ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΕΣΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΛΑΤΦΟΡΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

ΠΑΠΑΙΩΑΝΝΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ (ΑΜ:113)

ΣΑΝΟΥΔΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ (ΑΜ: 653)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: **ΠΑΧΟΥΛΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ**

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ Α/Α 43 ΕΑΡΙΝΟ 2008-2009

ΗΡΑΚΛΕΙΟ, 2010

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της πτυχιακής άσκησης του προπτυχιακού φοιτητή Σανουδάκη Κωνσταντίνου, , και του προπτυχιακού φοιτητή Παπαϊωάννου Δημήτρη του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Ηρακλείου Κρήτης στο τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής και Πολυμέσων.

Η διάρκεια πραγματοποίησής της ξεκίνησε στις 10/5/2009 και ολοκληρώθηκε στις 1/2/2010. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ. Παχουλάκης Ιωάννης.

Αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η χρήση, και παρουσίαση μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης σε μοντέλα Φυσικής με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Visual Basic .Net 2008. Υλοποιήθηκε με την χρήση της εφαρμογής Visual Basic 2008 Express Edition. http://www.microsoft.com/express/vb/Default.aspx

Στόχος της εργασίας είναι η μελέτη, κατανόηση μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης σε εφαρμοσμένα προβλήματα Φυσικής. Ακόμα η δημιουργία εφαρμογής που θα υλοποιεί τα παραπάνω μοντέλα Φυσικής. Η πλατφόρμα θα υλοποιηθεί εξελικτικά από απλούστερα μοντέλα και προβλήματα σε περιπλοκότερα. Σκοπός είναι η δημιουργία δομών κλάσεων και μεθόδων, όπως πχ αλγόριθμοι ολοκλήρωσης, φυσικά αντικείμενα ως κλάσεις, τα οποία θα μπορούν να επαναχρησιμοποιηθούν (αυτούσια ή με τις απαραίτητες τροποποιήσεις) και σε άλλα μοντέλα προσομοιώσεων διαφόρων προβλημάτων Φυσικής. Ακόμα η δημιουργία των απαραίτητων στοιχείων διεπαφής με τον χρήστη όπως κουμπιά ελέγχου, γραφικές παραστάσεις φυσικών μεγεθών. Έτσι τελικός στόχος είναι η δημιουργία μίας βασικής συλλογής δομών, μεθόδων και εργαλείων για προγραμματιστή που θα μπορούσε να την επεκτείνει είτε σε περιπλοκότερα μοντέλα Φυσικής είτε σε διαδραστικότητα με τον χρήστη.

Η εργασία χωρίζεται σε θεωρητικό και πρακτικό μέρος.

Στο θεωρητικό θα παρουσιαστούν τα συγκεκριμένα μοντέλα φυσικής που θα υλοποιηθούν και οι μαθηματικές τους συνθήκες, Ακόμα βασικές αρχές της αριθμητικής ανάλυσης όπως ακρίβεια σφάλμα και τέλος οι αλγόριθμοι προσομοίωσης των φυσικών μοντέλων.

Στο πρακτικό θα παρουσιαστούν τα προγράμματα προσομοίωσης, τα συστατικά στοιχεία των προγραμμάτων, η ροή δεδομένων στο πρόγραμμα καθώς και ένα παράδειγμα επαναχρησιμοποίησης των στοιχείων ενός προγράμματος προσομοίωσης σε ένα άλλο.

Θερμές ευχαριστίες για την καθοδήγηση, την υπομονή που επέδειξε, και την στήριξη που μας παρείχε με επιστημονική αρτιότητα, στον επόπτη καθηγητή μας κύριο Ιωάννη Παχουλάκη.

Θεωρητικό μέρος

Κεφ 1 Φυσική και μαθηματικά μοντέλα στην πληροφορική

«Φυσική είναι η θεμελιώδης επιστήμη που ασχολείται με την ερμηνεία των φυσικών φαινομένων που συντελούνται στο Σύμπαν … Κύριος στόχος είναι η ανάπτυξη θεωριών που βασίζονται σε θεμελιώδεις νόμους και προβλέπουν τα αποτελέσματα πειραμάτων» Serway physics for scientists and engineers σελ. 3

Είναι προφανές ότι η πληροφορική με βάση τον ορισμό της φυσικής δεν μπορεί να μελετήσει πειραματικά φυσικά φαινόμενα, αλλά μπορεί με τα μαθηματικά μοντέλα φυσικών θεωριών, που προέκυψαν από τα πειραματικά δεδομένα της επιστήμης της φυσικής, να δημιουργήσει προσομοιώσεις αυτών των φαινομένων και να προβλέψει την εξέλιξή τους κυρίως χρονικά. Ως προσομοίωση ορίζεται η κατασκευή .

Με την τεράστια και αλματώδη αύξηση της επεξεργαστικής ισχύος των υπολογιστικών συστημάτων είναι από τις βασικές επιστημονικές χρήσεις της πληροφορικής. Εκτός από την παραγωγή αυστηρά επιστημονικών συμπερασμάτων, άλλες κοινές χρήσεις είναι στο τομέα της ψυχαγωγίας και της γραφιστικής με την ρεαλιστικότερη απεικόνιση και αναπαράσταση του φυσικού κόσμου πχ συστήματα φυσικής σε βιντεοπαιχνίδια PhysX http://www.nvidia.com/object/physx_new.html , φωτορεαλισμός σε ακίνητα και κινούμενα γραφικά π.χ. http://www.lightsprint.com/  καθώς και στην εκπαίδευση με αναπαράσταση της συμπεριφοράς πραγματικών αντικειμένων και φαινομένων Φυσικής.

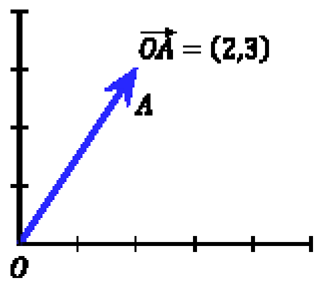
Τα μοντέλα Φυσικής που θα ασχοληθούμε θα δοθούν εξελικτικά από απλούστερα σε περιπλοκότερα με την σειρά που δίνεται συνήθως σε εκπαιδευτικά βιβλία φυσικής, έτσι ώστε εκτός από μεθοδολογικούς λόγους να δοθεί η δυνατότητα σε ένα προγραμματιστή να ακολουθήσει μία ανάλογη διαδικασία και κάνοντας χρήση ήδη έτοιμων μεθόδων και δομών να κατασκευάσει νέα μοντέλα Φυσικής κάνοντας τις απαραίτητες τροποποιήσεις.

Κεφ 2

Φυσικά μεγέθη

Τα βασικά φυσικά μεγέθη είναι οι ποσότητες των ιδιοτήτων φυσικών αντικειμένων και φαινομένων που είναι μετρήσιμες. Χωρίζονται στις κατηγορίες. Θεμελιώδη και σύνθετα. Τα θεμελιώδη δεν προκύπτουν από άλλα μεγέθη αλλά ορίζονται συγκριτικά ως προς κάποιο πρότυπο μέγεθος του ίδιου μεγέθους. Παλαιότερα με πρότυπα βάρη μήκη, πλέον με αυστηρούς ορισμούς φυσικών φαινομένων που τα παράγουν. Αυτά με βάση το SI διεθνές σύστημα μέτρων είναι τα : μήκος, μάζα, χρόνος, ένταση ηλεκτρικού ρεύματος, θερμοκρασία, ενταση φωτεινότητας και mole. Οι υπόλοιπες μονάδες παράγονται με αριθμητικές πράξεις και τελεστές πάνω σε συνδυασμό των παραπάνω μεγεθών. πχ m^2 κυβικό μέτρο για τον εμβαδό.

Άλλη σημαντική κατηγοριοποίηση είναι η διάκριση σε βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη. Τα βαθμωτά περιγράφονται μόνο από το μέτρο τους πχ 10 Kgr μάζας. Στο πρόγραμμα αρκεί η χρήση μίας real/ float πραγματικής μεταβλητής για την περιγραφή του. Τα διανυσματικά και από το μέτρο αλλά και από τη γεωμετρική διεύθυνση της κατεύθυνσης τους στο χώρο. Αποτελεί ένα γεωμετρικό αντικείμενο, ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. οπότε για να οριστεί πρέπει να μπει σε μία κατάλληλη δομή δεδομένων. Συχνά στη μαθηματική ανάλυση διανυσματικών μεγεθών γίνεται χρήση πινάκων όπου στα στοιχεία του πίνακα με προκαθορισμένη σειρά τοποθετούνται τα στοιχεία που προσδιορίζουν το διάνυσμα: συντεταγμένες στο χώρο επί το μέτρο το διανύσματος.



Άλλη μέθοδος ιδιαίτερα χρήσιμή σε θέματα μηχανικής λόγω της αρχής ανεξαρτησίας των κινήσεων είναι η εξαρχής διάσπαση των διανυσμάτων σε συνιστώσες στους άξονες. Πχ ταχύτητα U διασπάτε σε συνιστώσες στους άξονες Ux, Uy. Η διανυσματική πρόσθεσή τους μας ξαναδίνει το συνολικό διάνυσμα όταν ξαναχρειαστεί, κυρίως για το μέτρο

Κεφ. 3

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ:

Η μελέτη και περιγραφή της κίνησης, ανεξάρτητα από το αίτιο που την προκάλεσε ,για παράδειγμα, μπορούμε να υπολογίσουμε την κίνηση του χεριού ενός ρομπότ από τις γωνίες στους συνδέσμους του και αντιστρόφως. Η κινηματική μπορεί να μελετηθεί ασχέτως της μάζας ή φυσικών ποσοτήτων εξαρτώμενων από αυτήν.

Μπορεί κανείς να περιγράψει την κίνηση ενός αντικείμενου εάν μπορεί με ακρίβεια να πει την επικείμενη θέση του, πόσο γρήγορα θα πάει εκεί , και την διεύθυνση της κίνησης του σε καθορισμένο χρόνο.

Στη φυσική η κινηματική περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία: θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση

- θέση είναι το σημείο στο χώρο που καταλαμβάνει ένα αντικείμενο η οποία πρέπει να οριστεί σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων

- ταχύτητα είναι ο ρυθμός που μεταβάλλεται η θέση σε συνάρτηση με το χρόνο
- επιτάχυνση είναι ο ρυθμός που μεταβάλλεται η ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι εφόσον δεν υπάρχουν δυνάμεις που να επιδρούν στο αντικείμενο , τότε εκείνο θα έχει σταθερή ταχύτητα. Εάν επιδρά σταθερή δύναμη πάνω του (για παράδειγμα το βάρος του) τότε θα έχει σταθερή επιτάχυνση. Αυτές οι ειδικές περιπτώσεις της σταθερής ταχύτητας και επιτάχυνσης αξίζουν να εξεταστούν λεπτομερώς.

Κεφ. 4

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

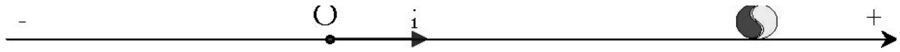
Αν ένα αντικείμενο κινείται σε ευθεία γραμμή ,και αν μετράμε την θέση του κινητού κατά μήκος της ευθείας αυτής ,τότε η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση μπορούν όλες να εκπροσωπούνται από μετρικές ποσότητες. Αυτό διευκολύνει πολύ την ανάλυση της κίνησης.

Μερικά παραδείγματα τέτοιων κινήσεων είναι:

- ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο
- ένας άνθρωπος περιπατάει κατά μήκος ευθύγραμμου διαδρόμου
- ένας αθλητής του σπριντ τρέχει σε ευθύγραμμη κούρσα
- μια πέτρα μας "πέφτει" στο πάτωμα
- πετάμε μια μπάλα ευθύγραμμα προς τα επάνω
- και πολλά ακόμα...

Η κίνηση σε μια διάσταση είναι μια κίνηση που γίνεται σε ευθεία γραμμή.

Η γραμμή που συνήθως χρησιμοποιείται είναι η γνωστή μας προσανατολισμένη ευθεία των x στο σύστημα συντεταγμένων.



Το αντικείμενο μπορεί να κινείται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά επάνω σε αυτή την γραμμή.

Η προς τα δεξιά κίνηση συνήθως θεωρείται η θετική κατεύθυνση της κίνησης. Έτσι εάν ένα αντικείμενο κινείται στην ευθεία προς τα δεξιά τότε κατευθύνεται ολοένα σε μεγαλύτερες τιμές του x και τότε λέμε ότι το κινητό έχει θετική τιμή για τη θέση του ενώ και η μεταβολή της θέσης του, Δx, θα είναι επίσης θετική. Αυτό σημαίνει ότι θετική θα είναι και η ταχύτητα του.

Ομοίως για την προς τα αριστερά κίνηση του αντικείμενου οι τιμές των x μικραίνουν και η θέση του όπως και η ταχύτητα του έχουν αρνητικές τιμές.

Όταν το αντικείμενο σε ισα χρονικά διαστήματα μετατοπίζεται κατά ισες αποστάσεις του x τότε έχουμε κίνηση με σταθερή ταχύτητα.

Κεφ. 5

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Η θέση σ΄ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνεται με δυο αριθμούς. Σ' ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων η θέση δίνεται από ένα αριθμό και μια γωνία .Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται καθαρά ότι οποιοδήποτε σημείο (x,y)μπορεί επίσης να καθοριστεί από (r,θ). Τα r και θ δείχνουν σημεία τα όποια κινούνται σε απόσταση r από το σημείο προέλευσης κατά μήκος του +x άξονα, ενώ στρέφεται κατά μια θ γωνία.

