
Περιστροφικές Ιδιότητες
Συμπυκνώματος Bose-Einstein σε
Αρμονικό Δυναμικό

Βασιλάκης Γιώργος
Επιβλέπων Καθηγητής: Καβουλάκης Γιώργος



Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Ιούνιος 2019

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	Εισαγωγή	1
1.1	Το φαινόμενο της συμπύκνωσης Bose-Einstein	1
1.2	Ιστορική αναδρομή	2
1.3	Κατηγορίες σωματιδίων – μποζόνια και φερμιόνια	3
2	Στοιχειώδη θέματα από την κβαντομηχανική	4
2.1	Η ελεύθερη εξίσωση του Schrödinger	4
2.2	Η εξίσωση του Schrödinger παρουσία εξωτερικού δυναμικού	4
2.3	Η στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης	5
2.4	Ανάπτυγμα μιας κυματοσυνάρτησης στις ιδιοδυναρτήσεις και μέση τιμή	6
3	Επίλυση της εξίσωσης του Schrödinger	9
3.1	Εξίσωση του Schrödinger σε αρμονικό δυναμικό, στις δύο διαστάσεις	9
3.2	Επίλυση της τριβάθμιας διαφορικής εξίσωσης	10
3.3	Ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού δυναμικού	13
3.4	Υπολογισμός του συντελεστή κανονικοποίησης	14
4	Πρόβλημα πολλών σωματιδίων	15
4.1	Ταυτόσημα σωματίδια	15
4.2	Η απαγορευτική αρχή του Pauli	15
4.3	Συστήμα ταυτόσημων και ελεύθερων σωματιδίων	16
5	Συμπύκνωση Bose-Einstein	18
5.1	Ορισμός συμπύκνωσης Bose-Einstein	18
5.2	Συμπύκνωση Bose-Einstein σε ιδανικό αέριο	18
5.3	Συμπεριφορά συμπυκνώματος Bose-Einstein υπό περιστροφή	20
5.4	Προσέγγιση μέσου πεδίου – η εξίσωση Gross-Pitaevskii	21
5.5	Ανάπτυγμα της κυματοσυνάρτησης του συμπυκνώματος στις ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού δυναμικού	22
6	Αποτελέσματα	25
6.1	Ελαχιστοποίηση της ενέργειας υπό δεδομένη γωνιακή στροφορμή	25
6.2	Συμπύκνωση Bose-Einstein υπό δεδομένη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αρμονικού δυναμικού	29
6.3	Πυκνότητα του συμπυκνώματος Bose-Einstein υπό περιστροφή	30

7 Συμπεράσματα	34
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	36
Ελαχιστοποίηση της ενέργειας	36
Υπολογισμός του ολικού ελαχίστου της ενέργειας	41
Υπολογισμός της στροφορμής του συμπυκνώματος υπό δεδομένη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής	45
Υπολογισμός της πυκνότητας του αερίου	47
Αναφορές	58

Abstract

In this thesis, I studied the rotational properties of a two-dimensional Bose-Einstein condensate, which is confined in a harmonic trapping potential. To do this, I started with the single-particle problem, i.e., with the solution of the Schrödinger equation, which led me to the eigenvalues and the corresponding eigenstates.

I then turned to the many-body problem, where obviously the interesting question is the effect of the interatomic interactions. To do this, I used the mean-field approximation, assuming that the many-body state is a product state. The problem thus reduced to the evaluation of the “condensate wavefunction”, i.e., of the order parameter. The order parameter satisfies a nonlinear equation, the Gross-Pitaevskii equation. This equation was solved variationally, where the eigenstates of the harmonic potential were used as basis states.

To take into account the effect of the rotation, I performed this variational calculation imposing the obvious constraint of a fixed atom number, as well as a fixed angular momentum. From this it was straightforward to derive the rotational response of the gas for a fixed angular velocity of the trapping potential.

My results showed that as the angular momentum of the gas increases, or equivalently as the rotational frequency of the trapping potential increases, vortex states enter the gas in a discontinuous way. Eventually, as the angular frequency of the trap approaches the trap frequency, the effective potential vanishes and the number of vortices increases, while the cloud expands radially. Clearly, in this limit the mean-field approximation ceases to be valid, and the cloud enters a correlated regime, however this limit goes beyond the mean-field approximation (and the present study).

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου που μου στάθηκαν με όλους τους τρόπους σε όλη αυτήν την διαδρομή. Τον αδερφό μου που με έπεισε να την ξεκινήσω. Τον Καθηγητή Καβουλάκη Γιώργο, ο οποίος ήταν πάντα διαθέσιμος για οποιοδήποτε πρόβλημα αντιμετώπισα. Ένας εξαιρετικός επιστήμονας και άνθρωπος. Τέλος να ευχαριστήσω όλους εκείνους που ήταν υπομονετικοί μαζί μου και μου συμπαραστάθηκαν σε αυτή την πορεία.

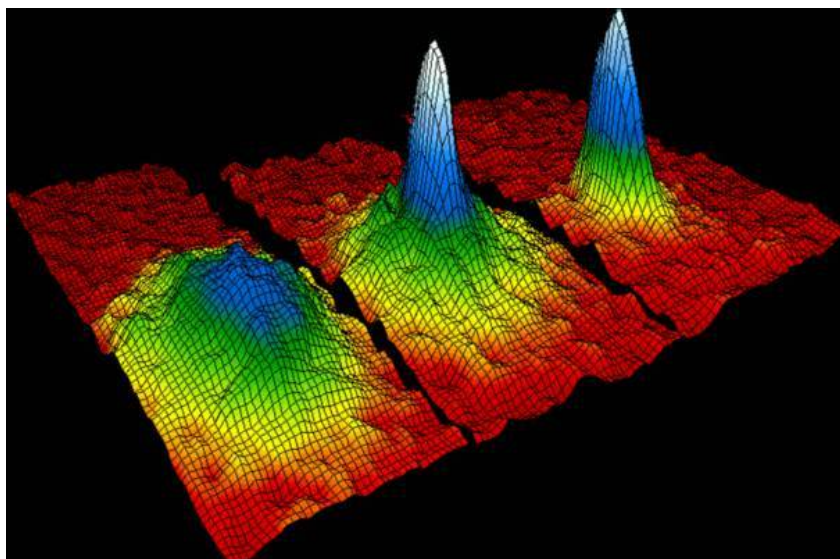
1 Εισαγωγή

1.1 Το φαινόμενο της συμπύκνωσης Bose-Einstein

Το φαινόμενο με το οποίο ασχολήθηκα στην πτυχιακή μου εργασία είναι η “συμπύκνωση Bose-Einstein” [1, 2]. Στο παρόν κεφάλαιο αναφέρομαι σε ορισμένες εισαγωγικές και απαραίτητες έννοιες τις οποίες πρέπει κανείς να γνωρίζει, ώστε να κατανοήσει την φυσική των συμπυκνωμάτων Bose-Einstein (Bose-Einstein condensates).

Το συμπύκνωμα Bose-Einstein είναι η κατάσταση της ύλης που δημιουργείται όταν μποζόνια ψυχθούν σε θερμοκρασίες στο απόλυτο μηδέν (0 K). Απουσία αλληλεπιδράσεων, όλα τα μποζόνια καταλαμβάνουν τη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος. Μια άμεση συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι το ότι κβαντικά φαινόμενα, τα οποία έχουν να κάνουν με τον μικρόκοσμο, εμφανίζονται σε μακροσκοπικό επίπεδο.

Το εν λόγω φαινόμενο εμφανίζεται σε πολλά φυσικά συστήματα (υγρό Ήλιο, υπερ-ρευστά, υπερ-αγωγούς, πυρήνες ατόμων, εξιτόνια, άτομα, κ.λπ.) και έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης για πολλές δεκαετίες.



Σχήμα 1: Πρώτη πειραματική επίτευξη συμπύκνωσης Bose-Einstein σε ατομικό αέριο ρουβιδίου σε ένα αρμονικό δυναμικό [3], το οποίο τα δεσμεύει χωρικά. Το γράφημα δείχνει την κατανομή της ταχύτητας των ατόμων μετά την απελευθέρωσή τους από το αρμονικό δυναμικό.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Η πρόβλεψη για τη δημιουργία ενός συμπυκνώματος Bose-Einstein έγινε πρώτη φορά από τον Ινδό φυσικό Satyendra Nath Bose το 1924, εφαρμόζοντας στατιστικές μεθόδους στην κβαντική θεωρία. Ο Bose προέβλεψε ότι σωματίδια με μηδενική μάζα ηρεμίας σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες οφείλουν να καταλάβουν τη χαμηλότερη κβαντική κατάσταση του συστήματος [1].

Επειδή, όμως, ο Bose δεν μπορούσε να δημοσιεύσει την εργασία του αυτή, την έστειλε στον Einstein, ο οποίος τη μετέφρασε στα γερμανικά και τη δημοσίευσε. Στη συνέχεια ο Einstein γενίκευσε την ιδέα της στατιστικής Bose για σωματίδια με μάζα, γεγονός που οδήγησε στη γνωστή στατιστική Bose-Einstein [2]. Ο Einstein αντιλήφθηκε αμέσως αυτό το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της κατανομής, που επέτρεπε την κατάληψη της χαμηλότερης ενεργειακής κατάστασης από μακροσκοπικό αριθμό ατόμων σε μία χαμηλή, αλλά πεπερασμένη, θερμοκρασία. Ταυτόχρονα, ο ίδιος παρατήρησε το εξής: *“From a certain temperature on, the molecules condense without attractive forces, that is, they accumulate at zero velocity. The theory is pretty but is there also some truth to it?”* Ο προβληματισμός αυτός του Einstein αφορούσε φανερά την αδυναμία της παρατήρησης και επαλήθευσης του φαινομένου, αφού οι θερμοκρασίες που απαιτούνταν ήταν τόσο χαμηλές που πρακτικά, για τα δεδομένα της εποχής, και όχι μόνο, ήταν απαγορευτικές για τα πειράματα.

Ο Albert Einstein κατέδειξε αυτό το αποτέλεσμα, το οποίο φυσιολογικά ονομάστηκε συμπύκνωση Bose-Einstein, ενώ η οικογένεια σωματιδίων με ακέραιο spin που κυριαρχούνται από αυτή την αρχή και γενικότερα από την στατιστική Bose-Einstein, ονομάστηκαν μποζόνια. Παράλληλα με αυτά τα αποτελέσματα, κατά τη διάρκεια 1935-1938, ανακαλύψεις από τους P. Kapitza, J. Allen και Don Misener πάνω στην υπερ-ρευστότητα του ^4He και από τους αδελφούς London στην υπεραγωγιότητα παρουσίασαν μια καινούρια συμπεριφορά της ύλης σε χαμηλές θερμοκρασίες και τα συμπυκνώματα φάνηκαν να παίζουν πρωτεύοντα ρόλο στην ερμηνεία αυτής της συμπεριφοράς.

Χρειάστηκαν 70 χρόνια για να πραγματοποιηθεί η συμπύκνωση Bose-Einstein σε ένα αραιό σύστημα το 1995 από τους Eric Cornell και Carl Wieman στο εργαστήριο NIST του Πανεπιστημίου Boulder στο Κολοράντο, ψύχοντας άτομα Ρουβιδίου στη θερμοκρασία των 170 nanoKelvin [3]. Τέσσερις μήνες αργότερα οι ομάδες των Wolfgang Ketterle και Randy Hulet παρήγαγαν (ανεξάρτητα) συμπυκνώματα [4, 5]. Και οι τρεις ομάδες χρησιμοποίησαν μεθόδους ψύξης με φως laser και εξάτμιση (laser and evaporative cooling) για να πετύχουν τις απαιτούμενες, πολύ χαμηλές, θερμοκρασίες. Οι Eric Cornell και Carl Wieman μοιράστηκαν το βραβείο Νόμπελ 2001 μαζί με τον Wolfgang Ketterle για την ανακάλυψή τους.

1.3 Κατηγορίες σωματιδίων – μποζόνια και φερμιόνια

Τα σωματίδια που συναντούμε στη φύση χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, σύμφωνα με έναν κβαντικό βαθμό ελευθερίας, τον οποίο ονομάζουμε “σπιν”. Εφόσον το σπιν τους είναι ακέραιο λέγονται “μποζόνια”, ενώ όταν είναι ημιακέραιο λέγονται “φερμιόνια”.

Στην περίπτωση των φερμιονίων εκείνα υπόκεινται στην απαγορευτική αρχή του Pauli και στην στατιστική Fermi-Dirac. Με απλά λόγια αυτή η αρχή λέει ότι δύο τέτοια (όμοια) σωματίδια δεν μπορούν να καταλαμβάνουν την ίδια κβαντική κατάσταση του συστήματος. Ένα τυπικό παράδειγμα φερμιονίων είναι τα ηλεκτρόνια γύρω από τον πυρήνα του ατόμου, που καταλαμβάνουν τις διαθέσιμες ενεργειακές στοιβάδες. Η απαγορευτική αρχή του Pauli ευθύνεται για τη σταθερότητα της ύλης. Φερμιόνια είναι, επίσης, τα πρωτόνια, τα νετρόνια, κ.λπ.

Από την άλλη μεριά, τα μποζόνια ακολουθούν τη στατιστική Bose-Einstein. Στη φύση υπάρχουν στοιχειώδη σωματίδια που είναι μποζόνια, αλλά και “σύνθετα”, των οποίων το ολικό σπιν είναι ακέραιο. Στην περίπτωση αυτών των σωματιδίων δεν ισχύει η απαγορευτική αρχή του Pauli και συνεπώς μπορούν να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση.

Σε ό,τι ακολουθεί θα ασχοληθούμε μόνο με μποζόνια, καθώς σε αυτήν την κατηγορία των σωματιδίων έχουμε το φαινόμενο της συμπύκνωσης Bose-Einstein.

2 Στοιχειώδη θέματα από την κβαντομηχανική

2.1 Η ελεύθερη εξίσωση του Schrödinger

Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία, ένα σωματίδιο περιγράφεται από μια “κυματοσυνάρτηση”, η οποία περιέχει όλη την πληροφορία σχετικά με το εν λόγω σωματίδιο. Μαθηματικά η κυματοσυνάρτηση αυτή ικανοποιεί μια κυματική εξίσωση ανάλογη, αλλά όχι ταυτόσημη, με εκείνη των κλασικών κυμάτων. Στην κλασική φυσική ένα κύμα καθορισμένου μήκους κύματος λ και κυματάριθμου $\kappa = 2\pi/\lambda$ περιγράφεται από την συνάρτηση $y = A \sin(2\pi x/\lambda)$ και ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $y'' + \kappa^2 y = 0$. Κατ’ αναλογία με τα κλασικά κύματα, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\psi(x)$ ενός υλικού κύματος με κυματάριθμο $\kappa = 2\pi/\lambda = 2\pi/(h/p) = p/\hbar$ ικανοποιεί τρεις απαιτήσεις:

1. Είναι γραμμική,
2. Έχει σταθερούς συντελεστές,
3. Αναπαράγει τη σωστή σχέση ενέργειας - ορμής $E = p^2/(2m)$.

Ένα ελεύθερο σωματίδιο έχει μόνο κινητική ενέργεια και επομένως η Χαμιλτονιανή του H είναι

$$H = p^2/(2m). \quad (1)$$

Στην κβαντομηχανική, όμως, τα φυσικά μεγέθη εκφράζονται μέσω τελεστών.

Η ορμή κβαντομηχανικά εκφράζεται με τον τελεστή

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2)$$

με αποτέλεσμα η Χαμιλτονιανή να δίδεται τελικά από τη σχέση

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Έχοντας υπόψιν μας, λοιπόν, τις τρεις απαιτήσεις που αναφέραμε παραπάνω, η ελεύθερη εξίσωση του Schrödinger γράφεται τελικά ως

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (4)$$

όπου $\psi(x, t)$ είναι η κυματοσυνάρτηση του υπό εξέταση σωματιδίου.

2.2 Η εξίσωση του Schrödinger παρουσία εξωτερικού δυναμικού

Η γενίκευση της εξίσωσης του Schrödinger για την περίπτωση που το σωματίδιο κινείται μέσα σε ένα δυναμικό $V(x)$ σε μία διάσταση είναι

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (5)$$

όπου ο τελεστής της Χαμιλτονιανής εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad (6)$$

και επομένως η εξίσωση (4) γράφεται ως

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi. \quad (7)$$

Για τρισδιάστατη κίνηση η γενίκευση είναι προφανής. Αρκεί κανείς να αντικαταστήσει τη Χαμιλτονιανή με την έκφρασή της στον τρισδιάστατο χώρο. Έτσι, ο τελεστής της Χαμιλτονιανής θα είναι

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Συνεπώς, η εξίσωση του Schrödinger στις τρεις διαστάσεις δίδεται από τη σχέση

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi. \quad (9)$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι τα προηγούμενα δεν αποτελούν απόδειξη της εξίσωσης Schrödinger, η οποία, όπως και κάθε άλλος θεμελιώδης φυσικός νόμος, δεν αποδεικνύεται [6]. Από την άλλη μεριά η μορφή της δεν είναι τυχαία, αλλά είναι μία εύλογη εκλογή που μπορεί να κάνει κάποιος με βάση τα εμπειρικά δεδομένα.

2.3 Η στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η κυματοσυνάρτηση είναι μια συνάρτηση η οποία περιγράφει την κατάσταση στην οποία βρίσκεται ένα σωματίδιο. Η εξίσωση του Schrödinger έχει μιγαδικούς συντελεστές, οπότε η λύση της είναι εν γένει μια μιγαδική συνάρτηση. Παραδείγματος χάριν, ένα επίπεδο κύμα $\psi = \exp\{i(px - Et)\} / \hbar$ στη μιγαδική του μορφή είναι λύση της ελεύθερης εξίσωσης Schrödinger, ενώ το πραγματικό μέρος από μόνο του δεν είναι.

Η ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1926 από τον M. Born, και ολοκληρώθηκε μέσα στο 1927 από τους Born, Bohr, Heisenberg και Jordan. Σύμφωνα με αυτήν την “στατιστική” ερμηνεία, η κυματοσυνάρτηση δεν αντιπροσωπεύει ένα φυσικά παρατηρήσιμο κλασικό κύμα, αλλά ένα “κύμα πιθανότητας”. Το τετράγωνο της απόλυτης τιμής της κυματοσυνάρτησης μας δίνει την πυκνότητα πιθανότητας να βρούμε το σωματίδιο σε μία περιοχή του χώρου. Κατά την στατιστική ερμηνεία η πυκνότητα πιθανότητας $P(x)$ θα είναι, συνεπώς,

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x) \psi(x). \quad (10)$$

Η πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο κάπου μεταξύ x και $x + dx$ είναι

$$P(x) dx = |\psi(x)|^2 dx. \quad (11)$$

Η ολική πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο οπουδήποτε στο πλήρες διάστημα $-\infty < x < +\infty$ δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx. \quad (12)$$

Για να έχει νόημα η στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης πρέπει αυτή η ολική πιθανότητα να είναι ίση με την μονάδα, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (13)$$

Η τελευταία εξίσωση ονομάζεται συνθήκη κανονικοποίησης και μία κυματοσυνάρτηση που την ικανοποιεί ονομάζεται κανονικοποιημένη.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εκλογή της πυκνότητας πιθανότητας, εξίσωση (10), με την συγκεκριμένη μορφή δεν είναι τυχαία, αλλά είναι κατασκευασμένη έτσι ώστε να ικανοποιεί τη φυσική απαίτηση η πιθανότητα να διατηρείται. Αυτό σημαίνει ότι η ολική πιθανότητα πρέπει να είναι ανεξάρτητη του χρόνου ώστε, αν για μία ορισμένη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε κανονικοποιήσει την κυματοσυνάρτηση να αντιστοιχεί σε ολική πιθανότητα ίση με τη μονάδα, αυτή η ιδιότητα να διατηρείται με το χρόνο.

