

Σύγχρονες Μαθηματικές Μέθοδοι στην
επεξεργασία εικόνας

Φωτεινός Πορτοκαλλάς, Νίκος Χρονάκης
Τμήμα Ηλεκτρονικής
ΤΕΙ ΚΡΗΤΗΣ, Παρ. Χανίων

23 Μαρτίου 2010

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΑΓΩΓΗ	5
1.1	Γενιότητες	5
1.1.1	Η ψηφιακή εικόνα	6
1.1.2	Ευχρίνεια εικόνας	7
1.1.3	Χρωματική Απεικόνιση Εικόνων - Χρωματικοί Χώροι	8
1.1.4	Επεξεργασία Εικόνων	8
1.2	Κατάτμηση εικόνας	9
1.2.1	Κλασικές μέθοδοι	9
1.2.2	Μέθοδοι καταωφλίωσης και πολυκαταωφλίωσης	10
1.2.3	Τεχνικές τοπικού καταωφλίου	12
1.3	Ανίχνευση περιγραμμάτων	13
1.3.1	Προσδιορισμός περιγραμμάτων με τη χρήση πρώτων παραγωγών	13
1.3.2	Προσδιορισμός περιγραμμάτων με τη χρήση παραγωγών δεύτερης τάξης	14
1.3.3	Η μέθοδος των Marr-Hildreth	14
1.3.4	Ο αλγόριθμος CANNY	14
1.3.5	Προσδιορισμός περιγραμμάτων	15
1.3.6	Παράσταση περιγραμμάτων	15
I	Η μαθηματική θεωρία της κατατμησης	17
2	Εισαγωγή	19
2.0.7	Ορισμοί και στόχοι	20
3	Το συναρτησιοειδές των Mumford – Shah	25
3.0.8	Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης	25
3.1.1	Το μαθηματικό πλαίσιο για την ύπαρξη λύσης	25
3.5	Ομαλότητα του συνόλου περιγραμμάτων	32
3.8.1	Προσεγγίσεις του συναρτησιοειδούς Mumford-Shah.	36
3.10.1	Αποτελέσματα πειραμάτων	41

4	Δυναμικές Μέθοδοι	43
4.1	Ενεργά γεωδαιτικά περιγράμματα	43
4.1.1	Το μοντέλο Kass - Witkin - Τερζόπουλου	43
4.1.2	Το μοντέλο ενεργών γεωδαιτικών περιγραμμάτων	45
4.5	Η μέθοδος των σταθμικών συνόλων	50
4.7.1	Παρατήρηση (Σχετικά με τη αρχή μεγίστου για τις παραβολικές εξισώσεις).	59
4.8.1	Η εξίσωση επανέναρξης	60
4.9	Χαρακτηρισμός της συνάρτησης απόστασης	61
4.14	Υπαρξη και μοναδικότητα μιάς ομοιόμορφα συνεχούς λύσης	64
4.18.1	Αποτελέσματα πειραμάτων.	72
4.19	Τελευταίες πρόοδοι	74
4.19.1	Καθολικά κριτήρια τερματισμού	74
4.20	Γενικότερα σχήματα	77
4.21	Τοπικές εκτιμήσεις για τη ροή σταθμικών συνόλων	78
4.21.1	Εισαγωγή	78
4.21.2	Ανισότητα Hardy	78
4.21.3	Χωρία εντοπισμού	79
4.21.4	Η ανισότητα Harnack	79

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικότητες

Παραδοσιακά η επεξεργασία εικόνας γινόταν με αναλογικό τρόπο, με την χρήση οπτικών συστημάτων (π.χ. φακοί). Η ανάπτυξη των υπολογιστών έφερε την έννοια της ψηφιακής εικόνας και της επεξεργασίας της. Σήμερα η εικόνα είναι ένας αριθμητικός πίνακας και η επεξεργασία της συνίσταται στην εκτέλεση μαθηματικών πράξεων άνω στα στοιχεία αυτού του πίνακα. Έτσι η ψηφιακή επεξεργασία και ανάλυση εικόνας έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια λόγω της ραγδαίας εξέλιξης των υπολογιστών, έτσι αναδείχθηκαν νέες εφαρμογές, οι οποίες συνέβαλαν με την σειρά τους στην βελτίωση των υπολογιστών. Η επεξεργασία της εικόνας περιλαμβάνει τη βελτίωση της ποιότητας της εικόνας, το φιλτράρισμα του θορύβου καταγραφής ή μετάδοσης, η συμπίεση του όγκου πληροφορίας, η αποθήκευση εικόνας και η ψηφιακή μετάδοση της. Η ψηφιακή ανάλυση εικόνας ασχολείται με την περιγραφή και αναγνώριση του περιεχομένου της εικόνας. Η Ψ.Ε.Ε αναπτύχθηκε για να αντιμετωπίσει τα ακόλουθα κύρια προβλήματα :

- Τη ψηφιοποίηση (digitization), κωδικοποίηση εικόνων με στόχο την εκτύπωση, αποθήκευση και μετάδοση τους.
- Τη βελτίωση και την αποκατάσταση των εικόνων με στόχο την καλύτερη απεικόνιση και κατανόηση τους.
- Την τμηματοποίηση (segmentation),
- Την ανάλυση και την κατανόηση των εικόνων.

Η ανάπτυξη των εφαρμογών έδωσε μία ισχυρή ώθηση στην προσπάθεια κατανόησης και της ανθρώπινης όρασης. [Μ^ο] Η Ψ.Ε.Ε αλληλεπιδρά με τους επιστημονικούς κλάδους :

- Ψηφιακή επεξεργασία σημάτων.
- Ρομποτική όραση και μηχανικής όρασης.

- Τεχνητή νοημοσύνη.
- Αναγνώριση προτύπων.
- Κωδικοποίηση.
- Γραφικά Υπολογιστών.

1.1.1 Η ψηφιακή εικόνα

Μια ψηφιακή εικόνα μπορεί να είναι δυαδική, συνήθης ασπρόμαυρη και έγχρωμη. Η δυαδική εικόνα είναι ένας πίνακας με δύο τιμές (0 ή 1) απόλυτα φωτεινό ή απόλυτα σκοτεινό. Η συνήθης ασπρόμαυρη ψηφιακή εικόνα παριστάνεται από έναν $N \times M$ αριθμητικό πίνακα κάθε στοιχείο του οποίου μας δίνει την στάθμη φωτεινότητας της κάθε κυψέλης (pixel). Μια έγχρωμη εικόνα είναι ένας $N \times M$ πίνακας τρισδιάστατων διανυσμάτων δηλαδή η φωτεινότητα αντικαθίσταται από ένα διάνυσμα που είναι η ανάλυση του χρώματος σε κόκκινο, πράσινο, μπλέ (RGB). Θα χαρακτηρίσουμε τις εικόνες ανάλογα με τον αν αποτυπώνουν την εκπεμπόμενη, ανακλώμενη, απορροφώμενη ακτινοβολία.

- **Απεικόνιση αντανάκλασης :** Η εικόνα αποτυπώνει την αντανάκλαση της ακτινοβολίας από ένα αντικείμενο. (οπτική, ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, radar, sonar).
- **Απεικόνιση εκπομπής:** Η εικόνα αποτυπώνει την ακτινοβολία που εκπέμπει ένα αντικείμενο [ηλεκτρομαγνητική (θερμική), πυρηνική].
- **Απεικόνιση απορρόφησης :** Η εικόνα αποτυπώνει την απορρόφηση ακτινοβολίας από ένα αντικείμενο.

Ακτίνες X-Γ : Η απεικόνιση με ακτίνες X (ιονίζουσα ακτινοβολία) ανακαλύφθηκε το 1895. Οι ακτίνες X δημιουργούνται από λυχνία κενού με κάθοδο και άνοδο. Θερμαίνεται η κάθοδος και ελεύθερα ηλεκτρόνια φεύγουν προς την άνοδο. Όταν προσκρούουν σε πυρήνες εκλύεται ενέργεια σε μορφή ακτίνων X. Ο ασθενής παρεμβάλεται μεταξύ πηγής και φιλμ ευαίσθητου στις ακτίνες X. Ένα τμήμα της ακτινοβολίας απορροφάται από το σώμα του ασθενούς ενώ η υπόλοιπη ακτινοβολία αποτυπώνεται πάνω στο φιλμ. Στην ακτινολογία περιλαμβάνονται και οι ακτίνες Γ. Οι ακτίνες Γ εκπέμπονται από ραδιενεργό ισότοπο που διοχετεύεται στον ασθενή. Οι ακτίνες Γ χρησιμοποιούνται στην τομογραφία εκπομπής ποσιτρονίου P.E.T (Positron Emission Tomography). Ένα ραδιενεργό ισότοπο εκπέμπει ποσιτρόνια, τα οποία εξαυλώνονται όταν συναντήσουν ηλεκτρόνια εκπέμποντας ακτίνες Γ.

Τομογραφία : Δακτύλιος από ανιχνευτές περικλείει τον ασθενή ο οποίος κινείται κάθετα προς το δακτύλιο. Λαμβάνονται πολλές εικόνες και σχηματίζεται μια τρισδιάστατη άποψη του ασθενή. Παρακάτω αναλύουμε τις δύο βασικές μεθόδους τομογραφίας.

Μαγνητική τομογραφία Ο εξεταζόμενος τοποθετείται εντός ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Υπό αυτές τις συνθήκες οι πυρήνες υδρογόνου

του σώματος, προσανατολίζονται παράλληλα ως προς τις μαγνητικές γραμμές του πεδίου και εκτελούν μεταπτωτική κίνηση γύρω από τον άξονα των μαγνητικών γραμμών με συγκεκριμένη συχνότητα περιστροφής. Η συχνότητα αυτή είναι χαρακτηριστική για κάθε άτομο. Είναι φανερό ότι για δεδομένο εξωτερικό πεδίο κάθε τύπος ατομικού πυρήνα εκτελεί μεταπτωτική κίνηση με ορισμένη συχνότητα που είναι διαφορετική για κάθε άτομο. Κατα την διάρκεια της εξέτασης τα πηνία ραδιοσυχνότητας του μαγνητικού τομογράφου εκπέμπουν ραδιοκύματα με συχνότητα ίση με αυτή της περιστροφής των πυρήνων. Οι πυρήνες απορροφούν την ηλεκτρομαγνητική ενέργεια και αλλάζει η κατάσταση περιστροφής τους. Μετά από την διέγερση με παλμούς RF, ενώ οι τροχιές μεταπίπτουν στην αρχική τους κατάσταση, εκπέμπουν ένα αδύνατο σήμα ραδιοσυχνότητας στην συχνότητα Larmor. Το αδύναμο εκπεμπόμενο RF είναι το σήμα μαγνητικού συντονισμού. Το σήμα αυτό φθίνει με την πάροδο χρόνου και ονομάζεται σήμα ελεύθερης επαγωγικής απόσβεσης. Με την εφαρμογή μετασχηματισμού Fourier στο σήμα πεδίου του χρόνου λαμβάνουμε το σήμα στη τελική του μορφή, δηλαδή στο πεδίο των συχνοτήτων. Με αυτόν τον τρόπο και την εκπομπή RF παλμών με συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων διεγείρονται σε συγκεκριμένες περιοχές.

Αξονική τομογραφία Η αξονική τομογραφία είναι η ακτινολογική μέθοδος εξέτασης του ανθρώπινου σώματος. Μπορεί να απεικονίσει σε κάθε τες τομές ολόκληρο το σώμα, χρησιμοποιώντας την ακτινοβολία X. Ο εξεταζόμενος τοποθετείται σε ύπτια θέση σε ένα κινούμενο κάθισμα το οποίο διέρχεται μέσω μιας κυκλικής τρύπας του μηχανήματος. Αποφεύγουμε να ακτινοβολήσουμε τους οφθαλμούς και όση ώρα ο εξεταζόμενος βρίσκεται στον αξονικό τομογράφο ακτινοβολείται με ακτίνες X ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Με αυτή τη μέθοδο λαμβάνονται κάθετα λεπτές τομές, οι οποίες αποτυπώνονται σε φιλμ και εκτυπώνονται σε ειδικό χαρτί. Με το τρόπο αυτό τα συμπαγή μόρια φαίνονται καλύτερα και έτσι μπορούν να εντοπισθούν ευκολότερα βλάβες μέσα στα όργανα που θα ήταν αδύνατο να εντοπιστούν με την απλή ακτινογραφία. Με την ελικοειδή αξονική τομογραφία που αναπτύχθηκε πρόσφατα μας δίνει την δυνατότητα να παίρνουμε εικόνες τριών διαστάσεων.

1.1.2 Ευκρίνεια εικόνας

Η ευκρίνεια μιας εικόνας ισούται με το πλήθος των εικονοστοιχείων ανά μονάδα επιφάνειας και συνήθως μετράται σε $pixels/in^2$, ή διαφορετικά σε dpi (dots per inch) και εξαρτάται τόσο από τις διαστάσεις όσο και από το πλήθος των αποξρώσεων της κάθε εικόνας. Αν για παράδειγμα κρατήσουμε σταθερό το βάθος χρώματος μειώνοντας τις διαστάσεις μιας εικόνας, τότε η εικόνα θα κατατεμαχιστεί σε τετραγωνικές ομοίμορφες χρωματικές περιοχές. Αντίθετα αν διατηρήσουμε τις διαστάσεις και μειώσουμε το χρωματικό βάθος τότε η εικόνα θα θολώσει.

1.1.3 Χρωματική Απεικόνιση Εικόνων - Χρωματικοί Χώροι

Η χρήση χρώματος στην επεξεργασία εικόνας γίνεται για δύο βασικούς λόγους. Πρώτον, στην αυτόματη ανάλυση εικόνας, το χρώμα αποτελεί ένα πολύ ισχυρό χαρακτηριστικό όσον αφορά την περιγραφή και πολύ συχνά απλοποιεί την αναγνώριση αντικειμένων και την εξαγωγή τους από μια σκηνή. Δεύτερον, το ανθρώπινο μάτι είναι ικανό να διακρίνει ξηλιάδες έγχρωμες αποχρώσεις σε αντίθεση με τις 24 περίπου αποχρώσεις του γκρι. Η επεξεργασία έγχρωμων εικόνων χωρίζεται σε δύο κατηγορίες : επεξεργασία πραγματικού χρώματος και ψευδοχρώματος. Στην πρώτη κατηγορία, οι εικόνες δημιουργούνται με αισθητήρες πραγματικού χρώματος, όπως είναι οι τηλεοπτικές κάμερες και οι έγχρωμοι σαρωτές. Στη δεύτερη κατηγορία, το πρόβλημα έγκειται στην αντιστοίχιση μιας έγχρωμης απόχρωσης σε μια συγκεκριμένη μονοχρωματική φωτεινότητα ή ένα φάσμα τους. Μέχρι πρόσφατα οι περισσότερες εφαρμογές χρησιμοποιούσαν την επεξεργασία ψευδοχρώματος. Η εξέλιξη όμως στη κατασκευή έγχρωμων αισθητήρων και γενικά του hardware, ανέστρεψαι την κατάσταση με αποτέλεσμα σήμερα σχεδόν όλες οι εφαρμογές να γίνονται στη βάση του πραγματικού χρώματος.

1.1.4 Επεξεργασία Εικόνων

- **Μεγένθυση - Σμίκρυνση:** Είναι οι διαδικασίες με τις οποίες μεταβάλλουμε το μέγεθος των αντικειμένων που εμφανίζονται σε μια εικόνα. Οι διαδικασίες αυτές υλοποιούνται με την χρήση ενός φίλτρου σχεδιασμένου με βάση την εξίσωση της θερμότητας.
- **Φίλτρο μέσης τιμής :** Η εφαρμογή του φίλτρου μέσης τιμής, απομακρύνει τον θόρυβο, αλλά προκαλεί θόλωση στην εικόνα. Το φίλτρο αυτό κατέχει τις ποιοτικές ιδιότητες της διαστολής και της συστολής, αλλά γενικά δεν αλλάζει το μέγεθος του αντικειμένου ή του φόντου. Το φίλτρο μέσης τιμής αφαιρεί αντικείμενα και οπές πολύ μικρού μεγέθους, κενά καθώς και πολύ στενές χερσονήσους. Το φίλτρο αυτό γενικά δεν αλλάζει το μέγεθος των αντικειμένων παρόλο του ότι αλλάζει τα αντικείμενα. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του φίλτρου mean (φίλτρο μέσης τιμής) είναι ανεπαρκές σε εικόνες που έχουν χρουστικό θόρυβο.
- **Φίλτρο ενδιάμεσης τιμής :** Η εφαρμογή του φίλτρου ενδιάμεσης τιμής εξαφανίζει πλήρως τον θόρυβο.
- **Φίλτρο Gauss :** Τα φίλτρα Gauss είναι κατωδιαβατά φίλτρα και συνεπώς εκτός της ικανότητας φιλτραρίσματος θορύβου επιφέρουν θόλωση στην εικόνα. Για τον προσεγγιστικό σχεδιασμό των φίλτρων αυτών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους συντελεστές ενός διωνυμικού αναπτύγματος. Ένα φίλτρο Gauss δύο διαστάσεων μπορεί να υλοποιηθεί με διαδοχικές συνελίξεις δύο μονοδιάστατων φίλτρων Gauss, το ένα στην οριζόντια διεύθυνση και το άλλο στην κάθετη διεύθυνση. Επίσης μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας μόνο τη μια μονοδιάστατη μάσκα μετασχηματίζοντας την εικόνα

ανάμεσα στις συνελίξεις και μετά την τελική συνέλιξη. Αυτή η τεχνική λειτουργεί καλά για τάξης φίλτρων μέξρι περίπου $n = 10$. Για μεγαλύτερα φίλτρα, οι συντελεστές στο δυωνυμικό ανάπτυγμα είναι πολλοί μεγάλοι για τους περισσότερους υπολογιστές, ωστόσο, αυθαίρετα μεγάλα φίλτρα Gauss, μπορούν να υλοποιηθούν εφαρμόζοντας επανειλημμένα ένα μικρότερο φίλτρο Gauss.

1.2 Κατάτμηση εικόνας

1.2.1 Κλασικές μέθοδοι

Θα ακολουθήσουμε την παρουσίαση του Παπαμάρκου:

Η κατάτμηση εικόνας (segmentation) είναι η διαδικασία με την οποία διαχωρίζεται μια εικόνα σε κατάλληλες περιοχές ή αντικείμενα. Η κατάτμηση εικόνας είναι από τα σπουδαιότερα θέματα στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνων. Συνήθως αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση ο προσδιορισμός των περιοχών ή των αντικειμένων που μια εικόνα περιέχει για παραπέρα επεξεργασία, ανάλυση ή αναγνώριση. Για παράδειγμα στην περιοχή της οπτικής αναγνώρισης χαρακτήρων, η κατάτμηση και ο διαχωρισμός των χαρακτήρων είναι απαραίτητο στάδιο προεπεξεργασίας. Για την κατάτμηση των εικόνων έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές. Δεν υπάρχει όμως γενική μέθοδος και σταθερές προδιαγραφές που να καθορίζουν την ποιότητα και την αποτελεσματικότητα των τεχνικών αυτών. Ανάλογα με την εφαρμογή πρέπει να επιλέγεται και η κατάλληλη τεχνική κατάτμησης. Ο Haralick-Shapiro πρότειναν ότι για να είναι καλή μια μέθοδος κατάτμησης πρέπει:

- Οι περιοχές που διαχωρίζει να είναι ομοιόμορφες και ομογενείς σε σχέση με κάποιο χαρακτηριστικό, όπως για παράδειγμα τα επίπεδα του γκρι.
- Το εσωτερικό των περιοχών πρέπει να είναι απλό, χωρίς για παράδειγμα πολλές μικρές οπές.
- Γειτονικές περιοχές πρέπει να έχουν σαφώς διαφορετικές τιμές για το χαρακτηριστικό με το οποίο έγινε ο διαχωρισμός.
- Τα όρια των περιοχών πρέπει να είναι απλά, όχι απότομα και ακριβή.

Συνήθως για την ανάπτυξη και την επιλογή μιας τεχνικής διαχωρισμού χρησιμοποιούνται οι ιδιότητες της ασυνέχειας και ομοιότητας. Με τον έλεγχο της ασυνέχειας εξετάζεται η απότομη μεταβολή στις τιμές των εικονοστοιχείων. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατόν για παράδειγμα να προσδιοριστούν απομονωμένα σημεία, καμπύλες και ακμές. Στη δεύτερη κατηγορία ο έλεγχος της ομοιότητας ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά οδηγεί σε τεχνικές κατάτμησης όπως κατωφλίου και ανάπτυξη περιοχής. Γενικά οι τεχνικές κατάτμησης μπορούν να χωριστούν στις ακόλουθες κατηγορίες :

- Κατωφλίου - Πολυκατωφλίωσης.

- Ταξινόμηση στοιχείων.
- Μέθοδοι βασιζόμενες στα σύνορα περιοχών (περιγράμματα).
- Μέθοδοι βασιζόμενες σε χαρακτηριστικά περιοχών και ομαδοποίησης.
- Μέθοδοι βασιζόμενες σε σύγκριση προτύπων.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι υπάρχουσες τεχνικές κατάτμησης δεν καλύπτουν όλες τις δυνατές εφαρμογές παρά αποτελούν ερεθίσματα για την ανάπτυξη εξειδικευμένων τεχνικών κατάτμησης που αφορούν συγκεκριμένες εφαρμογές. Για παράδειγμα, επικαλυπτόμενα αντικείμενα, ενωμένοι χαρακτήρες είναι δύσκολο να διαχωριστούν ικανοποιητικά. Επίσης, ο ποιοτικός έλεγχος ηλεκτρονικών πλακετών ή η αναγνώριση ιατρικών εικόνων απαιτούν συνθετότερους και πλέον εξειδικευμένους αλγόριθμους. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε ορισμένες από τις πλέον γνωστές τεχνικές κατάτμησης εικόνας και κυρίως της μεθόδους κατωφλίωσης και πολυκατωφλίωσης.

1.2.2 Μέθοδοι κατωφλίωσης και πολυκατωφλίωσης

Η εύρεση κατωφλίων είναι μια από τις ισχυρότερες τεχνικές για την κατάτμηση συνήθων ασπρόμαυρων εικόνων. Η εφαρμογή των τεχνικών κατωφλίου σε ψηφιακή εικόνα βασίζεται στην υπόθεση ότι τα εικονοστοιχεία του αντικειμένου (προσκήνιο) μπορούν να διαχωριστούν από τα εικονοστοιχεία του φόντου (παρασκήνιο) με βάση τις τιμές των αποχρώσεων τους. Για τον προσδιορισμό των δύο κύριων αποχρώσεων του γκρι με τη χρήση ενός κατωφλίου η εικόνα μετατρέπεται σε εικόνα δύο κύριων αποχρώσεων με την χρήση μιας μοναδικής τιμής κατωφλίου για όλα τα εικονοστοιχεία της. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται ευρέως για τη μετατροπή μιας εικόνας σε δυαδική. Η προσέγγιση αυτή δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στις περιπτώσεις εικόνας κειμένου, όπου είναι γνωστό εκ των προτέρων ότι η εικόνα περιέχει μόνο δύο κύριες αποχρώσεις του γκρι (π.χ άσπρο, μαύρο). Συνεπώς οι μέθοδοι ενός καθολικού κατωφλίου πρέπει να εφαρμόζονται σε εικόνες όπου είναι ξεκάθαρη η διαφορά μεταξύ των αποχρώσεων του προσκήνιου με το παρασκήνιο. Έχουν προταθεί αρκετές τεχνικές για την αυτόματη επιλογή ενός καθολικού κατωφλίου. Για την κατάτμηση περίπλοκων εικόνων είναι αναγκαία η χρήση τεχνικών επιλογής πολλαπλών κατωφλίων. Γενικά αυτό δεν είναι ένα απλό πρόβλημα. Υπάρχουν αρκετές δυσκολίες για την επιλογή κατωφλίων σε εικόνες με πολλά αντικείμενα και οφείλονται κυρίως στις κατανομές των αποχρώσεων, στα μικρά και στα αλληλοεπικαλυπτόμενα αντικείμενα. Ο προσδιορισμός του βέλτιστου αριθμού των τελικών αποχρώσεων είναι ένα σημαντικό πρόβλημα. Αν και υπάρχουν αλγόριθμοι προσδιορισμού του βέλτιστου αριθμού των αποχρώσεων στις περισσότερες των τεχνικών ο αριθμός αυτός υποτίθεται δοσμένος. Αρκετές τεχνικές έχουν προταθεί για την αντιμετώπιση των δυσκολιών που προαναφέρθηκαν. Οι περισσότερες από αυτές βασίζονται στον εντοπισμό των περιγραμμάτων και την ταξινόμηση.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι μέθοδοι των Kohler, Wang -Haralick, Hertz - Schafer, Span - Wilson, που εφαρμόζονται σε εικόνες με καλές ακμές και δεν βασίζονται στο ιστόγραμμα των αποχρώσεων. Αρχικά, όλες αυτές οι τεχνικές ταξινομούν τα εικονοστοιχεία σε αυτά που ανήκουν σε ακμές και αυτά που δεν ανήκουν.

Τα κατώφλια υπολογίζονται με επαναληπτικές διαδικασίες που είναι υπολογιστικά δαπανηρές. Σε κάθε επανάληψη οι τιμές των κατωφλίων τροποποιούνται με σκοπό την ικανοποίηση των χαρακτηριστικών συνθηκών που αφορούν τις ακμές.

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι τεχνικές που βασίζονται στο ιστόγραμμα. Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τις μεθόδους Karur, Carlotto, Rudin, Reddi. Η μέθοδος του Reddi είναι ένας αλγόριθμος πολυκατωφλίωσης ο οποίος ουσιαστικά αποτελεί επέκταση της μεθόδου του Otsu. Η βασική σχέση που ουσιαστικά εκφράζει είναι η μεταβλητότητα μεταξύ των κλάσεων και μπορεί να επεκταθεί για την περίπτωση πολλαπλών κατωφλίων. Η μέθοδος τώρα του Otsu, προτάθηκε το 1979 και όπως έχει μελετηθεί από το Sahoo είναι μια από τις καλύτερες τεχνικές εύρεσης κατωφλίου. Το κριτήριο το οποίο χρησιμοποιείται στη μέθοδο αυτή για τον προσδιορισμό του βέλτιστου κατωφλίου είναι η μεγιστοποίηση της διασποράς μεταξύ της κλάσης των σκοτεινών και της κλάσης των φωτεινών περιοχών. Η μέθοδος των Karur βασίζεται στο κριτήριο της μέγιστης εντροπίας αλλά υστερεί σε χρόνο εκτέλεσης. Ο Carlotto έχει προτείνει μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση για την εύρεση πολλαπλών κατωφλίων. Σύμφωνα με αυτήν τα κατώφλια καθορίζονται με τη βοήθεια της πληροφορίας που προέρχεται από τις μεταβολές των διαβάσεων των μηδενικών της δεύτερης παραγωγού. Η μέθοδος αυτή δίνει καλά αποτελέσματα όταν τα ιστογράμματα περιέχουν μόνον κανονικές κατανομές. Η μέθοδος του Παπαμάρκου κ.α βασίζεται στον αλγόριθμο hill-clustering και σε μια τεχνική προσέγγισης με γραμμικές ρητές συναρτήσεις. Αρχικά προσδιορίζονται οι κύριες κορυφές του ιστογράμματος και κατόπιν οι μορφές των κοιλάδων προσεγγίζονται από ρητές συναρτήσεις, τα ελάχιστα των οποίων αντιστοιχούν στα βέλτιστα κατώφλια.

Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν όλες οι άλλες τεχνικές που χαρακτηρίζονται συνήθως ως υβριδικές. Οι Span-Wilson προτείνουν μια υβριδική μέθοδο επιλογής πολλαπλών κατωφλίων, που βασίζεται σε στατιστική και χωρική πληροφορία. Ειδικότερα η μέθοδος είναι ένας συνδυασμός μιας τεχνικής εξομάλυνσης τετράδενδρου, ενός αλγορίθμου εύρεσης κλάσεων με τοπικά κέντρα βάρους και μιας προσέγγισης εκτίμησης περιγραμμάτων. Η μέθοδος αυτή είναι εφαρμόσιμη κάτω από ορισμένες συνθήκες, όπως η απαίτηση το ιστόγραμμα να αποτελείται μόνο από γκαουσιανές κατανομές.