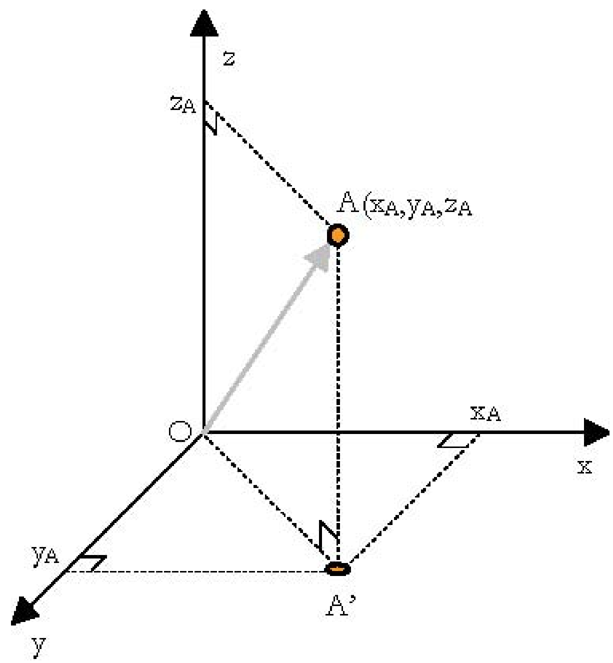
Χρειαζόμαστε τρεις αριθμούς x y και z που είναι οι αποστάσεις του σώματος από την αρχή των αξόνων στον x τον y και στον z αντίστοιχα

$$x = \cos\theta$$

$$y = \sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$



Το πόσο γρήγορα και προς τα που κινείται το αντικείμενο εκφράζεται από το μέγεθος της ταχύτητας .Αν θεωρήσουμε ότι αυτό κινείται σε ευθεία γραμμή το "προς τα πού" καθορίζεται από μπροστά (δεξιά) ή όπισθεν (αριστερά).Εφόσον υπάρχουν δυο επιλογές χρησιμοποιούμε τα αλγεβρικά σύμβολα ("+" ή "-") για να χαρακτηρίσουμε την κατεύθυνση της κίνησης. Συνήθως η θετική τιμή της ταχύτητας μας πληροφορεί ότι η κίνηση γίνεται προς τα δεξιά. Η ταχύτητα έχει μετρό διεύθυνση και φορά.

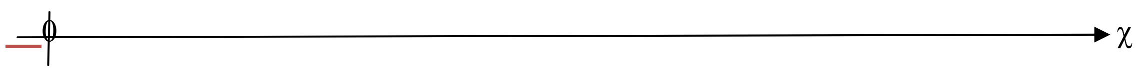
Μας απασχολεί επίσης το πόσο γρήγορα και προς ποια κατεύθυνση αλλάζει η ταχύτητα. Αυτό δηλαδή που ονομάζεται επιτάχυνση του σώματος. Πρακτικά, η επιτάχυνση ενός αυτοκίνητου καθορίζεται από το πόσο γρήγορα και προς ποια κατεύθυνση κινείται ο δείκτης (βελόνα) του ταχύμετρου. Αυτό καθορίζεται από τον βαθμό πίεσης του πεντάλ επιτάχυνσης (γκάζι) ή στην περίπτωση επιβράδυνσης από το βαθμό πίεσης του πεντάλ φρένων. Στην περίπτωση που το όχημα κινείται σε ευθεία γραμμή και υπάρχει κάποια επιτάχυνση, τότε η ταχύτητα του αλλάζει.

Έχουμε έτσι τα μεγέθη που χρειαζόμαστε για να χαρακτηρίσουμε μια κίνηση και μπορούμε να αναδείξουμε ορισμένες χρήσιμες σχέσεις μεταξύ αυτών των μεγεθών.

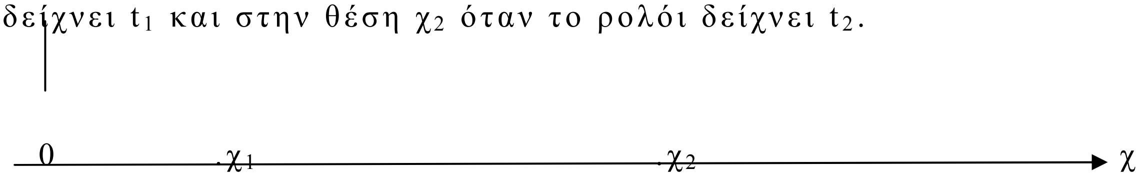
Κεφ. 6

Α)ΚΙΝΗΣΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Έχουμε ένα σημείο εκκίνησης (χ=0) και μια θετική κατεύθυνση της θέσης χ προς τα δεξιά.



Θεωρούμε ότι ένα κινητό βρίσκεται στη θέση χ_1 όταν το ρολόι δείχνει t_1 και στην θέση χ_2 όταν το ρολόι δείχνει t_2.



Η μετατόπιση του κινητού είναι ,εξ ορισμού , η μεταβολή της θέσης του $\Delta\chi=\chi_2-\chi_1$.Η μέση ταχύτητα του θα είναι:

$$v_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

όπου $\Delta t= t_2 - t_1$ είναι η αλλαγή στην ένδειξη του ρολογιού. Η μέση ταχύτητα δεν είναι κάτι το όποιο καταλαβαίνουμε ενστικτωδώς όπως στην περίπτωση της στιγμιαίας ταχύτητας μέση ταχύτητα δεν φαίνεται στο ταχύμετρο ενός οχήματος και δεν είναι τόσο ενδιαφέρουσα όσο η στιγμιαία, αλλά είναι εύκολο να υπολογιστεί , αν την θεωρήσουμε ως την σταθερή ταχύτητα που θα είχε το κινητό αν ταξίδευε για την συνολική απόσταση Δχ σε χρονικό διάστημα Δt.

Η σπουδαιότητα της μέσης ταχύτητας έγκειται στο γεγονός ότι είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας ο οποίος γίνεται εύκολος στην περίπτωση της σταθερής ταχύτητας. Σε αυτήν την περίπτωση πολύ απλά η τιμή της μέσης συμπίπτει με αυτήν της στιγμιαίας.

Πως όμως μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας για κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή όταν εκείνη συνεχώς αλλάζει; Ας σκεφτούμε μια περίπτωση που η *ταχύτητα συνεχώς αλλάζει.*

Θεωρούμε μερικά δεδομένα μένοντας πιστοί στον τρόπο που ένα πραγματικό αντικείμενο κινείται.

Αύξων αριθμός ενδείξεων	Χρόνος(sec) από το σημείο εκκίνησης	Θέση(m) (απόσταση από το σημείο εκκίνησης)	Ταχύτητα(m/sec) (μέγεθος που θέλουμε να υπολογίσουμε)
0	0	0	10
1	1	14	18
2	1.01	14.18	18.08
3	1.1	15.84	18.8
4	2	36	26
5	5	150	50

αποτελέσματα για την τιμή της μέσης ταχύτητας:

από t=1 έως t=5s : 34 m/s

t=1 έως t=2 s: 22m/s

t=1 έως t=1.1s : 18.4 m/s

t=1 έως t=1.01s : 18.04 m/s

Παρατηρούμε ότι όσο το χρονικό διάστημα (που ξεκινά για t=1s) γίνεται ολοένα και μικρότερο, η τιμή της μέσης ταχύτητας εκείνου του χρονικού διαστήματος έρχεται ολοένα και πιο κοντά στην τιμή της πραγματικής στιγμιαίας ταχύτητας.

Αν υποθέσουμε ότι το χρονικό αυτό διάστημα προσέγγιζε τιμές πολύ κοντά στο μηδέν τότε θα παίρναμε μια πολύ καλή εκτίμηση της πραγματικής τιμής της στιγμιαίας ταχύτητας

$$v = \frac{\lim \Delta x}{\Delta t}$$

με το Δt να τείνει στο μηδέν. Θα μπορούσαμε τότε να γράψουμε για την ταχύτητα (που είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης):

$$v = \frac{ds}{dt}$$

όπου:

σύμβολο	περιγραφή	τύπος	μοναδες
v	ταχύτητα	διανυσματικό	m/s
s	θέση, απόσταση από δοθέν σημείο	διανυσματικό	m
t	χρόνος	μονόμετρο	s
d … /dt	Ρυθμός μεταβολής		

Έτσι ολοκληρώνοντας και τις δυο πλευρές παίρνουμε:

$$s = \int v \, dt$$

αν η ταχύτητα είναι σταθερή:

$$s = s_0 + v \times t$$

όπου,

σύμβολο	**περιγραφή**	**τύπος**	**μονάδες**
v	ταχύτητα	διανυσματικό	m/s
s	θέση, απόσταση από δοθέν σημείο	διανυσματικό	m
t	χρόνος	μονόμετρο	s
s_0	Θέση στον χρόνο, t=0	διανυσματικό	m

Κεφ. 7

<u>Β) ΣΤΑΘΕΡΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ (ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΑΘΕΡΗ)</u>

Ας εφαρμόσουμε την προηγούμενη μέθοδο και στην επιτάχυνση η οποία είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας. Αν αυξάνουμε την ταχύτητα στο όχημα τότε η επιτάχυνση είναι το πόσο γρήγορα αυξάνεται αυτή η ταχύτητα. Για να πάρουμε μια μέση τιμή της επιτάχυνσης για το χρονικό διάστημα Δt ,καθορίζουμε πόσο μεγαλώνει το μέτρο της ταχύτητας κατά τη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος και διαιρούμε την μεταβολή αυτή στην ταχύτητα με την μεταβολή στην ένδειξη του χρονομέτρου.

Ονομάζοντας την μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητας Δv ,τότε έχουμε:

$$a_\mu =$$

Με παρόμοια εργασία όπως προηγουμένως στην στιγμιαία ταχύτητα θα έχουμε για την στιγμιαία επιτάχυνση:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

έτσι, ολοκληρώνοντας και τις δυο πλευρές δίνεται:

$$v = \int a\, dt$$

αν η επιτάχυνση a είναι σταθερή:

$$\boxed{v = v_0 + a \times t}$$

όπου,

σύμβολο	**περιγραφή**	**τύπος**	**μονάδες**
v	ταχύτητα	διανυσματικό	m/s
a	επιτάχυνση (dv/dt)	διανυσματικό	m/s^2
t	χρόνος	μονόμετρο	s
v_0	Ταχύτητα στο χρόνο t=0	διανυσματικό	m/s

Ολοκληρώνοντας την επιτάχυνση μια φορά, μας δίνεται η ταχύτητα ,ενώ για να πάρουμε τη θέση πρέπει να ολοκληρώσουμε ξανά:

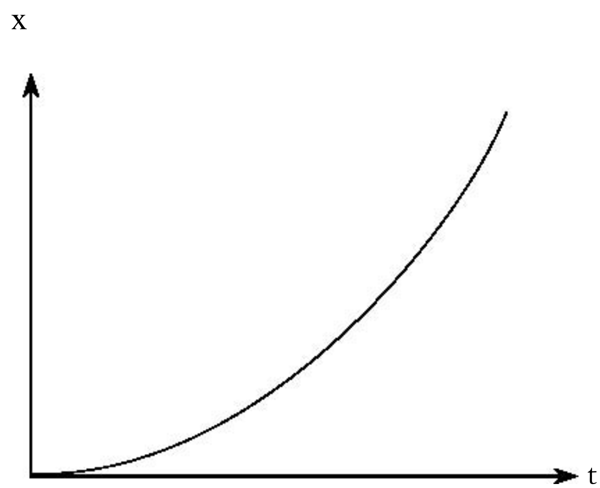
$$s = \int v\, dt$$

$$s = \int (v_0 + a \times t)\, dt$$

$$\boxed{s = s_0 + v_0\, t + \tfrac{1}{2} a t^2}$$

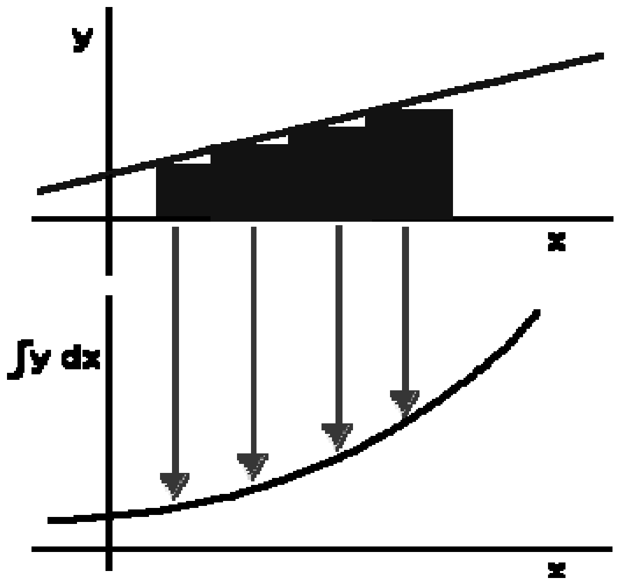
$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Οι τρεις πρώτες εξισώσεις που βρίσκονται σε πλαίσια συσχετίζουν τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε συνάρτηση με το χρόνο ενώ η τέταρτη δεν περιέχει το χρόνο. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό μεγεθών που περιλαμβάνονται σε προβλήματα κίνησης με σταθερή επιτάχυνση (ή επιβράδυνση).



