ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΡΥΘΜΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΣΥΜΜΟΡΦΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ευστάθιος Γκανίδης -Πέτρος Γκατζίνης
Τμ. Φυσικών Πόρων και Περιβάλλοντος

25 Μαΐου 2011

Περιεχόμενα

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στους γονείς μας που μας στήριξαν σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μας

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην εργασία αυτή μελετάμε με σύγχρονες μεθόδους της γεωμετρικής α-νάλυσης τις συχνότητες των στάσιμων κυμάτων σε χωρίο που περιέωχει ύλη. Η ιδέα της προσέγγισης με την κατασκευή *δικτύου γεωδαισιακών ψηφίδων* και η εξαγωγή των σχετικών υπολογισμών είναι ιδέα που μας δίδιαξε ο Δρ Δ. Α. Πλιάκης. Το αποτέλεσμα που είναι αναμενόνενο: *λαμβάνουμε ένα ισοδύναμο σκελετό που καθορίζεται από την κατανομή της ύλης στο χωρίο και δυνάμεθα να δούμε μεγαλύτερη λεπτομέρεια καθώς αυξάνουμε τη συχνότητα*. Ωστόσο μας δόθηκε η δυνατότητα να δούμε την ανάπτυξη ενός τμήματος του λογισμι-κού που παρήγαγε ο Σπύρος Θανασούλας για την κατασκευή των πλευρικών επιφάνειων της ψηφίδας: τυς ευχαριστούμε για τις ιδέες που μας μετέφραν.

Θα θέλμα ν α ευχαριστήσουψμε τον καθηγητή Τ. Παπακώστα που συνέ-στησε το θέμα και μας παρακολούθησε κατά την πορεία της εκτέλεσης της.

Επίσης θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον αν. καθηγητή Δρ. Π. Σουπιό που μας βοηθησε στην ερμηνεία των αποτλεσμάτων και στην κατανόηση του υπολογιστικού κώδικα του Σ. Θανασούλα.

Σ. Γκανίδης, Π. Γκατζίνης
Μάιος 2011

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η μελέτη των ρυθμών (modes) και των συχνοτήτων τους (frequencies) ενός χωρίου συνιστά μία βασική μέθοδο χαρακτηρισμού της δομής ενός υλικού χωρίου. Συγεκριμένα ο ρυθμός δοθείσης συχνότητας είναι η χωρική διαμόρφωση ενός κύματος το οποίο διαδίδεται στο χωρίο (εμείς εδώ θα περιοριστούμε στην περίπτωση των στάσιμων κυμάτων). Η βασική τεχνική που θα χρησιμοποιήσουμε είναι γενίκευση του θεωρήματος Riemann της μιγαδικής ανάλυσης που χρησιμοποιείται ευρέως στις εφαρμογές. Συγκεκριμένα το θεώρημα Riemann λέγει ότι κα'θε επίπεδο χωρίο χωρί'ς οπές μπορεί να παραμορφωθεί σύμμορφα ώστε να καταστεί μοναδιαίος δίσκος :

Έστω $\Omega \subset \mathbf{C}$ ενα κλειστό, φραγμένο και απλά συνεκτικό χωρίο. Τότε για $z_0 \in \Omega$ υπάρχει σύμμορφη απεικόνιση $F : \Omega \to \mathbf{D}_{0,1}$ τέτοια ώστε:

$$F(z_0) = 0, \quad F'(z_0) \neq 0$$

Μάλιστα στις δύο διαστάσεις η σύμορφη παραμόρφωση μπορεί να καταστεί ακριβής μέσω της αναπαράστασης Schwarz-Christoffel . Ωστόσο εμείς εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μία μέθοδο η οποία εξαιρετικά γενική και βασίζεται στο πρόβλημα Yamabe με σύνορο. Συγκεκριμένα σύμφωνα με το Θεώρημα του Θ. Φ. Εσςοβαρ κάθε χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ είναι σύμμορφο προς τον εαυτό του με την επαγόμενη μετρική παραμόρφωση της περιβάλλουσας επιφάνειας σε μία επιφάνεια σταθερής μέσης καμπυλότητας. Η σταθερότητα της μέσης καμπυλότητας του συνόρου εγγυάται ότι το η περιβάλουσα επιφάνεια του είναι η ελάχιστη που περικλείει το δοσμένο όγκο. Η βαθμωτή καμπυλότητα διαδραμτίζει τό ρόλο της συνολικής μάζας ενός φυσικού συστήματος, το δε πρόσημο της καθορίζει το πρόσημο της πρώτης ιδιοτιμής του τελεστή συμμορφης λαπλασιανής.

Στην πτυχιακή εργασία μας παρουσιάζουμε τη μέθοδο των γεωδαισικών ψηφίδων ([ΠΔ1],[ΠΠ],[ΠΤΠΣ]) η οποία συνιστά μία νέα εκδοχή πεπερασμένων στοιχείων σε χωρίο τυχαίας καμπυλότητας. Θα αναπτύξουμε όλες τις τοποικές εκτιμήσεις για το σύμμορφο παράγοντα συναρτήσει της προκύπτουσας καμπυλότητας Ricci και μέσω της βαθμωτής καμπυλότητας.

Στην πλευρα της ανάπτυξης του λογισμικού θα περιοριστούμε στην περίπτωση χωρίου που περιβάλλεται από επφάνεια ομοιομορφική προς τη σφαίρα. Η κατασκευή της επιφάνειας θα γίνει με παραμόρφωση της σφαίρας μέσω της προσθήκη εξογκωμάτων που καλούμε *φουσκάλες*, μολονότι μπορεί να είναι 'φουσκάλες προς το εσωτερικό'. Η παράσταση αυτών των συνόλων θα γίνει σε γραφικό περιβάλλον python 2.1 . Ο εκιτμήσεις του σύμμορφου παράγοντα θα μας επιτρέψουν να επιταχύνουμε τη διαδικασία μέσω κατασκευής εξογκομάτων με προκαθορισμένα όρια μεταβολής.

Τα βασικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη εργασία αυτή είναι οι εκτίμηση των συχνοτήτων κάθε τάξεως μέσω της γεωμετρικής δομής που περιγράφεται από το *σκελετό των γεωδαισιακών ψηφίδων*.

Κεφάλαιο 2

Κλασικές μεταβολικές μέθοδοι

Στο κεφάλαιο αυτό ανακεφαλαιώνουμε τις κλασικές μεθόδους υπολογισμού ρυθμών και συχνοτήτων για κυματοδηγούς -ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας - όπως αυτές αναπτύχθηκαν από τον J. Schwinger κατά τη διάρκεια του Β΄ ΠΠ στο εργαστήριο - ακτινοβολιών του Τεχν. Ινστ. Μασαχουσέτης (MIT). Το κείμενο που ακολουθεί είναι μετάφραση του [ΣΜ] με προσαρμογές που που επιβάλλει η μαθηματική αυστηρότητα.

2.1 Οι αρχές μεταβολής

Καθώς ο αριθμός των σχημάτων οδηγών που επιδέχονται ακριβή επίλυση μέσω γνωστών συναρτήσεων, η επίτευξη προόδου απαιτεί την ανάπτυξη μεθόδων προσέγγισης που μπορούν να περιγράψουν σύνορα γενικότερης μορφής. Μολονότι υπάρχουν αρκετές ειδικές μέθοδοι που εξυπηρετούν το σκοπό αυτό, θα αναπτύξουμε γενικές αρχές που διευκολύνουν τον καθορισμό της συχνότητας αποκοπής ενο΄ς οδηγού και του αντίστοιχου πεδίου. Οι αρχές αυτές βασίζοται στη μεταβολική διατύπωση των εξισώσεων πεδίου (βλ.[;], κεφ 4). Συγκεκριμένα εάν μία από τις εξισώσεις Maxwell λαμβάνεται ως εξίσωση ορισμού ενός πεδίου, η άλλη θα προκύπτει από την απαίτηση ελαχιστοποίησης ενός ολοκληρώμτος όγκου σε μετβολές του α΄λλου πεδίου. Σε μία περιοχή Ω δίχως απώλειες που περιβάλλεται από αγώγιμα τοιχώματα και είναι ελεύθερη ρευμάτων η θεμελιώδης μεταβολική αρχή (ΜΑ) συνιστά ότι η κατανομή του ηλεκτρικού $\underline{E}$ και του μαγνητικού πεδίου $\underline{H}$ είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την ενέργεια:

$$\int_{\Omega} \epsilon \underline{E}^2 + \mu \underline{H}^2$$

όταν είτε μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο $\underline{H}$ και το πεδίο $\underline{E}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{E} = \frac{i}{k\eta}\mathrm{curl}(\underline{H})$$

είτε αντίστροφα:

$$\underline{H} = -\frac{i}{k\zeta}\mathrm{curl}(\underline{H})$$

Επιπλέον όταν η $\underline{H}$ είναι η βασική μεταβλητή η μεταβολική αρχή επάγει τη συνοριακή συνθήκη αγωγού (βλ [ΣΜ], (6.19»:

$$\underline{E} = (\underline{E} \cdot \underline{n})\underline{n}$$

όπου $\underline{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $S = \partial\Omega$. Στην περίπτωση που θεωρήσουμε ως μεταβλητηή το ηλεκτρικό πεδίο $\underline{E}$ τότε περιοριζόμαστε σε πεδιακές μεταβολές της μορφής:

$$\underline{n} \wedge \underline{H} = 0$$

Θα εφαρμόσουμε αυτά τα αποτελέσματα για να κατασκευάσουμε μεταβολικές διατυπώσεις της κυματικής εξίσωσης και των συοριακών συνθηκών που ικανοποιούν οι πεδιακές συναρτήσεις κυματοδηγού. Η περίπτωση του κυματοδηγού που θα απαχολ΄ήσει παρακ΄τω ανιστοιχεί σε χωρία της μορφής:

$$\Omega = \widehat{\Omega} \times [0, l]$$

όπου $\widehat{\Omega}, C \subset \mathbf{R}^2, \partial\widehat{\Omega} = C$ και C είναι λεία επίπεδη καμπύλη.

Χρησιμοποιύμε έτσι τις συνιστώσες πεδίου για τον ρυθμό (mode) με τον ενδογενή κυματάριθμο ίσο με τον κυματάριθμο αποκοπής $k = \gamma$, έτσι ώστε το μήκος κύματος του οδηγού να απειρίζεται και όλες οι πεδιακές ποσότητες είναι ανεξάρτητες από τη $'z'-$ συντεταγμένη. Με τη συνήθη ορολογία των κυματοδηγών λέμε ότι η τάση του (ΕΡ) και το ρεύμα του (ΜΡ) μηδενίζονται και οι μοναδικές εξισώσεις που επιβιώνουν είναι οι ακόλουθες:

$$E-\text{ρυθμός, (ΕΡ)}: \quad E_z = i\gamma\zeta\phi, \;\; \underline{H} = -\underline{k} \wedge \nabla\phi$$

$$H-\text{ρυθμός, (ΜΡ)}: \quad H_z = i\gamma\eta\psi, \;\; \underline{H} = \underline{k} \wedge \nabla\psi$$

Σ′ αυτή την περίπτωση οι (Ε,Η)-ρυθμοί ικανοποιούν τισὲξισώσεις που δώσαμε στην αρχή. Μπορούμε να αντισρέψουμε μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε:

$$\text{(ΕΡ)}: \quad E_z = -i\frac{\zeta}{\gamma}\Delta\phi, \;\; \underline{H} = -\underline{k} \wedge \nabla\phi$$

$$\text{(MP)}: \quad H_z = -i\frac{\eta}{\gamma}\Delta\psi, \ \ \underline{H} = \underline{k} \wedge \nabla\psi$$

Η κυλινδρική συμμετρία της επιφάνειας του κυματοδηγού οδηγεί στην έκφραση της μεταβολικής αρχής μέσω του ολοκληρώματος στο χωρίο $\widehat{\Omega}$:

$$\int_{\widehat{\Omega}} \left(|\nabla f|^2 - \gamma^2 f^2\right)$$

για $f = \phi, \psi$. Ωστόσο καθώς η αναπαράσταση περιλαμβάνει τις θεμελιώδεις πεδιακές μεταβλητές για τους E, Hρυθμούς αντίστοιχα η μεταβολική αυτή αρχή εφαρμοσμένη στο ηλεκτρικό πεδίο αποκλείει οπαιδήποτε μεταβολή παραβιάζει τη συνοριακή συνθήκη $\phi = 0$ στην περιβάλλουσα καμπύλθη C ενώ αυτόματα παράγει τις συνοριακές συνθήκες $\underline{n} \cdot \nabla\psi = 0$ για τον μαγνητικό ρυθμό. Εκτελώντας τη μεταβολή $f \mapsto f + h$ καταλήγουμε με ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$-\int_{\widehat{\Omega}} h(\Delta f + \gamma^2 f) + \int_C h\underline{n} \cdot \nabla f = 0$$

η οποία δεν είναι άλλη από την εξίσωση κύματος και την συνοριακή συνθήκη του μαγνητικού ρυθμού για τυχαίες μεταβολές ενώ για τον ηλεκτρικό ρυθμό απαιτείται $h = 0$. Το επόμενο ζεύγος αναπαράστασεων οδηγούν στη μεταβολή του ολοκληρώματος:

$$\int_{\widehat{\Omega}} \left((\Delta f)^2 - \gamma^2 f^2\right)$$

όπου τώρα η επιβολή της (ΜΑ) παράγει για τον (ΕΡ) για αδέσμεψτες μεταβολές ενώ για τον (ΜΡ) πρέπει να σέβεται συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Λαμβάνουμε έτσι:

$$-\int_{\widehat{\Omega}} (\nabla(\Delta f + \gamma^2 f) \cdot \nabla h + \int_C (\Delta f)\underline{n} \cdot \nabla h = 0$$

Η τελευταία μας δίνει λόγω των σχολίων για τις (ΣΣ):

$$\Delta f + \gamma^2 f = c$$

όπου c σταθερά την οποία απορροφούμε στη συνάρτηση f. Η απαίτηση το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα να μηδενίζεται τυχαίες μεταβολές επιβάλλει τη συνθήκη $\Delta f = 0$ επί της C που είναι ισοδύναμη της συνθήκης του (ΕΡ) όταν $\gamma \neq 0|$. προκειμένου να εφαρμοστεί η (ΜΑ) στο (ΜΡ) η (ΣΣ) $\underline{n} \cdot \nabla f = 0$ επί της C.