Μια τεχνική πολυκατωφλίωσης πρέπει να είναι γενική και απλή, να μην περιορίζεται από τη μορφή ιστογράμματος και αν είναι δυνατόν να αξιοποιεί και πρόσθετες πληροφορίες και όχι μόνον τις φωτεινότητες της εικόνας. Με αυτούς τους στόχους, ο Παπαμάρκος ανέπτυξε μια τεχνική πολυκατωφλίωσης η οποία βασίζεται στη θεώρηση του όλου προβλήματος ως ένα πρόβλημα ταξινόμησης χαρακτηριστικών. Φυσικά ως πρώτο χαρακτηριστικό χρησιμοποιείται η απόχρωση των εικονοστοιχείων της κάθε εικόνας. Όμως το σύνολο των χαρακτηριστικών συμπληρώνεται με τιμές τοπικών χωρικών χαρακτηριστικών έτσι ώστε το όλο σύστημα να λαμβάνει υπόψη του και τη χωρική μορφολογία των εικόνων. Το σύνολο των χαρακτηριστικών αυτών τροφοδοτεί ένα αυτό-οργανωμένο νευρωνικό ταξινομητή, ο οποίος αποτελείται από ένα δίκτυο ανάλυσης κύριων συνιστωσών και ένα δίκτυο που καλείται αυτό-οργανωμένος πίνακας απεικόνισης χαρακτηριστικών κατά Kohonen (Kohonen self organized feature map - SOFM). Το νευρωνικό αυτό δίκτυο εκπαιδεύεται αρχικά χωρίς επίβλεψη και προσδιορίζει τις κύριες αποχρώσεις της εικόνας.

Στη συνέχεια χρησιμοποιείται για τη μετατροπή της απόχρωσης του κάθε εικονοστοιχείου σε μια από τις κύριες αποχρώσεις που έχουν προσδιορισθεί. Για την επιτάχυνση της επεξεργασίας εκπαίδευσης και εξαγωγής χαρακτηριστικών είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί υπο-δειγματοληψία της εικόνας με μια μορφοκλασματική καμπύλη.

1.2.3 Τεχνικές τοπικού κατωφλίου

Οι τεχνικές τοπικού κατωφλίου βασίζονται στην εκτίμηση, τοπικά και για κάθε εικονοστοιχείο της εικόνας, ενός κατωφλίου λαμβάνοντας υπόψη τοπικά χωρικά χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα, για κάθε εικονοστοιχείο ορίζεται μια γειτονιά που το περικλείει και στη γειτονιά αυτή γίνεται εκτίμηση ορισμένων παραμέτρων, όπως είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των φωτεινοτήτων. Με βάση τις τιμές αυτές, καθορίζεται το τοπικό κατώφλι που προφανώς είναι διαφορετικό για κάθε θέση. Οι τεχνικές τοπικού κατωφλίου είναι πολύ χρήσιμες, π.χ. σε εικόνες εγγραφών με θόρυβο, όμως το κύριο μειονέκτημα τους είναι η χρησιμοποίηση παραμέτρων με μη προκαθορισμένες τιμές. Διαφορετικές τιμές παραμέτρων οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα. Παρακάτω αναφέρουμε κάποιες μεθόδους επιγραμματικά.

Η μέθοδος Niblack :

Η μέθοδος αυτή προτάθηκε το 1986. Η κεντρική ιδέα είναι η εύρεση ενός τοπικού κατωφλίου για κάθε εικονοστοιχείο της εικόνας, ανάλογα με την τοπική μέση τιμή και την τοπική τυπική απόκλιση. Η διάσταση του παραθύρου της γειτονιάς, πρέπει να είναι αρκετά μικρή ώστε να μη χάνονται οι τοπικές λεπτομέρειες αλλά ταυτόχρονα και αρκετά μεγάλη για να αφαιρείται τυχόν θόρυβος. Βρέθηκε ότι ένα παράθυρο 15×15 αποτελεί μια καλή επιλογή, ώστε η μέθοδος αυτή να είναι αποτελεσματική.

Η μέθοδος Bernsen :

Η συγκεκριμένη μέθοδος πρόκειται για μια μέθοδο τοπικού κατωφλίου. Το τοπικό κατώφλι, υπολογίζεται από τη μέση τιμή της ελάχιστης και της μέγιστης φωτεινότητας των εικονοστοιχείων ενός παραθύρου γειτονιάς που έχει ως κέντρο το εξεταζόμενο εικονοστοιχείο. Αυτός ο υπολογισμός του κατωφλίου προϋποθέτει ότι η διαφορά των δύο φωτεινοτήτων, μέγιστη και ελάχιστη του παραθύρου γειτονιάς να είναι μεγαλύτερη ή ίση με ένα προκαθορισμένο κατώφλι φωτεινοτήτων. Αυτό σημαίνει ότι γίνεται τοπική κατωφλίωση στις θέσεις όπου υπάρχει ικανοποιητική αντίθεση της εικόνας. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε τα εικονοστοιχεία της γειτονιάς, άρα και το κεντρικό, θεωρούνται ότι ανήκουν σε μια κλάση, η οποία συνήθως είναι το παρασκήνιο. Μια πιο σωστή προσέγγιση θα ήταν τα συγκεκριμένα εικονοστοιχεία να δυαδικοποιούνται με ένα απόλυτο κατώφλι όπως ορίζει και ο Otsu.

Η μέθοδος Sauvola :

Η μέθοδος αυτή τοπικής καταφλίωσης προτάθηκε το 1997 και βασίζεται στο υπολογισμό του τοπικού καταφλίου και στην εκτίμηση της τοπικής μέσης τιμής και της τοπικής τυπικής απόκλισης, όπως και στη τεχνική του Niblack.

1.3 Ανίχνευση περιγραμμάτων

Η ανίχνευση των περιγραμμάτων είναι ένα πολύ σημαντικό θέμα στη ψηφιακή επεξεργασία εικόνας διότι με τα περιγράμματα μπορούμε να περιγράψουμε, να προσδιορίσουμε, να αναπαραστήσουμε και να αναγνωρίσουμε αντικείμενα που περιέχονται σε ψηφιακές εικόνες. Ως *περίγραμμα* ορίζουμε την καμπύλη που ορίζει ένα αντικείμενο και αναμένουμε ότι διαπερνώντας την, θα συναντήσουμε σημαντικές διαφορές στην πυκνότητα της εικόνας, στην υφή της και κυρίως στην κατανομή της φωτεινότητας. Συνεπώς, είναι αναγκαία η κατανόηση να παρουσιάσουμε διάφορους στοιχειώδεις αλγόριθμους ανίχνευσης περιγραμμάτων, με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους. Στο κεφάλαιο 4 θα παρουσιάσει η προχωρημένη μέθοδος σταθμικών συνόλων.

Σε πολλές περιπτώσεις, ο προσδιορισμός των περιγραμμάτων αποτελεί το πρώτο στάδιο σε μια εφαρμογή. Για παράδειγμα, ο προσδιορισμός των περιγραμμάτων των αντικειμένων προηγείται συνήθως του σταδίου της κατάτμησης των εικόνων. Τα περιγράμματα χαρακτηρίζονται από ορισμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους, όπως για παράδειγμα από το μήκος, τη κλίση και το εύρος τους. Ένας ιδανικός αλγόριθμος προσδιορισμού περιγραμμάτων πρέπει να προσδιορίζει τα σημεία των περιγραμμάτων με ακρίβεια και τα περιγράμματα που προκύπτουν να είναι συνεχείς καμπύλες δίχως εύρος. Τα περιγράμματα σε μια ψηφιακή εικόνα είναι μονοδιάστατες καμπύλες πράγμα που δε συμβαίνει στην πράξη διότι κατά τη διαδικασία ψηφιοποίησης των εικόνων υπεισέρχονται φαινόμενα και διεργασίες που διαφοροποιούν τη μορφή και τη θέση των εικονοστοιχείων των περιγραμμάτων.

1.3.1 Προσδιορισμός περιγραμμάτων με τη χρήση πρώτων παραγώγων

Ας θεωρήσουμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ μίας μεταβλητής που η μορφή της προσεγγίζει την διαπλάτυση ενός περιγράμματος. Στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούμε να δεχτούμε ως ένα σημείο x_0 που θα είναι το κεντρικό σημείο της περιγράμματος. Ένας τρόπος για να προσδιορίσουμε το σημείο αυτό (δηλαδή το x_0) είναι η χρησιμοποίηση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της $f(x)$. Το x_0 μπορεί να θεωρηθεί ως το ακρότατο σημείο (θέση μέγιστου ή ελαχίστου της $f(x)$) ή ως το σημείο καμπής της $f(x)$ όπου δηλαδή έχουμε αλλαγή του προσήμου της $f''(x)$. Πάνω σε αυτό έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι προσδιορισμού περιγραμμάτων που χρησιμοποιούν τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των $f'(x)$ και $f''(x)$. Αν τώρα $|f'(x)|$ είναι πολύ μεγάλο αυτό σημαίνει ότι η $f(x)$ μεταβάλλεται πολύ γρήγορα και συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στη θέση x_0 έχουμε μια γρήγορη μεταβολή της φωτεινότητας της εικόνας. Αν η $f'(x)$ είναι θετική,

τότε έχουμε αύξηση της φωτεινότητας ενώ αντίθετα αν είναι αρνητική τότε έχουμε μείωση της φωτεινότητας από αριστερά προς τα δεξιά της περιγράμματος.

1.3.2 Προσδιορισμός περιγραμμάτων με τη χρήση παραγώγων δεύτερης τάξης

Όπως και στην περίπτωση των πρώτων παραγώγων, ο προσδιορισμός περιγραμμάτων με τη βοήθεια των παραγώγων δεύτερας τάξεως βασίζεται στην αναζήτηση και την εύρεση σημαντικής μεταβολής των παραγώγων δεύτερας τάξεως (που μελετούν την αλλαγή του προσήμου της μέσης καμπυλότητας της επιφάνειας φωτεινότητας)¹. Δύο είδη μεθόδων ανήκουν στην κατηγορία αυτή και είναι αυτές που βασίζονται στον τελεστή Laplace : $\Delta_2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ και αυτές που χρησιμοποιούν άλλους συνδυασμούς παραγώγων δεύτερας τάξεως.

1.3.3 Η μέθοδος των Marr-Hildreth

Όπως είδη γνωρίζουμε, η λαπλασιανή είναι ευαίσθητη στο θόρυβο με αποτέλεσμα από την εφαρμογή της να προκύπτουν πολλά ανεπιθύμητα περιγράμματα. Μια απλή τεχνική που μπορούμε να εφαρμόσουμε για να ελαχιστοποιήσουμε το πρόβλημα αυτό είναι το φιλτράρισμα της αρχικής εικόνας με ένα διδιάστατο φίλτρο Gauss. Η τεχνική αυτή, η οποία προτάθηκε από τους Marr- Hildreth αποτελείται από τα ακόλουθα στάδια :

1. Συνέλιξη της αρχικής εικόνας I με μια διδιάστατη Gaussian συνάρτηση G :
 $I' = GI$.
2. Εφαρμογή, στην εικόνα που προέκυψε μιας Laplacian από όπου προκύπτει μια εικόνα $L = \Delta_2 I'$.
3. Εικονοστοιχεία περιγραμμάτων Γ είναι το σύνολο των μηδενικών της 'μέσης καμπυλότητας' του γραφήματος της u $\Gamma = \{ \underline{x} \in \mathbf{R}^2 / L(\underline{x}) = 0 \}$.

1.3.4 Ο αλγόριθμος CANNY

Αύτος ο αλγόριθμος εξαγωγής περιγραμμάτων προτάθηκε το 1986 και θεωρείται από τους πιο ισχυρούς. Ο αλγόριθμος αυτός δεν είναι μια απλή τεχνική για τη βέλτιστη εξαγωγή περιγραμμάτων. Στην πραγματικότητα είναι μια βέλτιστη τεχνική ανίχνευσης και δημιουργίας περιγραμμάτων. Τα κριτήρια στα οποία βασίζεται η ανάπτυξη της είναι τα ακόλουθα :

- **Σωστή ανίχνευση:** Τα περιγράμματα ανιχνεύονται με μεγάλη πιθανότητα όταν αυτά πραγματικά υπάρχουν, αλλά και να μην αναγνωρίζονται ως σημεία περιγραμμάτων, σημεία που δεν ανήκουν σε περιγράμματα.

¹ Σε κάθε εικόνα (συνήθη ασπρόμαυρη ή έγχρωμη) αντιστοιχεί μία επιφάνεια στο χώρο, την οποία την καλούμε επιφάνεια φωτεινότητας

- **Εντοπισμός θέσης :** Τα περιγράμματα που ανιχνεύονται να είναι στη σωστή χωρικά θέση, πολύ κοντά στα πραγματικά.
- **Μοναδικότητα του περιγράμματος:** Κάθε περίγραμμα να δίδει ακριβώς ένα περίγραμμα. Αν και το κριτήριο αυτό ουσιαστικά υπερκαλύπτεται από το πρώτο, περιλαμβάνεται χωριστά καθώς η μαθηματική περιγραφή του πρώτου κριτηρίου δεν αποκλείει αυτήν την περίπτωση.

Η μέθοδος ανίχνευσης των περιγραμμάτων με την μέθοδο του Canny αποτελείται από την ακόλουθη σειρά διεργασιών που εκτελούνται σειριακά.

1. **Φιλτράρισμα της εικόνας.**
2. **Προσδιορισμός της κλίσης.**
3. **Απόρριψη των τιμών που δεν είναι μέγιστες.**
4. **Κατωφλίωση υστέρησης.**

1.3.5 Προσδιορισμός περιγραμμάτων

Περίγραμμα ενός αντικειμένου ορίζουμε την καμπύλη που οριοθετεί το συγκεκριμένο αντικείμενο. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το περίγραμμα του αντικειμένου αποτελείται από καμπύλες που περιγράφουν τα σύνορα του με το φόντο ή με ένα άλλο αντικείμενο. Για αυτόν τον λόγο, ο προσδιορισμός των περιγραμμάτων είναι χρήσιμος σε πολλές εφαρμογές, όπου απαιτείται ο υπολογισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών των αντικειμένων.

1.3.6 Παράσταση περιγραμμάτων

Η παράσταση με μαθηματικό τρόπο των περιγραμμάτων είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο σε περιπτώσεις που ασχολούμαστε με την αναγνώριση, την ανάλυση και την σύνθεση σχημάτων. Πράγματι η παράσταση με μαθηματικό τρόπο ενός σχήματος είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί άμεσα για τη σύγκριση της ομοιότητας, την αποθήκευση αλλά και την κωδικοποίηση αντικειμένων. Η σύνθεση σχημάτων είναι επίσης πολύ χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές όπως είναι τα συστήματα CAD, τα ηλεκτρονικά παιχνίδια και τα κινούμενα σχέδια.

Μέρος Ι

Η μαθηματική θεωρία της καταταμησης

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή

Αυτό το κεφάλαιο ζιτεέρεται στην κατάτμηση εικόνων η οποία παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλές εφαρμογές. Ο σκοπός είναι η εύρεση διαμέρισης μίας εικόνας στα συστατικά της στοιχεία. Θα δούμε ότι η δυσκολία εντοπίζεται στην ανάγκη ταυτόχρονης και επιδέξιας μεταχείρισης διαφορετικών αντικειμένων: συναρτήσεων, χωρίων και καμπυλών του \mathbf{R}^2 .

- Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε πρώτα να ορίσουμε με περισσότερη ακρίβεια τι είναι η κατάτμηση εικόνας και με συντομία θα δούμε μερικές κλασικές ιδέες για την κατάτμηση. Στην πραγματικότητα η ιδέα της κατάτμησης εξαρτάται από το είδος της εικόνας την οποία επεξεργαζόμαστε και τι ακριβώς θέλουμε να κάνουμε. Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί δύο βασικές προσεγγίσεις: η προσέγγιση Mumford- Shah και η προσέγγιση της μεθόδου ενεργών γεωδαιτικών περιγραμμάτων.
- Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με το συναρτησιοειδές των Mumford- Shah . Εδώ η κεντρική ιδέα είναι η εύρεση μίας εικόνας κοντά στην αρχική που απαρτίζεται από αρκετά τμήματα με σχεδόν συνεχή ένταση. Η δυσκολία στη μελέτη της μεθόδου Mumford-Shah ανάγεται σε δύο άγνωστες ποσότητες: την συναρτήση και το σύνολο K των περιγραμμάτων. Αυτή η δυσκολία ζιτεέρεται σε παρακάτω κεφάλαια, τα οποία παρουσιάζουν τη μαθηματική μελέτη αυτής της διαδικασίας (ορισμός ενός κατάλληλου μαθηματικού πλαισίου, βέλτιστες συνθήκες, ομαλότητα συνόλου περιγραμμάτων). Θα παρουσιάσουμε την μέθοδο Mumford-Shah. Βασίζεται κυρίως στη θεωρία Γ -σύγκλισης. Κλείνουμε με την παρουσίαση κάποιων πειραματικών αποτελεσμάτων.
- Επίσης θα ασχοληθούμε με τα ενεργά γεωδαιτικά περιγράμματα και τη μέθοδο σταθμικών συνόλων. Εδώ ο σκοπός είναι η εύρεση των ορίων των αντικειμένων σε μια εικόνα. Η ιδέα είναι να περιγραφούν αυτά τα περιγράμματα ως καμπύλες με την υψηλότερη κλίση της έντασης της ακτινοβολίας. Ξεκινάμε με το κεφάλαιο ακολουθώντας τους Kass, Witkin και Τερζόπουλο και στα μοντέλα τους, τα οποία είναι μια πρώτη προσπάθεια προς αυτήν την

κατευθυνση. Αυτό το μοντέλο το οποίο έχει και κάποια αρνητικά σημεία αναθεωρήθηκε από τους Casseles, Kimmel, και Sapiro, οι οποίοι πρότειναν τη μέθοδο των ενεργών γεωδαισικών περιγραμμάτων (). Δείχνουμε την σύνδεση μεταξύ αυτών των δύο διατυπώσεων. Ένα από τα ενδιαφέροντα στην τελευταία διατύπωση είναι ότι μπορεί να ξαναγραφεί με τη μέθοδο των σταθμικών συνόλων. Αυτό ζιτεέρεται λεπτομερώς στο τμήμα 3.3 όπου αποδεικνύουμε την καλή τοποθέτηση του προβλήματος με την έννοια του ιζώδους. Αυτό το τμήμα είναι μάλλον τεχνικό αλλά δείχνει μία ολοκληρωμένη και κλασική αποδείξη χρησιμοποιώντας λύσεις ιζώδους. Η αριθμητική υλοποίηση αυτών των μεθόδων απαιτεί τη χρήση περιοδικά επανανάρξουσας εξίσωσης η οποία διατηρεί κάποια ομαλότητα στα σταθμικά σύνολα κατά τη διάρκεια της εξέλιξης τους. Αυτό επιτυγχάνεται με την εξίσωση τύπου Hamilton-Jacobi η οποία εξετάζεται θεωρητικά στο κεφάλαιο 3.4 Η προσέγγιση αυτή στην κατάτμηση παρουσιάζεται σε άλλο σημείο.

2.0.7 Ορισμοί και στόχοι

Σαν πρώτο ορισμό θα μπορούσαμε να πούμε ότι κατάτμηση είναι η διαμέριση μιας εικόνας σε δύο συνεχή μέρη. Ωστόσο ο ορισμός αυτός δεν είναι ικανοποιητικός και μάλλον ασαφής. Ας δούμε τα σχήματα όπως παρουσιάζονται στην εικόνα (1) Στο αριστερό σχήμα κάθε κομμάτι της εξωτερικής καμπύλης είναι σημαντικό και θα ήταν ενδιαφέρον να υπάρχουν ορισμοί για όλα τα περιγράμματα χωρίζοντας δύο τμήματα διαφορετικής έντασης. Αντίστοιχα, θα ήταν θεμιτό να υπάρχει μια απλοποιημένη εκδοχή της αυθεντικής εικόνας αποτελούμενη από ομογενή τμήματα χωρισμένα με ακριβή περιγράμματα. Η δεξιά εικόνα παρουσιάζει την έννοια των αντικιμένων. Μερικά περιγράμματα (τα όρια των αντικιμένων) ίσως είναι σημαντικότερα (ανάλογα με τη χρήση) και θα απαιτούνταν η επιμόρφωση μίας μεθόδου εντοπισμού αυτών. Αυτά τα δύο παραδείγματα δείχνουν ότι η έννοια της κατατμησης δεν είναι μοναδική και ίσως εξαρτάται από το είδος της εικόνας την οποία αντιμετωπίζουμε κάθε φορά.

Επίσης, σε κάθε περίπτωση τα σημαντικά χαρακτηριστικά είναι τα περιγράμματα. Ο εντοπισμός των περιγραμμάτων υπήρξε ως ανησυχία από νωρίς όσον αφορά την ηλεκτρονική εικόνα. Κλασικές προσεγγίσεις βασίζονται σε τοπικά ιδιότητες διαφορισμότητας της εικόνας, για παράδειγμα η πρώτη και δεύτερη παράγωγος μιας εικόνας (βλ. εικ. 2).

Με την παράγωγο πρώτης τάξεως, οι αρχικές μέθοδοι ασίζονταν στην εφαρμογή κάποιων σε φίλτρων συνέλιξης που ενισχύαν τα περιγράμματα [67, 66, 78]. Έπειτα ο Canny [18] πρότεινε έναν ανιχνευτή περιγράμματος ο οποίος χρησιμοποιείται ακόμη ευρύτατα. Το σημείο εκκίνησης ήταν ο καθορισμός των κριτηρίων τα οποία ο ανιχνευτής περιγράμματος πρέπει να ικανοποιεί: αξιοπιστία της ανιχνευσης, ακρίβεια του εντοπισμού, και την αναγκη απόκρισης σε κάθε περίγραμμα. Αυτό οδηγεί σε ένα βέλτιστο φίλτρο το οποίο είναι στην πραγματικότητα μια προσέγγιση της πρώτης παραγώγου μίας γκαουσιανής. Αυτή η ιδέα αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Deriche, Shen, Castan [76], οι οποίοι πρότειναν ακριβέστερα φίλτρα ορισμένα αναδρομικά.

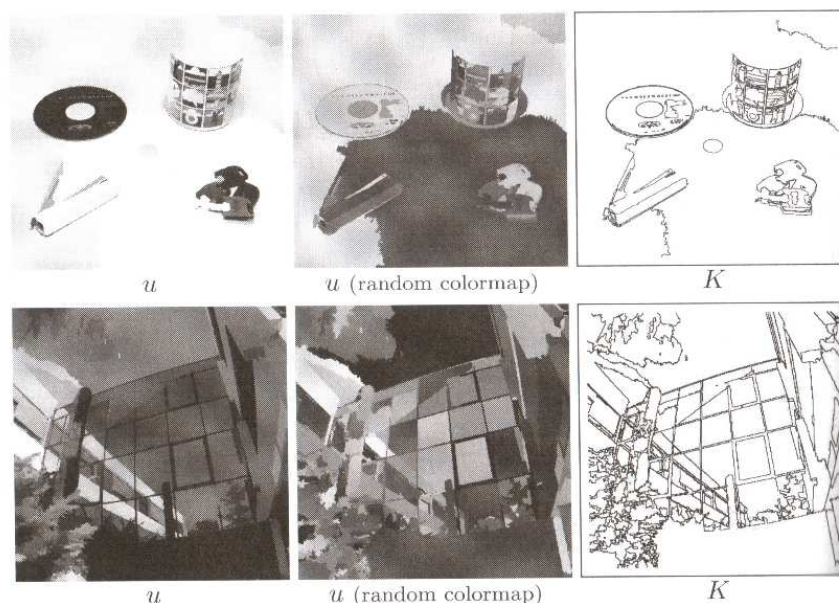


Σχήμα 2.1: Δύο παραδείγματα εικόνων με διαφορετική αρχή κατάτμησης.

Με τις δεύτερες παραγώγους, το σημαντικό σημείο εκκίνησης ήταν η μέθοδος που προτάθηκε από τους Marr, Hildreth και βασιζόταν σε ανίχνευση κρίσιμων σημείων των κόμβων της Λαπλασιανής γκαουσιανής, σύμβολικά LoG (λ. Επίσης [44,61,83]). Αυτή η προσέγγιση παράγει κλειστά περιγράμματα. Οι γωνίες είναι στρογγυλεμένες και η συνέκτικότητα των ενώσεων είναι φτωχή.

Αυτές οι προσεγγίσεις είναι τοπικές και συνδιάζουν παραγώγους σε διαφορετικές κλίμακες. Ο σκοπός είναι να αναγνωριστούν τα περιγράμματα τα οποία χαρακτηρίζονται από ακριβείς μεταβολές της έντασης. Αν δούμε τα παραδείγματα της εικόνας 1 τότε μπορούμε να προτείνουμε δύο διαφορετικές στρατηγικές:

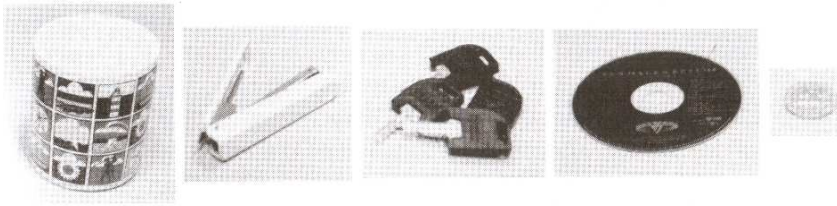
- Για την κατάτμηση της εικόνας του κτιρίου Borel η δεική άποψη θα ήταν να βρεθεί μια απλοποιημένη εικόνα ως συνδυασμός περιοχών συνεχούς έντασης. Με τη δημιουργία τέτοιου τύπου προσέγγισης της εικόνας θα μπορούσαμε επίσης να έχουμε την κατάτμηση. Επίσης, αφού είναι τοπική, δεν υπάρχει ενασχόληση για την εξομάλυνση των καμπυλών. Αυτές οι δύο ιδέες μπορούν να ενσωματωθούν σε ένα πλαίσιο λογισμού μεταβολών: ξεκινώντας από μια εικόνα u_0 ψάχνουμε για ένα ζεύγος (u, K) τέτοιο ώστε η u να είναι σχεδόν σε κάθε κομμάτι σταθερή προσέγγιση του u_0 και το K αντιστοιχεί στο σύνολο των περιγραμμάτων. Αυτό προτάθηκε από τους Mumford- Shah το 1989 και παρακάτω ζιτερόμαστε λεπτομερώς σε αυτό το μοντέλο και στις ιδιότητες του.
- Αν σκεφτούμε τώρα την εικόνα με τα αντικείμενα θα θέλαμε να έχουμε μια τεχνική για τον διαχωρισμό των αντικειμένων χωρίς να υπάρχει καμία ανησυχία για την εσωτερική τους υφή. Μια αρχική ιδέα θα ήταν να υπάρχει μία καμπύλη εσωκλείοντας όλα τα αντικείμενα και αναπτύσσοντας αυτήν έως



Σχήμα 2.2: Περιγράμματα και παράγωγοι. Παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης των αντικειμένων της εικόνας και ομαλή εκδοχή της. Η κλίση παρουσιάζεται με αναστραμμένα χρώματα για καλύτερη εμφάνιση. Η λαπλασιανή της έντασης είναι αρνητική στις μαύρες περιοχές, θετική στις λευκές, μηδενική στις άλλες. Τα περιγράμματα μπορούν να ειδοθούν ως περιοχές όπου η κλίση είναι τοπικά στο μεγαλύτερο δυνατή τιμή της ή όπου η λαπλασιανή αλλάζει πρόσημο. Προσέξτε ότι η εξομάλυνση επιτρέπει την πρόσληψη καθαρότερης περιγραφής του περιγράμματος.

όπου φτάσει στα όρια των αντικειμένων. Στο τέλος αυτή η καμπύλη θα μπορεί να μικρύνει ή να χωρίζεται. Αυτή η ιδέα προτάθηκε από τους Kass, Witkin και Τερζόπουλο (ενεργά περιγράμματα) και βασίζεται στην ελαχιστοποίηση ενέργειας εξαρτώμενης από τις καμπύλες. Αυτό παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3 μαζί με επιπλέον εξελίξεις όπως η διατύπωση των σταθμικών συνόλων.