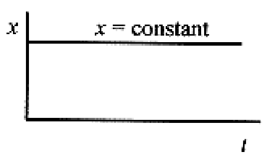
μεταβολή του χ (κάθετος άξονας) συναρτήσει του t (οριζόντιος άξονας) στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

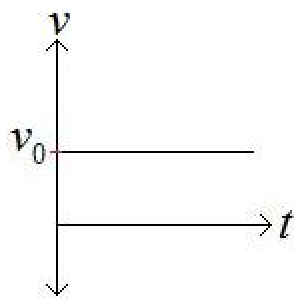
Η ολοκλήρωση καθορίζει τη συσσωρευτική περιοχή κάτω από μια δεδομένη συνάρτηση για κάθε σημείο σε εκείνη τη συνάρτηση.

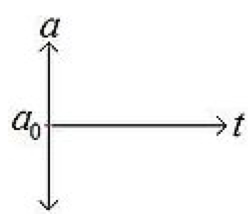


Η ολοκλήρωση καθορίζει τη συσσωρευτική περιοχή

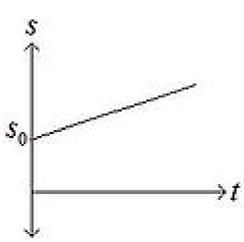
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

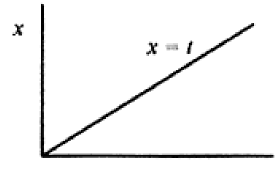






ακινησία *ταχύτητα σταθερή* *ταχύτητα σταθερή*





ευθύγραμμη ομαλή **ευθύγραμμη ομαλή**

με αρχική ταχύτητα **χωρίς αρχική ταχύτητα**

Για εφαρμογές όπως παιχνίδια και προσομοιώσεις αντικειμένων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε νευτώνεια μηχανική (σε αντίθεση με την κβαντική μηχανική)

Ο Νεύτωνας καθόρισε 3 νόμους:

1. αν δεν επιδρά καμία δύναμη στο σώμα ή επιδρούν αλλά έχουν συνισταμένη μηδέν τότε το σώμα συνεχίζει να διατηρεί την κινητική του κατάσταση (σταθερή ταχύτητα)

2. *ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος είναι ανάλογος της συνισταμένης δύναμης που ασκείται σε αυτό*

3. *όταν δυο σώματα ασκούν δύναμη το ένα στο άλλο, οι δυνάμεις αυτές είναι ίσες σε μέτρο αλλά αντίθετες σε φορά*

Οι νόμοι αυτοί μπορούν να εφαρμοσθούν και σε σώματα θεωρώντας όμως ότι οι δυνάμεις δρουν στο κέντρο μάζας του αντικείμενου. Θεωρώντας ότι η μάζα διατηρείται σταθερή τότε ο δεύτερος νόμος γίνεται

$$\text{δύναμη} = \text{μάζα} \times \text{επιτάχυνση}$$

για παράδειγμα ,αν το αντικείμενο είναι κάτω από την επίδραση της βαρύτητας τότε η δύναμη της βαρύτητας σε Newton είναι

$$\text{δύναμη βαρύτητας} = \text{μάζα} \times 9.81$$

O Euler επεκτείνοντας αυτούς τους νόμους συμπεριέλαβε την περιστροφή. Έτσι υπάρχουν αντίστοιχοι νόμοι όπως

$$\text{Στροφορμή} = \text{ροπή αδράνειας} \times \text{γωνιακή ταχύτητα}$$

Κεφ. 8

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΡΙΒΗΣ

Στατική τριβή

$0 \leq T\sigma \leq T\sigma,max$ όπου $T\sigma,max = \mu\sigma \times Fk$

μ_σ:ο συντελεστής στατικής τριβής, F_k : κάθετη δύναμη που συμπιέζει τις δύο επιφάνειες που εφάπτονται.

• Η στατική τριβή είναι πάντοτε αντίθετη με την (οριζόντια) δύναμη που τείνει να κινήσει το σώμα εφόσον $T\sigma < T\sigma,max$

• Η στατική τριβή είναι πάντοτε παράλληλη στο επίπεδο επαφής

Τριβή Ολίσθησης:

$$T = \mu_O \times F_k \quad \text{ισχύει} \quad \mu_o \approx \mu_\sigma \quad (\mu_o \leq \mu_\sigma)$$

Η τριβή ολίσθησης έχει πάντα τιμή T= μο×Fk και είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα ολίσθησης και το εμβαδό επαφής

Κεφ. 9

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ

Όλοι ζούμε στο αόρατο μαγνητικό πεδίο της γης. Η μάζα πάντα ακολουθείται από ένα περιβάλλων μαγνητικό πεδίο. Όποιο αντικείμενο έχει μάζα, συμπεριλαμβανόμενου και της γης ,περιβάλλεται από μαγνητικό πεδίο. Η γη έχει τεράστια μάζα και έτσι δημιουργεί ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο σε μια γύρω της περιοχή.

Το μαγνητικό πεδίο της γης υπάρχει παντού γύρω από τη γη, όχι μόνο στον αέρα αλλά και πέρα από την ατμόσφαιρα της ,στο έξω διάστημα αλλά και μέσα στο εσωτερικό της. Το αποτέλεσμα του μαγνητικού της πεδίου είναι να ασκεί δύναμη σε κάθε αντικείμενο που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό της πεδίο. Το μέγεθος αυτής της δύναμης εξαρτάται από την μάζα του αντικείμενου και την θέση που αυτό έχει μέσα στο πεδίο.

Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου αυτού είναι ακτινικές με κατεύθυνση προς το κέντρο της γης. Σε κάθε σημείο των δυναμικών γραμμών ορίζεται το διάνυσμα της έντασης με το σύμβολο g. Γενικά, η ένταση και η κατεύθυνση του βαρυτικού πεδίου διαφέρει από σημείο σε σημείο στην έκταση του πεδίου. Όμως κοντά στην επιφάνεια της γης έχει περίπου την ιδία τιμή

$$g=9.80\ \mathrm{N/kg}$$

με την μονάδα της να εκφράζει πραγματικά πηλίκο δύναμης προς μάζα. Η δύναμη με την οποία η γη έλκει ένα σώμα καλείται βάρος του σώματος και δίνεται από την σχέση

$$w=m\times g$$

Το γινόμενο της μάζας (που είναι μονόμετρο μέγεθος) με την επιτάχυνση της βαρύτητας (που είναι διανυσματικό μέγεθος)μας δίνει ξανά ένα διανυσματικό μέγεθος το οποίο έχει κατεύθυνση την ίδια με το αρχικό διάνυσμα δηλαδή αυτό της g. Το μέγεθος όμως του γινομένου αυτού καθορίζεται από το μέγεθος του μονόμετρου μεγέθους δηλαδή το πόσο μεγάλη είναι η μάζα ενός σώματος καθορίζει σε μεγάλο βαθμό και την δύναμη που του ασκείται από το βαρυτικό πεδίο της γης.

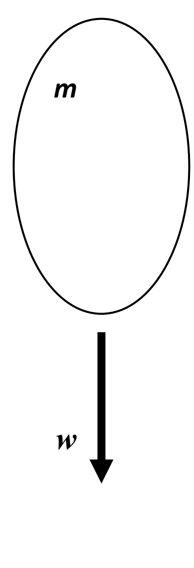
..ΟΤΑΝ Η ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΕΙΝΑΙ Η ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΠΟΥ ΑΣΚΕΙΤΑΙ ΣΕ ΕΝΑ ΣΩΜΑ

Όταν υπάρχει μη μηδενική δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα, τότε το σώμα αυτό αποκτά επιτάχυνση που έχει την ίδια κατεύθυνση με την δύναμη. Το πόσο μεγάλη είναι σε μέτρο η επιτάχυνση εξαρτάται από το πόσο μεγάλο είναι το μέτρο της δύναμης αυτής και από την μάζα του σώματος. Γεγονός είναι ότι η επιτάχυνση είναι ευθέως ανάλογη της δύναμης. Η σταθερά αναλογίας είναι το αντίστροφο της μάζας του σώματος, δηλαδή

$$a = \qquad \times \Sigma F$$

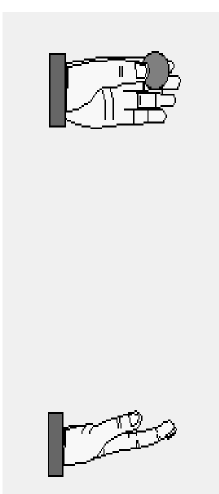
σχέση γνωστή σαν ''ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα''.

Η ελεύθερη πτώση είναι μια μονοδιάστατη κίνηση ενός αντικείμενου που πέφτει μόνο υπό την επίδραση της βαρύτητας- χωρίς αντίσταση αέρα ή άλλου είδους επιδράσεις.

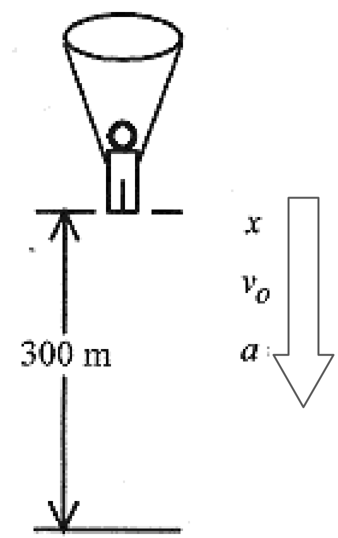


Κάθε πτώση ενός αντικείμενου μπορεί να θεωρηθεί ελεύθερη πτώση αρκεί να:

- ...είναι σχετικά βαρύ σε σχέση με το μέγεθος του. (Ρίχνοντας τη μπάλα όπως το παρακάτω σχήμα, είναι ελεύθερη πτώση, αλλά ρίχνοντας μια σελίδα χαρτί ή η κίνηση ενός μορίου σκόνης που πέφτει στο πάτωμα, δεν είναι. Αν όμως τσαλακώσουμε το χαρτί σε "μπάλα "η κίνηση του θα είναι περίπου ελεύθερη πτώση.)
- ...πέφτει σε σχετικά μικρό χρόνο.(αν η μπάλα πέσει από καρέκλα στο πάτωμα είναι ελεύθερη πτώση. Αν πέσει από αεροπλάνο όπου μετά από μερικά δευτερόλεπτα αρχίσει να επιδρά η αντίσταση του αέρα, δεν είναι.)
- ...κινείται σχετικά αργά.(Αν μας πέσει η μπάλα ή την ρίξουμε προς τα κάτω είναι ελεύθερη πτώση. Αν την ρίξουμε με ένα κανόνι που έχει κατεύθυνση προς το έδαφος, δεν είναι.)



ελεύθερη πτώση



ελεύθερη πτώση με αντίσταση αέρα

Περίπου το 1600, ο Γαλιλαίος πειραματιζόμενος ανακάλυψε ότι η επιτάχυνση ενός αντικείμενου που εκτελεί ελεύθερη πτώση, έχει σταθερή τιμή. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα του αντικείμενου αλλάζει με σταθερό ρυθμό.

Τα σώματα που πέφτουν ελευθέρα στην γη στο ίδιο σημείο (από αποστάσεις συγκριτικά μικρές σε σχέση με την ακτίνα της) έχουν όλα ανεξαιρέτως την ίδια αύξηση 9 m/s^2 στην ταχύτητα τους για κάθε δευτερόλεπτο της κίνησης τους. Αυτή η τιμή για την επιτάχυνση συνήθως καλείται ''g''. Η κατεύθυνση της είναι ακτινική σε κατακόρυφο, προς το κέντρο της γης.

Κίνηση με κατεύθυνση προς το κέντρο της γης

$$\mathbf{a = + g}$$

$$\mathbf{v = v_0 + gt}$$

$$\mathbf{h = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2}$$

$$\mathbf{v^2 = v_0^2 + 2gh}$$

όπου h = η κατακόρυφη διανυθείσα απόσταση

Πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι δεν χρειάζεται ένα αντικείμενο να πέφτει για να κάνει ελεύθερη πτώση-μπορεί να πετάξει κανείς το αντικείμενο προς τα επάνω και θεωρείται και αυτό ελεύθερη πτώση εφόσον κινείται υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας (βολή προς τα επάνω)

Κίνηση με αντίθετη κατεύθυνση (από το κέντρο της γης προς τα επάνω)

$$a = - g$$

$$v = v_0 - gt$$

$$h = v_0 t - ½ gt^2$$

$$v^2 = v_0 t - 2gh$$

Κεφ. 10

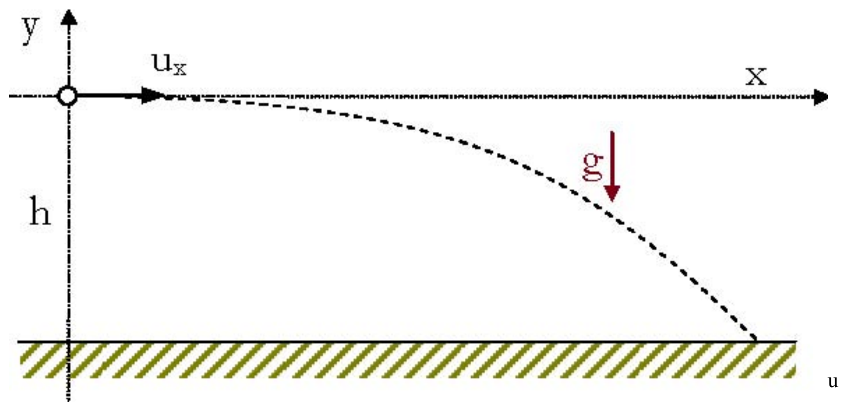
ΒΟΛΗ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΑΕΡΑ

Αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων (Galileo Galilei 1600 μ.Χ.)