Αργότερα θα φανεί χρήσιμο να μελετήσουμε γενικές συνοριακές συνθήκες της μορφής:

$$(\underline{n} \cdot \nabla f + \rho f)|_C = 0$$

όπου $\rho : C \to \mathbf{R}$ είνια καθορισμένη συνάρτηση επί της καμπύλης. Η ΣΣ στην ΕΡ ή στην ΜΡ ανιστοιχούν στην περίπτωση $\rho = \infty$ ή στην $\rho = 0$ αντίστοιχα. Η γενική αυτή συνθήκη Robbin εισήχθη στο [ΣΜ], κεφ 4. :

Η ΣΣ προκύπτει από τις δύο ΜΑ με την προσθήκη κατάλληλων επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων:

$$\int_{\widehat{\Omega}} (|\nabla f|^2 - \gamma^2 f^2) + \int_C \rho f^2$$

το οποίο δίνει τη μεταβολή:

$$-\int_{\widehat{\Omega}} (|\nabla f|^2 + \gamma^2 f^2) h + \int_C (\underline{n} \cdot \nabla f + \rho f) h = 0$$

η οποία οδηγεί στην κυματική εξίσωση και τη ΣΣ για το σώμα και την περιοχή και στην περιβάλλουσα καμπύλη. Παρομοίως η στασιμότητα του

$$\int_{\widehat{\Omega}} \left[|\Delta f|^2 - \gamma^2 |\nabla f|^2 \right] - \gamma^2 \int_C \frac{1}{\rho} (\underline{n} \cdot \nabla f)^2$$

εκφράζεται ως :

$$-\int_{\widehat{\Omega}} \nabla \left[|\Delta f|^2 + \gamma^2 |\nabla f|^2 \right] \cdot \nabla h + \gamma^2 \int_C \frac{1}{\rho} (\underline{n} \cdot \nabla h)(\Delta f - \frac{\gamma^2}{\rho} \underline{n} \cdot \nabla f) = 0$$

η οποία αναπαράγει την κυματική εξίσωση και τη ΣΣ όταν $\gamma \neq 0$. Στις γενικότερες ΣΣ δεν έχει επιβληθεί κανενός είδους περιορισμός στις μεταβολές. Ωστός ο προκειμένου να έχουμε τις αναγωγές $\rho \to 0, \infty$ στην ΕΡ ή στην ΜΡ τότε απαιτούμε αντίστοιχα τις ΣΣ τύπου Dirichlet ή Neumann.

2.2 Αρχή Rayleigh

Πριν εξετάσουμε την πρακτική χρησιμότητα αυτών των μεταβολικών αρχών είναι απαραίτητο να σημειώσουμε ότι διάφορες ποσότητες (συναρτησιοειδή) που εξετάζουμε έχουν ως κρίσιμη τιμή το 0. Αυτό φαίνεται εύκολα εάν παρατηρήσουμε ότι όλες οι εκφράσεις είναι ομογενείς εκφράσεις της f. Επομένως μία μεταβολή h της f ανάλογη της $h = \epsilon f$ και άρα διαπιστώνουμε την αλήθεια του προηγούμενης πρότασης. Εάν η $f : \widehat{\Omega} \to \mathbf{R}$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση και τη ΣΣ Robbin τότε έχουμε:

$$(\Gamma \mathrm{EP}) : \quad \int_{\widehat{\Omega}} \left[|\nabla f|^2 - \gamma^2 f^2 \right] + \int_C \rho f^2 = 0$$

$$(\Gamma \mathrm{MP}) : \quad \int_{\widehat{\Omega}} \left[|\Delta f|^2 - \gamma^2 |\nabla f|^2 \right] + \int_C \frac{1}{\rho} (\underline{n} \cdot \nabla f)^2 = 0$$

οπότε έχουμε το λεγόμενο πηλίκο Rayleigh :

$$\gamma^2 = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2 + \int_C \rho f^2}{\int_{\widehat{\Omega}} f^2}, \quad (\mathrm{I}\Delta\text{-}\Gamma\mathrm{EP})$$

και

$$\gamma^2 = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\Delta f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} f^2 + \int_C \frac{1}{\rho} (\underline{n} \cdot \nabla f)^2}, \quad (\mathrm{I}\Delta\text{-}\Gamma\mathrm{MP})$$

Όταν θερήσουμε τον (ΕΡ) η (ΜΡ) με συνθήκες Drichlet ή Neumannαντίστοιχα έχουμε

$$\gamma_D^2 = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} f^2}, \quad (\mathrm{I}\Delta\text{-}\mathrm{EP})$$

$$\gamma_N^2 = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\Delta^2 f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2}, \quad (\mathrm{I}\Delta\text{-}\mathrm{MP})$$

την πρώτη από τις οποίες την συναντούμε στο [ΣΜ], κεφ. 6. Επιλέγουμε τώρα μία συνάρτηση υποτιθέμενη ομαλή και εισάγουμε την ποσότητα γ με τις προηγούμενες σχέσεις. Από την κλάση αυτών των συναρτήσεων οι ιδιοσυναρτήσεις, που ικανοποιούν την κυματική εξίσωση και τη συνοριακή συνθήκη είναι μοναδικές για τις τις οποίες η ποσότητα γ είνια στάσιμη σε μεταβολές που προκύπτουν γύρω από αυτές. έτσι μία συνάρτηθση η οποία αποκλίνει από μία πραγματική ιδιοσυνάρτηση σε πρώτη προσέγγιση θα επιτρέψει τον υπολογισμό της ποσότητας γ με ακρίβεια δεύετρη τάξης. Αυτή η παρατήρηση αποδεκνύεται θεωρούμε μία μικρή μεταβολή της συνάρτηησης f και υπολογίζουμε την προκύπτουσα μεταβολή στο γ^2. Οι εκφράσεις που περιλαμβάνονται στις σχετικές εξισώσεις είναι στάσιμες ως προς μεταβολές της συνάρτησης f και επομένως η διατήρηση της ισότητας επιβάλλει την σατσιμότητα της γ^2. Αντίστροφα προκειμένου η γ^2 να είναι στα΄σιμη πρέπει τα δεξιά μέλη των χσέσεων, $(\mathrm{I}\Delta\text{-}\mathrm{EP}), (\mathrm{I}\Delta\text{-}\mathrm{MP})$ που είναι οι (ΜΑ) που επιβάλλουν την κυματική εξίσωση και τη (ΣΣ). Μία ακόμη ιδιότητα αυτών των εξισώσεων αυτών αναφέρουμε ότι όατν $\rho > 0$, ή ειδικότερα ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (ΕΡ), (ΜΡ) τότε $\gamma^2 \geq 0$εκ των συναρτήσεων που δίδουν στάσιμες τιμές στο γ^2 τότε υπάρχει μία που δίδει ένα απόλυτο ελάχιστο. Η ιδιοσυνάρτηση που έχει αυτή την ιδότητα είναι η συνάρτηση ρυθμού του κυματάριθμου αποκοπής, του κυρίαρχου ηλεκτρικού ή μαγνητικού ρυθμού. Οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση δίδει υψηλότερη τιμή στο γ^2: μία συνάρτηση που διαφέρει από την κυρίαρχη συνάρτηση ρυθμού παράγει τιμή που υπερβαίνει την πραγματική τιμή. Η στασιμότητα των κυματάριθμων αποκοπής και η ελαχιστοποίηση του απόλυτου κυματάριθμου αποκοπής, είναι στοιχεία της περίφημης αρχής Rayleigh , η οποία συναντά γενικότερες εφαρμογές στις συχνότητες συστημάτων με δυναμικές εξισώσεις που λαμβάνονται από μεταβολικές αρχές.

Οι δύο εκφράσεις των κυματάριθμων αποκοπής μπορεί να λάβει μία άλλη ερμηνεία με τον ακόλουθο τρόπο. Η ποσότητα:

$$\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f + \gamma^2 f)^2$$

είναι προφανώς θετική εκτός εάν η f είναι λύση της κυματικής εξίσωσης και γ^2 η αντίστοιχη ιδιοτιμή. Οι ιδιοσυναρτήσεις χαρακτηρίζονται με το χαρακτηρισμό της προηγούμενης. Εάν η f δεν είναι ιδιοσυνάρτηση, η καλύτερη προσέγγιση της γ^2 λαμβάνεται με την ελαχιστοποίηση ως προς γ^2. Αυτό δίδει:

$$\gamma^2 = -\frac{\int_{\widehat{\Omega}} f \Delta f}{\int_{\widehat{\Omega}} f^2} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} f^2}$$

η τελευταία μορφή λαμβάνεται με την επιβολή της (ΣΣ) για τους (ΕΡ),(ΜΡ). Περαιτέρω με την επιλογή αυτή του γ^2:

$$\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f + \gamma^2 f)^2 = \int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2 - \frac{1}{\int_{\widehat{\Omega}} f^2} \left(\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2 \right)^2$$

η οποία δίδει ότι την ανισότητα παρεμβολής [1]:

$$\frac{\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2} \geq \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} f^2}$$

Επομένως η υπολγισθείσα τιμή από μία υποθετική f μέσω της (ΙΔ-ΕΡ) δεν υπερβαίναι την ληφθείσα από την (ΙΔ-ΜΡ)και οι δύο τιμες συμπίπτουν μόνον

[1] Στο [ΣΜ] αναφέρεται λανθασμένα ως Cauchy-Schwarz

όταν η f είναι διοσυνάρτηση με την κοινή τιμή αυτή ως ιδιοτιμή. Επομένως ένα μέτρο της απόκλισης μίας συνάρτησης από μία ιδιοσυνάρτηση δίδεται απο το βαθμό συφωνίας των δύο αυτών σ΄χσεων. Όμοια το

$$\int_{\widehat{\Omega}} \left|\nabla(\Delta f + \gamma^2)\right|^2$$

είναι θετικό εκτός της παρίπτωσης που η λύνει την (). Μία τυχαία συνάρτηση f το ελάχιστο της προηγούμενης σχέσης λαμβάνεται όταν:

$$\gamma^2 = -\frac{\int_{\widehat{\Omega}} \nabla(\Delta f) \cdot \nabla f}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2}$$

Στη λήψη αυτής υποθέσαμε ότι η f ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη μαγνητικού ρυθμού (ΣΣΜΡ) ή η Δf ικανοποιεί την (ΣΣΗΡ).

$$\int_{\widehat{\Omega}} \left|\nabla(\Delta f + \gamma^2 f\right|^2 = \int_{\widehat{\Omega}} |\nabla(\Delta f)|^2 - \frac{1}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2} \left(\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2 \right)^2$$

οπότε

$$\frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla(\Delta f)|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2} \geq \frac{\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2}{\int_{\widehat{\Omega}} (\nabla f)^2} \geq \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} f^2}$$

εφόσον

$$\underline{n} \nabla f = 0$$

επί της C ή εναλλακτικά επί της C

$$f = 0, \quad \Delta f = 0$$

Οι σχέσεις ισότητας ισχύουν μόνον όταν η f είναι λύση της κυματικής εξίσωσης που υπακούουν τις (ΣΣΗΡ) η (ΣΣΜΡ). Οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να οριστούν ανεξάρτητα και κατ΄ αρχήν να κατασκευαστούν μέσω της μεταβολικής ιδιότητας των ιδιοτιμών. Έτσι στο σύνολο αποδεκτών συναρτήσεων, αυτές που είναι συνεχείς με τμημταικώ συνεχείς παραγώγους, η συνάρτηση f_1 που δίδει το ολικό ελάχιστο είναι λύση της κυματικής εξίσωσης που υπακούει στην συνοριακή συνθήκη (ΓΗΣΣ). Η ελάχιστη τιμή του (),γ_1^2. Εάν τώρα το ελάχιστο της () αναζητηθεί εντός του συνόλου των αποδεκτών συναρτήσεων που είναι ορθογώνιες στην f_1:

$$\int_{\widehat{\Omega}} f f_1 = 0$$

η συνάρτηση η οποία ικανοποιεί αυτές τις απαιτήσεις είναι λύση της κυματικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και συνδέεται με την ιδιοτιμή $\gamma_2^2 > \gamma_1^2$. Γενικότερα εάν η () ελαχιστοποείται στην κλάση των ιδιοσυναρτήσεων που είναι ορθογώνιες σστις πρώτες n ιδιοσυναρτήσεις

$$\int_{\widehat{\Omega}} f f_i = 0, \;\; i = 1, \ldots, n$$

η βέλτστη συνάρτηση f_{n+1} είναι λύση της κυματικής εξίσωσης και και των α-παραίτητων συνοριακών συνθηκών που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή γ_{n+1}^2, η οποία υπερβαίνει ή ισούται με την ιδιοτιμή γ_n^2. Κατ΄ αυτο΄ν τον τρόπο λαμβάνεται ένα άπειρο πλήθος ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων, διατεταγμένων κατ΄ αύξουσα ιδιοτιμή, το οποίο θα δείξουμε ΄τι αποτελεί ένα πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων. Επαγωγικά θα δείξουμε ότι η περιγραφείσα διαδικασία ελαχιστοποίησης παρέχει διαδοχικά ιδιοσυναρτήσεις υποθέτοντας ότι οι πρώτες n συναρτήσεις αυτού του τύπου είναι καθεμία τους λύσεις της κυματικής εξίσωσης που ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη και καθεμία είναι κάθετη στις προηγούμενες. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι ιδοτιμές συνιστούν μία αύξουσα ακολουθία, $\gamma_{n+1}^2 \geq \gamma_n^2$. Η εξίσωση μεταβολών () είναι μία αναγκαία συνθήκη ελαχίστου η οποία συνοδεύεται από τη συνθήκη:

$$\int_{\widehat{\Omega}} f_i h = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

όπου n εξισώσεις δεσμών των τυχαίων συναρτήσεων. Εισάγοντας του πολλαπλασιαστές Lagrange α_i λαμβάνουμε τις εξισώσεις ελαχίστου που ικανοποιεί η f:

$$\underline{n} \cdot \nabla f + \rho f = 0$$

$$(\Delta + \gamma^2) f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$$

όπου οι σταθερές α_j προσδιορίζονται από τις προηγούμενες συνθήκες δεσμών. Πολλαπλασιάζοντας την τελευαταία με f_i και ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε:

$$\alpha_i \int_{\widehat{\Omega}} f_i^2 = (\gamma^2 - \gamma_i^2) \int_{\widehat{\Omega}} f f_i + \int_C f_i(\underline{n} \cdot \nabla f + \rho f) - f(\underline{n} \cdot \nabla f_i + \rho f)$$

Το εμπικαμπύλιο ολοκλήρωμα μηδενίζεται όταν οι f, f_i ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη και επίσης το διπλό ολοκλήρωμα μηδενίζεται λόγω της ορθογωνιότητας. Έτσι όλοι οι πολλαπλασιαστές Lagrange μηδενίζονται και η συνάρτηση

f_{n+1} είναι λύση της κυματικής εξίσωσης και ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη. Επιπλέον είναι σαφές ότι μία ποσότητα που περιλαμβάνει τη συνάρτηση f ελαχιστοποείται εντός αυτής της κλάσης συναρτήσεων, κάθε περιορισμός που επιβάλλεται στην κλάση των αποδεκτών συναρτήσεων είτε δεν μειώνει την ιδιοτιμή είτε την αφήνει αμετάβλητη. Εφόσον οι συναρτήσεις f_{n+1} που παρέχουν την ελάχιστη γ^2, υποκείμενη στην ορθογωνιότητα των πρώτων n ιδιοσυναρτήσεων ευρίσκεται εντός ενός πιο περιορισμένου συνόλου συναρτήσεων f_n, οι οποίες είναι ορθογώνιες στις πρώτες $n-1$ συναρτήσεις και κατά συνέπεια

$$\gamma_{n+1}^2 \geq \gamma_n^2$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη των ισχυρισμών μας.

