύθυνση \underline{s}_0 και ανακλώμενη στην κατεύθυνση \underline{s} . Ας είναι το O_1 ένα σημείο του επιπέδου πλέγματος P_1 όπου μια προσπίπτουσα ακτίνα ανακλάται και αφήνει το O_0 να είναι το αντίστοιχο σημείο P_0 πλέγματος (βλ. το σχέδιο 13.6). Η διαφορά πορειών D μεταξύ των ακτινών που ανακλώνται στο O_1, O_0 είναι

$$D = AO_1 + O_1B,$$

όπου το A, B είναι τα ίχνη των καθέτων που μειώθηκαν από O_0 επάνω στις προσπίπτουσες ακτίνες και αντανακλάστηκαν σε O_1 . Οι ακτίνες που αντανακλάστηκαν σε O_1, O_0 παρεμβάνουν εποικοδομητικά όταν

$$kD = 2\ell\pi,$$

ℓ είναι ένας ακέραιος αριθμός. Αφήνουμε το θ να είναι, όπως πριν, η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων των μοναδιαίων διανυσμάτων $\underline{s}, \underline{s}_0$ και αφήνουμε το ψ να είναι η γωνία όπου μια προσπίπτουσα ακτίνα κάνει με ένα επίπεδο πλέγμα. Ένα απλό γεωμετρικό επιχειρήμα δείχνει πως το $\psi = \frac{\theta}{2}$ και συνεπώς, όπως φαίνεται από την (50) και από το σχέδιο 13.6,

$$D = 2d \sin \psi$$

όπου το d είναι η απόσταση μεταξύ των δύο γειτονικών επιπέδων πλέγματος π_0, π_1 . Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις (51) και (52) βλέπουμε ότι η προϋπόθεση για εποικοδομητική συμβολή είναι

$$2d \sin \psi = \ell\lambda$$

που είναι ακριβώς ο νόμος του Bragg (47).

Μπορεί κανείς να αναρωτηθεί γιατί η πρώτη προσέγγιση του Born περιγράφει τόσο καλά την κατανομή της έντασης που παραγεται με τη σκεδάση των ακτίνων- X από τα κρυστάλλους: στην περίπτωση αυτή το σχεδασθέν πεδίο είναι ισχυρό σε ορισμένες κατευθύνσεις, σε αντίθεση με την υπόθεση της ασθενούς σκέδασης, που υποθέτει τη χρήση της εν λόγω προσέγγισης. Η εξήγηση βρίσκεται στο γεγονός ότι, επειδή από το ίσο διάστημα μεταξύ ορισμένων επιπέδων σε ένα κρυστάλλο (τα πλεγματοειδή επίπεδα), παρεμβολές μεταξύ των ακτινών X που ανακλώνται από αυτά τα επίπεδα, παρά τη σκεδάση από τα επιμέρους άτομα, διαδραματίζουν ένα σημαντικό ρόλο στο σχηματισμό του παρατηρούμενου πεδίου. Ο Max von Laue έλαβε το βραβείο Nobel το 1914 στη φυσική για την ανακάλυψη της περιθλασης των ακτινών X από τους κρυστάλλους. Το βραβείο Nobel του 1915 στη φυσική απονεμήθηκε από κοινού στον W. H. Bragg και στο γιο του, W. L. Bragg, για τις έρευνες τους πάνω στην ανάλυση της κρυσταλλικής δομής από αυτή την τεχνική.

Μερικές από τις έννοιες που έχουμε αντιμετωπίσει στη συνοπτική συζήτηση μας για την περιθλαση των ακτινών X από τους κρυστάλλους είναι σημαντική στην ολογραφία, ειδικά σε σχέση με τα ολογράμματα σγκου. Τέτοια ολογράμματα αποτελούνται από τρισδιάστατα συνολα στρωμάτων με την περιοδική μεταβολή του δείκτη διάθλασης ή των συντελεστών απορρόφησης. Ο νόμος του Bragg διαδραματίζει έναν κεντρικό ρόλο στη θεωρία τέτοιων ολογραμμάτων. Είναι επίσης σημαντικός στην οπτικοακουστική.

2.2.2 Πολλαπλή σκέδαση

Ας επιστρέψουμε τώρα στη βασική εξίσωση του δυναμικού σχεδασής, παίρνοντας ως προσπίπτον κύμα ένα επίπεδο κύμα με συχνότητα ω

$$U(\underline{x}) = U^{(i)}(\underline{x}) + \int_{\Omega} U(\underline{x}')F(\underline{x}')G(\underline{x} - \underline{x}')$$

όπου

$$U^{(i)} = e^{iks_0 \cdot \underline{x}}$$

Και

$$G(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{e^{ik|\underline{x} - \underline{x}'|}}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

Όπως επισημαναμε νωριτερα, εαν η σχεδαση ειναι ασθενής $|U^{(s)}| < |U^{(i)}|$, θα μπορουσε κανεις να περιμενει να λαβει μια καλη προσεγγιση στο ολικό πεδιο εαν το U αντικατασταθει απο $U^{(i)}$ στο ολοκληρωμα στο δεξιό μέλος. Αυτο δινει την πρώτης τάξης προσεγγιση του Born.

$$U_1(\underline{x}) = U^{(i)}(\underline{x}) + \int_{\Omega} G(\underline{x} - \underline{x}')F(\underline{x}')U_1(\underline{x}')$$

Περιμενουμε οτι μια βελτιωμενη προσεγγιση λαμβανεται εαν καποιος αντικαταστησει το U_1 αντί του U στη δεξια πλευρα της ολοκληρωτικης εξισωσης (54). Αυτο οδηγει στην προσέγγιση Born δεύτερης τάξης $U = U_2$,

$$U_2(\underline{x}) = U^{(i)}(\underline{x}) + \int_{\Omega} F(\underline{x}')G(\underline{x} - \underline{x}')U_1(\underline{x}')$$

Καποιος μπορει να συνεχίσει αυτην την διαδικασια με την επομενη αντικατασταση U_2 αντί U στο ολοκληρωμα κ.ο.κ και το ενα λαμβανει την ακολουθια των διαδοχικων προσεγγισεων

$$U_1, \dots, U_n$$

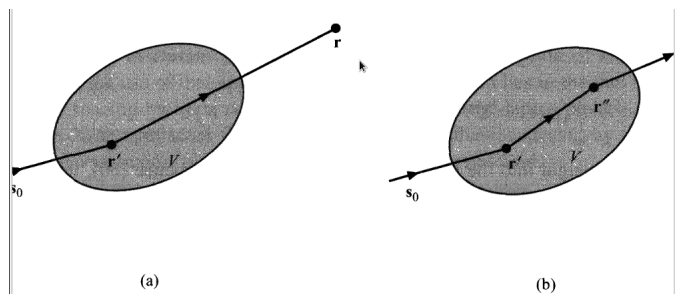
όπου καθε ορος προερχεται απο την προηγουμενη με την βοηθεια της σχεσης επαναληψης

$$U_{n+1}(\underline{x}) = U^{(i)}(\underline{x}) + \int_{\Omega} F(\underline{x}')G(\underline{x} - \underline{x}')U_n(\underline{x}')$$

Η φυσικη σημασια της ακολουθιας αυτης αναδεικνυεται εαν ξαναγραψουμε πρωτα την εκφραση για U_2 σε μια πιο σαφη μορφη. Εαν αντικαταστησουμε το U_1 και κανουμε μια μικρη αλλαγη στο συμβολισμό βρίσκουμε οτι

$$U_2(\underline{x}) = U^{(i)}(\underline{x}) + \int_{\Omega} G(\underline{x} - \underline{x}')F(\underline{x}')U^{(i)}(\underline{x}') + \int_{\Omega} \int_{\Omega} F(\underline{x}')G(\underline{x} - \underline{x}')F(\underline{x}'')G(\underline{x} - \underline{x}'')$$

Βλεπουμε οτι ο δευτερος ορος στα δεξια ειναι ενα ολοκληρωμα περα απο τον σχεδαζον ογκο Ω και οτι ο τριτος όρος περιλαμβάνει την ολοκληρωση που αναλαμβάνεται δυο φορες ανεξαρτητα απο τον ογκο. Εαν συνεχισουμε αυτην την διαδικασια προφανως θα διαπιστωσουμε οτι η εκφραση U_n για τάξης n προσεγγιση περιλαμβάνει τα ολοκληρωματα που λαμβανονται μια φορα, δυο φορες, ..., n φορες



Σχήμα 2.7: Απλή και διπλή σκέδαση

περα απο τον σκεδαζον ογκο. Οι τυποι γινονται ολο και μεγαλυτεροι χρησιμοποιούμε μία συμβολικη μορφη. Ειδικότερα, στην εξίσωση (61) ο U_2 μπορεί να γραφτει οπως

$$U_2 = U^{(i)} + FG U^{(i)} + FGFG U^{(i)}$$

Και η εκφραση για τον γενικο ορο, U_n , μπορεί προφανως να γραφει ετσι

$$U_n = U^{(i)} + FG U^{(i)} + \dots + \underbrace{FG \dots FGF}_{n\text{-παράγοντες}} U^{(i)}$$

Η φυσικη σημασια των διαδοχικών ορων εχει ως εξης: Το γινόμενο $FU^{(i)}$, μεσα στο ολοκληρωμα στην (57) και επισης το πρωτο ολοκληρωμα στο δεξιό μέλος της (61) μπορεί να θεωρηθει ως η συνεισφορά της σκέδασης του προσπιπτοντος πεδιου της περιοχης του ογκου γυρω απο το τυχόν σημειο του σκεδαστη. Θα λειτουργει ως μια αποτελεσματικη πηγή η οποια συμβαλει $U^{(i)}(\underline{x}) = F(\underline{x})G(\underline{x} - \underline{x}')$ στο πεδιο σε ενα αλλο σημειο, ρ , το οποια μπορεί να βρισκεται ειτε στο εσωτερικο ειτε στο εξωτερικο Ω . Προφανώς η συναρτηση Green $G(\underline{x} - \underline{x}')$ ενεργει ως μεταδότης που μεταφερει τη συνεισφορά από το σημειο \underline{x}' στο σημειο \underline{x} . Ετσι το ολοκληρωμα περα απο τον ογκο Ω συμβολίζει τη συνολικη συμβολη απο ολα τα στοιχεια του ογκου απο τον σκεδαστη. Αυτη η διαδικασια ειναι γνωστη ως απλή σκέδαση και διευκρινιζεται στο σχεδιο 7(α). Εκτος απο την απλή σκέδαση, υπαρχουν επισης συνεισφορες στο συνολικο πεδιο που προκυπτουν απο αλλες διαδικασίες σκεδασης. Για παραδειγμα, η συνεισφορα

$$F(\underline{x}')G(\underline{x} - \underline{x}')U^{(i)}(\underline{x})$$

η οποια φτανει σε ενα αλλο σημειο \underline{x}'' θα σκεδαστει το ιδιο απο μονο του, γύρω από το \underline{x}' θα οδηγησει σε αλλη συνεισφορα,

$$U^{(i)}(\underline{x}')F(\underline{x}')G(\underline{x}' - \underline{x}'')F(\underline{x}'')G(\underline{x} - \underline{x}'')$$

στο πεδιο σε καθε σημειο \underline{x} . Ο τελευταιος ορος στα δεξια της συμβολίζει το πεδιο σε ενα σημειο \underline{x} , προκυπτει απο αυτη τη διαδικασια, εκφραζει την επιδραση της διπλης σκεδασης. Ειναι διευκρινισμενο στο σχεδιο 13.7 (β) Προφανως καποιος μπορεί να ερμηνευσει ολους τους διαδοχικους ορους με παρομοιο τροπο. Καθε διαδοχικος ορος λαμβανει υποψη μια ακομα συμβολη της στοιχειωδους διαδικασιης της σκεδασης απο την προηγουμενη. Ο γενικος ορος, $FGFG\dots FG U^{(i)}$ που περιεχει n -γινόμενα FG λεγεται οτι για να αντιπροσωπευθει η επιδραση της πολλαπλης σκεδασης της ταξης n . Υπο τις καταλληλες προουποθεσεις, η ακολουθια U_1, U_2, \dots, U_n , των διαδοχικων προσεγγισεων μπορεί να αναμενονται για να συγκλινουν στην ακριβη λυση της ολοκληρωτικης εξισωσης της σκεδασης, αλλα οι προουποθεσεις που το εξασφαλιζουν αυτο ειναι δυσκολο να καθιερωθουν. Εντουτοις, το θεμα

2.3. ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΚ

της συγκλίσης είναι, λιγής πρακτικής συνεπειας επειδή είναι σπανία η πιθανότητα να πραγματοποιήσει τους υπολογισμούς πέρα από την πρώτη - ή την δεύτερη τάξη προσεγγίσης. Ο λόγος είναι σαφής εάν σημειώνουμε ότι κάθε διαδοχικός όρος στην ακολουθία διαταρχών περιλαμβάνει τις ολοκληρωτικές ποσοτητες πέρα από τις υψηλότερες περιοχές και υψηλότερης διαστατικότητας. Ειδικότερα η πρώτη τάξης προσεγγίση του Born απαιτεί τον υπολογισμό ενός τρισδιάστατου ολοκληρώματος και η δεύτερης τάξης περιλαμβάνει τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος έξι διαστάσεων.

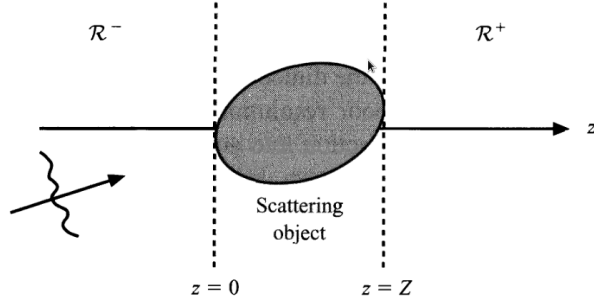
Αναπτύγματα διαταρχών αυτό του τυπου που εξετάσαμε εδώ έχουν ερευνηθεί στη γενική θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων, και το ανάπτυγμα ως $n \rightarrow \infty$ είναι γνωστή ως σειρά Liouville-Neumann.