Έπειτα θα εργαστούμε με την εικόνα των αντικειμένων η οποία έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες ζιτεορικά με τα προηγούμενα. Αρχικά αποτελείται από πέντε διαφορετικά αντικείμενα, διαφορετικού μεγέθους, σχήματος η υφής (βλ.εικ.3) έτσι ώστε και οι δύο απόψεις για την κατάτμηση μπορούν να δοκιμαστούν και να ελεγχθούν (σχετικά με την ανίχνευση περιγράμματος ή κατάτμησης αντικειμένων) η κόυπα είναι καλυμμένη με διάφορες εικόνες, ένα μέρος του συρραπτικού έχει επιμηκυνθεί, μερικά παρόμοια κλειδιά έχουν τοποθετηθεί το ένα πάνω στο άλλο, το cd έχει τρύπα και το νόμισμα είναι μικρό και παρουσιάζει μικρές αντιθεσεις. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τι είδους αποτελέσματα παίρνουμε με διαφορετικές προσεγγίσεις.



Σχήμα 2.3: Διαφορετικά μέρη από την εικόνα αντικειμένων.

Κεφάλαιο 3

Το συναρτησιοειδές των *Mumford – Shah*

3.0.8 Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης

Ας παρουσιάσουμε το μοντέλο των Mumford-Shah του 1989 . Σε αυτό το μέρος Ω είναι ένα ανοιχτό σύνολο του \mathbf{R}^n , $n = 2, 3$ και $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ είναι η αρχική εικόνα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέτουμε πάντα ότι $0 \leq u_0(x) \leq 1$ για σχεδόν κάθε $x \in \Omega$. Ψάχνουμε για ένα ζευγάρι (u, K) όπου K είναι το σύνολο των ασυνεχειών, ελαχιστοποιώντας

$$F(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2 + \alpha |\nabla u|^2 + \beta \int_K ds$$

όπου α, β είναι μη αρνητικές σταθερές και $\int_K ds$ είναι το μήκος του K . Στην κλασική εργασία [5] οι συγγραφείς έκαναν τις ακόλουθες εικασίες:

Εικασία 3.1 Υπάρχει ένας ελαχιστοποιητής του F έτσι ώστε τα περιγράμματα (το σύνολο ασυνέχειας του K) να είναι η ένωση ενός φραγμένου συνόλου $C^{1,1}$ εμφυτευμένων καμπυλών. Επιπλέον, κάθε καμπύλη ίσως καταλήξει σε άκρη ρωγμής (ελεύθερη άκρη π.χ το K μοιάζει με μισή γραμμή) ή σε τριπλή συνένωση, δηλαδή τρεις καμπύλες συναντώνται στα τελειώματα τους με γωνία $\frac{2\pi}{3}$ ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι.

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να αναλύσει αυτήν την εικασία και την πρόσφατη πρόοδο σε αυτό το θέμα. Πρώτα εστιάζουμε στο υπάρχον πρόβλημα (κεφ ...) και μετά μελετούμε τις ιδιότητες του συνόλου K (κεφ...). Ολοκληρώνουμε δίνοντας λεπτομέρειες για τις προσεγγίσεις αυτής της θεωρίας (κεφ ...).

3.1.1 Το μαθηματικό πλαίσιο για την ύπαρξη λύσης

Πρίν μελετήσουμε το πρόβλημα πρέπει να ορίσουμε σωστά το λειτουργικό $F(u, K)$ και συγκεκριμένα να αποφασίσουμε ποιά κλάση του K θα αναλογιστούμε. Είναι

ξεκάθαρο ότι δεν μπορούμε να επιβαλλούμε ότι K είναι φτιαγμένο από ένα πεπερασμένο πλήθος $C^{1,1}$ καμπυλών, αφού κανείς δεν μπορεί να ελπίζει στο να αποκτήσει καμία ιδότητα συμπάγειας και συνεπώς κανένα θεώρημα ύπαρξης με αυτή την πολύ στενή υπόθεση. Η ομαλότητα του K θα πρέπει να αποδειχτεί αργότερα. Αυτή η κατάσταση είναι κλασική στο λογισμό μεταβολών και υπερβαίνεται με τη διεύρυνση του συνόλου στις μετρήσιμες καμπύλες από τις $C^{1,1}$ καμπύλες. Αυτό επιτυγχάνεται με το να οριστεί το μήκος του K όπως το $(n-1)$ -δισδιάστατο Hausdorff μέτρο $\mathcal{H}^{n-1}(K)$, το οποίο είναι ο φυσικός τρόπος επέκτασης της έννοιας του μήκους σε μη ομαλά σύνολα. Για αυτό το λόγο ξαναγράφουμε το συναρτησιοειδές Mumford-Shah ως εξής:

$$F(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2 + a|\nabla u|^2 + b\mathcal{H}^{n-1}(K)$$

όπου για τώρα $K \subset \Omega$ είναι ένα κλειστό σύνολο και u ανοίγει στο χώρο Sobolev $W^{1,2}(\Omega \setminus K)$. Παρατηρούμε ότι $F(u, K) = 0$ και μπορούμε να φτάσουμε σε καίριες λύσεις. Για παράδειγμα, αν απορρίψουμε το πρώτο ολοκλήρωμα στο F τότε $u = 0$ και $K = \emptyset$ είναι λύσεις, ή αν απορρίψουμε το δεύτερο όρο, τότε $u = u_0, K = \emptyset$ είναι λύσεις. Παρολα αυτά αν απορρίψουμε κάποιες λύσεις θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε την τελευταία περίπτωση που είναι το ανεπτυγμένο συναρτησιοειδές Mumford-Shah :

$$E(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2 + b\mathcal{H}^{n-1}(K)$$

είναι εύκολο να πούμε ότι αν το σύνολο της ασυνέχειας K είναι καθορισμένο $K \neq \emptyset$ τότε μία λύση u είναι συνεχής u είναι ίσο με το μισό u_0 στις συνεκτικές συνιστώσες του $\Omega \setminus K$, και έτσι το E γίνεται μια συνάρτηση μόνο του K . Σε αυτή την υπόθεση έχουν στηριχθεί πολλές εργασίες. Ας ζιτεέουμε την συνεισφορά των Mumford-Shah [MS4], Morel-Solimini [MS3, MS1, MS2], Massari Tamanini [MT]

Η δυσκολία στη μελέτη του F είναι ότι προϋποθέτει δυο άγνωστους u, K διαφορετικής φύσης: u είναι μια συνάρτηση ορισμένη από ένα n -δισδιάστατο χώρο, ενώ K είναι ένα $(n-1)$ -δισδιάστατο σύνολο.

Με σκοπό να εφαρμοστεί η μεθοδος του λογισμού μεταβολών είναι απαραίτητο να βρεθεί μια τοπολογία η οποία βεβαιώνει την ίδια στιγμή χαμηλότερη ημισυνέχεια του F και σύμπτυξη των ελαχιστοποιητικών ακολουθιών. Η δυσκολία ερχεται από το $\mathcal{H}^{n-1}(K)$. Όντως, αν E είναι ένα σύνολο Borel του \mathbf{R}^n με τοπολογικό σύνορο ∂E . Είναι εύκολο κάποιος να πειστεί ότι

Η απεικόνιση $E \rightarrow \mathcal{H}^{n-1}(E)$ δεν είναι κάτω ημισυνεχής σε οποιαδήποτε συμπαγή τοπολογία.

Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα. Ας δεχτούμε $\{x_i\}$ την ακολουθία ρητών σημείων στο \mathbf{R}^n και

$$B_i = B_{x_i, 2^{-i}}, \quad E_k = \cup_{i=0}^k B_i,$$

Εάν $|E|$ είναι το n -δισδιάστατο μέτρο Lebesgue του E και w_n το μέτρο Lebesgue της μοναδιαίας μπάλας του \mathbf{R}^n μας δίνει:

$$|E| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |B_i| = \frac{2^n w_n}{2^n - 1}$$

Αφού τα ρητά σημεία είναι πυκνά στο \mathbf{R}^n , έχουμε $E = \mathbf{R}^n$ και για αυτό $\partial E = \overline{E} \setminus E = \mathbf{R}^n \setminus E$ έχει άπειρο μέτρο Lebesgue

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) = \infty$$

Από την άλλη

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_k) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\cup_{i=0}^k \partial B_i) \leq \frac{n2^{n-1}w_{n-1}}{2^{n-1}-1} < \infty$$

Συνεπώς η ακολουθία $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_k)$ είναι φραγμένη $E_k \rightarrow E$ ($k \rightarrow \infty$ με την έννοια του μέτρου, ή ισόδύναμα η ακολουθία χαρακτηριστικών συναρτήσεων χ_{E_k} συγκλίνει στο L^1 στο χ_E). Παρόλα αυτά δεν έχουμε

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_k)$$

Αυτό φανερώνει την ανάγκη ευρεσης μιας άλλης διατύπωσης του $F(u, K)$. Το νέο συναρτησιειδές θα ορίζεται στο χώρο $BV(\Omega)$ των συνάρτησεων φραγμένης κύμανσης στο Ω . Η ιδέα είναι να ταυτίσουμε το σύνολο περιγραμμάτων K με το σύνολο αλμάτων S_u του u το οποίο επιτρέπει την απαλοιφή του άγνωστου K . Έτσι η ιδέα είναι η θεώρηση της συναρτησιειδούς

$$G(u) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + a|\nabla u|^2 + b\mathcal{H}^{n-1}(S_u)$$

Εάν δεν έχουμε μια ιδιότητα κάτω ημισυνέχειας για σύνολα τότε θα την αναζητήσουμε στις συναρτήσεις. Τώρα θα αποπειραθούμε να ελαχιστοποιήσουμε το G στο χώρο $BV(\Omega)$. Δυστυχώς, ο χώρος $BV(\Omega)$ μπορεί να περιέχει παθολογικές μη σταθερές συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς και έχουν μηδενική κατανομική παράγωγο (ένα γνωστό παράδειγμα είναι η συνάρτηση Cantor-Vitali). Με μία τέτοια συνάρτηση u έχουμε

$$G(v) = \int_{\Omega} (v - v_0)^2 \geq \inf_{u \in BV(\Omega)} G(u) \geq 0$$

Και αφού αυτές οι παθολογικές συναρτήσεις είναι πυκνές σε $L^2(\Omega)$ τότε έχουμε

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} G(u) = 0$$

το οποίο υπονοεί ότι το στοιχείο του G δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί στον $BV(\Omega)$ γενικότερα. Για να αποφύγουμε αυτό το φαινόμενο πρέπει να εξάλειψουμε αυτές τις παθολογικές συναρτήσεις, οι οποίες έχουν την ιδιαιτερότητα ότι οι παράγωγοι τους είναι μέτρα με φορέα σε σύνολα Cantor. Ας θυμηθούμε πάλι ότι η κατανομική παράγωγος Du μιας $BV(\Omega)$ συνάρτησης μπορεί να χωριστεί σε τρία αμοιβαία ιδιόζοντα τμήματα:

$$Du = \nabla u \mathcal{L}^n + (u^+ - u^-)n_u \mathcal{H}_{S_u}^{n-1} + C_u$$

οπου $J(u) = (u_+ - u_-)n_u \mathcal{H}_{S_u}^{n-1}$ είναι το τμήμα που μετρά τα άλματα ενώ το C_u είναι το τμήμα Cantor. Ακολουθώντας τον De Giorgi [33, 32] ορίζουμε $SBV(\Omega)$

ως τον χώρο συναρτήσεων με φραγμένη παράγωγο, το οποίο είναι ο χώρος των $BV(\Omega)$ συναρτήσεων όπου $C_u = \emptyset$. Ας σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις Cantor-Vitali στις οποίες ζιτερθήκαμε παραπάνω δεν ανήκουν στις $SBV(\Omega)$, εφόσον οι φορείς τους περιέχονται κυρίως σε σύνολα Cantor. Συνεπώς ο κατάλληλος χώρος συνάρτησεων για να ελαχιστοποιήσουμε φαίνεται να είναι ο $SBV(\Omega)$. Το φυσικό αίτημα τώρα είναι να καθιερώσουμε την σχέση των δυο παρακάτω προλημάτων:

$$\inf_{V_1} (F(u, K)) /$$

όπου $V_1 = \{u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K) \cap L^\infty(\Omega), K \subset \Omega, K \text{ κλειστό, } \mathcal{H}^{n-1}(K) < \infty\}$

$$\inf_{V_2} (G(u))$$

όταν $V_2 SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Η απάντηση μπορεί να βρεθεί στον Ambrosio και είναι το αποτέλεσμα του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 3.2 Έστω $K \subset \Omega$ ως ένα κλειστο σύνολο με $\mathcal{H}^{n-1}(K) < \infty$ και $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K) \cap L^\infty(\Omega)$. Τότε $u \in SBV(\Omega)$ και $S \subset K \cup L$ με $\mathcal{H}^{n-1}(L) = 0$.

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι $\inf P_2 \leq \inf P_1$. Με τη χρήση θεωρημάτων πυκνότητας και ημισυνέχειας μπορούμε να δούμε ότι το P_2 έχει λύση u . Για τέτοιο ελαχιστοποιητή οι De Giorgi - Leaci $[\Delta \Gamma \Lambda]$ απέδειξαν ότι

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \setminus (\overline{S_u} \setminus S_u)) = 0$$

Θέτουμε $K = \Omega \cap \overline{S_u}$ λαμβάνουμε μια λύση του (P_1) και $\min(P_1) = \min(P_2)$. Παραμένει να δείξουμε ότι P_2 έχει λύση. Αυτό είναι άμεσο αποτέλεσμα του ακολουθίου θεωρήματος:

Θεώρημα 3.3 Έστω $u_m \in SBV(\Omega)$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων φραγμένη στην $L^\infty(\Omega)$ και $G(u_m) < C$. Υπάρχει υπακολουθία u_{n_k} συγκλίνοντας σχεδόν παντού σε μια συνάρτηση $u \in SBV(\Omega)$. Επιπλέον

∇u_{m_k} συγκλίνει ασθενώς στον $L^2(\Omega)^n$ στο ∇u και

$$\liminf \left(\mathcal{H}^{n-1}(S_{u_{m_k}}) \right) \geq \mathcal{H}^{n-1}(S_u)$$

Λαμβάνουμε μία λύση P_2 εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα σε οποιαδήποτε ελαχιστοποιητική ακολουθία του P_2 και παρατηρούμε εκ των προτέρων ότι μπορούμε να περιορίσουμε την προσοχή μας σε ακολουθίες $|u_m|_{L^\infty(\Omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\Omega)}$ (χρησιμοποιώντας ένα επιχειρημα αποκοπής).

Τα σημεία συσσώρευσης ακολουθιών στο χώρο $SBV(\Omega)$ όπως ορίζονται από το θεώρημα είναι λύσεις του P_2 . Παρατηρείστε ότι δεν υπάρχει μοναδικότητα της λύσης.

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη ενός ελαχιστοποιητή θα θελαμε τώρα να τον υπολογίσουμε. Ο φυσικός τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να ψάξουμε για τις καλύτερες συνθηκες. Κατά περίεργο τρόπο είναι πιο εύκολο να τις καθιερώσουμε

με $F(u, K)$ από ότι με $G(u)$. Έτσι ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ζευγάρι (u, K) , μια λύση από P_1 , για παράδειγμα,

$$F(u, K) \leq F(v, K')$$

για κάθε $v \in W^{1,2}(\Omega \setminus K') \cap L^\infty(\Omega)K' \subset \Omega, \mathcal{H}^{n-1}(K') < \infty$. Επιπλέον ας υποθέσουμε ότι (u, K) ικανοποιεί την εικασία Mumford-Shah:

- MS_1 Το K αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό $C^{1,1}$ - καμπυλών γ_i , που τέμνουν $\partial\Omega$ και τέμνονται στα τελικά σημεία τους.
- MS_2 Η u είναι C^1 σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\Omega \setminus K$.

Θεώρημα 3.4 *Ας υποθέσουμε (u, K) είναι μια λύση του P_1 ικανοποιώντας MS_1, MS_2 . Τότε:*

$$a\Delta_u = u - u_0, \quad \text{στο σύνολο } \Omega \setminus K$$

$$\nu \cdot \nabla u = 0, \quad \text{στο } \partial\Omega, \text{ και στις δύο πλευρές } \gamma_i^\pm \text{ της } \gamma_i$$

$$e(u_+) - e(u_-) + \beta\kappa(\gamma_i) = 0, \quad \text{στην } \gamma_i$$

όπου $e(u) = (u - u_0)^2 + a|\nabla u|^2$ και u_\pm είναι τα ίχνη του u σε κάθε πλευρά του K (καθε πλευρά του γ_i , $\kappa(\gamma_i)$ είναι η καμπυλότητα της γ_i).

Απόδειξη. Πρώτα εξετάζουμε τις μεταβολές του F ως προς u . Επιλέγουμε $K' = K$ και $u = u + t\phi$ με $t \in \mathbf{R}$, και ϕ είναι μια υπό συναρτηση δοκιμής με συμπαγή φορέα. Τότε

$$0 \leq F(u + t\phi) - F(u) = 2t \int_{\Omega \setminus K} \phi(u - u_0) + a\nabla\phi \cdot \nabla u + O(t^2)$$

χωρίζοντας το σε $t > 0$ ($t < 0$) και επιτρέποντας $t > 0^+$ ($t > 0^-$) παίρνουμε

$$0 = \int_{\Omega \setminus K} \phi(u - u_0) + a\nabla\phi \cdot \nabla u$$

Επιλέγοντας ϕ με φορέα σε $\Omega \setminus K$ και ολοκληρώνοντας το δεύτερο ολοκλήρωμα κατά μέρη στο (4.7) λαμβάνουμε

$$0 = \int_{\Omega \setminus K} \phi(u - u_0 - a\Delta_2 u)$$

δηλαδή στο $\Omega \setminus K$:

$$a\Delta_2 u = u - u_0$$

Τώρα πολλαπλασιάζοντας με τη συνάρτηση $\phi \in C^1(\Omega)$, μπορούμε εύκολα να λάβουμε τη ζητούμενη. Για να αποδείξουμε την τελευταία θα πρέπει να μεταβάλλουμε το F ως προς το χωρίο K . Τα επιχειρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι χρήσιμα και αργότερα στη μέθοδο των ενεργών καμπυλών. Για χάρη της σαφήνειας

θα ψάξουμε επίσης και μια πιο απλή εκδοχή του προβλήματος των Mumford-Shah. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μόνο ένα αντικείμενο και ότι το K είναι μια κλειστή $C^{1,1}$ -καμπύλη. Ας υποθέσουμε Ω_{int} είναι το ανοιχτό σύνολο που πειβάλλεται από το K και $\Omega_{ext} = \Omega \setminus \Omega_{int} \setminus K$. Σκοπός μας είναι να περιοριστούμε στις μεταβολές του K σύμφωνα με τη ροή

$$\dot{x} = \underline{v}(t, x)$$

v είναι μια αυθαίρετη ταχύτητα. Συμβολίζουμε με $K(t)$ τή μεταβολή για $t > 0$ του $K(0) = K$. Εφόσον u μεταβάλλεται όταν το K παραμορφώνεται, εμείς θεωρούμε το $u(t, x)$ το μοναδική λύση του $\inf (F(u, K(t)))$ και

$$u_{int}(t, x) = u(t, x)|_{\Omega_{ext}(t)}.$$

Τότε θα έχουμε

$$I(t) = \int_{\Omega \setminus K(t)} [u(t, x) - u_0(x)]^2 + a|\nabla u|^2 + b \int_{K(t)} ds$$

Αναλύουμε:

$$\Omega = \Omega_{int}(t) \cap \Omega_{ext}(t) \cap K(t)$$

και έχουμε

$$f(t) = f_{int}(t) + f_{ext}(t) + s(t)$$

όπου

$$f_{int}(t) = \int_{\Omega_{int} \setminus K(t)} [u(t, x) - u_0(x)]^2 + a|\nabla u|^2,$$

$$f_{ext}(t) = \int_{\Omega_{ext} \setminus K(t)} [u(t, x) - u_0(x)]^2 + a|\nabla u|^2,$$

$$s(t) = b \int_{K(t)} ds$$

Σημειώστε εδώ ότι όλα εξαρτώνται από το 'χρόνο'. Γνωρίζουμε από τη μεταβολή όγκου χωρίου τα ακόλουθα:

- Για τα δυο πρώτα ολοκληρώματα χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε ένα κλασικό θεώρημα για την παραγωγή ολοκληρώματος. Αν $l(t, x)$ είναι μια ομαλή συνάρτηση που ορίζεται σε ένα ομαλό χωρίο $\Omega(t) \subset \mathbf{R}^n$ και αν θέσουμε

$$g(t) = \int_{\Omega(t)} l(t, x)$$

Τότε

$$g'(t) = \int_{\Omega(t)} \partial_t l + \int_{\partial\Omega} l \underline{v} \cdot \underline{n}$$

όπου $\partial\Omega(t)$ είναι το σύνορο $\Omega(t)$, \underline{v} είναι το κάθετο διάνυσμα του $\partial\Omega(t)$ και \underline{v} είναι η ταχύτητα παραμόρφωσης του $\partial\Omega(t)$.

- Σε σχέση με το τελευταίο σκέλος χρειάζεται επίσης να γνωρίζουμε πως να υπολογίσουμε το παράγωγο του μήκους για την καμπυλότητα κ του περιγράμματος K :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{K(t)} ds \right) = \int_{K(t)} \kappa_K(t) \cdot \underline{\nu} ds$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε

$$I'(t) = 2 \left[I_{int} + I_{ext} + b \int_{K(t)} \kappa_K \underline{\nu} \cdot \underline{\nu} ds \right]$$

όπου για $i = int, ext$:

$$I_i(t) = \int_{\Omega_i} (u_i - u_0 \partial_t u_i + a \nabla u_i \cdot \nabla \partial_t u_i + \int_{K(t)} (u_i - u_0)^2 + a |\nabla u_i|^2 \underline{\nu} \cdot \underline{\nu})$$

Τώρα χάρη στον τύπο του Green

$$\int_{\Omega_i} \nabla u_i \cdot \partial_t u_i = - \int_{\Omega_i} \Delta_2 u_i \partial_t u_i + \int_{K(t)} \partial_t u_i \underline{\nu} \cdot \nabla u_i ds$$

και εφόσον η u_i είναι η λύση του

$$a \Delta_2 u_i = u_i - u_0, \text{ στο χωρίο } \Omega_i,$$

$$\underline{\nu} \nabla u_i = 0 \text{ στο περίγραμμα } K(t)$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση:

$$I'(t) = \int_{K(t)} (e(v_{int}) - e(v_{ext}) + b \kappa_K(t)) \underline{\nu} \cdot \underline{\nu}$$

Τώρα θα διαλέξουμε την ταχύτητα να είναι κάθετη στο περίγραμμα: $\underline{\nu} = \phi \underline{\nu}$ με τυχαία ϕ . Αν (u, K) είναι ένας ελαχιστοποιητής του συναρτησιοειδούς των Mumford-Shah έχουμε απαραίτητα $f'(0) = 0$, δηλ. και αφού ϕ είναι αυθαίρετη εμείς λαμβάνουμε $e(u_{int}) - e(u_{ext}) + \beta \kappa_K = 0$, στο περίγραμμα K .

Αυτό αρκεί για την απόδειξη του (4.5) στην απλούστερη περίπτωση και να πειστεί ότι η παραπάνω απόδειξη μπορεί να ισχύει επίσης σε γενικές περιπτώσεις.

Παρατήρηση: Πριν αναλύσουμε το σύνολο περιγραμμάτων K θα ήταν καλύτερα να πούμε μερικά πράγματα σχετικά με την ομαλότητα του συναρτησιοειδούς του u . Εάν K υποθεθεί ότι είναι $C^{1,1}$ και η u_0 είναι συνεχής, τότε η θεωρία των ελλειπτικών εξισώσεων [E, ΓΤ, ΓΠ] διασφαλίζει ότι:

- u είναι C^1 στο ανοιχτό σύνολο $\Omega \setminus K$ και σε όλα τα απλά συνοριακά σημεία του K και $\partial\Omega$.

- u επεκτείνεται τοπικά σε C^1 συνάρτηση στο χωρίο και στο σύνορο της.

Παρόλα αυτά προβλήματα μπορούν να παρουσιαστούν στις γωνίες: αν στο P εμφανίζεται γωνία a , $\pi < a \leq 2\pi$ (συμπεριλαμβανομένου του εξωτερικού μιας σχισμής, δηλ. όταν το P είναι το ακρο μιας $C^{1,1}$ καμπύλης η οποία δεν επεκτείνεται από κανένα άλλο τόξο), τότε u έχει την μορφή (σε πολικές συντεταγμένες κεντρμένες στο P).

$$u(r, \theta) = cr^{\pi/a} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}(\theta - \theta_0)\right) + \hat{v}(r, \theta)$$

όπου η \hat{v} είναι C^1 και c, θ_0 είναι κατάλληλες σταθερές.

3.5 Ομαλότητα του συνόλου περιγραμμάτων

Σε αυτό το τμήμα θα δούμε τις ποιοτικές ιδιότητες οι οποίες ικανοποιούνται από έναν ελαχιστοποιητή του συναρτησιοειδούς Mumford-Shah και εξετάζουμε πιά συγκεκριμένα την δομή του συνόλου K . Τα πρώτα αποτελέσματα δόθηκαν από τους Mumford-Shah το 1989. Υπήρξε το πρώτο βήμα προς μια λύση της ίδιας τους της εικασίας.

Θεώρημα 3.6 Έστω ότι $n = 2$. Αν (u, K) είναι ένας ελαχιστοποιητής του $F(u, K)$ έτσι ώστε K είναι μια ένωση απλών $C^{1,1}$ -καμπυλών γ_i οι οποίες τέμνουν το Ω και τέμνονται μεταξύ τους στα άκρα τους, τότε οι μόνες κορυφές του K είναι :

Σημεία $P \in \partial\Omega$ όπου ένα περίγραμμα γ_i τέμνει το Ω κάθετα.

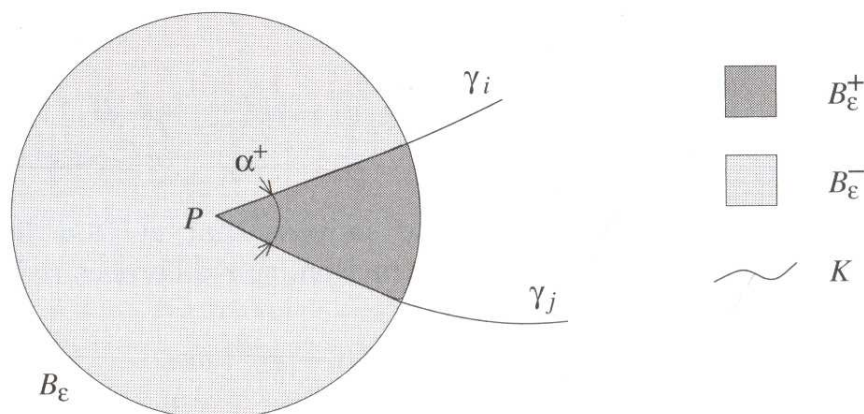
Τριπλά σημεία P όπου τρεις γ_i τέμνονται σε γωνίες $\frac{2\pi}{3}$

Η όπου γ_i τελειώνει και δεν συναντά τίποτα.

Σχέδιο απόδειξης. Η απόδειξη δεν είναι απλή και δεν θα παρουσιαστούν όλες οι λεπτομέρειες. Η διαδικασία συνοψίζεται σε πέντε βήματα:

1. Η ομαλότητα του K είναι ένα τοπικό φαινόμενο και άρα θα πρέπει υπολογίσουμε την ενέργεια σε μια μπάλα $B(P, \epsilon)$. Στην πραγματικότητα, λέμε ότι (u, K) ελαχιστοποιεί το F αν καμιά αλλαγή δεν μετατρέπει το (u, K) σε μια μπάλα αλλά παραμένει αναλλοίωτο εκτός αυτής, θα μειώσει το F .
2. Το K δεν έχει ακίδες δηλ. σημεία όπου δύο περιγράμματα γ_i, γ_j συναντώνται δίχως να εφάπτονται.
3. Αποδεικνύεται ότι η γ_i συναντά το Ω κάθετα.
4. Σε τριπλά σημεία, δηλαδή σε σημεία P όπου τρεις καμπύλες $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k$ συναντώνται σε γωνίες $\theta_i, \theta_j, \theta_k$, τότε έχουμε απαραίτητα $\theta_i = \theta_j = \theta_k = \frac{2\pi}{3}$.
5. Τέλος, αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει σημείο όπου τέσσερις ή και περισσότερες γ_i συναντώνται σε θετικές γωνίες και όχι σε οξείες γωνίες, δηλ. γωνίες όπου δυο τόξα είναι εφραπτόμενα.