Παρόμοιοι συλλογισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση () για τη γ^2. Για απλότητα θεωρούμε μόνο τις (EP), (MP) συοριακές συνθήκες, οπότε αφαρμόζεται η (). Το σύνολο αποδεκτών συναρτήσεων περιλαμβάνει αυτές που έχουν τμηματικά συνεχείς δεύτερες παργώγους. Επιπροσθέτως στην περίπτωση της (MP) οι συναρτήσεις πρέπει να ικανοποιούν την κατάλληλη συνοριακή σινθήκη. Η βέλτιστη συνάρτηση είναι μία ιδιοσυνάρτηση μέ απροσδιοριστία σταθεράς. Η δεύτερη ιδιοσυνάρτηση προκύπτει ελαχιστοποιώντας την

$$\frac{\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2}$$

με την απαίτηση

$$\int_{\widehat{\Omega}} \nabla f \cdot \nabla f_1 = 0$$

και γενικότερα η ιδιοσυναρτήση f_{n+1} ευρίσκεται με ελαχιστοποίηση της προηγούμενης και με την επιβοιλή των συνθηκών:

$$\int_{\widehat{\Omega}} \nabla f \cdot \nabla_i = 0, \quad i = 1, \cdot, n$$

Η απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού επιτυγχάνεται με το συνδυασμό της σχετικής αρχής μεταβολής με την επιβολή των σχέσεων που απορρέουν από τις σχέσεις ορθογωνιότητας και όπως προηγουμένως καταλήγουμε με την εισαγωγή πολλαπλασιαστών Lagrange , α_i:

$$\nabla(\Delta f + \gamma^2 f) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \nabla f_j$$

υποκείμενες στις συνοριακές συνθήκες:

$$\text{(EP)} \quad \Delta f = 0,$$

ή

$$\text{(MP)} \quad \underline{n} \cdot \nabla f = 0$$

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange μηδενίζονται όπως προηγουμένως. Πολλαπλασάζουμε με ∇f_i και χρησιμοποιούμε την υπόθεση ορθογωνιότητας:

$$\alpha_i \int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f_i|^2 = \int_{\widehat{\Omega}} \nabla f_i \cdot \nabla(\Delta + \gamma^2) f + \int_C (\Delta f)(\underline{n} \cdot \nabla f_i) - (\Delta f_i)(\underline{n} \cdot \nabla f) = 0$$

και μέσω των συνοριακών συνθηκώμ που ικανοποιούν οι βέλτιστες συναρτήσεις και της σχέση ορθογωνιότητας συνδυασμένη με την εξίσωση που ικανοποιούν οι n ιδιοσυνρτήσεις. Η βέλτιστη ιδιοσυνάρτηση ικανοποιεί την κυματική εξίσωση και τη συνοριακή συνθήκη, ενώ ο συλλογισμός παρέχει και τη μονότονη φύση των διαδοχικών ιδιοτιμών.

Έως τώρα αγνοήσαμε τη δυνατότητα η πρώτη ιδιοτιμή που λαμβάνεται από το πηλίκο Rayleigh που θα αντιστοιχεί στη μηδενική τιμή και οδηγεί μη αποδεκτές συναρτήσεις ρυθμού κυματοδηγού. Είναι εμφανές ότι το απόλυτο ελάχιστο είναι πραγματικά ότι $\gamma = 0$, που αντιστοιχεί σε σταθερή f. Αυτό το ενδεχόμενο απορρίπτεαι στην περίπτωση του (EP) μέσω της συνοριακής συνθήκης: ο ρυθμός μηδενικού κυματάριθμου αποκοπής είναι ε΄νας μαγνητικός ψευδορυθμός. Επομένως ο πρώτος φυσικά σημαντικός μαγνητικός ρυθμός είναι ο δεύτερος ρυθμός που παρέχεται από την αρχή Rayleigh . Αποκλείουμε το ρυθμό που αντιστοιχεί στην $\gamma = 0$, απαιτούμε ότι η συνάρτηση f που είναι ορθογώνια σε μία σταθερά (μηδενικού μέσου όρου) ή

$$\int_{\widehat{\Omega}} f = 0$$

Η ιδιοσυνάρτηση που ευρίσκεται με ελαχιστοποίηση της (...) με την επιβολή αυτής της συνθήκης, οδηγεί στον κυρίαρχο μαγνητικό ρυθμό και ο οποίος θα θεωρηθεί ως ο πρώτος ρυθμός. Ο δεύτερος ρυθμός ευρίσκεται ανάμεσα στις συναρτήσεις που ικανοποιούν την τελευατία συνθήκη και είναι ορθογώνιες στον κυρίαρχο ρυθμό και η διαδικασία συνεχίζει όπω σπροηγουμένως. Παρόμοια δυσκολία εμφανίζεται στην εφαρμογή της αρχής Rayleigh στη σχέση (). Το απόλυτο ελάχιστο αυτής είνια μηδέν και λαμβάνεται από μία συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$\Delta f_0 = 0$$

Όταν μελετάμε τους μαγνητικούς ρυθμούς η συνάρτηση f_0 ικανοποιεί τη συνθήκη επί της C:

$$\underline{n} \cdot \nabla f_0 = 0$$

που επιβάλλει ότι η ∇f_0 ικανοποιεί

$$\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f_0|^2 = \int_C f_0 \underline{n} \cdot \nabla f_0 - \int_{\widehat{\Omega}} f_0 \Delta f_0 = 0$$

Επομένως υπάρχει μόνο ένας ηλεκτρικός ψευδορυθμός. Προκειμένου να απαλείψουμε αυτό το ρυθμό εισάγουμε τις συναρτήσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\int_{\widehat{\Omega}} \nabla f \cdot \nabla f_0 = \int_C f \underline{n} \cdot \nabla f_0 = 0$$

Τώρα εφόσον η f_0 είναι αρμονική, η κάθετη παράγωγος του f_0 μπορεί να οριστεί τυχαία και η γενικότερη ισχύς της τελευταίας μπορεί να επιτευχθεί όταν η f μηδενίζεται ή είναι σταθερή στο σύνορο. Έτσι μολονότι το γεγονός ότι η συνθήκη στασιμότητας σε τυχαίες μεταβολές γύρω από έναν ηλεκτρικό ρυθμό, η συνάρτηση f πρέπει να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη ηλεκτρικού ρυθμού εάν το απόλυτο ελάχιστο του γ είναι ο κυματάριθμος αποκοπής του κυρίαρχου ηλεκτρικού ρυθμού.

Ανακεφαλαιώνοντας η αναγκαία συνθήκη ισχύος της αρχής Rayleigh είναι η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών ηλεκτρικού ή μαγνητικού ρυθμού. Εάν αυτή εφαρμοστεί στην (10.18α) τότε η συνθήκη ηλεκτρικού ρυθμού δεν πρέπει να παραβιαστεί ενώ στο μαγνητικό ρυθμό δεν επιβάλλεται άλλη συνθήκη διαφορετικ΄θη από αυτή του μηδενικού μέσου όρου.

2.3 Η μέθοδος μεταβολής - επανάληψης

Θα μελετήσουμε τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων σε συνδυασμό με την αρχή Rayleigh παράγοντας σταθερά βελτιωμένες προσεγγίσεις στο κυματάριθμο αποκοπής του κυρίαρχου ρυθμού, οι προσεγγίσεις συγκλίνουν στην πραγματική τιμή. Θα χρημοποιήσουμε έναν συμπαγέστερο συμβολισμό για την ιδιοτιμή γ^2, συμβολίζοντας την με λ καθώς δεν είνια δυνατόν να προκληθεί σύγχυση με το μήκος κύματος. Προκειμένου να ληφθεί προσέγγιση της ιδιοτιμής του κυρίαρχου ρυθμού λ_1, διαλέγουμε τη συνάρτηηση $F_1^{(0)}$ που ικανοποιεί την συνθήκη (EP) ή την (MP). Σύμφωνα με την αρχή Rayleigh:

$$\lambda^{(0)} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla F_1^{(0)}|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} (F_1^{(0)})^2} \geq \lambda_1$$

και η $\lambda_1^{(0)}$ συνιστά τη μηδενική προσέγγιση στον κυρίαρχο ρυθμό f_1. Μία πρώτη προσέγγιση στο ρυθμό $F_1^{(1)}$ ορίζεται μέσω της

$$\Delta F_1^{(1)} + F_1^{(0)} = 0$$

Θα υποτεθεί ότι αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί για το $F_1^{(1)}$ υποκείμενα στις συνοριακές συνθήκες (EP), (MP). Η προσέγγιση πρώτης τάξεως υπολογίζεται μέσω της αρχής Rayleigh

$$\lambda^{(1)} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla F_1^{(1)}|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} (F_1^{(1)})^2} \geq \lambda_1$$

Η διαδικασία συνεχίζεται με τον προφανή τρόπο: η προσέγγιση τάξεως $n, F_1^{(n)}$ λαμβάνεται από την $F_1^{(n-1)}$:

$$\Delta F_1^{(n)} + F_1^{(n-1)} = 0$$

και αντίστοιχα

$$\lambda^{(n)} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla F_1^{(n)}|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} (F_1^{(n)})^2} \geq \lambda_1$$

Σημειώνουμε τώρα ότι με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla F_1^{(n)}|^2 = \int_{\widehat{\Omega}} F_1^{(n)} F_{(n-1)}, \;\; n \geq 1$$

και επομένως

$$\lambda^{(n)} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} F_1^{(n)} F_1^{(n-1)}}{\int_{\widehat{\Omega}} (F_1^{(n)})^2} \geq \lambda_1$$

Είναι εύκολα να δεχθεί ότι οι διαδοχικές προσεγγίσεις φθίνουν στην λ_1. Συγκεκριμένα θέτοντας στην () $f = F_1^{(n+1)}$ λαμβάνουμε ότι:

$$\frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla F_1^{(n)}|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} \left(F_1^{(n)}\right)^2} \geq \frac{\int_{\widehat{\Omega}} \left(F_1^{(n)}\right)^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla F_1^{(n+1)}|^2} \geq \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla F_1^{(n+1)}|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} \left(F_1^{(n+1)}\right)^2}$$

ή

$$\lambda_1^{(n)} \geq \lambda_1^{(n+\frac{1}{2})} \geq \lambda^{(n+1)}$$

όπου

$$\lambda_1^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} \left(F_1^{(n)}\right)^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla F_1^{(n+1)}|^2} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} (F_1^{(n)})^2}{\int_{\widehat{\Omega}} F_1^{(n)} F_1^{(n+1)}}$$

καλείται φυσιολογικά η προσέγγιση τάξεως $(n+\frac{1}{2})$ της λ_1. Τώρα εφόσον οι διαδοχικές προσεγγίσεις της λ φθίνουν μονότονα αλλά δε μπορούν να μειωθούν πέραν της λ_1, οπότε η ακολουθία $\lambda_1^{(n)}$ συγκλίνει. Θα δείξουμε ότι το όριο είναι η λ_1 εκτός της περίπτωσης που η εναρκτήρια συνάρτηση $F_1^{(0)}$ επελέγη ορθογώνια στη συνάρτηση κυρίαροχυ ρυθμού λ_1. Σ' αυτήν την περίπτωση η ακολουθία προσεγγίσεων της ιδιοτιμής θα προσεγγίζουν την ελάχιστη ιδιοτιμή στην οποία η αρχική συνάρτηση δεν είναι ορθογώνια. Θα δείξουμε τον ισχυρισμό μας αυτό κατασκευάζοντας τη συνάρτηση:

$$F(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^1 F_1^{(n+1)}(\underline{x})$$

όπου α είναι μία τυχούσα παράμετρος. Θα μελετήσουμε το χωρίο σύγκλισης της συναρτήσει της παραμέτρου α και απαιτούμε πληροφορίες για το μέτρο της $|F_1^{(n+1)}|$: μία συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Poisson ικανοποιεί εκτιμήσεις του τύπου [2]:

$$|F_1^{(n+1)}(\underline{x})| \leq C(\underline{x}) \left(\int_{\widehat{\Omega}} |F_1^{(n)}|^2\right)^{1/2}$$

όπου η σταθερά είναι ανεξάρτητη της τάξεως προσέγγισης, εξαρτάται από την διατομή του κυματοδηγού. Η εμγιστοποίησης της σειράς επιβάλλει τον περιορσμό:

$$|\alpha| \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |F_1^{(n+1)}|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |F_1^{(n)}|^2} < 1$$

Ωστόσο

$$\frac{\int_{\widehat{\Omega}} |F_1^{(n)}|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |F_1^{(n+1)}|^2} = \lambda_1^{(n+\frac{1}{2})} \lambda_1^{n+1}$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |F_1^{(n)}|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |F_1^{(n+1)}|^2} = \mu^2$$

[2] Στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ανισότητες αυτού του τύπου σε χωρία γενικού τύπου, στις 3 διαστάσεις

όπου μ είναι το όριο που προσεγγίζεται από την ακολουθία προσεγγίσεων της ιδιοτιμής. Επομένως η ς ειρά που εισήχθη πιο πάνω ορίζει μία συνάρτηση F_1 που ορίζεται για $|\alpha| < \mu$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\Delta F_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n F_1^{(n)} = -\alpha F_1 - F_1^{(0)}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με την ιδιοσυνάρτηση f_1 και ολοκληρώνοντας στη διατομή του κυματοδηγού λαμβάνουμε:

$$\int_{\widehat{\Omega}} F_1^{(0)} f_1 = \int_{\widehat{\Omega}} F_1(\Delta + \alpha) f_1 = -(\alpha - \lambda_1) \int_{\widehat{\Omega}} F_1 f_1$$

βλέπουμε τώρα ότι πραγματικά $\mu = \lambda_1$ εφόσον η γεννήτρια συνάρτηση $F_1^{(0)}$ δεν είναι ορθγώνια στην ιδιοσυνάρτηση f_1, απαίτηση που εύκολα συναντάται στη πράξη. Εάν υποτεθεί ότι η ακολουθία $\lambda_1^{(n)}$ προσεγγίζει ένα όριο $\mu > \lambda_1$ τότε η σειρά συγκλίνει για $\alpha = \lambda_1$ και συνεπώς:

$$\int_{\widehat{\Omega}} F_1^{(0)} f_1 = 0$$

που αντιτίθεται στην υπόθεση ότι η $F_1^{(0)}$ δεν είναι ορθογώνια στην f_1. Επομένως $\mu = \lambda_1$. Εάν η $F_1^{(0)}$ είναι ορθογώνια στην f_1 όχι όμως στην f_2, η ακολουθία ιδιοτιμών συγκλίνει στην λ_2 και γενικότερα θα συγκλίνει στην ελάχιστη ιδιοτιμή που δεν αποκλείεται από τις ιδιότητες ορθογωνιότητας της $F_1^{(0)}$.