2.4 Ανάπτυγμα μιας κυματοσυνάρτησης στις ιδιοδυναρτήσεις και μέση τιμή

Κάθε κυματοσυνάρτηση ψ μπορεί πάντα να αναπτυχθεί σε μία πλήρη βάση συναρτήσεων. Μπορούμε, δηλαδή, να γράψουμε

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n. \quad (14)$$

Επίσης δύο ιδιοσυναρτήσεις ψ_1 και ψ_2 , που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές α_1 και α_2 είναι ορθογώνιες που σημαίνει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \psi_2 dx = 0. \quad (15)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (14) με ψ_k^* και ολοκληρώσουμε παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^* \psi dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^* \psi_n dx. \quad (16)$$

Επειδή, όμως, οι ιδιοσυναρτήσεις ψ_k και ψ_n είναι ορθογώνιες, από το άθροισμα του δευτέρου μέλους της εξίσωσης (16) επιζεί μόνο ο όρος $n = k$, οπότε θα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^* \psi dx = c_k \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^* \psi_k dx = c_k. \quad (17)$$

Οι συντελεστές στο ανάπτυγμα της ψ σε ιδιοσυναρτήσεις δίδονται, λοιπόν, από τη σχέση

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi dx. \quad (18)$$

Οι συντελεστές αυτοί μας λένε το πλάτος της αντίστοιχης συνάρτησης βάσης στην ψ . Στην κβαντική περιγραφή η μέση τιμή ενός φυσικού μεγέθους A δίδεται από τη σχέση

$$\langle A \rangle = \int \psi^* (A\psi) dx. \quad (19)$$

Αντικαθιστώντας την τυχούσα κυματοσυνάρτηση ψ με μία σειρά ιδιοσυναρτήσεων του εξεταζόμενου μεγέθους A έχουμε

$$\langle A \rangle = \int \left(\sum_k c_k^* \psi_k^* \right) \left(A \sum_n c_n \psi_n \right) = \sum_{n,k} c_k^* c_n \int \psi_k^* (A\psi_n) dx. \quad (20)$$

Η εξίσωση ιδιοτιμών ενός φυσικού μεγέθους A έχει τη μορφή

$$A\psi_n = \alpha_n \psi_n, \quad (21)$$

όπου α_n η αντίστοιχη ιδιοτιμή του φυσικού μεγέθους A . Επιπλέον οι κυματοσυναρτήσεις είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και κανονικοποιημένες. Αυτή η ιδιότητα εκφράζεται μαθηματικά ως

$$\int \psi_k^* \psi_n dx = \delta_{k,n}, \quad (22)$$

όπου

$$\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n, \end{cases}$$

το λεγόμενο σύμβολο του Kronecker, ή και δέλτα του Kronecker. Επομένως, για τη μέση τιμή του φυσικού μεγέθους A θα έχουμε

$$\langle A \rangle = \sum_{k,n} c_k^* c_n \alpha_n \int \psi_k^* \psi_n dx = \sum_{k,n} c_k^* c_n \alpha_n \delta_{kn} \Rightarrow \langle A \rangle = \sum_n |c_n|^2 \alpha_n. \quad (23)$$

Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή ενός στατιστικού μεγέθους ισούται με

$$\langle A \rangle = \sum_n \alpha_n P_n. \quad (24)$$

Οι δύο αυτές εκφράσεις είναι πανομοιότυπες και επομένως αυτό που μπορούμε να πούμε είναι ότι αν η κατάσταση του σωματιδίου σε μια ορισμένη στιγμή περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση ψ , τότε η πιθανότητα εμφάνισης της ιδιοτιμής α_n είναι

$$P_n = |c_n|^2 \quad (25)$$

και θα πρέπει επίσης να ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1, \quad (26)$$

ώστε να ικανοποιείται η απαίτηση το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλα τα ενδεχόμενα αποτελέσματα να είναι ίσο με την μονάδα.

3 Επίλυση της εξίσωσης του Schrödinger

3.1 Εξίσωση του Schrödinger σε αρμονικό δυναμικό, στις δύο διαστάσεις

Ένα ερώτημα το οποίο θα μας απασχολήσει πιο κάτω είναι οι ιδιοσυναρτήσεις της εξίσωσης του Schrödinger σε ένα αρμονικό δυναμικό στις δύο διαστάσεις, $V = m\omega^2\rho^2/2$, όπου ρ είναι η ακτινική μεταβλητή σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η Χαμιλτονιανή είναι

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2. \quad (27)$$

Χάρην ευκολίας θέτουμε $\hbar = m = \omega = 1$, οπότε η Χαμιλτονιανή του συστήματος γίνεται

$$H = \frac{1}{2}(-\nabla^2 + \rho^2), \quad (28)$$

όπου ∇^2 είναι ο τελεστής Laplace, ο οποίος σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \quad (29)$$

Η εξίσωση ιδιοτιμών,

$$H\psi = E\psi, \quad (30)$$

λόγω των εξισώσεων (28) και (29) παίρνει τη μορφή

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \rho^2\right)\psi = E\psi. \quad (31)$$

Για να λύσουμε αυτή την διαφορική εξίσωση θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών [7]. Υποθέτοντας ότι $\psi(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$ και αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \rho^2\right)R\Theta &= ER\Theta, \\ -\rho^2\frac{R''}{R} - \rho\frac{R'}{R} + \rho^2(\rho^2 - 2E) &= \frac{\Theta''}{\Theta}. \end{aligned}$$

Για να είναι τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης ίσα, αφού πρόκειται για συναρτήσεις διαφορετικών μεταβλητών, πρέπει και τα δύο να είναι ίσα με μία (κοινή) σταθερά, έστω $-m^2$, όπου m ακέραιος. Ο τρόπος που εκλέξαμε αυτήν τη σταθερά δεν είναι τυχαίος, καθότι πρέπει να εξασφαλισθεί η περιοδικότητα της συνάρτησης $\Theta(\theta)$, $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ (περισσότερα για αυτό ακολουθούν παρακάτω). Έτσι, τελικά καταλήγουμε στις ακόλουθες δύο διαφορικές εξισώσεις

$$-\rho^2\frac{R''}{R} - \rho\frac{R'}{R} + \rho^2(\rho^2 - 2E) = -m^2 \Rightarrow R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{m^2}{\rho^2}R + (\rho^2 - 2E)R = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -m^2 \Rightarrow \Theta'' + m^2\Theta = 0. \quad (33)$$

Η λύση της εξίσωσης (33) είναι

$$\Theta(\theta) \sim e^{im\theta} \quad (34)$$

και πράγματι έχει την απαιτούμενη περιοδικότητα $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, εφόσον το m είναι ακέραιος. Όσον αφορά την εξίσωση (32), για να έχουμε φυσικά αποδεκτές λύσεις, θα πρέπει όταν το $\rho \rightarrow \infty$ η κυματοσυνάρτηση να τείνει στο μηδέν. Ψάχνοντας λύσεις για πολύ μεγάλα ρ , η εξίσωση (32) παίρνει τη μορφή

$$R'' + \rho^2 R = 0, \quad (35)$$

αφού $R'/\rho \rightarrow 0$, $m^2 R/\rho^2 \rightarrow 0$ και $\rho^2 \gg 2E$. Για να εξασφαλίσουμε αυτή την συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησης για μεγάλα ρ έστω ότι αυτή είναι της μορφής

$$R(\rho) \sim e^{-\lambda\rho^\kappa}. \quad (36)$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lambda\kappa(\kappa-1)\rho^{\kappa-2}e^{-\lambda\rho^\kappa} - \lambda^2\kappa^2\rho^{2(\kappa-1)}e^{-\lambda\rho^\kappa} + \rho^2e^{-\lambda\rho^\kappa} &= 0 \Rightarrow \\ \lambda\kappa(\kappa-1)\rho^{\kappa-2} - \lambda^2\kappa^2\rho^{2(\kappa-1)} + \rho^2 &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης είναι μικρός σε σχέση με τους υπόλοιπους οπότε τον αγνοούμε και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$-\lambda^2\kappa^2\rho^{2(\kappa-1)} + \rho^2 = 0, \quad (38)$$

η οποία δίδει για τα κ και λ

$$\kappa = 2, \quad (39)$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}. \quad (40)$$

Για το λ κρατούμε την αρνητική λύση για να εξασφαλίζεται ο μηδενισμός της κυματοσυνάρτησης στο $\pm\infty$. Άρα, τελικά

$$R \sim e^{-\rho^2/2}. \quad (41)$$

3.2 Επίλυση της τριβάθμιας διαφορικής εξίσωσης

3.2.1 Μετατροπή της τριβάθμιας εξίσωσης σε διβάθμια

Η εξίσωση (32) της προηγούμενης παραγράφου είναι μια τριβάθμια διαφορική εξίσωση. Είναι γνωστό [8] ότι σε αναδρομικές σχέσεις με έναν ή δύο όρους οδηγούν μόνο οι μονοβάθμιες και οι

διβάθμιες εξισώσεις αντίστοιχα, και επομένως μόνο αυτές είναι ακριβώς επιλύσιμες με τη μέθοδο της ανάπτυξης της λύσης σε δυναμοσειρά. Για να μετατρέψουμε την τριβάθμια διαφορική εξίσωση (32) της προηγούμενης παραγράφου σε διβάθμια θέτουμε

$$R = e^{-\rho^2/2}Y. \quad (42)$$

Αντικαθιστώντας στην (32) έχουμε

$$-\rho^2 Y'' + (2\rho^3 - \rho)Y' + (2\rho^2 + m^2 - 2\rho^2 E)Y = 0. \quad (43)$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι διβάθμια. Το βήμα της είναι $l = 2$ και έχει μεγιστοβάθμιο όρο $d_2 = 2$ και ελαχιστοβάθμιο $d_1 = 0$.

3.2.2 Αναδρομική σχέση των συντελεστών

Θα αναζητήσουμε την λύση της εξίσωσης (43) υπό τη μορφή δυναμοσειράς [8], η οποία, όταν οι συντελεστές της είναι γνωστοί, αποτελεί την πληρέστερη δυνατή αναπαράσταση που μπορεί να έχει κανείς για μία μαθηματική συνάρτηση. Θα γράψουμε τη λύση της εξίσωσης στη μορφή

$$Y(\rho) = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \rho^k. \quad (44)$$

Ο εκθέτης s στην εξίσωση (44) ονομάζεται εναρκτήρια δύναμη. Η εναρκτήρια δύναμη θα πρέπει να είναι μια λύση της εξίσωσης στην περιοχή των μικρών ρ . Για να την υπολογίσουμε κάνουμε την αντικατάσταση $Y \sim \rho^s$ στην εξίσωση (43) κρατώντας μόνο τους ελαχιστοβάθμιους όρους. Αυτό που προκύπτει είναι

$$\begin{aligned} -\rho^2 s(s-1)\rho^{s-2} - \rho s\rho^{s-1} + m^2\rho^s &= 0 \Rightarrow \\ -s(s-1)\rho^s - s\rho^s + m^2\rho^s &= 0 \Rightarrow \\ -s^2 + m^2 &= 0 \Rightarrow \\ s &= |m|. \end{aligned} \quad (45)$$

Γνωρίζοντας τις δυνατές τιμές του s μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές της δυναμοσειράς.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (44) στην (43) έχουμε

$$\begin{aligned} & -\rho^2 \sum_k \alpha_k (k+s)(k+s+1)\rho^{k+s-2} + (2\rho^3 - \rho) \sum_k \alpha_k (k+s)\rho^{(k+s-1)} + \\ & + (2\rho^2 + m^2 - 2E\rho^2) \sum_k \alpha_k \rho^{(k+s)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -\sum_k \alpha_k (k+s)(k+s+1)\rho^{k+s} + 2\sum_k \alpha_k (k+s)\rho^{(k+s+2)} - \sum_k \alpha_k (k+s)\rho^{(k+s)} + \\ & + 2\sum_k \alpha_k \rho^{(k+s+2)} + m^2 \sum_k \alpha_k \rho^{(k+s)} - 2E \sum_k \alpha_k \rho^{(k+s+2)} = 0. \end{aligned}$$

Μετατοπίζοντας τον δείκτη k κατά 2, ($k \rightarrow k + 2$), έχουμε

$$\begin{aligned} & - a_{k+2}(k+s+2)(k+s+1)\rho^{(k+s+2)} + 2a_k(k+s)\rho^{(k+s+2)} - a_{k+2}(k+s+2)\rho^{(k+s+2)} + \\ & + 2a_k\rho^{(k+s+2)} + m^2a_{k+2}\rho^{(k+s+2)} - 2Ea_k\rho^{(k+s+2)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & a_{k+2}[(k+s)(k+s+4) - (m-2)(m+2)] = 2a_k(k+s-E+1). \end{aligned}$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, σε μία αναδρομική σχέση δύο όρων με βήμα $l = 2$, η οποία είναι της μορφής

$$a_{k+2} = \frac{2(k+s-E+1)}{(k+s)(k+s+4) - (m-2)(m+2)} a_k. \quad (46)$$

3.2.3 Συνθήκη τερματισμού ως συνθήκη κβάντωσης

Η διβάθμια διαφορική εξίσωση πρέπει να έχει τερματιζόμενες λύσεις, ώστε να εξασφαλισθεί ο μη-απειρισμός των ιδιοσυναρτήσεων για μεγάλες τιμές του ρ . Για να γίνει αυτό θα πρέπει η δύναμη τερματισμού να απέχει από την εναρκτήρια κατά έναν ακέραιο αριθμό βημάτων. Πρέπει, δηλαδή, να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\nu = s + nl, \quad (47)$$

όπου ν η δύναμη τερματισμού, s η εναρκτήρια δύναμη και l το βήμα της διαφορικής εξίσωσης.

Η δύναμη τερματισμού πρέπει επίσης να ικανοποιεί την μονοβάθμια εξίσωση που σχηματίζουν οι μεγιστοβάθμιοι όροι της εξίσωσης (32). Μεγιστοβάθμιοι όροι είναι οι $2\rho^3 Y'$, $2\rho^2 Y$ και $-E\rho^2 Y$. Έτσι, αν μία λύση έχει ως δύναμη τερματισμού την ρ^ν , τότε

$$\begin{aligned} 2\rho^3 \nu \rho^{(\nu-1)} + 2\rho^2 \rho^\nu - 2E\rho^2 \rho^\nu &= 0 \Rightarrow \\ 2\nu \rho^{(\nu+2)} + 2\rho^{(\nu+2)} - 2E\rho^{(\nu+2)} &= 0 \Rightarrow \\ \nu &= E - 1. \end{aligned} \quad (48)$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι η δύναμη έναρξης και το βήμα της διαφορικής εξίσωσης είναι $s = |m|$ και $l = 2$, αντίστοιχα. Όποτε, αντικαθιστώντας την (48) στην (47) παίρνουμε

$$E = 2n + |m| + 1. \quad (49)$$

Βλέπουμε ότι η συνθήκη ύπαρξης τερματιζόμενων λύσεων δρα ως μια συνθήκη κβάντωσης που επιλέγει μια διάκριτη ακολουθία τιμών. Αν κάποιος παρατηρήσει την εξίσωση (46) μπορεί να αντιληφθεί ότι ο όρος a_{k+2} γίνεται μηδέν και από εκεί και πέρα συνεχίζει να είναι μηδέν όταν ο αριθμητής του κλάσματος γίνει και αυτός μηδέν. Συνεπώς,

$$2(k+s-E+1) = 0 \Rightarrow E = k + s + 1. \quad (50)$$

Ισχύει, όμως, ότι $k = nl$ και $s = |m|$. Κάνοντας την αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση το αποτέλεσμα θα είναι

$$E = 2n + |m| + 1. \quad (51)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (51) μας δίνει τις ιδιοτιμές της ενέργειας ενός σωματιδίου, το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση ενός αρμονικού δυναμικού.

3.3 Ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού δυναμικού

Στην παράγραφο (4.1), υποθέσαμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις είναι της μορφής

$$\psi_{nm}(\rho, \theta) = R_{nm}(\rho)\Theta_m(\theta) \quad (52)$$

και συνεπώς

$$\psi_{nm}(\rho, \theta) = c_{nm}R_{nm}(\rho) e^{im\theta}. \quad (53)$$

Το γεγονός ότι έχουμε δύο κβαντικούς αριθμούς οφείλεται στο ότι έχουμε ένα πρόβλημα δυο διαστάσεων. Ο κβαντικός αριθμός n αντιστοιχεί στις διεγέρσεις στην ακτινική κατεύθυνση, ενώ ο m στη γωνιακή στροφορμή.

Για τις ανάγκες αυτής της πτυχιακής θα ασχοληθούμε μόνο με την θεμελιώδη ενεργειακή κατάσταση ως προς τις ακτινικές λύσεις, οπότε $n = 0$ και από δω και στο εξής ο κβαντικός αριθμός n τίθεται ίσος με το μηδέν (και παραλείπεται), ενώ οι ιδιοτιμές της ενέργειας θα δίνονται από την σχέση $E = |m| + 1$. Ο συντελεστής c_m , όπως θα δούμε παρακάτω, υπολογίζεται από την συνθήκη κανονικοποίησης

$$\int |\psi_m(\rho, \theta)|^2 d^2\rho = 1 \quad (54)$$

και εκφράζει την φυσική απαίτηση να έχουμε ολική πιθανότητα θέσης ίση με μονάδα. Επειδή $E = |m| + 1$ και $\nu = E - 1$ τελικά προκύπτει ότι

$$\nu = |m| \quad (55)$$

και επομένως η κυματοσυνάρτηση γράφεται τελικά ως

$$\psi_m(\rho, \theta) = c_m \rho^m e^{-\rho^2/2} e^{im\theta}. \quad (56)$$

3.4 Υπολογισμός του συντελεστή κανονικοποίησης

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης,

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} |\psi_m(\rho, \theta)|^2 \rho \, d\rho \, d\theta = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \psi_m^*(\rho, \theta) \psi_m(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta = 1.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} c_m^2 \rho^{2m} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = 1 \Rightarrow \frac{c_m^2}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho^{2m} e^{-\rho^2} d\rho^2 d\theta = 1$$

και θέτοντας $u = \rho^2$, καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα

$$\frac{c_m^2}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} u^m e^{-u} du \, d\theta = 1 \Rightarrow c_m^2 \pi \int_0^{\infty} u^m e^{-u} du = 1. \quad (57)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι της μορφής

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-\lambda x} dx = \frac{m!}{\lambda^{(m+1)}}, \quad (58)$$

οπότε τελικά έχουμε

$$c_m^2 \pi \frac{m!}{\lambda^{(m+1)}} = 1. \quad (59)$$

Αφού στη δική μας περίπτωση $\lambda = 1$, συνεπώς

$$|c_m| = \frac{1}{\sqrt{\pi m!}}. \quad (60)$$

Επομένως, η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση έχει τη μορφή

$$\psi_m(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi m!}} \rho^m e^{-\rho^2/2} e^{im\theta}. \quad (61)$$

Η εξίσωση (61) δίνει την αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση ενός σωματιδίου, το οποίο είναι υπό την επίδραση ενός αρμονικού δυναμικού.

4 Πρόβλημα πολλών σωματιδίων

4.1 Ταυτόσημα σωματίδια

Ένα χβαντικό σύστημα N σωματιδίων περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση N μεταβλητών $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. Η μελέτη τέτοιων χβαντομηχανικών προβλημάτων ξεκινάει από το γεγονός ότι συστήματα ταυτόσημων σωματιδίων περιγράφονται από συμμετρικές και αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις. Για να είμαστε ακριβείς, με τη συμμετρική κυματοσυνάρτηση εννοούμε ότι αυτή παραμένει αναλλοίωτη στην εναλλαγή δύο οποιωνδήποτε από τις μεταβλητές της, ενώ αντισυμμετρική σημαίνει πως αλλάζει πρόσημο.

Ταυτόσημα ονομάζονται όλα τα σωματίδια που έχουν ίδιες φυσικές ιδιότητες, όπως π.χ., μάζα, φορτίο, σπιν και άλλα. Στην χβαντική θεωρία η διάκριση των ταυτόσημων σωματιδίων είναι αδύνατη. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να τα περιγράψουμε ατομικά ούτε και να παρακολουθήσουμε την ιδιαίτερη κίνηση του καθενός. Τα ταυτόσημα σωματίδια που ανήκουν στο ίδιο φυσικό σύστημα περιγράφονται σαν ένα ενιαίο σύνολο. Αυτή είναι η αρχή της μη διακρισιμότητας των ταυτόσημων σωματιδίων.

4.2 Η απαγορευτική αρχή του Pauli

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ταυτόσημα σωματίδια. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αυτό το σύστημα θα πρέπει να περιγραφεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μην παραβιάζεται η αρχή της μη-διακρισιμότητας των ταυτόσημων σωματιδίων. Ένα τέτοιο σύστημα περιγράφεται από μία κυματοσυνάρτηση $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, η οποία εξαρτάται από τις δύο μεταβλητές \mathbf{r}_1 και \mathbf{r}_2 . Η έκφραση

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \quad (62)$$

μας δίνει την πυκνότητα πιθανότητας να βρούμε το σωματίδιο 1 στη γειτονιά του σημείου \mathbf{r}_1 και το σωματίδιο 2 στη γειτονιά του σημείου \mathbf{r}_2 . Αφού, όμως, τα σωματίδια είναι εξ' υποθέσεως ταυτόσημα, η πυκνότητα πιθανότητας (62) δεν πρέπει να εξαρτάται από τον τρόπο αρίθμησης τους. Το αποτέλεσμα, δηλαδή, θα πρέπει να είναι αναλλοίωτο στην εναλλαγή $1 \leftrightarrow 2$. Επιβάλλοντας αυτή την απαίτηση στην (62) παίρνουμε

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = P(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \rightarrow |\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = |\Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2, \quad (63)$$

δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας πρέπει να είναι μία συμμετρική συνάρτηση των μεταβλητών θέσης των δύο σωματιδίων. Δύο περιπτώσεις με τις οποίες η (63) ικανοποιείται αυτόματα, είναι οι

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \quad (64)$$

και

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (65)$$

δηλαδή όταν η κυματοσυνάρτηση είναι συμμετρική η αντισυμμετρική.

Καταλήγουμε, συνεπώς, στο συμπέρασμα ότι όλα τα συστήματα ταυτόσημων σωματιδίων περιγράφονται είτε από συμμετρικές, είτε από αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις [9]. Οι πρώτες περιγράφουν μποζόνια και οι δεύτερες φερμιόνια.