Όλες θα αποδειχθούν με απαγωγή σε άτοπο. Εάν δεν ισχύουν οι 2, 3, 4 ή 5 τότε θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τοπικά από (u, K) ένα άλλο ζευγάρι (u', K') το οποίο μειώνει το $F(u, K)$ και έτσι αντιβαίνει την υπόθεση ότι το ζευγάρι u, K είναι ελαχιστοποιητής.



Σχήμα 3.1: Ορισμός των $B_\epsilon^+, B_\epsilon^-$

Θα δείξουμε πρώτα πως αποδεικνύεται η (2). Ας υποθέσουμε ότι το σημείο P είναι ακίδα και η $B_\epsilon = B_{P,\epsilon}$ είναι η μπάλα με κέντρο P και ακτίνας ϵ . Ας υποθέσουμε ότι η $\gamma_i \cup \gamma_j$ χωρίζει τη B_ϵ σε τμήματα B_ϵ^+ με γωνία α_+ , $0 < \alpha_+ < \pi$ και B_ϵ^- με γωνία α_- , $\pi < \alpha_- < 2\pi$ (βλ. Σχήμα 4). Ας ορίσουμε την C^∞ συνάρτηση εντοπισμού $\phi(\underline{x})$, $0 \leq \phi \leq 1$:

$$\phi(\underline{x}) = 1, \text{ για } |\underline{x}| > 1, \phi(\underline{x}) = 0, \text{ για } |\underline{x}| < \frac{1}{2}$$

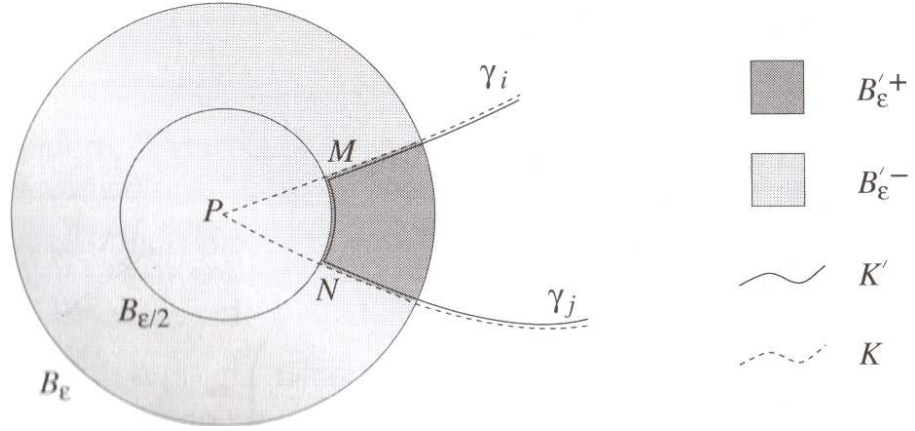
και έστω

$$\phi_\epsilon(\underline{x}) = \phi\left(\frac{\underline{x} - \underline{x}(P)}{\epsilon}\right)$$

Τώρα πρόκειται να κατασκευάσουμε από το (u, K) ένα άλλο ζευγάρι (u', K') . Θα κόψουμε την γωνία στο P σε απόσταση $\frac{\epsilon}{2}$, συρρικνώνοντας το B_ϵ^+ και μεγεθύνοντας B_ϵ^- . Ακριβέστερα, η μόνη αλλαγή που κάνουμε στο K είναι να απομακρύνουμε από το B_ϵ^+ το καμπυλόγραμμο τρίγωνο PMN και να το προσθέσουμε στο B_ϵ^- αφήνοντας αμετάβλητο το υπόλοιπο K (βλ.σχήμα). Ονομάζουμε αυτό το σύνολο περιγραμμάτων K' και αντίστοιχα B_ϵ^+ . Συμβολίζουμε το νέο με B_ϵ^+ (αντίστοιχα B_ϵ^- το καινούριο B_ϵ^-). Έπειτα ορίζουμε $u'(\underline{x})$ ως εξής:

$$u'(\underline{x}) = u(P) + \phi_\epsilon(\underline{x})(u(\underline{x}) - u(P)), \text{ επί του } B_\epsilon^-, \text{ και } u'(\underline{x}) = u(\underline{x})$$

και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u(P) = 0$. Θα εκτιμήσουμε τη διαφορά $F(u', K') - F(u, K)$. Με την κατασκευή αυτή η διαφορά


 Σχήμα 3.2: Κατασκευή της λύσης u', K'

μειώνεται κατά

$$F(u', K') - F(u, K) = \int_{B'_\epsilon} [(\phi_\epsilon u - u_0)^2 - (u - u_0)^2 + a|\nabla(\phi_\epsilon u)|^2 - |\nabla u|^2] + b(\mathcal{H}^1(K') - \mathcal{H}^1(K))$$

Εξετάζουμε τα δύο πρώτα χωριστά (θα δηλώσουμε c μία καθολική σταθερά):

$$\begin{aligned} A_{1\epsilon} &= \int_{B'_\epsilon} [(\phi_\epsilon u - u_0)^2 - (u - u_0)^2] = \\ &= \int_{B'_\epsilon} \left[\frac{1 - \phi_\epsilon}{1 + \epsilon} u_0^2 - (1 - \phi_\epsilon) \left(\sqrt{1 + \phi_\epsilon} u - \frac{u_0}{\sqrt{1 + \phi_\epsilon}} \right)^2 \right] \leq c\epsilon^2 \end{aligned}$$

Επίσης:

$$A_{2\epsilon} = a \int_{B'_\epsilon} [(\phi_\epsilon^2 - 1)|\nabla u|^2 - |\nabla u|^2] = \int_{B'_\epsilon} [(\phi_\epsilon^2 - 1)|\nabla u|^2 + u^2|\nabla\phi_\epsilon|^2 + 2u\phi_\epsilon\nabla\phi_\epsilon \cdot \nabla u]$$

Η συμπεριφορά του u που βρήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο δίνει:

$$u = O(r^{\frac{\pi}{a^-}}), \quad \text{και} \quad |\nabla u| = O(r^{\frac{\pi}{a^-} - 1})$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\phi_\epsilon \leq 1, |\nabla\phi_\epsilon| \leq c\epsilon$ στη σφαίρα $B(P, \frac{\epsilon}{2})$, τότε βρίσκουμε

$$A_{2\epsilon} \leq c\epsilon^{\frac{2\pi}{a^-}}$$

Τέλος, στον τρίτο όρο $\mathcal{H}^1(K') - \mathcal{H}^1(K)$, αντικαθιστούμε ασυμπτωτικά $\epsilon \rightarrow 0$, τις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου με γωνίες α_+ από την τρίτη πλευρά, έτσι

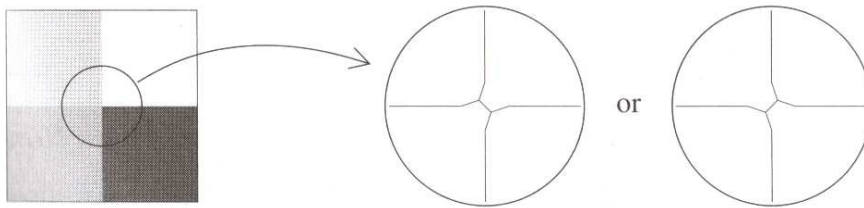
$$|\mathcal{H}^1(K') - \mathcal{H}^1(K)| \leq \epsilon \left(1 - \sin \frac{\alpha_+}{2} \right)$$

Έτσι λαμβάνουμε

$$F(u', K') - F(u, K) \leq c \left(\epsilon^2 + \epsilon^{\frac{2\pi}{a^+}} + \epsilon \left(1 - \sin \frac{a^+}{2} \right) \right)$$

Έτσι $0 < \alpha^+ < \pi$, $\pi < \alpha^- < 2\pi$, η ενέργεια μειώνεται σε τάξη ϵ αν ϵ είναι αρκετά μικρό, το οποίο αντικρούει το ότι u, K είναι ελαχιστοποιητής. Σημειώνουμε ότι ο όρος $A_{1\epsilon}$ είναι τάξεως ϵ^2 και για αυτό αμελητέος σε σχέση με τους άλλους δυο όρους ανεξάρτητα από το u_0 .

Παρατήρηση: Αυτές οι περιπτώσεις ομαλότητας είναι πολύ ενδιαφέρουσες εξασφαλίζουν ότι η κατάτμηση ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες, με το κόστος της πιστότητας της εικόνας. Για παράδειγμα, αν σκεφτούμε την απλή περίπτωση που απεικονίζεται στο σχήμα δείχνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε την ακριβή κατάτμηση με γραμμές σε $\frac{\pi}{2}$. Ποιοτικά, μπορούμε να έχουμε μια απο τις δύο διατάξεις του σχήματος 4.6. Αυτό είναι μια απλοποιημένη απεικόνιση του γιατί η μοναδικότητα μπορεί να μην διαρκέσει.



Σχήμα 3.3: Απεικόνιση 'ισών' κατατμήσεων μιας δεδομένης εικόνας. Αυτό φανερώνει γιατί οι συνθήκες ομαλότητας σε ένα σύνολο περιγραμμάτων επιδρά στην μοναδικότητα της λύσης

Όπως ειπώθηκε και πριν το θεώρημα 4.2.4 είναι το πρώτο βήμα για να αποδειχτεί η εικασία των Mumford-Shah. Προκειμένου να προχωρήσουμε θα απορρίψουμε την υπόθεση ότι το K αποτελείται από $C^{1,1}$ -καμπύλες που τέμνουν τόσο το σύνορο του Ω όσο και μεταξύ τους μόνο στα τελικά σημεία τους. Ο A. Bonnet 1214 έκανε σημαντική πρόοδο σε αυτόν τον τομέα. Συγκεκριμένα έδειξε.

Θεώρημα 3.7 Αν u, K είναι ελαχιστοποιητής του F και το K είναι συνεκτικό, τότε το u, K είναι ένα από τα ακόλουθα:

K είναι κενό και η u είναι συνεχής.

K είναι μια ευθεία γραμμή που ορίζει δυο ημιεπίπεδα και η u είναι συνεχής σε κάθε ημιεπίπεδο.

K είναι η ένωση τριών ημιευθειών με γωνίες $\frac{2\pi}{3}$ και η u είναι συνεχής σε κάθε τμήμα.

Σε ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων (r, θ) :

$$u(r, \theta) = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \text{για } \theta \in [0, 2\pi)$$

και K είναι ο ημιάξονας $\theta = 0$ (για κορυφή ρωγμής).

Σημειώνουμε ότι τα συμπεράσματα του θεωρήματος 4.2.5 και του 4.2.4 είναι παρόμοια. Η βασική διαφορά βρίσκεται στην υπόθεση τους. Στο θεώρημα το K υποτίθεται ότι αποτελείται από ένωση περιορισμένων $C^{1,1}$ -τόξων ενώ στο θεώρημα 4.2.5 το K υποτίθεται ότι είναι συνεκτικό. Ο Bonnet απέδειξε επίσης και το παρακάτω αποτέλεσμα, 1314:

Θεώρημα 3.8 Κάθε απομονωμένη συνεκτική συνιστώσα του K είναι η ένωση περιορισμένων $C^{1,1}$ -τόξων. Αυτά τα τόξα είναι $C^{1,1}$ μακριά από τις άκρες των ακμών και μπορούν να συγχωνευθούν σε τριπλές συνδέσεις με γωνίες $\frac{2\pi}{3}$.

Παρατηρούμε ότι το θεώρημα 4.2.6 δεν επιτρέπει έναν ελαχιστοποιητή να έχει ένα απεριόριστο αριθμό αυθαίρετων μικρών κομματιών συνδεδεμένων μεταξύ τους. Η απόδειξη του θεωρήματος 4.2.6 βρίσκεται στον χαρακτηρισμό των ελαχιστοποιητών η οποία είναι παρόμοια με αυτήν του θεωρήματος 3.2.6

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο λέγοντας ότι από όσο τελικά γνωρίζουμε η εικασία των Mumford, Shah παραμένει ένα ανοιχτό ερώτημα. Παρόλα αυτά έχει γίνει μεγάλη πρόοδος ως προς την κατανόηση της. Για παράδειγμα ζητήστε με περισσότερη λεπτομέρεια στο [Δ]

3.8.1 Προσεγγίσεις του συναρτησιοειδούς Mumford-Shah.

Η έλλειψη διαφορισιμότητας του συναρτησιοειδούς σε κατάλληλη νόρμα δεν μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Euler - Lagrange. Επιπλέον, η διακριτοποίηση του αγνώστου συνόλου ασυνέχειας είναι ένα πολύπλοκο εγχείρημα. Μια κοινή μέθοδος είναι να προσεγγίσουμε το $F(u, K)$ (ή $G(u)$) με μια ακολουθία F_ϵ ομαλών συναρτήσεων ορισμένων σε χώρους Sobolev, η δε σύγκλιση του F_ϵ στο F όταν $\epsilon \rightarrow 0$ εννοείται με την έννοια της Γ -σύγκλισης. Ασφαλώς αν θέλουμε να έχουμε μια αυστηρή προσέγγιση, το σύνολο K δεν πρέπει να εμφανιστεί στο F_ϵ . Μπορούμε να ξεχωρίσουμε τέσσερις προσεγγίσεις:

Προσέγγιση με ελλειπτικά συναρτησιοειδή. Σε αυτή την προσέγγιση το σύνολο S_u (ή K) αντικαθιστάται από μια βοηθητική μεταβλητή v (μια συνάρτηση) η οποία προσεγγίζει την χαρακτηριστική συνάρτηση $1 - \chi_{S_u}$ του S_u , δηλ. $v = 0$ στο S_u και $v \approx 1$ εκτός του S_u . Οι Ambrosio, Tortorelli [AT] πρότειναν τις παρακάτω ακολουθίες συναρτησιοειδών:

$$F_\epsilon(u, v) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + v^2 |\nabla u|^2 + \epsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\epsilon} (v - 1)^2$$

οι οποίες θα συζητηθούν παρακάτω.

Προσεγγίσεις με την εισαγωγή ιδιαζόντων διαταραχών δεύτερης τάξης. [ΑΛ]81619 Έστω $W^{2,2}(\Omega)$ είναι ο χώρος Sobolev του $L^2(\Omega)$ και όπου η f είναι κάτω ημισυνεχής αύξουσα συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ και τα a, b είναι τα

$$a = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{f(s)}{s} \right), \quad b = \lim_{s \rightarrow \infty} f(s)$$

Εάν $w \in W^{2,2}(\Omega)$

$$F_\epsilon(u) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + \frac{1}{\epsilon} f(\epsilon |\nabla u|^2) + \epsilon^3 |\nabla^2 u|^2$$

και $F_\epsilon(u) = \infty$ όταν $u \in L^1(\Omega) \setminus W^{2,2}(\Omega)$. όπου $\nabla^2 u$ συμβολίζει την εσσιανή του u με τη L^∞ νόρμα ($|A| = \max(|Ax, x|, |x| = 1)$). Μπορούμε να δείξουμε [BA] ότι η προσέγγιση F_ϵ Γ-συγκλίνει στην L^1 -τοπολογία σε μια τροποποίηση στο συναρτησιοειδές των Mumford, Shah εάν :

$$\tilde{G}(u) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + a |\nabla u|^2 + n \int_{S_u} \sqrt{u^+ - u^-} d\mathcal{H}^{n-1}$$

όπου $n(b) = b^{3/4}(\sqrt{6} + \sqrt{2/3})$ και όπου $GSBV(\Omega)$ είναι ο χώρος των L^1 -συνάρτησεων u για τις οποίες η συντεταγμένη συνάρτηση $u_\tau \in SBV(\Omega)$ για $\tau > 0$, όταν $u_\tau = -\tau$.

Προσέγγιση με την εισαγωγή μη τοπικών όρων. Ένα τυπικό παράδειγμα είναι

$$F_\epsilon(u) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + \frac{1}{\epsilon} f(\epsilon m(|\nabla u|^2, B_{\underline{x}, \epsilon}))$$

όπου f είναι μια λ κατάλληλη μη φθίνουσα, συνεχής συνάρτηση και $m(g, B_{\underline{x}, \epsilon})$ είναι η μέση τιμή της g στη μπάλα με κέντρο \underline{x} και ακτίνα ϵ . Η ιδέα για την εισαγωγή μη τοπικών προσεγγίσεων προέρχεται από την αδυναμία [ABI]1730, να επιτευχθεί μια μεταβολική προσέγγιση μέσω τοπικών συναρτησιοειδών της μορφής

$$E_\epsilon(u) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + f_\epsilon(\nabla u)$$

Όντως αν μια τέτοια προσέγγιση υπήρχε το συναρτησιοειδές των Mumford-Shah θα ήταν επίσης το Γ -όριο της αποκατεστημένης ακολουθίας συναρτησιοειδών:

$$RE_\epsilon(u) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + f^{**}(\nabla u)$$

όπου f_ϵ^{**} είναι το κυρτό περίβλημα του f_ϵ . Τότε το συναρτησιοειδές Mumford-Shah θα ήταν επίσης κυρτό.

Προσεγγιση με σχήματα πεπερασμένων διαφορών. [ABI]2340 Αυτή η προσέγγιση είναι η φυσικότερη από άποψη αριθμητικής ανάλυσης. Η μέθοδος συνίσταται στην παρατήρηση ότι εφόσον η u θα μπορούσε να ειπωθεί ως είναι μια διακριτή εικόνα ορισμένη μέσα σε ένα πλέγμα με κυψέλη $h > 0$ τότε το

F_h είναι μια διακριτή εκδοχή του συναρτησιοειδούς Mumford-Shah. Ο Chambolle πρότεινε πρώτος μια θεωρία [A] και αργότερα ακολούθησαν οι Blake-Zissermann [BZ]. Στην μονοδιάστατη περίπτωση θεωρούμε

$$g_k^h = \int_{kh}^{(k+1)h} u_0(t) dt, \quad \text{όταν } u^h = (u_k^h)_{kh \in \Omega}, \quad \text{είναι ένα διακριτό σήμα}$$

Εν συνεχεία ο Chambolle πρότεινε το εξής:

$$F^h(u^h) = h \sum_k W_h \left(\frac{u_{k+1}^h - u_k^h}{h} \right) + (u_k^h - g_k^h)^2$$

όπου

$$W_h(t) = \min(t^2, \frac{1}{h})$$

και απέδειξε ότι η F_h, Γ -συγκλίνει στο συναρτησιοειδές

$$F(u) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + \int_{\Omega \setminus S_u} u^2 + \text{card}(S_u)$$

για $u \in SBV(\Omega)$. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να τροποποιηθεί στις δύο διαστάσεις και να λάβει τη μορφή:

$$F^h(u^h) = h^2 \sum_{k,l} \left[W_h \left(\frac{u_{k+1,l}^h - u_{k,l}^h}{h} \right) + W_h \left(\frac{u_{k,l+1}^h - u_{k,l}^h}{h} \right) + (u_{k,l}^h - g_{k,l}^h)^2 \right]$$

Μπορούμε να δείξουμε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα Γ -σύγκλισης αλλά το μονοδιάστατο μέτρο Hausdorff πρέπει να αντικατασταθεί από ανισότροπο μέτρο προκειμένου να συνυπολογιστεί η έλλειψη συμμετρίας περιστροφής της φυσικής διδιάστατης επέκτασης. Για περισσότερες ολοκληρωμένες αποδείξεις [A] και σχετικές δουλειές 915246869.

Εδώ θα μελετήσουμε μόνο την πρώτη προσέγγιση των Ambrosio, Tortorelli [AT] που είναι η πρώτη που παρουσιάστηκε γραπτώς και που χρησιμοποιείται κοινώς. Μελετούμε εδώ την περίπτωση $n = 2$ και θέτουμε τις παραμέτρους $a = b = 1$:

$$F_{\epsilon}(u, v) \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + v^2 |\nabla u|^2 \epsilon |\nabla v|^2 \frac{1}{4\epsilon} (v - 1)^2$$

Πριν όμως αρχίσουμε να παραθέτουμε μαθηματικά αποτελέσματα ας δείξουμε πρώτα πόσο κοντά είναι το F_{ϵ} συναρτησιοειδές των Mumford-Shah. Θα ακολουθήσουμε την παρουσίαση του March [M]. Καθώς το σύνολο ασυνέχειας S_u είναι μη-δενικού μέτρου Lebesgue (και $u(x)$ θα εινε ίσο με 1 α.ε), σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε μια ακολουθία συναρτήσεων $(u_{\epsilon}, v_{\epsilon})$ που συγκλίνει στο $(u, 1)$ έτσι ώστε η ακολουθία $F_{\epsilon}(u_{\epsilon}, v_{\epsilon})$ συγκλίνει στο $G(u)$ που εισαγάγαμε πιο πάνω. Συμβολίζουμε με $\tau(x)$ την απόσταση του σημείου x από το S_u και

$$A_{\epsilon} = \{x : \tau(x) \leq \eta(\epsilon)\}, \quad B_{\epsilon} = \{x : \eta(\epsilon) < \tau(x) < \gamma(\epsilon)\}$$

όπου $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma(\epsilon) = 0$. Περιορίζουμε την κατασκευή μας σε συναρτήσεις u_ϵ έτσι ώστε u_ϵ είναι ομαλή στο A_ϵ και $u_\epsilon = u$ έξω από A_ϵ . Για τις συναρτήσεις ελέγχου έχουμε ότι ∇u_ϵ εκρήγνυται καθώς πλησιάζουμε στο S_u άρα το u_ϵ πρέπει να είναι μικρό στο A_ϵ . Επιλέγουμε $v_\epsilon = 0$ στο A_ϵ , $v_\epsilon = 1 - w(\epsilon)$ έξω από $A_\epsilon \cap B_\epsilon$ με

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} w(\epsilon) = 0$$

Τέλος απαιτούμε το v_ϵ να είναι ομαλό σε ολόκληρο το Ω . Είναι εύκολο να δούμε ότι τα δύο πρώτα ολοκληρώματα του F_ϵ συγκλίνουν με τα δυο πρώτα του G . Το τρίτο απαιτεί ειδικότερη μεταχείριση. Η κατασκευή συνιστά

$$\int_{\Omega} \epsilon |\nabla v_\epsilon|^2 + \frac{1}{4\epsilon} (1 - v_\epsilon)^2 = \frac{1}{4\epsilon} \left[A_\epsilon + w(\epsilon)^2 A(\Omega \setminus (A_\epsilon \cup B_\epsilon)) + \int_{B_\epsilon} (1 - v_\epsilon)^2 \right] + \epsilon \int_{B_\epsilon} |\nabla v_\epsilon|^2$$

Αν επιλέξουμε τα h_ϵ και w_ϵ έτσι ώστε $\eta(\epsilon) = o(\epsilon)$, $w(\epsilon) = o(\epsilon^{1/2})$ και τότε τα δύο πρώτα ολοκληρώματα συγκλίνουν στο μηδέν. Θα μελετήσουμε τώρα το όριο του

$$R_\epsilon = \int_{B_\epsilon} \left(\epsilon |\nabla v_\epsilon|^2 + \frac{1}{4\epsilon} (1 - v_\epsilon)^2 \right)$$

Αναζητούμε v_ϵ στην περιοχή B_ϵ στη μορφή $v_\epsilon = \sigma_\epsilon \circ \tau$ με $\sigma_\epsilon : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$. Με αυτή την επιλογή, εφόσον $|\nabla \tau| = 1$ ανάγεται στην

$$R_\epsilon = \int_{B_\epsilon} \left(\epsilon \sigma_\epsilon'(\tau(\underline{x}))^2 + \frac{1}{4\epsilon} (1 - \sigma_\epsilon(\tau(\underline{x})))^2 \right)$$

Θέτοντας $t = \tau(\underline{x})$, $g(t) = \mathcal{H}^1(C_t)$, $C_t = \{\underline{x} : \tau(\underline{x}) = t\}$ λαμβάνουμε

$$R_\epsilon = \int_{\eta(\epsilon)}^{\gamma(\epsilon)} \left(\epsilon \sigma_\epsilon'^2 + \frac{1}{4\epsilon} (1 - \sigma_\epsilon)^2 \right) g(t) dt$$

Έπειτα ας ορίσουμε σ_ϵ ως τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\sigma_\epsilon'(t) = \frac{1}{\epsilon} (1 - \sigma_\epsilon(t)), \quad \sigma_\epsilon(\eta(\epsilon)) = 0$$

Ένας στοιχειώδης υπολογισμός δίνει

$$\sigma_\epsilon(t) = 1 - e^{\frac{\eta(\epsilon) - t}{2\epsilon}}$$

Η R_ϵ μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$R_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_{\eta(\epsilon)}^{\gamma(\epsilon)} e^{\frac{\eta(\epsilon) - t}{\epsilon}} g(t) dt$$

Χάρη στο θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $t_0 \in (\eta(\epsilon), \gamma(\epsilon))$ έτσι ώστε

$$R_\epsilon = \frac{g(t_0)}{2} \left(1 - e^{\frac{\eta(\epsilon) - \gamma(\epsilon)}{\epsilon}} \right)$$

Διαλέγοντας $\gamma(\epsilon)$ έτσι ώστε

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma(\epsilon)}{\epsilon} = \infty$$

και παρατηρώντας ότι το $g(t_0)$ συγκλίνει στο $\mathcal{H}^1(S_u)$ έχουμε

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_\epsilon = \mathcal{H}^1(S_u)$$

Εν κατακλείδι έχουμε δημιουργήσει μια ακολουθία (u_ϵ, v_ϵ) προσεγγίζοντας $(u, 1)$ και τέτοια ώστε

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon} R_\epsilon = \mathcal{H}^1(S_u)$$

Φυσικά αυτό δεν εξασφαλίζει την Γ -σύγκλιση του F_ϵ στο G , αλλά μας δίνει μια ιδέα της μεθοδολογίας. Είναι επίσης ένας τρόπος για να ελέγχουμε πως φθάνουμε στο αναμενόμενο όριο. Τώρα θα γυρίσουμε στην αυστηρή προσέγγιση. Πρέπει πρώτα να αποδείξουμε ότι το $F_\epsilon(u, v)$ δέχεται ελαχιστοποιητή και τότε $F_\epsilon(u, v)$ Γ -συγκλίνει στο συναρτησιοειδές των Mumford-Shah. Θέτουμε $\epsilon > 0$. Τότε $F_\epsilon(u, v)$ ορίζεται καλά στο χώρο $V = \{(u, v) \in (W^{1,2}(\Omega))^2 / 0 \leq v \leq 1\}$ και είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής σε αυτό το χώρο. Για να δείξουμε την ύπαρξη ενός ελαχιστοποιητή αρκεί να φράξουμε στο V μία τυχαία ακολουθία ελαχιστοποιητών $(u_{\epsilon,n}, v_{\epsilon,n})$ ανεξάρτητα από το n . Εύκολα φράσσουμε στον $L^\infty(\Omega)$ ακολουθίες όπως $u_{\epsilon,n}, v_{\epsilon,n}$, αλλά παρουσιάζεται δυσκολία όταν προσπαθούμε να φράξουμε στο ∇u_ϵ^n αφού δεν έχουμε κανένα έλεγχο στον όρο

$$\int_{\Omega} (v_\epsilon^n)^2 |\nabla u_\epsilon^n|^2$$

Για να ξεπεράσουμε αυτή την δυσκολία τροποποιούμε ανεπαίσθητα το $F_\epsilon(u, v)$ προσθέτοντας τη διαταραχή:

$$\tilde{F}_\epsilon(u, v) = F_\epsilon(u, v) + h(\epsilon) \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

όπου $h(\epsilon) > 0$ είναι κατάλληλη σταθερά έτσι ώστε $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(\epsilon) = 0$. Με αυτή την αλλαγή είναι σίγουρο ότι το συναρτησιοειδές \tilde{F}_ϵ είναι υποχρεωτικά πικτική στο V και έχουμε αποδείξει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.9 Έστω ότι $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Τότε το προβλήμα $\inf_V (\tilde{F}_\epsilon)$ δέχεται μία λύση (u_ϵ, v_ϵ) με $\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$

Όταν $\epsilon \rightarrow 0$ έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα Γ - σύγκλισης, 516:

Θεώρημα 3.10 Έστω $\tilde{F}_\epsilon : L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ να ορίζεται όταν $(u, v) \in (W^{1,2}(\Omega))^2, 0 \leq v \leq 1$

$$\tilde{F}_\epsilon = \int_{\Omega} \left[(u - u_0)^2 + (v^2 + h(\epsilon)) |\nabla u|^2 + \epsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\epsilon} (1 - v)^2 \right]$$

και ειδάλλως είναι ∞. Επίσης $G : L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ να ορίζεται όταν $u \in GSBV(\Omega)$

$$G(u, v) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + |\nabla u|^2 + \mathcal{H}^1(S_u)$$

και ∞ ειδάλλως. Αν $h(\epsilon) = o(\epsilon)$, τότε $\tilde{F}_\epsilon(u, v)$, Γ -συγκλίνει στο $G(u, v)$ στην $(L^1(\Omega))^2$ -ισχυρή τοπολογία. Επιπλέον το \tilde{F}_ϵ δέχεται ελαχιστοποιητή (u, v) - αγνοώντας υπακολουθίες - u_ϵ συγκλίνει στην $L^1(\Omega)$ σε έναν ελαχιστοποιητή του G , $uSBV(\Omega)$ και $\inf \tilde{F}_\epsilon \rightarrow \inf G(u, v)$

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι μακρά και ιδιαίτερα τεχνική. Η καλύτερη παρουσίαση δίνεται στον Braides [BA].