Έχουμε δείξει ότι η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων παράγει μία ακολουθία προσεγγίσεων ιδιοτιμής που συγκλίνουν τελικά στην λ_1. Το σφάλμα σε κάθε βήμα είναι θετικό, κάθε μέκλος της προσέγγισης υπερβαίναι την λ_1 και και κατα συνέπεια προσφέρει μία σταθερά φθίνουσα ακολουθία ανώτερων εκτιμήσεων της λ_1. Για την πρακτική χρήση της μεθόδου είναι απαραίτητο να προσφέρουμε μία εκτίμηση για το ρυθμό σύγκλισης όπως επίσης και γαι το μέγιστο σφάλμα σε κάθε βήμα της προσέγγισης. Θα δείξουμε ότι οι απαντήσεις στα προβλήματα αυτά περιλαμβάνουν τη δεύτερη ιδιοτιμή λ_2. Συγκεκριμένα θα αναζητήσουμε τη συναρτηση που ελαχιστοποιεί την

$$\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f + \lambda_1 f)(\Delta f + \lambda_2 f)$$

υπό την προυπόθεση ότι οι συναρτήσεις ικανοποιούν τις συνήθεις συνοριακές συνθήκες. Εκτελώντας τη μεταβολική διαδιακ΄σια βρίσκουμε ότι η συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(\Delta + \lambda_1)(\Delta + \lambda_2)f = 0$$

και μία επιπρόσθετη συνοριακή συνθήκη που απαιτείται για την Δf, η οποία ταυτίζεται με την f. Η ελαχιστοποιούσα συνάρτηση είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων ιδιοσυναρτήσεων f_1, f_2:

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2$$

Η υπολογισθείσα τιμή που εξασφαλίζει την ελαχιστοποίηση που επιδιώξαμε πιο πάνω είναι 0 η οποία επιβεβαιώνεται είτε με απέυθείας υπολογισμό είτε καταφεύγοντας στο θεώρημα που χρησιμοποιήσαμε πιόποάνω: μία ομογενής συνάρτηση της f λαμβάνει τη μηδενική τιμή για εκείνες τις συναρτήσεις που την καθιστούν στάσιμη. Μπορούμε να λάβουμε ότι:

$$\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f + \lambda_1 f)(\Delta f + \lambda_2 f) \geq 0$$

με την ισότητα να επιβάλλει τον προηγούμενο γραμμικό συνδυασμό. Μία εναλλακτική απόδειξη συνίσταται στην ανάπτυξη των $f, \Delta f$ στη βάση των ιδιοσυναρτήσεων που εξασφαλίζει η σχέση πληρότητας:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n, \quad \Delta f = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n f_n$$

λαμβάνουμε

$$\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f + \lambda_1 f)(\Delta f + \lambda_2 f) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_1) c_n^2 \geq 0$$

Η ισότητα λαμβάνεται όταν $c_2 = c_3 = \cdots = 0$ ή οποία εξασφαλίζει οτι η ελαχιστοποιούσα συνάρτηση είναι γραμμικός συνδυασμός των f_1, f_2. Ένας παρόμοιος συλλογισμός δείχνει ότι:

$$\int_{\widehat{\Omega}} \nabla(\Delta f + \lambda_1 f) \cdot \nabla(\Delta f + \lambda_2 f) \geq 0$$

εφόσον ισχύει ότι για (MP) : $\underline{n} \cdot \nabla f|_C = 0$ εν ώ για (EP) : $f|_C = \Delta f|_C = 0$. Η ελαχιστοποιούσα συνάρτηση ικανοποιεί την

$$\nabla(\Delta + \lambda_1)(\Delta + \lambda_2)f = 0$$

με τις συνθήκες για (MP)$\underline{n} \cdot \nabla\Delta f|_C = 0$ ενώ για $\Delta^2 f|_C = 0$. Όπως και σε προηγούμενο θεώρημα το ελάχιστο λαμβάνεται όταν αυτή είναι γραμμικός συνδυασμός των δύοο πρώτων ιδιοσυναρτήσεων.

Ως απόρροια των συνοριακών συνθηκών που επιβάλλονται στις προηγούμενες ανισότητες λαμβάνουμε ότι:

$$\int_{\widehat{\Omega}} |\Delta f|^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2 + \lambda_1\lambda_2 \int_{\widehat{\Omega}} f^2 \geq 0$$

και

$$\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla\Delta f|^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{\widehat{\Omega}} |\Delta f|^2 + \lambda_1\lambda_2 \int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2 \geq 0$$

Αυτές γράφονται ως:

$$\left[\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2 - \lambda_1 \int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2\right] - \lambda_2 \left[\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2 - \lambda_1 \int_{\widehat{\Omega}} f^2\right] \geq 0$$

και

$$\left[\int_{\widehat{\Omega}} (\nabla\Delta f)^2 - \lambda_1 \int_{\widehat{\Omega}} |\Delta f|^2\right] - \lambda_2 \left[\int_{\widehat{\Omega}} |\Delta f|^2 - \lambda_1 \int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2\right] \geq 0$$

Ως συνέπεια της αρχής Rayleighκαι της ανισότητας παρεμβολής οι τέσσερις ποσότητες που περιέχονται στις αγκύλες δεν είναι ποτέ αρνητικές. Επομένως οι δύο ανισότητες συνιστούν ότι

$$\lambda_2 \leq \frac{\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2 - \lambda_1 |\nabla f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2 - \lambda_1 f^2} == \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} f^2} \frac{r_{11} - \lambda_1}{r_{12} - \lambda_1}$$

όπου

$$r_{11} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2}, \quad r_{12} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} (\nabla f)^2}{\int_{\widehat{\Omega}} f^2},$$

και ανάλογα

$$\lambda_2 \leq \frac{\int_{\widehat{\Omega}} (\nabla\Delta f)^2 - \lambda_1 |\Delta f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\Delta f|^2 - \lambda_1 |\nabla f|^2} == \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\Delta f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2} \frac{r_{21} - \lambda_1}{r_{22} - \lambda_1}$$

όπου

$$r_{21} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla\Delta f|^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\Delta f|^2}, \quad r_{22} = \frac{\int_{\widehat{\Omega}} (\Delta f)^2}{\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla f|^2},$$

Έτσι έχουμε λάβει δύο εναλλακτικές μορφές της αρχής Rayleigh εφαρμοσμένης για τη δεύτερη ιδιοτιμή, οι οποίες διαθέτουν το εξαιρετικό πλεονέκτημα ότι δεν επιβάλλονται άλλοι από τις συνοριακές συνθήκες. Οι ανισότητες αυτές παρέχουν την πληροφορία για το ρυθμό σύγκλισης που αναζητούμε. Η επιβληθείσα μέθοδος κατασκευής απαιτεί οι συαναρτήσεις $f = F_1^{n+1}$ να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες που είναι απαραίτητες για τη λήψη αυτών των ανισοτήτων και για τους δύο τύπους ρυθμών. Με μία ματιά στις σχέσεις ορσιμού των προσεγγίσεων έχουμε αντίστοιχα ότι:

$$\lambda_2 \leq \lambda_1^{n+1} \frac{\lambda_1^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_1}{\lambda_1^{n+1} - \lambda_1},$$

$$\lambda_2 \leq \lambda_1^{n+\frac{1}{2}} \frac{\lambda_1^{n} - \lambda_1}{\lambda_1^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_1}$$

Θα σημειωθεί ότι η πρώτη εξ΄ αυτών μπορεί να ληφθεί αντικαθιστώντας το n με $n + \frac{1}{2}$. Οι ανισότητες μπορούν να συνδυαστούν με πολλαπαλσιασμό

$$\frac{\lambda_1^{n} - \lambda_1}{\lambda_1^{n+1} - \lambda_1} \geq \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^{n+\frac{1}{2}} \lambda_1^{n+1}}$$

που δηλώνει ότι το σφάλμα στη n-οστή προσέγγιση της λ_1, διαρεμένη με το σφάλμα στην προσέγγιση τάξεως $n+1$, υπερβαίνει έναν αριθμό που προσεγγίζει προοδευτικά την τιμή $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^4$. Η ταχύτητα σύγκλισης των διαδοχικών προσεγγίσεων αυξάνει ανάλογα προς το λόγο της δεύτερης προς την πρώτη ιδιοτιμή. Συνήθως ο λόγος αυτός είναι υψηλός: στην περίπτση κυκλικής διατομής έχει την τιμή $27.8, 70.3$.

Είναι σημαντικό να αντιληφθούμε εδώ ότι η δεύτερη ιδιοτιμή που αναφέρεται στο κριτήριο σύγκλισης μπορεί να υπερβαίνει την αληθή δεύτερη ιδιοτιμή του κυματοδηγού. Αυτή η κατάσταση εμφανίζεται όταν ο οδηγός διαθέτει ιδιότητες ιδιαίτερης συμμετρίας που επιτρέπει την ανάλυση της ιδιοσυνάρτησης σε διάφορες κλάσεις συμμετρίας. Εάν η γεννήτρια συνάρτηση $F_1^{(0)}$ διαθέτει τις κατάλληλες ιδιότητες συμμετρίας της f_1, τότε και οι διαδοχικές προσεγγίσεις συμπεριφέρονται ανάλογα. Κάθε μέλος της ακολουθίας είναι αυτόματα ορθογώνια στις ιδιοσυναρτήσεις άλλων ομάδων συμμετρίας και ο σχετικός δεύτερος ρυθμός διαθέτει ανάλογες ιδότητες συμμετρίας με την f_1. Επιπροσθέτως ως συνέπεια της αυτόματης ορθογωνιότητας μεταξύ των μελών, οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν είναι εφαρμόσιμες στον κυρίαρχο ρυθμό κάθε κλάσης. Προκειμένου να διευκρινίσουμε τα προηγούμενα σχόλια θα μελετήσουμε το παράδειγμα κυκλικής συμμετρίας. Η συνάρτηση του κάθε ρυθμού έχει τη γωνιακή εξάρτηση $\cos m\phi, \sin m\phi$ ενώ συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του m είναι ορθογώνιες ανεξαρτήτως της ακτινικής εξάρτησης. Έτσι οι ρυθμοί που αντιστοιχούν σε δοσμένη τιμή του m συνιστούν μία κλάση συμμετρίας στην οποία η αρχή Rayleigh μπορεί να εφαρμοστεί. Εφαρμόζοντας την αρχή Rayleigh για να κατασκευάσουμε τον κυρίαρχο ηλεκτρικό ρυθμό ενός κυκλικού κυματοδηγού, E_{01}, ο δεύτερος ρυθμός που καθορίζει την ταχύτητα σύγκλισης δεν είναι ο ρυθμός E_{11} αλλά ο ρυθμός E_{02} στην συγκεκριμένη κλάση συμμετρίας. Ανάλογα ισχύουν στην περίπτωση του μαγνητικού ρυθμού ο κυρίαρχος ρυθμός H_{11} ακολουθείται από τον H_{12} παρά ο H_{21}. Τα αποτελέσματα της παρούσας παργαράφου ελήφθησαν έχοντας υπόψην αυτές τις παρτηρήσεις

Κεφάλαιο 3

Σύμμορφη παραμόρφωση χωρίων κενών και με ύλη

Εισαγωγή Η σύμμορφη παραμόρφωση ενός κλειστού και φραγμένου χωρίου $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, στο οποίο θεωρούμε τη μετρική g εξασφαλίζεται από το ακόλουθο θεώρημα του J. F. Escobar , [E1], συγκεκριμένα:

Υπάρχει θετική συνάρτηση, $u : \Omega \to \mathbf{R}$ έτσι ώστε η μετρική $\overline{g} = u^4 g$ έχε μηδενική βαθμωτή καμπυλότητα ενώ η λεία επιφάνεια $\partial\Omega$ αποκτά ως προς την $\overline{g}$ σταθερή μέση καμπυλότητα.

Στην ειδική περίπτωση για την οποία η μετρική ειναι η ευκλείδεια τότε το σύνορο αποκτά τη μορφή μιας επιφάνειας σταθερής καμπυλότητας, τη μορφή των οποίων γνωρίζουμε, ανάλογα με τον τοπλογικό τύπο που καθορίζεται από το γένος g της επιφάνειας. Συγκεκριμένα η γενική θεωρία επιφανειών συνιστά ότι οι διαφορετικόι τοπολογικοί τύποι προσανατολίσιμων επιφανειών λαμβάνονται από τη σφαίρα με την προσθήκη *χειρολαβών*. *Χειρολαβή* ονομάζεται η ανοικτή επιφάνεια που σχηματίζεται με την συγκόλληση ενός κυλινδρικού σωλήνα σε μία σαμπρέλα. Το πλήθος των χειρολαβών που απαιτείται να συγκοληθούν στην επιφάνεια της σφαίρας για ν λάβουμε την επιφάνεια καλείεται *γένος* g της επιφάνειας. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι η καμυλότητα Gauss κ επιφάνειας Sκαι το γένος σχετίζνται από τον τύπο Gauss-Bonnet:

$$\int_S \kappa = 2\pi(1-g)$$

Πεαραιτέρω γωνρίζουμε ότι οι επιφάνειες σταθερής μέσης καμπυλότητας στον ευκλείδειο χώρο είναι οι ακόλουθες:

- $g = 0$, είναι η στρογγυλή σφαίρα

- $g = 1$, είναι ο τόρος Wente
- $e > 1$, είναι οι επιφάνειες του Καπουλέα.

Ο σύμμορφος παράγοντας$u : \Omega \to \mathbf{R}$ είναι λύση της εξίσωσης:

$$\Delta_g u = \frac{R}{8} u,$$

με τη συνοριακή συνθήκη που εκφράζεται με τον τελεστή της συνοριακής συνθήκης:

$$B(u) := \underline{n} \cdot \nabla u + \frac{1}{2} h u = q u^3$$

όπου $\underline{n}$ είναι το κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια $S = \partial\Omega$ και h η μέση καμπυλότητα της S. B συμβολίζουμε τον τελεστή της συνοριακής συνθήκης.