4.3 Σύστημα ταυτόσημων και ελεύθερων σωματιδίων

Τα σωματίδια ενός συστήματος ονομάζονται “ελεύθερα” όταν δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Σε αυτή την περίπτωση το κάθε σωματίδιο κινείται εντελώς ανεξάρτητα από τα άλλα και η ολική κυματοσυνάρτηση για μποζονικά άτομα $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ θα είναι το γινόμενο των μερικών κυματοσυναρτήσεων. Δηλαδή,

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{N=1}^N \psi(\mathbf{r}_N). \quad (66)$$

Επίσης, η ολική ενέργεια του συστήματος θα ισούται με το άθροισμα των ενεργειών των σωματιδίων του. Δηλαδή,

$$E = \sum_{N=1}^N E_N. \quad (67)$$

Με άλλα λόγια οι (66) και (67) δίνουν τις ενεργειακές ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοτιμές του συστήματος πολλών σωματιδίων, σαν γινόμενο και άθροισμα των αντίστοιχων ποσοτήτων του μονοσωματιδιακού προβλήματος. Η ολική Χαμιλτονιανή του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} H &= \sum_{N=1}^N \left(\frac{p_N^2}{2m} + V(\mathbf{r}_N) \right) \\ &= \sum_{N=1}^N H_N, \end{aligned} \quad (68)$$

θα ισούται, δηλαδή, με το άθροισμα N ανεξάρτητων όρων, καθένας από τους οποίους αντιπροσωπεύει την Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου. Οι κυματοσυναρτήσεις $\psi_1(\mathbf{r}_1), \dots, \psi_N(\mathbf{r}_N)$ που εμφανίζονται στο δεύτερο μέλος της (66) ικανοποιούν τις μονοσωματιδιακές εξισώσεις ιδιοτιμών

$$H_N \psi_N = E_N \psi_N. \quad (69)$$

Αν δράσουμε τώρα στα δύο μέλη της (67) με την ολική Χαμιλτονιανή (68) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
H\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i) &= \sum_{i=1}^N H_i \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i) = H_1 \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i) + \dots + H_i \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i) & (70) \\
&= H_1 \psi(\mathbf{r}_1) \prod_{i=2}^N \psi(\mathbf{r}_i) + \dots + H_N \psi(\mathbf{r}_N) \prod_{i=1}^{N-1} \psi(\mathbf{r}_i) \\
&= E_1 \psi(\mathbf{r}_1) \prod_{i=2}^N \psi(\mathbf{r}_i) + \dots + E_N \psi(\mathbf{r}_N) \prod_{i=1}^{N-1} \psi(\mathbf{r}_i) \\
&= \sum_{i=1}^N E_i \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i) \\
&= E\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). & (71)
\end{aligned}$$

Το βασικό σημείο σε αυτή την διαδοχή πράξεων είναι ότι κάθε μία από τις μονοσωματιδιακές Χαμιλτονιανές H_1, \dots, H_N δρα μόνο στον αντίστοιχο όρο του γινομένου των κυματοσυναρτήσεων.

Το συμπέρασμα είναι ότι για να βρούμε τις ενεργειακές ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις ενός συστήματος ανεξάρτητων σωματιδίων δεν έχουμε παρά να λύσουμε την μονοσωματιδιακή εξίσωση του Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (72)$$

Η ολική ιδιοσυνάρτηση θα είναι τότε το γινόμενο των μερικών ιδιοσυναρτήσεων και η ολική ιδιοτιμή το άθροισμα των μερικών ιδιοτιμών [9].

5 Συμπύκνωση Bose-Einstein

5.1 Ορισμός συμπύκνωσης Bose-Einstein

Οι Penrose και Onsager [10] έδωσαν ένα αυστηρό κριτήριο για την ύπαρξη ενός συμπυκνώματος Bose-Einstein. Ξεκινώντας από την κυματοσυνάρτηση πολλών σωματιδίων $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ ενός συστήματος, κάποιος μπορεί να υπολογίσει τις ιδιοτιμές του μονοσωματιδιακού πίνακα πυκνότητας,

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = N \int d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N \Psi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (73)$$

Δεδομένου ότι ο πίνακας $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ είναι Ερμιτιανός, είναι πάντα δυνατόν να βρεθεί μια πλήρης ορθοκανονική βάση μονοσωματιδιακών ιδιοσυναρτήσεων $\psi_i(\mathbf{r})$ τέτοιες ώστε

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i n_i \psi_i^*(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}'). \quad (74)$$

Αν καμία από τις ιδιοτιμές n_i δεν είναι της τάξης του αριθμού σωματιδίων N , τότε δεν έχουμε συμπύκνωση Bose-Einstein. Αν μόνο μία από τις ιδιοτιμές, ας πούμε η n_0 , είναι της τάξης N τότε έχουμε απλή συμπύκνωση Bose-Einstein, με το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\psi_0(\mathbf{r})$ να είναι η κυματοσυνάρτηση του συμπυκνώματος,

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = n_0 \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}') + \sum_{i \neq 0} n_i \psi_i^*(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}'). \quad (75)$$

Τέλος, αν παραπάνω από μία ιδιοτιμή είναι της τάξης του αριθμού των σωματιδίων, τότε το συμπύκνωμα λέγεται “fragmented”.

5.2 Συμπύκνωση Bose-Einstein σε ιδανικό αέριο

Θα ξεκινήσουμε με ένα άπειρο σύστημα, στις τρεις διαστάσεις.

Από την κατανομή Bose-Einstein

$$f(E, \mu, T) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}, \quad (76)$$

όπου E είναι η ενέργεια, μ το χημικό δυναμικό και T η θερμοκρασία έπεται ότι σε έναν όγκο V η πυκνότητα των καταστάσεων $g(E)$ δίδεται από τη σχέση

$$g(E) = \frac{VM^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} E^{1/2}, \quad (77)$$

ενώ ο αριθμός των σωματιδίων στις διεγερμένες καταστάσεις είναι

$$N_{\text{exc}} = \int_0^\infty g(E) f(E, \mu = 0) dE = \frac{VM^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_0^\infty \frac{E^{1/2}}{e^{E/k_B T} - 1} dE. \quad (78)$$

Η αντίστοιχη πυκνότητα είναι, τότε,

$$n_{\text{exc}} = \zeta(3/2) \left(\frac{MK_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}, \quad (79)$$

όπου $\zeta(x)$ η συνάρτηση ζήτα. Το παραπάνω είναι το γνωστό αποτέλεσμα που καθορίζει το όριο στο οποίο έχουμε συμπύκνωση Bose-Einstein ($n_{\text{exc}} \propto T^{3/2}$). Η συνθήκη αυτή για συμπύκνωση Bose-Einstein είναι ισοδύναμη με την απαίτηση ώστε το μήκος κύματος de-Broglie $\lambda = 2\pi\hbar\sqrt{2Mk_B T}$ να είναι συγκρίσιμο με τη μέση απόσταση μεταξύ των ατόμων. Αν θέσουμε στην τελευταία εξίσωση $n_{\text{exc}} = n_0$ μπορούμε να πάρουμε την κρίσιμη θερμοκρασία T_c κάτω από την οποία ένας μακροσκοπικός αριθμός σωματιδίων εποικίζου τη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος.

Τελικά, για $T < T_c$, ο αριθμός των σωματιδίων του συμπυκνώματος $N_0(T)$ τα οποία βρίσκονται στην θεμελιώδη κατάσταση δίδεται από την σχέση

$$N_0(T) = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]. \quad (80)$$

5.2.1 Συμπύκνωση Bose-Einstein σε μικρότερο αριθμό διαστάσεων

Για διαστάσεις μικρότερες των τριών, η πυκνότητα των καταστάσεων είναι $g(E) \propto E^{(d/2)-1}$, όπου d ο αριθμός των διαστάσεων.

Μια πολύ σημαντική συνέπεια αυτού για $d = 2$ και $d = 1$ είναι ότι το ολοκλήρωμα της προηγούμενης παραγράφου είναι αποκλίνον και δεν επιδέχεται λύσης. Αυτό είναι το γνωστό αποτέλεσμα ότι δεν υπάρχει “πραγματικό” συμπύκνωμα Bose-Einstein σε δύο ή μία διαστάσεις για πεπερασμένες θερμοκρασίες, στο θερμοδυναμικό όριο.

5.2.2 Συμπύκνωση Bose-Einstein σε ένα πεπερασμένο σύστημα

Σε ένα σύστημα με πεπερασμένο αριθμό ατόμων, τα παραπάνω συμπεράσματα δεν ευσταθούν για μικρότερο αριθμό διαστάσεων [11, 12, 13]. Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι η αλλαγή φάσης πραγματοποιείται μόνο στο θερμοδυναμικό όριο.

Η βασική παρατήρηση που κάποιος πρέπει να κάνει είναι ότι σε ένα σύστημα με πεπερασμένο αριθμό σωματιδίων και για κάποιον αριθμό διεγερμένων καταστάσεων E_i , η εξίσωση (78) πρέπει να αντικατασταθεί από το άθροισμα [11]

$$N_{\text{exc}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{E_i/K_B T} - 1}, \quad (81)$$

το οποίο δεν παρουσιάζει προβλήματα απόκλισης, όπως αυτές παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Εναλλακτικά, αν κάποιος χρησιμοποιήσει την αναπαράσταση με το ολοκλήρωμα, το κάτω όριο ολοκλήρωσης παίρνει μια ελάχιστη, μη-μηδενική, τιμή.

Επιπλέον, αν υπάρχει κάποιο δυναμικό μέσα στο οποίο περιορίζονται το σωματίδια, η πυκνότητα των καταστάσεων επηρεάζεται επίσης και έχουμε συμπύκνωση Bose-Einstein, ακόμα και σε συστήματα μιας και δυο διαστάσεων [12]. Για παράδειγμα, σε ένα αρμονικό δυναμικό στις d διαστάσεις η πυκνότητα των καταστάσεων $g(E)$ είναι ανάλογη του E^{d-1} .

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από όλα τα παραπάνω είναι ότι η δήλωση πως δεν υπάρχει συμπύκνωση Bose-Einstein σε συστήματα μίας ή και δύο διαστάσεων στο θερμοδυναμικό όριο δεν ευσταθεί, εξαιτίας του πεπερασμένου αριθμού ατόμων και του χωρικού περιορισμού του αερίου.

5.3 Συμπεριφορά συμπυκνώματος Bose-Einstein υπό περιστροφή

Ας εξετάσουμε την συμπεριφορά ενός συμπυκνώματος Bose-Einstein όταν το θέσουμε σε περιστροφή. Όπως είδαμε νωρίτερα, το κέντρο του ενδιαφέροντος σε ένα συμπύκνωμα Bose-Einstein είναι η μακροσκοπική κατάληψη μίας μονοσωματιδιακής κατάστασης $\psi_0(\mathbf{r})$. Αυτό έχει πολύ σοβαρές επιπτώσεις, όπως θα δούμε παρακάτω. Από τη στιγμή που αυτή η κυματοσυνάρτηση είναι εν γένει μιγαδική, μπορεί να περιγραφεί μέσω της σχέσης

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n(\mathbf{r})} e^{i\varphi(\mathbf{r})}, \quad (82)$$

όπου $n(\mathbf{r})$ η πυκνότητα και $\varphi(\mathbf{r})$ η φάση. Υπολογίζοντας το ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας $J(\mathbf{r})$,

$$J(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2Mi} [\psi^*(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla\psi^*(\mathbf{r})] = n(\mathbf{r})u_s(\mathbf{r}), \quad (83)$$

βλέπουμε ότι η ταχύτητα του υπερ-ρευστού $u_s(\mathbf{r})$ είναι

$$u_s(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{M} \nabla\varphi(\mathbf{r}). \quad (84)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι όταν ένα συμπύκνωμα τεθεί σε περιστροφή ο στροβιλισμός του πεδίου των ταχυτήτων παρουσιάζει απειρισμό σε ορισμένα σημεία, στα οποία αντιστοιχούν σε δίνες, οι οποίες βρίσκονται στις θέσεις $\rho = \rho_i$ (αν υποθέσουμε ότι το υπερ-ρευστό κινείται σε ένα επίπεδο),

$$\nabla \times u_s \propto \hat{z} \sum_i \delta^2(\rho - \rho_i). \quad (85)$$

Επιπλέον, το γεγονός ότι η ενέργεια πρέπει να είναι πεπερασμένη και το πεδίο των ταχυτήτων αποκλίνει στις θέσεις $\rho = \rho_i$, η πυκνότητα οφείλει να μηδενίζεται σε αυτά τα σημεία.

Κάτι τελευταίο που προκύπτει από αυτή την επιχειρηματολογία είναι ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου των ταχυτήτων γύρω από μια κλειστή διαδρομή είναι κβαντισμένο,

$$\oint u_s(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = k \frac{2\pi\hbar}{M}, \quad (86)$$

όπου k ένας ακέραιος αριθμός. Και στην περίπτωση αυτή ο κβαντισμός της κυκλοφορίας είναι ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο.

5.4 Προσέγγιση μέσου πεδίου – η εξίσωση Gross-Pitaevskii

Η μελέτη της συμπεριφοράς ενός συμπυκνώματος Bose-Einstein μαθηματικά γίνεται μέσω μίας μη-γραμμικής μορφής της εξίσωσης του Schrödinger [14, 15]. Για ένα πλήρως συμπυκνωμένο σύστημα, όλα τα σωματίδια περιγράφονται από την ίδια κυματοσυνάρτηση, έστω την $\psi(\mathbf{r})$, για την οποία ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = 1. \quad (87)$$

Η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το συμπύκνωμα με την προσέγγιση του μέσου πεδίου είναι το γινόμενο των κυματοσυναρτήσεων του κάθε σωματιδίου, δηλαδή

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i). \quad (88)$$

Αυτή η κυματοσυνάρτηση εξαρτάται από την κινητική ενέργεια, την ενέργεια εξαιτίας του αρμονικού δυναμικού και την ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων. Για τον υπολογισμό της τελευταίας χρειαζόμαστε το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο ατόμων. Αυτό μπορεί να προσεγγισθεί από ένα δυναμικό της ακόλουθης μορφής

$$V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = U_0 \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{4\pi\hbar^2 \alpha}{M} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (89)$$

όπου M η μάζα του σωματιδίου και α το μήκος σκέδασης. Η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή τότε δίδεται από την σχέση

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2M} + V(\mathbf{r}_i) \right) + U_0 \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (90)$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας της συνάρτησης δέλτα

$$\int \delta(x - \alpha) f(x) dx = f(\alpha), \quad (91)$$

η μέση τιμή της ενέργειας αλληλεπίδρασης για μία κυματοσυνάρτηση, όπως αυτή της εξίσωσης (88), δίδεται από

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} N(N-1) U_0 \int |\psi|^4 d\mathbf{r}. \quad (92)$$

Υποθέτοντας ότι η κυματοσυνάρτηση του συμπυκνώματος είναι $\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{N}\psi(\mathbf{r})$, με την αντίστοιχη πυκνότητα $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ και αγνοώντας όρους τάξης $1/N$, οι οποίοι είναι αμελητέοι για μεγάλο αριθμό ατόμων, το συναρτησιακό της ενέργειας είναι

$$E(\psi, \psi^*) = N \int \left(\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}NU_0|\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3\mathbf{r}. \quad (93)$$

Το επόμενο βήμα είναι να απαιτήσουμε οι μεταβολές στο συναρτησιακό της ενέργειας ως προς το ψ^* , με τον περιορισμό $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1$, δηλαδή με τον αριθμό των ατόμων να παραμένει σταθερός, να μηδενίζονται. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να πραγματοποιηθεί με την βοήθεια ενός πολλαπλασιαστή Lagrange μ , δηλαδή

$$X(\psi, \psi^*) = E(\psi, \psi^*) - \mu N \int \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (94)$$

Τονίζουμε ότι καθότι η κυματοσυνάρτηση έχει ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος, οι μεταβολές και των δύο μερών λαμβάνονται ως ανεξάρτητες. Τελικά, από τη συνθήκη $\delta X/\delta\psi^* = 0$ καταλήγουμε στην εξίσωση Gross-Pitaevskii, η οποία είναι

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + U_0|\psi(\mathbf{r})|^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}). \quad (95)$$

5.5 Ανάπτυγμα της κυματοσυνάρτησης του συμπυκνώματος στις ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού δυναμικού

Η κυματοσυνάρτηση κάθε σωματιδίου $\psi(\mathbf{r}_i)$, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μπορεί να αναπτυχθεί ως σειρά των ιδιοκαταστάσεων του αρμονικού ταλαντωτή $\psi_m(\mathbf{r}_i)$ και επομένως μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\psi(\mathbf{r}_i) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \psi_m(\mathbf{r}_i), \quad (96)$$

όπου c_m συντελεστές, οι οποίοι εν γένει είναι μιγαδικοί και συναρτήσεις της στροφορμής. Η ποσότητα $|c_m|^2$, όπως γνωρίζουμε, δίδει την πιθανότητα ένα σωματίδιο να βρίσκεται στην κατάσταση ψ_m , η οποία είναι ίση με

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi m!}} \rho^m e^{-\rho^2/2} e^{im\theta}. \quad (97)$$

Στην παραπάνω έκφραση έχουμε υποθέσει ότι τα μποζόνια βρίσκονται στην θεμελιώδη ενεργειακή κατάσταση και το σύστημα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησης των ατόμων. Για να βρούμε την ελάχιστη ενέργεια θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της ενέργειας αλληλεπίδρασης ως συνάρτηση των συντελεστών c_m και θα την ελαχιστοποιήσουμε επιβάλλοντας δύο περιορισμούς. Την συνθήκη κανονικοποίησης

$$\sum_m |c_m|^2 = 1 \quad (98)$$

και το γεγονός ότι η μέση τιμή της στροφορμής ικανοποιεί την σχέση

$$\sum_m m |c_m|^2 = l, \quad (99)$$

όπου l η ολική στροφορμή του συστήματος ανά σωματίδιο [16, 17].

Ένα σημαντικό φαινόμενο που αξίζει να αναφερθεί εδώ είναι ο εκφυλισμός των καταστάσεων του συστήματος, ο οποίος συνδέεται με τον τρόπο που κατανέμεται η στροφορμή μεταξύ N σωματιδίων του συστήματος σε ένα αρμονικό δυναμικό. Η μέση τιμή της ενέργειας δίνεται από την σχέση

$$\langle E \rangle = \sum \varepsilon_m |c_m|^2. \quad (100)$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι $\varepsilon_m = |m|$. Συνεπώς

$$\langle E \rangle = \sum m |c_m|^2 = l. \quad (101)$$

Ας παραθέσουμε ένα παράδειγμα για να γίνει αυτό πιο κατανοητό. Ας υποθέτουμε ότι έχουμε $N = 2$ σωματίδια με $L = 2$ μονάδες στροφορμής. Απουσία των αλληλεπιδράσεων, μπορεί να έχουμε και τα δύο σωματίδια στην κατάσταση ψ_1 , ή να έχουμε ένα σωματίδιο στην κατάσταση ψ_0 και ένα σωματίδιο στην κατάσταση ψ_2 . Και στις δύο περιπτώσεις η συνολική στροφορμή του συστήματος είναι $L = 2$, ενώ επίσης και η ενέργεια είναι ίση 2 μονάδες ενέργειας και στις δύο περιπτώσεις. Το ενδιαφέρον πρόβλημα είναι, συνεπώς, να βρούμε την επαλληλία των καταστάσεων η οποία ελαχιστοποιεί την ενέργεια αλληλεπίδρασης (όπως είναι γνωστό βάσει της θεωρίας διαταραχών στην περίπτωση εκφυλισμένων καταστάσεων).

Όπως γνωρίζουμε, οι ιδιοσυναρτήσεις που περιγράφουν την ιδιοκατάσταση ενός σωματιδίου υπό την επίδραση ενός αρμονικού δυναμικού δίδονται από τη σχέση (97). Για τον υπολογισμό της ενέργειας αλληλεπίδρασης χρειαζόμαστε το ολοκλήρωμα

$$\int |\psi|^4 d\mathbf{r} \quad (102)$$

και συνεπώς τα ολοκληρώματα

$$\int \psi_k^*(\mathbf{r}) \psi_l^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (103)$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι

$$\int \psi_k^*(\mathbf{r}) \psi_l^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{k! l! m! n!}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \rho^{(k+l+n+m)} e^{-2\rho^2} e^{-i[(k+l)-(m+n)]\theta} \rho d\rho d\theta.$$

Καθότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} e^{-i[(k+l)-(m+n)]\theta} d\theta = 2\pi \delta_{k+l,m+n}, \quad (104)$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} \int \psi_\kappa^*(\mathbf{r}) \psi_l^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \delta_{k+l,m+n} \frac{1}{\pi^2 \sqrt{k! l! m! n!}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho^{2(k+l)} e^{-2\rho^2} \rho d\rho d\theta \Rightarrow \\ &= \delta_{k+l,m+n} \frac{1}{\pi \sqrt{k! l! m! n!}} \int_0^\infty \rho^{2(k+l)} e^{-2\rho^2} d\rho^2 \Rightarrow \\ &= \delta_{k+l,m+n} \frac{1}{\pi \sqrt{k! l! m! n!}} \int_0^\infty u^{(k+l)} e^{-2u} du, \end{aligned} \quad (105)$$

έχοντας κάνει την αλλαγή μεταβλητής $u = \rho^2$. Από τη σχέση (58) καταλήγουμε τελικά στο

$$\int \psi_\kappa^*(\mathbf{r}) \psi_l^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{k+l,m+n} \frac{(k+l)!}{2^{(k+l+1)} \pi \sqrt{k! l! m! n!}}. \quad (106)$$

Γιά $\kappa = 0, l = 0, n = 0$ και $m = 0$ έχουμε

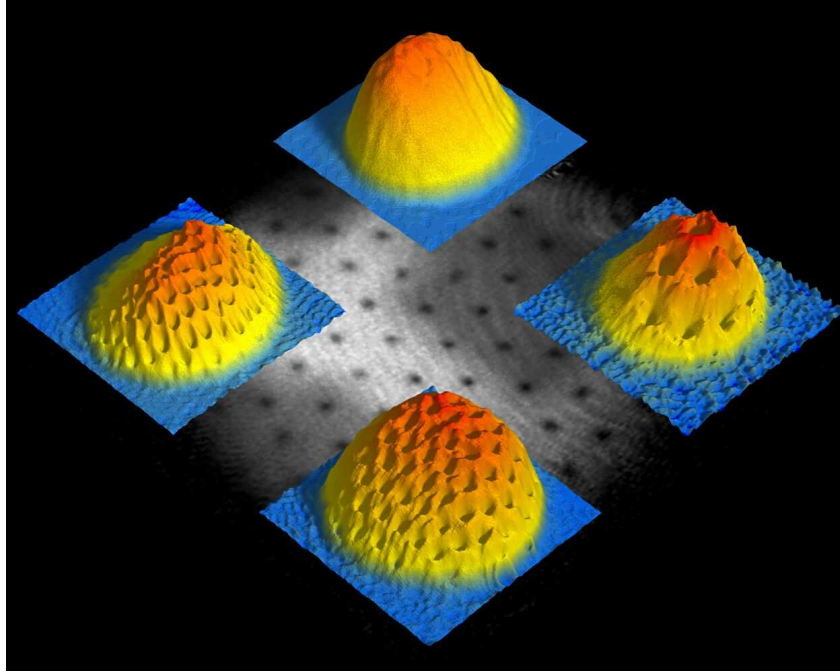
$$\int |\psi_0(\mathbf{r})|^4 d\mathbf{r} = \int \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi}. \quad (107)$$

Οπότε προκύπτει τελικά ότι

$$\int \psi_\kappa^*(\mathbf{r}) \psi_l^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{k+l,m+n} \frac{(k+l)!}{2^{(k+l)} \sqrt{k! l! m! n!}} \int |\psi_0(\mathbf{r})|^4 d\mathbf{r}. \quad (108)$$

6 Αποτελέσματα

Προτού προχωρήσω στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων μου, τονίζω ότι μια σειρά πειραμάτων έχουν δείξει την ύπαρξη δινών στο σύστημα που μελετώ [18].