2.3 Αρχές της τομογραφίας περιθλάσης για την ανακατασκευή του δυναμικού σκέδασης

Σε προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε τη μέθοδο υπολογιστικής τομογραφίας για τον καθορισμό της δομής τρισδιάστατων αντικειμένων (συχνα τους συντελεστες απορροφησης) από τις μετρήσεις μεταβολής της έντασης της ακτινοβολίας η οποία περνά μέσω των αντικειμένων σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Η μέθοδος είναι βασισμένη στη γεωμετρική οπτική, η οποία είναι επαρκής για την ανακατασκευή όταν τα μήκη κύματος της ακτινοβολίας που υιοθετείται (συνήθως ακτίνες-X) είναι πολύ μικρά συγκρινόμενα με το μήκος κλίμακας της μεταβολής των φυσικών παραμετρών του αντικειμένου. Εντούτοις, οι ακτίνες - X δεν είναι κατάλληλες για ορισμένους μαλακούς ιστούς, επειδή τους διαπερνούν χωρίς οποιαδήποτε σημαντική αλλαγή. Ένα σημαντικό παράδειγμα όπου η υπολογιστική τομογραφία δεν είναι αξιοπιστή είναι στην ανίχνευση ορισμένων καρκινικών ογκών γυναικείου στήθους. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται συχνα υπερηχητικά κύματα αντί των ακτίνων- X . Εντούτοις, επειδή τα υπερηχητικά μήκη κύματος, χαρακτηριστικά της τάξης του χιλιοστομετρου (συχνότητες της τάξης ενός MHz) είναι συγκρίσιμα με τις διαστάσεις των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων του αντικειμένου που κάποιος επιθυμεί να εξερευνήσει, με σχετικά φτωχή ανάλυση λαμβάνεται γενικά. Για να πετύχουμε καλύτερη ανάλυση πρέπει να συμπεριλάβουμε την περιθλάση. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρησιμοποίηση μιας διαφορετικής διαδικασίας ανακατασκευής, γνωστής ως τομογραφία περιθλάσης. Η τομογραφία περιθλάσης με υπερηχητικά κύματα καθίστα δυνατο τον καθορισμό όχι μόνο της κατανομής του συντελεστή απορροφησης του αντικειμένου, αλλά και την κατανομή του πραγματικού διαθλαστικού δείκτη. Εντούτοις, η τομογραφία περιθλάσης είναι υπολογιστικά πιο απαιτητική από την υπολογιστική τομογραφία και είναι κατά ένα μεγάλο μέρος αυτός ο λόγος που δεν έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως. Θα περιορίσουμε τη συζήτηση μας για την τομογραφία περιθλάσης κυρίως στην παραγωγή ενός κεντρικού θεωρήματος σχετικά με την ανακατασκευή με αυτήν την τεχνική.

2.3.1 Αναπαράσταση σκεδασθέντος πεδίου μέσω γωνιακού φάσματος

Το βασικό θεώρημα για την ανακατασκευή τρισδιάστατων αντικείμενων επιτυγχάνεται με την γωνιακή κατανομή φάσματος του σκεδασθέντος πεδίου. Θα συζητήσουμε αρχικά αυτήν την αναπαράσταση, την οποία συναντήσαμε σε μια πιο περιορισμένη μορφή στο πλαίσιο δισδιάστατων προβλημάτων. Θα βασίσουμε την ανάλυση μας στην προσεγγίση Born πρώτης τάξεως για το σκεδασθέν πεδίο. Δίνεται



Σχήμα 2.8: Γωνιακή κατανομή του σκεδασθέντος πεδίου

από τον δευτερο όρο στο δεξιό μέλος της

$$U_1^{(s)}(\underline{x}) = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} e^{iks_0 \cdot \underline{x}} F(\underline{x}') d\Omega$$

Το σφαιρικό κύμα στο ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί από την μορφή του H. Weyl:

$$\frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{ik}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{e^{i\underline{x}-\underline{x}' \cdot \underline{s}}}{s_3}$$

όπου

$$s_3 = \begin{cases} \sqrt{1-s_1^2-s_2^2} & \text{εάν } s_1^2+s_2^2 < 1 \\ i\sqrt{s_1^2+s_2^2-1} & \text{εάν } s_1^2+s_2^2 > 1 \end{cases}$$

Προφανώς s_1, s_2, s_3 είναι συνιστώσες ενός μοναδιαίου διανύσματος, αυτό το διάνυσμα είναι πραγματικό μόνο όταν $s_1^2+s_2^2 < 1$. Όταν $s_1^2+s_2^2 > 1$ η τρίτη συνιστώσα του είναι φανταστική. Υποθέστε τώρα ότι ο σκεδαστής τοποθετείται μέσα στην περιοχή $0 < x_3 < L_3$ και R_{\pm} συμβολίζουν τους ημιχώρους $x_3 < 0$ και $x_3 > L_3$ από τις δύο πλευρές του σκεδαστή (βλ. το σχέδιο 13.8).

Εάν αντικαθιστήσουμε την τελευταία στην αρχική σχέση λαμβάνουμε μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις, συμπεριλαμβανομένης της εναλλαγής τη σειρά ολοκλήρωσης και λαμβάνουμε την επομένη εκφραση για το σκεδασθέν πεδίο $U_1^{(s)}(\underline{x})$ που ισχύει στον ημιχώρο R_{\pm} :

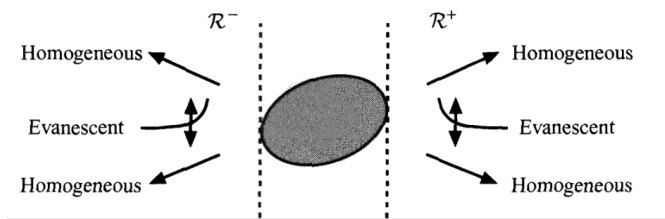
$$U^{(s)}(\underline{x}) = \int_{\mathbf{R}^2} a^{\pm}(s_1, s_2; s_{01}, s_{02}) e^{ik(s_1 x_1 + s_2 x_2 \pm s_3 x_3)}$$

Εδώ

$$a^{\pm}(s_1, s_2; s_{01}, s_{02}) = \frac{ik}{2\pi} \int_{\Omega} F(\underline{x}') e^{-ik((s_1-s_{01})x'_1 + (s_2-s_{02})x'_2 + (\pm s_3-s_{03})x'_3)}$$

Ο τύπος αναπαριστά το πεδίο $U_1^{(s)}$ σε όλη την έκταση των δυο ημιχώρων ως γραμμική υπερθεση των δυο ειδών επιπέδων κυμάτων. Τα πρώτα είναι *συνήθη ομογενή κύματα*, που διαδίδονται μακριά από τον σκεδαστή στην κατεύθυνση $(s_1, s_2, \pm s_3)$, τα τελευταία είναι αποσβεννύμενα κύματα, το πλάτος τους σβήνει εκθετικά με την x_3 (βλ. σχέδιο 13.9.)

Ο τύπος αυτός αναπαριστά το σκεδασθέν πεδίο στους ημιχώρους R_{\pm} στη μορφή ενός γωνιακού φασματος επιπέδων κυμάτων, τα οποία, εν συντομία, ήδη αντιμετωπίσαμε αλλού. Είναι μια αναπαράσταση τριών του πεδίου στους δύο ημιχώρους, επειδή κάθε ένα από τα επίπεδα κύματα ικανοποιεί την



Σχήμα 2.9: Γωνιακή κατανομή του σκεδασθέντος πεδίου

ίδια εξίσωση όπως το σκεδασθέν πεδίο έξω από το σκεδασθέν μέσο, δηλαδή την εξίσωση Helmholtz. Μολονότι η αναπαράσταση γωνιακού φάσματος επιφανειακά μοιάζει με την αναπαράσταση του ολοκληρωματος Fourier, δεν πρέπει να συγχέονται. Σε ένα ολοκληρωμα Fourier οι τρεις μεταβλητές s_1, s_2, s_3 είναι πραγματικές και επιπλέον, δεδομένου ότι $U_1^{(s)}(\underline{x})$ είναι μια συνάρτηση ενός τρισδιάστατου διανυσματος \underline{x} η αναπαράσταση Fourier θα λαμβανόταν πέρα στον τρισδιάστατο χώρο, και όχι στις δύο διαστάσεις (επιπεδή) περιοχή, όπως συμβαίνει στην αναπαράσταση γωνιακού φάσματος. Σημειώνουμε ότι για τα ομογενή επιπεδα κύματα (με τη s_3 πραγματική), μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$a^\pm(s_1, s_2; s_{01}, s_{02}) = \frac{ik}{2\pi} \widehat{F}(k(s_1 - s_{01}), k(s_2 - s_{02}), k(\pm s_3 - s_{03}))$$

όπου \widehat{F} είναι ο μετασχηματισμός Fourier του δυναμικού σκεδασης.

Ο τύπος δείχνει ότι κάθε ομογενές κύμα μεταφέρει πληροφορίες για μια και μόνο μια τρισδιάστατη συνιστώσα Fourier του δυναμικού σκεδασης, δηλαδή αυτή η οποία ονομάζεται από το διάνυσμα $\underline{\xi}^\pm = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^\pm)$ όπου

$$\xi_1 = k(s_1 - s_{01}), \quad \xi_2 = k(s_2 - s_{02}), \quad \xi_3^\pm = k(\pm s_3 - s_{03})$$

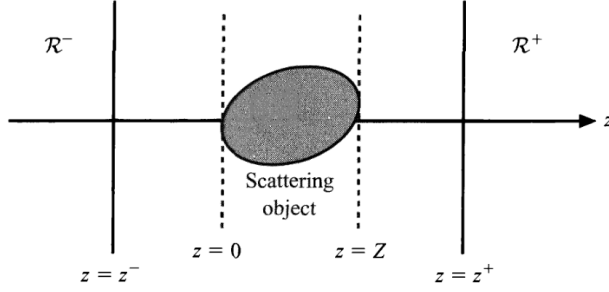
Εντούτοις, η κατάσταση είναι αρκετά διαφορετική με τα αποσβεννύμενα κύματα, επειδή για τέτοια κύματα η s_{03} που είναι καθαρά φανταστικά και ως εκ τούτου δεν είναι πλέον η συνιστώσα ενός πραγματικού ξ-διανυσματος που καθορίζει τη Fourier συνιστώσα του δυναμικού. Στη σύγκριση της (6) με την 13,1 (26) για το πλάτος σκέδασης $f_1(\underline{s}, \underline{s}_0)$ βλέπουμε ότι το πλάτος κάθε ομογενούς επιπεδίου κύματος στη γωνιακή αναπαράσταση φάσματος από το σκεδασθέν πεδίο πολύ απλά αφορά το πλάτος σύνδεσης, από τον τύπο

$$a^\pm(s_1, s_2; s_{01}, s_{02}) = \frac{ik}{2\pi} f_1(\underline{s}, \underline{s}_0)$$

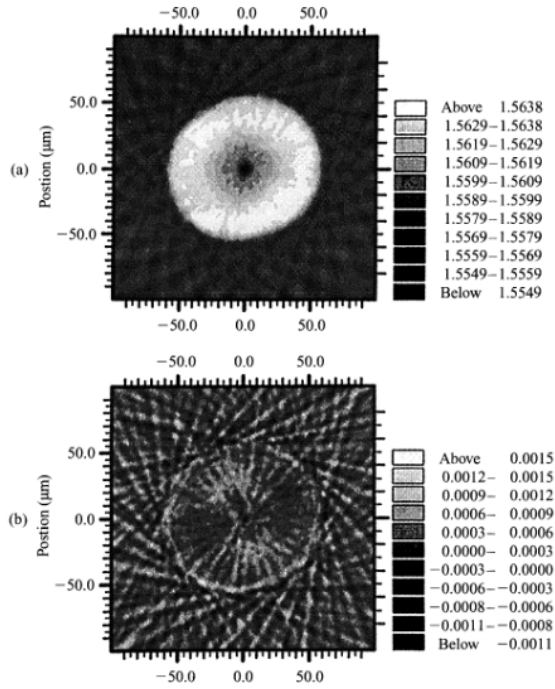
όπου το θετικό πρόσημο λαμβάνεται όταν $s_3 > 0$ και το αρνητικό πρόσημο λαμβάνεται όταν $s_3 < 0$.

2.3.2 Το βασικό θεώρημα της τομογραφίας περίθλασης

Σημειώνουμε ότι εάν απαλείψουμε τα φασματικά πλάτη a^\pm από τα ομοιογενή κύματα μπορούμε να καθορίσουμε τις κατώτερες χωρικές συνιστώσες συχνότητας $|\underline{\xi}| = k|\underline{s} - \underline{s}_0| \leq 2k$ του δυναμικού σκεδασης από τις μετρήσεις της μακρινής ζώνης. Εντούτοις, στην πράξη (ειδικά με τα ακουστικά κύματα), η μακρινή ζώνη είναι σπάνια εφικτή σε μετρήσεις, και κάποιος μπορεί γενικά να κάνει μόνο τις μετρήσεις που είναι κοντά στο σκεδαστή. Τώρα θα δείξουμε ότι οι ίδιες πληροφορίες που μπορούν



Σχήμα 2.10:



Σχήμα 2.11: Δείκτης διάθλασης τ'ρχας αλόγου

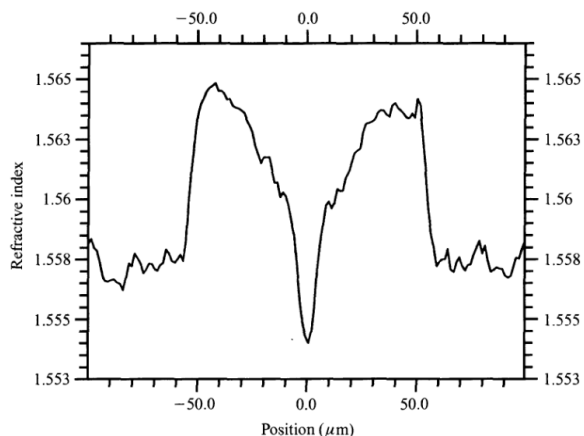
να συναχθούν απο τα στοιχεία της μακρινής ζώνης μπορούν επίσης να ληφθούν απο μετρήσεις σε δυο επίπεδα που είναι σε αυθαίρετες αποστάσεις απο τον σκεδαστή, στον ημιχώρο R_+ και στον ημιχώρο R_- . Αυτή η δυνατότητα είναι στη βάση της τομογραφίας περιθλάσης. Έστω $x_{3,+}$ ένα επίπεδο στον ημιχώρο R_+ και $x_{3,-}$ να είναι επίπεδο στο ημιχώρο R_- . Σύμφωνα με την (4), το σκεδασθέν πεδίο σε δυο επίπεδα δίνεται απο τα ολοκληρώματα γράφουμε $U_1^{(s)}(x_1, x_2, x_3^\pm; \underline{s}_0)$:

$$U_1^{(s)}(x_1, x_2, x_3^\pm; \pm) = \int_{\mathbf{R}^2} a^\pm(s_1, s_2; s_{01}, s_{02}) e^{ik(s_1 x_1 + s_2 x_2 \pm s_3 x_3^\pm)}$$