3.1 Βασικές γεωμετρικές κατασκευές

Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ εφοδιασμένο με τοπικές καμπυλόγραμμες συνετατγμένες $\underline{x} : \tilde{\Omega} \to \mathbf{R}^3, \tilde{\Omega} \subset \Omega$ στις οποίες η μετρική γράφεται στη μορφή:

$$g = g^{ij} dx_i dx_j$$

Ο χωρισμός των μεταβλητών αντιστοιχεί στην επιλογή συνταγμένων $(t, \underline{\vartheta}) = \underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2) : \tilde{\Omega} \to \mathbf{R}^3$ γράφεται στη μορφή:

$$g = dt^2 + \gamma$$

όπου

$$\gamma = \gamma^{ij} d\vartheta_i d\vartheta_j$$

είναι μετρική πάνω στις σταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης t, Σ_t :

$$\Sigma_t = \{\underline{x} \in \tilde{\Omega} : t(\underline{x}) = t\}$$

Η ύπαρξη αυτού του τοπικού συστήματος συντεταγμένων είναι απόρροια του θεωρήματος Gauss στη ριμάνια γεωμετρία, καλούνται δε *συνταγμένες Fermi* .

Εξισώσεις μεταβολής

Περαιτέρω μάλιστα έχουμε τις εξισώσεις μεταβολής:

$$\frac{d\overline{g}}{dt} = 2k$$

ενώ εάν θεωρήσουμε $R_{00} = Ric(\underline{n}, \underline{n})$ όπου $\underline{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στη σταθμική επιφάνεια και $R_{i0j0} = Riem(\underline{e}_i, \underline{n}, \underline{e}_j, \underline{n})$:

$$\frac{dk_{ij}}{dt} = k_i^{\ l} k_{lj} - R_{i0j0}$$

Η μεταβολή της βαθμωτής καμπυλότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\kappa}{dt} = h\kappa$$

Η μεταβολή της επιφάνειας της παράλληλης φέτας $A(\mathcal{F}_t)$:

$$\frac{dA}{dt} = 2hA$$

όπου h είναι η μέση καμπυλότητα της παράλληλης φέτας, η οποία με τη σειρά ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dh}{dt} = |k|^2 - R_{00}$$

Εξισώσεις Gauss, Codazzi

Ορίζουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα $\kappa = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$ της σταθμικής επιφάνειας Σ_t και έτσι έχουμε την :

$$\overline{R}_{1212} + \kappa = R_{1212}$$

$$\overline{R}_{11} + hk_{11} - \alpha_1 = R_{11}, \;\; \alpha_1 = \gamma^{11}k_{11}^2 + 2\gamma^{12}k_{11}k_{12} + \gamma^{22}k_{21}^2 \geq 0$$

$$\overline{R}_{21} - \alpha_2 = R_{21}, \;\; \alpha_2 = \gamma^{12}\left(k_{22}^2 + \kappa\right),$$

$$\overline{R}_{22} + hk_{22} - \alpha_3 = R_{22}, \;\; \alpha_3 = \gamma^{11}k_{12}^2 + 2\gamma^{12}k_{21}k_{22} + \gamma^{22}k_{22}^2 \geq 0$$

$$\overline{R} + h^2 - k^2 = R - R_{00}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τον τελεστή $\not\nabla$ της συναλλοιώτου παραγώγου στην σταθμική επιφάνεια και οι εξισώσεις Codazzi γράφονται για $i = 1, 2$:

$$\not{\mathrm{div}}(k)_i - \not\nabla_i h = R_{0i}$$

$$\cancel{\mathrm{curl}}(k)_{lij} = R_{l0ij}$$

Εδώ θα θέλαμε να δώσουμε τις εκτιμήσεις ακτινικής μεταβολής. Συγκεκριμένα ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις

$$\max_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |h| \leq c_1(r, C_0) \min_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |h|,$$
$$\max_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |\cancel{\nabla} h| \leq c_2(r, C_j) \min_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |\cancel{\nabla} h|$$
$$\max_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |\cancel{\nabla}^2 h| \leq c_3(r, C_j) \min_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |\cancel{\nabla}^2 h|$$

Η βασική ταυτότητα για μία συναρτήση $f : I_{(\tau,\epsilon,\theta)} \to \mathbf{R}$ που ικανοποιεί τη διαφορική εξ΄σιωση της μορφής:

$$\frac{df}{dt} = \alpha f + \beta$$

είναι η ακόλουθη

$$\log(\max_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |f|) - \log(\min_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |f|) = \log\left(\frac{\max_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |f|}{\min_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |f|}\right) \leq \int_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \frac{1}{|f|}\frac{df}{dt}(r')dr'$$

οπότε

$$\int_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \frac{1}{|f|}\frac{df}{dt}(r')dr' = \int_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \left(\alpha + \frac{\beta}{|f|}\right) dr$$

Με εφαρμογή των ανισοτήτων Cauchy-Schwarz, Hardyλαμβάνουμε:

$$\int_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \frac{\beta}{|f|} \leq \sqrt{\varepsilon r}\left(\int_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \frac{\beta^2}{f^2}\right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{(1+\varepsilon)\varepsilon r}}{2}\left(\int_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \frac{\beta^2}{f^2}\right)^{1/2} +$$
$$+\frac{\sqrt{(1+\varepsilon)\varepsilon r}}{2}\left(\int_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} (1+\frac{1}{\epsilon})\alpha^2\beta^2 + \frac{(1+\epsilon)\beta^4}{f^2}\right)$$

Ο τελευταίος όρος μετά από την επιλογή κατάλληλου ϵ δίδει την ανισότητα:

$$\int_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \frac{\beta}{|f|} \leq \frac{\sqrt{(1+\varepsilon)\varepsilon r}}{2}\left(\int_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \alpha^2\beta^2\right)$$

Σε συνδυασμό έχουμε ότι

$$\max_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |f| \leq e^C \min_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |f|$$

για

$$C = \left(r \int_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} (1 + (1+\varepsilon)\varepsilon r \beta^2)\alpha^2 \right)^{1/2}$$

Ανισότητες Harnack στη φέτα

Ανακαλούμε τώρα την ανισότητα Sobolev όπως αποδείχθηκε από τους Hoffmann - Spruck, [HS] γενικεύοντας σε πολλαπλότητα την ανισότητα των Michael-Simon, [MS] , στην περίπτωση μίας υποπολλαπλότητας $\mathcal{F} \subset \Omega$:

$$\left(\int_{\mathcal{F}} u^2 \right)^{1/2} \leq C \int_{\mathcal{F}} |\nabla u| + |h||u|$$

η οποία ξεκινώντας από την

$$\left(\int_{\mathcal{F}} u^4 \right)^{1/2} \leq 2C \int_{\mathcal{F}} |u||\nabla u| + |h|u^2$$

με εφαρμογή της ανισότητας Hölder λαμβάνουμε:

$$\int_{\mathcal{F}} |u||\nabla u| \leq A^{1/4} \left(\int_{\mathcal{F}} u^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\mathcal{F}} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

$$\int_{\mathcal{F}} |h|u^2 \leq \left(\int_{\mathcal{F}} u^{2p} \right)^{1/p} \left(\int_{\mathcal{F}} |h|^q \right)^{1/q}$$

όπου $p < 2, q = \frac{p}{p-1} > 2$. Επίσης με βάση τις ταυτότητες που δίνουμε παρακάτω έχουμε για ένα συμμετρικό, τανυστικό πεδίο U επί της φέτας:

$$\int_{\mathcal{F}} |\nabla(U)|^2 \leq C \int_{\mathcal{F}} |\mathrm{div}(U)|^2 + |\mathrm{curl}(U)|^2 + (|\kappa|)|U|^2 +$$

η οποία εφαρμοζόμεν στην περίπτωση του $U = \zeta k$:

$$\int_{\mathcal{F}} \zeta^2 |\nabla(k)|^2 \leq C \int_{\mathcal{F}} |\zeta|^2 |Ric| + \zeta |\nabla h|^2 + |k|^2 |\nabla \zeta|^2$$

Θα θεωρήσουμε τώρα τις περιοχές της φέτας $\mathcal{F}_j$ οι οποίες χαρακτηρίζονται από την διακύμανση της ενέργειας τάσης μέσω της ακολουθίας σταθερών $\{\eta_j\}$, στα οποία

$$\eta_{j-1}\int_{\mathcal{F}_j}\zeta^2h^2 \leq \int_{\mathcal{F}_j}\zeta^2|\not\nabla h|^2 \leq \eta_j\int_{\mathcal{F}_j}\zeta^2h^2$$

Η ανισότητα Harnack που αποδεινύται με εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου Nash-Moser για χωρίο $\Omega \subset \mathcal{F},$, το οποίο θεωρούμε ότι ορίζεται από την συνάρτηση $\tilde{h}:\Omega \to \mathbf{R}$ που λύνει το (ΣΠ):

$$\overline{\not\Delta}\tilde{h} = 0, \quad \tilde{h}|_{\partial\Omega} = h$$

Έτσι παριστούμε το χωρίο στη μορφή για την αρχική μροφή του $\tilde{h}_0$:

$$\mathcal{F}_j = \{\underline{x} \in \mathcal{F} : \theta\eta \leq |\tilde{h}_0(\underline{x})| \leq \eta\}$$

και τότε η ανισότητα Harnack παίρνει τη μορφή:

$$\max_{\mathcal{F}_j}|h| \leq e^{C\eta^2(\eta_j-\eta_{j-1})}\min_{\mathcal{F}_j}|h|$$

Η Διαφορική εξίσωση

Στις συντεταγμένες Fermi η λαπλασιανή γράφεται στη μορφή:

$$\Delta_g u = \frac{d^2u}{dt^2} + h\frac{du}{dt} + \not\Delta u$$

θα σσχοληθούμε με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\Delta_g u = \Gamma u$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται στη μορφή:

$$u\frac{d^2u}{dt^2} + hu\frac{du}{dt} + u\not\Delta u = Gu$$

και χρησιμοποιώντας την ταυότητα:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathcal{F}}u^2\right) = 2\int_{\mathcal{F}}u\frac{du}{dt} + hu^2$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{\mathcal{F}}u^2\right) = 2\int_{\mathcal{F}}u\frac{d^2u}{dt^2} + 2\int_{\mathcal{F}}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{dh}{dt}hu^2 + 2hu\frac{du}{dt} =$$

$$= 2\int_{\mathcal{F}} u\frac{d^2u}{dt^2} + 2\int_{\mathcal{F}}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathcal{F}} hu^2\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = |k|^2 - R_{00}$$

με αποτέλεσμα να οδηγηθούμε στην ταυτότητα μέσω παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$2\int_{\mathcal{F}}\zeta^2\left(u\frac{d^2u}{dt^2} + hu\frac{du}{dt} + u\not{\Delta}u\right) = \int_{\mathcal{F}}\Gamma\zeta^2u^2$$

ή τελικά

$$2\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{\mathcal{F}}(\zeta u)^2\right) - 2\int_{\mathcal{F}}\left(\zeta\frac{du}{dt}\right)^2 - \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{F}} h(\zeta u)^2 + 2\int_{\mathcal{F}}(h^2+|k|^2-R_{00})(u\zeta)^2 - \int_{\mathcal{F}}\zeta^2|\not{\nabla}u|^2 =$$

$$2\int_{\mathcal{F}}\Gamma(u\zeta)^2 - 2\int_{\mathcal{F}}u^2\left[\zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + h\zeta\frac{d\zeta}{dt}\right] - \int_{\mathcal{F}}u^2\left(\zeta\not{\Delta}\zeta + |\not{\nabla}\zeta|^2\right)$$

Τελικά πολλαπλασιάζοντας με

$$\Pi_0(t) = \int_{\mathcal{F}}(u\zeta)^2,$$

και θέτοντας

$$\Pi_1(t) = \int_{\mathcal{F}}\left(\zeta\frac{du}{dt}\right)^2,$$

και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $I_{\tau,\epsilon} = ((1-\epsilon)\tau, (1+\epsilon)\tau)$ έχοντας διαλέξει

$$\operatorname{supp}(\zeta) \cap \{t/(t,\underline{x}) \in \mathcal{S}_{(\tau,\epsilon,\theta)}\} \subset I_{\tau,\epsilon}$$

λαμβάνουμε :

$$\int_{I_{\tau,\epsilon}}\left(\frac{d\Pi_0(t)}{dt}\right)^2 + \int_{I_{\tau,\epsilon}}\Pi_0(t)\Pi_1(t) - \int_{I_{\tau,\epsilon}}\frac{d\Pi_0}{dt}\Upsilon_1 + \int_{I_{\tau,\epsilon}}\mathcal{D}^1[u;\mathcal{F};\zeta]\Pi_0 = -\int_{I_{\tau,\epsilon}}\Pi_0\Upsilon_2$$

όπου

$$\mathcal{D}^1[u;\mathcal{F};\zeta] = \int_{\mathcal{F}}\zeta^2|\not{\nabla}u|^2$$

$$\Upsilon_1 = \int_{\mathcal{F}} h(u\zeta)^2,$$

$$\Upsilon_2 = \int_{\mathcal{F}} \left((|k|^2 - R_{00} - \Gamma)\zeta^2 + \zeta \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + |\not\nabla\zeta|^2 - \zeta \not\Delta \zeta \right) u^2$$

Τώρα εφαρμόζοντας τις ανισότητες τις ανισότητες τις ανισότητες Hölder, (SMSHS):

$$\int_{I_{\tau,\epsilon}} \Upsilon_1 \frac{d\Pi_0}{dt} \leq \frac{1}{2} \int_{I_{\tau,\epsilon}} \left(\frac{d\Pi_0}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \int_{I_{\tau,\epsilon}} \Upsilon_1^2$$

και

$$\Upsilon_1 \leq C_{(\tau,\epsilon,\theta)} \left(\int_{\mathcal{F}} (h\zeta)^2 \right)^{1/2} \left(\mathcal{D}^1[u;\mathcal{F};\zeta] \right)^{1/2}$$

Εν κατακλείδι έχουμε ότι :

$$\int_{I_{\tau,\epsilon}} \left(\frac{d\Pi_0}{dt}\right)^2 \leq C(\mathcal{B}_{\eta_{(\tau,\epsilon,\theta)},\epsilon_{(\tau,\epsilon,\theta)}}) \int_{I_{\tau,\epsilon}} \Pi_0^2$$

Τελικά έχουμε τη στοχειώδη ανισότητα:

$$\log\left(\frac{\sup_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \Pi_0}{\inf_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \Pi_0} \right) \leq \int_{I_{\tau,\epsilon}} \frac{1}{\Pi_0(t)} \frac{d\Pi_0}{dt} dt \leq C(\mathcal{B}_{\eta_{(\tau,\epsilon,\theta)},\epsilon_{(\tau,\epsilon,\theta)}}) \epsilon\tau \left(\frac{\sup_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \Pi_0}{\inf_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \Pi_0} \right)^2$$

Υποθέτοντας τώρα ότι

$$\left(\frac{\sup_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \Pi_0}{\inf_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \Pi_0} \right) < 2$$

και

$$\delta = 3C(\mathcal{B}_{\eta_{(\tau,\epsilon,\theta)},\epsilon_{(\tau,\epsilon,\theta)}}) \epsilon\tau < \frac{1}{3}$$

βρίσκουμε ότι:

$$\left(\frac{\sup_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \Pi_0}{\inf_{I_{(\tau,\epsilon,\theta)}} \Pi_0} \right) < \frac{1}{2}$$

Συνεπώς διαπιστώνουμε ότι υποθέτοντας αρχικά λογαριθμική διακύμανση < 2 καταλήγουμε σε διακύαμνση $\frac{3}{2}$. Προφανώς η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και έτσι οδηγεί στη βέλτιστη τοπική προσέγγιση της ποσότητας Π_0.