Σχήμα 2: Η πυκνότητα ενός συμπυκνώματος Bose-Einstein υπό περιστροφή, για διαφορετικές τιμές της γωνιακής στροφορμής, από πείραμα του εργαστηρίου του W. Ketterle.

6.1 Ελαχιστοποίηση της ενέργειας υπό δεδομένη γωνιακή στροφορμή

Για την ελαχιστοποίηση της ενέργειας χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού C. Επέλεξα διάφορους γραμμικούς συνδυασμούς ιδιοκαταστάσεων, οι οποίοι αντιστοιχούν σε καταστάσεις διαφορετικής (περιστροφικής) συμμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζω πιο κάτω προέκυψαν κάνοντας υπολογισμούς για τις υπερθέσεις

$$\psi = c_0\psi_0 + c_2\psi_2 + c_4\psi_4 + c_6\psi_6, \quad (109)$$

$$\psi = c_0\psi_0 + c_3\psi_3 + c_6\psi_6 + c_9\psi_9, \quad (110)$$

$$\psi = c_0\psi_0 + c_4\psi_4 + c_8\psi_8 + c_{12}\psi_{12}, \quad (111)$$

$$\psi = c_0\psi_0 + c_5\psi_5 + c_{10}\psi_{10} + c_{15}\psi_{15}, \quad (112)$$

$$\psi = c_1\psi_1 + c_3\psi_3 + c_5\psi_5 + c_7\psi_7. \quad (113)$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι περιορισμοί που τέθηκαν σε κάθε μία από τις περιπτώσεις για να βρούμε την ελάχιστη τιμή της ενέργειας είναι η συνθήκη κανονικοποίησης

$$\sum_m |c_m|^2 = 1 \quad (114)$$

και το γεγονός ότι η μέση τιμή της στροφορμής ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_m m |c_m|^2 = l, \quad (115)$$

όπου l η ολική στροφορμή του συστήματος ανά σωματίδιο.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την πρώτη περίπτωση. Η πρώτη συνθήκη μας δίδει

$$c_0^2 + c_2^2 + c_4^2 + c_6^2 = 1, \quad (116)$$

ενώ η δεύτερη

$$2c_2^2 + 4c_4^2 + 6c_6^2 = l, \quad (117)$$

το οποίο είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με πέντε αγνώστους. Εξισώνοντας τις δύο τελευταίες έχουμε

$$c_0^2 = 1 - \frac{l}{2} + c_4^2 + 2c_6^2, \quad (118)$$

$$c_2^2 = \frac{l}{2} - 2c_4^2 - 3c_6^2. \quad (119)$$

Επίσης, η εξίσωση της ενέργειας, η οποία προκύπτει μέσω της σχέσης (108), θα είναι στην περίπτωση αυτή

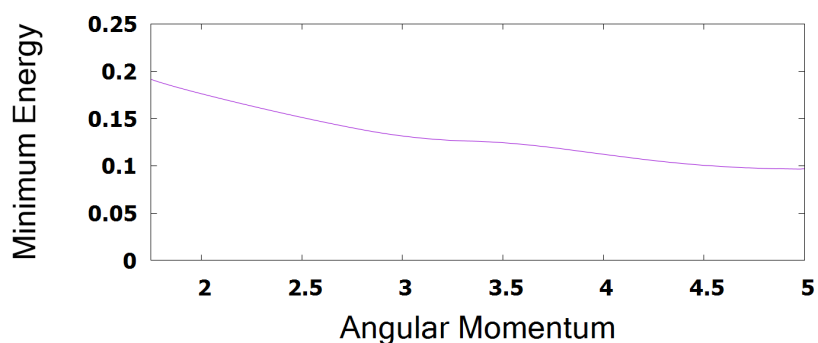
$$\begin{aligned} \langle V \rangle = & \left(\frac{1}{2} c_0^4 + \frac{3}{16} c_2^4 + \frac{35}{256} c_4^4 + \frac{231}{2048} c_6^4 + \frac{1}{2} c_0^2 c_2^2 + \frac{1}{8} c_0^2 c_4^2 \right. \\ & + \frac{1}{32} c_0^2 c_6^2 + \frac{15}{128} c_2^2 c_4^2 + \frac{7}{128} c_2^2 c_6^2 + \frac{105}{1024} c_4^2 c_6^2 \\ & \left. + \frac{\sqrt{6}}{8} c_0 c_2^2 c_4 + \frac{7\sqrt{10}}{64} c_2 c_4^2 c_6 + \frac{\sqrt{15}}{16} c_0 c_2 c_4 c_6 \right) u_0, \quad (120) \end{aligned}$$

όπου

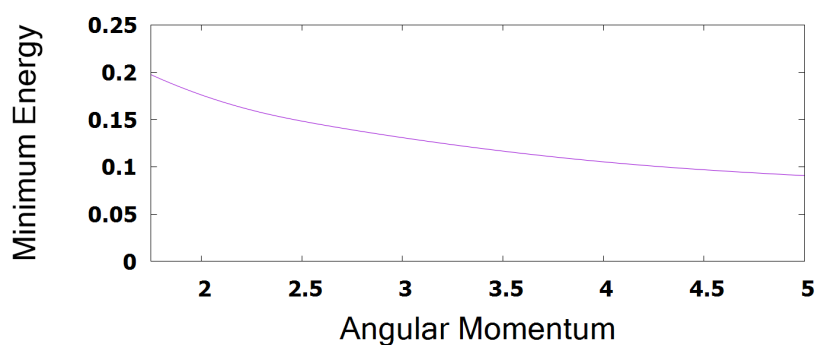
$$u_0 = \frac{1}{2} N(N-1) \int |\psi_0|^4 d\mathbf{r}. \quad (121)$$

Τα c_4 και c_6 αφήθηκαν ως ελεύθερες μεταβλητές με εύρος τιμών από -1 έως 1 , με βήμα 0.001 . Η στροφορμή l του συστήματος έχει εύρος τιμών από 1.75 έως 5 με βήμα 0.01 . Στη συνέχεια, για κάθε τιμή της στροφορμής υπολογίστηκε η ελάχιστη τιμή της ενέργειας για όλες τις τιμές των c_4 και c_6 . Η μεταβλητή c_0 επιλέχθηκε αυθαίρετα ως θετική. Οι όροι που μπορούν να ελαχιστοποιήσουν την ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι οι τρεις τελευταίοι, διότι μόνο σε αυτούς μπορούν να προκύψουν

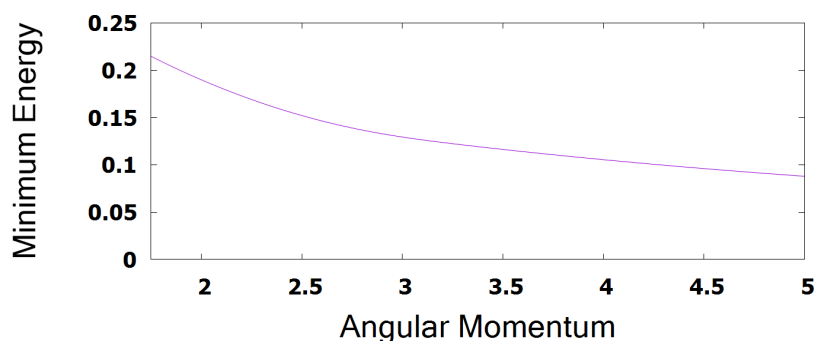
αρνητικές τιμές. Οι γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν από την παραπάνω διαδικασία είναι οι ακόλουθες.



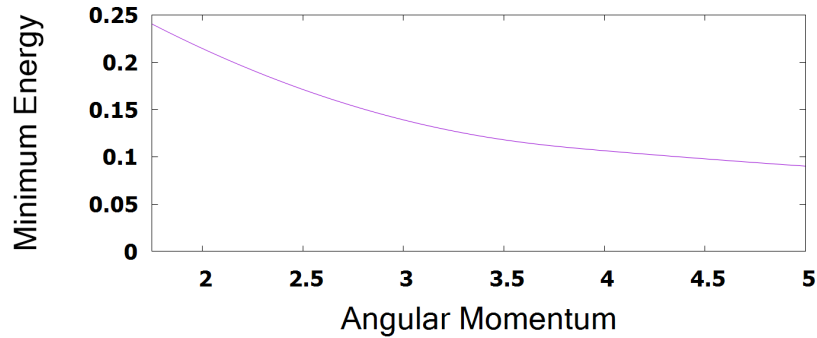
Σχήμα 3: Η ελάχιστη ενέργεια συναρτήσει της στροφορμής, για την υπέρθεση καταστάσεων $\psi = c_0\psi_0 + c_2\psi_2 + c_4\psi_4 + c_6\psi_6$.



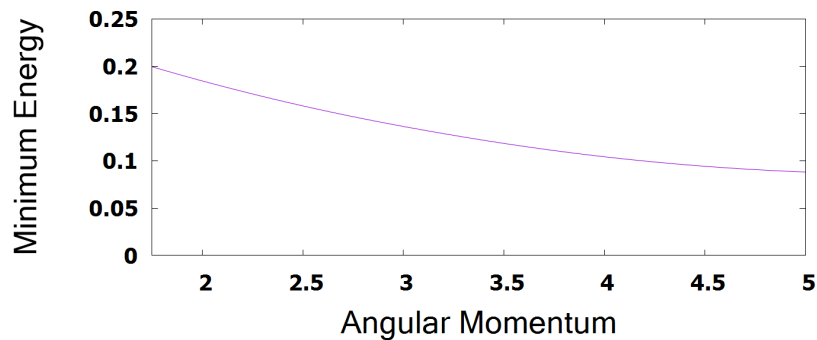
Σχήμα 4: Η ελάχιστη ενέργεια συναρτήσει της στροφορμής, για την υπέρθεση καταστάσεων $\psi = c_0\psi_0 + c_3\psi_3 + c_6\psi_6 + c_9\psi_9$.



Σχήμα 5: Η ελάχιστη ενέργεια συναρτήσει της στροφορμής, για την υπέρθεση καταστάσεων $\psi = c_0\psi_0 + c_4\psi_4 + c_8\psi_8 + c_{12}\psi_{12}$.

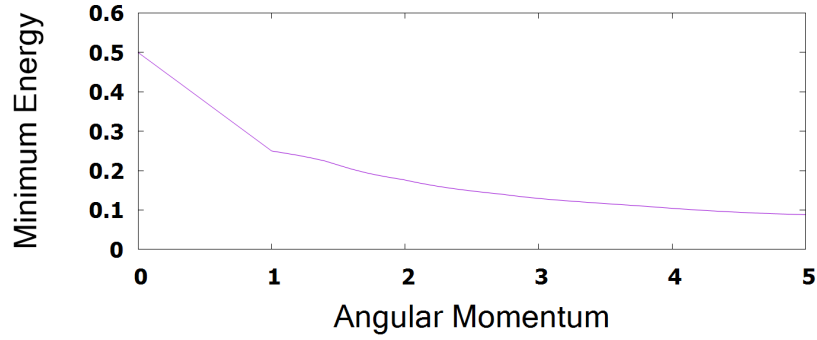


Σχήμα 6: Η ελάχιστη ενέργεια συναρτήσει της στροφορμής, για την υπέρθεση καταστάσεων $\psi = c_0\psi_0 + c_5\psi_5 + c_{10}\psi_{10} + c_{15}\psi_{15}$.



Σχήμα 7: Η ελάχιστη ενέργεια συναρτήσει της στροφορμής, για την υπέρθεση καταστάσεων $\psi = c_1\psi_1 + c_4\psi_4 + c_7\psi_7 + c_{10}\psi_{10}$.

Η τελευταία γραφική παράσταση παρουσιάζει την ελάχιστη ενέργεια όλων των υπερθέσεων που μελετήθηκαν συναρτήσει της στροφορμής. Για να μπορέσει κάποιος να πάρει ικανοποιητικά αποτελέσματα για τιμές της στροφορμής μικρότερες από 1.75 η μέθοδος του μέσου πεδίου είναι επαρκής και σε αυτή την περίπτωση. Επειδή, όμως, δεν υπάρχει συμμετρία σε αυτή την περιοχή τιμών, οι υπολογισμοί που απαιτούνται είναι πολύ περισσότεροι και αρκετά χρονοβόροι. Για τις ανάγκες αυτής της πτυχιακής μελετήθηκαν μόνο τιμές της στροφορμής μεγαλύτερες του 1.75. Έχουν, όμως, προστεθεί τα αποτελέσματα [17], έτσι ώστε να δοθεί μια πιο καθαρή εικόνα και να μπορέσει κάποιος να δει ολοκληρωμένα ποια είναι η συμπεριφορά της ελάχιστης ενέργειας σε όλο το εύρος τιμών της στροφορμής.



Σχήμα 8: Η ελάχιστη ενέργεια συναρτήσει της στροφορμής, λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις υπερθέσεις, συμπεριλαμβανομένης και τις τιμές της στροφορμής από 0 έως 1.75.

Είναι φανερό ότι σε κάθε περίπτωση η ελάχιστη ενέργεια μειώνεται καθώς αυξάνεται η στροφορμή του συστήματος. Αυτό είναι λογικό, καθώς όσο αυξάνεται η στροφορμή το άεριο “απλώνει” στην ακτινική διεύθυνση.

6.2 Συμπύκνωμα Bose-Einstein υπό δεδομένη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αρμονικού δυναμικού

Ένα άλλο φαινόμενο που εξετάστηκε στην παρούσα πτυχιακή είναι η συμπεριφορά του συμπυκνώματος, όταν τεθεί σε περιστροφή με γωνιακή συχνότητα Ω [16]. Οι τιμές της ενέργειας δίδονται από τη σχέση

$$E' = E - \Omega l. \quad (122)$$

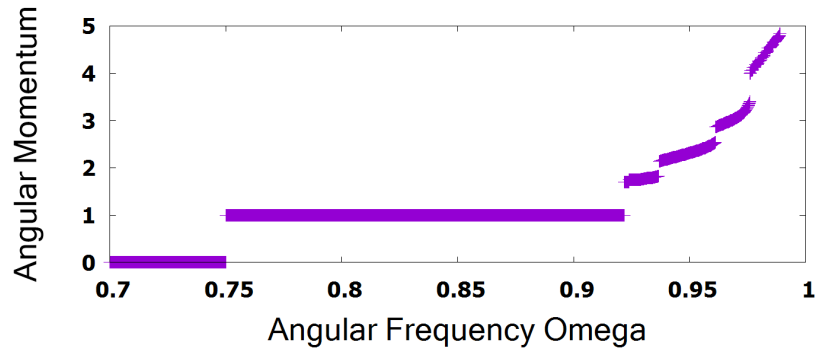
Η στροφορμή l παίρνει τιμές από 0 έως 5, ενώ η γωνιακή συχνότητα περιστροφής από 0 έως 1. Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρώτο “σκαλοπάτι” εμφανίζεται για την τιμή της γωνιακής ταχύτητας ίση με $\Omega = 0.75$, κάτι που κάποιος μπορεί να υπολογίσει και αναλυτικά μέσω της σχέσης

$$\Omega = 1 - \frac{1}{4}(N - 1)g, \quad (123)$$

όπου στους υπολογισμούς μου θεώρησα ότι

$$Ng = 1. \quad (124)$$

Η γραφική παράσταση που προέκυψε φαίνεται παρακάτω.

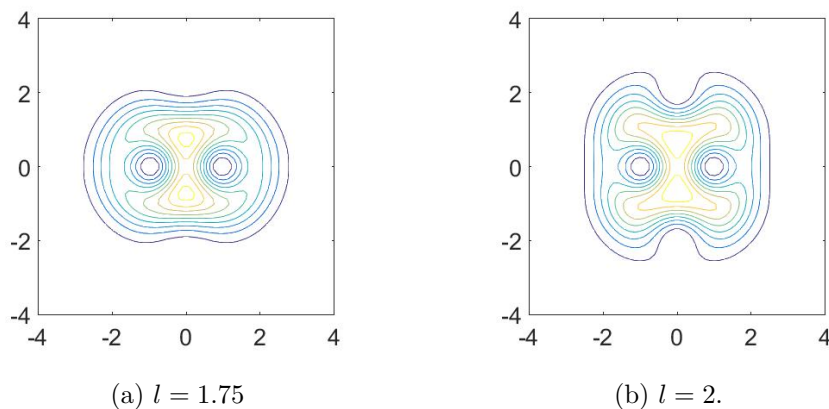


Σχήμα 9: Η στροφορμή του συστήματος συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας περιστροφής της παγίδας, Ω .

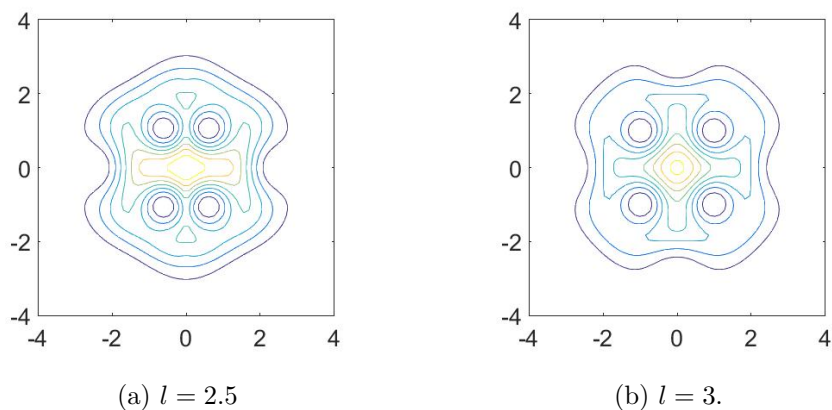
Όπως φαίνεται από τη γραφική παράσταση, καθώς η γωνιακή συχνότητα περιστροφής αυξάνεται δημιουργούνται “σκαλοπάτια”, τα οποία αντιστοιχούν στο σχηματισμό δινών. Σε αντίθεση με ένα κλασικό ρευστό, το οποίο αν το περιστρέψουμε υπό μία γωνιακή συχνότητα περιστρέφεται ως ένα στερεό σώμα, σε ένα αραιό μποζονικό αέριο κάτι τέτοιο δε συμβαίνει. Σε ένα μποζονικό αέριο έχουμε τον σχηματισμό δινών, το οποίο είναι ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο.

6.3 Πυκνότητα του συμπυκνώματος Bose-Einstein υπό περιστροφή

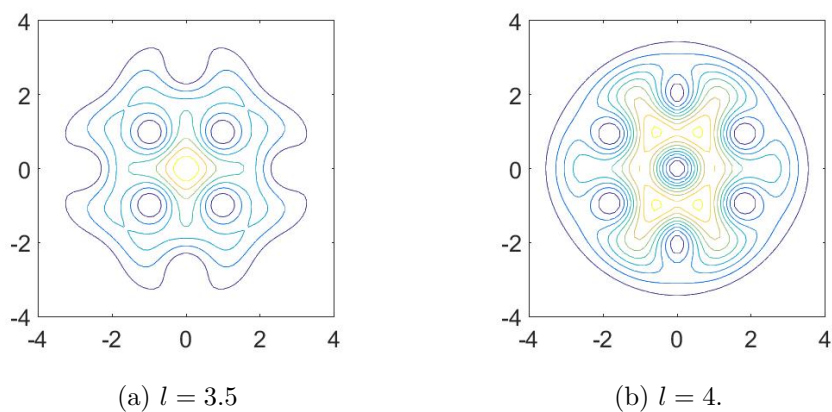
Καθώς αυξάνεται η στροφορμή ενός συμπυκνώματος η πυκνότητά του μεταβάλλεται. Όσο αυξάνεται η στροφορμή του συστήματος παρατηρείται αύξηση και του αριθμού των δινών. Παρακάτω εμφανίζονται μερικά γραφήματα, τα οποία αναδεικνύουν ακριβώς αυτό το γεγονός.