3.10.1 Αποτελέσματα πειραμάτων

Ένας φυσικός τρόπος για να υπολογίσουμε αριθμητικά τη λύση στο συναρτησιοειδές των Mumford-Shah είναι να χρησιμοποιήσουμε από τις προσεγγίσεις (1-4). Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών 3234082 ή σχήμα πεπερασμένων στοιχείων [ABI]915.

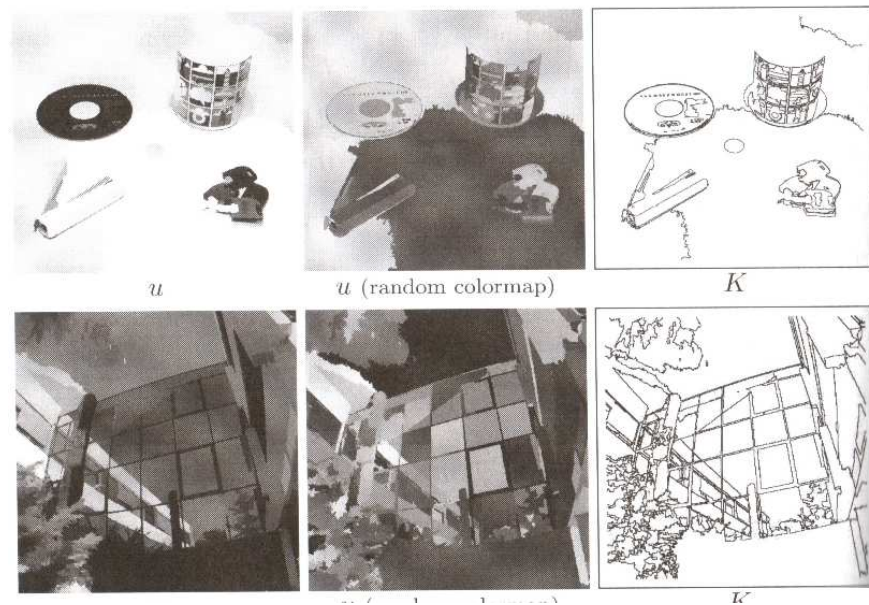
Στην εικόνα ... παρουσιάζουμε κάποια αποτελέσματα τροποποιημένου συναρτησιοειδούς των Mumford-Shah, ονομαστικά το τμηματικό συνεχές μοντέλο.

Η μόνη αλλαγή από τους Mumford, Shah είναι ότι θεωρούμε μόνο δύο όρους στην ενέργεια: τον όρο προσαρμογής και τον όρο μέτρου της ασυνεχειας K :

$$F(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2 + b \int_K ds$$

Η στρατηγική ελαχιστοποίησης του F είναι σχετικά απλή και ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων ένωσης περιοχών (η ανάπτυξη περιοχών) (βλ.[282]). Αποτελείται από:

- Παρατηρώντας ότι δοθείσης μίας κατάτμησης $\Omega^0 = \cup_{i=1}^m (\Omega_i^0 \cup K^0)$, τότε ο ελαχιστοποιητής u του $F(u, K^0)$ που ανταποκρίνεται είναι τμηματικά σταθερή συνάρτηση όπου οι σταθερές είναι οι μέσοι όροι του u_0 πάνω από κάθε Ω_i^0 .
- Συμπτύσσοντας αναδρομικά όλα τα ζευγάρια περιοχών των οποίων η σύμπτυξη μειώνει την ενέργεια F ενώ ο συντελεστής $b > 0$ παίζει το ρόλο μιας παραμέτρου κλίμακας.



Σχήμα 3.4: Αποτελέσματα από την κατάτμηση των αντικειμένων $anikeim'ewnwn$ και κτίριο Borel χρησιμοποιώντας την προσέγγιση από το Megawave 2. Παρουσιάζεται η λύση (u, K) . Παρατηρείστε ότι η μεσαία εικόνα παρουσιάζεται με τυχαίο χρωματισμό για να φαινόνται καλύτερα οι διαφορετικές περιοχές. Το Megawave 2 δημιουργήθηκε το 1993 από τον Jacques Froment στο Ceremade στο Πανεπιστήμιο του Παρισιού 9 (Dauphine) και τώρα χρησιμοποιείται από το εργαστήριο CMLA της Ecole Normale Supérieure de Cachan. Μπορεί κανείς να το βρει στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.cmla.ens-cachan.fr/Cmla/Megawave/>.

Κεφάλαιο 4

Δυναμικές Μέθοδοι

4.1 Ενεργά γεωδαιτικά περιγράμματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τα μοντέλα των όφιοειδών και των ενεργών γεωδαιτικών περιγραμμάτων. Εδώ σε αντίθεση με το συναρτησιοειδές των Mumford-Shah δεν ψάχνουμε την δομή της εικόνας αλλά τα περιγράμματα των αντικειμένων. Αυτό προκαλεί δύο ερωτήματα: πως θα μπορούσε να παρουσιαστεί ένα περίγραμμα και με ποια κριτήρια θα επιλέγαμε το σωστό περίγραμμα. Σε πολλές μεθόδους υποθέτουμε ότι υπάρχει καθαρή διαφοροποίηση της έντασης της εικόνας $I(x)$ ανάμεσα στο σκηνικό και το αντικείμενο. Για αυτό το λόγο το μέτρο της κλίσης του I είναι υψηλό στα όρια των αντικειμένων και ίσως διαλέγουμε(η μια συνάρτηση του) ως ανιχνευτή περιγραμμάτων. Υπάρχει εκτεταμένη βιβλιογραφία όσον αφορά τα όφιοειδή και τα ενεργά γεωδαιτικά περιγράμματα και η μέθοδος χρησιμοποιείται πλέον στην ανάλυση εικόνων. Παρόλο που η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε δυο και τρεις διαστάσεις εμείς αναπτύσσουμε μόνο την περίπτωση δύο διαστάσεων για λόγους απλότητας.

4.1.1 Το μοντέλο Kass - Witkin - Τερζόπουλου

Θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας το μοντέλο Kass-Witkin-Τερζόπουλου [] το οποίο θεωρούμε ότι είναι η καλύτερη από τις πρώιμες προσπάθειες σε αυτήν τη κατεύθυνση. Έστω Γ το σύνολο των περιγραμμάτων της εικόνας (τα όρια των αντικειμένων). Υποθέτουμε ότι το $\Gamma = \bigcup_{j \in J} C_j$ είναι μετρήσιμο, όπου η κάθε καμπύλη C_j είναι κλειστή και τμηματικά C^1 . Σχετικά με την ένταση I (το Ω είναι φραγμένο) εμείς υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\underline{x} = (x_1, x_2) \rightarrow I(\underline{x})$ ανήκει στο χώρο $W^{1,\infty}(\Omega)$ Για να χαρακτηρίσουμε περιγράμματα με μηδενικές τιμές από παρά με άπειρες ορίζουμε τη συνάρτηση $g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες

1. g είναι ομαλή και φθίνουσα
2. $g(0) = 1, \lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$

Η συνάρτηση $\underline{x} \rightarrow g(|\nabla I|(\underline{x}))$ ονομάζεται *συνάρτηση ανίχνευσης περιγράμματος*. Μια τυπική επιλογή του g είναι $g(s) = \frac{1}{1+s^2}$.

Στους Kass - Witkin - Terzopoulos [ΚΩΤ] η ανίχνευση περιγραμμάτων ανάγεται την τάυτιση ενός παραμορφωμένου μοντέλου σε μια εικόνα με ελαχιστοποίηση ενέργειας. Με την κίνηση καμπυλών κατά την ελαχιστοποίηση της ενέργειας τις ονομάζουμε οφιοειδή (snakes). Αν C είναι το σύνολο των κλειστών καμπυλών \mathbf{R}^2 που ορίζονται ως

$$C = \{c : S^1 \rightarrow \Omega/c \text{ τμηματικά, } C^1\}$$

Τότε εάν $c \in C$ συμβολίζουμε με $J(c)$ την ενέργεια:

$$J(\underline{c}) = \int_{S^1} |\underline{c}'|^2 + b|\underline{c}''|^2 + \lambda g^2(|\nabla I|)$$

όπου

$$\underline{c}(s) = (c_1, c_2), \quad \underline{c}'(s) = \frac{dc}{ds}, \quad |\underline{c}'| = \sqrt{c_1'^2 + c_2'^2}$$

και με το ίδιο σύμβολο για την επιτάχυνση c'' . Οι δυο πρώτοι όροι ονομάζονται όροι spline ή εσωτερική ενέργεια και εξασφαλίζουν την ομαλότητα. Ο πρώτος όρος δίνει στην καμπύλη την δυνατότητα να συμπεριφέρεται σα μεμβράνη ενώ ο δεύτερος τη συμπεριφορά λεπτού ελάσματος. Θέτοντας $b = 0$ επιτρέπονται ασυνέχειες δεύτερης τάξεως με τη μορφή γωνιών. Ο τρίτος όρος, η εξωτερική ενέργεια, έλκει τις καμπύλες προς το περίγραμμα των αντικειμένων. Αφού το Ω είναι φραγμένο τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι η ενεργεια $J(c)$ δέχεται ένα γενικό ελάχιστο στο χώρο Sobolev $W^{2,2}(\Omega)$. Οι εξισώσεις Euler - Lagrange που σχετίζονται με το $J(c)$ είναι ένα σύστημα τέταρτης τάξεως για την κλειστή καμπύλη \underline{c} :

$$-\underline{c}'' + b\underline{c}^{(iv)} + \lambda \nabla F = 0$$

όπου $c^{(iv)}$ είναι η τέταρτη παράγωγος και $F = g^2(|\nabla I|)$. Μπορούν να προστεθούν και άλλες συνθήκες φραγμ. Δυστυχώς, εφόσον το $J(c)$ δεν είναι κυρτό (είναι κάτω ημισυνεχές στον $(W^{2,2}(S^1))^2$), δεν έχει μοναδικό αποτέλεσμα και με τη λύση (οπώς στους Kass κ.α.) μπορούμε να ελπίζουμε ότι θα πετύχουμε ένα τοπικό ελάχιστο.

Σε αυτήν την προσέγγιση η ιδέα ήταν να διατυπώσουμε το πρόβλημα σαν ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Παρόλα αυτά, αυτή η προσέγγιση έχει σημαντικά μειονεκτήματα:

- Το συναρτησιοειδές $J(c)$ δεν είναι *ενύπαρκτο*, αφού εξαρτάται από την παραμετροποίηση του c . Θα μπορούσαμε να έχουμε διαφορετική λύση αλλάζοντας την παραμετροποίηση διατηρώντας την αρχική καμπύλη.
- Εξαιτίας του περιορισμού ομαλότητας το μοντέλο δεν μπορεί να αντιμετωπίσει αλλαγές στην τοπολογία. Στην πραγματικότητα είναι αδύνατο να ανιχνεύσουμε περισσότερα από ένα αντικείμενο. Μάλιστα αυτό το αντικείμενο πρέπει να είναι κυρτό.

- Στην παραγματικότητα, για να λύσουμε το πρόβλημα αριθμητικά εμφυτεύουμε (4.17) σε ένα δυναμικό σχήμα κάνοντας την καμπύλη να εξαρτάται μια τεχνητή παράμετρο (τον χρόνο) $t \geq 0$ και επιλύουμε το

$$\frac{\partial c}{\partial t} t = -c'' + bc^{(iv)} + \lambda \nabla F, \quad c_0 = c$$

όπου c είναι μια αρχική καμπύλη που περιβάλλει το αντικείμενο που θα ανιχνευτεί. Εμφανίζονται αριθμητικά προβλήματα στην επίλυση. Εφόσον μπορούμε να προσεγγίσουμε ένα τοπικό ελάχιστο πρέπει να διαλέξουμε την c_0 κοντά στο αντικείμενο που θα ανιχνευτεί. Δυσκολίες ανακύπτουν στην επιλογή των σημείων-δεικτών για την διακριτοποίηση των εξελισσομένων καμπυλών. Η θέση των σημείων-δεικτών θα πρέπει να ενημερώνεται χρονικά σύμφωνα με τις προσεγγίσεις των εξισώσεων της κίνησης. Στις μεγάλες και πολύπλοκες κινήσεις παρουσιάζονται προβλήματα όπως για παράδειγμα η υπερσυγκέντρωση ή δημιουργία μεγάλων κενών που προκαλούν αριθμητικές αστάθειες και λανθασμένες ανιχνεύσεις. Μια καλή εξήγηση τέτοιων φαινομένων δίνετε στο [298]. Παρακάτω θα δείξουμε λοιπόν πως υπερβαίνονται όλα αυτά τα προβλήματα με το μοντέλο των ενεργών γεωδαιτικών περιγραμμάτων.

4.1.2 Το μοντέλο ενεργών γεωδαιτικών περιγραμμάτων

Στο μοντέλο Kass ο όρος $b \int_{S^1} |c''|^2$ (ο όρος ελαστικότητας) είναι ένας όρος δεύτερης τάξεως που ελαχιστοποιεί το τετράγωνο της καμπυλότητας. Όπως θα δούμε αργότερα το μοντέλο $b = 0$ επίσης αυξάνει την καμπυλότητα καθιστώντας τον όρο περιττό (Βλ. (4.24)). Είναι λοιπόν φυσικό να εισάγουμε το συναρτησιοειδές J_1 ορισμένο από

$$J_1(c) = \int_{S^1} |c'|^2 + \lambda (g(|\nabla I|))^2$$

στο σύνολο $C = \{c : S^1 \rightarrow \Omega, c \text{ τμηματικά } C^1\}$. Όμως το συναρτησιοειδές J_1 δεν είναι ικανοποιητικό γιατί δεν είναι ενύπαρκτο, εξαρτάται από την παραμετροποίηση της καμπύλης c . Έτσι εισάγουμε το συναρτησιοειδές J_2 ορισμένο από [AA]21224950

$$J_2(c) = 2\sqrt{\lambda} \int_{S^1} g(|\nabla I|) |c'|$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι J_2 είναι τώρα ενύπαρκτο. Αν αναπαραμετροποιήσουμε την καμπύλη μέσω $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ τότε λαμβάνουμε για $\tilde{c} = c \circ \phi$

$$J_2(c) = J_2(\tilde{c})$$

η ενέργεια δεν αλλάζει. Έτσι αν συγκρίνουμε το J_2 με τον κλασικό ορισμό μήκους της καμπύλης, παρατηρούμε ότι J_2 μπορεί να ειδοθεί ως νέο μήκος σε συμμορφη προς την Ευκλείδεια μετρική. Το βάρος είναι $g(|\nabla I|)$, το οποίο περιέχει πληροφορίες σχετικά με τα περιγράμματα των αντικειμένων. Με άλλα λόγια, έχουμε ορίσει

μία άλλη ριμάνια μετρική για την οποία ψάχνουμε γεωδαιτικές καμπύλες. Πέρα από αυτό το γεωμετρικό επιχείρημα θα δούμε ότι αυτή διατύπωση μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε αποτελεσματικά αριθμητικά σχήματα.

Ξεκινώντας από J_1 εισάγαμε το J_2 που είναι ανεξάρτητο και μπορεί να μεταφραστεί ως Ευκλείδιο βάρος. Τώρα το θέμα είναι να κατανοήσουμε τη σύνδεση μεταξύ των δυο προβλημάτων ελαχιστοποίησης.

Ο Caselles χρησιμοποίησε έννοιες της θεωρίας Hamilton και έδειξε ότι η ελαχιστοποίηση του J_1 είναι ισοδύναμη με αυτήν του J_2 . Η ιδέα αυτή έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για να δικαιολογήσει αυτήν της την επιλογή. Δεν είναι όμως ικανοποιητική για δύο λόγους. Ο πρώτος είναι ότι η ιδέα της ισοδυναμίας δεν είναι διόλου ξεκάθαρη. Είναι φυσικό δυο προβλήματα ελαχιστοποίησης να είναι ισοδύναμα όταν έχουν την ίδια λύση ή τα ίδια ακρότατα. Στην προκειμένη περίπτωση δεν μπορούμε να πούμε κάτι τέτοιο γιατί δεν είναι ξεκάθαρη η ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα. Το συνάρτηση περιγράμματος g εκφυλίζεται σε οποιαδήποτε περιοχή περιγράμματος, και συνεπώς θα ήταν δύσκολο να φράξουμε ελαχιστοποιητικές ακολουθίες σε οποιονδήποτε χώρο συναρτήσεων. Επιπρόσθετα θα αναρωτιόμασταν γιατί να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία Hamilton και όχι τις κλασικές μεθόδους του λογισμού μεταβολών.

Οι Aubert-Blanc-Feraud [ABF] έχουν ορίσει σε αυτήν την περίπτωση μια συγκεκριμένη ιδέα της ισοδυναμίας και αυτή αποδεικνύεται σε αυτό το πλαίσιο. Δεν θα αναπαράγουμε όλη την συζήτηση [22] αλλά θα διατυπώσουμε έναν ορθότερο, κατά την γνώμη μας, ορισμό της ισοδυναμίας. Πριν τη διατύπωση θα δώσουμε τις μεταβολές της ενέργειας σε καμπύλες που κείνται στη γειτονία μίας δοσμένης.

Έστω $c \in C$ και c_t μια οικογένεια καμπυλών, όπου $t \geq 0$ είναι μια εξωτερική παράμετρος (χρόνος) έτσι ώστε c_0 είναι η δοσμένη καμπύλη. Το πρώτο βήμα είναι ο υπολογισμός των J'_1, J'_2 .

Υπολογισμός J'_1 Έχουμε

$$J_1(c) = \int_{S^1} |c'|^2 + \lambda g^2(|\nabla I|)$$

Για να απλουστεύσουμε τον συμβολισμό γράφουμε c αντί για c_t και g για $g(|\nabla I|)$ και υποθέτουμε ότι $\lambda = 1$. Επίσης θα γράψουμε $u \cdot v = \langle u, v \rangle$. Έτσι

$$\frac{1}{2} J'_1 = \int_{S^1} \langle c', \frac{\partial c'}{\partial t} \rangle + g \langle \frac{\partial c}{\partial t}, \nabla g \rangle$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο πρώτο ολοκλήρωμα λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2} J'_1(t) = \int_{S^1} \langle \frac{\partial c}{\partial t}, -c'' + g \nabla g \rangle$$

Εφόσον παραμετροποιούμε με βάση το μήκος του τόξου με s και \underline{n} είναι το κάθετο διάνυσμα και κ η συνάρτηση καμπυλότητας, τότε:

$$\underline{c}'' = \kappa \underline{n}$$

Για αυτό J'_1 γίνεται

$$\frac{1}{2} J'_1 = \int_{S^1} \langle \frac{\partial c}{\partial t}, -\kappa \underline{n} + g \nabla g \rangle$$

Αν προκαλέσουμε αποσύνθεση στο διάνυσμα $\nabla g = \langle \nabla g, \underline{n} \rangle \underline{n} + \langle \nabla g, \underline{t} \rangle \underline{t}$ σε εφαπτομένη και κάθετη κατευθύνση στην καμπύλη τότε:

$$\frac{1}{2} J_1' = \int_{S^1} \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, -\kappa + g \nabla g \right\rangle$$

Η ανισότητα Cauchy - Schwarz, συνιστά ότι η ροή για την οποία το J_1 μειώνεται ταχύτερα είναι η

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \kappa - g \nabla g$$

Υπολογισμός του J_2' . Έχουμε

$$\frac{1}{2} J_2 = \int_{S^1} g(|\nabla I|) |c'|$$

Τότε

$$\frac{1}{2} J_2' = \int_{S^1} g \left\langle \underline{t}, \frac{\partial c'}{\partial t} \right\rangle + |c'| \left\langle \nabla g, \frac{\partial c}{\partial t} \right\rangle$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος :

$$\frac{1}{2} J_2' = - \int_{S^1} \left\langle g \underline{c}'' + \langle \nabla g, c' \rangle c' + |c'| \nabla g, \frac{\partial c}{\partial t} \right\rangle$$

Η εξίσωση μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\frac{1}{2} J_2' = \int_{S^1} |c'| \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \nabla g - g \frac{\partial t'}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial t}{\partial t}, \nabla g \right\rangle \underline{t} \right\rangle$$

και ανακαλώντας τους ορισμούς του \underline{t} , \underline{n} και κ παίρνουμε

$$\frac{1}{2} J_2' = \int_{S^1} \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \nabla g - \kappa g \underline{n} - \left\langle \underline{t}, \nabla g \right\rangle \underline{t} \right\rangle$$

στην βάση τελικά λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2} J_2' = \int_{S^1} \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \langle \nabla g, \underline{n} \rangle \underline{n} - \kappa g \underline{n} \right\rangle$$

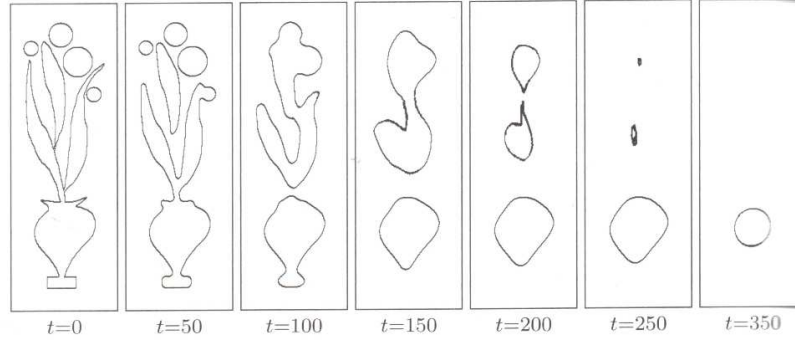
Έτσι η κατευθύνση προς την οποία μειώνεται ταχύτερα το $J_2(t)$ δίνεται από

$$\frac{\partial c}{\partial t} = (\kappa g - \langle \nabla g, \underline{n} \rangle \underline{n})$$

Σχόλιο. Σημειώστε ότι αν $g = 1$, τότε η ροή ανάγεται στην

$$\frac{\partial c}{\partial t} \underline{t} = \kappa \underline{n}$$

η οποία είναι η γνωστή ροή μέσης καμπυλότητας (ροή σύμπτυξης). Αυτή η ροή μειώνει την συνολική καμπυλότητα όπως και τον αριθμό των μηδενικών κόμβων και



Παράδειγμα της ροής μέσης καμπυλότητας

την τιμή των μέγιστων /ελαχίστων της καμπυλότητας. Επομένως έχει τη δυνατότητα ελαχιστοποίησης (μια αρχική καμπύλη συρρικνώνεται (4.25) ως ένα σημείο σε μετρήσιμο χρόνο με κυκλικό σχήμα). Όπως επίσης και ομαλότητας (σημεία με υψηλή καμπυλότητα εξελίσσονται γρηγορότερα και εξαφανίζονται ασυμπτωματικά). Ένα παράδειγμα βλέπουμε στην εικόνα 9. Για περισσότερες γεωμετρικές πληροφορίες σχετικά με 4.25 ριτερόμαστε στο [ΕΓ].

Τώρα μπορούμε να εξηγήσουμε την ισοδυναμία των προβλημάτων $\inf_C (J_1)$, $\inf_C (J_2)$

Ορισμός 4.2 .

Τα προβλήματα $\inf_C (J_1)$ και $\inf_C (J_2)$ είναι ισοδύναμα αν για κάθε καμπύλη c υπάρχει μια παραμόρφωση $V(c)$ έτσι ώστε στο $V(c)$ η ροή που μειώνει το J_1 επίσης μειώνει την ροή του J_2 και αντίστροφα.

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το κριτήριο θα πρέπει να δώσουμε έναν πιο ακριβή ορισμό της περιγράμματος.

Ορισμός 4.3 Έστω $c \in C$. Λέμε ότι η c είναι ένα περίγραμμα του I αν υπάρχει ϵ_0 έτσι ώστε για $\epsilon < \epsilon_0$ υπάρχει $\alpha_\epsilon \rightarrow 0$ και

$$|\nabla I(x)| \geq \frac{1}{\epsilon}$$

εάν $x \in V_\epsilon = \{x \in \Omega / d(x, c) \leq \alpha_\epsilon\}$.

Θεώρημα 4.4 Υποθέτουμε ότι συνάρτηση αντίκρουσης περιγράμματος g είναι τέτοια ώστε για κάθε περίγραμμα $c \in C$ υπάρχουν $\ell, \ell' \in \mathbf{Q}, \ell < \ell'$ που για $\epsilon < \epsilon_0, x \in V_\epsilon$

$$g(|\nabla I|(x)) = O(\epsilon^\ell)$$

$$|\nabla g(|\nabla I|) = O(\epsilon^{\ell'})$$

Τότε τα δυο προβλήματα ελαχιστοποίησης $\inf_C (J_1)$, $\inf_C (J_2)$ είναι ισοδύναμα με την έννοια του ορισμού 3.2.1

Αποδειξη. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η ροή που μειώνει το J_1 μειώνει εξίσου και το J_2 και αντίστροφα η ροή (4.24) που μειώνει το J_2 μειώνει εξίσου και το J_1 . Για να γίνει αυτό αντικαθιστούμε το $\frac{\partial c}{\partial t}$ που δίνεται παραπάνω στην έκφραση του $J_2(t)$ και αντίστροφα. Όταν $\frac{\partial c}{\partial t}$, $J_2(t)$ γίνεται

$$J_2' = - \int_{S^1} g (\langle \nabla g, \underline{n} \rangle - \kappa g) \left(\langle \nabla g, \underline{n} - \frac{\kappa}{g} \right)$$

Με τον ίδιο τρόπο, αν αντικαταστήσουμε $\frac{\partial c}{\partial t}$ με την έκφραση του στο 4.24, τότε $J_1(t)$ γίνεται

$$J_1' = \int_{S^1} g (\langle \nabla g, \underline{n} \rangle - \kappa g) \left(\langle \nabla g, \underline{n} - \frac{\kappa}{g} \right)$$

Για να ορίσουμε το πρόσημο $J_2'(t)$ στο 4.26 ή το πρόσημο του $J_1'(t)$ στο 4.27 πρέπει να μελετήσουμε για σχεδόν κάθε q το πρόσημο της ολοκληρωτέας συνάρτησης

$$\zeta = -g(-\nabla g \cdot \underline{n} - \kappa g) \left(\nabla g \cdot \underline{n} - \frac{\kappa}{g} \left| \frac{\partial c}{\partial t} q \right|^2 \right)$$

Με αυτήν την έκφραση λαμβάνουμε :

$$\zeta(t, s) = -\kappa^2 g + \kappa(g^2 + 1) \langle \nabla g, \underline{n} \rangle - g(\langle \nabla g, \underline{n} \rangle)^2$$

Ας θυμηθούμε λοιπόν ότι το g συμβολίζει το $g(|\nabla I|)$ και ας υποθέσουμε ότι c_t είναι μια καμπύλη στη γειτονιά V_ϵ του περιγράμματος c_0 της εικόνας I . Τότε χάρη στην υπόθεση για την g έχουμε

$$\zeta(t, s) \approx -a\epsilon^l \pm b\epsilon^{l'} - c\epsilon^{2l'}$$

με $a, b, c \geq 0$. Όταν το ϵ είναι αρκετά μικρό το πρόσημο της $\zeta(t, s)$ δίνεται από $-a\epsilon^l$ και για αυτό είναι αρνητικό (υποθέτουμε ότι το κ είναι φραγμένο, ειδικά, όταν $|k| \gg 1$ έχουμε $k^2 \geq |\kappa|$ και ζ μπορεί να παραμείνει μη θετικό).