Απόρροια της προηγούμενης ανσότητας είναι η ακόλουθη ανισότητα:

$$\mathcal{D}^1[u;\mathcal{F};\zeta] \leq C_4(\mathcal{B}_{\eta_{(\tau,\epsilon,\theta)},\epsilon_{(\tau,\epsilon,\theta)}}) \int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} (u\zeta)^2$$

η οποία μας επιτρέπει να πάρουμε ανισότητες Harnack όπως άλλωστε και η μονοδιάστατη που λάβαμε πιό πάνω. Συγκεριμένα με βάση την τελευταία ανισότητα εφαρμόζοντας τη μέθοδο επανάληψης Nash-Moser λαμβάνουμε ότι εφόσον ισχύει στο $\mathcal{B}_{\eta_{(\tau,\epsilon,\theta)},\epsilon_{(\tau,\epsilon,\theta)}}$, $u > 0$:

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_{(\tau,\epsilon,\theta)},\epsilon_{(\tau,\epsilon,\theta)}}} |u| \leq e^{C(\mathcal{B}_{\eta_{(\tau,\epsilon,\theta)},\epsilon_{(\tau,\epsilon,\theta)}})} \min_{\mathcal{B}_{\eta_{(\tau,\epsilon,\theta)},\epsilon_{(\tau,\epsilon,\theta)}}} |u|$$

3.1.1 Κατασκευή του δικτύου

Εσωτερικές γεωδαισιακές ψηφίδες

Το εσωτερικό του χωρίου θα παραχθεί μέσω ενός δικτύου χωρίων που καλούμε *γεωδαισιακές ψηφίδες παραμέτρων* $\eta, \epsilon : \mathcal{B}_{\eta,\epsilon}$ (ΓΨ) που ορίζονται με επιφάνειες που καλούμε *στοιχειώδη μέτωπα κύματος*, $\mathcal{F}_{\eta,\epsilon}$ (ΣΜΚ) και αποτελούνται από τμήματα γεωδαισιακών σφαιρών. Η επιλογή των γεωδαισιακών σφαιρών θα γίνει έτσι ώστε να επιτευχθεί ηε βέλτιστη εκτίμηση του φάσματος μέσω της αρχής min-max.

Στην περίπτωση γεωδαισιακών σφαιρών οι συντεγαμένες χωρισμού

$$g = dr^2 + \gamma$$

είναι *γενικευμένες σφαιρικές* συντεταγμένες $(r, \underline{\vartheta}), \underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2)$:

$$(r, \underline{\vartheta}) : B^3_{\underline{s},\epsilon} \to \mathcal{S}_{(\tau,\epsilon,\theta)}$$

για το τμήμα σφαιρικού κελύφους

$$\mathcal{S}_{(\tau,\epsilon,\theta)} = ((1-\epsilon)\tau, (1+\epsilon)\tau) \times \Omega_\eta(S^2_{\underline{0},\epsilon})$$

όπου $\Omega_\eta(S^2_\epsilon)$ είναι ένα χωρίο της σφαίρας S^2_ϵ παραμετροποιημένο από την παράμετρο $\eta > 0$. Οι σταθμικές επιφάνειες Σ_r είναι οι γεωδαισιακές σφαίρες. Προηγουμένως δείξαμε τις ανισότητες για την καμπυλότητα το τμήμα της γεωδαισιακής σφαίρας:

$$\max_{\mathcal{S}_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |k| \leq C_{01}(\mathcal{S}_{(\tau,\epsilon,\theta)}) \min_{\mathcal{S}_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |k|,$$

$$\max_{\mathcal{S}_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |h| \leq C_{02}(\mathcal{S}_{(\tau,\epsilon,\theta)}) \min_{\mathcal{S}_{(\tau,\epsilon,\theta)}} |h|,$$

3.1.2 Συνοριακές γεωδαισιακές ψηφίδες

Έστω $\underline{s} \in S$, τότε είδαμε ότι σε ένα σύστημα συντεταγμένων Fermi , στον κύλινδρο:

$$\mathcal{C}_{\epsilon,r} = [0,\epsilon) \times \left(S \cap B^3_{\underline{s},\epsilon}\right)$$
$$(t,\underline{\theta}) : \mathcal{C}_{\epsilon,r} \to \overline{\mathbf{R}}_+ \times B^2_{0,\epsilon}$$

η μετρική γράφεται στη μορφή

$$g = dt^2 + \overline{g}$$

Θα θεωρήσουμε την παράλληλη με το σύνορο φέτα

$$\mathcal{F}_t = \{\underline{x} \in \mathcal{C}_{\epsilon,r} / t' = t\}$$

Όι αντίστοιχες ανισώσεις για την καμπυλότητα $k(t)$ κάθε φέτας θα είναι:

$$\max_{\mathcal{C}_{\epsilon_j,r_j}} |k| \leq C_{03}(\mathcal{C}_{\epsilon_j,r_j}) \min_{\mathcal{C}_{\epsilon_j,r_j}} |k|,$$
$$\max_{\mathcal{C}_{\epsilon_j,r_j}} |h| \leq C_{04}(\mathcal{C}_{\epsilon_j,r_j}) \min_{\mathcal{C}_{\epsilon_j,r_j}} |h|,$$

3.2 Εκτιμήσεις για τον σύμμορφο παράγοντα

Η Διαφορική εξίσωση για το σύμμορφο παράγοντα

Η λαπλασιανή γράφεται στη μορφή:

$$\Delta_g u = \frac{d^2u}{dt^2} + h\frac{du}{dt} + \cancel{\Delta} u, \quad B(u)|_{\partial(\Omega)} = cu^3$$

ο δε τελεστής συνόρου:

$$B(u) = \frac{du}{dt} + \frac{1}{2}hu$$

Εσωτερικές εκτιμήσεις Εφαρμόζοντας τώρα τις βασικές ανισότητες λαμβάνουμε

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u| \leq C_{01}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}) \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u|$$
$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla u| \leq C_{02}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}) \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla u| + C_{021}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})$$
$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla^2 u| \leq C_{03}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}) \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla^2 u| + C_{031}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})$$

3.2.1 Συνοριακές εκτιμήσεις

Παρόμοια έχουμε κοντά στο σύνορο:

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u| \leq C_{001}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}) \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u|$$

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla u| \leq C_{002}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}) \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla u| + C_{0021}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})$$

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j} |\nabla^2 u| \leq C_{003}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}) \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla^2 u| + C_{0031}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})}$$

3.3 Φασμα και ρυθμοί λαπλασιανής

Θα θεωρήσουμετους στάσιμους ρυθμούς, δηλαδή στη χωρική διαμόρφωση στάσιμων κυμάτων. Αυτοί περιγράφονται από τις λύσεις της

$$\Delta_g \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda,$$

με την επιβολή των συνθηκών Dirichlet :

$$\phi_\lambda|_{\partial\Omega} = 0$$

3.3.1 Αρχή min-max

Η αρχή $\min - \max$ μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε την ιδοτιμή τάξεως k του τελεστή Laplace-Beltrami ως βέλτιστης σταθεράς στην ανισότητα Poincaré η οποία λαμβάνεται σε κτάλληλο χώρο συναρτήσεων, μάλιστα η γεωμετρική της ερμηνεία υποδεικνύεται από το θεώρημα των κομβικών χωρίων Courant . Συγκεκριμένα θέτουμε για $j = 0, 1$

$$\mathcal{D}^j(v;\Omega) = \int_\Omega |\nabla^j v|^2$$

και θεωρο΄με το χω΄ρο

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \mathcal{D}^0(v;\Omega) = \mathcal{D}^1(v;\Omega) < \infty\}$$

τότε

$$\lambda_k = \sup_{S_{k-1} \subset H^1(\Omega)} \inf_{v \in S_{k-1}^\perp} \left(\frac{\mathcal{D}^1(v;\Omega)}{\mathcal{D}^0(v;\Omega)} \right)$$

οπότε·

$$\lambda_k \geq \inf_{v \in S_{k-1}^{\perp}} \left(\frac{\mathcal{D}^1(v;\Omega)}{\mathcal{D}^0(v;\Omega)} \right)$$

έχοντας επιλέξει $S_k = \{v_1, \cdots, v_k\}$ όπου $v_i : \mathcal{B} \to \mathbf{R}, v_i > 0$ και

$$\int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} v v_i = 0$$

3.3.2 Τοπικές ανισότητες Harnack

Έστω τώρα ο ρυθμός που περιγράφεται από την ιδιοσυνάρτηση ϕ_λ του τελεστή Laplace-Beltrami που ανιστοιχει στη μετρική g και αντιστοιχει στην ιδιοτιμή λ. Θα δούμε τώρα ότι με βάση τις βασικές ανισότητες που λάβαμε προηγουμένως στη γενική διαφορική εξίσωση:

Εσωτεικές εκτιμήσεις Σε εσωτερική ψηφίδα $\mathcal{B}_{\eta_{teph},\epsilon_{teph}}$ στην οποία έχουμε τις δοσμένες μεταβολές του σύμμορφου παράγοντα:

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u| \leq e^{C_{11}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u|$$

τότε οι ρυθμοί συχνότητας λ ικανοποιούν τις ανισότητες Harnack :

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u| \leq e^{C_{21}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})\lambda} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u|$$

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla u| \leq e^{C_{22}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})\lambda} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla u| + C_{31}(\mathcal{B}_{\eta_),\epsilon_)})$$

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla^2 u| \leq \lambda e^{C_{23}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})\lambda} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla^2 u| + C_{32}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})$$

και Bernstein :

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla u| \leq \lambda\sqrt{\lambda} e^{C_{41}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})\lambda} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u| + C_{42}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})$$

Συνοριακές εκτιμήσεις Στην συνοριακή ψηφίδα $\mathcal{B}_{\eta_{teph},\epsilon_{teph}}$ στην οποία έχουμε τις δοσμένες μεταβολές του σύμμορφου παράγοντα:

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u| \leq e^{C_{51}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u|$$

και της μέσης καμπυλότητας της φέτας $\mathcal{F}_t$ παράλληλης προς το σύνορο:

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |h| \leq e^{C_{52}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u|$$

τότε οι ρυθμοί συχνότητας λ ικανοποιούν τις ανισότητες Harnack :

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u| \leq e^{C_{61}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})\lambda} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u|$$

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla u| \leq e^{C_{62}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})\lambda} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla u| + C_{600}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})$$

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla^2 u| \leq \lambda e^{C_{63}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})\lambda} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla^2 u| + C_{610}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})$$

και Bernstein :

$$\max_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla u| \leq \sqrt{\lambda} e^{C_{71}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})\lambda} \min_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |u| + C_{620}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})$$

3.3.3 Φράγματα για τις ιδιοτιμές

Τω΄ρα χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις για τη διακύμανση του σύμμορφου παράγοντα μπορούμε να διαλέξουμε τις συναρτήσεις που εντοπίζονται στις ψηφίδες κατάλληλων διαστάσεων.

Θεμελιώδης συχνότητα Συγκερκιμένα έχουμε για τη θεμελιώδη συχνότητα μία συνάρτηση που είναι $\phi \equiv 1$ στο εσωτερικό, $d(\cdot, \partial\Omega) > \epsilon, \phi \equiv 0$ για $d(\cdot, \partial\Omega) < \frac{\epsilon}{2}$ ενώ $c_1\epsilon \leq |\phi'(t)| \leq c_2\epsilon$. Έτσι έχουμε σε τμήματα που καλύπτουν το σύνορο:

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{C}_{\epsilon_j, r_j}$$

και για τη συνάρτηση μέσης καμπυλότητας που αντιστοιχεί σε αυτό το τμήμα:

$$\lambda_1 \geq \sum_{j=1}^{N} \frac{c_1}{\epsilon} \int_{\epsilon/2}^{\epsilon} e^{\int_{\epsilon/2}^{t} h_j(t')dt'} dt$$

Ανώτερες συχνότητες Αντίστοιχα για τις συχνότητες ανώτερες τάξεως k χρησιμοποιούμε την αρχή min-max κατασκευάζοντας επαγωγικά συναρτήσεις που σε κάθε ψηφίδα που έχει υπολογιστεί για την ιδοτιμή τάξεως $k-1$ να διαθέτουν στο εσωτερικό της ολοκλήρωμα μηδέν δηλαδή: μια κομβική επιφάνεια και συνεπώς ο όρος μεταβολή της να φράσσεται από

$$\int_{\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j}} |\nabla \phi_j^k|^2 \geq c\frac{(\mathrm{vol}(\mathcal{B}_{\eta_j,\epsilon_j})^{2/3}}{\epsilon^2}$$

ενώ ο όρος των συγκολλήσεων των ψηφίδων κατά αναλογία με προηγουμένως είναι

$$\frac{c_1}{\epsilon}\int_0^\epsilon e^{\int_0^r h_j(r')dr'}dr$$

και στο σύνορο

$$\frac{c_1}{\epsilon}\int_{\epsilon/2}^\epsilon e^{\int_{\epsilon/2}^t h_j(t')dt'}$$

Διαπιστώνουμε ότι η κύρια συνεισφορά στις ανώτερες συχνότητες προσφέρεται από τις συγκολλήσεις των ψηφίδων οι οποίες καθορίζονται όπως έχουμε δει πιο πάνω από τις γεωμτερικές ιδιότητες του χώρου.

Τελικά λαμβάνοντας υπ'ψη την παραμόρφωση έχουμε ακριβέσετρες εκτιμήσεις για ταχαρακτηριστικά των ψηφίδων και άρα των ιδοτιμών

3.4 Παράρτημα: βασικές ανισότητες

Ανισότητα Poincaré Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$\underline{X} = \frac{1}{2}\nabla r^2$$

για το οποίο υπολογίζουμε

$$\mathrm{div}(\underline{X}) = 3$$

επομένως θα έχουμε ότι για λεία συναρτηση $f : \mathcal{C}_{\epsilon,r} \to \mathbf{R}, \mathrm{supp} f \subset \mathcal{B}_{\eta,\epsilon}$ και για $D = \Delta\iota\alpha\mu(\mathcal{B}_{\eta,\epsilon})$:

$$\int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} f^2 = \frac{1}{3}\int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} \mathrm{div}(\underline{X}) f^2 = -\frac{2}{3}\int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} f\underline{X}\cdot\nabla f \leq \frac{2D}{3}\left(\int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} f^2\right)^{1/2}\left(\int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} |\nabla f|^2\right)^{1/2}$$

Συνεπώς βρίσκουμε ότι:

$$\int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} f^2 \leq \frac{4D^2}{9} \int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} |\nabla f|^2$$

Γενικευμένη ανισότητα Hardy Στην εργασία [ΠΔ0] αποδεικνύονται οι ανισότητες για πολυώνυμο βαθμού $m, P : \mathcal{B} \to \mathbf{R}, f \in C_0^\infty\left(\mathbf{R}^3 \setminus \{P = 0\}\right)$:

$$\int_{\mathbf{R}^3} P^{-2/m} f^2 \leq C_1(P) \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla f|^2$$

$$\int_{\mathbf{R}^3} \left|\frac{\nabla P}{P}\right|^2 f^2 \leq C_2(P) \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla f|^2$$

για σταθερές $C_1, C_2 > 0$.