Όταν ένα κινητό μετέχει δύο ή περισσοτέρων κινήσεων τότε αυτές γίνονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη και η συνολική μετατόπιση μετά από χρόνο t είναι ίδια είτε αυτές γίνονται ταυτόχρονα για χρόνο t είτε διαδοχικά για τον ίδιο χρόνο t η καθεμία.

Οριζόντια βολή

Συνδυασμός ελεύθερης πτώσης χωρίς αρχική ταχύτητα στον y και ευθύγραμμης ομαλής με ταχύτητα $u_{ox}=u_o$

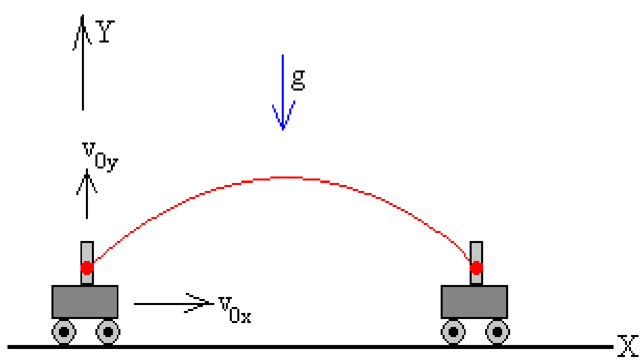


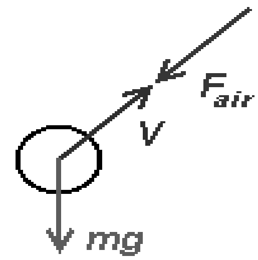
u_x x

$$x: \quad u_x = u_o \qquad x = x_o + u_{ox}t$$

.

$$y: \quad u_y = gt \qquad y = h - \quad gt^2$$





σχηματική αναπαράσταση της αντίστασης του αέρα σε βλήμα υπό γωνία

Χρησιμοποιούντα οι εξής παράμετροι

- *g*: επιτάχυνση της βαρύτητας -συνήθως έχει τιμή 9.81 m/s^2 κοντά στην επιφάνεια της γης
- *θ*: η γωνιά με την οποία εκτοξεύεται το βλήμα
- *v*: η ταχύτητα εκτόξευσης βλήματος
- y_0: το αρχικό ύψους του βλήματος
- *d*: το βεληνεκές(οριζόντια απόσταση που διανύει το βλήμα)
- *Βολή στο ομογενές βαρυτικό πεδίο*

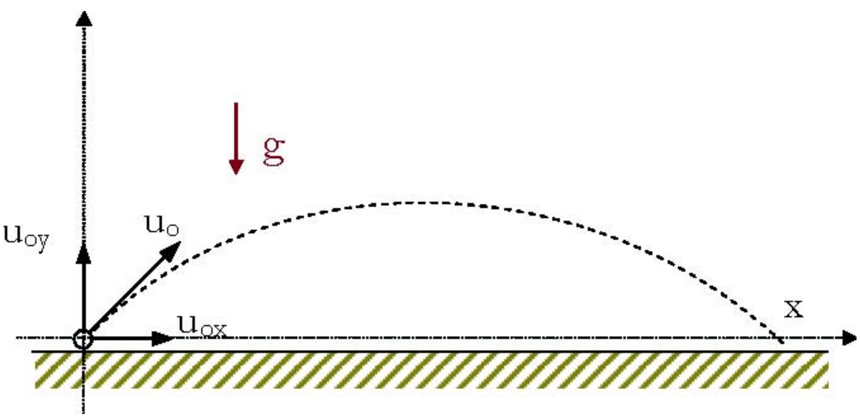
Πλάγια βολή γωνίας θ προς τα πάνω

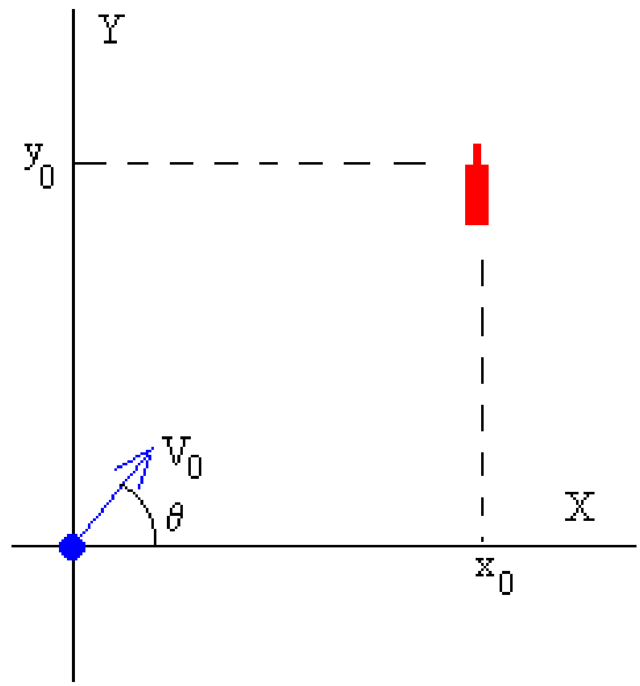
Συνδυασμός κατακόρυφης βολής με αρχική ταχύτητα u_{oy} και ευθύγραμμης ομαλής με ταχύτητα u_{ox}

$$x: \quad u_x = u_{ox} \qquad x = x_o + u_{ox}t$$

.

$$y: \quad u_y = u_{oy} - gt \qquad y = y_o + u_{oy}t - \qquad gt^2$$





εξισώσεις που δίνουν την τελική θέση του βλήματος

Απόσταση που διανύθηκε:

η ολική οριζόντια απόσταση θα είναι.

$$d = \frac{\mathbf{u} \cos\theta}{g}$$

$$\left(\mathbf{u} \sin\theta + \sqrt{(u \sin\theta)^2 + 2\,\mathbf{g}\,\mathbf{y}_0}\right)$$

Όταν το βλήμα εκτοξεύεται από οριζόντια επιφάνεια η απόσταση θα είναι

$$d = \frac{\mathbf{u}^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Στην ειδική περίπτωση της εκτόξευσης υπό γωνία 45^o και μηδενικού αρχικού ύψους

Ο τύπος γίνεται

$$d = \frac{\mathbf{u}^2}{g}$$

ΧΡΟΝΟΣ ΠΤΗΣΗΣ

$$t = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{u} \cos\theta} = \frac{\mathbf{u} \sin\theta + \sqrt{(u \sin\theta)^2 + 2\,\mathbf{g}\,\mathbf{y}_0}}{g}$$

.

Όπως προηγουμένως η σχέση γίνεται

$$t = \frac{\sqrt{2}\,u}{g}$$

Για γωνία 45^o και αρχικό μηδενικό ύψος

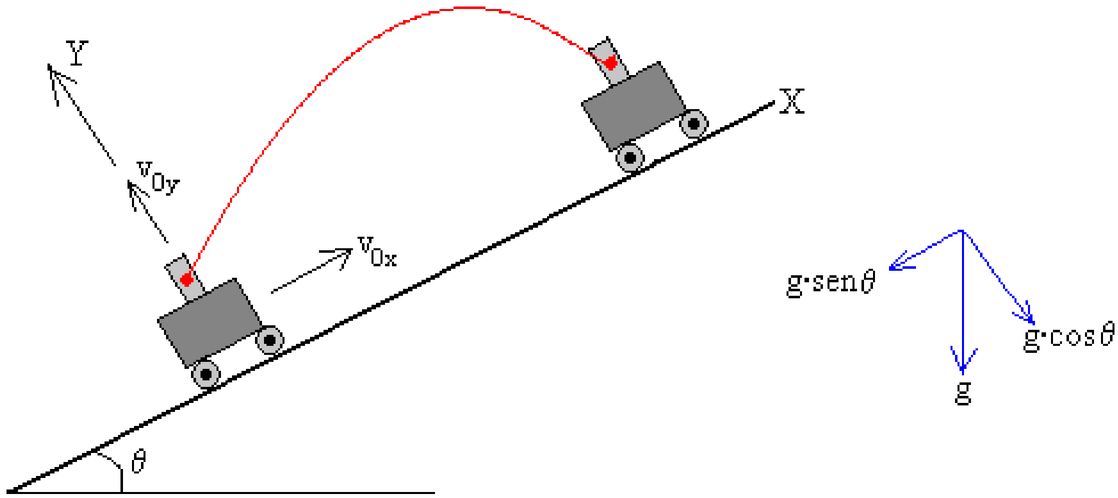
ΚΙΝΗΣΗ ΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΑΕΡΑ

Υποθέτουμε ότι το βλήμα εκτοξεύεται από το έδαφος στο χρόνο $t = 0$,(από ένα οριζόντιο αεροπλάνο), έχοντας γωνία θ σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο. Το μέτρο της αντίστασης του αέρα είναι ευθέως ανάλογο της στιγμιαίας ταχύτητας του βλήματος. χρησιμοποιώντας το παραπάνω μοντέλο μπορούμε να έχουμε μια κάποια ιδέα του πως η αντίσταση του αέρα τροποποιεί την τροχιά ενός βλήματος.

Αν υιοθετήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο εκτόξευσης , όπου ο z άξονας δείχνει κάθετα προς τα επάνω. Έστω η αρχική ταχύτητα του βλήματος βρίσκεται στους x-y άξονες. Σημειωτέον , εφόσον ούτε η βαρύτητα ούτε η δύναμη έλξης έχει σαν αποτέλεσμα το βλήμα να κινείται έξω από το x-z του αεροπλάνου, μπορούμε να αγνοήσουμε την συνισταμένη του y .

Η εξίσωση κίνησης του βλήματος γράφεται

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$



Όπου $v = (u_x,u_z)$ είναι η ταχύτητα του βλήματος , $g = (0,-g)$ η επιτάχυνση βαρύτητας και c μια θετική σταθερά.

Η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\frac{du_x}{dt} = -g\frac{u_x}{u_t}$$

$$\frac{du_z}{dt} = -g\left(1+\frac{u_z}{u_t}\right)$$

εδώ η $u_t = mg/c$ είναι η τελική ταχύτητα

ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις ,έχουμε

$$\int_{u_{x_o}}^{u} \frac{du_x}{u_x} = -\frac{g}{u_t} t$$

$$\int_{u_{z_o}}^{u_z} \frac{du_z}{u_t + u_z} = -\frac{g}{u_t} t$$

όπου

$$u_{x_o} = u_0 \cos\theta$$

Είναι η συνιστώσα της ταχύτητας εκτόξευσης στον χ άξονα. Έτσι

$$u_x = u_0 \cos\theta \, e^{-\frac{gt}{u_t}}$$

Αν $t \ll u_t / g$ τότε παίρνουμε

$$x = u_0 \cos\theta \, t$$

Το οποίο είναι το αποτέλεσμα για την απουσία αντίστασης αέρα. Ενώ

Αν $t \gg u_t / g$ τότε παίρνουμε

$$x = \frac{u_0 u_t \cos\theta}{g}$$

Η παραπάνω έκφραση εμφανίζει καθαρά το ανώτερο όριο του πόσο μακριά μπορεί να ταξιδέψει το βλήμα στην οριζόντια διεύθυνση.

Ομοίως για τον z άξονα

$$z = u_0 \sin\theta\, t - \frac{g}{2} t^2$$

Ενώ για t >> u_t /g

$$z = \frac{u_t}{g}(u_0 \sin\theta + u_t) - u_t t$$

Η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι η αντίσταση του αέρα αρχίζει να έχει επίδραση στην τροχιά όταν το βλήμα έχει μείνει στον αέρα για χρόνο της τάξης του u_t / g.

Είναι ξεκάθαρο ότι αν t >>u_t/g ο χρόνος πτήσης του βλήματος και το βεληνεκές του θα είναι

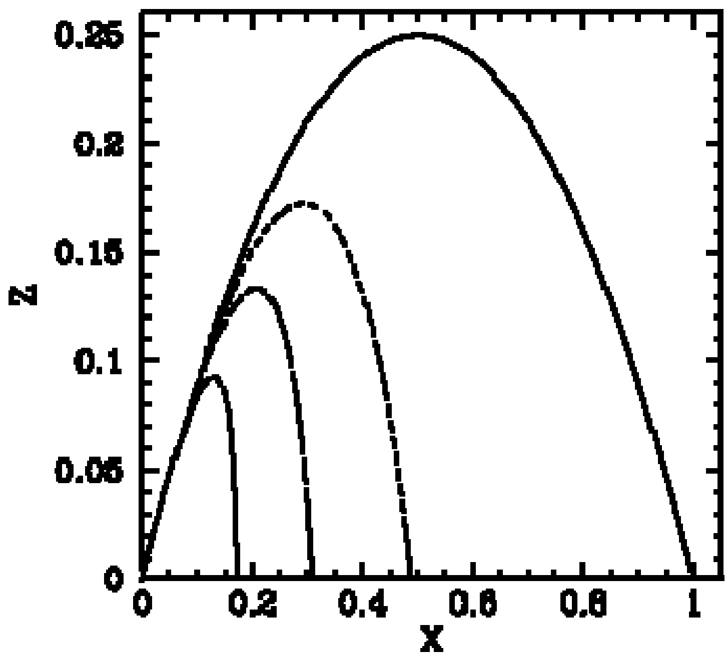
$$t_f = \frac{2u_0 \sin\theta}{g}$$

Ενώ αν t <<u_t /g

$$t_f = \frac{u_0 \sin\theta}{g}$$

$$R = \frac{u_0 u_t \cos\theta}{g}$$

Η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση πραγματοποιείται όταν η γωνία γίνει 45^0



Τροχιά βλήματος με αντίσταση αέρα

Κεφ. 11

Αριθμητικές μέθοδοι και αλγόριθμοι επίλυσης των εξισώσεων κίνησης του Νεύτωνα.