Το μοντέλο Caselles και άλλη [ABI]2122 μπορεί να βελτιωθεί με την προσθήκη του όρου ag

$$\frac{\partial c}{\partial t} = (\kappa g - \langle \nabla g, \underline{n} \rangle + ag) \underline{n}$$

Ο κύριος σκοπός της πρόσθετης ag στην ταχύτητα κίνησης είναι η διευκόλυνση της ανίχνευσης μη κυρτών αντικειμένων και η επιτάχυνση της σύγκλισης. Στην πραγματικότητα, $a \geq 0$ πρέπει να επιλέγεται αρκετά μεγάλο έτσι ώστε ο συντελεστής να $(k + a)$ παραμένει συνεχής οπότε η καμπυλότητα κ να έχει μεταβλητό πρόσημο και έτσι μη κυρτά σχήματα να μπορούν να εντοπιστούν.

Παρατήρηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η εξίσωση (4.28) δεν προέρχεται από καμιά ενέργεια αν η συνάρτηση g δεν είναι σταθερή (που δε συμβαίνει όταν η g είναι μια συνάρτηση ανίχνευσης).

Στην πραγματικότητα, η ροή $\frac{\partial c}{\partial t} = aN$ με τη θετική σταθερά είναι η ροή ενέργειας επιφάνειας

$$A(t) = -\frac{1}{2} \int_{S^1} \underline{c} \wedge \underline{c}'$$

Για κάθε $t > 0$, $A(t)$ είναι το εμβαδόν που περικλείεται από την c_t και είναι εύκολο να βρούμε τη μεταβολή της επιφάνειας:

$$A'(t) = - \int_{S^1} \underline{c}_t \cdot \underline{n} |c'|$$

Έτσι η κατεύθυνση ταχύτερης μείωσης του $A(t)$ μειώνεται ταχύτερα είναι \underline{n} .

4.5 Η μέθοδος των σταθμικών συνόλων

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να βρεί ένα κατάλληλο αλγόριθμο για να λύσουμε το σύστημα της Φυσικά, κάποιος θα μπορούσε να παραμετροποιήσει την καμπύλη c και να διακριτοποιήσει την εξίσωση αλλά αυτή η άμεση προσέγγιση εμφανίζει δυσκολίες που θα παρουσιάσουμε αργότερα. Γενικότερα ενδιαφερόμαστε για ροές που περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής

$$\frac{\partial c}{\partial t} = F \underline{n}, \quad c(0, \cdot) = c_0(\cdot)$$

Η εξίσωση 4.29 λέει ότι η καμπύλη c_t παραμορφώνεται με κάθετη ταχύτητα F που εξαρτάται από t, c, c', c'' . Η διατύπωση των σταθμικών συνόλων βασίζεται στην παρακάτω παρατήρηση [ΔΤ]63:

Μια καμπύλη μπορεί να ειπωθεί ως το σύνολο μηδενισμού μιας συνάρτησης σε υψηλότερη διαστάση.

Για παράδειγμα μια καμπύλη στο επίπεδο \mathbf{R}^2 μπορεί να παρουσιαστεί ως καμπύλη μηδενισμού μιας συνάρτησης $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ (βλ.εικ.4.10). Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει μια συνάρτηση $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ έτσι ώστε

$$u(t, c_t) = 0$$

Εάν η u είναι αρκετά ομαλή τότε διαφορίζοντας την προηγούμενη σχέση ως προς t παίρνουμε

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \langle \nabla u, \frac{\partial c}{\partial t} \rangle = 0$$

και με την αντικατάσταση της έκφρασης της ταχύτητας που δίνεται στο 4.29 παίρνουμε

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F \langle \nabla u, \frac{\partial n}{\partial t} \rangle = 0$$

Καθώς το μοναδιαίο εσωτερικό διάνυσμα που είναι κάθετο στο σταθμικό σύνολο της u δίνεται από την $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ (υποθέτουμε ότι η u είναι αρνητική μέσα στην καμπύλη και θετική έξω), τότε (4.31) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F |\nabla u|$$

Σύμφωνα με τον τρόπο που έχουμε παρουσιάσει (4.32) αυτή την εξίσωση είναι μια εκ των προτέρων αξία μόνο για το μηδενικό σύνολο επιπέδου του u . Ένα από

τα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι το u μπορεί να θεωρηθεί ως ορισμένο από ολόκληρη τη σφαίρα του $\mathbf{R}^+ \times \Omega$. Έτσι μπορούμε να λύσουμε το Σύστημα ΜΔΕ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F|\nabla u|$$

Για $t \geq 0$ και $\underline{x} \in \Omega$ εφόσον F είναι καλά ορισμένη εκτός του μετώπου για παράδειγμα ολόκληρου του χώρου. Τότε όταν το u έχει υπολογιστεί με $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ πρέπει να απομακρύνουμε το σύνολο μηδενισμού της u για να λάβουμε την καμπύλη. Θα επιστρέψουμε σε αυτό όμως αργότερα. Φυσικά θα πρέπει να προσθέσουμε τις παρακάτω συνθήκες.

1. Επιλέγουμε γενικά ότι η κάθετη παράγωγος μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$
 $\underline{n} \cdot \nabla u = 0$
2. Μια αρχική συνθήκη στο $t = 0$. Μία καλή υποψήφια συνάρτηση είναι η προσημασμένη απόσταση από μια αρχική καμπύλη c_0 η οποία περιβάλλει τα αντικείμενα:

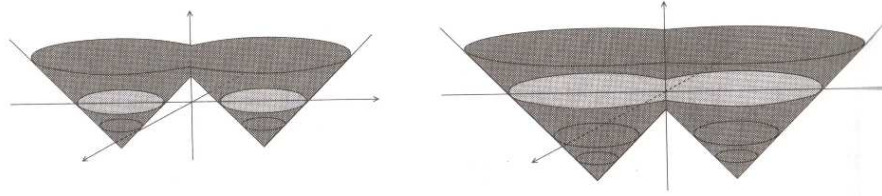
$$u(0, \cdot) = \tilde{d}(\cdot, c_0) = d(\cdot, c_0), \text{ εάν κείται εκτός της } c_0 \text{ και } -d(\cdot, c_0), \text{ εάν κείται εντός της } \\ \text{όπου } d(x, c_0) \text{ είναι η Ευκλείδεια απόσταση σε } c_0.$$

Για αυτό, το τελικό μοντέλο είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F|\nabla u|, \quad u(0, \cdot) = \tilde{d}(\cdot, c_0), \quad \nu \cdot \nabla u = 0 \text{ στο σύνορο, } \partial\Omega$$

Η εξίσωση 4.33 ονομάζεται εξίσωση Hamilton - Jacobi (βλ. επίσης κεφ. 2.3.2). Υπάρχουν πολλά πλεονεκτήματα στη χρήση της διατύπωσης Euler:

- Το πρώτο είναι ότι η εξελισσόμενη συνάρτηση $u(t, x)$ παραμένει συνάρτηση εφόσον F είναι ομαλό. Θεωρούμε όμως το σύνολο επιπέδων $u = 0$ (και έτσι το μέτωπο c_t , μπορεί να αλλάξει τοπολογία, να σπάσει ή να συγχωνευθεί καθώς η u εξελίσσεται. Αυτό παρουσιάζεται στην εικ. 4.11. Αυτό είναι ένα πλεονέκτημα αυτής της παρουσίασης αφού δεν χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας τις τοπολογικές αλλαγές αριθμητικά.
- Ένα δεύτερο σημαντικό πράγμα είναι η αριθμητική προσέγγιση. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε ένα διακριτικό πλέγμα στον χώρο και επιλέγουμε διαφορετικές προσεγγίσεις για τον χώρο και τα χρονικά παράγωγα. Αναφερόμαστε σε αυτά με περισσότερη λεπτομέρεια στα (κεφ. 4.3.5 και Α.3.4.)
- Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ότι γεωμετρικά στοιχεία της πρόσοψης όπως το φυσικό διάνυσμα και η καμπυλότητα μπορούν να εκφραστούν εύκολα με το u . Σημειώστε ότι αυτό είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση για την κάθε παρουσίαση ώστε να είναι χρήσιμη.
- Τελικά, η δημιουργία του παραπάνω συνόλου επιπέδων μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε διάσταση. Για παράδειγμα μια επιφάνεια μπορεί να παρουσιαστεί με μηδενικό σύνολο επιπέδων μιας συνάρτησης ορισμένη από έναν όγκο.



Σχήμα 4.3: Απεικόνιση της αλλαγής τοπολογίας.

Αυτή η αναπαράσταση είναι χρήσιμη εφόσον έχει σχέση η εξέλιξη μιας υπερεπιφάνειας και όταν η κίνηση μπορεί να εκφραστεί ως ταχύτητα μαζί με το κάθετο διάνυσμα.

Αυτή η προσέγγιση έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά στην μηχανική όραση όπως επίσης και σε άλλους τομείς. Στην ανάλυση εικόνων, [AA]20212249505253 υπάρχουν τα πρώτα γραπτά πάνω στο θέμα και όλα βασίζονται στην ίδια ιδέα. Η μόνη διαφορά τους είναι ότι [AA]21224950 ξεκινούν από μια ιδέα ενέργειας (ελαχιστοποίηση βάρους ,μήχους), ενώ [AA]205253 σχηματίζουν απευθείας το πρόβλημα τους σε όρους συνόλων επιπέδου. Για παράδειγμα, ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα κατάτμησης. Μπορούμε να δείξουμε ότι η διατύπωση σταθμικών συνόλων είναι

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ((\kappa + a)g|\nabla u| + \langle \nabla g, \nabla u \rangle)$$

ή ενθυμούμενη ότι η καμπυλότητα κ δίνεται από $\kappa = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ τότε:

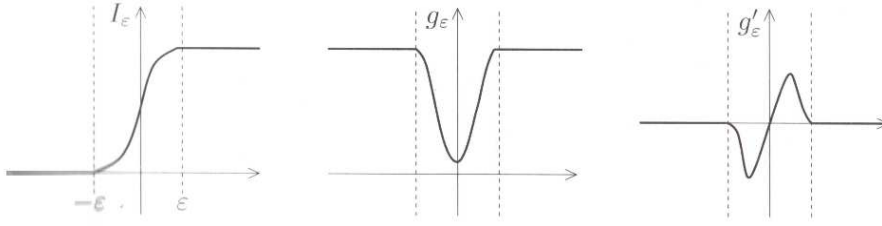
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla I|) \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + a \right) |\nabla u| + \langle \nabla u, \nabla u \rangle$$

με τα όρια και τις αρχικές συνθήκες του 4.33. Στην πρώτη άποψη, ο συντελεστής $g(|\nabla I|)$ επιτρέπει στο να σταματήσει κάποιος την εξέλιξη της καμπύλης όταν φτάνει στα όρια του αντικειμένου. Η δράση του δεύτερου όρου $\langle \nabla g, \nabla u \rangle$, είναι λιγότερο προφανής. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την συνεισφορά της ας δούμε το παρακάτω μονοδιάστατο παράδειγμα. Έστω $I(x)$ είναι η συνάρτηση Heaviside $I(x) = 1$ αν $x \geq 0$ και $I(x) = 0$, και I_ϵ είναι μια εξομάλυνση του I με μια κυβική συνάρτηση:

$$I_\epsilon = -\frac{1}{4} \left(\frac{x}{\epsilon} \right)^3 + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{\epsilon} \right) + \frac{1}{2}, \quad \text{για } |x| \leq \epsilon$$

και $I_\epsilon = I$ για $|x| \geq \epsilon$. Τότε, αν θέσουμε $g_\epsilon = \frac{1}{1+|I'_\epsilon|^2}$, είναι εύκολο να επαλήθευσουμε ότι σε μια περιοχή του $x = 0$ έχουμε $g_\epsilon \approx \epsilon^2$ και $g'_\epsilon \approx \frac{9}{4\epsilon^2}x$ (βλ.εικ.4.12). Επομένως, ο πρώτος όρος στην 4.34 είναι (σε αυτήν την μονοδιάστατη περίπτωση) ο όρος

μεταφοράς $g'_\epsilon u'$. Έτσι, το μέτωπο εξελίσσεται από τα δεξιά στα αριστερά για $x > 0$ και από τα αριστερά προς τα δεξιά με $x < 0$. Το σημείο $x = 0$ (το ασυνεχές μέτωπο) μπορεί να γίνει ορατή ως ένα ελκτικό κέντρο. Αυτή η επίδραση ισχύει και για τις εικόνες.



Σχήμα 4.4: Το αρχικό σημά I_ϵ και οι συναρτήσεις g_ϵ, g'_ϵ

Πριν προχωρήσουμε στην προσέγγιση παρουσιάζουμε αποτελέσματα σε σχέση με την ύπαρξη και την μοναδικότητα μιας λύσης για την χρησιμοποιώντας την θεωρία των λύσεων ιξώδους. Σύμφωνα με την ταυτότητα

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{1}{|\nabla u|} \Delta_2 u - \frac{1}{|\nabla u|^3} \sum_{i,j} u_i u_j u_{ij}$$

όπου $u_i = \partial_{x_i} u$ η εξίσωση 4.34 μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x) \sum_{i,j} a_{ij} u_{ij} + H$$

όπου

$$a_{ij}(p) \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|p|^2} \quad \text{εάν, } |p| \neq 0$$

$$H(x, p) = ag(x)|p| + \nabla u \cdot \underline{p}$$

Για να αποφύγουμε κάποιες ανιαρές τεχνικότητες στις γωνίες, αντί για τον όρο Neumann $\underline{n} \cdot \nabla u = 0$, θα δουλέψουμε με περιοδικές λύσεις (βλ. κεφ. 3.3.1 για να επεκτείνουμε τη συνάρτηση u ορισμένη στο Ω σε μια περιοδική συνάρτηση στο \mathbf{R}^2). Φυσικά υποθέτουμε ότι η αρχική συνθήκη $u(0, x) = u_0(x)$ είναι περιοδική. Ας θυμηθούμε τον ορισμό των λύσεων ιξώδους, προσαρμόζοντας τον ορισμό 2.3.1 για την εξίσωση (4.35):

Ορισμός 4.6 Έστω $u \in C([0, T] \times \mathbf{R}^2)$. Τότε η u είναι υπολύση ιξώδους του 4.35 αν για $\phi \in C^2([0, T] \times \mathbf{R}^2)$ ισχύει η ακόλουθη συνθήκη: σε οποιοδήποτε σημείο $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathbf{R}^2$ τοπικού μεγίστου της $(u - \phi)$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g \sum_{ij} a_{ij} \phi_{ij} - H \leq 0$$

εάν $|\nabla \phi|(x_0, t_0) \neq 0$. Ειδιάλλως

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g \limsup_{p \rightarrow 0} \sum_{ij} a_{ij} \phi_{ij} - H \leq 0$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε την ιδέα της υπερλύσης ιξώδους αλλάζοντας το τοπικό μέγιστο σε τοπικό ελάχιστο ≤ 0 σε ≥ 0 , και \limsup σε \liminf . Μια λύση ιξώδους είναι συνεχής συνάρτηση η οποία είναι και υπο - και υπερλύση.

Αν V είναι χώρος Banach, θυμόμαστε ότι $L^\infty((0, T); V)$ είναι ο χώρος ορισμένος από

$$L^\infty((0, T); V) = \{f : (0, T) \rightarrow V / |f|_{L^\infty((0, T); V)} < \infty\}$$

όταν

$$|f|_{L^\infty((0, T); V)} = \inf \{c : |f|_V \leq c, \text{ σχεδόν παντού στο } (0, T)\}$$

Τώρα μπορούμε να δηλώσουμε το κύριο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.7 *Ας υποθέσουμε ότι $g \geq 0$, με g, \sqrt{g} είναι Lipschitz συνεχής.*

Έστω u_0 μία αρχική συνθήκη, Lipschitz συνεχής. Τότε η εξίσωση () έχει μοναδική λύση ιξώδους στον $C([0, \infty) \times \mathbf{R}^2) \cap L^\infty((0, T); W^{1, \infty}(\mathbf{R}^2))$ για κάθε $T < \infty$. Επίσης,

$$\inf_{x, y} u_0 \leq u \leq \sup_{\mathbf{R}^2}$$

Έστω v είναι λύση ιξώδους με την v_0 αντί της u_0 . Τότε για $T \in [0, +\infty)$ έχουμε,

$$\sup_{[0, T]} |u - v|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq |u_0 - v_0|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί [85]. Είναι μάλλον τεχνική και μακρά και για αυτό το λόγο την έχουμε χωρίσει σε τρία βήματα.

Βήμα 1. Ευστάθεια και μοναδικότητα.

Ξεκινάμε με την απόδειξη της ευστάθειας, από την οποία θα συνάγουμε την μοναδικότητα της λύσης. Έστω u, v δύο λύσεις με αρχικές συνθήκες αντίστοιχα με u_0 και v_0 . Ενδιαφερόμαστε για το μέγιστο $u(t, x) - v(t, x)$. Αν u, v είναι ομαλές τότε μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής. Ειδικά χρειαζόμαστε ένα κόλπο: τον διπλασιασμό των μεταβλητών. Ας ορίσουμε

$$\ell(t, \underline{x}, \underline{y}) = u(t, \underline{x}) - v(t, \underline{y}) - \frac{1}{4\epsilon} |\underline{x} - \underline{y}|^4 - \lambda t$$

όπου $t \in [0, T], \underline{x}, \underline{y} \in \mathbf{R}^2$ θα καθοριστεί αργότερα. Τώρα μας ενδιαφέρει το μέγιστο του ℓ . Ας δεχτούμε ότι (t_0, x_0, y_0) είναι το μέγιστο σημείο του ℓ σε $[0, T] \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, ϵ καθορισμένο). Ισχυριζόμαστε ότι $t_0 = 0$. Ειδικά το μέγιστο θα αποκτώνταν κάποια στιγμή (t_0, x_0, y_0) με $t_0 > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση χάρη στο λήμα Crandall - Ishii (Lemma 2.3.2), μπορούμε να βρούμε για κάθε $m > 0$ δυο πραγματικούς αριθμούς $a, b, a - b = \lambda$ και δύο συμμετρικούς 2×2 πίνακες X, Y έτσι ώστε

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} B + \mu B^2 & -B - \mu B^2 \\ -B - \mu B^2 & B + \mu B^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{όπου } \underline{\nu} = \frac{\underline{x}_0 - \underline{y}_0}{|\underline{x}_0 - \underline{y}_0|}, \eta = \frac{|\underline{x}_0 - \underline{y}_0|^2}{\epsilon}$$

$$B_{ij} = \eta(\delta_{ij} + 2\nu_i\nu_j)$$

Εάν $x_0 \neq y_0$, τότε

$$a - g(\underline{x}_0) \sum_{ij} a_{ij}(\eta(\underline{x}_0 - \underline{y}_0))X_{ij} - H(\underline{x}_0, \eta(\underline{x}_0 - \underline{y}_0)) \leq 0$$

$$b - g(\underline{x}_0) \sum_{ij} a_{ij}(\eta(\underline{x}_0 - \underline{y}_0))Y_{ij} - H(\underline{x}_0, \eta(\underline{x}_0 - \underline{y}_0)) \geq 0$$

Μάλιστα, εάν $x_0 = y_0$ οι δύο τελευταίες ανισότητες πρέπει να εξηγηθούν με όρους καταλλήλων ορίων. Τότε $B = 0$, $X \leq 0$, $Y \geq 0$ και οι τελευταίες μπορούν να ξαναγραφούν ως εξής

$$a - g(\underline{x}_0) \limsup_{p \rightarrow 0} \sum_{ij} a_{ij} X_{ij} \leq 0$$

$$b - g(\underline{x}_0) \liminf_{p \rightarrow 0} \sum_{ij} a_{ij} Y_{ij} \geq 0$$

Συνεπώς όταν $a \leq 0, b \geq 0$, το οποίο αντιβαίνει την $a - b = l > 0$. Άρα $x_0 \neq y_0$. Έπειτα επιλέγουμε $\mu = \eta^{-1}$ και συμπεραίνουμε απο την

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 2\eta \begin{pmatrix} C & -C \\ -C & C \end{pmatrix} \leq$$

όπου $c_{ij} = \delta_{ij} + 5\nu_i\nu_j$. Τότε έχουμε

$$G = A \begin{pmatrix} \frac{g(\underline{x}_0)}{\sqrt{g(\underline{x}_0)g(\underline{y}_0)}} & \sqrt{g(\underline{x}_0)g(\underline{y}_0)} \\ \sqrt{g(\underline{x}_0)g(\underline{y}_0)} & g(\underline{y}_0) \end{pmatrix}$$

όπου $A = a_{ij}(\eta(\underline{x}_0 - \underline{y}_0))$. Το G είναι ένας μη αρνητικός συμμετρικός πίνακας λαμβάνουμε

$$g(\underline{x}_0) \sum_{ij} a_{ij} X_{ij} - g(\underline{y}_0) \sum_{ij} a_{ij} Y_{ij} \leq \frac{2}{\epsilon} \left(\sqrt{g(\underline{x}_0)} - \sqrt{g(\underline{y}_0)} \right)^2 \text{tr}(AC)$$

οπότε συνδυάζοντας τις προηγούμενες

$$\lambda \leq c_1 \eta |\underline{x}_0 - \underline{y}_0|^2$$

όπου c_1 είναι ένα συνεχές εξαρτώμενο μόνο σε $a_{ij}(p)$ και g . Τώρα εκτιμούμε $|\underline{x}_0 - \underline{y}_0|$. Σύμφωνα με τον ορισμό του $t_0, \underline{x}_0, \underline{y}_0$ έχουμε

$$u(t_0, \underline{x}_0) - v(t_0, \underline{y}_0) - \frac{1}{4\epsilon} |\underline{x}_0 - \underline{y}_0|^4 - \lambda t_0 \geq u(t_0, \underline{x}_0) - v(t_0, \underline{y}_0) - \lambda t_0$$

και έτσι

$$\frac{1}{4\epsilon} |\underline{x}_0 - \underline{y}_0|^4 \leq c_2 |\underline{x}_0 - \underline{y}_0|$$

όπου c_2 είναι η σταθερά Lipschitz της $u(t_0, \cdot)$ στο $[0, T] \times \mathbf{R}^2$. Επομένως έχουμε

$$\lambda \leq c_3 \epsilon^{1/3} \quad \text{με} \quad c_3 = c_1 (4c_2)^{4/3}$$

Τώρα ας θυμηθούμε ότι λ, ϵ είναι αυθαίρετα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sup_{[0, T] \times \mathbf{R}^2} |u - v| \neq 0$ (αλλιώς έχουμε τελειώσει) και επιλέγουμε

$$\epsilon^{1/3} = \delta \quad \sup_{[0, T] \times \mathbf{R}^2} |u - v|$$

$$\lambda = 2\delta c_3 \quad \sup_{[0, T] \times \mathbf{R}^2} |u - v|$$

Αυτό αντιβαίνει τα προηγούμενα και έτσι $t_0 = 0$. Τώρα θα εκτιμήσουμε την $\sup_{[0, T] \times \mathbf{R}^2} |u - v|$. Σταθεροποιούμε τα λ, ϵ . Εφόσον $t_0 = 0$ έχουμε για όλα $(t, \underline{x}, \underline{y})$,

$$u(t, \underline{x}) - v(t, \underline{y}) - \frac{1}{4\epsilon} |\underline{x} - \underline{y}|^4 - \lambda t_0 \geq u(\underline{x}_0) - v(\underline{y}_0) - \frac{1}{4\epsilon} |\underline{x}_0 - \underline{y}_0|^4$$

αλλά παρατηρώντας ότι

$$u_0(\underline{x}_0) - v_0(\underline{y}_0) \leq |u_0(\underline{y}_0) - v_0(\underline{y}_0)| + c_2 |\underline{x}_0 - \underline{y}_0|$$

και θέτοντας $x = y$ παίρνουμε

$$\sup_{[0, T] \times \mathbf{R}^2} (u - v) - \lambda t \leq \sup_{\mathbf{R}^2} |u_0 - v_0| + \sup_{r>0} \left(c_2 r - \frac{1}{4\epsilon} r^4 \right)$$

δηλαδή

$$\sup_{[0, T] \times \mathbf{R}^2} (u - v) - \lambda t \leq \sup_{\mathbf{R}^2} |u_0 - v_0| + \frac{3}{4} (c_2^4 \epsilon)^{\frac{1}{3}}$$

Εν συνεχεία λαμβάνουμε

$$\sup_{[0, T] \times \mathbf{R}^2} (u - v) \leq \sup_{\mathbf{R}^2} |u_0 - v_0| + \left(\frac{3}{4} c_2^{4/3} + 2c_3 T \right) \sup_{[0, T] \times \mathbf{R}^2} |u - v|$$

Εναλλάσσοντας τον ρόλο του u, v και παίρνοντας $d \rightarrow 0$ λαμβάνουμε

$$\sup_{[0, T] \times \mathbf{R}^2} |u - v| \leq \sup_{\mathbf{R}^2} |u - v|$$

Αυτό αποδεικνύει το δεύτερο μέρος του θεωρήματος και την μοναδικότητα του πρώτου μέρους. Παρατηρείστε επίσης ότι χρησιμοποιώντας τον ορισμό των ιξωδών λύσεων μπορούμε επίσης να λάβουμε τα ακόλουθα φράγματα:

$$\inf u_0 \leq u \leq \sup u_0$$

Αποδεικνύουμε τώρα την ύπαρξη. Ξεκινάμε λαμβάνοντας μία εκ των προτέρων εκτίμηση του ∇u .

Βήμα 2. Εκτίμηση του ∇u στον $L^\infty(\mathbf{R}^2)$. Σε αυτό το βήμα υποθέτουμε ότι όλοι οι συντελεστές έχουν ομαλοποιηθεί όσο απαιτείται (ο συμβολισμός δεν αλλάζει) και ότι το 4.35 παραδέχεται μια τακτική λύση (θα επιστρέψουμε σε αυτό το ερώτημα στο βήμα 3). Έτσι ας πούμε u ότι είναι μια λύση του

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \sum_{ij} a_{ij} u_{ij} + H$$

Θα εφαρμόσουμε την κλασική μέθοδο Bernstein και θα αποκομίσουμε μια παραβολική ανισότητα για την $w = |\nabla u|^2$. Σε αυτό το σημείο διαφορίζοντας την προηγούμενη ως προς x_l και πολλαπλασιάζοντας $2u_l$ λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - g \left[\sum_{ij} \left(a_{ij} w_{ij} + \sum_k a_{ij,k} u_{ij} w_k \right) \right] - \sum_k \partial_k H w_k = 2G$$

και συμβολίζουμε το αριστερο μέλος με $L(w)$ ενώ

$$G = \langle \nabla g, \nabla u \rangle \sum_{ij} a_{ij} u_{ij} - \langle \nabla H, \nabla u \rangle - g \sum_{ijl} a_{ij} u_l u_{ij}$$

Εάν η g είναι ομαλή, τότε έχουμε:

$$\langle \nabla u, \nabla H \rangle = |\nabla u| a \langle \nabla g, \nabla u \rangle + \sum_{ij} g_{ij} u_i u_j \leq k_1 w$$

σελ 190 όπου k_1 είναι μία σταθερά που εξαρτάται από τη g .

Αφού ο πίνακας a_{ij} είναι συμμετρικός ημιορισμένος μπορούμε να τον διαγωνοποιήσουμε και να διαπιστώσουμε

$$\left(\sum_{ij} a_{ij} u_{ij} \right)^2 \leq c \sum_{ijk} a_{ij} u_{ik} u_{jk}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy - Schwarz, Young και την μη αρνητικότητα του a :

$$\langle \nabla g, \nabla u \rangle \sum_{ij} a_{ij} u_i u_j - g \sum_{ijk} a_{ij} u_{ik} u_{jk} \leq k_3 w$$

Έτσι βρίσκουμε ότι για σταθερά k_3 ώστε $L_w \leq k_3 w$. Δυστυχώς εφόσον $k_3 > 0$ δε μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας την αρχή μεγίστου για να έχουμε ως αποτέλεσμα

$$|w(t, \cdot)|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq |w_0|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$$

Παρόλα αυτά, μπορούμε ακόμα να δείξουμε ότι (βλ. την παρατήρηση στο τέλος αυτής της απόδειξης)

$$|w(t, \cdot)|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq (1 + ct e^{ct}) |w_0|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$$

όπου c είναι μία σταθερά που εξαρτάται από την k_3 . Για τη u αυτό σημαίνει

$$|\nabla u(t, \cdot)|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq k|\nabla u|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$$

όπου η σταθερά k εξαρτάται μόνο από $|g|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$, $|\nabla g|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$ και T . Συγκεκριμένα το k δεν εξαρτάται στον τρόπο με τον οποίο έχουν εξομαλυνθεί οι συντελεστές. Αυτή η ανισότητα αποδεικνύεται στην παρατήρηση που ακολουθεί την απόδειξη. Παρατηρήστε ότι αυτό είναι ενδιαφέρον γιατί θεωρούμε t φραγμένο.