3.4.1 Βασικές ολοκληρωτικές ταυτότητες

Ανακαλούμε τις ολοκληρωτικές ταυτότητες από [ΠΔ1]

$$\int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} \zeta^2 |\nabla u|^2 \leq C_1 \int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} \zeta^2 u \Delta u + |\nabla \zeta|^2 u^2$$

$$\int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} \zeta^2 |\nabla^2 u|^2 \leq C_2 \int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} |\Delta u|^2 + |Ric||\nabla u|^2$$

$$\int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} \zeta^2 |\nabla^3 u|^2 \leq C_3 \int_{\mathcal{B}_{\eta,\epsilon}} |\nabla \Delta u|^2 + |Ric||\nabla^2 u|^2$$

Κεφάλαιο 4

Ανάπτυξη λογισμικού

4.1 Η σφαίρα και οι παραμορφώσεις της

Θα δώσουμε την παραμετρική αναπαράσταση της σφαίρας $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ μέσω της στερεογραφικής προβολής της στο επίπεδο. Συγκεκριμένα η σφαίρα είναι το σύνολο των σημείων που απέχουν σταθερή απόσταση απο δοσμένο σημείο, το οποίο λαμβάνουμε ως αρχή των συντεταγμένων:

$$S^2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 / |\underline{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Ο δίσκος στο επίπεδο με κέντρο το $\underline{0} = (0,0)$ και ακτίνα ρ είναι το σύνολο:

$$B^2_{\underline{0},R} = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 < R\}$$

όταν δε συμπεριλάβουμε τον εξωτερικό κύκλο θα τον συμβολίζουμε με $\overline{B}^2_{\underline{0},\rho}$.

- Χαρτογράφηση του βόρειου ημισφαίριου Διαλέγουμε το επίπεδο $\pi = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 / x_3 = 1\}$ που εφάπτεται στη σφαίρα στο βόρειο πόλο $N = (0,0,1)$ και έτσι θεωρώντας τις ευθείες l που διέρχονται από το νότιο πόλο $S = (0,0,1)$ τότε απεικόνιζουμε το σημείο $Q = l \cap S^2$ στο σημείο $Q' = l \cap \pi$. Συγκεριμένα εάν το σημείο Q έχει συντετγμένες (x_1, x_2, x_3) και το Q', $(\xi_1, \xi_2, 1)$ τότε με απαλοιφή της παραμέτρου από την εξίσωση της ευθείας παίρνουμε

  $$\frac{x_1 - 0}{\xi_1 - 0} = \frac{x_2 - 0}{\xi_2 - 0} = \frac{x_3 + 1}{1 - (-1)}$$

  οπότε:

  $$x_1 = \xi_1 \frac{1 + x_3}{2}, \;\; x_2 = \xi_2 \frac{1 + x_3}{2}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση της σφαίρας παίρνουμε για τις ποσότητες $\phi_\pm = |\underline{\xi}|^2 \pm 4, |\underline{\xi}|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ τότε

$$\phi_+ x_3^2 - 2|\xi|^2 x_3 + \phi_- = 0$$

έχει αποδεκτή λύση

$$x_3 = -\frac{\phi_-}{\phi_+}$$

Έτσι η παραμετρική αναπαράσταση της σφαίρας είναι

$$S : B^2_{0,2} \to S^2 \cap \{x_3 > 0\} : (\xi_1, \xi_2) \mapsto \underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$x_1 = \frac{4\xi_1}{\phi_+}, \;\; x_2 = \frac{4\xi_2}{\phi_+}, \;\; x_3 = \frac{\phi_-}{\phi_+}$$

- Χαρτογράφηση του νότιου ημισφαίριου: Διαλέγουμε το επίπεδο $\pi = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 / x_3 = -1\}$ που εφάπτεται στη σφαίρα στο νότιο πόλο $S = (0,0,-1)$ και έτσι θεωρώντας τις ευθείες l που διέρχονται από το βόρειο πόλο $N = (0,0,1)$ τότε απεικόνιζουμε το σημείο $Q = l \cap S^2$ στο σημείο $Q' = l \cap \pi$. Συγκεριμένα εάν το σημείο Q έχει συντετγμένες (x_1, x_2, x_3) και το Q', $(\xi_1, \xi_2, -1)$ τότε με απαλοιφή της παραμέτρου από την εξίσωση της ευθείας παίρνουμε

$$\frac{x_1 - 0}{\xi_1 - 0} = \frac{x_2 - 0}{\xi_2 - 0} = \frac{x_3 - 1}{-1 - 1}$$

οπότε:

$$x_1 = \xi_1 \frac{1 - x_3}{2}, \;\; x_2 = \xi_2 \frac{1 - x_3}{2}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση της σφαίρας παίρνουμε για τις ποσότητες $\phi_\pm = |\underline{\xi}|^2 \pm 4, |\underline{\xi}|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ τότε

$$\phi_+ x_3^2 - 2|\xi|^2 x_3 + \phi_- = 0$$

έχει αποδεκτή λύση

$$x_3 = \frac{\phi_-}{\phi_+}$$

Έτσι η παραμετρική αναπαράσταση της σφαίρας είναι

$$S : \mathbf{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\} : (\xi_1, \xi_2) \mapsto \underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$x_1 = \frac{4\xi_1}{\phi_+}, \;\; x_2 = \frac{4\xi_2}{\phi_+}, \;\; x_3 = \frac{\phi_-}{\phi_+}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο χαρτογραφήσεις τέμνονται στον κύκλο

$$S^1 = \{(\xi_1, \xi_2)/\xi_1^2 + \xi_2^2 = 4\}$$

Προκειμένου να κατασκευάσουμε ένα πλέγμα σημείων στο εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας ρ, θα θεωρήσουμε κατ΄ αρχήν ότι το εσωτερικό της σφαίρας αποτελείται από N_1 σφαιρικά κελύφη ακτίνας $\frac{\rho}{N_1}$. Προβάλλουμε κάθε σφαιρικό κέλυφος στερεγραφικά και παίρνουμε τα σημεία :

$$x_{1,\underline{k}} = \frac{RN_2}{N_1}\frac{8k_1k_2}{4N_2^2 + k_2^2}\cos\frac{2\pi k_3}{N_3},$$

$$x_{2,\underline{k}} = \frac{RN_2}{N_1}\frac{8k_1k_2}{4N_2^2 + k_2^2}\sin\frac{2\pi k_3}{N_3},$$

$$x_{3,\underline{k}} = \frac{R}{N_1}\frac{4N_2^2 - k_2^2}{4N_2^2 + k_2^2}$$

όταν τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ συνιστούν τον κύβο πλάτους $\underline{N}$:

$$C_{\underline{N}} = \{\underline{k} \in \mathbf{Z}^3/0 < k_1 \leq N_1,\ 0 < k_2 \leq N_2,\ \ 0 \leq k_3 < N_3\}$$

Προκειμένου να έχουμε πυκνότητα 4-σημεία / cc πάρτε $1 \leq N_1 < N_3, 1 \leq N_2 < N_3, 1 \leq N_3 = 20$ όποτε έχουμε

$$\frac{8000\text{σημεία}}{\frac{4\pi}{3}(8cm)^3} \approx 4 \text{ σημεία}/cc$$

4.1.1 Η διακριτή έκφραση της εξίσωσης

Ο τελεστής του Laplace ο οποίος στις καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) γράφεται:

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

και στις σφαιρικές συντετγμένες $(r, \underline{\xi})$ ως εξής

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}L$$

όπου

$$L = \Delta_2 - \frac{1}{2}\nabla\log(\phi_+)\cdot\nabla$$

Εάν κάνουμε τις απαραίτητες μετατροπές στην εξαρτημένη μεταβλητή [1] θα λάβουμε τον τελεστή

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{7}{4\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)$$

Θεωρούμε τώρα την διακριτή εκδοχή της δευτέρας παραγώγου:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

όπου h είναι η τάξη ακρίβειας της διακριτής προσέγγισης. Στην προκειμένη περίπτωση

$$h_1 = \frac{R}{N_1}, \;\; h_2 = \frac{2}{N_2}, \;\;\; h_3 = \frac{2\pi}{N_3}$$

Το συστημα των διαφορικών εξισώσεων που θέλουμε να λύσουμε θα στηρίζεται στην εισαγωγή των πινάκων

$$L(\underline{k}) = L(k_1) + L(k_2) + L(k_3)$$

και

$$L(k_1) = \frac{1}{h_1^2}\left(\delta_{k_1+1,i_1} + \delta_{k_1-1,i_1} - 2\delta_{k_1,i_1}\right),$$

$$L(k_2) = \frac{1}{k_1^2 h_2^2}\left(\delta_{k_2+1,i_2}\delta_{k_2-1,i_2} - 2\delta_{k_2,i_2}\right)$$

$$L(k_3) = \frac{7}{4k_1^2 k_2^2 h_3^2}\left(\delta_{k_3+1,i_3} + \delta_{k_3-1,i_3} - 2\delta_{k_3,i_3}\right)$$

$$\Phi(\underline{k}) = \Phi(k_1, k_2, k_3)$$

4.1.2 Η παραμόρφωση της σφαίρας

Θα κατασκευάσουμε μία $\epsilon-$οικογένεια γεωδαισιακών σφαιρών μετατοπίζοντας μία σφαίρα περιστρέφοντας τη σφαίρα με μία φουσκάλα ώστε η στρογγυλή σφαίρα να αποκτήσει μέση καμπυλότητα ίση προς δοσμένη συνάρτηση.

- Μέγεθος φουσκάλας ϵ_j

[1] Ισομετρίες στο χώρο συναρτήσεων όπου μελετούμε το πρόβλημα (που είναι ο χώρος Hilbert $H^1(B_{\underline{0},2})$ των συναρτήσεων που έχουν παρ΄γωγο τετργαωνικά ολοκληρώσιμη.

- Συντεταγμένες κέντρου φουσκάλας $\{\underline{\nu}_j\}_{j=1}^N \subset S^2, \varphi_j, N$

όπου

$$\underline{\nu}_j = \frac{1}{1+\frac{\underline{\eta}_j^2}{4}}(2\eta_{1j}, 2\eta_{2j}, 1-\frac{\underline{\eta}_j^2}{4})$$

για τα διανύσματα $\{\underline{\eta}_j\}_{j=1}^N$ στο δίσκο $\{\underline{\eta} \in \mathbf{R}^2 : |\underline{\eta}| < 2\}$.

Μία φουσκάλα Θεωρούμε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις :

$$h_j : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, h_j(r;\xi) = \sum_{\ell_1+\ell_2=m_j}^{d_j} h_{\ell_1\ell_2}(r)\xi_1^{\ell_1}\xi_2^{\ell_2}$$

όπου $0 \leq r \leq \epsilon$. Διαλέγουμε τυχαία τα χαρακτηριστικά του h_j, δηλ. συντελεστές $0 < m_j < d_j$. Λύνουμε την εξίσωση:

$$\Delta 2u = hu$$

με συνοριακές συνθήκες Dirichlet στο δίσκο $\{\underline{\xi} \in \mathbf{R}^2 : |\underline{\xi} \leq \epsilon_j\}$. Η φουσκάλα δίνεται από τη συνάρτηση u που ορίζεται σε έναν ϵ_j- δισκο της σφαίαρς επικεντρωμένο στο βόρειο πόλο. Η παραμορφωμένη σφαίρα δέχεται τη παραμετροποίηση κοντά στο βόρειο πόλο

$$\underline{X}(r;\underline{\xi}) = \kappa(\xi_1, \xi_2, u)$$

Τελικά το διανυσματικό πεδίο

$$\underline{N}(r;\underline{\xi}) = (\kappa(u\xi_1 + \psi\xi_2) - r^2u_1, \kappa(\psi\xi_1 - u\xi_2) + r^2u_2, \kappa\underline{\xi}^2 - r^2)$$

όπου

$$\psi = -(\underline{\xi} \times \nabla u)\cdot \underline{e}_3 = \xi_2 u_1 - \xi_1 u_2$$

και

$$\kappa = \frac{2r^2}{\underline{\xi}^2 + 4r^2}$$

Πολλές φουσκάλες Συνθέτουμε τον πίνακα στροφής

$$R(\underline{\nu}_j) = -\cos\theta_j \mathbf{1} + \sin\theta_j L_j + \cos\theta_j \Pi(\underline{\nu}_j)$$

όπου ο πίνακας προβολής έχει εισόδους

$$\Pi_{rs}(\underline{\nu}_j) = \nu_{rj}\nu_{sj}, \quad r, s = 1, 2, 3$$

και η απειροστή στροφή

$$L_j = \begin{pmatrix} 0 & \nu_{3j} & -\nu_{2j} \\ -\nu_{3j} & 0 & \nu_{1j} \\ \nu_{2j} & -\nu_{1j} & 0 \end{pmatrix}$$