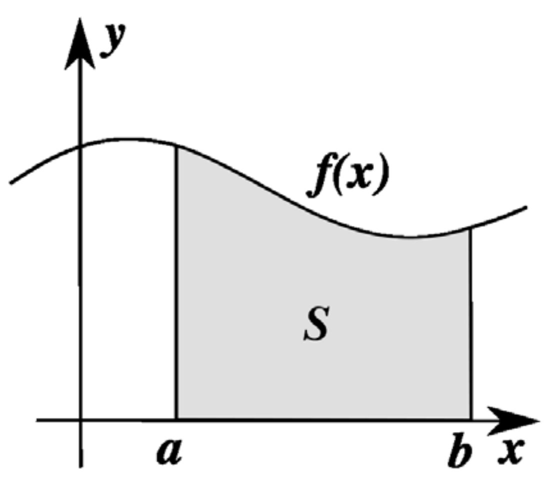
Στα παραδείγματα φυσικής που δώσαμε η λύση ήταν πάντα μία εφαρμογή των εξισώσεων κίνησης του Νεύτωνα. Η θεμελιώδης εξίσωση κίνησης είναι η εξής: F=ma

a είναι η ολική επιτάχυνση που δέχεται ένα μία σημειακή μάζα, από την επίδραση μίας δύναμης F.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t,x,u)$$

Παρατηρούμε ότι η τριάδα t,x,u , χρονικό σημείο t, θέση και ταχύτητα, προσδιορίζει μονοσήμαντα όλες τις πληροφορίες ως προς την κίνητική στον χώρο μίας σημειακής μάζας. Η επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης θα δοθεί όχι με αναλυτική μέθοδο αλλά με αριθμητική. Έτσι καλύπτει την γενική περίπτωση εκμεταλλεύεται την υπολογιστική ισχύ των Η/Υ.

Η επιτάχυνση είναι η δεύτερη παράγωγος του διανύσματος θέσεως του σημείου ως προς τον χρόνο. Εφόσον γνωστή στα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε, και συνήθως είναι πιο εύκολα προσδιορίσιμη, και στην πράξη είναι η επιτάχυνση, για να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία πρέπει να υπολογίσουμε αριθμητικά το όλοκληρωμα της επιτάχυνσης ως προς τον χρόνο. Ο αριθμητικός υπολογισμός αντιστοιχεί στον υπολογισμό του γεωμετρικού εμβαδού της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της επιτάχυνσης μέχρι τον άξονα του χρόνου.



Το πρώτο ολοκλήρωμα μας δίνει την ταχύτητα καθώς αντίστροφα η παράγωγος της ταχύτητας $\frac{dU(t)}{dt}$ αντιστοιχεί στην επιτάχυνση.

Το δεύτερο πάλι μας δίνει το διάστημα που διανύει το κινητό καθώς $\frac{dS(t)}{dt}$ αντιστοιχεί στην ταχύτητα του σώματος.

Αναλυτικά από τις θεμελιώδεις σχέσεις ορισμού της ταχύτητας U έχουμε

$$\frac{U(t) = \lim(\square x(t+dt) - x(t)}{dt} \; dt\text{->}\, 0$$

$$\frac{a(t) = \lim(\square u(t+dt) - u(t)}{dt} \; dt\text{->}\, 0$$

Κατά προσέγγιση από τις παραπάων σχέσεις έχουμε.

$$u'(t+dt)\sim=u(t)+a(t)\; dt$$

$$x(t+dt)\sim= x(t)+u(t)\; dt$$

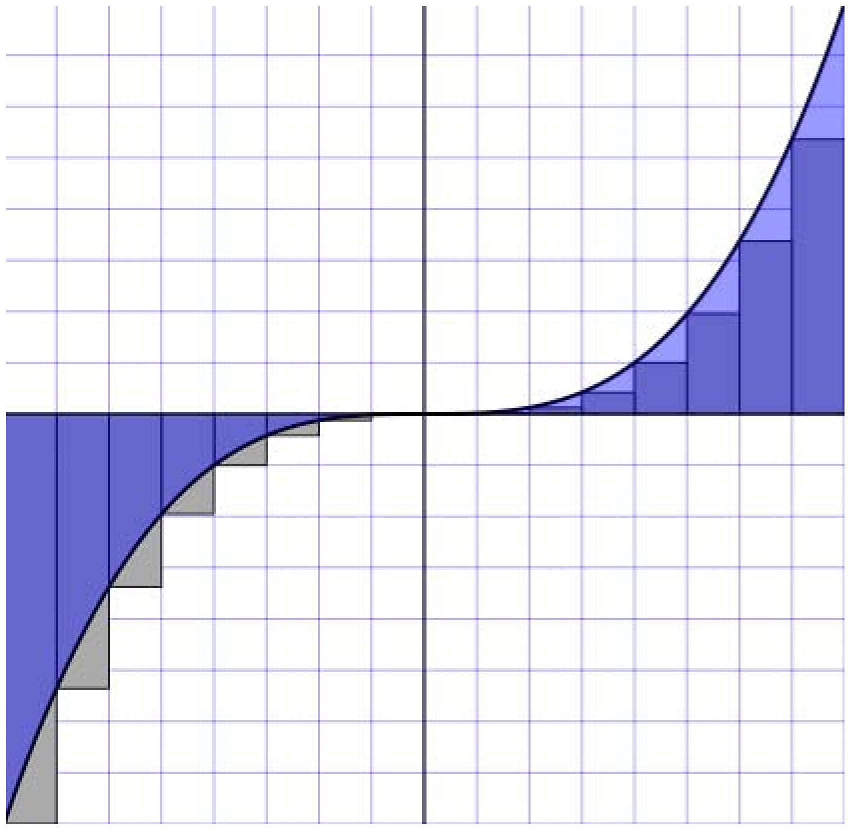
έχουμε δηλαδή δύο αναγωγικές εξισώσεις όπου με βάσει τις αρχικές τιμές συνθήκες x(to), u(to), την αρχική χρονική στιγμή μπορούμε να «παράγουμε» κάθε στιγμή όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για το σώμα που κινείτε, την ταχύτητα, τη θέση. Το διάστημα αυτό «σαρώνεται» με υποδιαστήματα dt . Και με βάση τον ορισμό όσο το διαστημα ολοκλήρωσης του χρόνου τείνει προς το μηδέν, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια στην προσομοίωση θα έχουμε.

Οι παραπάνω σχέσεις σε γενική μορφή

$U_{n+1}\sim= u_n+a_n*dt$

$x_{n+1}\sim= x_n+u_n*dt$

Παρατηρούμε ότι, ως προς το αριθμητικό κομμάτι, πολλαπλασιάζεται η προηγούμενη τιμή της επιτάχυνσης με το χρονικό διάστημα dt.Αυτό αριθμητικά αντιστοιχεί στο εμβαδόν ενός μικρού παραλληλογράμμου και το συνολικό άθροισμά τους μας δίνει το ολοκλήρωμα της ποσότητας της επιτάχυνσης που αντιστοιχεί στην ταχύτητα του σώματος.



Κεφ 12

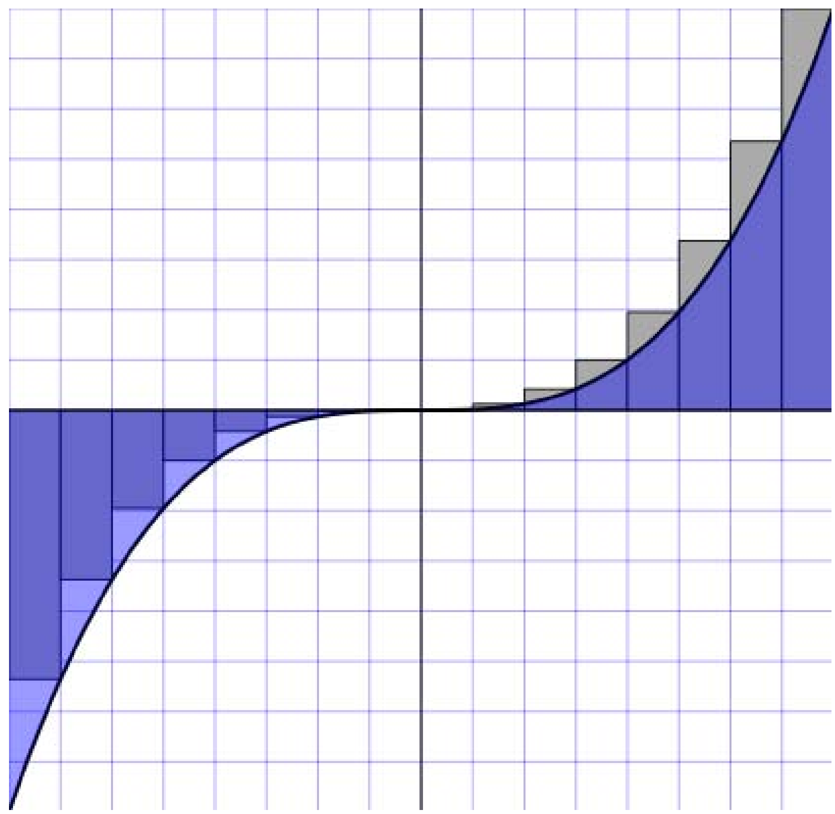
Παραλλαγές Αλγορίθμων επίλυσης εξισώσεων κίνησης

Αλγόριθμος Euler

$U_{n+1} \sim= u_n + a_n * dt$

$x_{n+1} \sim= x_n + u_{n+1} * dt$

Η πρώτη εξίσωση είναι ίδια με την εξίσωση που προέκυψε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στην δεύτερη διαφέρει στο μέλος u_{n+1} που αντικαθιστά το u_n. Δηλαδή η ταχύτητα στο τέλος του χρονικού διαστήματος dt αντικαθιστά την u_n που είναι η ταχύτητα στην αρχή του χρονικού διαστήματος dt. Πάλι από τη σκοπιά της αριθμητικής ανάλυσης της διαφορικής εξίσωσης, αντιστοιχεί στον υπολογισμό του παραλληλογράμμου αλλά αυτή τη φορά εκείνου που προκύπτει από το δεύτερο μέρος του διαστήματος dt



Κεφ 13

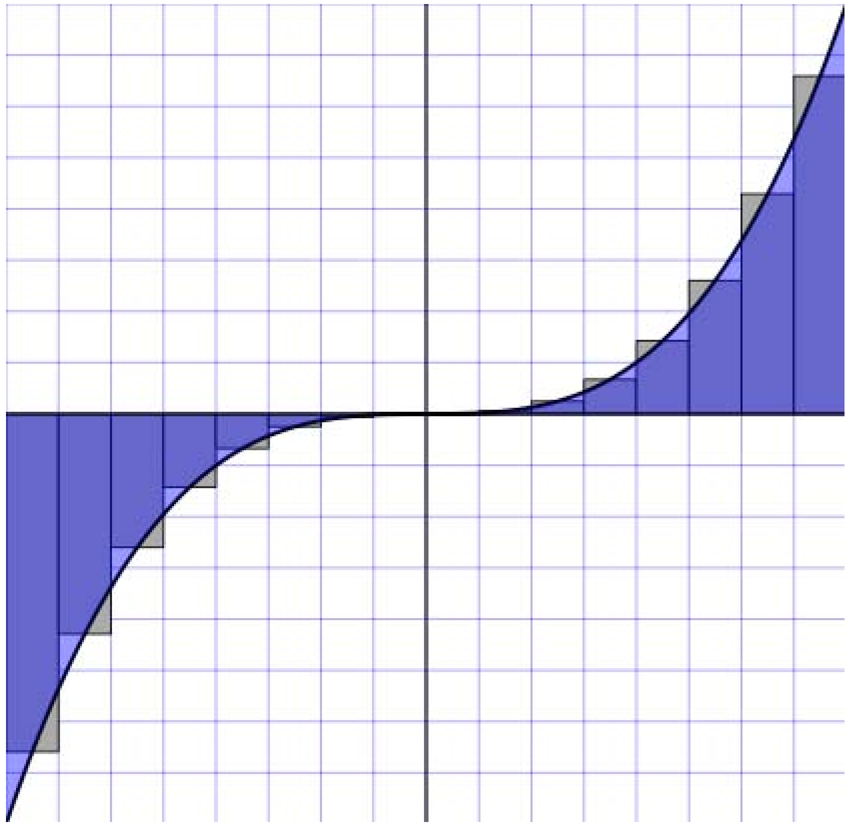
Παραλλαγές Αλγορίθμων επίλυσης εξισώσεων κίνησης

Αλγόριθμος Feyman & Newton

$U_{n+1} \sim= u_n + a_n * dt$

$x_{n+1} \sim= x_n + u_{n+1/2} * dt$

Το $u_{n+1/2}$ προκύπτει από την τιμή του μεγέθους στο μέσο του διαστήματος Δt.