Έστω ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του σκεδασθέντος πεδίου $U^{(s)}$ σε δυο επίπεδα, ως προς τις μεταβλητές x_1, x_2 . Τότε μπορούμε να λάβουμε τις ακόλουθες εκφρασεις για τα φασματικά πλάτη :

$$a^\pm(s_1, s_2; s_{01}, s_{02}) = \frac{1}{4\pi^2} k^2 \widehat{U^{(s)}}(ks_1, ks_2; x_3^\pm; \underline{s}_0) e^{\mp iks_3 x_3^\pm}$$

2.3. ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΤΗ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΚ



Σχήμα 2.12:

ΟΠΟΥ

$$\widehat{U^{(s)}}(ks_1, ks_2; x_3^\pm; \underline{s}_0) = \int_{\mathbf{R}^2} U^{(s)}(x_1, x_2, x_3^\pm; \underline{s}_0) e^{i(f_1 x_1 + f_2 x_2)}$$

Εχουμε λαβει δυο εκφρασεις για το φασματικο πλατος. Η πρωτη, που δινεται απο την (6), ισχυει μονο για τα φασματικα πλατη των ομογενών κυμάτων και τους δινει τον τρισδιάστατο μετασχηματισμό Fourier του δυναμικου σχεδασης. Ο αλλος ισχυει και για τα ομογενη και για τα αποσβεννόμενα κυματα και εκφραζει τα φασματικα πλατη τους απο την αποψη του διςδιαστατου μετασχηματισμου Fourier του δυναμικου σχεδασης στα επιπεδα . Εξιζώνοντας αυτους τους δυο τυπους, κατω απο αυτη την υποθεση οτι $s_1^2 + s_2^2 < 1$ (ομογενή κύματα) καποιος λαμβανει τη σχεση

$$\widehat{F}(k(s_1 - s_{01}), k(s_2 - s_{02}), k(\pm s_3 - s_{03})) = \frac{ks_3}{2\pi i} \widehat{U^{(s)}}(ks_1, ks_2; x - 3^\pm; \underline{s}_0)$$

αν θεσουμε

$$f = ks_1, \quad f_2 = ks_2, \quad f_3 = ks_3 = \sqrt{k^2 - f_1^2 - f_2^2}$$

και

$$\xi_1 = f_1 - ks_{01}, \quad \xi_2 = f_2 - ks_{02}, \quad \xi_3^\pm = \pm f_3 - ks_{03}$$

Η (12) μπορεί να εκφραστεί στον τυπο

$$\widehat{F}(\xi_1, \xi_2, \xi_3^\pm) = \frac{f_3}{2\pi i} \widehat{U^{(s)}}(f_1, f_2; x_3^\pm; \underline{s}_0) e^{\mp i f_3 x_3^\pm}$$

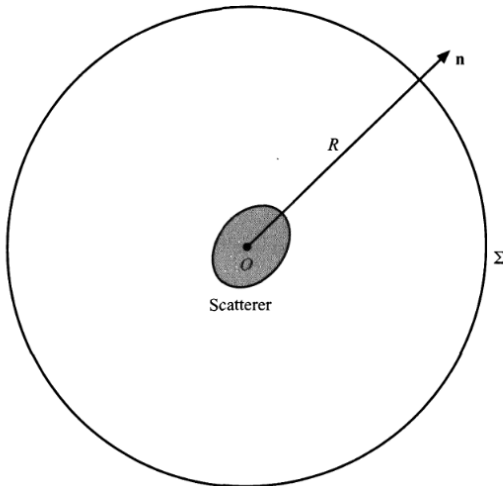
Λαμβάνοντας υποψη την ανισοτητα $s_1^2 + s_2^2 \leq 1$ που ισχύει στα ομογενή κυματα, οπως προκυπτει απο την (13) οτι

$$f_1^2 + f_2^2 \leq k^2$$

και αν χρησιμοποιησουμε επισης την (14) βλεπουμε οτι

$$|\xi| \leq 2k$$

Η σχεση (15), μαζί με την (14), είναι η μαθηματικη διατυπωση του βασικου θεωρηματος της τομογραφιας περιθλασης λογω του Wolf.



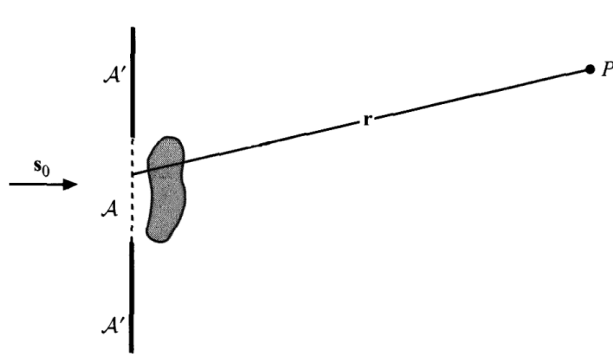
Σχήμα 2.13:

Βλέπουμε ότι μπορούμε να καθορίσουμε τις κατώτερες συχνότητες του χωρικού μετασχηματισμού Fourier του δυναμικού σχεδασής, για τους οποίους η ανισότητα ικανοποιείται, από τις μετρήσεις των σχεδασθέντων πεδίων στα δύο επίπεδα $x_3 = x_3^+$, $x_3 = x_3^-$, ένα σε κάθε πλευρά του σχεδαστή, σε αυθαίρετες αποστάσεις από αυτό. Θα διαπιστώσουμε ότι οι συνιστώσες Fourier του δυναμικού σχεδασής που μπορεί να καθοριστούν από αυτήν την τεχνική, που καθορίζεται από την ανισότητα (17), ακριβώς εκείνες των οποίων τα αντιπροσωπευτικά ξ-διανύσματα τα οποία έχουν τα τελικά σημεία που βρίσκονται στην περιορισμένη σφαίρα Ewald.

Διαφορές υπολογιστικές τεχνικές ανακατασκευής για την τομογραφία περιθλάσης έχουν αναπτυχθεί. Ένας από αυτούς είναι ο *φιλτραρισμένος αλγόριθμος οπίσθιας διάδοσης*, που οφείλεται στον Devaney, και μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του αλγόριθμου οπίσθιας προβολής της υπολογιστικής τομογραφίας. Μια άλλη τεχνική ανακατασκευής, που χρησιμοποιεί την παρεμβολή περιοχών προσιτών συχνοτήτων συνιστωσών Fourier, αναπτύχθηκε από τους Pan, Kak.

Η θεωρία της τομογραφίας περιθλάσης εξεταστήκε πειραματικά σύντομα αφού διατυπώθηκε και είχε εφαρμοστεί από τότε σε διάφορα πεδία, παραδείγματος χάριν στην οπτική μικροσκοπία για τον καθορισμό της μεταβολής του διαθλαστικού δείκτη σε όλα τα αντικείμενα τριών - διαστάσεων και στη γεωφυσική που χρησιμοποιούνται ακουστικά και ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην έρευνα για πετρέλαιο και αέριο.

Ο βασικός τύπος (15) της τομογραφίας περιθλάσης ισχύει μόνο μέσα στο πλαίσιο της ακριβείας της προσέγγισης Born. Σε μερικές περιπτώσεις, π.χ. όταν το αντικείμενο είναι μικρό, ορισμένες υπολογιστικές δυσκολίες συναντώνται και όταν η σχεδασή είναι ασθενής. Όταν το αντικείμενο είναι μεγάλο κάποιες φορές μπορούμε επίσης, να αντιμετωπίσουμε προβλήματα επειδή η ανθροιστική επίδραση των μικρών λαθών μπορεί να γίνει σημαντική. Σε τέτοιες καταστάσεις μπορεί να είναι συμφερούσα η χρήση της πρώτης προσέγγισης Rytov παρα της πρώτης προσέγγισης Born. Θα συζητήσουμε εν σύντομα την προσέγγιση Rytov. Ένα παράδειγμα της χρήσης της οπτικής τομογραφίας περιθλάσης περιέχεται στα σχήματα 13.11 και 13.12. Οι αριθμοί παρουσιάζουν την αναδημιουργημένη διανομή των διαθλαστικών δεικτών μέσα στην ενεργό διατομή τμήμα μιας ασπρης τριχας αλογου.



Σχήμα 2.14:

2.4 Το οπτικό θεώρημα της ενεργού διατομής

Μια ποσότητα που είναι συχνά ενδιαφέρουσα στην ανάλυση των πειραμάτων σχεδασής δεν είναι το ίδιο το σχεδασθέν πεδίο αλλά μάλλον το ποσοστό στο οποίο η ενέργεια σχεδιάζεται και απορροφάται από το αντικείμενο. Υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ του ποσοστού στο οποίο η ενέργεια χάνεται από το προσπιπτον πεδίο με αυτές τις διαδικασίες και το πλάτος του σχεδασθέντος πεδίου στην εμπρόσθια κατεύθυνση (προς την κατεύθυνση του προσπιπτόντος). Αυτή η σχέση εκφράζεται ποσοτικά από το *οπτικό θεώρημα της ενεργού διατομής* (συχνά αποκαλείται *οπτικό θεώρημα*) το οποίο θα το συζητήσουμε σε αυτή την ενότητα. Στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία η βασική ποσότητα που συνδέεται με τη διάδοση της ενέργειας είναι το διάνυσμα Poynting (της 1.1.4). Παρουσιάζεται στο Παράρτημα QI ότι η αναλογη ποσότητα στην βαθμωτή θεωρία των κυμάτων είναι το *διάνυσμα ενεργειακής ροής*. Για ένα πραγματικό μονοχρωματικό πεδίο

$$W^{(s)} = \Re(U(\underline{x})e^{-i\omega t})$$

η μέση τιμή του διανύσματος ενεργειακής ροής, που λαμβάνεται πέρα από ένα διαστήμα το οποίο είναι μακρύτερο σε σχέση με την περίοδο ταλαντώσεων, δίνεται από την εκφραση

$$\overline{F(\underline{x})} = -2i\beta\Im(\overline{U}\nabla U)$$

όπου β είναι μια θετική σταθερά. Έστω ένα επίπεδο μονοχρωματικό κύμα μοναδιαίου πλάτους που προσπίπτει στον σχεδαστή σε κατεύθυνση που ορίζεται από ένα πραγματικό μοναδιαίο διάνυσμα \underline{s}_0 . Το χωρικό τμήμα δίνεται από την εκφραση

$$U^{(i)}(\underline{x}) = e^{ik\underline{s}_0 \cdot \underline{x}}$$

Όπως και προηγουμένως συμβολίζουμε με $U^{(s)}$ το σχεδασθέν πεδίο και εάν U είναι το συνολικό πεδίο τότε

$$U = U^{(i)} + U^{(s)}$$

Αντικαθιστώντας λαμβανουμε για το χρονικό μέσο όρο του διανύσματος ενεργειακής ροής την εκφραση

$$\langle F \rangle(\underline{x}) = \langle F^{(i)} \rangle(\underline{x}) + \langle F^{(s)} \rangle(\underline{x}) + \langle F' \rangle(\underline{x})$$

όπου

$$\langle F^{(i)} \rangle(\underline{x}) = -2i\beta\Im(\overline{U^{(i)}}\nabla U^{(i)}), \quad \langle F^{(s)} \rangle(\underline{x}) = -2i\beta\Im(\overline{U^{(s)}}\nabla U^{(s)}),$$

$$\langle F' \rangle (\underline{x}) = -2i\beta\Im(\overline{U^{(i)}}\nabla U^{(s)} - \overline{U^{(s)}}\nabla U^{(i)})$$

Ας εξετάσουμε τώρα την παθητική ροή της ενεργειας μέσα από την επιφάνεια μιας μεγάλης σφαιρας S_R ακτινας R , με κέντρο ένα σημείο O στην περιοχή που καταλαμβάνει ο σχεδαστής (σεε Φιγ.13.13). Δίνεται απο την εκφραση

$$\mathcal{F} = \int_{\partial\Omega} \langle F \rangle \cdot \underline{n}$$

οπου το \underline{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην $\partial\Omega$. Σε ένας διηλεκτρικό σχεδαστή (δηλ. μη απορροφητικό μεσο) αυτο το ολοκληρωμα θα ειχε προφανως μηδενικη τιμή καθώς τοτε ουτε παράγεται ούτε καταναλώνεται κατά τη σχεδαση. Εάν, εντούτοις ο σχεδαστής είναι αγώγιμο μέσο τμήμα της κυματικής ενέργειας απορροφάται απο αυτο απο έτσι ο νόμος της διατήρησης της ενέργειας η εξωτερικη ενεργειακη ροη μεσω της επιφανειας $S = \partial\Omega$ είναι ιση στο μεγεθος με το ποσοστο \mathcal{F}^α που απορροφάται. Έτσι προκύπτει οτι

$$\mathcal{F} = -\mathcal{F}^\alpha = \mathcal{F}^{(i)} + \mathcal{F}^{(s)} + \mathcal{F}'$$

οπου $\mathcal{F}^{(s)}$, $\mathcal{F}^{(i)}$, \mathcal{F}' είναι τα ολοκληρωματα των ακτινικών συνιστωσων $\underline{F} \cdot \underline{n}$ που λαμβανεται πέρα απο την επιφάνεια S της σφαιρας. Τώρα εφόσον το προσπίπτον πεδίο ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz, $\mathcal{F}^{(i)}$ όπως μπορεί να συναχθει απο τη διαφορικη μορφη του νομου της διάτηρησης της ενέργειας για τα μονοχρωματικα πεδια στον ελεύθερο χώρο από την εφαρμογη του θεωρηματος Gauss. Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί επίσης να ελεγχθει αμεσα με έναν απλο υπολογισμο. Εύκολα διαπιστώνουμε με αντικατάσταση ότι

$$\langle F^{(i)} \rangle (\underline{x}) = -2i\beta\Im (ike^{ik(\underline{s}_0-\underline{x})\cdot\underline{s}_0}) = 2\beta k \underline{s}_0$$

Είναι σαφες λόγω συμμετρίας οτι το ολοκληρωμα στα δεξια της (10) εχει μηδενικη τιμή, οπως μπορεί να ελεγχθει σαφώς με τον υπολογισμό του ολοκληρωματος σε σφαιρικες πολικες συντεταγμενες, με τον πολικο αξονα κατα μηκος της κατευθυνσης \underline{s}_0 . Τοτε

$$\underline{s}_0 \cdot \underline{n} = \cos \theta, \quad d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