Βήμα 3. Προσέγγιση και ύπαρξη μίας λύσεως ιξώδους. Για να μπορέσουμε να καταλήξουμε θα προσεγγίσουμε με παρόμοια εξίσωση για την οποία μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας ομαλής λύσης της εξίσωσης ροής που ικανοποιεί τα παραπάνω φράγματα για την κλίση. Σε αυτό το σημείο θεωρούμε C^∞ μια περιοδική συνάρτηση U_0^ϵ τέτοια ώστε $u_0^\epsilon \rightarrow u_0$ ομοιόμορφα ικανοποιώντας

$$|\nabla u_0^\epsilon|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq |\nabla u_0|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}, \quad |u_0^\epsilon|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq |u_0|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$$

Επίσης αντικαθιστούμε a_{ij}, g και H αντίστοιχα με

$$a_{ij}^\epsilon = (1 + \epsilon)\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|p|^2 + \epsilon}, \quad g_\epsilon = g + \epsilon, \quad H_\epsilon = ag_\epsilon \sqrt{|p|^2 + \epsilon} + \langle \underline{p}, \nabla g \rangle$$

Σύμφωνα με την γενική θεωρία μιας σχεδόν γραμμικής παραβολικής εξίσωσης [208], ξέρουμε ότι υπάρχει μια ομαλή λύση u_ϵ του

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g_\epsilon \sum_{ij} u_{ij} + H_\epsilon, \quad u(0, \cdot) = u_0^\epsilon$$

Χάρη στα προηγούμενα έχουμε

$$|\nabla u^\epsilon|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq k|\nabla u_0|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} = c_T$$

Αυτό σημαίνει ότι για $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbf{R}^2, t \in [0, T]$:

$$|u^\epsilon(t, \underline{x}) - u^\epsilon(t, \underline{y})| \leq c_T |\underline{x} - \underline{y}|$$

Μπορούμε επίσης να δείξουμε $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbf{R}^2, t \in [0, T]$

$$|u^\epsilon(t, \underline{x}) - u^\epsilon(s, \underline{x})| \leq c_T |s - t|^{1/2}$$

Οι ανισότητες 4.53 και 4.54 μαζί με $|u|_{L^\infty((0, T) \times \mathbf{R}^2)} \leq c$ μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε μέσω του θεωρήματος Arzelà - Ascoli ότι υπάρχει μια υπακολουθία του u^ϵ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, T] \times \mathbf{R}^2$ σε μια συνάρτηση $u \in C((0, T) \times \mathbf{R}^2) \cap L^\infty((0, T); W^{1, \infty}(\mathbf{R}^2))$ για $T < \infty$. Τότε εφαρμόζοντας ένα αποτέλεσμα ευστάθειας για λύση ιξώδους συμπεραίνουμε ότι u είναι η ιξώδης λύση της εξίσωσης της ροής.

4.7.1 Παρατήρηση (Σχετικά με τη αρχή μεγίστου για τις παραβολικές εξισώσεις).

Τα περισσότερα αποτελέσματα μοναδικότητας για γραμμικές παραβολικές (ή ελλειπτικές) ΜΔΕ προκύπτουν αρχές μεγίστου ή αρχές σύγκρισης. Γενικά εάν u είναι λύση παραβολικής ΜΔΕ στο $U_T = (0, T) \times U$ τότε τα ακρότατα της u λαμβάνονται στα παραβολικό σύνορο του U_T που ορίζεται από το $\Gamma_T = (0, T) \times U \cup \{t = 0\} \times U$. Ακριβέστερα έστω ο τελεστής

$$L(u) = - \sum_{ij} a_{ij} u_{ij} + \sum_j b_j u_j$$

όπου $\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq c|\xi|^2$ για $(t, \underline{x}) \in U_T$ οι a, b είναι συνεχείς συναρτήσεις και το U είναι φραγμένο. Αν u είναι μια ομαλή λύση της $u_t + L(u) \leq 0$ τότε έχουμε

$$\max_{U_T} u = \max_{\Gamma_T} u$$

Επίσης, αν $u_t + L(u) \geq 0$

$$\min_{U_T} u = \min_{\Gamma_T} u$$

Έτσι είναι φανερό ότι αν δύο λύσεις συμπίπτουν στο Γ_t συμπίπτουν σε U_t . Έτσι συμπεραίνουμε:

- Έστω \tilde{u} τέτοια ώστε

$$\tilde{u}_t + L(\tilde{u}) = g(t) \geq 0, \quad \tilde{u}(0, \underline{x}) = u_0(\underline{x})$$

Τότε $\tilde{u} = v + \int_0^t g(s) ds$ όπου είναι λύση του

$$v_t + L(v) = g(t) = 0, \quad v(0, \underline{x}) = u_0(\underline{x})$$

Έτσι έχουμε

$$\min u_0 \leq v \leq \max u_0$$

- Έστω \tilde{u} τέτοια ώστε

$$u_t + L(u) \leq g(t) \leq \tilde{u}_t + L(\tilde{u}) = g(t), \quad \tilde{u}(0, \underline{x}) = u_0(\underline{x})$$

που ξαναγράφεται ως

$$(u - \tilde{u})_t + L(u - \tilde{u}) \leq 0, \quad (u - \tilde{u})(0, \underline{x}) = 0$$

Η αρχή μεγίστου συνιστά ότι $\max_{U_T} (u - \tilde{u}) = \max_{\Gamma_T} (u - \tilde{u})$. Άρα $u \leq \tilde{u}$.
Αλλά

$$\tilde{u} = v + \int_0^t g(s) ds \leq |u_0|_{L^\infty(U_T)} + \int_0^t g(s) ds$$

και άρα

$$u \leq v + \int_0^t g(s) ds \leq |u_0|_{L^\infty(U_T)} + \int_0^t g(s) ds$$

- Τελικά θεωρούμε

$$w_t + L(w) \leq cw \text{ με } c \geq 0, \quad w(0, \underline{x}) = u_0(\underline{x})$$

Η κλασική αρχή μέγιστου δεν εφαρμόζεται. Επομένως: $w_t + L(w) \leq c \max w = g(t)$ και επομένως:

$$w(t, x) \leq |u_0|_{L^\infty(U_T)} + c \int_0^t \max w(\underline{x}, s) ds$$

και άρα

$$|w|_{L^\infty(U)}(t) \leq |u_0|_{L^\infty(U_T)} + c \int_0^t |w|_{L^\infty(U)}(s) ds$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Gronwall έχουμε

$$|w|_{L^\infty(U)}(t) \leq (1 + cte^{ct})|u_0|_{L^\infty(U)} \leq k|u_0|_{L^\infty(U)}$$

με k εξαρτόμενο από c και T . Παρατηρείστε ότι στο ∂U_T μπορούμε να επιλέξουμε συνοριακές συνθήκες Neumann ή περιοδικές συνοριακές συνθήκες.

Εν κατακλείδι θα θέλαμε να ελέγξουμε την ορθότητα του γεωμετρικού μοντέλου, δηλαδή να δείξουμε ότι το μηδενικό σύνολο του $u(t, \underline{x})$ ασυμπτωτικά συμπίπτει με την επιθυμητή καμπύλη $\Gamma = \{\underline{x} \in [0, 1] \times [0, 1] / g(\underline{x}) = 0\}$. Θα θυμηθούμε ένα αποτέλεσμα αποδεδειγμένο στο [85]. Υποθέτουμε ότι η Γ είναι ομαλή και χωρίζει το τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$ σε δύο περιοχές: την εσωτερική $I(\Gamma)$ και την εξωτερική $E(\Gamma)$ (π.χ. Γ είναι μια καμπύλη Jordan). Έστω $P(\mathbf{R}^n)$, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του \mathbf{R}^n εφοδιασμένων με την απόσταση Hausdorff

$$d(A, B) = \max \left(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A) \right)$$

όπου $d(x, A)$ είναι η απόσταση του σημείου x από το σύνολο A :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

Θεώρημα 4.8 Έστω $\Gamma = \{x \in [0, 1] \times [0, 1] / g(\underline{x}) = 0\}$ μια καμπύλη Jordan τάξης C^2 και $\nabla g \neq 0$ επί της Γ . Έστω ότι $u_0(\underline{x})$ είναι ομαλή και φραγμένη και ότι το σύνολο $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : u_0(\underline{x}) \leq 0\}$ περιέχει την Γ και το εσωτερικό της. Έστω $u(t, \underline{x})$ η λύση ξώδους και $\Gamma(t) = \{\underline{x} / u(t, \underline{x}) = 0\}$. Τότε αν α (το συνεχές συνιστώσα της ταχύτητας) είναι ικανοποιητικά μεγάλη τότε $\Gamma(t) \rightarrow \Gamma$ στη μετρική Hausdorff.

4.8.1 Η εξίσωση επανέναρξης

Πρακτικά, όταν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση () για την κατάτμηση μιας εικόνας, επιλέγουμε ως αρχική συνθήκη για $t = 0$ τη συνάρτηση προσημασμένης απόστασης από μια δοσμένη καμπύλη c_0 που περιβάλλει τα αντικείμενα. Δυστυχώς η εξίσωση ($\Sigma\Sigma$) δεν μας εγγυάται ότι η συνάρτηση κατά την εξελίξη

της (x, t) θα παραμείνει συνάρτηση προσημασμένης απόστασης. Ιδιαίτερα η κλίση μπορεί να 'εκραγεί' και αυτό προκαλεί σοβαρά αριθμητικά προβλήματα. Για να υπερβούμε αυτήν την δυσκολία, όταν έχουμε την εκτίμηση των σταθμικών συνόλων $v(x, t_0)$ τη στιγμή t_0 η ιδέα να κατασκευάσουμε μια νέα συνάρτηση απόστασης που έχει το ίδιο σύνολο μηδενικών $v(t_0, x)$. Συγκεκριμένα ο Morel πρότεινε την επίλυση του ακόλουθου συστήματος ΜΔΕ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{sgn}(v(\underline{x}, t_0)) (|\nabla u| - 1) = 0, \quad u(\underline{x}, 0) = v(\underline{x}, t_0)$$

όπου

$$\text{sgn}(w) = 1, \text{ εάν } w > 0, \quad -1, \text{ εάν } w < 0, \quad 0, \text{ εάν } w = 0$$

και $v(\underline{x}, t_0)$ είναι η εξελισσόμενη συνάρτηση τη στιγμή t_0 . Πρακτικά η διαδικασία επανέναρξης πρέπει να επαναλαμβάνεται ταχτικά. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην βιβλιογραφία που υπάρχει στο θέμα [ΑΣ, ΜΣ², ΣΣΟ, Ζ'ΜΟ].

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε δουλειά των Aujol-Aubert [AA] σε sq'esh me thn jewrhtik'h ap'odeixh aut'hs ths MDE. Ja do'ume 'oti to k'urio apot'ellesma e'inai m'ia sq'esh Hopf - Lax και μπορεί να θεωρηθεί μια διαυγής έκφραση της λύσης.

Με μια πρώτη ματιά, η ΜΔΕ είναι εξίσωση Hamilton - Jacobi π.χ της μορφής

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(\underline{x}, \nabla u) = 0$$

για τις οποίες η θεωρία των λύσεων ιξώδους φαίνεται να είναι να προσφέρει το πλαίσιο για τη διατύπωση των αποτελεσμάτων ύπαρξης και μοναδικότητας. Οι μέθοδοι για την επίλυση βασίζονται στην υπόθεση ότι η συνάρτηση Hamilton H είναι συνεχής σε σχέση σε όλες τις μεταβλητές, ενώ η ΜΔΕ έχει μια ιδιομορφία στην καμπύλη $\Gamma = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 / v(\underline{x}, t_0) = 0\}$. Ως αποτέλεσμα η κλασική θεωρία για τις λύσεις ιξώδους δεν μας επιτρέπει να λύσουμε αυτό το πρόβλημα και πρέπει να διευρύνει τη θεωρία για να συμπεριλάβει τις ασυνεχείς συναρτήσεις Hamilton. Η βιβλιογραφία επι αυτού του θέματος είναι περιορισμένη. Η περίπτωση της ασυνέχειας των λύσεων μελετάται στο [ABI] και η περίπτωση της ασυνέχειας στο δεύτερο μέλος της ΜΔΕ στα [IP]7980.

4.9 Χαρακτηρισμός της συνάρτησης απόστασης

Έστω Γ μια κλειστή καμπύλη στο \mathbf{R}^2 και $d(x, \Gamma)$ η απόσταση σημείου x από την καμπύλη Γ δηλ.

$$d(\underline{x}, \Gamma) = \inf_{\underline{y} \in \Gamma} |\underline{x} - \underline{y}|$$

Θα ξεκινήσουμε με ορισμούς.

Ορισμός 4.10 . Έστω $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $u(\Gamma) = 0$. Λέμε ότι u είναι μια συνάρτηση απόστασης στην καμπύλη Γ αν

$$u(\underline{x}) = \pm \epsilon d(\underline{x}, \Gamma), \text{ όταν το } x \text{ κείται εντός (εκτός) της } \Gamma$$

Ακόλουθα, δεχόμαστε ότι $\epsilon = 1$ και ονομάζουμε το u την συνάρτηση προσημασμένης απόστασης.

Ορισμός 4.11 *Ο σκελετός της Γ, S , είναι ένα σύνολο σημείων $\underline{x} \in \mathbf{R}^2$ για τα οποία υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία $\underline{y} \neq \underline{z} \in \Gamma$ τέτοια ώστε*

$$|\underline{x} - \underline{y}| = |\underline{x} - \underline{z}| = d(\underline{x}, \Gamma)$$

Η κλειστή θήκη του S είναι \overline{S} .

Παραθέτουμε κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες της συνάρτησης προσημασμένης απόστασης.

Λήμμα 4.12 *Η συνάρτηση προσημασμένης απόστασης u σε μια κλειστή καμπύλη Γ του \mathbf{R}^2 είναι 1-Lipschitz. Αν u είναι η συνάρτηση προσημασμένης απόστασης σε μια κλειστή καμπύλη $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ και αν $u \in C^1(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{S})$ τότε για $\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{S}$:*

$$|\nabla u| = 1$$

Η επόμενη πρόταση δίνει ένα χαρακτηρισμό της συνάρτησης προσημασμένης απόστασης που θα αποτελέσει την αφετηρία για την εύρεση μιας διαυγούς λύσης της εξίσωσης επανέναρξης.

Λήμμα 4.13 *Έστω Γ μια κλειστή καμπύλη στον \mathbf{R}^2 . Τότε:*

1. *u είναι η συνάρτηση απόστασης από τη Γ αν και μόνο αν*

$$\text{Για } \underline{x} \in \mathbf{R}^2 : u(\underline{x}) \geq 0,$$

$$\text{Για } \underline{x} \in \Gamma : u(\underline{x}) = 0,$$

$$\text{Για } \underline{h} \in [0, d(\underline{x}, \Gamma)] : u(\underline{x}) = \inf_{|\underline{y}|=h} (u(\underline{x} + \underline{y}) + h)$$

2. *u είναι το αντίθετο της συνάρτησης απόστασης στο Γ αν και μόνο αν*

$$\text{Για } \underline{x} \in \mathbf{R}^2 : u(\underline{x}) \leq 0,$$

$$\text{Για } \underline{x} \in \Gamma : u(\underline{x}) = 0,$$

$$\text{Για } \underline{h} \in [0, d(\underline{x}, \Gamma)] : u(\underline{x}) = \sup_{|\underline{y}|=h} (u(\underline{x} + \underline{y}) - h)$$

3. *u είναι η συνάρτηση προσημασμένης απόστασης στο Γ αν και μόνο αν*

$$\text{Για } \underline{x} \in \Gamma : u(\underline{x}) = 0,$$

$$\text{Για } \underline{x} \text{ εκτός της } \Gamma : u(\underline{x}) \geq 0,$$

$$\text{Για } \underline{x} \text{ εντός της } \Gamma : u(\underline{x}) \leq 0,$$

$$\text{Για } \underline{h} \in [0, d(\underline{x}, \Gamma)] : u(\underline{x}) = \epsilon_x \inf_{|\underline{y}|=h} (u(\underline{x} + \underline{y}) - h) \text{ όπου } \epsilon_x = \pm 1 \text{ εάν } \underline{x} \text{ κείται εκτός (εντός) της } \Gamma$$

Απόδειξη: Δείχνουμε μόνο το πρώτο σημείο της πρότασης. Η απόδειξη των άλλων δύο σημείων είναι παρόμοια.

Βήμα 1. Υποθέτουμε ότι u είναι η συνάρτηση προσημασμένης απόστασης της Γ . Έτσι είναι σαφές ότι $u(\underline{x}) = 0$ εάν και μόνο εάν $\underline{x} \in \Gamma$ καθώς η Γ είναι κλειστή). Έστω $\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$. Θα δείξουμε ότι

$$u(\underline{x}) = \inf_{|\underline{y}|=h} (u(\underline{x} + \underline{y}) + h)$$

όταν $h \in [0, u(\underline{x})]$. Εφόσον η u είναι η συνάρτηση απόστασης, τότε ισοδύναμα για $h \in [0, u(\underline{x})]$:

$$\inf_{\underline{z} \in \Gamma} |\underline{x} - \underline{z}| = \inf_{|\underline{y}|=h} \left(\inf_{\underline{z} \in \Gamma} |\underline{x} + \underline{y} - \underline{z}| + h \right)$$

ή

$$\inf_{\underline{z} \in \Gamma} |\underline{x} - \underline{z}| = \inf_{\underline{z} \in \Gamma} \left(\inf_{|\underline{y}|=h} |\underline{x} + \underline{y} - \underline{z}| + h \right)$$

Η τελευταία εξίσωση αποδεικνύεται παρακάτω:

- Χάρη στην τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$|\underline{x} - \underline{z}| - |\underline{y}| + h \leq |\underline{x} + \underline{y} - \underline{z}| + h$$

Έτσι

$$|\underline{x} - \underline{z}| \leq \inf_{|\underline{y}|=h} (|\underline{x} + \underline{y} - \underline{z}|) + h$$

και για $h \in (0, u(\underline{x}))$

$$\inf_{\underline{z} \in \Gamma} |\underline{x} - \underline{z}| \leq \inf_{|\underline{y}|=h} (|\underline{x} + \underline{y} - \underline{z}|)$$

Έτσι έχουμε δείξει ότι

$$u(\underline{x}) \leq \inf_{|\underline{y}|=h} (|\underline{x} + \underline{y} - \underline{z}| + h)$$

- Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $h \in (0, u(\underline{x}))$ τέτοιο ώστε η τελευταία να είναι αυστηρή:

$$u(\underline{x}) = \inf_{\underline{z} \in \Gamma} |\underline{x} - \underline{z}| < \inf_{\underline{z} \in \Gamma} \left(\inf_{|\underline{y}|=h} |\underline{x} + \underline{y} - \underline{z}| + h \right)$$

ή

$$u(\underline{x}) < h + \inf_{\underline{z} \in \Gamma} \left(\inf_{|\underline{y}|=h} |\underline{x} + \underline{y} - \underline{z}| \right)$$

Εφόσον η Γ είναι κλειστή ξέρουμε ότι υπάρχει $\tilde{\underline{z}}$ τέτοιο ώστε $u(\underline{x}) = |\underline{x} - \tilde{\underline{z}}|$ και συνεπώς:

$$u(\underline{x}) < h + \inf_{|\underline{w}-\tilde{\underline{z}}|=h} |\underline{w} - \tilde{\underline{z}}|$$

Διαλέγουμε

$$\tilde{u} = \frac{1}{u(\underline{x})} [h\tilde{z} + (u(\underline{x}) - h)\underline{x}]$$

και έτσι:

$$|\tilde{u} - \underline{x}| = h$$

Άρα το \tilde{u} είναι αποδεκτό. Επιπλέον έχουμε

$$|\tilde{u} - \tilde{z}| = u(\underline{x}) - h$$

Εν τέλει $u(\underline{x}) < u(\underline{x})$, το οποίο είναι προφανώς άτοπο.

Βήμα 2. Για να δείξουμε ότι η u είναι μια συνάρτηση απόστασης, επιλέγουμε $h = d(\underline{x}, \Gamma)$ και λαμβάνουμε

$$u(\underline{x}) = \inf_{|y|=d(\underline{x}, \Gamma)} (u(\underline{x} + y) + d(\underline{x}, \Gamma))$$

4.14 Ύπαρξη και μοναδικότητα μιάς ομοιόμορφα συνεχούς λύσης

Είμαστε τώρα σε θέση να μελετήσουμε την εξίσωση επανέναρξης

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{sgn}(u_0(\underline{x}))(|\nabla u| - 1) = 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$$

όπου u_0) είναι η αρχική συνθήκη. Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση η συνάρτηση Hamilton είναι ασυνεχής στη μεταβλητή \underline{x} . Για αυτό χρειάζεται να διευρύνουμε την κλασική θεωρία. Έτσι ας σκεφτούμε μια εξίσωση της μορφής

$$F(\underline{x}, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$$

όπου $\nabla u, \nabla^2 u$ είναι οι πρώτες και δεύτερες χωρικές παράγωγοι. Χρειαζόμαστε επίσης την ιδέα της κάτωτερης (αντίστοιχα και ανώτερης) ημισυνεχούς περιβάλλουσας :

Ορισμός 4.15 Έστω f μία τοπικά φραγμένη συνάρτηση. Οι f_*, f^* είναι αντίστοιχα κατώτερη και ανώτερη ημισυνεχής περιβάλλουσα της f , (κηπ,αηπ):

$$f_*(\underline{x}) = \liminf_{\underline{y} \rightarrow \underline{x}} f(\underline{y}), \quad f^*(\underline{x}) = \limsup_{\underline{y} \rightarrow \underline{x}} f(\underline{y})$$

Με αυτόν τον ορισμό μπορεί να εισαχθεί η έννοια των λύσεων ιξώδους για ασυνεχείς συναρτήσεις Hamilton:

Ορισμός 4.16 Έστω $F : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbf{R}$ είναι μια παντού ορισμένη και τοπικά φραγμένη συνάρτηση

4.14. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΜΙΑΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΛΥΣΗΣ 65

1. Μία συνάρτηση u τοπικά φραγμένη, κ.η.σχ. στο Ω , είναι μία υπολύση ιξώδους της DHJ αν και μόνο για κάθε $\phi \in C^2(\Omega)$ και $\underline{x}_0 \in \Omega$, ένα τοπικό μέγιστο της $u - \phi$,

$$F_*(\underline{x}_0, u(\underline{x}_0), \nabla\phi(\underline{x}_0), \nabla^2\phi(\underline{x}_0)) \leq 0$$

2. Μία συνάρτηση u τοπικά φραγμένη, α.η.σχ. στο Ω , είναι μία υπερλύση ιξώδους της DHJ αν και μόνο για κάθε $\phi \in C^2(\Omega)$ και $\underline{x}_0 \in \Omega$, ένα τοπικό ελάχιστο της $u - \phi$,

$$F_*(\underline{x}_0, u(\underline{x}_0), \nabla\phi(\underline{x}_0), \nabla^2\phi(\underline{x}_0)) \geq 0$$

3. Θα ονομάσουμε κάθε συνεχή υπερλύση και υπολύση ιξώδους, λύση ιξώδους.

Μπορούμε να δώσουμε τώρα το αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου, την ύπαρξη και την μοναδικότητα λύσης για την εξίσωση επανέναρξης DHJ . Στην συνέχεια, η αρχική συνθήκη u_0 θα λαμβάνεται ως ομοιόμορφα συνεχής σε \mathbf{R}^2 και θα ορίσουμε $\Gamma = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 / u(\underline{x}) = 0\}$ και $\epsilon_{\underline{x}} = \text{sgn}(u_0(\underline{x}))$. Ο σκοπός είναι να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $u : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^2$ που ορίζεται εάν

$$t_{\underline{x}} = \inf\{t \in \mathbf{R}^+ / \inf_{|\underline{y}| < t} (\epsilon_{\underline{x}} u_0(\underline{x} + \underline{y})) = 0\} = d(\underline{x}, \Gamma)$$

τότε για $t \leq t_{\underline{x}}$

$$u(\underline{x}, t) = \epsilon_{\underline{x}} \inf_{|\underline{y}| < t} (\epsilon_{\underline{x}} u_0(\underline{x} + \underline{y})) + t$$

ενώ για $t > t_{\underline{x}}$:

$$u(\underline{x}, t) = \epsilon_{\underline{x}} d(\underline{x}, \Gamma)$$

είναι μια λύση ιξώδους της DHJ . Σημειώστε ότι 4.65 είναι στην πραγματικότητα σχέση Hopf - Lax δηλαδή μια διαυγής έκφραση της λύσης. Ας γράψουμε $\Omega_+ = \{\underline{x} / u(\underline{x}) > 0\}$, το εξωτερικό της Γ και $\Omega_- = \{\underline{x} / u(\underline{x}) < 0\}$, το εσωτερικό της Γ , $\mathbf{R}^2 = \Omega_+ \cup \Gamma \cup \Omega_-$.

Λήμμα 4.17 Έστω u_0 είναι μια συνεχής συνάρτηση του \mathbf{R}^2 και σύνολο $\Gamma = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 / u_0(\underline{x}) = 0\}$. Τότε η u ορίζεται από 4.65 και είναι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$.

Παρατήρηση. Από τον ορισμό του $t_{\underline{x}}$ απορρέει η συνέχεια της $\underline{x} \rightarrow t_{\underline{x}}$ στον \mathbf{R}^2 .

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η u που ορίστηκε παραπάνω είναι συνεχής στον $\Omega \times [0, T]$ για κάθε $T > 0$. Αναλύουμε το χωρίο σε τρεις περιοχές:

1. $T > 0 : \Omega_+ \times [0, T]$
2. $T > 0 : \Omega_- \times [0, T]$
3. $T > 0 : V \times [0, T]$ για την περιοχή $V \subset \mathbf{R}^2$ του συνόλου $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 / u_0(\underline{x}) = 0\}$

Θα δείξουμε ότι η u είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε μία από αυτές τις περιοχές.

1. **Πρώτη περίπτωση:** Η u είναι ομοιόμορφα συνεχής στον $T > 0 : \Omega_+ \times [0, T]$. Θέτουμε $T > 0$ και έστω (\underline{x}, t) και (\hat{x}, \hat{t}) στο $\Omega_+ \times [0, T]$.

Βήμα 1: Υποθέτουμε πρώτα ότι $\hat{t} \leq t_{\hat{x}}$ και $t \leq t_{\underline{x}}$.