Κεφ 13

Παραλλαγές Αλγορίθμων επίλυσης εξισώσεων κίνησης

Αλγόριθμος Runge –Kutta.

Ο αλγόριθμος Runge –Kutta είναι ο πιο συνηθισμένος σε επιστημονικές προσομοιώσεις και με τη μεγαλύτερη ακρίβεια.

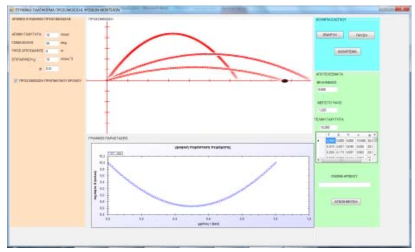
k1=dt/m*F (t,x,U)

k2=dt/m*F (t+dt/2, x+dt*U/2, U+k1/2)

k3=dt/m*F (t+dt/2, x+dt*U/2+dt*k1/4, U+k2/2)

k4=dt/m*F (t+dt, x+dt*U+dt*k2/2, U+k3)

Πρακτικό Μέρος



Στο τμήμα αυτό της πτυχιακής θα ασχοληθούμε με το πρακτικό εφαρμοσμένο κομμάτι, δηλαδή το πρόγραμμα που θα υλοποιεί και θα προσομοιώνει τα μοντέλα φυσικής που περιγράφηκαν στο θεωρητικό μέρος. Η εφαρμογές υλοποιήθηκαν στην σουίτα προγραμματισμού visual basic express edition 2008 από την Microsoft.

Το πρακτικό μέρος χωρίζεται σε τρία τμήματα.

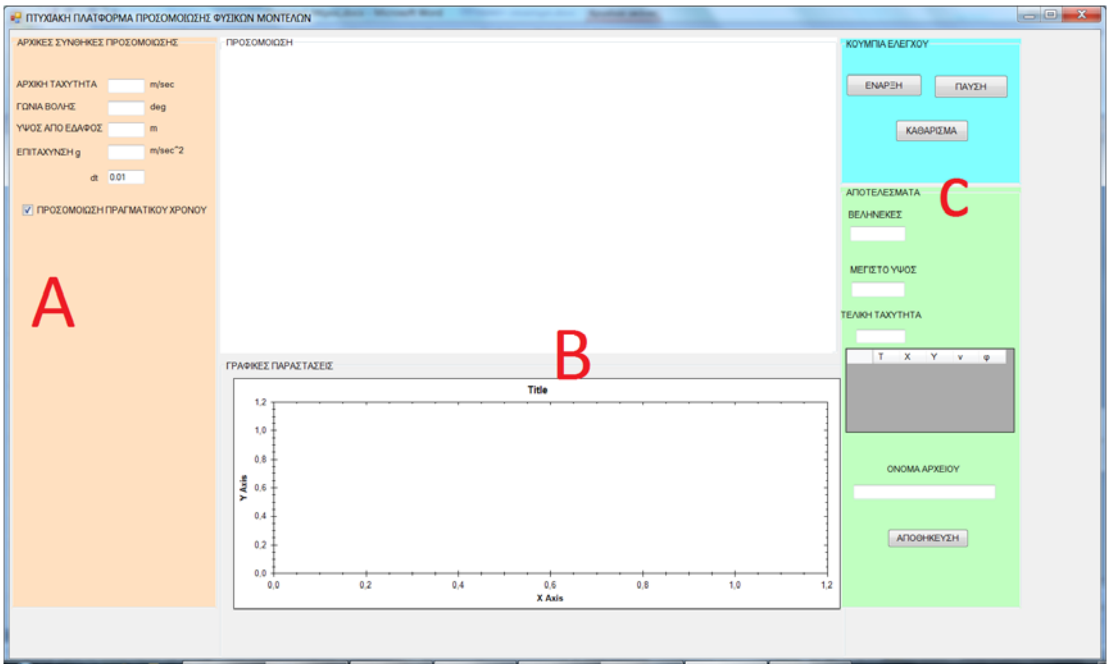
Α)Στο πρώτο τμήμα θα αναφερθεί η γενική δομή της πλατφόρμας προσομοίωσης καθώς και μία περιγραφή των βασικών στοιχείων που την αποτελούν, όπως γραφικές παραστάσεις, και χρησιμοποιούνται σχεδόν χωρίς μετατροπές σε όλες τις εφαρμογές

Β) Στο δεύτερο τμήμα θα περιγραφεί η ροή δεδομένων κατά τη λειτουργία της προσομοίωσης, τι συμβαίνει κατά την εκτέλεση των εντολών σε στάδια. Πρακτικά στην πλατφόρμα μας, η λειτουργία των συμβάντων (events) όταν πατηθούν τα κουμπιά λειτουργίας

Γ) Αναφορά στα 3-4 θεωρητικά μοντέλα που υλοποιήθηκαν, εκτέλεση της προσομοίωσης και αξιολόγηση των εξαχθέντων αποτελεσμάτων.

Α) Γενική δομή της πλατφόρμας

1.



Η παρουσίαση του προγράμματος χωρίζεται σε 3 νοητά μέρη από αριστερά προς τα δεξιά

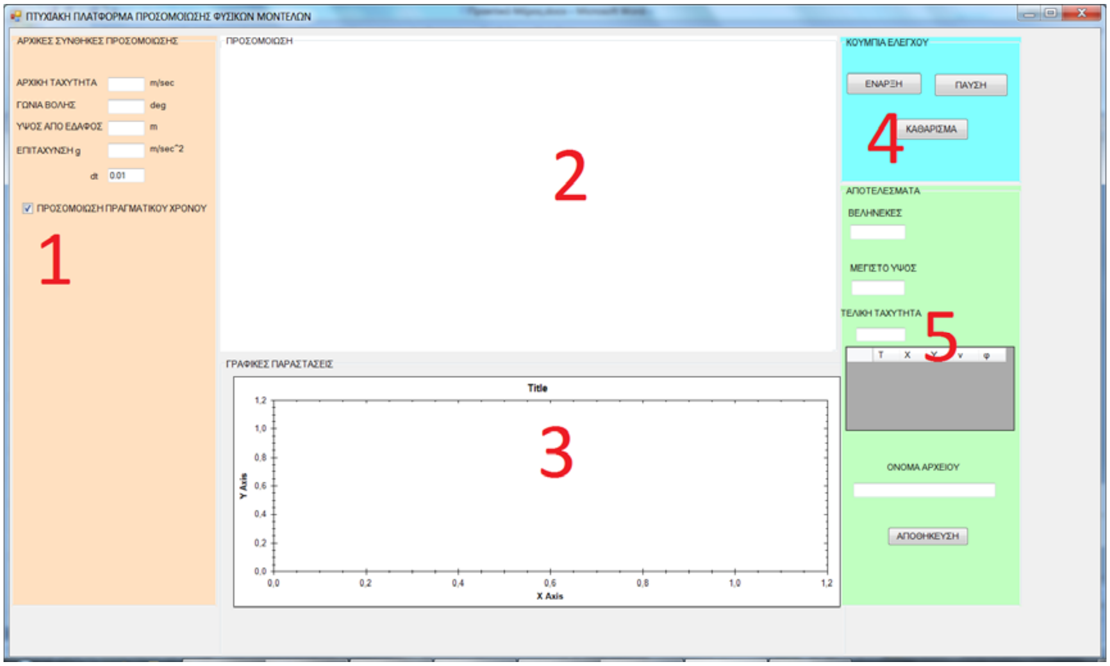
Α. Οι αρχικές συνθήκες του μοντέλου και άλλες ρυθμίσεις πριν την εκτέλεση της προσομοίωσης.

Β. Ο κεντρικός χώρος που καταλαμβάνει και τη μεγαλύτερη επιφάνεια είναι αφιερωμένος στην αναπαράσταση της προσομοίωσης και τη γραφική παράσταση φυσικών μεγεθών.

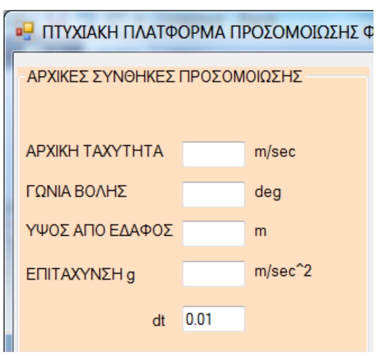
C. Τα κουμπιά ελέγχου της προσομοίωσης καθώς και έξοδος αριθμητικών αποτελεσμάτων.

2.

Για καλύτερη ταξινόμηση, τακτοποίηση κατά τον προγραμματισμό, χρωματισμό και αλλαγές στις ιδιότητες χρησιμοποιήθηκαν Groupboxes όπου ομαδοποιούνται πάνω στην φόρμα του προγράμματος κοινά στοιχεία της πλατφόρμας όπως τα αποτελέσματα εξόδου. Παρακάτω στο σχήμα το αντίστοιχα groupboxes



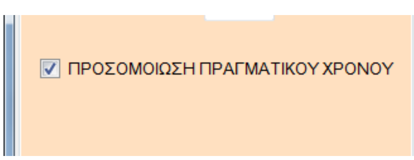
3. Ακολουθούν αντικείμενα , τμήματα κώδικα της πλατφόρμας που χρησιμοποιούνται σχεδόν αυτούσια ή με μικρομετατροπές σε διαφορετικά μοντέλα.



Οι αρχικές συνθήκες τοποθετήθηκαν με τη μορφή textboxes.

4.

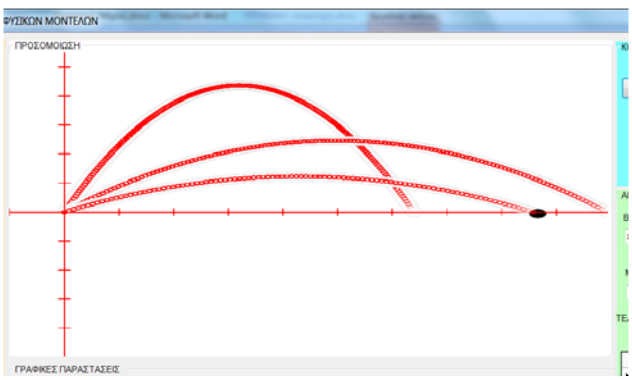
Προσομοίωση πραγματικού χρόνου



Επιλογή για προσομοίωση πραγματικού χρόνου. Ο υπολογιστικός βηματισμός του χρόνου dt δεν συμβαδίζει με την εξέλιξη του φαινομένου σε πραγματικό χρόνο. Με την επιλογή με checkbox συμβαδίζει ο υπολογισμός με τον πραγματικό χρόνο για την περίπτωση που κάποιος θέλει να παρακολουθήσει την εξέλιξη του φαινομένου στην γραφική αναπαράσταση. Εφόσον ενδιαφέρεται για τα αριθμητικά αποτελέσματα αποεπιλέγεται ώστε να υπολογιστούν το γρηγορότερο δυνατό ανάλογα τις δυνατότητες του υπολογιστή.

5.

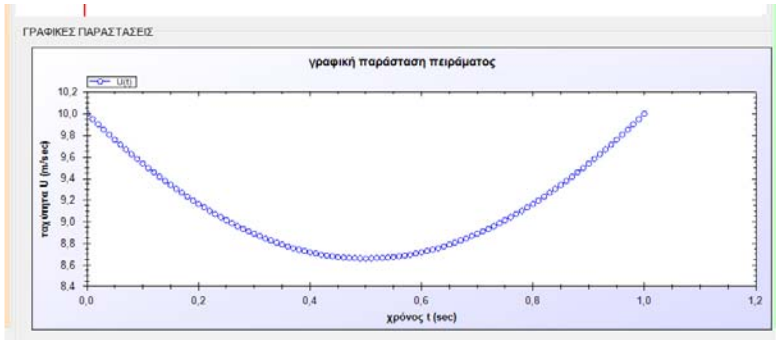
Πανελ προσομοίωσης



Στο πάνελ προσομοίωσης έχουμε την αναπαράσταση του φυσικού μοντέλου που μελετάμε. Υλοποιήθηκαν σε δισδιάστατους άξονες, με αναπαράσταση σημειακής μάζας ως κινούμενο καθώς και να διατηρείται ίχνος της τροχιάς.

6.

Γραφική παράσταση φυσικού μεγέθους



Στο παρόν τμήμα ενσωματώνουμε το αντικείμενο activex control zedgraph control. Αυτό δίνει την δυνατότητα από τη γλώσσα προγραμματισμού να αναπαριστά σε γραφική παράσταση κάποια μεταβλητή του προγράμματος. Στα μοντέλα που υλοποιήσαμε την U(t) ταχύτητα σημειακής μάζας συναρτήσει του χρόνου. Έχει ενσωματωμένες αυτόνομες δυνατότητες επεξεργασίας των στοιχείων κάνοντας δεξί κλικ πάνω στο control ενώ εκτελείται το πρόγραμμα. Η σημαντικότερη το save image as όπου αποθηκεύεται ένα αρχείο εικόνας με την γραφική.