και έτσι

$$\mathcal{F}^{(i)} = 0$$

οπως αναμενόταν. Σχετικα με την χρηση αυτου του αποτελεσματος, ανακαλούμε οτι \mathcal{F}' είναι το ολοκληρωμα της επί της S της κάθετης συνιστώσας προκυπτει οτι

$$\mathcal{F}^{(s)} + \mathcal{F}^\alpha = -\mathcal{F}' = 2i\beta \int_{\partial\Omega} [\overline{U^{(i)}}\nabla U^{(s)} - U^{(s)}\nabla\overline{U^{(i)}}] \cdot \underline{n}$$

Δεδομενου οτι το προσπίπτον πεδίο είναι επιπεδο κυμα ενώ το σχεδασθεν πεδίο στην μακρινή ζωνη δίνεται απο την

$$U^{(s)}(r\underline{s}) = f(\underline{s}, \underline{s}_0) \frac{e^{ikr}}{r}$$

οπου $f(\underline{s}, \underline{s}_0)$ είναι το πλατος σκέδασης στη συχνοτητα ω , μπορεί κανεις να βρει ευκολα οτι στη μεγάλη σφαιρικη επιφάνεια S_R ακτινας R (σεε Φιγ. 13.13)

$$\overline{U^{(i)}}\nabla U^{(s)} - U^{(s)}\nabla\overline{U^{(i)}} = \frac{ik}{R} f(\underline{s}, \underline{s}_0) e^{-ikR\underline{s}\cdot\underline{s}_0 + ikR} (\underline{s} + \underline{s}_0)$$

Επειτα αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε το προκύπτον ολοκλήρωμα με το λήμμα του D. S. Jones που το βεβαιώνει αυτό όταν το $R \rightarrow \infty$, G είναι μία τυχαία ομαλή συνάρτηση του \underline{n} ,

$$\frac{1}{R} \int_{\partial\Omega} G(\underline{n}) e^{-ikR\underline{s}_0 \cdot \underline{n}} \sim \frac{2\pi i}{k} [G(\underline{s}_0) e^{-ikR} - G(-\underline{s}_0) e^{ikR}]$$

Ως εκ τούτου, χρησιμοποιώντας το λήμμα προκύπτει ότι

$$\int_{\partial\Omega} \left(\overline{U^{(i)}} \nabla U^{(s)} - U^{(s)} \nabla \overline{U^{(i)}} \right) \cdot \underline{n} \sim -4\pi f(\underline{s}, \underline{s}_0)$$

και συνεπώς, λαμβανουμε απο την (12) την ακολουθη εκφραση για το άθροισμα

$$\mathcal{F}^{(s)} + \mathcal{F}^\alpha = -4\pi i \beta [f(\underline{s}_0, \underline{s}_0) - \bar{f}(\underline{s}_0, \underline{s}_0)] = 8\pi i \beta \Im(f(\underline{s}_0, \underline{s}_0))$$

Η τελευταία σχέση εξασφαλίζει ότι το ποσοστο στο οποίο η ενεργεια αφαιρειται απο το προσπιπτον επιπεδο κυμα με τις διαδικασίες της σκεδασης και της απορροφησης είναι ανάλογο προς το φανταστικο μερος του σκεδαζοντος πλατους για τη σκεδαση στην εμπροσθια κατεύθυνση $\underline{s} = \underline{s}_0$, δηλ. το $f(\underline{s}_0, \underline{s}_0)$, συνήθως αποκαλείται το *εμπρόσθιο πλάτος σκέδασης*. Το κλάσμα Q του ρυθμού απώλειας ή διαχυσης της ενεργειας ($\mathcal{F}^{(s)} + \mathcal{F}^\alpha$) και του ρυθμού $|\mathcal{F}^{(i)}|$ στον οποίο η ενεργεια προσπίπτει στη μονάδα ενεργού διατομής του σκεδαστη καθετα στην κατευθυνση \underline{s}_0 της διαδοσης του προσπίπτοντος κυματος αποκαλείται *εξάλειψη της ενεργου διατομής* του σκεδαζοντος αντικειμενου. Απο (17) και (9) προκύπτει ότι

$$Q = Q^{(s)} + Q^\alpha = \frac{\mathcal{F}^{(s)} + \mathcal{F}^\alpha}{|\langle F^{(i)} \rangle|} = \frac{4\pi}{k} \Im(f(\underline{s}_0, \underline{s}_0))$$

Αυτος ο τυπος είναι η μαθηματικη διατυπωση του *οπτικου θεωρηματος της ενεργου διατομης* (συνήθως αποκαλούμενο οπτικο θεωρημα). Στην περιοχη της κλασικης οπτικης προερχεται πρώτα απο τον Van der Hulst. Μπορούμε να καθορισουμε την *ενεργό διατομη σκέδασης* $Q^{(s)}$ και την *ενεργο διατομη απορρόφησης* Q^α του εμποδιου με παρόμοιο τροπο,

$$Q^{(s)} = \frac{\mathcal{F}^{(s)}}{|\langle F^{(i)} \rangle|}, \quad Q^\alpha = \frac{\mathcal{F}^\alpha}{|\langle F^{(i)} \rangle|}$$

και προφανως $Q = Q^{(s)} + Q^\alpha$. Για ενα μη απορροφητικο εμποδιο $Q^\alpha = 0$ και η εξάλειψη της ενεργού διατομης είναι τότε, ιση με τη ενεργο διατομη σκέδασης. Η ενεργος διατομη σκέδασης $Q^{(s)}$ μπορεί να εκφραστεί σε μια απλη μορφή όσον αφορά την σκέδαση πλάτους $f(\underline{s}, \underline{s}_0)$. Για να δειτε αυτο ας εξετασουμε πρώτα το διανυσμα ροης $\underline{F}^{(s)}$ του σκεδασθεντος πεδιου στη μακρινή περιοχή. Σχετικα με την αντικατασταση απο την (13) σε (6β), υπενθυμιζοντας ότι το σημειο του πεδιου είναι τωρα στη μακρινή περιοχή σε αποσταση R προς την κατευθυνση ενος μοναδιαιου διανυσματος \underline{s} , έχουμε

$$\langle \underline{F}^{(s)}(R\underline{s}) \rangle \sim \frac{2\beta k}{R^2} |f(\underline{s}, \underline{s}_0)|^2 \underline{s},$$

καθώς $R \rightarrow \infty$. Ο ρυθμος με τον οποίο η ενεργεια διασχίζει την μεγαλη σφαιρα Σ στη μακρινή ζωνη είναι (να σημειωθεί ότι $\underline{s} = \underline{n}$,

$$\mathcal{F}^{(s)} = \int_{\partial\Omega} \langle \underline{F}^{(s)}(r\underline{s}) \rangle \cdot \underline{s} = 2\beta k \int_{\partial\Omega} |f(\underline{s}, \underline{s}_0)|^2$$

οπου $d\sigma_R = \frac{1}{R^2}d\sigma$ είναι το στοιχείο για τη στερεά γωνία υπο την οποία φαίνεται η προελευση απο το O απο το στοιχείο d και η ολοκλήρωση εκτείνεται σε συνολο 4π στερεας γωνιας που παραγεται απο τις ζ κατευθυνσεις. Ανακλώνοντας οτι συμφωνα με το (9) $\underline{F}^{(i)} = 2\beta k \underline{s}_0$, προκυπτει οτι η σχεδαση ενεργους διατομης δινεται απο την απλη εκφραση

$$\mathcal{F}^{(s)} := \frac{\mathcal{F}^{(s)}}{\langle \mathcal{F}^{(i)} \rangle} = \int_{\partial\Omega} |f(\underline{s}, \underline{s}_0)|^2$$

Για προφανείς λογους, η ποσοτητα $|f(\underline{s}, \underline{s}_0)|^2$, η οποια συχνα συμβολιζεται με $d\mathcal{F}^{(s)}$, αποκαλειται η διαφορικη ενεργος διατομη σχεδασης. Ας εξετασουμε την τιμή της ενεργου διατομης απόσβεσης \mathcal{F}^a για ενα εμποδιο που δεν μεταδιδει αξιολογο ποσοστο του προσπίπτοντος φωτος. Μπορουμε επισης να υποθεσουμε οτι οι γραμμικες διαστασεις του εμποδιου είναι μεγαλες σε σχεση με το μηκος κυματος. Στην περιπτωση αυτη, η θεωρια Huygens-Kirchhoff ισχύει και το κυριο μεσο στην εμπρόσθια σχεδαση προκυπτει απο την περιθλαση του Fraunhofer. Ας είναι το \mathcal{S} η 'υπο σκια περιοχη' και \mathcal{S}' το ανέπαφο τμημα ενός γραμμικά πολωμένου επιπέδου κύματος που πέφτει στο εμπόδιο και έστω το σχεδασθεν πεδιο $U^{(s)}$, σε ενα σημειο $P(\underline{x})$ σε μεγαλη αποσταση απο το εμποδιο. Εάν οι γωνιες προσπτωσης και σχεδασης είναι μικρες εχουμε συμφωνα με αρχη της Huygens-Fresnel και την αρχή της Babinet

$$U^{(s)}(\underline{x}) = \frac{i}{\lambda} \int_{\mathcal{S}} \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma$$

οπου $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ είναι το μηκος κυματος που συνδεονται με τον αριθμο κυματος k , εαν η γωνια περιθλασης είναι μικρη. Δεδομενου οτι η $P(\underline{x})$ είναι πολυ μακρια απο το εμποδιο προς την κατευθυνση της διαδοσης του προσπιπτοντος κυματος (διευθυνση προς τα εμπρος), $r = |\underline{x}|$ είναι δυνατον να ληφθει σταθερή και η (23) δινει

$$U^{(s)}(r\underline{s}_0) = \frac{iD}{\lambda} \frac{e^{ikr}}{r}$$

οπου D είναι η γεωμετρικη ενεργος διατομη του εμποδιου (η περιοχη \mathcal{S}). Ως εκ τουτου και στην περιπτωση αυτη η εμπρόσθια σχεδαση του πλατους $f(\underline{s}, \underline{s}_0)$ είναι ιση με $\frac{iD}{\lambda}$ και η (18) δειχνει οτι η

$$Q = 2D$$

Ετσι, η αποσβεση της ενεργους διατομης ενος μεγαλου αδιαφανους εμποδιου είναι ιση με το διπλασιο της γεωμετρικης ενεργους διατομης. Το αποτελεσμα αυτο φαίνεται καπως παραδοξο εκ πρωτης οψεως, οπως θα περιμενε κανεις οτι σε ενα μεγαλο εμποδιο η γεωμετρικη οπτικη προσεγγιση θα εφαρμοσθει, και σε αυτη την προσεγγιση η αποσβεση της ενεργους διατομης είναι ιση με το D . Η εξηγηση αυτης της εμφανους αντιφασης είναι οτι δεν εχει σημασια το ποσο μεγαλο μπορεί να είναι το εμποδιο και δεν εχει σημασια ποσο μακρια απο αυτο, είναι το θεωρουμενο πεδιο, υπαρχει παντα μια στενη περιοχη - η γειτονια στην ακρη της γεωμετρικης σκιας - οπου η γεωμετρικη οπτικη προσεγγιση δεν ευσταθει. Εκτος απο το φως που αποκόπτεται από το εμποδιο (χαθηκε απο αντανακλαση και απορροφηση), με ενεργο διατομη D , υπαρχει μια προσθετη συμβολη στην αποσβεση, η οποια προκαλείται απο τη γειτονια στην ακρη της σκιας και η συνεισφορα αυτη είναι προφανως επισης ιση με D . Για να εξακριβωθει η σχεση (25) απο το πειραμα πρεπει κανεις να συλλεξει το φως σε μια αρκετα μεγαλη εκταση και αρκετα μακρια απο το εμποδιο.

Υπαρχει μια ενδιαφερουσα γενικευση του οπτικου θεωρηματος της ενεργους διατομης (18), το οποιο τωρα θα συζητησουμε εν συντομια.

Ας εξετάσουμε τώρα δυο μονοχρωματικά πεδία με την ίδια συχνότητα ω (χρονικός παραγοντας $e^{-i\omega t}$ και η εξάρτηση από τη συχνότητα ω εννοείται), $U_1^{(i)}, U_2^{(i)}$, προσπιπτον με το σκεδάζον αντικείμενο και έστω U_1, U_2 είναι τα ολικά πεδία που παραγουν. Τα πεδία αυτά ανταποκρίνονται στη βασική εξίσωση της σκεδάσης, δηλαδή.

$$\Delta U_j(r) + k^2 U_j(r) = -4\pi F U_j$$

όπου η F αντιπροσωπεύει το σκεδάζον δυναμικό. Προκύπτει επίσης ότι

$$\bar{U}_2 \Delta U_1 - U_1 \Delta \bar{U}_2 = -8\pi i U_1 \bar{U}_2 \mathfrak{I}(F)$$

Ας ενσωματώσουμε της κάθετες συνιστώσες στη μεγάλη σφαίρα S και εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green για το ολοκλήρωμα στα αριστερά. Αυτό δίνει τον τύπο

$$\int_{\partial\Omega} [\bar{U}_2 \nabla U_1 - U_1 \nabla \bar{U}_2] \cdot \underline{n} = 2i \mathcal{F}_{12}$$

όπου

$$\mathcal{F}_{12} = -4\pi \int_{\partial\Omega} U_1 \bar{U}_2 \mathfrak{I}(F)$$

Ας υποθέσουμε ότι τα προσπιπτοντα πεδία $U_1^{(i)}, U_2^{(i)}$ είναι επιπεδα κύματα που διαδίδονται σε κατευθύνσεις που ορίζονται από τα πραγματικά μοναδιαία διανύσματα $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ αντιστοίχα. Στη συνέχεια, σύμφωνα με την τα συνολικά πεδία στη μακρινή ζώνη του σκεδάστη δίνονται από τις εκφράσεις

$$U_j(R\underline{s}) \sim e^{ikR\underline{s} \cdot \underline{s}_j} + f(\underline{s}, \underline{s}_j) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad j = 1, 2$$

Μετά από ένα μακρύ αλλά απευθείας υπολογισμό

$$\begin{aligned} (\bar{U}_2 \nabla U_1 - U_1 \nabla \bar{U}_2) \cdot \underline{n} &= ik\underline{s} \cdot (\underline{s}_1 + \underline{s}_2) e^{ikR\underline{s} \cdot (\underline{s}_1 - \underline{s}_2)} + \\ &+ ik(1 + \underline{s} \cdot \underline{s}_2) f(\underline{s}, \underline{s}_1) \frac{e^{ikR(1 - \underline{s} \cdot \underline{s}_2)}}{R} + \\ &+ ik(1 + \underline{s} \cdot \underline{s}_2) \bar{f}(\underline{s}, \underline{s}_2) \frac{e^{ikR(1 - \underline{s} \cdot \underline{s}_1)}}{R} + \\ &\frac{2ik}{R^2} \bar{f}(\underline{s}, \underline{s}_2) f(\underline{s}, \underline{s}_1) \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\underline{n} = \underline{s}$ στην στρογγυλή σφαίρα S^2 . Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα τέσσερα ολοκληρώματα που προκύπτουν. Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν

$$ik \int_{\partial\Omega} \underline{s} \cdot (\underline{s}_1 + \underline{s}_2) e^{ikR\underline{s} \cdot (\underline{s}_1 - \underline{s}_2)} = 0$$