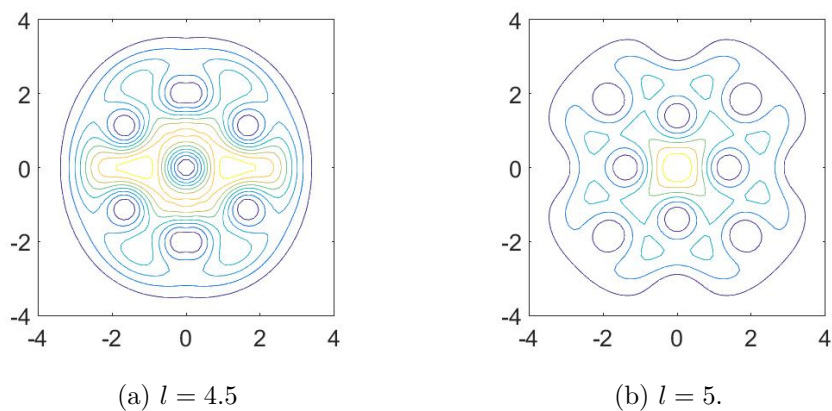
Σχήμα 10: Πυκνότητα του αερίου για $l = 1.75$ και $l = 2.0$.



Σχήμα 11: Πυκνότητα του αερίου για $l = 2.5$ και $l = 3.0$.

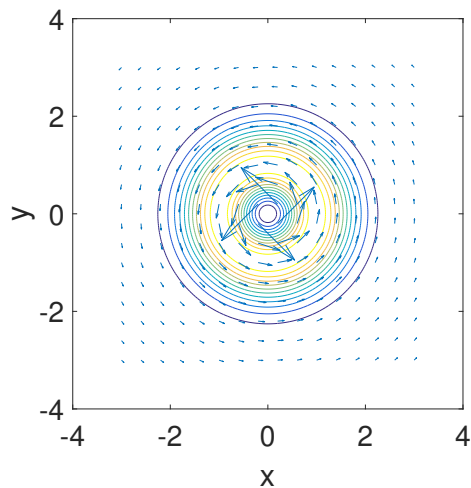


Σχήμα 12: Πυκνότητα του αερίου για $l = 3.5$ και $l = 4.0$.

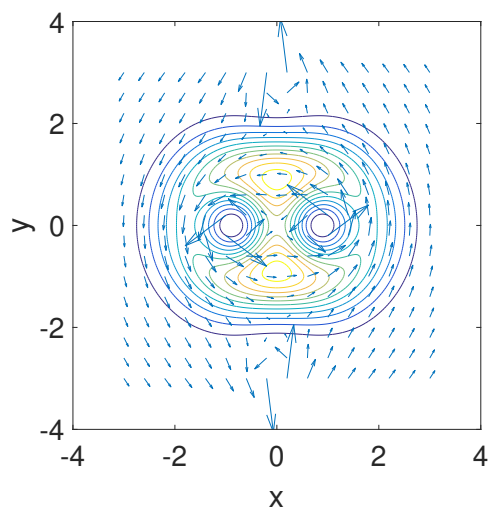


Σχήμα 13: Πυκνότητα του αερίου για $l = 4.5$ και $l = 5.0$.

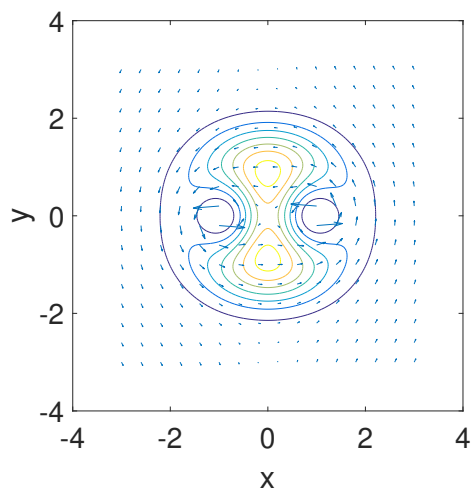
Ενδιαφέρον, επίσης, έχει το πεδίο των ταχυτήτων του ρευστού καθώς η στροφορμή αυξάνεται. Επειδή η ενέργεια οφείλει να είναι πεπερασμένη, στο κέντρο των δινών η πυκνότητα του αερίου μηδενίζεται.



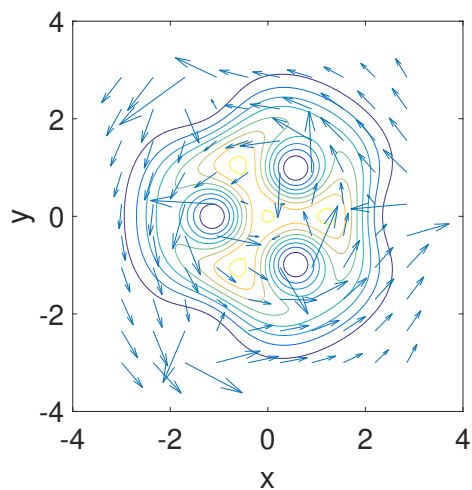
Σχήμα 14: Το πεδίο των ταχυτήτων του ρευστού για στροφορμή $l = 1$.



Σχήμα 15: Το πεδίο των ταχυτήτων του ρευστού για στροφορμή $l = 1.75$.



Σχήμα 16: Το πεδίο των ταχυτήτων του ρευστού για στροφορμή $l = 2.00$.



Σχήμα 17: Κατανομή των ταχυτήτων για στροφορμή $l = 2.50$.

7 Συμπεράσματα

Στην πτυχιачή μου εργασία μελέτησα τις περιστροφικές ιδιότητες ενός συμπυκνώματος Bose-Einstein, το οποίο κινείται σε ένα επίπεδο και δεσμεύεται χωρικά από ένα αρμονικό δυναμικό (πάνω στο επίπεδο κίνησης). Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι το γεγονός ότι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δυναμικού Ω δεν μπορεί να υπερβεί τη συχνότητα της παγίδας ω . Αυτό οφείλεται στο κεντρόφυγο δυναμικό, το οποίο επίσης είναι αρμονικό και στην περίπτωση στην οποία $\Omega > \omega$, το αέριο δεν είναι πλέον χωρικά δεσμευμένο. Συνέπεια του παραπάνω γεγονότος είναι και το ότι καθώς το Ω πλησιάζει στο ω , το αέριο “απλώνει” στην ακτινική διεύθυνση. Επίσης για τον ίδιο λόγο η συνάρτηση $l(\Omega)$ αποκλίνει για $\Omega \rightarrow \omega$, όπως είδαμε πιο πάνω.

Περνώντας στα αποτελέσματα της εργασίας μου, το όλο ενδιαφέρον εστιάζεται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων. Μια πρώτη πολύ ενδιαφέρουσα παρατήρηση (η οποία δεν έχει κλασικό ανάλογο) είναι το ότι καθώς αυξάνει η τιμή του Ω , αρχικά το αέριο δεν αποκρίνεται και μένει ακίνητο. Αυτό είναι ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο και προφανώς δεν ισχύει στην περίπτωση ενός κλασικού αερίου.

Πέρα από μια κρίσιμη τιμή της γωνιακής ταχύτητας Ω έχουμε μια ασυνεχή μετάβαση φάσης. Σε αυτήν μια δίνη μεταπηδά από το άπειρο στο κέντρο του αερίου. Στο γράφημα της στροφορμής συναρτήσει του Ω , $l(\Omega)$, βρήκαμε ένα “σκαλοπάτι”, το οποίο οφείλεται ακριβώς σε αυτό το φαινόμενο. Ταυτόχρονα το αέριο αρχίζει να περιστρέφεται, ωστόσο η κίνησή του δεν αντιστοιχεί σε κίνηση στερεού σώματος (με την ταχύτητα να μηδενίζεται στο κέντρο της παγίδας). Αντιθέτως, το πεδίο ταχυτήτων παρουσιάζει απειρισμό στο κέντρο της παγίδας, εξαιτίας της δίνης, ενώ αντιστοίχως η πυκνότητα μηδενίζεται σε εκείνο το σημείο, ώστε η ενέργεια του συστήματος να μην απειρίζεται. Καθώς το Ω συνεχίζει να αυξάνει, περισσότερες δίνες εισέρχονται στο αέριο και αντιστοίχως περισσότερα σκαλοπάτια εμφανίζονται στη συνάρτηση $l(\Omega)$.

Εξίσου ενδιαφέροντα είναι και τα γραφήματα τα οποία δείχνουν την πυκνότητα του αερίου για διάφορες τιμές της στροφορμής. Σε αυτά φαίνεται καθαρά ο σχηματισμός των δινών.

Κλείνοντας, τονίζω ότι όλα τα φαινόμενα που παρουσιάζω στην εργασία μου οφείλονται στη μακροσκοπική κατάληψη μιας κβαντικής κατάστασης του συστήματος (εξαιτίας της συμπύκνωσης Bose-Einstein). Ως εκ τούτου, τα εν λόγω φαινόμενα είναι καθαρά κβαντικού χαρακτήρα. Ναι μεν καταστάσεις δινών παρουσιάζονται και σε κλασικά αέρια, όπως καλά γνωρίζουμε από τους κυκλώνες στην ατμόσφαιρα, για παράδειγμα. Εν τούτοις, οι δίνες που μελέτησα στην εργασία μου

είναι κβαντικού χαρακτήρα. Οι δύο βασικές διαφορές μεταξύ δινών σε κβαντικά αέρια, όπως το παρόν και κλασικά είναι ότι (i) η κυκλοφορία είναι κβαντισμένη στα πρώτα και όχι στα δεύτερα και (ii) στα πρώτα έχουμε την πιθανότητα μεταστάθειας (για αρκετά ισχυρές αλληλεπιδράσεις), ενώ σε ένα κλασικό αέριο αυτό δεν είναι ποτέ δυνατό (η μελέτη της μεταστάθειας είναι πέραν των στόχων της παρούσας μελέτης).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Ελαχιστοποίηση της ενέργειας

Παρακάτω φαίνεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για να γίνουν οι υπολογισμοί τις ελάχιστης ενέργειας. Παρουσιάζεται η περίπτωση $\psi = c_0\psi_0 + c_2\psi_2 + c_4\psi_4 + c_6\psi_6$. Ανάλογοι είναι και οι υπόλοιποι κώδικες [19].

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

float form(int k , int l , int m ,int n);

main()
{

int n=0 , i=0 , count=0 , min_pos1=0 , min_pos2=0;
int count1=0, h=0, min_pos=0;
float min_energy=0, min_energy1=0, min_energy2=0, l=0, min_c0=0;
float min_c2=0 , min_c4=0 , min_c6=0 , p=0 , min_momentum=0;
float c0=0 ,c6=0 , k=0 , m=0 , c2[2] , energy[2] ,c4=0;
static double num0[10000000] , num4[10000000] , num2p[10000000];
static double num2n[10000000] ,num6[10000000];
static double energy2[10000000] , energy1[10000000];

FILE *filePtr1 , *fp1 , *fp2 , *fp3;
FILE *fp4 , *fp5 , *fp6 , *fp7;

filePtr1 = fopen("c0c2c4c6.txt","w");
fp1=fopen("0246.txt","w");
fp2=fopen("constant0_0246.txt","w");
fp3=fopen("constant2_0246.txt","w");
fp4=fopen("constant4_0246.txt","w");
```

```

fp5=fopen("constant6_0246.txt","w");
fp6=fopen("constant0246.txt","w");
fp7=fopen("momentum.txt","w");

printf("give step for c4\n");
scanf("%f", &k);

printf("give step for c6\n");
scanf("%f", &m);

for (l=1.75;l<=5.01;l+=0.01)
{
count=0;
for (c4=-1;c4<=1;c4+=k)
{
for (c6=-1;c6<=1;c6+=m)
{
if (1+pow(c4,2)+2*pow(c6,2)-1/2>=0 && 1/2>=2*pow(c4,2)+3*pow(c6,2))
{
c0=sqrt(1+pow(c4,2)+2*pow(c6,2)-1/2);

for (h=0;h<=1;h++)
{

c2[h]=pow(-1,h)*sqrt(1/2-2*pow(c4,2)-3*pow(c6,2));

energy[h]=form(0,0,0,0)*pow(c0,4) + form(2,2,2,2)*pow(c2[h],4) +
+ form(4,4,4,4)*pow(c4,4) + form(6,6,6,6)*pow(c6,4) +
+ 4*form(0,2,0,2)*pow(c0,2)*pow(c2[h],2) +
+ 4*form(0,4,0,4)*pow(c0,2)*pow(c4,2) +
+ 4*form(0,6,0,6)*pow(c0,2)*pow(c6,2) +
+ 4*form(2,4,2,4)*pow(c2[h],2)*pow(c4,2) +
+ 4*form(2,6,2,6)*pow(c2[h],2)*pow(c6,2) +
+ 4*form(4,6,4,6)*pow(c4,2)*pow(c6,2) +

```

```

+ 4*form(2,2,0,4)*c0*pow(c2[h],2)*c4 +
+ 4*form(2,6,4,4)*c2[h]*pow(c4,2)*c6 +
+ 8*form(2,4,0,6)*c0*c2[h]*c4*c6;

energy1[count]=energy[0];
energy2[count]=energy[1];
num2p[count]=c2[0];
num2n[count]=c2[1];
}

num0[count]=c0;
num4[count]=c4;
num6[count]=c6;
count=count+1;
}
}
}

min_energy1=energy1[0];

for(i=0;i<count;i++)
{
if(energy1[i]<=min_energy1)
{
min_energy1=energy1[i];
min_pos1=i;
}
}

min_energy2=energy2[0];
for(i=0;i<count;i++)
{
if(energy2[i]<=min_energy2)
{
min_energy2=energy2[i];

```

```

min_pos2=i;
                                }
                                }

if (min_energy1<min_energy2)
{
min_energy=min_energy1;
min_c0=num0[ min_pos1 ];
min_c2=num2p[ min_pos1 ];
min_c4=num4[ min_pos1 ];
min_c6=num6[ min_pos1 ];
min_momentum=2*pow(min_c2,2) + 4*pow(min_c4,2) + 6*pow(min_c6,2);
                                }

else
{
min_energy=min_energy2;
min_c0=num0[ min_pos2 ];
min_c2=num2n[ min_pos2 ];
min_c4=num4[ min_pos2 ];
min_c6=num6[ min_pos2 ];
min_momentum=2*pow(min_c2,2) + 4*pow(min_c4,2) + 6*pow(min_c6,2);
                                }

fprintf( filePtr1 ,"%0.2f          %0.6f\n", l , min_energy );
fprintf( fp1 ,"%0.6f\n", min_energy );
fprintf( fp2 ,"%0.6f\n", min_c0);
fprintf( fp3 ,"%0.6f\n", min_c2);
fprintf( fp4 ,"%0.6f\n", min_c4);
fprintf( fp5 ,"%0.6f\n", min_c6);
fprintf( fp7 ,"%0.6f\n", l);
fprintf( fp6 ,"%0.6f   %0.6f   %0.6f   %0.6f\n", min_c0, min_c2,

```

```

, min_c4 , min_c6 );
}

system("pause");
}
float form (int k , int l , int m ,int n)
{

int i=0 , c=0;
double factk=1 , factl=1,factm=1,factn=1,factc=1;
float result=0,rootf=0;

if (k+l==m+n)

{
for (i=1; i<=k ; i++)
    factk=factk*i;
for (i=1; i<=l ; i++)
    factl=factl*i;
for (i=1; i<=m ; i++)
    factm=factm*i;
for (i=1; i<=n ; i++)
    factn=factn*i;
    c=k+l;
for (i=1; i<=c ; i++)
    factc=factc*i;
    rootf=sqrt ( factk ) * sqrt ( factl ) * sqrt ( factm ) * sqrt ( factn );
    result=factc / ( rootf * pow ( 2 , c ) );
    return result / float ( 2 );
}

if (k+l!=m+n)
{
return 0;
}

```

```

}
}

```

Υπολογισμός του ολικού ελαχίστου της ενέργειας

Με τον παρακάτω κώδικα συγκεντρώθηκαν όλα τα δεδομένα που υπολογίσθηκαν και με βάση αυτά προέκυψε η ελάχιστη ενέργεια όλων των υπερθέσεων. Δηλαδή, για κάθε τιμή της στροφορμής, ο συγκεκριμένος κώδικας κρατάει την ελάχιστη ενέργεια, συγκρίνοντας την ελάχιστη ενέργεια που δίδουν οι πέντε περιπτώσεις υπερθέσεων που έχουν υπολογισθεί με τον προηγούμενο κώδικα [19].

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

main()

{
FILE *myfile1 , *myfile2 , *myfile3 , *myfile4 , *myfile5 ;
FILE *myfile7 , *myfile8 , *myfile9 , *myfile10 , *myfile11 ;
FILE *myfile13 , *myfile14 , *myfile15 , *myfile16 , *myfile17 ;
FILE *myfile19 , *myfile20 , *myfile21 , *myfile22 , *myfile23 ;
FILE *myfile25 , *myfile26 , *myfile27 ;
FILE *myfile6 , *myfile12 , *myfile18 , *myfile24 ;

float energy1 , energy2 , energy3 , energy4 , energy5 , l , min_energy=0;
float momentum=1.75, min_c1 , min_c2 , min_c3 , min_c4 ;
float c0_1 , c2_1 , c4_1 , c6_1 ;
float c0_2 , c3_2 , c6_2 , c9_2 ;
float c0_3 , c4_3 , c8_3 , c12_3 ;
float c0_4 , c5_4 , c10_4 , c15_4 ;
float c1_5 , c4_5 , c7_5 , c10_5 ;
int i , j ;

myfile1=fopen ("0246.txt" , "r");
myfile2=fopen ("0369.txt" , "r");

```

```
myfile3=fopen("04812.txt", "r");
myfile4=fopen("051015.txt", "r");
myfile5=fopen("14710.txt", "r");

myfile7=fopen("constant0_0246.txt", "r");
myfile8=fopen("constant2_0246.txt", "r");
myfile9=fopen("constant4_0246.txt", "r");
myfile10=fopen("constant6_0246.txt", "r");

myfile11=fopen("constant0_0369.txt", "r");
myfile12=fopen("constant3_0369.txt", "r");
myfile13=fopen("constant6_0369.txt", "r");
myfile14=fopen("constant9_0369.txt", "r");

myfile15=fopen("constant0_04812.txt", "r");
myfile16=fopen("constant4_04812.txt", "r");
myfile17=fopen("constant8_04812.txt", "r");
myfile18=fopen("constant12_04812.txt", "r");

myfile19=fopen("constant0_051015.txt", "r");
myfile20=fopen("constant5_051015.txt", "r");
myfile21=fopen("constant10_051015.txt", "r");
myfile22=fopen("constant15_051015.txt", "r");

myfile23=fopen("constant1_14710.txt", "r");
myfile24=fopen("constant4_14710.txt", "r");
myfile25=fopen("constant7_14710.txt", "r");
myfile26=fopen("constant10_14710.txt", "r");

myfile27=fopen("min_constant.txt", "w");
myfile6=fopen("Totalminimum.txt", "w");

for(j=0;j<=325;j++)
{
```

```
fscanf(myfile1,"%f",&energy1);  
fscanf(myfile2,"%f",&energy2);  
fscanf(myfile3,"%f",&energy3);  
fscanf(myfile4,"%f",&energy4);  
fscanf(myfile5,"%f",&energy5);
```

```
fscanf(myfile7,"%f",&c0_1);  
fscanf(myfile8,"%f",&c2_1);  
fscanf(myfile9,"%f",&c4_1);  
fscanf(myfile10,"%f",&c6_1);
```

```
fscanf(myfile11,"%f",&c0_2);  
fscanf(myfile12,"%f",&c3_2);  
fscanf(myfile13,"%f",&c6_2);  
fscanf(myfile14,"%f",&c9_2);
```

```
fscanf(myfile15,"%f",&c0_3);  
fscanf(myfile16,"%f",&c4_3);  
fscanf(myfile17,"%f",&c8_3);  
fscanf(myfile18,"%f",&c12_3);
```

```
fscanf(myfile19,"%f",&c0_4);  
fscanf(myfile20,"%f",&c5_4);  
fscanf(myfile21,"%f",&c10_4);  
fscanf(myfile22,"%f",&c15_4);
```

```
fscanf(myfile23,"%f",&c1_5);  
fscanf(myfile24,"%f",&c4_5);  
fscanf(myfile25,"%f",&c7_5);  
fscanf(myfile26,"%f",&c10_5);
```



```

if (energy1<=energy2 && energy1<=energy3 && energy1<=energy4
    && energy1<=energy5)
{
min_energy=energy1;
min_c1=c0_1;
min_c2=c2_1;
min_c3=c4_1;
min_c4=c6_1;
    }
if (energy2<=energy1 && energy2<=energy3 && energy2<=energy4
    && energy2<=energy5)
{
min_energy=energy2;
min_c1=c0_2;
min_c2=c3_2;
min_c3=c6_2;
min_c4=c9_2;
    }
if (energy3<=energy1 && energy3<=energy2 && energy3<=energy4
    && energy3<=energy5)
{
min_energy=energy3;
min_c1=c0_3;
min_c2=c4_3;
min_c3=c8_3;
min_c4=c12_3;
    }
if (energy4<=energy1 && energy4<=energy2 && energy4<=energy3
    && energy4<=energy5)
{
min_energy=energy4;
min_c1=c0_4;
min_c2=c5_4;
min_c3=c10_4;

```

```

min_c4=c15_4;
    }
if (energy5<=energy1 && energy5<=energy2 && energy5<=energy3
    && energy5<=energy4)
{
min_energy=energy5;
min_c1=c1_5;
min_c2=c4_5;
min_c3=c7_5;
min_c4=c10_5;
    }
fprintf(myfile6,"%0.6f\n", min_energy );
fprintf(myfile27,"%0.2f    %0.6f    %0.6f    %0.6f    %0.6f
    %0.6f\n", momentum, min_energy ,
    , min_c1 , min_c2 , min_c3 , min_c4);

momentum=momentum+0.01;
if (momentum>5.01)
break;
    }

system("pause");
    }

```

Υπολογισμός της στροφορμής του συμπυκνώματος υπό δεδομένη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής

Για τον υπολογισμό της στροφορμής του συστήματος ως συνάρτηση της γωνιακής συχνότητας Ω γράφτηκε ο επόμενος κώδικας [19].