Οι οδηγίες για την ενσωμάτωση του dll στο κυρίως project της visual basic είναι:

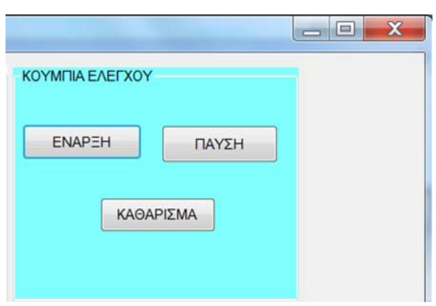
Από το toolbox επιλέγουμε choose item,

browse στο dll με το control

Απαραίτητη η δήλωση imports name στην εκκίνηση της φόρμας.

7.

Κομπιά ελέγχου προσομοίωσης

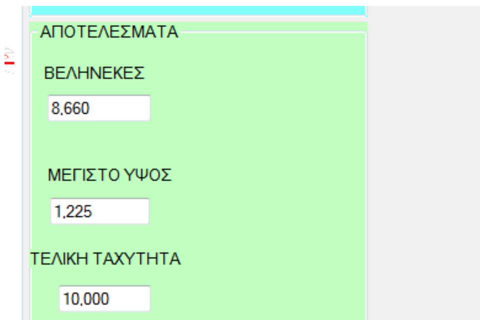


Τα κουμπιά ελέγχου και ο τρόπος λειτουργίας τους, θα παρουσιαστούν αναλυτικά στο Βήτα τμήμα του πρακτικού μέρους.

Ως προς τη χρήση του προγράμματος γενικά, η έναρξη εκκινεί την προσομοίωση, η πάυση διακόπτει προσωρινά τον υπολογισμό διατηρώντας τις τιμές, το καθάρισμα μηδενίζει όλες τις μεταβλητές και τα γραφικά.

8.

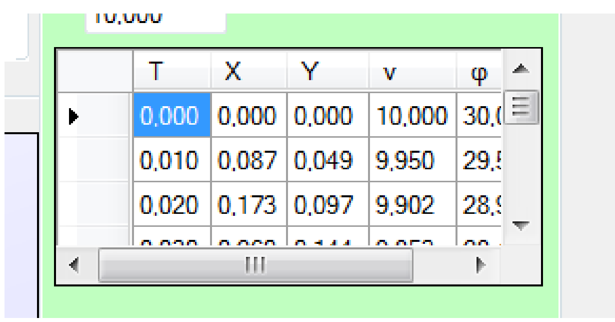
Αποτελέσματα



Στο τμήμα αυτό στα δεξιά του προγράμματος τοποθετήσαμε ορισμένα textboxes τα οποία παρουσιάζουν στον χρήστη κάποιες τιμές τις προσομοίωσης που έχουν ιδιαίτερο φυσικό ενδιαφέρον στο συγκεκριμένο μοντέλο. π.χ. στην περίπτωση της εικόνας το βεληνεκές είναι το μέγιστο μήκος που φθάνει η βολή. Η απόδοση τιμών γίνεται κατά το τα τέλος της προσομοίωσης όταν ικανοποιούνται κάποια κριτήρια, π.χ. το μέγιστο ύψος γίνεται σύγκριση με το ύψος κάθε χρονική στιγμή και αποδίδεται στη μεταβλητή η μέγιστη τιμή.

9.

Αναλυτικά Αριθμητικά Αποτελέσματα Προσομοίωσης



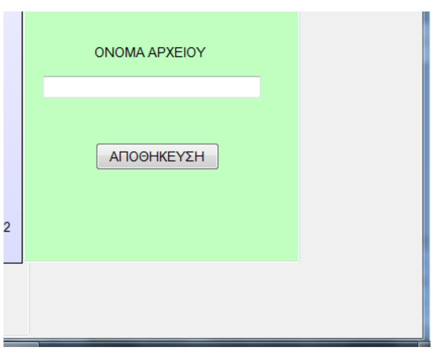
Το παραπάνω αντικείμενο είναι κλάσης Datagridview, ενσωματωμένης στις βιβλιοθήκες της visual basic.

Τα στοιχεία του ορίζονται με την εντολή edit columns και οι τιμές αποδίδονται κατά την προσομοίωση. Ο σκοπός του είναι η αποθήκευση σε αυτό το αντικείμενο των τιμών κάθε χρονική στιγμή όλων των απαραίτητων μεταβλητών που περιγράφουν κάθε χρονική στιγμή τα φυσικά μεγέθη του μοντέλου. Σε προβλήματα που δεν μας ενδιαφέρει μόνο κάποιες τελικές τιμές, αλλά και οι ενδιάμεσες, πως δηλαδή οδηγήθηκε το σύστημά μας στην τελική κατάσταση.

Τα δεδομένα στο datagrid μπορούν να διαχειριστούν με τις ενσωματωμένες δυνατότητες των windows, drag, κλικ σε τίτλο στήλης, γραμμής για επιλογή, CTRL+c copy, CTRL+v paste.

10.

Αποθήκευση Αποτελεσμάτων



Στο παραπάνω textbox με το αντίστοιχο κουμπί αποθήκευση, δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη να αποθηκεύσει όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσομοίωσης σε ένα αρχείο τύπου text txt, για περαιτέρω επεξεργασία σε τρίτο πρόγραμμα όπως excel, matlab κοκ. Ο διαχωρισμός των δεδομένων γίνεται ανά σειρά για κάθε χρονική στιγμή dt , και με το διαχωριστικό το ελληνικό ερωτηματικό στην ίδια σειρά για τα διαφορετικά μεγέθη, καθώς χρησιμοποιείται συχνά ως διαχωριστικό από συνήθη προγράμματα.

Παράδειγμα αποτελεσμάτων:

0,140;1,379;0,138;9,854;1,957

0,150;1,477;0,140;9,851;1,376

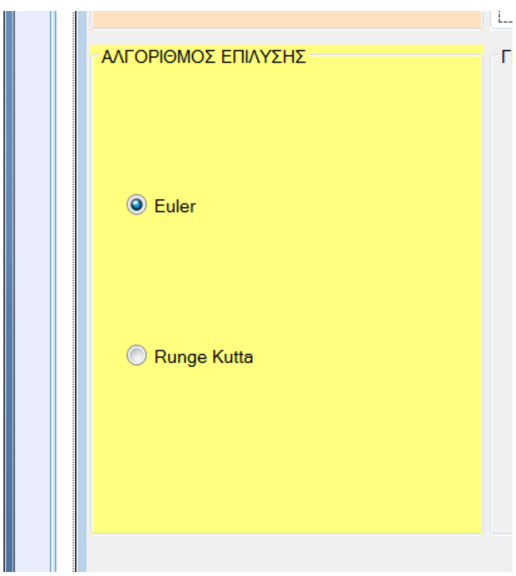
0,160;1,576;0,142;9,849;0,794

Η πρώτη στήλη αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή t, η δεύτερη στην θέση του σώματος στον άξονα x η Τρίτη στον άξονα y, η τέταρτη στην ολική ταχύτητα και η τελευταία στη γωνία ως προς τον άξονα x.

Σημ(1. Σε περίπτωση που το πρόγραμμα είτε μεσω της visual basic είτε απευθείας, εκτελείται σε vista, windows7, πρέπει να εκτελείται ως administrator για να μπορεί να αποθηκεύσει αρχείο)

11.

Επιλογή αλγόριθμου ολοκλήρωσης.



Αντικείμενα κλάσης τύπου radio button.

Μέσα στο event της εκτέλεσης του κουμπιού έναρξη γίνεται έλεγχος με τη χρήση της μεθόδου rdbtnXXX.checked ποιο από τα δύο είναι επιλεγμένο=True και αναλόγος καλεί την κλάση υπολογισμού προσομοίωσης Euler ή Runge Kutta.

B) Περιγραφή λειτουργίας του προγράμματος κατά την εκτέλεση

Σε αυτό το τμήμα θα περιγραφεί η γενικότερη λειτουργία του προγράμματος και η αρχιτεκτονική λειτουργίας .

1.

Γενική περιγραφή λειτουργίας Προγράμματος.

Θα ακολουθήσει η παρουσίαση των παραπάνω σταδίων με ενδεικτικά σημεία του κώδικα και γενικότερη περιγραφή του τρόπου λειτουργίας.

Το βασικό συμβάν του προγράμματος είναι το κουμπί έναρξη που συνδέει όλες τις διεργασίες που γίνονται στο πρόγραμμα. `Private Sub btnStart_Click`

Αρχικά καλεί την υπορουτίνα `dataIntegrity()` Η οποία κάνει έλεγχο ακεραιότητας των δεδομένων των αρχικών συνθηκών, εάν ανταποκρίνονται σε δεδομένα εντός αποδεκτών ορίων.

Έπειτα ελέγχει εάν το checkbox πραγματικού χρόνου είναι επιλεγμένο από το χρήστη ή όχι.

Αν όχι καλεί άμεσα την κλάση algorithmos_xy όπου πραγματοποιούνται οι καθαυτό φυσικοί υπολογισμοί του μοντέλου που έχουμε επιλέξει. Μέσω της μεθόδου `.hasFinished` ενημερώνεται πότε τα κριτήρια που θέσαμε αυτόματης διακοπής (εάν υπάρχουν) έχουν ικανοποιηθεί και διακόπτει το event.

Ταυτόχρονα αποστέλει και γεμίζει το αντικείμενο datagrid με τη λίστα με τα δεδομένα, `DataGridView1.Rows.Add` καθώς και καλεί την υπορουτίνα που κατασκευάζει το animation της κινησης και στέλνει τα δεδομένα για το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης `list.Add`

Με το τέλος των υπολογισμών αποστέλλει στα textboxes αποτελεσμάτων τα ανάλογα τελικά αποτελέσματα.

Στην περίπτωση όπου είναι επιλεγμένη η προσομοίωση πραγματικού χρόνου ελέγχεται και ενεργοποιείται η υπορουτίνα `Timer1_Tick` όπου πλέον μέσω του timer της vb συγχρονίζεται η εκτέλεση των υπολογισμών με τον προεπηλεγμένο χρόνο dt της προσομοίωσης. (μέθοδος `Timer1.Interval = dt * 1000` για μετατροπή σε msec)

2.

Κουμπί Παύσης

`btnPause_Click`

Το κουμπί παύσης είναι ενεργοποιημένο μόνο εφόσον είναι τσεκαρισμένη η επιλογή προσομοίωση πραγματικού χρόνου. Με τη χρήση της μεθόδου Timer1.start() εκκινεί την μέθοδο υπολογισμού μέσω του συγχρονισμού με το timer. Με τη χρήση της μεθόδου `Timer1.Stop()` προκαλεί παύση του χρονομετρητή. Αντίστοιχα ο έλεγχος `CheckBox1_Click` ενεργοποιεί ή απενεργοποιεί το κουμπί Pause.

3.

Κουμπί Καθαρισμού

`btnClear_Click`

Με τις κατάλληλες μεθόδους πχ `.Clear` και αποδόσεις μηδενικών τιμών `DataGridView1.RowCount = 0` γίνεται καθαρισμός δεδομένων και γραφικών από τη γραφική παράσταση, το πλέγμα δεδομένων datagrid και την γραφική αναπαράσταση της προσομοίωσης.

4.

Κλάση Αλγόριθμων Προσομοίωσης

Το dll algorithmoi ενσωματώνει την συλλογή κλάσεων euler.vb και Runge_Kutta.vb όπου υλοποιούνται οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι προσομοιώσεις με τα απαραίτητα ορίσματα, για την κλήση τους και τον υπολογισμό.

Οδηγίες ενσωμάτωσης dll.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε για την κατασκευή και δήλωση των dll είχε τα παρακάτω βήματα.

1. new project

2. class Library

3. κώδικας κλάσης

4. save- build

5. name. dll

Σύνδεση με το βασικό project

1. Add referencies -> browse-> name.dll
2. Το βρίσκουμε στο solution explorer->references.
3. Δήλωση dim name1 As name
4. Κλήση ως τυπική κλάση, name.συνάρτηση(ορίσματα)

5.

Κλάση αρχικοποίησης συνθηκών

Velocity.dll

Περιέχει αρχικοποίηση και υπολογισμό ορισμένων μεταβλητών ώστε να σταλούν στον αλγόριθμο προσομοίωσης. Πχ υπολογισμός αρχικής ταχύτητας σε συνιστώσες των αξόνων.

Γ) Εκτέλεση υλοποιημένων παραδειγμάτων, παρουσίαση διαφορών, αξιολόγηση αποτελεσμάτων

Στο τελευταίο κεφάλαιο θα εκτελέσουμε τα παραδείγματα προβλημάτων φυσικής που υλοποιήθηκαν, θα παρουσιάσουμε τις διαφορές μεταξύ τους και πως δημιουργήθηκαν με βάση την πλατφόρμα. Τέλος θα αξιολογήσουμε ποιοτικά τα αποτελέσματα και τα γραφικά και τα αριθμητικά ως προς τα αναμενόμενα από την θεωρία.

1.

Μέθοδος Euler

Σενάριο χρήσης.