Αυτό μπορεί να ελεγχθεί απλά με την εξέταση της περίπτωσης, όταν $F = 0$, δηλαδή όταν ο σκεδάστης απουσιάζει. Στην περίπτωση αυτή, η ποσότητα \mathcal{W}_{12} ορίζεται από την (29) να έχει μηδενική τιμή και $U_j = e^{ik\underline{s}_j \cdot \underline{x}}$, ($j = 1, 2$) Με αυτές τις εκφράσεις για την U_j προκύπτει αμέσως. Το δεύτερο και το

τρίτο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με το λήμμα του Jones, εκφράζεται στην (15), και κάποιος θα το διαπιστώσει, ανακαλώντας ότι $\underline{x} = R\underline{s}$,

$$ik \int_{\partial\Omega} (1 + \underline{s} \cdot \underline{s}_1) \bar{f}(\underline{s}, \underline{s}_2) \frac{e^{-ikR(1-\underline{s} \cdot \underline{s}_1)}}{R} = 4\pi \bar{f}(\underline{s}_1, \underline{s}_2)$$

και

$$ik \int_{\partial\Omega} (1 + \underline{s} \cdot \underline{s}_2) f(\underline{s}, \underline{s}_1) \frac{e^{ikR(1-\underline{s} \cdot \underline{s}_2)}}{R} = -4\pi f(\underline{s}_2, \underline{s}_1)$$

Το τέταρτο ολοκλήρωμα για τη μεγάλη σφαίρα S μπορεί να ξαναγραφεί στη μορφή

$$2ik \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{f}(\underline{s}, \underline{s}_2) f(\underline{s}, \underline{s}_1)}{R^2} = 2ik \int_{\partial\Omega} f(\underline{s}, \underline{s}_1) \bar{f}(\underline{s}, \underline{s}_2)$$

οπου οι ολοκληρωσεις εκτεινονται σε ολοκληρη την 4π στερεα γωνια των κατευθυνσεων που ορίζονται απο το μοναδιαιο διανυσμα \underline{s} . Με την αντικατασταση της μακράς εκφρασης (31) στην (28) και χρησιμοποιώντας τις τιμες των τεσσαρων ολοκληρωματων (32)-(35) εξασφαλίζουμε το σημαντικό αποτελεσμα οτι

$$2\pi [f(\underline{s}_2, \underline{s}_1) - \bar{f}(\underline{s}_1, \underline{s}_2)] = ik \int_{\partial\Omega} f(\underline{s}, \underline{s}_1) \bar{f}(\underline{s}, \underline{s}_2) - i\mathcal{F}_{12}$$

Αυτος ο τυπος είναι γνωστος ως γενικευμενο οπτικό θεωρημα, επειδη με την επιλογη $\underline{s}_2 = \underline{s}_1 = \underline{s}_0$

$$4\pi\mathfrak{S}(f(\underline{s}_0, \underline{s}_0)) = k \int_{\partial\Omega} |f(\underline{s}, \underline{s}_0)|^2 - \mathcal{F}_{00}$$

καταλήγει στο οπτικό θεωρημα ενεργο διατομη του θεωρηματος (17), οπως τωρα θα σας δείξουμε. Τωρα συμφωνα με την (22), το ολοκλήρωμα στα δεξια είναι ίσο με την ενεργό διατομη σχεδασης $\mathcal{Q}^{(s)}$ ως εκ τούτου η (37) συνεπαγεται οτι

$$\mathcal{Q}^{(s)} = \frac{4\pi}{k} \mathfrak{S}(f(\underline{s}_0, \underline{s}_0)) + \frac{1}{k} \mathcal{F}_{00}$$

Περαιτερω, οπως προκυπτει απο την (28) (απο $\underline{n} = \underline{s}$ στη σφαίρα S οτι

$$\frac{1}{k} \mathcal{F}_{00} = \frac{1}{k} \mathfrak{S} \left(\int_{\partial\Omega} \bar{U}_0 \nabla U_0 \cdot \underline{s} \right)$$

η, χρησιμοποιώντας την (2) και την (9),

$$\frac{1}{k} \mathcal{F}_{00} = \frac{1}{|\langle F^{(i)} \rangle|} \int_{\partial\Omega} \langle F \rangle \cdot \underline{s}$$

Το ολοκλήρωμα στα δεξια αντιπροσωπευει το μέσο ρυθμο με τον οποιο η ενεργεια διασχίζει την μεγάλη σφαίρα S στην εξωτερική κατευθυνση· πρέπει να είναι ίσος σε μεγεθος αλλα με αντίθετο πρόσημο απο τη τιμη με την οποια η ενεργεια απορροφεται απο το σχεδάζον μεσο. Έτσι

$$\frac{1}{k} \mathcal{F}_{00} = -\mathcal{Q}^\alpha$$

οπου Q^α η ενεργός διατομή απορροφησης του σχεδαστη. Αν αντικαταστήσουμε την (41) στην (38) και εάν θυμηθούμε ότι $Q^{(s)} + Q^\alpha$ τότε είναι η ενεργός διατομή Q , (38) μειώνει την οπτική ενεργό διατομή που δίνεται από την (18). Ως εκ τούτου η (36) είναι, πραγματι, μια γενικευση του θεωρηματος της οπτικής ενεργούς διατομής. Επισημαίνουμε ότι όταν ο σχεδαστης είναι μη απορροφητικός, το φανταστικό μέρος της σχεδασής δυναμικού είναι μηδέν και είναι, ως εκ τούτου, ο όρος \mathcal{F}_{12} ορίζεται από την (28). Η γενικευμένη οπτική του θεωρηματος (36) στη συνέχεια ανάγεται στην

$$2\pi (f(\underline{s}_2, \underline{s}_1) = ok \int_{\partial\Omega} f(\underline{s}, \underline{s}_1) \bar{f}(\underline{s}, \underline{s}_2)$$

Στην κβαντική θεωρία του σχεδαζόντος δυναμικού αυτός ο τύπος απ οκαλείται συχνά σχέση μοναδιακότητας.

2.4.1 Μία σχέση αντιστροφής

Ένα άλλο γενικό αποτέλεσμα της θεωρίας σχεδασής είναι το θεωρημα της αμοιβαιότητας. Μπορεί να προερχεται από μια παρομοια μαθηματική επιχειρηματολογία, όπως αυτή της προηγούμενης ενότητας για το θεωρημα της οπτικής ενεργούς διατομής. Ας εξετασουμε και παλι τα δυο πεδία, $U_1^{(i)}, U_2^{(i)}$, προσπιπτοντα στο σχεδαστη και έστω U_1, U_2 τα ολικά πεδία (προσπιπτοντα + σχεδαζόμενα). Η εξίσωση μπορεί να εφαρμοσθεί και, κατά συνεπεια,

$$U_2 \Delta U_1 - U_1 \Delta U_2 = 0$$

Σχετικά με την ολοκλήρωση αυτής της εξίσωσης σε ολό το εσωτερικό της μεγάλης σφαιρας S και χρησιμοποιώντας το θεωρημα Green προκύπτει ότι

$$\int_{\partial\Omega} (U_2 \nabla U_1 - U_1 \nabla U_2) \cdot \underline{n} = 0$$

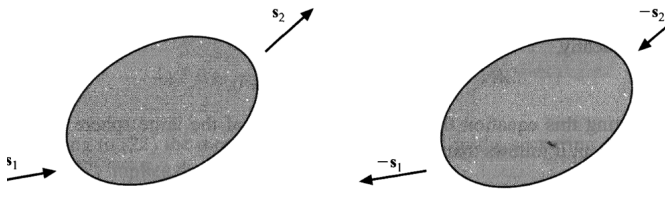
οπου το \underline{n} υποδηλώνει το μοναδαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην S . Έστω ότι τα προσπιπτοντα πεδία είναι επιπεδα κυματα με μοναδιαια πλατη, που διαδίδονται σε κατευθυνσεις που ορίζονται από τα πραγματικά μοναδιαια διανυσματα $\underline{s}_1, \underline{s}_2$, δηλαδή

$$U_j^{(i)}(\underline{x} = e^{i\underline{\xi}_j \cdot \underline{x}}, \quad j = 1, 2$$

Τότε, τα συνολικά πεδία δίνονται από τις εκφρασεις στην 13.3 (30). Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκφρασεις μπορούμε ευκολα να βρούμε ότι στην S

$$\begin{aligned} (\bar{U}_2 \nabla U_1 - U_1 \nabla \bar{U}_2) \cdot \underline{n} &= ik \underline{s} \cdot (\underline{s}_1 - \underline{s}_2) e^{ikR \underline{s} \cdot (\underline{s}_1 - \underline{s}_2)} - \\ &- ik(1 - \underline{s} \cdot \underline{s}_2) f(\underline{s}, \underline{s}_1) \frac{e^{ikR(1 - \underline{s} \cdot \underline{s}_2)}}{R} + \\ &+ ik(1 + \underline{s} \cdot \underline{s}_2) \bar{f}(\underline{s}, \underline{s}_2) \frac{e^{ikR(1 - \underline{s} \cdot \underline{s}_2)}}{R} + \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\underline{n} = \underline{s}, \underline{x} = R\underline{s}$ στην S . Υστερα αντικαθιστούμε τις παραπάνω στην ολοκληρωτική εξίσωση. Προφανώς θα πρέπει να υπολογίσουμε τρία ολοκληρωματα. Το πρώτο ολοκληρωμα είναι πανομοιοτυπο με το ολοκληρωμα που εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά



Σχήμα 2.15:

της 13,3 (32), το \underline{s}_2 αντικαθίσταται από $-\underline{s}_2$. Κάνοντας αυτή την αλλαγή στην 13.3 (32), προκύπτει ότι

$$ik \int_{\partial\Omega} \underline{s} \cdot (\underline{s}_1 - \underline{s}_2) e^{ikR\underline{s} \cdot (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)} = 0$$

Τα άλλα δυο ολοκληρώματα μπορούν να αξιολογηθούν από τη χρήση του λήμματος Jones και μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι

$$ik \int_{\partial\Omega} (1 - \underline{s} \cdot \underline{s}_1) f(\underline{s}, \underline{s}_1) \frac{e^{ikR(1 + \underline{s} \cdot \underline{s}_2)}}{R} = -4\pi f(-\underline{s}_1, \underline{s}_2)$$

και

$$ik \int_{\partial\Omega} (1 - \underline{s} \cdot \underline{s}_2) f(\underline{s}, \underline{s}_1) \frac{e^{ikR(1 + \underline{s} \cdot \underline{s}_1)}}{R} = -4\pi f(-\underline{s}_2, \underline{s}_1)$$

Ολοκληρώνοντας κατά τη διάρκεια της σφαιρας S και χρησιμοποιώντας το μηδενικό ολοκλήρωμα βρισκουμε ότι

$$f(-\underline{s}_1, \underline{s}_2) = f(-\underline{s}_2, \underline{s}_1)$$

Αν αντικαταστήσουμε το \underline{s}_2 , $-\underline{s}_2$ λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση αμοιβαιότητας:

$$f(\underline{s}_2, \underline{s}_1) = f(-\underline{s}_1, -\underline{s}_2)$$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι το πλάτος σκέδασης στην κατεύθυνση \underline{s}_2 , όταν ένα μονοχρωματικό επίπεδο κύμα μοναδιαίου πλάτους προσπίπτει στο σκεδαστή στην κατεύθυνση \underline{s}_1 , είναι ίσο με το πλάτος σκέδασης στην κατεύθυνση $-\underline{s}_1$ όταν ένα μονοχρωματικό επίπεδο κύμα μοναδιαίου πλάτους προσπίπτει στον σκεδαστή στην κατεύθυνση $-\underline{s}_2$. Το αποτέλεσμα αυτό απεικονίζεται στην εικόνα 13.15.

2.5 Η σειρά Rytov

Αντι να αναπαραστήσουμε την επίλυση της βασικής ολοκληρωτικής εξίσωσης της σκέδασης ως μια σειρά διαταραχών που συζητήθηκαν εν συντομία στην παραγράφο 4 μπορεί να χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό ανάπτυγμα κατά Rytov. Το ανάπτυγμα Rytov χρησιμοποιείται συχνά σε προβλήματα διάδοσης κυμάτων σε τυχαία μέσα και στην τομογραφία περιθλάσης. Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε μια συντομη περιγραφή αυτής της εναλλακτικής μεθόδου. Εμείς πάλι θα ξεκινήσουμε με την εξίσωση Helmholtz δηλαδή.

$$\Delta U(\underline{x}, \omega) + k^2 U(\underline{x}, \omega) = -4\pi F(\underline{x}, \omega) U(\underline{x}, \omega)$$

όπου

$$F(\underline{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi} k^2 [n^2(\underline{x}, \omega) - 1]$$

είναι το σχεδάζον δυναμικο, $n(\underline{x}, \omega)$ είναι ο δείκτης διαθλασης. Η ουσία της μεθόδου Rytov είναι η έκφραση της λύσης $U(\underline{x}, \omega)$ στον τυπο

$$U(\underline{x}, \omega) = A(\underline{x}, \omega)e^{\psi(\underline{x}, \omega)}$$

όπου ψ είναι γενικά μιγαδική συνάρτηση, καθώς και να αναπτύξουμε τη φάση ψ αντί της κυματοσυνάρτησης U σε μια διαταρακτική σειρά. Έστω $A(\underline{x}, \omega)$, $\phi(\underline{x}, \omega)$ είναι το πλάτος και η (πραγματική) φάση του $U(\underline{x}, \omega)$, δηλαδή,

$$\psi(\underline{x}, \omega) = \log A(\underline{x}, \omega) + i\phi(\underline{x}, \omega)$$