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define size 10000

```

```
main()

{
int j=0 , i=0 , count=0 , min_pos=0 ;
float momentum , Omega=0 , energy[size] , min_L , Omega1[size];
float min_o , L , min , angular[size] , min_energy[size];
float min_energy1 , mom;
FILE *myfile1 , *myfile2 , *myfile3;

myfile1=fopen("momentum.txt","r");
myfile2=fopen("Totalminimum.txt", "r");
myfile3=fopen("Omega.txt", "w");

for (j=0;j<=690;j++)
{
fscanf(myfile1,"%f",&momentum);
angular[j]=momentum;
fscanf(myfile2,"%f",&min_energy1);
min_energy[j]=min_energy1;
}

for (Omega=0;Omega<=1;Omega=Omega + 0.00001)
{
for (j=0;j<=690;j++)
{

energy[j]=min_energy[j]+angular[j]*(1-Omega);

}

min=energy[0];

for (i=0;i<=690;i++)
{
```

```

    if (energy [ i]<=min)
    {
        min=energy [ i ];
        min_pos=i ;

            }

        }
    mom=angular [ min_pos ];
    fprintf (myfile3 ,"% .6 f      % .6 f\n" , Omega , mom );

    }
    system ("pause")      ;
    }

```

Υπολογισμός της πυκνότητας του αερίου

Για τον υπολογισμό της πυκνότητας του αερίου ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι σε γλώσσα MATLAB και φαίνεται παρακάτω. Οι τιμές που αναφέρονται αντιστοιχούν στην γραφική παράσταση (13.b)