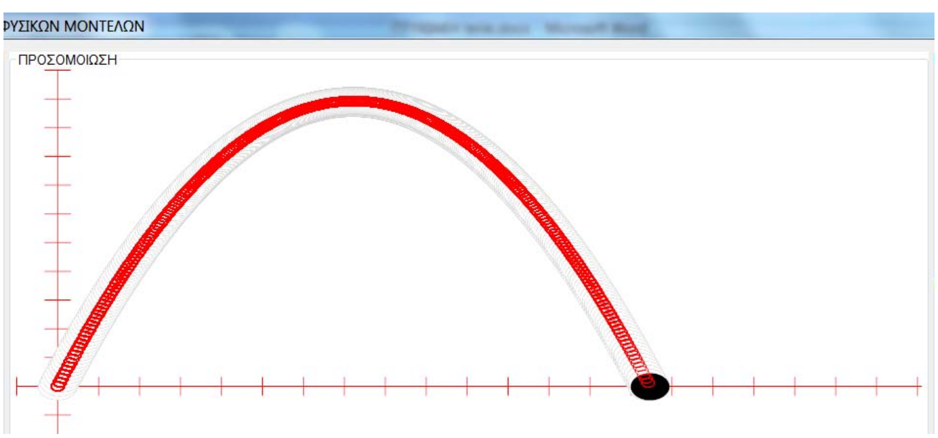
Αρχικές συνθήκες :

Αρχική ταχύτητα 15 m/sec

Γωνία Βολής: 70^{o}

Αρχικό ύψος: 0

Επιτάχυνση βαρύτητας: 10 m/sec^2



Αριθμητικά αποτελέσματα

Βεληνεκές: 14,416

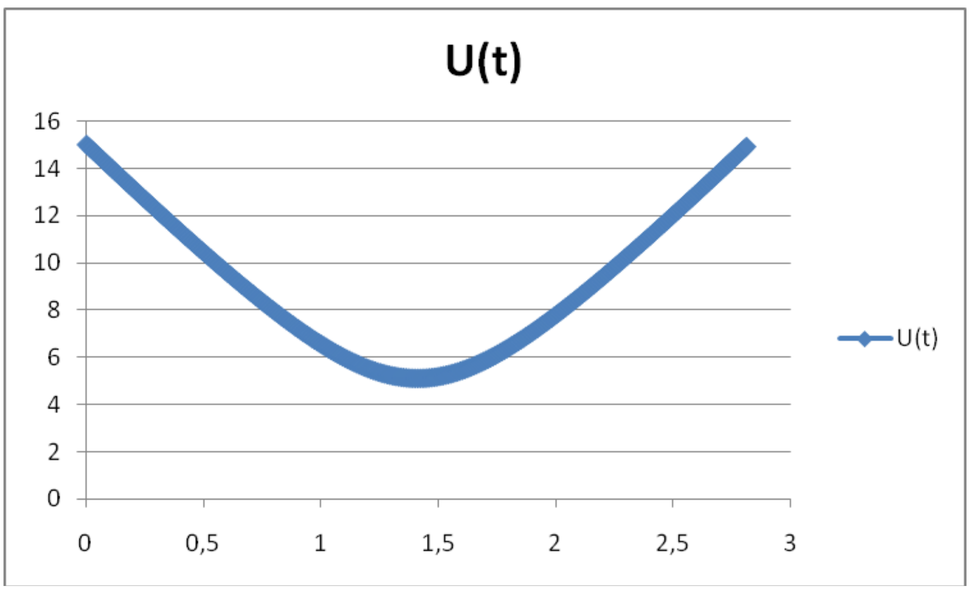
Μέγιστο ύψος : 9,864

Μέγιστη Ταχύτητα: 14,915

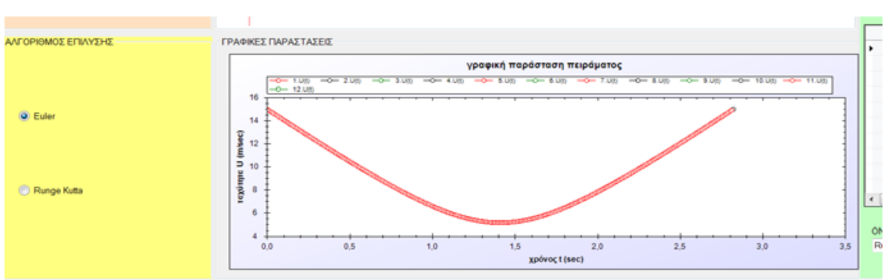
Αποθηκεύουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα σε αρχείο txt.

Τα εισάγουμε σε πρόγραμμα επεξεργασίας αριθμητικών δεδομένων πχ excel

Επιλέγουμε διαχωριστικό ελληνικό ερωτηματικό για εισαγωγή και διαχωρισμό δεδομένων εισάγονται. Από εκεί και πέρα διατίθενται τα δεδομένα για περετέρω τυπική μαθηματική επεξεργασία πχ στατιστική ανάλυση. Για παράδειγμα φτιάχνουμε την γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς το χρόνο για να την συγκρίνουμε με αυτή που παράγει αυτόματα η γραφική παράσταση του προγράμματος, ώστε και να ελέγξουμε την ορθή λειτουργία του.



Και παρακάτω η ίδια σειρά που παρήγαγε το πρόγραμμά.



2.

Μέθοδος Runge Kutta

Σενάριο χρήσης.

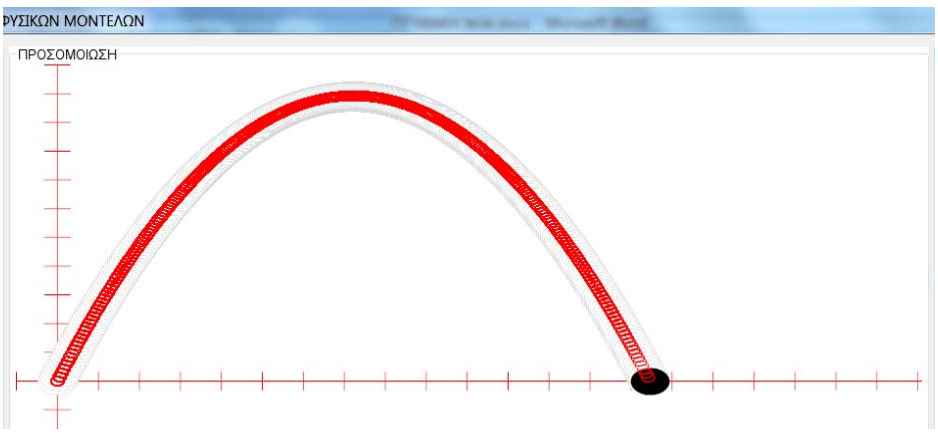
Αρχικές συνθήκες :

Αρχική ταχύτητα 15 m/sec

Γωνία Βολής: 70^o

Αρχικό ύψος: 0

Επιτάχυνση βαρύτητας: 10 m/sec^2



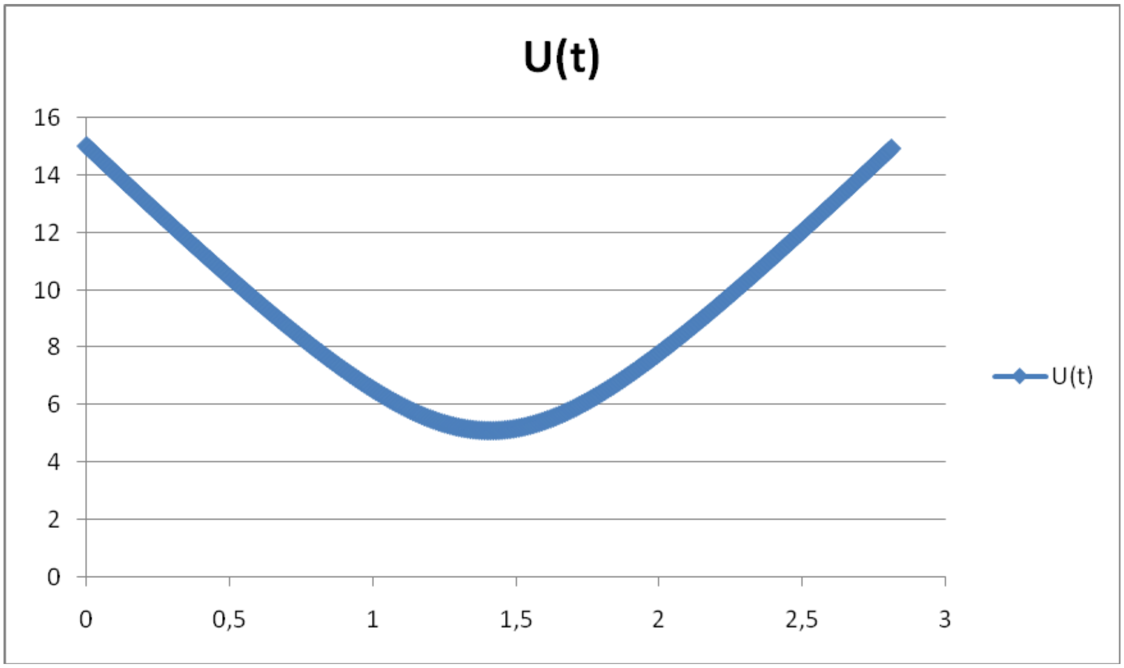
Αριθμητικά αποτελέσματα

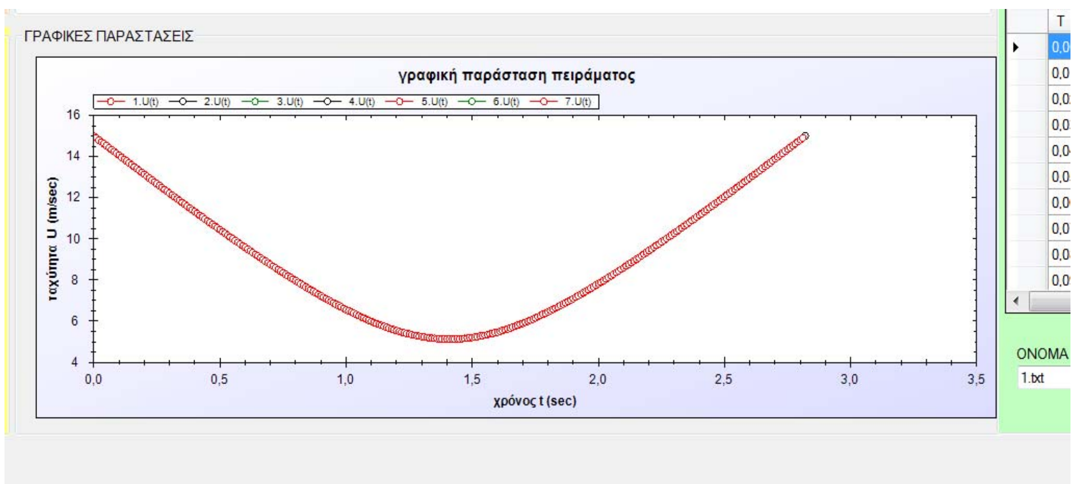
Βεληνεκές: 14,467
Μέγιστο ύψος : 9,934

Μέγιστη Ταχύτητα: 15,009

Αποθηκεύουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα σε αρχείο txt.

Τα εισάγουμε σε πρόγραμμα επεξεργασίας αριθμητικών δεδομένων πχ excel





Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Μειώνοντας σταδιακά στον αλγόριθμο Euler το dt πχ 0.001, άρα και μεγαλύτερη ακρίβεια με υπολογιστικό κόστος, παρατηρούμε ότι με κάθε μείωση τείνει προς τις τιμές που είχε υπολογίσει ο αλγόριθμος Runge Kutta, άρα είναι πολύ πιο αποδοτικός καθώς με μία τάξη μεγέθους λιγότερα βήματα αναδρομικών υπολογισμών έχει όμοια αποτελέσματα με τον Euler.

Επίλογος

Στόχοι που επετεύχθησαν, τομείς που ασχοληθήκαμε.

Οι στόχοι της παρούσας πτυχιακής ήταν η ενασχόληση με ένα αυστηρά επιστημονικό υπολογιστικό ζήτημα πληροφορικής, και η υλοποίηση ενός προγράμματος που θα το αντιμετώπιζε, θέτοντας τις βάσεις αρχικές δομές, ιδέες, αρχές για προγραμματιστές που θέλουν να ασχοληθούν και άλλα ζητήματα φυσικής είτε διαφορετικά είτε με μεγαλύτερη π[περιπλοκότητα.

Κατά την πορεία της ενασχόλησης, ήρθαμε σε επαφή, κατανοήσαμε και εξοικειωθήκαμε κυρίως με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης, υπολογιστικής φυσικής, το προγραμματιστικό περιβάλλον της visual basic .net 2008, όπου υλοποιήσαμε τις παραπάνω μεθόδους και ενσωματώσαμε προχωρημένα αντικείμενα και βιβλιοθήκες.

Βιβλιογραφία.

1. Serway, Physics for Scientists and engineers τόμος I μηχανική, εκδόσεις Λ.Κ. Ρεσβάνη.
2. Υπολογιστική Φυσική, Αντωνίου Ανδριώτη
3. Visual Basic 2008, Michael Halvorson ,εκδόσεις κλειδάριθμος
4. Κλασική και σύγχρονη φυσική, Kenneth Ford, ,εκδόσεις Γ. Πνευματικού
5. Visual Basic ολοκληρωμένες εφαρμογές, Σκλαβενίτης, εκδόσεις Δίαυλος