Στη συνέχεια, προφανώς

$$\Delta\psi + |\nabla\psi|^2 = -k^2n^2$$

Στην αντικατάσταση από (3) σε (1) εξασφαλίζουμε την ακόλουθη εξίσωση για ψ : Προκειται για μια μη γραμμική εξίσωση που έχει τη μαθηματική μορφή της λεγομένης εξίσωσης του Riccati. Όπως στην πρώτη παράγραφο υποθέτουμε ότι ο δείκτης διαθλασης $n(\underline{x}, \omega)$ διαφέρει ελαχιστα μόνο από την μονάδα ώστε

$$n(\underline{x}, \omega) = 1 + \nu(\underline{x}, \omega)$$

Θα είναι βολικό να εισαχθεί μια παραμετρος διαταραχής μ η οποία θα διευκολύνει την επιμέτρηση του μεγέθους των διαφορών ορών στο ανάπτυγμα της διαταραχής. Θέτουμε

$$\nu = \frac{1}{2}\mu\beta$$

Η ακριβής επιλογή του μ δεν είναι ζωτικής σημασίας. Στη συνέχεια προκύπτει από την (7) και την (8) ότι

$$n^2 \approx 1 + \nu = 1 + \mu\beta$$

και η (6) γίνεται

$$\Delta\psi + |\psi|^2 + k^2 + k^2\mu\beta = 0$$

Η σειρά Liouville-Neumann μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

$$U(\underline{x}, \omega) = U^0(\underline{x}, \omega) + U^1(\underline{x}, \omega) + \dots$$

όπου $U^0 = U^{(i)}$ συμβολίζει το προσπιπτον πεδίο, θεωρείται ότι είναι ένα ομογενές επιπέδο κύμα η μία γραμμική υπερθεση τέτοιων κυμάτων. $U^1 = U_1 - U_0$ είναι ένας όρος που είναι γραμμικός στο σχεδάζον δυναμικο F , $U^2 = U_2 - U_1$ είναι τετραγωνικός στο σχεδάζον δυναμικο, κ. λ. π. Στη μεθοδο Rytov, όπως ήδη αναφερθηκε, κάποιος αναπτύσσει την ψ , κατά παρομοιο τροπο, δηλαδή.

$$\psi = \psi_0 + \mu\psi_1 + \mu^2\psi_2 + \dots$$

Όπου η ψ_1 είναι γραμμική στην F , ψ_2 είναι τετραγωνική στην F , κ.λ.π. Η έκφραση (3) για το συνολικο πεδίο, τότε, γίνεται

$$U(\underline{x}) = e^{\psi_0 + \mu\psi_1 + \mu^2\psi_2 + \dots}$$

γνωστη ως ανάπτυγμα Rytov. Κάποιος μπορεί ευκολα να αποκτήσει σχέσεις επαναληψής για τις διαδοχικούς όρους, αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα στην εξίσωση Riccati και εξισώνοντας τις ομάδες

των ορων που περιεχουν ισες δυνάμεις της παραμετρου διαταραχης μ . Στη συνεχεια λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Delta\psi_0 + |\nabla\psi_0|^2 &= -k^2 \\
\Delta\psi_1 + 2\nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_1 &= -k^2\beta \\
\Delta\psi_2 + 2\nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_2 &= -|\nabla\psi_1|^2, \\
\Delta\psi_3 + 2\nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_3 &= -|\nabla\psi_1|^2, \\
&\dots\dots \\
\Delta\psi_n + 2\nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_n &= -\sum_{k=1}^{n-1} \nabla\psi_k \cdot \nabla\psi_{n-k}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Η πρώτη εξίσωση, (14α), είναι ανεξάρτητη από το μέσο και ως εκ τούτου ψ_0 πρέπει να συνδέεται με το προσπίπτον πεδίο $U^{(i)}$ δηλαδή

$$\psi(\underline{x}, \omega) = \log U^{(i)}(\underline{x}, \omega)$$

Οι υπολοιπες εξισώσεις είναι όλες του τυπου

$$\Delta\psi_n + 2\nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_n = -g_n$$

Σημειωνουμε ότι ο παραγοντας γ_n στην δεξιά πλευρά της (16) είναι γνωστος εάν όλες οι προηγουμενες εξισώσεις έχουν λυθεί. Η εξίσωση (16) μπορεί να μειωθεί σε ένα πολύ γνωστο τυπο με τη βοήθεια της αντικατάστασης

$$\psi_n = e^{-\psi_0} w_n$$

Με απλο υπολογισμο θα δουμε ότι

$$\begin{aligned}
\nabla\psi_n &= (\nabla w_n - w_n \nabla\psi_0) e^{-\psi_0} \\
\Delta\psi_n &= [w_n |\nabla\psi_0|^2 - 2\nabla w_n \cdot \nabla\psi_0 - w_n |\nabla\psi_0|^2 + \Delta w_n] e^{-\psi_0}
\end{aligned}$$

και, χρησιμοποιωντας αυτες τις εκφρασεις και (14α), (16) καταλήγουμε στην

$$\Delta w_n + k^2 w_n = -g_n e^{\psi_0}$$

Η εξίσωση (20) είναι η ανομοιογενής εξίσωση Helmholtz για w_n . Λυση της μπορεί ευκολα να επιτευχθεί χρησιμοποιωντας τη συναρτηση τεχνικών του Green σημειωνοντας ότι ο ορος πηγής, δηλαδή η δεξιά πλευρά της (20), είναι πλέον γνωστή. Η λυση της (20), με την απαιτηση ότι w_n συμπεριφέρεται ως ένα εξερχόμενο σφαιρικό κύμα στο άπειρο, τότε θεωρείται ταυτοχρονα ότι θα δοθεί από το ολοκλήρωμα

$$w_n(\underline{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} g(\underline{x}', \omega) e^{\psi_0} \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

όπου $k = \frac{\omega}{c}$ και η ολοκλήρωση εκτείνεται στον σκεδάζοντα ογκο Ω . Τελικά οι ψ_n εκφράζονται

$$\psi_n(\underline{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi} e^{-\psi(\underline{x}, \omega)} \int_{\Omega} g(\underline{x}', \omega) e^{\psi_0} \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

Επιστρεφοντας στο ανάπτυγμα Rytov (13) και διατηρώντας μόνο τους δυο πρώτους ορους του εκθετη έχουμε

$$U(\underline{x}, \omega) = U_1^R(\underline{x}, \omega) = U^{(i)}(\underline{x}, \omega) e^{\psi_1(\underline{x}, \omega)}$$

είναι γνωστή ως η προσέγγιση Rytov ή, πιο σωστά ως προσέγγιση Rytov πρώτης τάξεως. Εάν χρησιμοποιήσουμε την (15) θα δούμε ότι αποδεικνύεται ότι μπορεί να εκφραστεί με απλό τρόπο στην μορφή της προσέγγισης Born πρώτης τάξεως. Για να ειξουμε αυτό σημειώνουμε ότι σύμφωνα με την (16) και (14β) $g_1 = k^2 \beta$ η, χρησιμοποιώντας την (9), βλέπουμε ότι $g_1 = k^2(n^2 - 1)$. Χρησιμοποιώντας αυτή την εκφραση στην ολοκληρωτική ποσοτητα της (22) και ξαναχρησιμοποιώντας την (15) βλέπουμε ότι

$$\psi_1(\underline{x}, \omega) = \overline{U^{(i)}}(\underline{x}, \omega) \frac{k^2}{4\pi} \int_{\Omega} (n^2(\underline{x}', \omega) - 1) U^{(i)}(\underline{x}', \omega) \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

Η εκφραση στις αγκυλες στα δεξια αναγνωρίζεται ως εκπρόσωπος των σχεδασθεντων πεδίων στην πρώτη τάξη προσέγγιση του Born, όταν ένα αυθαίρετο πεδίο $U^{(i)}(\underline{x}, \omega)$ και όχι επίπεδο κύμα $e^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}}$ προσπιπτει στον σχεδαστη. Αν συμβολίσουμε την εκφραση αυτή $U_1^{(s)}$ η τελευταία γράφεται

$$\psi_1(\underline{x}, \omega) = \overline{U^{(i)}}(\underline{x}, \omega) \left[U_1^{(s)}(\underline{x}, \omega) \right]^{(B)}$$

το οποίο, μαζί με την (24), καθιερώνει μια σχέση μεταξύ της προσέγγισης της πρώτης τάξης του Rytov και της προσέγγισης πρώτης τάξης του Born. Η σχετική αξία των προσεγγίσεων του Born, Rytov για τις ίδιες τάξεις έχουν συζητηθεί σε πολλές εκδόσεις, αλλά δεν έχει επιτευχθεί σαφής συναίνεση. Φανηκε, ωστόσο, ότι εάν το προσπίπτον πεδίο είναι ένα ενιαίο επίπεδο κύμα, η προσέγγιση n -τάξης, ($n > 1$) του Rytov ισχύει για ένα πολύ μακρύτερο τμήμα διαδοσης από τον αντίστοιχο της προσέγγισης Born αλλά ότι αυτό το αποτέλεσμα δεν διατηρείται γενικότερα προσπιπτόντα πεδία. Η προσέγγιση Born, εμφανίζεται να έχει σημαντικά πλεονεκτήματα.

2.6 Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Έχουμε μέχρι στιγμής θεωρήσει τη σκέδαση του φωτός από ανομοιογενή μέσα στα πλαίσια της μονοδιάστατης θεωρίας. Θα συζητήσουμε τώρα με βάση την ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Ωστόσο, επειδή η πλήρης αντιμετώπιση είναι αισθητά πιο περίπολη και απαιτεί μια κατά πολύ πιο εκτεταμένη μαθηματική ανάλυση, εμείς θα περιοριστούμε στην εξαγωγή μερικών από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της θεωρίας της στατικής σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

2.6.1 Οι διαφορικές εξισώσεις της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας σκέδασης

Έστω

$$\begin{aligned} \underline{E}^{(i)}(\underline{x}, t) &= \Re \left(\underline{E}^{(i)}(\underline{x}, \omega) e^{-i\omega t} \right) \\ \underline{H}^{(i)}(\underline{x}, t) &= \Re \left(\underline{H}^{(i)}(\underline{x}, \omega) e^{-i\omega t} \right) \end{aligned}$$

το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντίστοιχα, που παρτσώνται από μονοχρωματικό κύμα προσπιπτόν σε ένα μέσο που καταλαμβάνει ογκό Ω στον ελεύθερο χώρο. Υποθέτουμε ότι οι μακροσκοπικές ιδιότητες του μέσου δεν αλλάζουν χρονικά.

Το προσπιπτόν πεδίο προκαλεί πολωση $\underline{P}(\underline{x}, t)$ και μαγνητισή $\underline{M}(\underline{x}, t)$ προκαλείται στο μέσο. Αν η αποχρήση του μέσου είναι γραμμική, $\underline{P}(\underline{x}, t)$, $\underline{M}(\underline{x}, t)$ θα ταλαντώνεται με συχνότητα ω , θα έχουν

τον τυπο

$$\begin{aligned} \underline{P}(\underline{x}, t) &= \Re(\underline{P}(\underline{x}, \omega)e^{-i\omega t}) \\ \underline{M}(\underline{x}, t) &= \Re(\underline{M}(\underline{x}, \omega)e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

Ένα νέο πεδίο στη συνέχεια θα δημιουργηθεί του οποίου τα ηλεκτρικά και μαγνητικά διανύσματα δύνανται να εκφραστούν με τη μορφή (παραλείποντας από τώρα τους χρονικά-εξαρτωμένους παραγοντες από εξπ παραγοντα $e^{-i\omega t}$ και, επίσης, μερικές φορές, για λόγους συντομίας, το όρισμα ω

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{x}) &= \underline{E}^{(i)}(\underline{x}) + \underline{E}^{(s)}(\underline{x}) \\ \underline{H}(\underline{x}) &= \underline{H}^{(i)}(\underline{x}) + \underline{H}^{(s)}(\underline{x}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

όπου $\cdot^{(s)}$ παριστάνουν το σκεδασθέν πεδίο. Για πολλά μέσα που αλληλεπιδρούν με ασθενή πεδία ως προς τις καταστατικές σχέσεις που συνδέουν τα \underline{P} , \underline{M} με \underline{E} , \underline{H} και έχουν τον τυπο

$$\underline{P}(\underline{x}) = \eta(\underline{x})\underline{E}(\underline{x}), \quad \underline{M}(\underline{x}) = \chi(\underline{x})\underline{H}(\underline{x}),$$

όπου η, χ είναι η διηλεκτρική επιδεκτικότητα και μαγνητική διαπερατότητα. Σε γενικές γραμμές οι δυο εξαρτώνται όχι μόνο από το \underline{x} , αλλά και από το \cdot . Όπως προκύπτει από την εξειδίκευση σε μονοχρωματικά πεδία, ότι το συνολικό πεδίο (προσπίπτον και σκεδασθεν) μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{x}, \omega) &= \underline{E}^{(i)}(\underline{x}, \omega) + \text{curl curl} \underline{\Pi}_e(\underline{x}, \omega) + ik \text{curl} \underline{\Pi}_m(\underline{x}, \omega) - 4\pi \underline{P}(\underline{x}, \omega) \\ \underline{H}(\underline{x}, \omega) &= \underline{H}^{(i)}(\underline{x}, \omega) + \text{curl curl} \underline{\Pi}_m(\underline{x}, \omega) - ik \text{curl} \underline{\Pi}_e(\underline{x}, \omega) - 4\pi \underline{P}(\underline{x}, \omega) \end{aligned}$$

όπου $\underline{\Pi}_{e,m}$ είναι το ηλεκτρικό και μαγνητικό δυναμικό Hertz αντιστοιχία, ορίζονται δε από τους τυπους

$$\begin{aligned} \underline{\Pi}_e(\underline{x}, \omega) &= \int_{\Omega} \underline{P}(\underline{x}', \omega) \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \\ \underline{\Pi}_m(\underline{x}, \omega) &= \int_{\Omega} \underline{M}(\underline{x}', \omega) \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \end{aligned}$$

Όταν η πολωση και η μαγνητισση στην (5) και στην (6), εκφραζονται βάση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου διανυσμάτων μέσω της συστατικών σχέσεων (4),(5) γίνονται ένα ζεύγος συζευγμένων-διαφορικών εξισώσεων για το σύνολο των πεδίων $\underline{E}, \underline{H}$. Μετά από αυτά που έχουν επιλυθεί για τις τιμές του διανυσματικού πεδίου όλα τα σημεία στο εσωτερικό του σκεδαστή, μπορεί κανείς να καθορίσει τις τιμές τους σε οποιοδήποτε σημείο έξω από τον σκεδάζοντα ογκο Ω με αντικατάσταση της λύσης για τα εσωτερικά σημεία στην (5), την ολοκλήρωση και την εφαρμογή των διαφορικών τελεστών. Σημειώνουμε ότι σε σημεία έξω από τον σκεδάζοντα ογκο Ω , οι όροι $4\pi \underline{P}, 4\pi \underline{M}$ στην δεξιά πλευρά της (5) έχουν μηδενικές τιμές.