```

clear all
syms x y m rho theta
c0= 0.443534^0.5
c4= -0.715937^0.5
c8= -0.367008^0.5
c12= 0.394989^0.5
rho=sqrt (x^2+y^2)
theta=atan (y/x)
ff (m)=exp (-rho ^2/2)*rho ^m*exp (i *m*theta)/(pi*factorial (m))^0.5
ffinal=c0*ff (0)+c4*ff (4)+c8*ff (8) + c12*ff (12)
dens=ffinal*conj (ffinal)
ezcontour (dens , [-5,5]);
axis square;
set (gca , 'FontSize ' ,20)

```

Transition from the mean-field to the bosonic Laughlin state in a rotating Bose-Einstein condensateG. Vasilakis,¹ A. Roussou,² J. Smyrnakis,¹ M. Magiropoulos,¹ W. von Klitzing,³ and G. M. Kavoulakis¹¹*Hellenic Mediterranean University, School of Engineering, P.O. Box 1939, GR-71004, Heraklion, Greece*²*Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Crete, GR-71004, Heraklion, Greece*³*Institute of Electronic Structure and Laser (IESL), Foundation for Research and Technology (FORTH), N. Plastira 100, Vassilika Vouton, 70013, Heraklion, Crete, Greece*

(Received 23 May 2019; revised manuscript received 29 June 2019; published 7 August 2019)

We consider a weakly interacting Bose-Einstein condensate that rotates in either a harmonic, or a weakly anharmonic trapping potential. Performing numerical calculations, we investigate the behavior of the gas in these two cases as the angular momentum, or equivalently as the rotational frequency of the trap increases. While in the case of a purely harmonic potential the gas makes a transition from the mean-field regime to the correlated Laughlin regime, in the case of anharmonic confinement the mean-field approximation remains always valid. We compare our derived results in these two cases, using both the mean-field approximation, as well as the diagonalization of the many-body Hamiltonian considering a small atom number.

DOI: [10.1103/PhysRevA.100.023606](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.023606)**I. INTRODUCTION**

One of the main characteristics of cold-atomic systems is that, under typical conditions, they are dilute, i.e., the scattering length for atom-atom elastic collisions is much smaller than the interparticle spacing. Under these conditions the system is well described by the mean-field approximation. In the case of bosonic atoms, within this approximation the many-body state is simply a product state, and this leads to the well-known Gross-Pitaevskii equation, which is a nonlinear Schrödinger equation.

The experimental realization of correlated states, where the mean-field approximation breaks down, as well as their theoretical study, has attracted a lot of attention in recent years. Candidate systems for the realization of such states include Bose-Einstein condensates in harmonic and anharmonic traps under rotation, see, e.g., Refs. [1–18] and [19,20], in optical lattices, see, e.g., Refs. [21], and in artificial gauge potentials, see, e.g., Ref. [22], etc.

In the case of rotation in a harmonic trapping potential there is an interesting transition as the angular frequency of the trap, or equivalently as the angular momentum of the gas increases. One may distinguish between two regimes, the limit of slow and fast rotation. In the first regime the angular frequency of the trap Ω is smaller than the trap frequency ω , while the total angular momentum of the system L is of order the total number of atoms N . In the second regime Ω approaches ω , while L becomes of order N^2 .

In the limit of slow rotation the system is well described by the mean-field approximation. The correlations beyond the mean-field approximation lower the energy of the system to subleading order in N (i.e., linear in N). On the other hand, in the limit of rapid rotation, the correlations play a crucial role. In this case even the leading-order term (i.e., quadratic in N) of the energy is affected and, remarkably, the interaction energy reaches its absolute minimum, i.e., it vanishes, for $L \geq N(N - 1)$. Actually, the many-body state of the system

for $L = N(N - 1)$ is given analytically by the bosonic version of the Laughlin state [23] that appears in the quantum Hall effect [24,25]. We stress that in this regime the mean-field approximation cannot in any way describe accurately the lowest-energy state of the system.

In the case of rotation in an anharmonic trapping potential, which we also examine in the present study, for slow rotational frequencies of the trap the system is well described by the mean-field approximation. Depending on the value of the coupling and the angular velocity, the lowest-energy state consists either of giant vortices, a vortex lattice, or a combination of the two, i.e., a vortex lattice with a hole at the center of the trap [26–35]. As we have shown recently [36], in the limit of fast rotation the Laughlin-like states, which one gets in the case of a purely harmonic potential for $L \geq N(N - 1)$, are highly fragile against giant-vortex states, in the presence of even a very weakly anharmonic potential.

In the present study we consider a Bose-Einstein condensate that rotates either in a harmonic trapping potential or in a weakly anharmonic potential and study the transition from the limit of slow to the limit of fast rotation. More specifically, in what follows below we describe in Sec. II the two basic approaches that we use, namely the mean-field approximation, as well as the method of diagonalization of the many-body Hamiltonian.

Then, in Sec. III, we evaluate the energy and the rotational response of this system using both the diagonalization, as well as the mean-field approximation for the cases of harmonic and anharmonic confinement. We proceed in Sec. IV with the evaluation of the single-particle density distribution and the pair-correlation function that results from the diagonalization in both a harmonic and in an anharmonic trapping potential. In Sec. V we present the results from the overlap of the many-body state in the presence and in the absence of the anharmonic potential, as well as the eigenvalues of the single-particle density matrix in the two cases. Finally in Sec. VI we describe a summary of our study and our conclusions.

While numerous studies have investigated some aspects of the problem that we have considered here, the present results are experimentally relevant. First of all, in any experiment, deviations from a purely harmonic potential are unavoidable. In a recent study we have shown that the Laughlin state is highly fragile due to these deviations [36]. According to the results of the present study, we argue that this fragility is more general and it shows up all the way between the limit of slow rotation, up to the limit of fast rotation. In other words, even a small deviation from a purely harmonic potential collapses the many-body state to a mean-field state, destroying any possible correlations that go beyond the mean-field approximation. Therefore, the experimental realization of correlated states is very difficult, even if the limit of fast rotation is reached.

II. MODEL

We consider bosonic atoms, which are confined in a plane, via a very tight potential in the perpendicular direction, and are also subject to an axially symmetric trapping potential along their plane of motion, $V(\rho)$, where ρ is the radial coordinate,

$$V(\rho) = \frac{1}{2}\rho^2(1 + \lambda\rho^2). \quad (1)$$

This trapping potential is assumed to be either harmonic, $\lambda = 0$, or weakly anharmonic, $0 < \lambda \ll 1$. (We set the atom mass M , the trap frequency of the harmonic potential ω , and \hbar equal to unity). The atom-atom interaction is modeled as the usual contact potential, $V_{\text{int}} = g_{2D}\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}')$, where g_{2D} is the strength of the effective two-body interaction (for the effectively two-dimensional problem that we consider).

In our analysis below we consider weak interatomic interactions, i.e., we assume that the interaction energy is much smaller than the oscillator quantum of energy, i.e., $g_{2D}n_{2D} \ll \hbar\omega$, where n_{2D} is the typical two-dimensional density. This assumption allows us to restrict ourselves to the lowest-Landau-level eigenstates of the harmonic potential.

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{\pi m!}} z^m e^{-|z|^2/2}, \quad (2)$$

where $z = \rho \exp(i\phi)$, with ϕ being the azimuthal angle in cylindrical polar coordinates and $m \geq 0$ is the quantum number corresponding to the angular momentum (negative values of m correspond to states outside the lowest Landau level). We stress that even in the case of the anharmonic potential, $\lambda \neq 0$, to lowest order in λ the eigenstates are still the ones of the harmonic potential. The corresponding eigenenergies are

$$\epsilon_m = m + \frac{\lambda}{2}(m+1)(m+2), \quad (3)$$

where $m \geq 0$.

A. Diagonalization of the many-body Hamiltonian

The Hamiltonian in second-quantized form is

$$H = \sum_m \epsilon_m a_m^\dagger a_m + \frac{g}{2} \sum_{m,n,k,l} I_{mnkl} a_m^\dagger a_n^\dagger a_k a_l \delta_{m+n,k+l}, \quad (4)$$

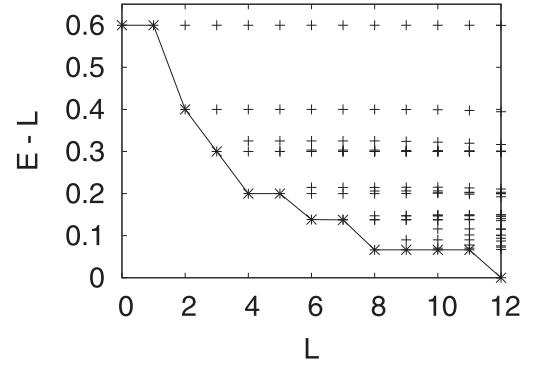


FIG. 1. The full energy spectrum of the many-body Hamiltonian in the rotating frame (in units of $\hbar\omega$), for $\Omega = 1$, in a harmonic potential, for $g = 0.1$, $N = 4$ atoms and $0 \leq L \leq 12$, where L is measured in units of \hbar .

where a_m destroys an atom in the single-particle state ψ_m , $g = g_{2D} \int |\psi_0|^4 d^2\rho = g_{2D}/(2\pi)$, and $I_{mnkl} = (m+n)!/[2^{m+n}\sqrt{m!n!k!l!}]$.

Within the lowest-Landau-level approximation there is a degeneracy of all the states with some given angular momentum. As a result, one has to use degenerate perturbation theory and diagonalize the interaction term within the subspace of these degenerate states. Within this approach all the states with a given atom number N and a given angular momentum L are constructed and then the resulting Hamiltonian matrix is diagonalized. Obviously one has to truncate the single-particle basis states ψ_m up to some maximum value of the quantum number m , m_{max} .

An example of such a calculation is shown in Fig. 1, where we have considered $N = 4$ atoms, and $g = 0.1$, $0 \leq m \leq 6$, with L ranging from $L = 0$ up to $L = N(N-1) = 12$. The Laughlin state includes single-particle states with $m \leq 2(N-1)$. The whole spectrum (i.e., all the eigenvalues) that results from the diagonalization of the many-body Hamiltonian is shown in this plot, in the rotating frame, $E - L\Omega$, with $\Omega = 1$. In a harmonic potential $E - L$ is also equal with the interaction energy. We observe that the lowest energy decreases with increasing L , since the gas expands radially.

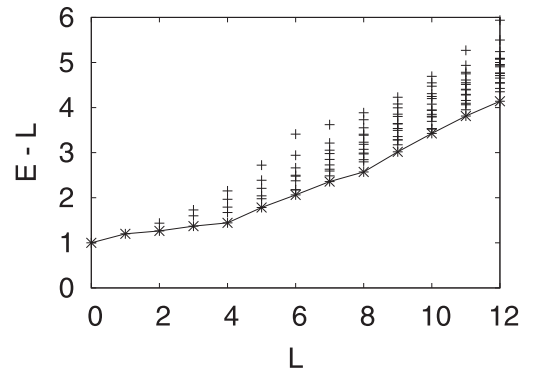


FIG. 2. The full energy spectrum of the many-body Hamiltonian in the rotating frame (in units of $\hbar\omega$), for $\Omega = 1$, in an anharmonic potential, for $\lambda = 0.1$, $g = 0.1$, $N = 4$ atoms and $0 \leq L \leq 12$, where L is measured in units of \hbar .

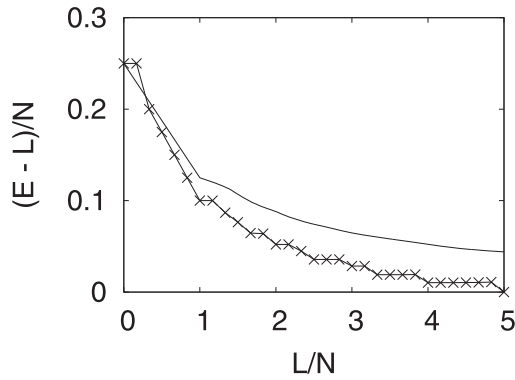


FIG. 3. The (minimum) interaction energy per particle in the rotating frame, $(E - L\Omega)/N$ (in units of $\hbar\omega$), with $\Omega = 1$, evaluated within the mean-field approximation (solid line) and within the diagonalization of the many-body Hamiltonian (solid line with crosses), in a purely harmonic potential, for $g = 0.1$, $N = 6$ atoms and $0 \leq L \leq 30$, where L is measured in units of \hbar .

We also see that the lowest energy vanishes for $L = 12$, which corresponds to the bosonic Laughlin state. The same calculation in an anharmonic potential, with $\lambda = 0.1$ and for the same parameters as in Fig. 1, is shown in Fig. 2.

B. Mean-field approximation

Within the mean-field Gross-Pitaevskii approximation one has to minimize the energy

$$E_{\text{mf}}/N = -\frac{\hbar^2}{2M} \int (\Psi_\ell^{MF})^* \nabla^2 \Psi_\ell^{MF} d^2\rho + \frac{g^2 D}{2} (N-1) \int |\Psi_\ell^{MF}|^4 d^2\rho, \quad (5)$$

where Ψ_ℓ^{MF} is the mean-field order parameter, with $\ell = L/N$ being the expectation value of the angular momentum per atom. In the case of harmonic confinement only the interaction energy, i.e., the second term has to be minimized, since for

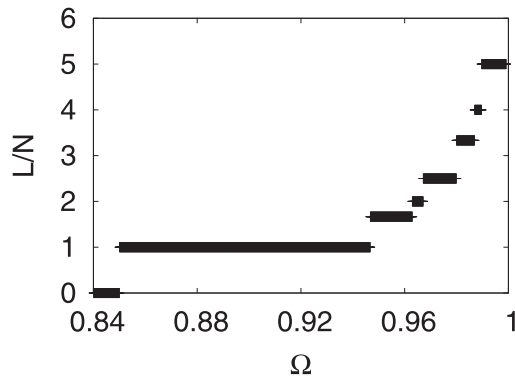


FIG. 4. The function $\ell(\Omega)$ (where $\ell = L/N$ is measured in units of \hbar and Ω in units of ω), for $N = 6$ atoms and $g = 0.1$ in a purely harmonic potential, from the energy evaluated within the diagonalization of the many-body Hamiltonian of Fig. 3. The first critical frequency is equal to 0.85, in agreement with Eq. (7).

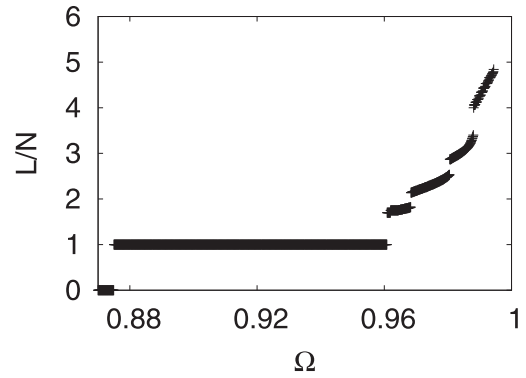


FIG. 5. The function $\ell(\Omega)$ (where $\ell = L/N$ is measured in units of \hbar and Ω in units of ω), for $N = 6$ atoms and $g = 0.1$ in a purely harmonic potential, from the energy evaluated within the mean-field approximation of Fig. 3. The first critical frequency is equal to 0.875, in agreement with Eq. (8).

some fixed value of the angular momentum the first term is equal to L .

A convenient way to do that is to expand the order parameter in the basis of the single-particle eigenstates ψ_m ,

$$\Psi_\ell^{MF} = \sum_{m=0}^{m_{\text{max}}} c_m \psi_m \quad (6)$$

and then perform the minimization under the two constraints of particle normalization $\sum_m c_m^2 = 1$ and fixed angular momentum $\sum_m m c_m^2 = L/N = \ell$.

III. ENERGY AND ROTATIONAL RESPONSE

A. Harmonic trapping potential

Following the two approaches described above we plot in Fig. 3 the result from the minimization of the energy for $N = 6$ and $g = 0.1$ evaluated within the mean-field approximation, for $0 \leq \ell \leq 5$. What is actually plotted is the energy in the

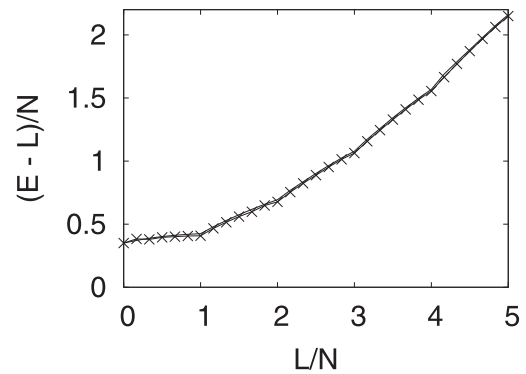


FIG. 6. The (minimum) energy per particle in the rotating frame, $(E - L\Omega)/N$ (in units of $\hbar\omega$), with $\Omega = 1$, evaluated within the mean-field approximation (solid line) and within the diagonalization of the many-body Hamiltonian (solid line with crosses), in an anharmonic potential, with $\lambda = 0.1$ and $g = 0.1$, $N = 6$ atoms and $0 \leq L \leq 30$, where L is measured in units of \hbar . The difference between the two curves is hardly visible.

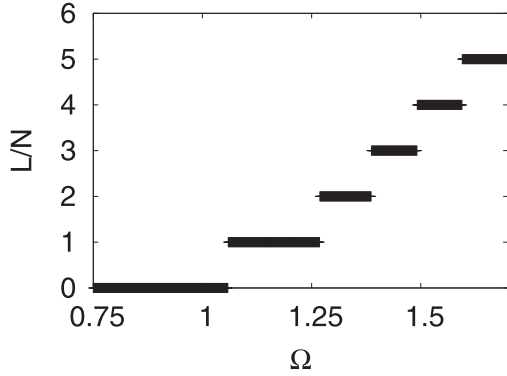


FIG. 7. The function $\ell(\Omega)$ (where $\ell = L/N$ is measured in units of \hbar and Ω in units of ω), for $N = 6$ atoms and $g = 0.1$ in a anharmonic potential, with $\lambda = 0.1$ from the energy evaluated within the diagonalization of the many-body Hamiltonian of Fig. 6. The first critical frequency is ≈ 1.059 .

rotating frame $(E - L\Omega)/N$, with $\Omega = 1$. (As mentioned also above, this coincides with the interaction energy in a purely harmonic potential).

In the same figure, we also plot the lowest-energy eigenvalue of the many-body Hamiltonian for $N = 6$ and $0 \leq L \leq 30$. We see that the energy that is evaluated from the diagonalization is lower than that of the mean field, as expected. The only exception is the case $L = 1$. This state has the same energy as the ground state with $L = 0$ due to the center of mass excitation.

While for small values of ℓ the deviation between the two approaches is correspondingly small (i.e., of order N), as L approaches 30 [i.e., $L = N(N - 1)$], the energy difference increases, becoming of order N^2 . We also observe that in the range $N(N - 2) \leq L \leq N(N - 1) - 1$ for these $N - 1$ values of L the energies are degenerate and result from exciting the center of mass motion of the state with $L = N(N - 2)$. Similar plateaus also form for smaller values of L .

Up to now we have minimized the energy of the system $E(\ell)$ for some fixed angular momentum ℓ . Another

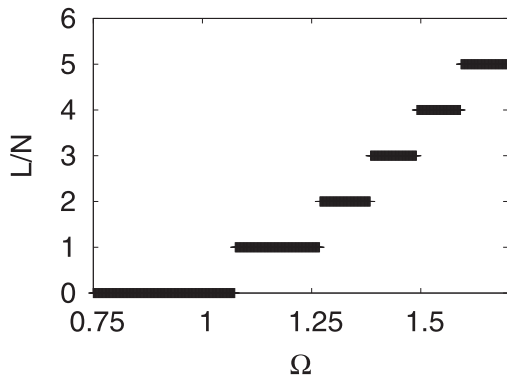


FIG. 8. The function $\ell(\Omega)$ (where $\ell = L/N$ is measured in units of \hbar and Ω in units of ω), for $N = 6$ atoms and $g = 0.1$ in a anharmonic potential, with $\lambda = 0.1$ from the energy evaluated within the mean-field approximation of Fig. 6. The first critical frequency is equal to 1.075, in agreement with Eq. (9).

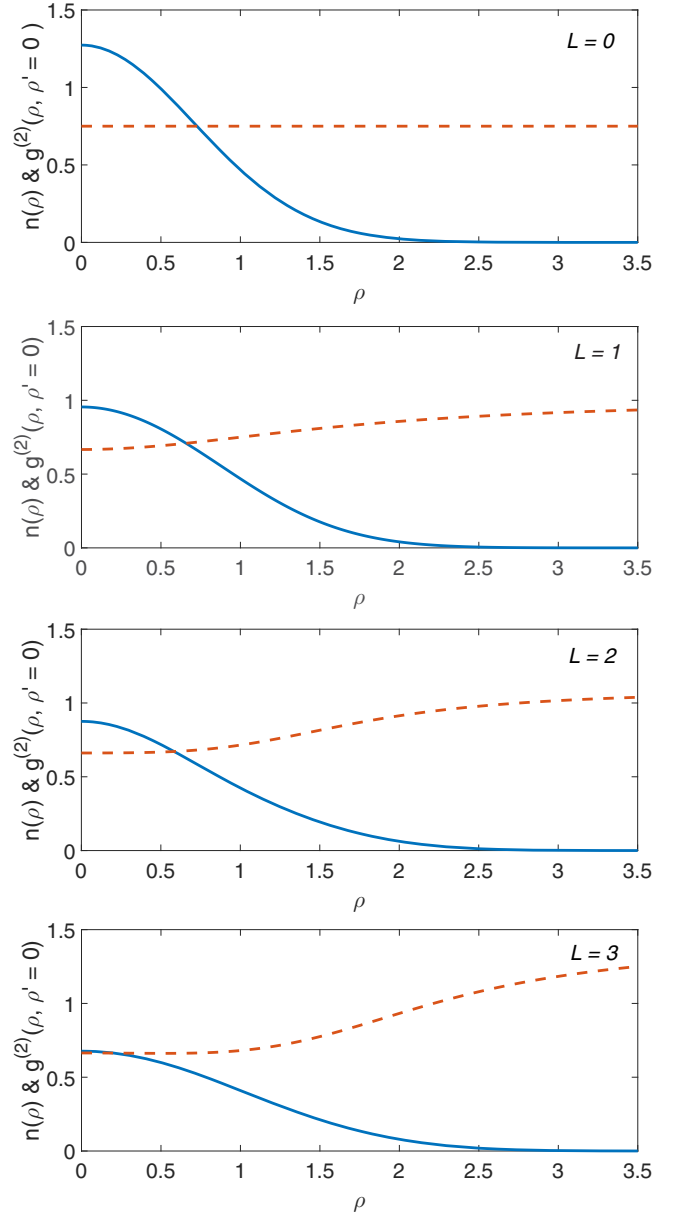


FIG. 9. The density $n(\rho)$ (solid line), in units of a_0^{-2} , where $a_0 = \sqrt{\hbar/(M\omega)}$ is the oscillator length, and the pair-correlation function $g^{(2)}(\rho, \rho' = 0)$ (dashed line), in a purely harmonic potential, for the lowest-energy eigenstate of the Hamiltonian, for $N = 4$ atoms, and $0 \leq L \leq 3$, for $g = 0.1$. Also ρ is measured in units of a_0 .

interesting, and physically relevant calculation is the one where the rotational frequency of the trapping potential Ω is fixed instead. Making the implicit assumption that the trap has an infinitesimal asymmetry and that the cloud equilibrates in the rotating frame, one has to minimize the energy in the rotating frame, $[E(\ell) - L\Omega]/N$, for some fixed value of Ω . Following this procedure the function $\ell(\Omega)$ may be derived.

Figure 4 shows $\ell(\Omega)$ for the energy that is evaluated from the diagonalization approach, while Fig. 5 from the mean-field approach [37]. The first critical frequency Ω_1 associated with a single vortex state entering the cloud, evaluated within the

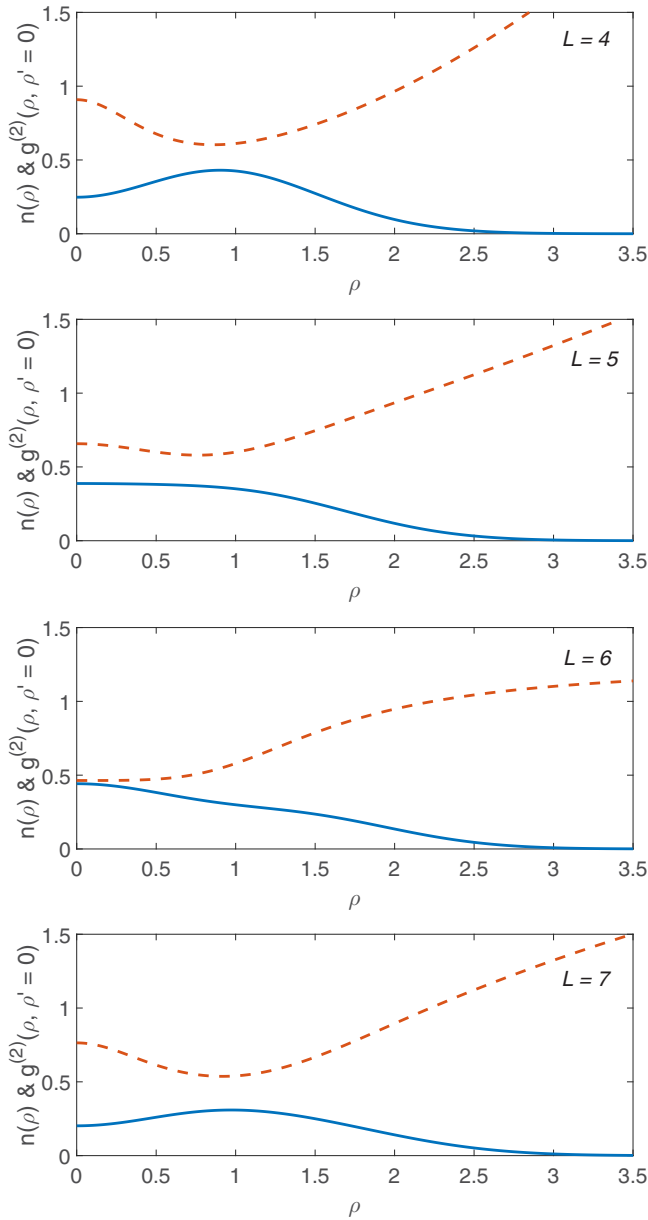


FIG. 10. The density $n(\rho)$ (solid line), in units of a_0^{-2} , and the pair-correlation function $g^{(2)}(\rho, \rho' = 0)$ (dashed line), in a purely harmonic potential, for the lowest-energy eigenstate of the Hamiltonian, for $N = 4$ atoms, and $4 \leq L \leq 7$, for $g = 0.1$. Also ρ is measured in units of a_0 .

diagonalization is given by

$$\Omega_1 = 1 - \frac{1}{4}Ng. \quad (7)$$

The same frequency, evaluated within the mean-field approximation, is

$$\Omega_1 = 1 - \frac{1}{4}(N-1)g. \quad (8)$$

For this reason Ω_1 is 0.85 in Fig. 4, and 0.875 in Fig. 5. As we observe, the value of Ω_1 that results from the exact approach [Eq. (7)] is smaller than the one from the mean-field [Eq. (8)], where N is assumed to be sufficiently large and therefore $N-1 \approx N$.

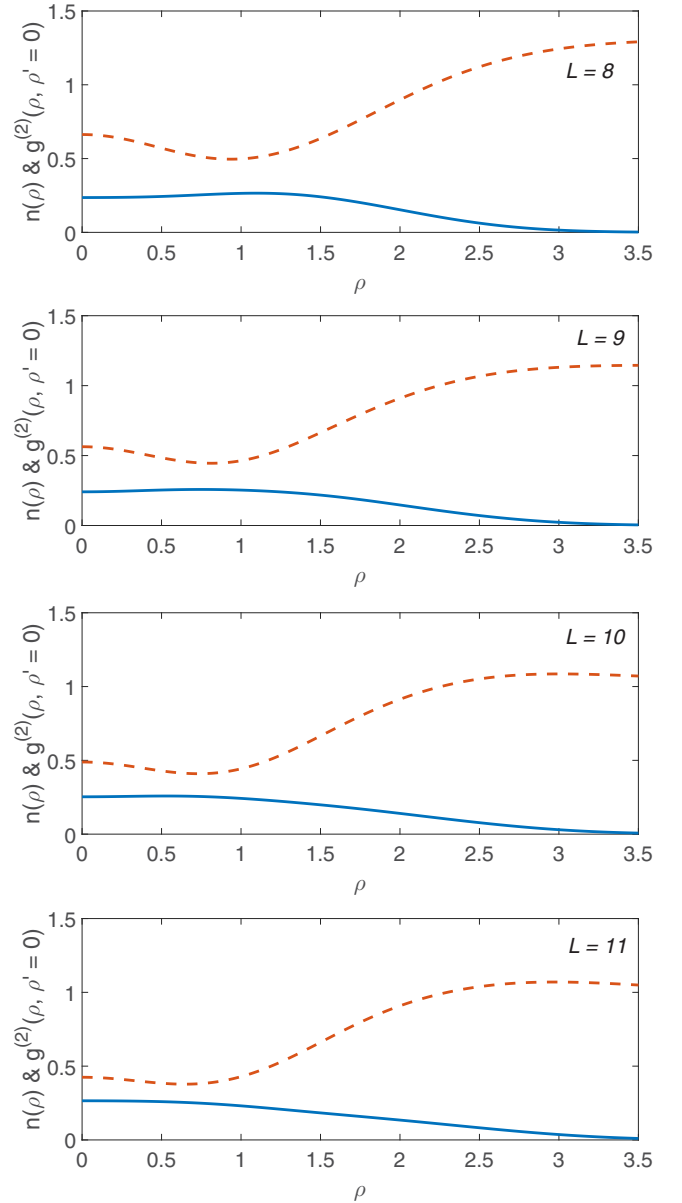


FIG. 11. The density $n(\rho)$ (solid line), in units of a_0^{-2} , and the pair-correlation function $g^{(2)}(\rho, \rho' = 0)$ (dashed line), in a purely harmonic potential, for the lowest-energy eigenstate of the Hamiltonian, for $N = 4$ atoms, and $8 \leq L \leq 11$, for $g = 0.1$. Also ρ is measured in units of a_0 .

B. Anharmonic trapping potential

Turning to the case of anharmonic confinement, we present the same results as Sec. III A, for the same parameters and with $\lambda = 0.1$. Figure 6 shows the energy evaluated within the two approaches, i.e., the diagonalization and the mean-field. The difference between the two is hardly visible.

The function $\ell(\Omega)$ that results from the energies of Fig. 6, is shown in Figs. 7 and 8. One major difference between the present, anharmonic confinement and the harmonic one is that Ω may exceed unity in this case. The critical frequency for the formation of one vortex state is, evaluated within the mean-

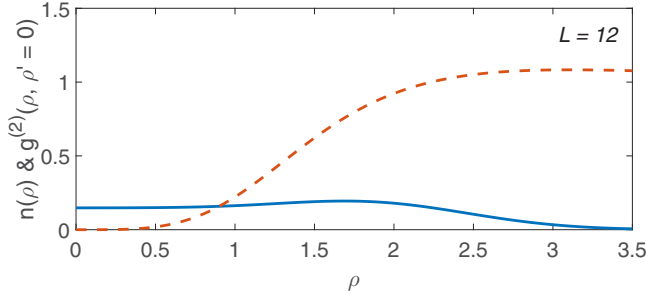


FIG. 12. The density $n(\rho)$ (solid line), in units of a_0^{-2} , and the pair-correlation function $g^{(2)}(\rho, \rho' = 0)$ (dashed line), in a purely harmonic potential, for the lowest-energy eigenstate of the Hamiltonian, for $N = 4$ atoms, and $L = 12$, i.e., the Laughlin state, for $g = 0.1$. Also ρ is measured in units of a_0 .

field approximation

$$\Omega_1 = 1 + 2\lambda - \frac{1}{4}(N-1)g. \quad (9)$$

Indeed, the value of Ω_1 is 1.075 in Fig. 8, while Ω_1 is slightly smaller, ≈ 1.059 , in Fig. 7. As in the case of harmonic confinement, the critical value of Ω_1 in a system with a small atom number is smaller than that for large N , however, here the difference between the two values of the frequency is much smaller. In addition, in the present case of anharmonic confinement $\ell(\Omega)$ consists of rather regular steps, as a result of the quasiperiodic behavior of the dispersion relation.

IV. SINGLE-PARTICLE DENSITY DISTRIBUTION AND THE PAIR-CORRELATION FUNCTION

We turn now to the single-particle density distribution $n(\vec{\rho})$, and the pair-correlation function $g^{(2)}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$. The single-particle density is simply