Εισάγουμε τις περισσότερες φουσκάλες περιστρέφοντας τα διανύσματα. Τότε παράγουμε τα διανύσματα $\underline{X}$ με $\underline{X} \mapsto R(\underline{\nu}_j)\underline{X}, \underline{N} \mapsto R(\underline{\nu}_j)\underline{N}$.

```
!/usr/bin/env python

import numpy ,matplotlib import sys, time import matplotlib.pyplot
as plt from matplotlib.mlab import griddata from mpl-toolkits.mplot3d
import Axes3D import pylab import mpmath

class Grid:

"""A simple grid class that stores the details and solution
of the computational grid."""

def - init- (self, nx=10, ny=10, xmin=-3.0, xmax=3.0, ymin=-3.0,
ymax=3.0): self.xmin, self.xmax, self.ymin, self.ymax = xmin,
xmax, ymin, ymax

self.dx = float(xmax-xmin)/(nx-1) self.dy = float(ymax-ymin)/(ny-1)

self.u = numpy.zeros((nx, ny), 'd') self.old-u = self.u.copy()
self.nx,self.ny = self.u.shape

def inDisk(self,x,y,r=1,xc=0,yc=0): if (abs(x-xc)**2+abs(y-yc)**2)
< r**2: print abs(x-xc)**2+abs(y-yc)**2 , r**2 return True
else: return False

def setBC(self, l, r, b, t):

"""Sets the boundary condition given the left, right, bottom
and top values (or arrays)"""

self.u[0, :] = l self.u[-1, :] = r self.u[:, 0] = b self.u[:,-1]
= t self.old_u = self.u.copy()

def setBCFunc(self, func):

"""Sets the BC given a function of two variables."""

xmin, ymin = self.xmin, self.ymin xmax, ymax = self.xmax, self.ymax

x = numpy.arange(xmin, xmax + self.dx*0.5, self.dx) y = numpy.arange(ymin,
ymax + self.dy*0.5, self.dy)

self.u[0 ,:] = func(xmin,y) self.u[-1,:] = func(xmax,y) self.u[:,
0] = func(x,ymin) self.u[:,-1] = func(x,ymax)

def computeError(self):

"""Computes absolute error using an L2 norm for the solution.
This requires that self.u and self.old-u must be appropriately
setup."""
```

```
v = (self.u - self.old-u).flat return numpy.sqrt(numpy.dot(v,v))
def printgrids(self):  g=self f = lambda z:  arg2(mpmath.cos(z))
fig = pylab.figure() ax = Axes3D(fig)
X = numpy.arange(self.xmin, self.xmax , self.dx)
Y = numpy.arange(self.ymin, self.ymax , self.dy)
X,Y = numpy.meshgrid(X,Y)
xn,yn = g.u.shape W = X*0
Xder = numpy.diff(g.u,axis=1)
Yder = numpy.diff(g.u,axis=0)
epsilon = g.dx
for xk in range(xn-1):
for yk in range(yn-1):
try:
"""z = complex(X[xk,yk],Y[xk,yk])
w = float(f(z))
if w != w:
raise ValueError
W[xk,yk] = g.u[xk,yk]
W[xk,yk] = w
print W[xk,yk]"""
kappa = 2*(epsilon)**2/abs((X[xk,yk]**2)+(Y[xk,yk]**2))
psi = Y[xk,yk]*Yder[yk] - X[xk,yk]*Xder[yk]
X= kappa*(g.u[xk,yk]*X[xk,yk] + psi*Y[xk,yk]) - 2*Yder[yk]
Y= kappa*(psi*X[xk,yk] - g.u[xk,yk]*Y[xk,yk]) + 2*Xder[yk]
W[xk,yk]= (X[xk,yk]**2)+(Y[xk,yk]**2)
print "lalalal",W[xk,yk]
W=0
except (ValueError, TypeError, ZeroDivisionError):
can handle special values here
```

```
    kappa = 2*(epsilon)**2/abs((X[xk,yk]**2)+(Y[xk,yk]**2))
    W[xk,yk]= (X[xk,yk]**2)+(Y[xk,yk]**2)
    pass
    print "debug"
    print "Ta X:",X
    print "Ta Y:",Y
    print "Ta Z:",W
    ax.plot-surface(X,Y,W,rstride=1,cstride=1)
    pylab.show()
    """Prints the F@!!grid
plt.subplot(211)
plt.title('old grid')
plt.grid(True)
plt.contour(g.old-u,linewidths=0.1, colors='k')
plt.contourf(g.old-u,cmap=plt.cm.jet)
plt.subplot(212)
plt.title('new grid')
plt.grid(True)
plt.contour(g.u,linewidths=0.1, colors='k')
plt.contourf(g.u,cmap=plt.cm.jet)
plt.show()"""
class LaplaceSolver:
"""A simple Laplacian solver that can use different schemes to solve
the problem."""
def --init--(self, grid, stepper='numeric'):
self.grid = grid
self.setTimeStepper(stepper)
def slowTimeStep(self, dt=0.0):
"""Takes a time step using straight forward Python loops."""
```

```
g = self.grid
nx, ny = g.u.shape
dx2, dy2 = g.dx**2, g.dy**2
dnr-inv = 0.5/(dx2 + dy2)
u = g.u
Xs = numpy.arange(g.xmin,g.xmax,g.dx)
Ys = numpy.arange(g.ymin,g.ymax,g.dy)
print Xs
err = 0.0
for i in range(1, nx-1):
for j in range(1, ny-1):
poly = float((1*(Xs[i]**3)+3*(Xs[i]**2)*(Ys[j]**5)+(Ys[j]**4)))
print poly
tmp = u[i,j]
u[i,j] = ((u[i-1, j] + u[i+1, j])*dy2 +
(u[i, j-1] + u[i, j+1])*dx2)*dnr_inv/poly
print u[i,j]
diff = u[i,j] - tmp
err += diff*diff
return numpy.sqrt(err)
def discTimeStep(self,rad=1.0,xc=0.0,yc=0.0 ,dt=0.0):
g = self.grid
nx, ny = g.u.shape
dx2, dy2 = g.dx**2, g.dy**2
dnr_inv = 0.5/(dx2 + dy2)
u = g.u
Xs = numpy.arange(g.xmin,g.xmax,g.dx)
Ys = numpy.arange(g.ymin,g.ymax,g.dy)
```

```
print Xs
err = 0.0
for i in range(1, nx-1):
for j in range(1, ny-1):
if g.inDisc(Xs[i],Ys[j],rad,xc,yc):
poly = float((1*(Xs[i]**3)+3*(Xs[i]**2)*(Ys[j]**5)+(Ys[j]**4)))
print poly
tmp = u[i,j]
u[i,j] = (((u[i-1, j] + u[i+1, j])*dy2 +
(u[i, j-1] + u[i, j+1])*dx2)*dnr_inv)/poly
print u[i,j]
diff = u[i,j] - tmp
err += diff*diff
return numpy.sqrt(err)
def numericTimeStep(self, dt=0.0):
"""Takes a time step using a numeric expressions."""
g = self.grid
dx2, dy2 = g.dx**2, g.dy**2
dnr_inv = 0.5/(dx2 + dy2)
u = g.u
g.old-u = u.copy()
u[1:-1, 1:-1] = ((u[0:-2, 1:-1] + u[2:, 1:-1])*dy2 +
(u[1:-1,0:-2] + u[1:-1, 2:])*dx2)*dnr_inv
save the solved grid
g.u = u
return g.computeError()
def setTimeStepper(self, stepper='numeric'):
"""Sets the time step scheme to be used while solving given a
```

```
string which should be one of ['slow', 'numeric']"""
if stepper == 'slow':
self.timeStep = self.slowTimeStep
elif stepper == 'numeric':
self.timeStep = self.numericTimeStep
else:
self.timeStep = self.numericTimeStep
```

def solve(self, n$_iter = 0, eps = 1.0e - 16):$

```
"""Solves the equation given an error precision -- eps.  If
n-iter=0 the solving is stopped only on the eps condition.  If
n-iter is finite then solution stops in that many iterations
or when the error is less than eps whichever is earlier.
Returns the error if the loop breaks on the n-iter condition
and returns the iterations if the loop breaks on the error
condition."""
err = self.timeStep()
count = 1
while err > eps:
if n-iter and count >= n-iter:
return err
err = self.timeStep()
count = count + 1
return count
```

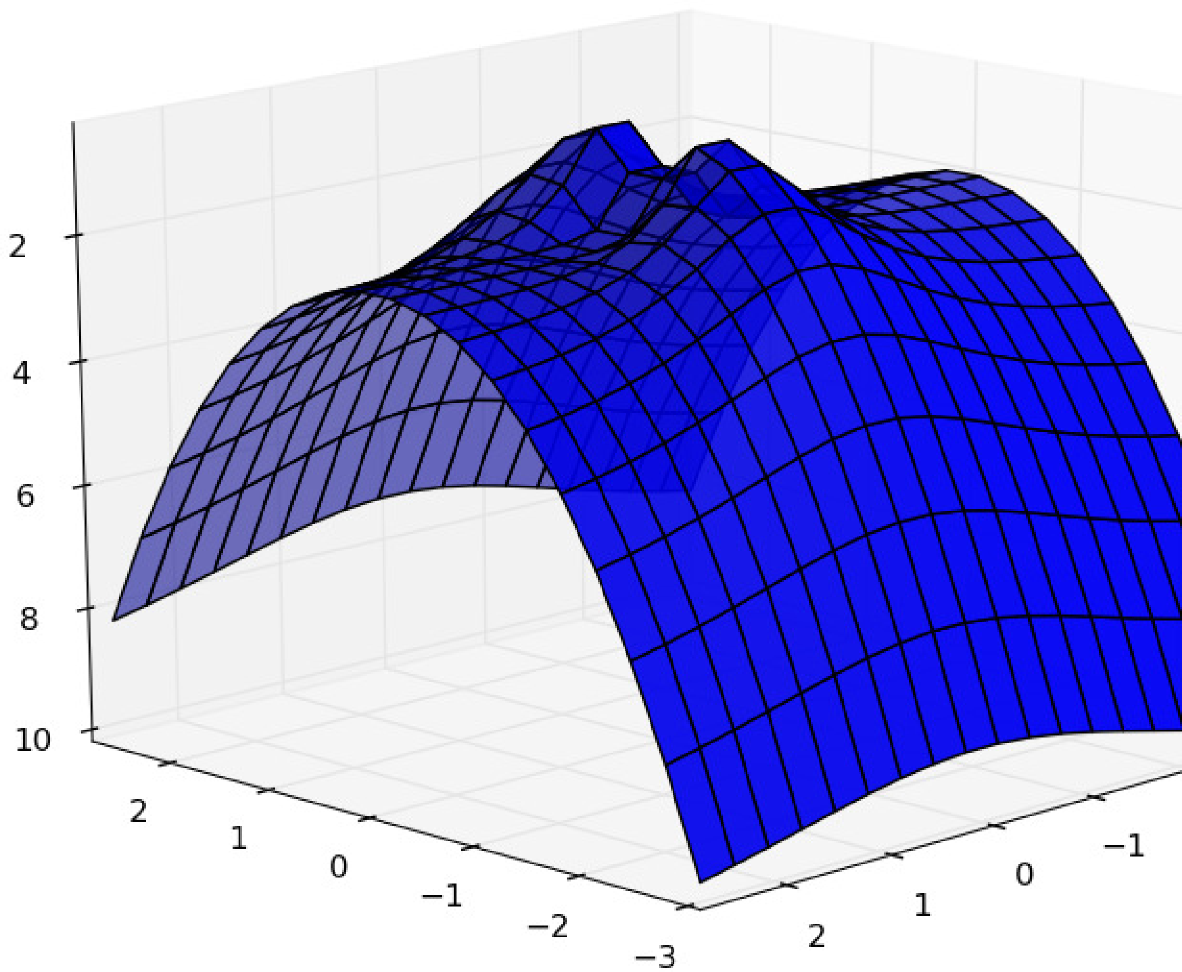
def discSolve(self, n$_iter = 0, eps = 1.0e - 16):$

```
"""Solves in the disk"""
err = self.timeStep()
count = 1
while err > eps:
```

```
if n-iter and count >= niter:
return err
err = self.discTimeStep()
count = count + 1
return count
def BC(x, y):
"""Used to set the boundary condition for the grid of points.
Change this as you feel fit."""
return (x**2 - y**2)
def arg2(x):
return mpmath.sin(mpmath.arg(x))
def DiskTest(r):
g = Grid(nx=20,ny=20)
nx,ny = g.u.shape
for i in range(1,nx-1):
for j in range(1,ny-1):
if g.inDisk(i,j,r,nx/2,ny/2):
g.u[i,j] = numpy.random.rand()
g.u[i,j] = 1
else:
g.u[i,j] = 0
s = LaplaceSolver(g,'slow')
s.discSolve(1,1.0e-10)
g.printgrids()
def test(nmin=5, nmax=30, dn=5, eps=1.0e-16, n-iter=0, stepper='numeric'):
iters = []
n-grd = numpy.arange(nmin, nmax, dn)
times = []
```

```
for i in n-grd:
g = Grid(nx=i, ny=i)
g.setBCFunc(BC)
s = LaplaceSolver(g, stepper)
t1 = time.clock()
iters.append(s.solve(n-iter=n-iter, eps=eps))
dt = time.clock() - t1
times.append(dt)
print "Solution for nx = ny =
return (n-grd**2, iters, times)
def time-test(nx=50, ny=50, eps=1.0e-16, n-iter=10, stepper='slow'):
g = Grid(nx, ny)
g.setBCFunc(BC)
s = LaplaceSolver(g, stepper)
t = time.clock()
s.solve(n-iter=n-iter, eps=eps)
t = time.clock() - t
g.printgrids()
return time.clock() - t
def main(n=50, n-iter=2):
"""print "Doing
i='numeric'
print i,
sys.stdout.flush()
print "took", time-test(n, n, stepper=i, n_iter = n_iter),"seconds"
i='slow'
s = time-test(n, n, stepper=i, n-iter=1)
print i,
```

```
print "took", s, "seconds"
print "
""" try:
import psyco
except ImportError:
print "You don’t have Psyco installed!"
else:
psyco.bind(LaplaceSolver)
psyco.bind(Grid)
print "slow with Psyco (1 iteration)",
sys.stdout.flush()
s = time-test(n, n, stepper=’slow’, n-iter=1)
print "took", s, "seconds"
print "
(n-iter, s*n-iter) """
DiskTest(5)
if --name-- == "--main--":
main()
```



Σχήμα 4.1: *Τμήμα σφαίρας που έχει υποστεί παραμόρφωση*

Βιβλιογραφία

[C] Christodoulou D., Mathematical problems in general relativity, EMS, (2009)

[E1] Escobar J. F. *Conformal deformation of a riemannian metric*, Ann. Math. **136**, (1992), 1-50.

[CH] Courant R., Hilbert D., Mathematical methods of physics, I

[Θ] Θανασούλας Σπ., Ειδικές λύσεις εξισώσεων Einstein, Πτυχιακή Εργασία, Τμ. Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης 2011

[K1] Kapouleas N., *Constant mean curvature surfaces in euclidean space*, Ann. Math. (1990), 133, 501-580

[HS] Hoffmann S., Spruck D., *Sobolev Michael on riemannian manifolds*, Comm. Pure Applied Math,, **27**, (1974),

[MS] Michael J., Simon L., *Sobolev inequality on hypersurfaces*, Comm. Pure Applied Math,, **27**, (1974),

[PM] Pliakis D., Minardi S., *An iterative shadowgraphic* , JOSA A, (2009)

[PD0] Pliakis D., *Generalized Hardy's inequality* , (preprint)

[PD1] Pliakis D., *On the volume of nodal sets*, (preprint)

[PD2] Πλιάκης Δ., *Σημειωσεις για ΜΔΕ: Harnack, Nash-Moser μέθοδοι* , Σημειώσεις

[PTPS] Pliakis D., Thanasoulas S., Papakostas T., Soupios P., *Geodesic sphere constructions for wave propagation: estimates and simulations*, (preprint) 2010.

[PP] Papakostas T., Pliakis D., *Yamabe problem and the spectrum of 3-dimensional riemannian manifolds*

[SM] Schwinger J., Milton K., Electromagnetic Radiation, waveguides, Springer Verlag

[SY] Schoen R., Yau S. T., lectures on diffrential geometry, International Press.