Τα συνδεδεμένα ζεύγη των ολοκληρωτικών διαφορικών εξισώσεων (5α) και (5β) είναι τα αναλογα για την ηλεκτρομαγνητική σκεδαση της ολοκληρωτικής εξίσωσης ολοκληρωμα 13.1 (16) της βαθμωτής θεωρίας της σκεδασης (γενικευεται σε ένα αυθαίρετο προσπιπτον πεδίο).

2.6.2 Το μακρινό πεδίο

Στην πλειοψηφία των πειραμάτων σχεδασής, μετρήσεις του σχεδασθέντος πεδίου γίνονται μακριά από τον σχεδαστή. Εμείς, επομένως, θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά του σχεδασθέντος πεδίου στη μακρινή ζώνη. Εστω $r\mathbf{s}$, $|\mathbf{s}|^2 = 1$ το διανυσμα θέσης ενός σημείου \mathbf{x} σε μεγάλη απόσταση από το σχεδαστή. Το σφαιρικό κύμα ορού σε ολοκληρωτά μέρη των εκφράσεων (6α) και (6β) για τα δυναμικά Hertz μπορεί τότε να προσεγγιστεί με την εκφραση

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \sim \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}}$$

και οι εκφράσεις (6α) και (6β) για τα διανυσματά Hertz παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \underline{\Pi}_e(\mathbf{x}, \omega) &\sim \underline{P}(k\mathbf{s}) \frac{e^{ikr}}{r} \\ \underline{\Pi}_m(\mathbf{x}, \omega) &\sim \underline{M}(k\mathbf{s}) \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (2.7)$$

όπου \underline{P} , \underline{M} είναι οι τρισδιάστατοι μετασχηματισμοί Fourier του \underline{P} , \underline{M} αντιστοίχα. Οι εκφράσεις (8) είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά των $\underline{\Pi}_{e,m}(r\mathbf{s})$, όταν $kr \rightarrow \infty$, με την κατεύθυνση \mathbf{s} να διατηρείται σταθερή. Όπως προκύπτει από το (8α) και (8β) σχετικά με τη χρήση στοιχειωδών ταυτοτήτων διανυσματών και τη διατήρηση των δυνάμεων $\frac{1}{r}$ ότι

$$\begin{aligned} \text{curl} \underline{\Pi}_e(r\mathbf{s}) &\sim ik \left(\mathbf{s} \wedge \widehat{\underline{P}}(k\mathbf{s}) \right) \frac{e^{ikr}}{r} \\ \text{curl} \text{curl} \underline{\Pi}_e(r\mathbf{s}) &\sim -k^2 \left[\mathbf{s} \wedge \left(\mathbf{s} \wedge \widehat{\underline{P}}(k\mathbf{s}) \right) \right] \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις και παρομοίες εκφράσεις που αφορούν $\underline{\Pi}_m$, \underline{M} στην (5) και ενθυμούμενοι ότι η $\underline{P}(\mathbf{x}) = 0$ και $\underline{M}(\mathbf{x}) = 0$ σε σημεία έξω από τον σχεδάζοντα όγκο λαμβανουμε τους παρακατω τυπους για το ηλεκτρικο και το μαγνητικο πεδιο στη μακρινή ζώνη:

$$\begin{aligned} \underline{E}(r\mathbf{s}, \omega) &\sim \underline{E}^{(i)}(r\mathbf{s}, \omega) - k^2 \left[\mathbf{s} \wedge \left(\mathbf{s} \wedge \widehat{\underline{P}}(k\mathbf{s}, \omega) \right) + \mathbf{s} \wedge \widehat{\underline{M}}(k\mathbf{s}, \omega) \right] \frac{e^{ikr}}{r} \\ \underline{H}(r\mathbf{s}, \omega) &\sim \underline{H}^{(i)}(r\mathbf{s}, \omega) - k^2 \left[\mathbf{s} \wedge \left(\mathbf{s} \wedge \widehat{\underline{M}}(k\mathbf{s}, \omega) \right) - \mathbf{s} \wedge \widehat{\underline{P}}(k\mathbf{s}, \omega) \right] \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (2.9)$$

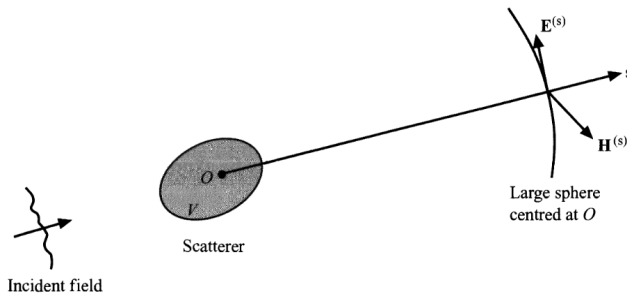
Κατά συνεπεία, το σχεδασθέν πεδίο στη μακρινή ζώνη μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

$$\begin{aligned} \underline{E}^{(s)}(r\mathbf{s}, \omega) &\sim \underline{A}(\mathbf{s}, \omega) \frac{e^{ikr}}{r} \\ \underline{H}^{(s)}(r\mathbf{s}, \omega) &\sim \mathbf{s} \wedge \underline{A}(\mathbf{s}, \omega) \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ύπου

$$\underline{A}(\mathbf{s}, \omega) = -k^2 \left[\mathbf{s} \wedge \left(\mathbf{s} \wedge \widehat{\underline{M}}(k\mathbf{s}, \omega) \right) \right]$$

Είναι προφανές από την (13) $\mathbf{s} \cdot \underline{A}(\mathbf{s}, \omega) = 0$, δηλαδή ότι το διανυσμα $\underline{A}(\mathbf{s}, \omega)$ είναι ορθογώνιο με το \mathbf{s} . Επίσης θα δούμε από την (12) ότι στη μακρινή ζώνη των διανυσματών του $\underline{E}^{(s)}$, $\underline{H}^{(s)}$ και \mathbf{s} βρέθηκε ότι



Σχήμα 2.16: Η συμπεριφορά των σκεδαζομένων πεδίων

αποτελούν ορθογώνια τριάδα διανυσματων που είναι στη δεξιά μεριά σε αυτή τη σειρά (βλ. σχήμα 13.16). Εξάλλου, $\underline{E}^{(s)}(r\underline{s}), \underline{H}^{(s)}(r\underline{s})$ έχουν το ίδιο μήκος. Έτσι σε κάθε σημείο στη μακρινή ζώνη του σκεδασθέντος ηλεκτρομαγνητικού πεδίου έχει τη δομή ενός επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κυματος που διαδίδεται προς την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανυσματος \underline{s} , δηλαδή στο εξωτερική ακτινική κατεύθυνση από τον σκεδαστή. Μπορούμε επίσης να δούμε από την (12) ότι η συνολική συμπεριφορά του μακρινού πεδίου είναι και αυτό ένα εξερχόμενο σφαιρικό κύμα. Οι τιμές των \widehat{P}, \widehat{M} στη (13), όπως και οι τιμές των $\underline{P}, \underline{M}$ που εμφανίζονται στην (6), εξαρτώνται από τις τιμές των διανυσματων του πεδίου $\underline{E}, \underline{H}$ που μπορούν να επιτευχθούν μόνο με την επιλυση των συνδεδεμενων ολοκληρωτικων διαφορικων εξισωσεων (5α) και (5β). Ωστόσο, εάν η σκεδαση είναι αρκετά ασθενής μπορούμε να προσεγγίσουμε τις $\underline{P}, \underline{M}$ με την αγνόηση των συνεισφορών του σκεδασθέντος πεδίου στην δεξιά πλευρά των καταστατικων σχεσεων (4), i.e. μπορούμε κατά προσέγγιση τότε \underline{P} με $\eta \underline{E}^{(i)}$ και \underline{M} από $\chi \underline{H}^{(i)}$. Οι προκλιπτουσες εκφρασεις για $\underline{E}, \underline{H}$ τα οποία στη συνέχεια προερχονται από την (5) είναι προφανώς αναλογες των 13.1 (22) για το πεδίο στη βαθμωτή θεωρία της σκεδασης, υπολογίζεται κατά την ακρίβεια της προσέγγισης της πρώτης τάξης του Born (με ένα αυθαίρετο προσπίπτον πεδίο αντί με το επίπεδο κυματος $e^{i\underline{s}_0 \cdot \underline{x}}$

2.6.3 Το οπτικό θεώρημα ενεργού διατομής για σκεδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Στην παρ. 3 συζητήσαμε στο πλαίσιο της βαθμωτής κυματικής θεωρίας το οπτικό θεώρημα της ενεργού διατομής. Εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια χάνεται από το προσπίπτον επίπεδο κύμα με τη διαδικασία της σκεδασης και απορροφησης για τον εμπρόσθιο πλάτος σκεδασης. Εμείς θα αποδείξουμε ένα αντιστοιχο θεώρημα για τη σκεδαση των ηλεκτρομαγνητικων κυμάτων.

Έστω ένα επίπεδο μονοχρωματικό προσπίπτον κύμα σε ένα εμπόδιο με αυθαίρετη μορφή. Το πεδίο σε κάθε σημείο του μέσου που περιβάλλει το εμπόδιο μπορεί και πάλι να γραφεί ως άθροισμα του προσπίπτοντος πεδίου και του σκεδασθέντος πεδίου

$$\underline{E} = \underline{E}^{(i)} + \underline{E}^{(s)}, \quad \underline{H} = \underline{H}^{(i)} + \underline{H}^{(s)}$$

Ως συνήθως, θα παραλείψουμε τον χρονικό παράγοντα $e^{-i\omega t}$. Η χρονική μέση τιμή της ροής ενεργείας παριστάνεται με τη χρονική μέση τιμή του διανυσματος Poynting η οποία, σύμφωνα με την (14) δίνεται από

$$\langle \underline{S} \rangle = \langle \underline{S}^{(i)} \rangle + \langle \underline{S}^{(s)} \rangle + \langle \underline{S}' \rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} \langle \underline{S}^{(i)} \rangle &= \frac{c}{8\pi} \Re \left(\underline{E}^{(i)} \wedge \overline{\underline{H}^{(i)}} \right) \\ \langle \underline{S}^{(s)} \rangle &= \frac{c}{8\pi} \Re \left(\underline{E}^{(s)} \wedge \overline{\underline{H}^{(s)}} \right) \\ \langle \underline{S}^{(i)} \rangle &= \frac{c}{8\pi} \Re \left(\underline{E}^{(i)} \wedge \overline{\underline{H}^{(s)}} + \underline{H}^{(i)} \wedge \overline{\underline{E}^{(s)}} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Θεωρούμε τη μεση εξωτερική ροή της ενεργείας μέσα από την επιφάνεια μιας μεγάλης σφαιρας ακτινας R , με κεντρο καποιο σημειο στην περιοχη που καταλαμβάνει το εμποδιο. Η καθαρη ροη ανα δευτερολεπτο εκπροσωπείται απο το ολοκληρωμα της ακτινικης συνιστωσας $\langle S_r \rangle$ του \underline{S} , λαμβάνεται στην σφαιρα, και προφανως είναι μηδέν, όταν το εμποδιο είναι διηλεκτρικο. Εάν, ωστόσο, το εμποδιο είναι αγωγος, τμήμα της προσπίπτουσας ενέργειας απορροφάται απο αυτο και η καθαρη εξωτερική ροή μέσω της επιφάνειας της σφαιρας είναι ίση σε μεγεθος με το ρυθμο απορροφησης. Έστω \mathcal{F}^α ο ρυθμος με τον οποίο η ενεργεια απορροφάται απο το εμποδιο. Στη συνεχεια, απο την (15)

$$-\mathcal{F}^\alpha = \mathcal{F}^{(i)} + \mathcal{F}^{(s)} + \mathcal{F}'$$

οπου $\mathcal{F}^{(i)}, \mathcal{F}^{(s)}, \mathcal{W}'$ είναι τα ολοκληρώματα των ακτινικών συνιστωσών $\langle S^{(i)} \rangle_r, \langle S^{(s)} \rangle_r, \langle S' \rangle_r$ πάνω από την επιφάνεια της σφαιρας, αντιστοιχα. Μπορούμε εύκολα να δείξει κατ' αναλογία με τη συζήτηση που θα οδηγήσει στην 13.3 (11) για τη βαθμωτή περιπτωση που $\mathcal{W}^{(i)} = 0$, έτσι ώστε

$$-\mathcal{F}^\alpha = \mathcal{F}^{(s)} + \mathcal{F}' = -\frac{c}{8\pi} \Re \left(\int_{\partial\Omega} \left(\underline{E}^{(i)} \wedge \overline{\underline{H}^{(s)}} + \underline{H}^{(i)} \wedge \overline{\underline{E}^{(s)}} \right) \cdot \underline{n} \right)$$

Έτσι, η εκφραση στο δεξιό μέλος αντιπροσωπεύει το ποσοστο στο οποίο η ενεργεια χάνεται ως θερμότητα και σκεδάζεται. Έστω \underline{s}_0 το μοναδιαιο διανυσμα στην κατευθυνση στην οποία το προσπιπτον κυμα διαδίδεται, έτσι ώστε

$$\underline{E}^{(i)} = e^{ik\underline{s}_0 \cdot \underline{x}} \underline{e}, \quad \underline{H}^{(i)} = e^{ik\underline{s}_0 \cdot \underline{x}} \underline{h}$$

Υποθετούμε ότι αυτο το κυμα είναι γραμμικα πολωμένο, έτσι ώστε $\underline{e}, \underline{h}$ να είναι δυνατον να υποτεθει ότι είναι τα πραγματικά μοναδιαία διανύσματα. Σε μια μεγάλη απόσταση από το εμποδιο του σκεδασθέντος κύματος είναι σφαιρικό :

$$\underline{E}^{(i)} = e^{ik\underline{s}_0 \cdot \underline{x}} \underline{a}(\underline{s}), \quad \underline{H}^{(i)} = e^{ik\underline{s}_0 \cdot \underline{x}} \underline{b}(\underline{s})$$