$$n(\vec{\rho}) = \langle \Phi^\dagger(\vec{\rho})\Phi(\vec{\rho}) \rangle, \quad (10)$$

where $\Phi(\vec{\rho})$ is the operator that destroys a particle at $\vec{\rho}$. Because of the axial symmetry of the problem $n(\vec{\rho})$ is also axially symmetric, $n(\vec{\rho}) = n(\rho)$.

Also, the pair-correlation function is

$$g^{(2)}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = \frac{\langle \Phi^\dagger(\vec{\rho})\Phi^\dagger(\vec{\rho}')\Phi(\vec{\rho}')\Phi(\vec{\rho}) \rangle}{\langle \Phi^\dagger(\vec{\rho})\Phi(\vec{\rho}) \rangle \langle \Phi^\dagger(\vec{\rho}')\Phi(\vec{\rho}') \rangle}. \quad (11)$$

In the calculations, which are shown in the plots, $\vec{\rho}$ and $\vec{\rho}'$ are assumed to point in the same direction.

For $L = 0$, where the many-body state is simply the uncorrelated, mean-field state $|0^N\rangle$, $g^{(2)}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$ is a straight line and equal to $(N-1)/N$. Another easy case is the one with $L = 1$, where the lowest-energy state is $|0^{N-1}, L^1\rangle$. In this case

$$g^{(2)}(\rho, \rho') = \frac{(N-1)[N-2+(\rho-\rho')^2]}{(N-1+\rho^2)(N-1+\rho'^2)}. \quad (12)$$

For large values of N and finite ρ and ρ' , $g^{(2)}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \rightarrow (N-2)/(N-1)$. This behavior is very different than the limit where we have the correlated (Laughlin) states. There, $g^{(2)}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$ has to vanish for $\vec{\rho} = \vec{\rho}'$ due to the correlations between the atoms. As a result $g^{(2)}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$ remains spatially dependent, even for large values of N .

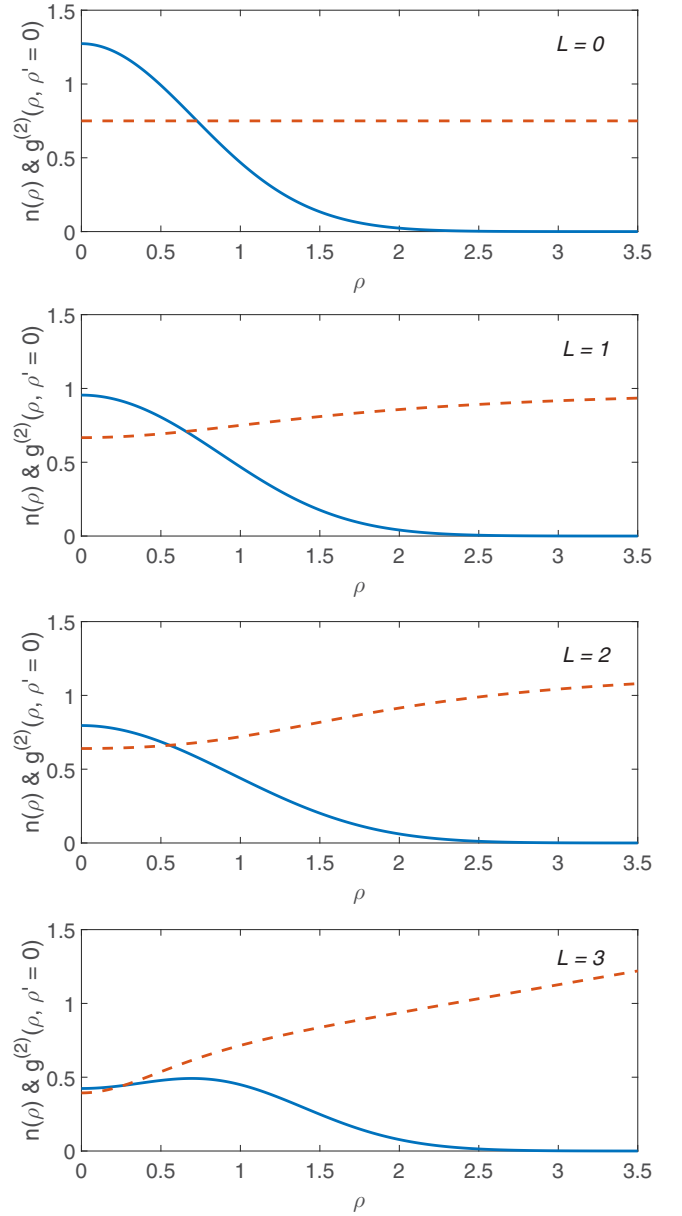


FIG. 13. The density $n(\rho)$ (solid line) in units of a_0^{-2} , and the pair-correlation function $g^{(2)}(\rho, \rho' = 0)$ (dashed line), in a weakly anharmonic potential, for the lowest-energy eigenstate of the Hamiltonian, for $N = 4$ atoms, and $0 \leq L \leq 3$, for $g = 0.1$ and $\lambda = 0.1$. Also ρ is measured in units of a_0 .

A. Harmonic potential

In Figs. 9–12 we have considered $N = 4$ atoms and we have plotted the single-particle density distribution $n(\rho)$, as well as the pair-correlation function $g^{(2)}(\rho, \rho')$, with the reference point ρ' located at zero. We observe that as the angular momentum increases, $n(\rho)$ becomes more extended because the atoms expand radially due to their rotational motion. Furthermore, $n(\rho)$ also becomes more flat (the Laughlin state is the last one, with $L = 12$).

In these figures we also observe that $g^{(2)}(\rho, \rho' = 0)$ develops a node at $\rho = 0$ only for $L = 12$ (i.e., for the Laughlin state).

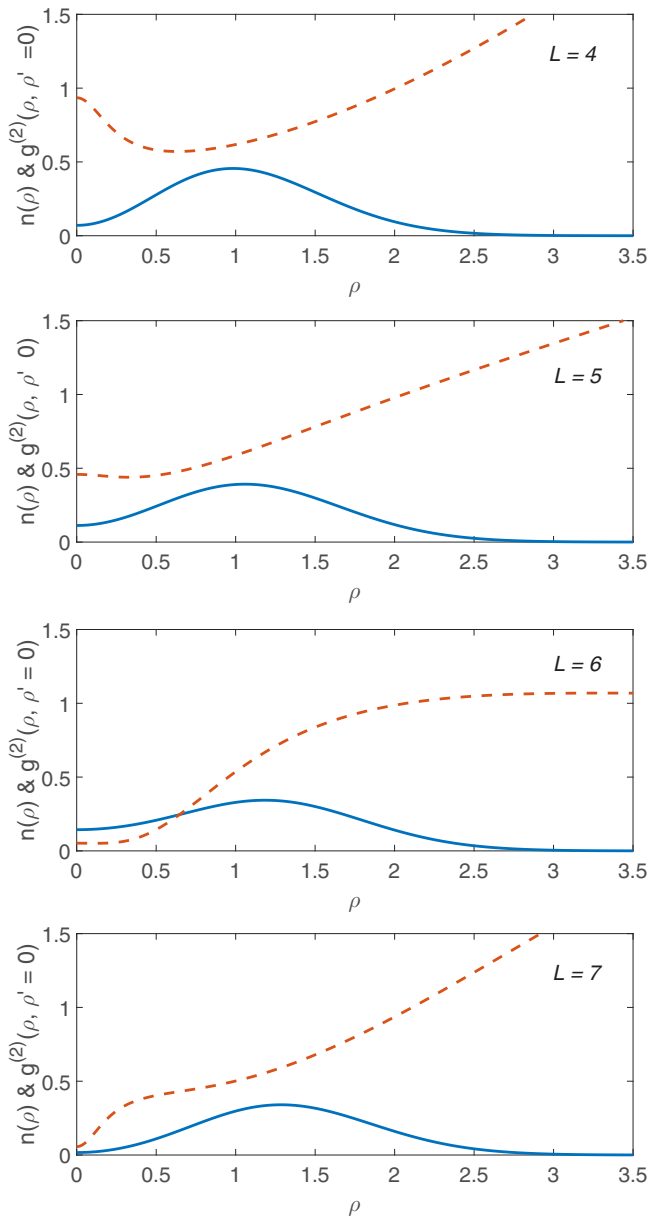


FIG. 14. The density $n(\rho)$ (solid line) in units of a_0^{-2} , and the pair-correlation function $g^{(2)}(\rho, \rho' = 0)$ (dashed line), in a weakly anharmonic potential, for the lowest-energy eigenstate of the Hamiltonian, for $N = 4$ atoms, and $4 \leq L \leq 7$, for $g = 0.1$ and $\lambda = 0.1$. Also ρ is measured in units of a_0 .

B. Anharmonic potential

In Figs. 13–16 we have repeated the same calculation as in Figs. 9–12, in an anharmonic potential, with $\lambda = 0.1$.

While for L up to 4 both the density, as well as the pair-correlation function are roughly the same, for $L \geq 5$ the density starts to deviate in the two cases, of harmonic and anharmonic confinement. The major difference in the density is that while for the harmonic case it becomes more and more uniform as L increases, in the anharmonic it is peaked around some value of ρ . Especially for the value of $L/N = 2$ ($L = 8$) and $L/N = 12$ ($L = 12$) the density is rather close to the one

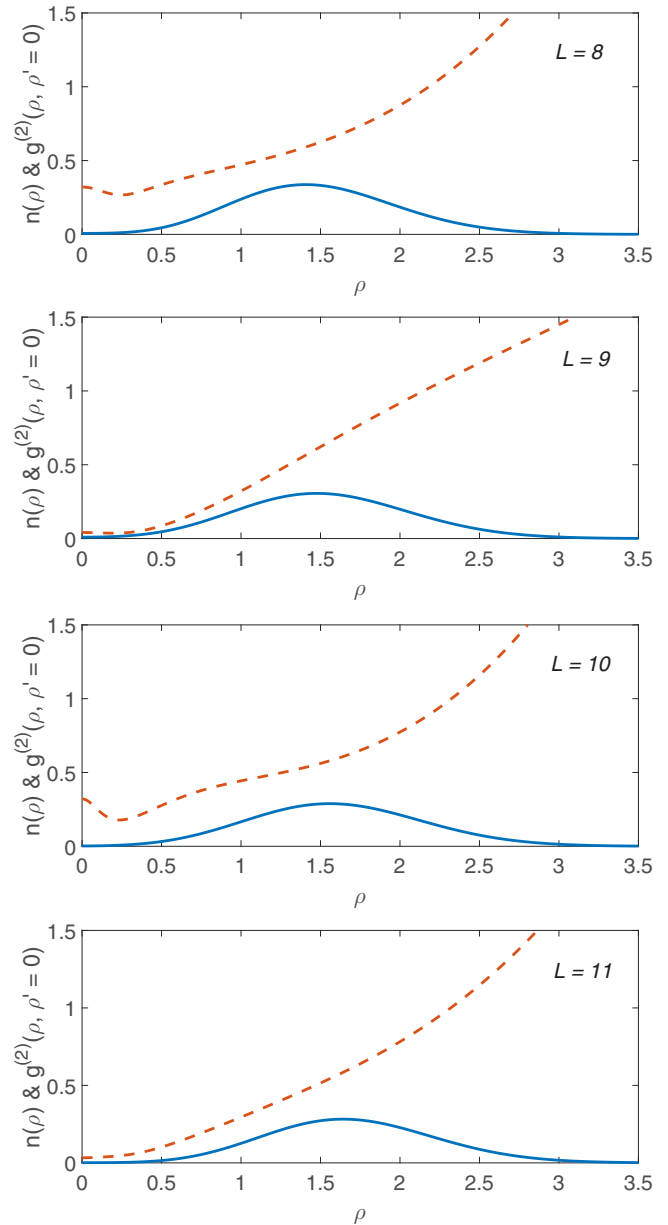


FIG. 15. The density $n(\rho)$ (solid line) in units of a_0^{-2} , and the pair-correlation function $g^{(2)}(\rho, \rho' = 0)$ (dashed line), in a weakly anharmonic potential, for the lowest-energy eigenstate of the Hamiltonian, for $N = 4$ atoms, and $8 \leq L \leq 11$, for $g = 0.1$ and $\lambda = 0.1$. Also ρ is measured in units of a_0 .

expected for the giant-vortex states ψ_2 and ψ_3 , which have a maximum density at $\rho = \sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$, respectively.

Furthermore, for $L \geq 6$ also the pair-correlation function behaves in a different way in the two cases. What is even more important is that in the case of anharmonic confinement, it never develops a node, even for $L = 12$. This result is due to the fact that in the presence of the anharmonic potential the Laughlin state is highly fragile towards an uncorrelated, mean-field, giant-vortex state and as a result the mean-field approximation is still valid [36].

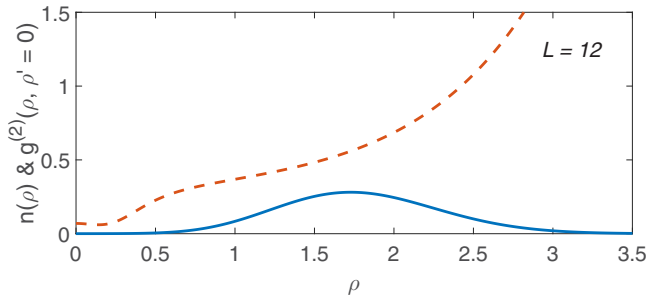


FIG. 16. The density $n(\rho)$ (solid line) in units of a_0^{-2} , and the pair-correlation function $g^{(2)}(\rho, \rho' = 0)$ (dashed line), in a weakly anharmonic potential, for the lowest-energy eigenstate of the Hamiltonian, for $N = 4$ atoms, and $L = 12$, for $g = 0.1$ and $\lambda = 0.1$. Also ρ is measured in units of a_0 .

V. OVERLAPS AND SINGLE-PARTICLE DENSITY MATRIX

Another calculation that demonstrates the transition from the mean-field regime to the correlated regime involves an overlap. More specifically we considered $N = 5$ atoms, with $g = 0.1$ and evaluated the lowest-energy many-body eigenstate $|\Psi\rangle$ for $0 \leq L \leq 20$, in a purely harmonic potential and the corresponding many-body state $|\Psi\rangle_{\text{anh}}$ in a weakly anharmonic potential, with $\lambda = 0.1$.

The overlap $|\langle\Psi|\Psi_{\text{anh}}\rangle|$ is shown in Fig. 17, as function of the angular momentum L . One sees that there is a general tendency of this overlap to decrease with increasing L . This is a direct consequence of the transition of the system from the mean-field regime to the correlated regime. While in the mean-field regime the many-body state is less sensitive to the anharmonicity, as L increases, the anharmonic part of the potential affects more and more the many-body state.

Another interesting observation is that the overlap has local maxima for values of L , which are integer multiples of N , i.e., for $L = 0, 5, 10, 15$, and 20 . This is due to the fact that $|\Psi_{\text{anh}}\rangle$ is closer to the mean-field giant-vortex states for these values of L .

In Fig. 18 we plot the overlap $|\langle\Psi|\Psi_{\text{anh}}\rangle|$ for four different values of $\lambda = 0.001, 0.01, 0.1$, and 1 . We have chosen $N = 5$, $(N - 1)g = 0.4$ and the two values of $L = 10$ and $L = 20$. In the case of a purely harmonic potential the value $L = 10$

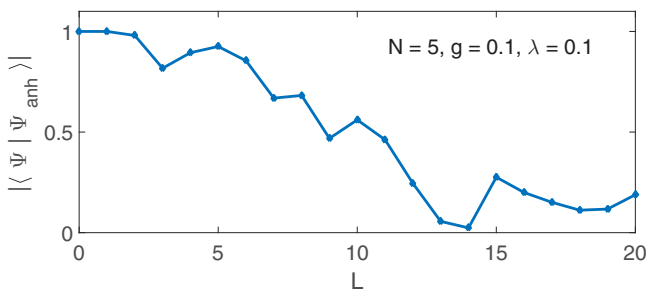


FIG. 17. The overlap between the lowest-energy eigenstate $|\Psi_{\text{anh}}\rangle$ of the Hamiltonian in a weakly anharmonic potential, with $\lambda = 0.1$, and the lowest-energy eigenstate in a purely harmonic potential $|\Psi\rangle$, for $N = 5$ atoms, $0 \leq L \leq 20$, and $g = 0.1$. Here L is measured in units of \hbar .

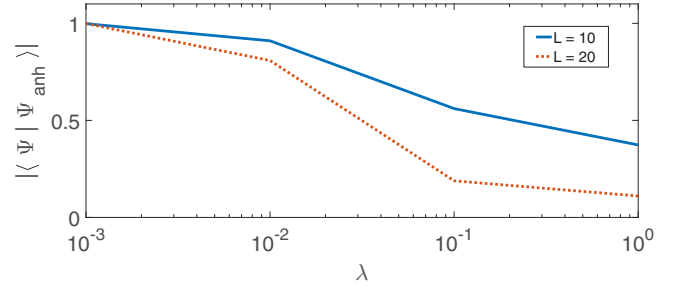


FIG. 18. The overlap between the lowest-energy eigenstate $|\Psi_{\text{anh}}\rangle$ of the Hamiltonian in a weakly anharmonic potential, for $\lambda = 0.001, 0.01, 0.1$, and 1 , and the lowest-energy eigenstate in a purely harmonic potential $|\Psi\rangle$, for two values of $L = 10$ (higher) and $L = 20$ (lower), for $N = 5$ atoms, and $g = 0.1$. Here L is measured in units of \hbar .

corresponds to the double vortex, which is well described by the mean-field approximation, while the value $L = 20$ corresponds to the Laughlin state. We observe that the overlap decreases with increasing λ . We also see that the decrease is more rapid for the higher value of L . This is due to the fact that the Laughlin states are more fragile than the mean-field states.

As a final result we show in Figs. 19 and 20 the eigenvalues of the single-particle density matrix that correspond to the lowest-energy eigenstates of the many-body Hamiltonian for three values of the angular momentum. The eigenvalues of the single-particle density matrix coincide with the occupancies of the single-particle states, since the density matrix is diagonal (due to the axial symmetry of the problem).

In Fig. 19 we have considered $N = 6$ atoms in a purely harmonic potential, with $g = 0.1$. For $L = 15$, i.e., $L/N = 2.5$, according to the mean-field approximation the state has a threefold symmetry, where only the single-particle states with $m = 0, 3, 6, \dots$ are macroscopically occupied. Indeed, the states with $m = 0$ and $m = 3$ do have the maximum occupancy. The $m = 6$ state has an occupancy, which is comparable with that of states with other values of m . The occupancy of these states is due to finite- N corrections.

According to the mean-field approximation the pattern mentioned above (i.e., with the lowest-energy state having some discrete rotational symmetry) continues all the way up

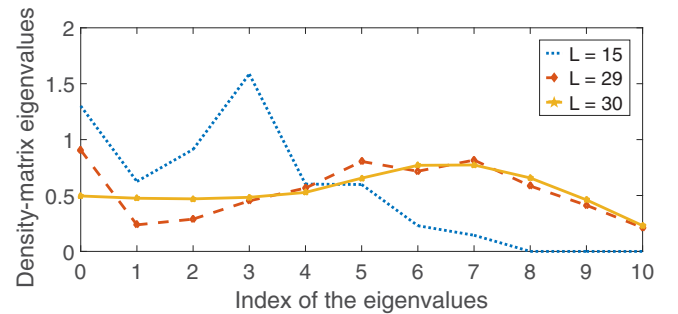


FIG. 19. The eigenvalues of the single-particle density matrix in a purely harmonic potential, for $N = 6$ atoms, $g = 0.1$, and $L = 15$ (dotted line), 29 (dashed line), and 30 (solid line).

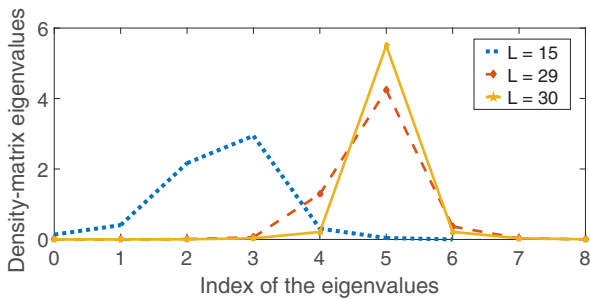


FIG. 20. The eigenvalues of the single-particle density matrix in an anharmonic potential with $\lambda = 0.1$, for $N = 6$ atoms, $g = 0.1$, and $L = 15$ (dotted line), 29 (dashed line), and 30 (solid line).

to $L = N(N - 1)$. Still, in the present case, where for $L = 30$ the system is in the Laughlin state, this is not the case. For example, for $L = 30$ the occupancy of all the states with $0 \leq m \leq 10$ is roughly the same. For $L = 29$ a precursor of this effect is also seen. This effect is a direct consequence of the transition of the system from the mean-field to the correlated regime.

Finally, Fig. 20 shows the same result in an anharmonic potential, with $\lambda = 0.1$. In this case the situation changes drastically, where the same behavior is seen for all the three values of L that we have considered. Due to the anharmonic potential (even if it is weak), there is one single-particle state ψ_{m_0} with a large occupancy, while at least $\psi_{m_0 \pm 1}$ also has a non-negligible occupancy. Again, we see that the effect of the anharmonic potential is rather drastic, irrespective of the value of L .

VI. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In the present study we have investigated numerically the rotational properties of a Bose-Einstein condensate that is confined either in a harmonic, or in a weakly anharmonic trapping potential. In the case of harmonic confinement, the system makes a transition from the mean-field regime to a correlated regime, where the many-body state develops correlations that go beyond the simple product state that one assumes within the mean-field approximation.

Having considered a small atom number, and diagonalizing the Hamiltonian, we have evaluated the many-body state, which undergoes the transition mentioned above. One may

identify numerous effects due to this transition, in connection also with the small atom number we have considered. (Clearly, for small values of N the difference between N and N^2 is not very significant and certainly not as significant as macroscopically large values of N).

First, the correlations introduce corrections in the energy of the gas, which are of subleading order in N for slow rotation, while they affect the energy to leading order in N in the limit of fast rotation. Second, the angular momentum $\ell(\Omega)$ of the gas for a fixed rotational frequency has a structure that is different than the corresponding limit of large N . Third, the single-particle density distribution becomes flat, while the pair-correlation function develops a node as soon as the system reaches the Laughlin state. The last effect is the almost equal occupancy of the single-particle states, or equivalently of the eigenvalues of the single-particle density matrix.

Introducing (even) a weak anharmonic potential, we observe a drastic change in the system. First of all, the energy is well described by the mean-field approximation, for any value of the angular momentum of the gas and/or angular velocity of the trap. As a result, $\ell(\Omega)$ develops a rather regular structure, while the single-particle density distribution is also correspondingly simple, as well as the occupancy of the single-particle states. Correlations play a minor role in this case and the Laughlin state is no longer the lowest-energy state of the system in the limit of rapid rotation (it is a giant-vortex state instead). Finally, the pair-correlation function no longer has a node, since the many-body state does not have the correlations of the Laughlin state in this case.

The derived results for small atom numbers are important for numerous reasons. First of all, there is a general tendency of the field of cold atoms to move towards this limit experimentally. We stress that a major advantage of a system with a small atom number is that one easily reaches the limit of rapid rotation, where the many-body state is described by the bosonic Laughlin state.

In addition, since even a weak anharmonic term in the trapping potential (which is essentially unavoidable in any real experiment) destabilizes the correlated states, the only way for the correlated states to survive is to work with a small atom number [36]. As we have seen, the anharmonicity parameter affects the rotational properties of the system drastically. Thus, it would be equally interesting to realize the correlated states experimentally, and also to investigate and/or confirm the effect of the anharmonic confining potential on the rotational response of this system as the anharmonicity parameter is tuned.

-
- [1] N. R. Cooper and N. K. Wilkin, *Phys. Rev. B* **60**, R16279(R) (1999).
 - [2] N. K. Wilkin and J. M. F. Gunn, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 6 (2000).
 - [3] S. Viefers, T. H. Hansson, and S. M. Reimann, *Phys. Rev. A* **62**, 053604 (2000).
 - [4] B. Paredes, P. Fedichev, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 010402 (2001).
 - [5] N. R. Cooper, N. K. Wilkin, and J. M. F. Gunn, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120405 (2001).
 - [6] T. L. Ho, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 060403 (2001).
 - [7] J. Sinova, C. B. Hanna, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 030403 (2002).
 - [8] N. Regnault and Th. Jolicoeur, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 030402 (2003).
 - [9] N. Regnault and T. Jolicoeur, *Phys. Rev. B* **69**, 235309 (2004).
 - [10] G. Baym and C. J. Pethick, *Phys. Rev. A* **69**, 043619 (2004).
 - [11] N. Regnault, C. C. Chang, T. Jolicoeur, and J. K. Jain, *J. Phys. B* **39**, S89 (2006).
 - [12] N. Barberán, M. Lewenstein, K. Osterloh, and D. Dagnino, *Phys. Rev. A* **73**, 063623 (2006).

- [13] L. O. Baksmaty, C. Yannouleas, and Uzi Landman, *Phys. Rev. A* **75**, 023620 (2007).
- [14] N. R. Cooper, *Adv. Phys.* **57**, 539 (2008).
- [15] S. Viefers, *J. Phys.: Condens. Matter* **20**, 123202 (2008).
- [16] M. Roncaglia, M. Rizzi, and J. Dalibard, *Sci. Rep.* **1**, 43 (2011).
- [17] V. Schweikhard, I. Coddington, P. Engels, V. P. Mogendorff, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040404 (2004).
- [18] V. Bretin, S. Stock, Y. Seurin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 050403 (2004); S. Stock, B. Battelier, V. Bretin, Z. Hadzibabic, and J. Dalibard, *Laser Phys. Lett.* **2**, 275 (2005).
- [19] A. G. Morris and D. L. Feder, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 240401 (2007).
- [20] N. Rougerie, S. Serfaty, and J. Yngvason, *Phys. Rev. A* **87**, 023618 (2013); *J. Stat. Phys.* **154**, 2 (2014); E. H. Lieb, N. Rougerie, and J. Yngvason, *ibid.* **172**, 544 (2018).
- [21] A. S. Sørensen, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 086803 (2005); R. N. Palmer and D. Jaksch, *ibid.* **96**, 180407 (2006); M. Hafezi, A. S. Sørensen, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. A* **76**, 023613 (2007); R. Bhat, M. Krämer, J. Cooper, and M. J. Holland, *ibid.* **76**, 043601 (2007); R. N. Palmer, A. Klein, and D. Jaksch, *ibid.* **78**, 013609 (2008).
- [22] D. Jaksch and P. Zoller, *New J. Phys.* **5**, 56 (2003); E. J. Mueller, *Phys. Rev. A* **70**, 041603(R) (2004); B. Juliá-Díaz, D. Dagnino, K. J. Günter, T. Grass, N. Barberán, M. Lewenstein, and J. Dalibard, *ibid.* **84**, 053605 (2011); T. Graß, B. Juliá-Díaz, and M. Lewenstein, *ibid.* **89**, 013623 (2014); Y. Kuno, T. Nakafuji, and I. Ichinose, *ibid.* **92**, 063630 (2015); Y. Kuno, K. Shimizu, and I. Ichinose, *ibid.* **95**, 013607 (2017).
- [23] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
- [24] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- [25] H. L. Stormer, D. C. Tsui, and A. C. Gossard, *Rev. Mod. Phys.* **71**, S298 (1999).
- [26] A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **64**, 063608 (2001).
- [27] E. Lundh, *Phys. Rev. A* **65**, 043604 (2002).
- [28] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **66**, 053606 (2002).
- [29] U. R. Fischer and G. Baym, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 140402 (2003).
- [30] G. M. Kavoulakis and G. Baym, *New J. Phys.* **5**, 51 (2003).
- [31] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and E. Lundh, *Phys. Rev. A* **69**, 053619 (2004); A. D. Jackson and G. M. Kavoulakis, *ibid.* **70**, 023601 (2004).
- [32] A. L. Fetter, B. Jackson, and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **71**, 013605 (2005).
- [33] Jong-kwan Kim and A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **72**, 023619 (2005).
- [34] H. Fu and E. Zaremba, *Phys. Rev. A* **73**, 013614 (2006).
- [35] M. Correggi, F. Pinsker, N. Rougerie, and J. Yngvason, *Phys. Rev. A* **84**, 053614 (2011).
- [36] A. Roussou, J. Smyrnakis, M. Magiropoulos, N. K. Efremidis, W. von Klitzing, and G. M. Kavoulakis, *Phys. Rev. A* **99**, 053613 (2019).
- [37] D. A. Butts and D. S. Rokhsar, *Nature (London)* **397**, 327 (1999).

Αναφορές

- [1] S. N. Bose, Zeitschrift für Physik **26**, 178 (1924).
- [2] A. Einstein, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse p. 261 (1924), p. 3 (1925).
- [3] M.H. Anderson, J. R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).
- [4] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [5] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
- [6] *Κβαντομηχανική I*, Στέφανος Τραχανάς, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 8η έκδοση 1999.
- [7] *Μερικές Διαφορικές εξισώσεις*, Στέφανος Τραχανάς, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 1η έκδοση, 2001.
- [8] *Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις*, Τόμος I, Στέφανος τραχανάς, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 5η έκδοση, 1999.
- [9] *Κβαντομηχανική II*, Στέφανος Τραχανάς, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 5η έκδοση 1991.
- [10] O. Penrose and L. Onsager, Phys. Rev. **104**, 576 (1956).
- [11] Wolfgang Ketterle and N. J. van Druten, Phys. Rev. A **54**, 656 (1996).
- [12] V. Bagnato and D. Kleppner, Phys. Rev. A **44**, 7439 (1991).
- [13] A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. AboShaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).
- [14] E. P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).
- [15] L. P. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **40**, 646 (1961) [Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961)]
- [16] D. A. Butts and D. S. Rokhsar, Nature (London) **397**, 327 (1999).
- [17] G. M. Kavoulakis, B. Mottelson, and C. J. Pethick, Phys. Rev. A **62**, 063605 (2000).

- [18] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E.A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999); K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000); F. Chevy, K. W. Madison, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **85**, 2223 (2000).
- [19] *C, Από την θεωρία στην Εφαρμογή*, Γ. Σ. Τσελίκης, Δρ. Ν. Δ. Τσελίκας, 3η έκδοση, 2016.