Τα διανυσματα $\underline{a}(\underline{s}), \underline{b}(\underline{s})$ χαρακτηρίζουν την ισχύ της σκεδαζουσας ακτινοβολιας στην κατευθυνση \underline{s} . Δεδομένου ότι το προσπιπτον και το σκεδασθεν κυμα υπακούουν στις εξισώσεις Maxwell έχουμε

$$\begin{aligned} \underline{h} &= \underline{s}_0 \wedge \underline{e} & \underline{b} &= \underline{s} \wedge \underline{a} \\ \underline{s}_0 \cdot \underline{e} &= \underline{s}_0 \cdot \underline{e} = 0, & \underline{s} \cdot \underline{a} &= \underline{s} \cdot \underline{b} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Απο τις σχεσεις αυτές προκύπτει ότι στην επιφάνεια της μεγάλης σφαιρας Σ ,

$$\begin{aligned} \left(\underline{E}^{(i)} \wedge \overline{\underline{H}^{(s)}} \right) \cdot \underline{s} &= \underline{e} \cdot \overline{\underline{a}(\underline{s})} \frac{e^{-ikR}}{R} \\ \left(\underline{E}^{(s)} \wedge \overline{\underline{H}^{(i)}} \right) \cdot \underline{s} &= [(\underline{s} \cdot \underline{s}_0) (\underline{a}(\underline{s}) \cdot \underline{e}) - (\underline{s} \cdot \underline{e}) (\underline{a}(\underline{s}) \cdot \underline{s}_0)] \frac{e^{-ikR}}{R} \end{aligned} \quad (2.13)$$

οπου χρησιμοποιησαμε το γεγονός οτι $\underline{n} = \underline{s}$ στη μεγαλη σφαιρα Σ . Αντικαταστησαμε αυτες τις εκφρασεις στην (18). Το προκυπτον ολοκληρωμα μπορει να εκτιμηθει με τη χρηση του λήμματος Jones. Στη συνεχεια διαπιστώνουμε οτι

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left(\underline{E}^{(i)} \wedge \overline{\underline{H}^{(s)}} \cdot \underline{n} \right) &\sim -\frac{2\pi i}{k} (\underline{e} \cdot \underline{a}(\underline{s}_0) - \underline{e} \cdot \underline{a}(-\underline{s}_0)e^{-2ikR}) \\ \int_{\partial\Omega} \left(\underline{E}^{(s)} \wedge \overline{\underline{H}^{(i)}} \cdot \underline{n} \right) &\sim -\frac{2\pi i}{k} (\underline{e} \cdot \underline{a}(\underline{s}_0) + \underline{e} \cdot \underline{a}(-\underline{s}_0)e^{-2ikR}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Και η (18) γινεται

$$\mathcal{F}^\alpha + \mathcal{F}^{(s)} = \frac{c}{2k} \Im(\underline{e} \cdot \underline{a}(\underline{s}_0))$$

Η σχεση αυτη δηλώνει οτι, προσπιπτον φως που ειναι γραμμικά πολωμένο, ο ρυθμος με τον οποιο η ενεργεια απορροφάται ειναι αναλογος με συγκεκριμενη συνιστωσα του πλατους του σκεδασθεντος κυματος· το πλατος ειναι εκεινο το οποιο αντιστοιχει με την εμπροσθια σκέδαση $\underline{s} = \underline{s}_0$ και η συνιστωσα ειναι προς την κατευθυνση του ηλεκτρικου διανυσματος του προσπιπτοντος κυματος.

Οπως και στην περιπτωση της βαθμωτής σκεδασης, ο λογος \mathcal{Q} του ποσοστου της διαχυσης της ενεργειας $\mathcal{F}^\alpha + \mathcal{F}^{(s)}$ και το ρυθμο με τον οποιο η ενεργεια προσπιπτει στη μονάδα ενεργού διατομής του εμποδιου $|S^{(i)}|$ αποκαλειται ενεργός διατομη απόσβεσης του εμποδιου. Απο (16α), (19) και (21), προκυπτει οτι $|S^{(i)}| = \frac{ce^2}{8\pi}$ ετσι ωστε να εχουμε, συμφωνα με την (24),

$$\mathcal{Q} = \frac{\mathcal{F}^{(s)} + \mathcal{F}^\alpha}{|S^{(i)}|} = \frac{4\pi}{k} \Im \left(\frac{\underline{e} \cdot \underline{a}(\underline{s}_0)}{|\underline{e}|^2} \right)$$

Ο τυπος (25) εκφραζει το θεωρημα της οπτικης ενεργους διατομης για σκεδαση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Μπορούμε να καθορίσουμε τη σχεδαζουσα ενεργο διατομη $\mathcal{Q}^{(s)}$ και την ενεργό διατομη απορρόφησης \mathcal{Q}^α του εμποδιου με παρομοιο τροπο:

$$\mathcal{Q}^{(s)} = \frac{\mathcal{F}^{(s)}}{|S^{(i)}|}, \quad \mathcal{Q}$$

Και προφανως $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{(s)} + \mathcal{Q}^\alpha$. Για ενα μη απορροφητικο εμποδιο $\mathcal{Q}^\alpha = 0$. και η ενεργος διατομή απόσβεσης τοτε ειναι ιση με την σχεδαζουσα ενεργο διατομη.

Κεφάλαιο 3

Μία γεωμετρική απόδειξη του λήμματος Jones

Το λήμμα Jones αναφέρεται στην ασυμπτωτική συμπεριφορά ολοκληρωμάτων του τύπου για ομαλή συνάρτηση $f \in C^\infty(S^2)$:

$$I(r) = r \int_{S^2} f(\underline{\eta}) e^{-ikr \underline{s} \cdot \underline{\eta}} d\sigma$$

όπου S^2 η στρογγυλή σφαίρα

$$S^2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 / |\underline{x}|^2 = 1\}$$

Η τυπική μέθοδος συνίσταται στη στάσιμη φάση και την ανισότητα Cauchy-Schwarz η οποία μας δίδει, για $r \rightarrow \infty$:

$$I(r) \sim \frac{2\pi i}{k} (f(\underline{s})e^{-ikr} - f(-\underline{s})e^{ikr}) + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Η στρογγυλή σφαίρα παραμετροποιείται μέσω της ακτινικής απεικόνισης:

$$R : \mathbf{R}^2 \rightarrow S^2$$

$$\underline{\xi} \mapsto \underline{x}$$

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\tau}, \quad x_2 = \frac{\xi_2}{\tau}, \quad x_3 = \frac{1}{\tau}, \quad \tau = \sqrt{1 + \xi_1^2 + \xi_2^2}$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο παράγεται από τα

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\tau^3}(1 + \xi_2^2, -\xi_1\xi_2, \xi_1), \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{\tau^3}(-\xi_1\xi_2, 1 + \xi_1^2, \xi_2)$$

με αποτέλεσμα η επαγόμενη από την ευκλείδεια μετρική να έχει συνιστώσες:

$$g_{11} = \frac{1}{\tau^4}(1 + \eta_2^2), \quad g_{22} = \frac{1}{\tau^4}(1 + \eta_1^2), \quad g_{12} = -\frac{1}{\tau^4}(\eta_1\eta_2)$$

και ορίζουσα $g = \tau^{-6}$. Οδηγούμεθα έτσι στον αυμπτωτικό υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$I(r) = \int_{S^2} \tilde{f}(\underline{\eta}) e^{-ikr \underline{\eta} \cdot \underline{s}} d\sigma$$

Ορίζοντας βόρειο και νότιο πόλο παράλληλα και αντιπαράλληλα με την τομή της διεύθυνσης του \underline{s} με τη σφαίρα: λαμβάνουμε

$$I(r) = I_+(r) - I_-(r)$$

όπου

$$I_{\pm}(r) = r \int_{\mathbf{R}^2} \tilde{f}_{\pm}(\xi) e^{\frac{ikr}{\tau}} \frac{1}{\tau^3} d\xi_1 d\xi_2$$

όπου χ_{\pm} είναι συναρτήσεις αποκοπής ενοπιμσένες στο δίσκο $D_R^2 = \{\underline{\xi} \in \mathbf{R}^2 / |\underline{\xi}| \leq R\}$. Επιπλέον αυτά τα ολοκληρώματα γράφονται με αλλαγή μεταβλητής ως

$$I_{\pm} = r \int_0^1 \int_0^{2\pi} \tilde{f}_{\pm} e^{-ikr\tau} d\theta d\tau$$

Παραγοντική ολοκλήρωση μας δίνει το αποτέλεσμα:

$$I_{\pm} = \frac{2\pi i}{k} \left(\tilde{f}_{\pm}(1) e^{\pm ikr} - \tilde{f}_{\pm}(0) \right) + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Κεφάλαιο 4

Εκτιμήσεις πυκνότητας υλικών μέσω τομογραφίας περίθλασης

Η βασική εξίσωση του προηγούμενου κεφαλαίου είναι μία εξίσωση Helmholtz:

$$\Delta\psi + F\psi = 0$$

όταν η συνάρτηση F έχει φορέα $\text{supp}(F) \subset \Omega \subset \mathbf{R}^3$ μέσω της επιβολής συνοριακών συνθηκών ακτινοβολίας, μακριά απ' το Ω :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\partial_r \psi - ikr\psi) = 0$$

Σκοπός της τομογραφίας περίθλασης είναι η κατασκευή της συνάρτησης $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ μέσω μετρήσεων τομογραφίας που παρέχει ουσιαστικά τη συλλογή των ολοκληρωμάτων:

$$X[\psi; \underline{x}] = \int_{\ell_{\underline{x}} \cap \Omega} \psi^2$$

για την ευθεία $\ell_{\underline{x}} = \{[x/\underline{x} = s\underline{x}], |\underline{x}| = 1\}$. Η βασική θεωρία του υλικού παρέχει μοντέλα για τη συνάρτηση F που είναι φύσεως ρευστομηχανικής. Σκοπός της μεθόδου είναι χρήση εκτιμήσεων για την κυματοσυνάρτηση μέσω της τοπικής μεταβολής προκειμένου να υπολογιστούν καλύτερα μοντέλα της F και πιο αξιόπιστες εκδοχές της πυκνότητας.

Η εξίσωση Helmholtz μπορεί να προσφέρει εκτιμήσεις και για την $|\nabla\psi|^2$. Συγκεκριμένα απευθείας υπολογισμός μας δίνει

$$\Delta|\psi|^2 + F|\nabla\psi|^2 + \psi\nabla F \cdot \nabla\psi = 0$$

Πολαπλασιάζοντας με συνάρτηση αποκοπής ζ σε κατάλληλο χωρίο $(\zeta) \subset \subset \Omega$;

$$\int_{\Omega} \zeta^2 (1 + |\psi|(1 - \epsilon|\psi|)) |\nabla\psi|^2 \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla F|^2 + \int_{\Omega} \psi^2 |\nabla\zeta|^2$$

Τα μοντέλα κατασκευής του υλικού προσφέρουν ανισότητες του τύπου:

$$\int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla F|^2 \leq C \int_{\Omega} \zeta^2 F^2$$

Συγκεκριμένα οι εκτιμήσεις που αποδεικνύονται στην εργασία [3] αφορούν χωρίου τύπου

$$\mathfrak{F} = \{\underline{x}/\theta\eta \leq \tilde{F} \leq \eta\}$$

όπου \tilde{F} είναι μία πολυωνυμική προσέγγιση της F , βαθμού m . Τότε για $\mathfrak{F}^* = \{\psi > 0\} \cap \mathfrak{F}$:

$$\sup_{\mathfrak{F}^*} |\psi| \leq C_1(\theta, \eta, m) \inf_{\mathfrak{F}^*} |\psi|$$

$$\sup_{\mathfrak{F}^*} |\nabla \psi| \leq C_2(\theta, \eta, m) |\psi|$$

με τον υπολογισμό των σταθερών

$$C_1 = \eta^{3p\ell} \gamma^{\frac{3p(t+1)}{2t} + t} \sigma C_2 = \eta^{3p\ell} \delta^{\frac{3p(t+1)}{2t} + t} \sigma$$

όπου

$$\gamma = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} |F|^2, \quad \delta = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla F|^2$$

Ο μετασχηματισμός Radon και ακτίνων X Ο μετασχηματισμός Radon έχει τη μορφή για $s \in \mathbf{R}, \underline{\tau} \in S^2$:

$$\mathcal{R}(\Psi)(s, \underline{\tau}) = \int_{\underline{\tau} \cdot \underline{x} = s} \Psi d\alpha$$

ενώ ο μετασχηματισμός ακτίνων X:

$$X(\Psi)(\tau, \underline{x}) = \int_{\ell_{\tau, \underline{x}}} \Psi$$

Μία εύκολη εφαρμογή της σχέση συνεπιφάνειας μα επιτρέπει να λάβουμε τις ανισότητες

$$\int_{\Omega} |\Psi|^2 = \int_{\mathbf{R}} \int_{S^2} \Psi^2 \leq \int_{\mathbf{R}} \mathcal{R}(|\Psi|^2)$$

Επίσης

$$\mathcal{R}(|\Psi|^2) \leq \sup |\Psi| \mathcal{R}(|\Psi|)$$

Ο τύπος αυτός εμπλέκεται στον κώδικα που χακολοιθεί

```

import matrix
def tolerance(init_model, n_1,n_2,n_3):
    toler_matr=[tol_1,tol_2,tol_2]
    tol_1=[]
    tol_2=[]
    tol_3=[]
    for i1 in range(n_1):
        tol_1.append(init_model[1])
    for i2 in range(n_2):
        tol_1.append(init_model[2])
    for i3 in range(n_3):
        tol_2.append(init_model[3]):
    return toler_matr

def radon(measurements, n_1,n_2,n_3):
    measur_matr=[tol_1,tol_2,tol_2]
    meas_1=[]
    meas_2=[]
    meas_3=[]
    for j1 in range(n_1):
        meas_1.append(measuremnts[1])
    for j2 in range(n_2):
        meas_2.append(measurements[2])
    for j3 in range(n_3):
        meas_2.append(measurements[3])
    return measur_matr

def best_model(init_model,measurements, m1,m2,m3,eps, r)
    result=[0,0,0]
    if norm(init_model-measurements)< eps:
        result=init_model
    else:
        for j in range(r):
            result=result+tolerance(init_model,m1,m2,m3)-radon(measuremnts,m1,m2,m3)
        return result

```


Βιβλιογραφία

- [BW] Born M., Wolf E., Principles of Optics, Cambridge UP
- [BS] Brendle S., *A generalization of the Yamabe flow for manifolds with boundary*, Asian J. Math., **6**, (4), 625-644 (2002)
- [GMT] Gopal A., Minardi S., Tatarakis M., *Quantitative two dimensional shadowgraphic method for high sensitivity density measurement of under-critical density plasmas*, Opt. Lett., **32**, 1238-1240 (2007)
- [PM] Pliakis D., Minardi S., *An iterative shadowgraphic* , JOSA A, (2009)
- [PD1] Pliakis D., *On the volume of nodal sets*, (preprint)
- [PD2] Pliakis D., *Nash-Moser estimates for variable coefficient PDE's* (Notes in Greek)
- [SE] Stein E., Fourier Analysis, Princeton series in Analysis Κεφάλαιο 10 για το μετασχηματισμό Radon μετάφραση Α. Πετρίδου, Φ. Μποτονάκη