Έστω ρ το μέτρο συνέχειας της u_0 :

$$\rho(r) = \sup_{|\underline{x} - \underline{y}| \leq r} |u_0(\underline{x}) - u_0(\underline{y})|$$

Έχουμε

$$u(\underline{x}, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) = \inf_{|\underline{y}| \leq t} (u_0(\underline{x} + \underline{y}) + t) - \inf_{|\underline{y}| \leq \hat{t}} (u_0(\hat{x} + \underline{y}) + \hat{t})$$

Εφόσον η u_0 είναι συνεχής, υπάρχει $\hat{b} \in B_{\hat{x}, \hat{t}}$ τέτοιο ώστε

$$u_0(\hat{b}) = \inf_{|\underline{y}| \leq \hat{t}} (u_0(\hat{x} + \underline{y}))$$

Επίσης για $\hat{b} \in B_{\hat{x}, \hat{t}}$ υπάρχει $\lambda \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $|\underline{x} - \hat{b}| = \lambda \hat{t}$. Έστω $\underline{a} \in C(\underline{x}, \lambda t) = \partial B_{\underline{x}, \lambda t}$

$$\langle \hat{x} - \hat{b}, \underline{x} - \underline{a} \rangle = -|\hat{x} - \hat{b}||\underline{x} - \underline{a}|$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ εννοεί το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο. Ιδιαίτερως για $\underline{a} \in B_{\underline{x}, \lambda t}$ (εφόσον $|\lambda| \leq 1$), γίνεται

$$\begin{aligned} u(\underline{x}, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) &= \inf_{|\underline{y}| \leq t} (u_0(\underline{x} + \underline{y}) + t) - u_0(\hat{b}) - \hat{t} \leq \\ &\leq u_0(\underline{a}) - u_0(\hat{b}) + t - \hat{t} \leq \rho(|\underline{a} - \hat{b}|) + t - \hat{t} \end{aligned}$$

Εύκολα

$$|\underline{a} - \hat{b}| \leq |\hat{x} - \hat{b} - \underline{x} + \underline{a}| + |\underline{x} + \hat{x}|$$

και $\rho(r + s) \leq \rho(r) + \rho(s)$, συμπεραίνουμε ότι

$$u(\underline{x}, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) \leq \rho(|\underline{x} - \hat{x}|) + |t - \hat{t}| + \rho(|t - \hat{t}|)$$

και όμοια

$$u(\underline{x}, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) \geq -(\rho(|\underline{x} - \hat{x}|) + |t - \hat{t}| + \rho(|t - \hat{t}|))$$

και συνεπώς

$$|u(\underline{x}, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| \leq \rho(|\underline{x} - \hat{x}|) + |t - \hat{t}| + \rho(|t - \hat{t}|)$$

Βήμα 2. Έστω τώρα $t \geq t_{\hat{x}} \geq \max(t_{\underline{x}}, t_{\hat{x}})$ Έχουμε

$$|u(\underline{x}, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| = |u(\underline{x}, t_{\underline{x}}) - u(\hat{x}, t_{\hat{x}})| = d(\underline{x}, \Gamma) - d(\hat{x}, \Gamma)$$

4.14. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΜΙΑΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΛΥΣΗΣ 67

Άρα, αφού η Ευκλείδεια απόσταση είναι 1- Lipschitz,

$$|u(\underline{x}, t_{\underline{x}}) - u(\hat{\underline{x}}, t_{\hat{\underline{x}}})| \leq |\underline{x} - \hat{\underline{x}}|$$

Βήμα 3: Ας υποθέσουμε τώρα ότι $t \geq t_{\hat{\underline{x}}}, t \leq t_{\underline{x}}$. Τότε έχουμε

$$|u(\underline{x}, t) - u(\hat{\underline{x}}, t)| = |u(\underline{x}, t_{\underline{x}}) - u(\hat{\underline{x}}, t_{\hat{\underline{x}}})|$$

το δεξιό μέλος μπορεί τώρα να υπολογιστεί όπως το βήμα 1. Έτσι έχουμε

$$|u(\underline{x}, t) - u(\hat{\underline{x}}, t_{\hat{\underline{x}}})| \leq \rho(|\underline{x} - \hat{\underline{x}}|) + |t - \hat{t}| + \rho(|t - \hat{t}|)$$

αρα

$$|u(\underline{x}, t) - u(\hat{\underline{x}}, \hat{t})| \leq \rho(|\underline{x} - \hat{\underline{x}}|) + |t - \hat{t}| + \rho(|t - \hat{t}|)$$

εφόσον δε

$$|t_{\underline{x}} - t_{\hat{\underline{x}}}| \leq |\underline{x} - \hat{\underline{x}}|$$

και τελικά

$$|u(\underline{x}, t) - u(\hat{\underline{x}}, \hat{t})| \leq 2\rho(|\underline{x} - \hat{\underline{x}}|) + |\underline{x} - \hat{\underline{x}}|$$

Από τα βήματα 1,3 καταλήγουμε στην ομοιομορφία συνέχειας της u στο $\Omega_+ \times [0, T]$ διότι η u_0 είναι ομοιόμορφα συνεχής οπότε $\rho(|\underline{x} - \hat{\underline{x}}|)$ όταν $t \rightarrow \hat{t}$ και $\rho(|\underline{x} - \underline{x}|)$ όταν $\underline{x} \rightarrow \hat{\underline{x}}$.

Δεύτερη περίπτωση. Μπορούμε να δείξουμε με μια πανομοιότυπη απόδειξη ότι η u είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχής στο $\Omega_- \times [0, T]$.

Τρίτη περίπτωση Ας δείξουμε τώρα ότι η u είναι ομοιόμορφα συνεχής σε οποιαδήποτε περιοχή $V \subset \mathbf{R}^2$ των ριζών της u . Στην πραγματικότητα χάρη στις δυο πρώτες περιπτώσεις αρκεί να δείξουμε ότι η u είναι συνεχής στο $V \times [0, T]$. Μία συνεχής σε κλειστο και φραγμένο σύνολο είναι ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό.

Διαλέγουμε $T > 0$ και έστω $\epsilon > 0$. Αφού u_0 είναι ομοιόμορφα συνεχής για $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$0 \leq r < \delta \Rightarrow \rho(r) \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Επίσης εάν υπάρχει $\eta > 0$ έτσι ώστε

$$d(\underline{x}, \Gamma) \leq \eta \rightarrow |u_0(\underline{x})| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Έστω $\underline{x} \in \mathbf{R}^2$ έτσι ώστε $d(\underline{x}, \Gamma) \leq \min(\delta, \eta, \frac{\epsilon}{3})$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις

Βήμα 3.1 Αν $t \leq t_{\underline{x}}$, τότε

$$|u(\underline{x}, t) - u(\underline{x}, 0)| = \inf_{|\underline{y}| \leq t} (u_0(\underline{x} + \underline{y}) + t) \leq \inf_{|\underline{y}| \leq t} |u_0(\underline{x} + \underline{y})| + t$$

και εφόσον $t_{\underline{x}} = d(\underline{x}, \Gamma)$ και $t \leq t_{\underline{x}}$:

$$|u(\underline{x}, t)| \leq |u_0(\underline{x})| + \rho(t) + t \leq |u_0(\underline{x})| + \rho(t_{\underline{x}}) + t_{\underline{x}} \leq \epsilon$$

Βήμα 3.2: Αν $t > t_{\underline{x}}$ τότε

$$|u(\underline{x}, t) - d(\underline{x}, \Gamma)| \leq \frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon$$

Άρα η $u(x, t)$ είναι συνεχής στο $\{\underline{x}/u_0(\underline{x}) = 0\} \times [0, T]$.

Συμπεραίνουμε ότι η u είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$.

Μπορούμε τώρα να δώσουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 4.18 Έστω u λύση της DHJ . Τότε u είναι λύση ιξώδους και είναι ομοιόμορφα συνεχής στον $\mathbf{R}^2 \times [0, T]$ και μηδενίζεται στη Γ για $t \in [0, T]$.

Απόδειξη. Χωρίζουμε την απόδειξη σε δυο τμήματα

Τμήμα 1: Ύπαρξη της λύσης.

Ας αποδείξουμε πρώτα ότι u ορίζεται από την DHJ ως λύση ιξώδους. Γνωρίζουμε ήδη ότι η u είναι συνεχής στον $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$. Έστω $(\underline{x}_0, t_0) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$ και ας είναι το $\phi \in C^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+)$ έτσι ώστε η $u - \phi$ έχει τοπικό μέγιστο στο (\underline{x}_0, t_0) .

Βήμα 1: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $u_0(\underline{x}_0) = 0$. Για παράδειγμα υποθέτουμε ότι $u_0(\underline{x}_0) > 0$.

Αν $t_0 > t_{\underline{x}_0}$, έχουμε $u(\underline{x}_0, t_0) = d(\underline{x}_0, \Gamma)$ και $\frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}_0, t_0) = 0$. Θα δείξουμε ότι $F(\underline{x}_0, \nabla \phi(\underline{x}_0, t_0)) \leq 0$ ή

$$|\nabla \phi|(\underline{x}_0, t_0) \leq 1$$

Για λόγους σαφήνειας θα αποφύγουμε να σημειώσουμε την t -εξάρτηση η οποία δεν παίζει κανένα ρόλο εδώ. Για \underline{x} αρκετά μικρό έχουμε (εφόσον $0 \leq h \leq d(\underline{x}, \Gamma)$):

$$h + u(\underline{x}_0 + \underline{x}) - \phi(\underline{x}_0 + \underline{x}) \leq u(\underline{x}_0) - \phi(\underline{x}_0) + h$$

δηλαδή

$$h + u(\underline{x}_0 + \underline{x}) \leq \phi(\underline{x}_0 + \underline{x}) - \phi(\underline{x}_0) + u(\underline{x}_0) + h$$

η οποία μας δίνει ότι:

$$\inf_{|\underline{x}|=h} (u(\underline{x}_0 + \underline{x}) + h) \leq \inf_{|\underline{x}|=h} (\phi(\underline{x}_0 + \underline{x}) + h) + u(\underline{x}_0) - \phi(\underline{x}_0)$$

Το αριστερό μέλος είναι στην πραγματικότητα ίση με $u(\underline{x}_0)$ -λόγω ομοιόμορφης συνέχειας - τότε

$$\inf_{|\underline{x}|=h} (\phi(\underline{x}_0 + \underline{x}) - \phi(\underline{x}_0)) \geq -h$$

4.14. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΜΙΑΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΛΥΣΗΣ 69

έχουμε όμως

$$\phi(\underline{x}_0 + \underline{x}) - \phi(\underline{x}_0) = \langle \nabla \phi(\underline{x}_0), \underline{x} \rangle + h + O(h^2)$$

και άρα από την Cauchy-Schwarz

$$\inf_{|\underline{x}|=h} (\phi(\underline{x}_0 + \underline{x}) - \phi(\underline{x}_0)) = -h|\nabla \phi(\underline{x}_0)| + O(h^2)$$

η οποία οδηγεί στο ζητούμενο.

Έτσι καταλήγουμε από 4.70 ότι u είναι μια λύση ιξώδους στο \underline{x}_0, t_0 .

Σχόλια

- Αν $u_0(\underline{x}_0) < 0$, ξεκινάμε με την ανισότητα

$$-h + u(\underline{x}_0 + \underline{x}) - \phi(\underline{x}_0 + \underline{x}) \leq u(\underline{x}_0) - \phi(\underline{x}_0) - h$$

- Βλέπουμε επίσης ότι έχουμε δείξει στην πραγματικότητα ότι η προση-
μασμένη συνάρτηση απόστασης είναι λύση ιξώδους λύση της στατικής
εξίσωσης.

$$\text{sgn}(u_0)(|\nabla u_0| - 1) = 0$$

Αν $t_0 \leq t_{\underline{x}_0}$ για $h, |\underline{y}|$ αρκετά μικρά $h > 0$, έχουμε

$$h + u(\underline{x}_0 + \underline{y}, t_0 - h) - \phi(\underline{x}_0 + \underline{y}, t_0 - h) \leq u(\underline{x}_0, t_0) - \phi(\underline{x}_0, t_0) + h$$

η οποία εξασφαλίζει:

$$\inf_{|\underline{y}| \leq h} (u(\underline{x}_0 + \underline{y}, t_0 - h) + h) \leq \inf_{|\underline{y}| \leq h} (\phi(\underline{x}_0 + \underline{y}, t_0) - \phi(\underline{x}_0, t_0)) + h + u(\underline{x}_0, t_0)$$

όμως

$$\begin{aligned} \inf_{|\underline{y}| \leq h} (u(\underline{x}_0 + \underline{y}, t_0 - h) + h) &= \inf_{|\underline{y}| \leq h} \left(\inf_{|\underline{z}| \leq h} (u_0(\underline{x}_0 + \underline{y} + \underline{z} + t_0)) \right) = \\ &= \inf_{|\underline{w}| \leq t_0} (u_0(\underline{x}_0 + \underline{w}) + t_0) = u(\underline{x}_0, t_0) \end{aligned}$$

Άρα

$$\phi(\underline{x}_0, t_0) \leq h + \inf_{|\underline{y}| \leq h} (\phi(\underline{x}_0 + \underline{y}, t_0 - h))$$

και τότε

$$\phi(\underline{x}_0, t_0) - \phi(\underline{x}_0, t_0 - h) \leq \inf_{|\underline{y}| \leq h} (\phi(\underline{x}_0 + \underline{y}, t_0 - h) - \phi(\underline{x}_0, t_0 - h)) + h$$

και εφόσον

$$\phi(\underline{x}_0, t_0) - \phi(\underline{x}_0, t_0 - h) = h \frac{\partial \phi}{\partial t}(\underline{x}_0, t_0) + O(h^2)$$

και

$$\phi(\underline{x}_0 + \underline{y}, t_0) - \phi(\underline{x}_0, t_0 - h) = (\nabla\phi(\underline{x}_0, t_0 - h), \underline{y}) + O(h^2)$$

και λαμβάνουμε πάλι λόγω Cauchy-Schwarz :

$$\inf_{|\underline{y}| \leq h} (\phi(\underline{x}_0 + \underline{y}, t_0) - \phi(\underline{x}_0, t_0 - h)) = -h|\nabla\phi(\underline{x}_0, t_0 - h)| + O(h^2)$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(\underline{x}_0, t_0) \leq -|\nabla\phi|(\underline{x}_0, t_0 - h) + 1 + O(h)$$

και

$$|\nabla\phi|(\underline{x}_0, t_0 - h) = |\nabla\phi|(\underline{x}_0, t_0) + O(h)$$

και έχουμε τελικά

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(\underline{x}_0, t_0) + (|\nabla\phi|(\underline{x}_0, t_0) - 1) \leq 0$$

δηλαδή η u είναι λύση ιξώδους της DHJ στο (\underline{x}_0, t_0)

Σχόλι: Αν $u_0(\underline{x}_0) < 0$ τότε ξεκινάμε από την ανισότητα:

$$-h + u(\underline{x}_0 + \underline{x}) - \phi(\underline{x}_0 + \underline{x}) \leq u(\underline{x}_0) - \phi(\underline{x}_0) - h$$

Μπορεί να δειχθεί με παρόμοιο τρόπο ότι η u είναι υπερλύση ιξώδους στο (\underline{x}_0, t_0) . Έτσι δείξαμε ότι u είναι μια λύση ιξώδους στην περίπτωση του $u_0(\underline{x}_0) \neq 0$ (αφού η u είναι συνεχής).

Βήμα 2: Έστω $u_0(\underline{x}_0) = 0$ και έχουμε:

$$F_*(\underline{x}_0, \nabla\phi(\underline{x}_0, t_0)) = \min(0, |\nabla\phi|(\underline{x}_0, t_0) - 1, 1 - |\nabla\phi|(\underline{x}_0, t_0))$$

και

$$F^*(\underline{x}_0, \nabla\phi(\underline{x}_0, t_0)) = \max(0, |\nabla\phi|(\underline{x}_0, t_0) - 1, 1 - |\nabla\phi|(\underline{x}_0, t_0))$$

Άρα

$$F_* \leq 0, \quad F^* \geq 0$$

και έτσι u παραμένει λύση ιξώδους σε αυτήν την περίπτωση.

Μερος 2: Μοναδικότητα του λύσης. Έχουμε ότι

- εάν $\underline{x} \in \Gamma$ τότε $u_0(\underline{x}) = 0$
- εάν $\underline{x} \in \Omega_+$ τότε $u_0(\underline{x}) \geq 0$
- εάν $\underline{x} \in \Omega_-$ τότε $u_0(\underline{x}) \leq 0$

4.14. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΜΙΑΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΛΥΣΗΣ 71

Ας αναλογιστούμε τα παρακάτω δυο προβλήματα:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (|\nabla u| - 1 = 0, u(\cdot, 0) = u_0|_{\Omega_+}, u(\underline{x}, t) = 0, \text{ για } \underline{x} \in \Gamma$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (|\nabla u| - 1 = 0, u(\cdot, 0) = u_0|_{\Omega_-}, u(\underline{x}, t) = 0, \text{ για } \underline{x} \in \Gamma$$

Ας θυμηθούμε ότι η u υποτίθεται ομοιόμορφα συνεχής. Από κλασσικά αποτελέσματα σε λύσεις ιξώδους υπάρχει το πολύ μια λύση ομοιόμορφα συνεχής στο $\Omega_+ \times [0, T]$ για $T > 0$ (αντίστοιχα $\Omega_- \times [0, T]$). Μελετώντας ξανά τα επιχειρήματα για την ύπαρξη, μπορεί ναδειχθεί ότι η λύση της () (αντιστοιχά της (» είναι ο περιορισμός της συνάρτησης () στο $\Omega_+ \times [0, T]$ (αντιστοιχά στο $\Omega_- \times [0, T]$). Αφού η λύση του DHJ πρέπει να είναι συνεχής η μόνη δυνατή λύση είναι η συνάρτηση 4.65. Η απόδειξη του θεωρήματος 4.34 είναι λοιπόν ολοκληρωμένη.

Παρατήρηση στο Θεώρημα 4. Η εξίσωση DHJ χρησιμοποιείται για να ρυθμίσει και πάλι μια συνάρτηση όπως η ενδεδειγμένη συνάρτηση απόστασης σε μια κλειστή καμπύλη σε \mathbf{R}^2 . Αυτό συμβαίνει μόνο σε μια στενή περιοχή στην οποία η Γ είναι εμβαπτισμένη. Αλλά σύμφωνα με τη μορφή της λύσης του (4.61), οι πρώτες τιμές μετά την επανέναρξη της u είναι οι πλησιέστερες σε αυτές στη Γ . Αυτό εξηγεί την υψηλή ταχύτητα της μεθόδου επανέναρξης. Επιπλέον, ένα άμεσο αποτέλεσμα του ορισμού του $t_{\underline{x}}$ είναι ότι η $u(\underline{x}, t_{\underline{x}}) = \epsilon_{\underline{x}} t_{\underline{x}}$. Άρα αν επιλέξουμε το πλάτος της περιοχής γύρω από τη Γ στο οποίο αναζητούμε μια συνάρτηση προσημασμένης απόστασης, ξέρουμε πως πολλές επαναλήψεις της εξίσωσης (4.61) είναι απαραίτητες.

Ως συμπέρασμα αυτού του κεφαλαίου, ας σχολιάσουμε την εισαγωγή του όρου $t_{\underline{x}}$ στον ορισμό του (4.65), ο οποίος θα μπορούσε να εμφανιστεί ως αυθαίρετος. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $u : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ ορισμένη ως

$$v(\underline{x}, t) = \epsilon_{\underline{x}} \inf_{|\underline{y}| \leq t} (\epsilon_{\underline{x}} u_0(\underline{x} + \underline{y}) + t)$$

Όμως ότι $\epsilon_{\underline{x}} = \text{sgn}(u_0(\underline{x}))$. Σκεπτόμενοι ξανά τα επιχειρήματα του Θεωρήματος 4.3.4 βλέπουμε ότι u είναι μια λύση ιξώδους της DHJ σε $\Omega_+ \times \mathbf{R}^+$ και σε $\Omega_- \times \mathbf{R}^+$. Αλλά u δεν είναι απαραίτητα μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$. Το παρακάτω 1-Δ παράδειγμα μας δείχνει αυτό το σχόλιο. Ας δεχτούμε $\Omega = (-1, 1)$ και ας δούμε την αρχική συνθήκη

$$u_0(x) = 2(|x| - 1)$$

Σε αυτήν την περίπτωση είναι εύκολο να υπολογίσουμε και τις δύο συναρτήσεις u, v δοσμένες από (4.65) και (4.73) αντίστοιχα. Λαμβάνουμε

$$u(x, t) = \begin{cases} 2(|x| - 1) + t & \text{εάν } |x| \leq 1 \text{ και } t \leq 1 - |x| = t_x \\ (|x| - 1) & \text{εάν } |x| \leq 1 \text{ και } t \geq 1 - |x| \\ 2(|x| - 1) - t & \text{εάν } |x| \geq 1 \text{ και } t \leq 1 - |x| \\ (|x| - 1) & \text{εάν } |x| \geq 1 \text{ και } t \geq 1 - |x| \end{cases}$$

$$v(x, t) = \begin{cases} 2(|x| - 1) + t & \text{εάν } |x| \leq 1 \\ 2(|x| - 1) - t & \text{εάν } |x| \geq 1 \text{ και } t \leq |x| \\ t - 2 & \text{εάν } |x| \geq 1 \text{ και } t \geq |x| \end{cases}$$

Η συνάρτηση u είναι συνεχής στο $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$, όχι όμως και η v . Θα πρέπει να θεωρήσει τα $u(1 + \epsilon, t)$, $u(1 - \epsilon, t)$ για t αρκετά μεγάλο για να το διαπιστώσει.

Παρατήρηση. Θα θεωρήσουμε την ΜΔΕ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{sgn}(u)(|\nabla u| - 1) = 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0$$

Αυτή η ΜΔΕ είναι πολύ κοντά στην DHJ , αλλά η ασυνέχεια της συνάρτησης Hamilton $H(r, p) = \operatorname{sgn}(r)(|p| - 1)$ σχετίζεται με τη μεταβλητή r . Στην πραγματικότητα, η u που ορίστηκε παραμένει ομοιόμορφα συνεχής λύση ι-ξώδους του τελευταίου συστήματος. Αρκεί να δούμε ότι για $\underline{x} \in \mathbf{R}^2$ και για $t \in \mathbf{R}^+$

$$\operatorname{sgn}(u(\underline{x}, t)) = \operatorname{sgn}(u_0(\underline{x}))$$

και τα επιχειρήματα είναι τα ίδια με αυτά του Θεωρήματος 4.3.4 (Μερος 1). Παρόλα αυτά, από όσο γνωρίζουμε, η μοναδικότητα της λύσης του (4.74) παραμένει ένα πρόβλημα.

4.18.1 Αποτελέσματα πειραμάτων.

Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με τα αποτελέσματα των πειραμάτων που πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση της εξίσωση (TP). Στην πραγματικότητα θα δείξουμε τα αποτελέσματα την εικόνα αντικειμένων τα οποία δείχνουν καθαρά την συμπεριφορά της μεθόδου. Όσον αφορά την ασυνέχεια, θα χρησιμοποιούνται όπως συνήθως σχήματα πεπερασμένων στοιχείων. Αυτά τα σχήματα είναι προσαρμοσμένα στη δομή ψηφιακών εικόνων, αφού μπορούμε να συσχετίσουμε με αυτά ένα φυσικό πλέγμα.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα μας, μπορούμε να ξαναγράψουμε (4.34) ως το σύνολο τριών ξεχωριστών όρων:

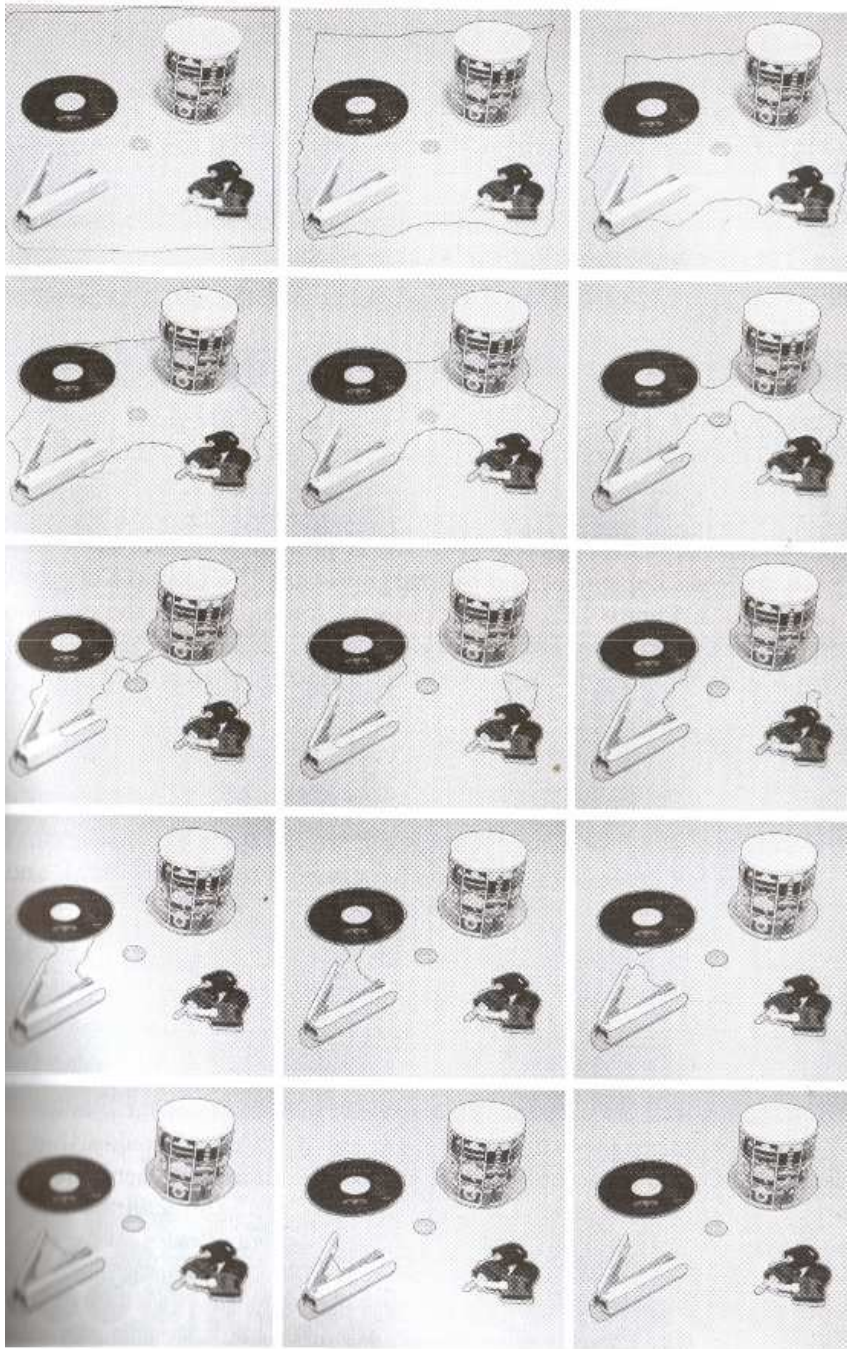
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla I|)|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + ag(|\nabla I|)|\nabla u| + \langle \nabla g, \nabla u \rangle$$

Η εξίσωση αυτή περιέχει δυο ειδών όρους:

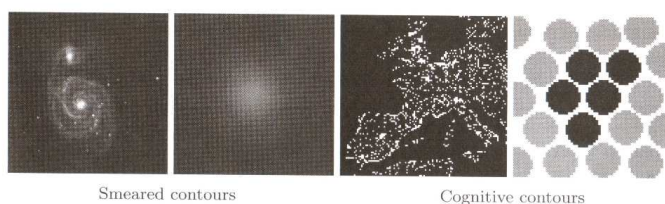
- (α') Ο πρώτος όρος συμπεριφέρεται ως παραβολικός όρος.
- (β') Ο δεύτερος και τρίτος είναι υπερβολικοί όροι. Ο δεύτερος όρος περιγράφει την κίνηση στην κάθετη κατεύθυνση στο μέτωπο, ενώ ο τρίτος όρος είναι όρος μεταφοράς.

Η διαφορά πρέπει να ενταχθεί στη διακριτοποίηση της εξίσωσης η οποία δεν είναι άμεση. Για καλύτερη κατανόηση παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο

4.14. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΜΙΑΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΛΥΣΗΣ73



Σχήμα 4.5: Κατάτμηση της εικόνας των αντικειμένων χρησιμοποιώντας μοντέλο γεωδαισικού ενεργού περιγράμματος (4.75). Απο πάνω αριστερά έως κάτω δεξιά παρουσιάζονται διαφορετικές επαναλήψεις (λύση σε σχέση με το χρόνο). Ξεκινώντας από τα όρια των εικόνων η καμπύλη μικραίνει μέχρι να απομονώσει κάθε αντικείμενο.



Σχήμα 4.6: Η κλίση δεν προσαρμόζεται πάντα για να ανιχνεύσει σύνορα

Παράρτημα Α του βιβλίου όπου εξηγούνται αυτές οι διαφορές καλύτερα και στο κεφάλαιο Α3.4, όπου παρουσιάζεται ο διαχωρισμός του (4.75). Μπορεί κάποιος να ελέγξει και να σχολιάσει αυτή την προσέγγιση με το σχέδιο διαχωρισμού. Ένα παράδειγμα για την εικόνα αντικειμένων παρουσιάζεται στην εικόνα 4.13. Κατά την εξέλιξη η καμπύλη μικραίνει και σταματάει τη στιγμή που κλείνει τα όρια του αντικειμένου και χωρίζει για να ανιχνεύσει τα πέντε αντικείμενα. Παρόλα αυτά παρατηρούνται τα παρακάτω:

- Το εσωτερικό του αντικειμένου δεν είναι χωρισμένο (για παράδειγμα το εσωτερικό του δίσκου). Τη στιγμή που η καμπύλη βρήκε ένα περιγράμμα σταμάτησε.
- Εξαιτίας της περιγραφής του συνόλου επιπέδου έχουμε πάντα κλειστά περιγράμματα. Αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα σε αυτήν την εικόνα, αλλά μπορούμε να σκεφτούμε περιπτώσεις όπου το διάγραμμα είναι ανοιχτό.

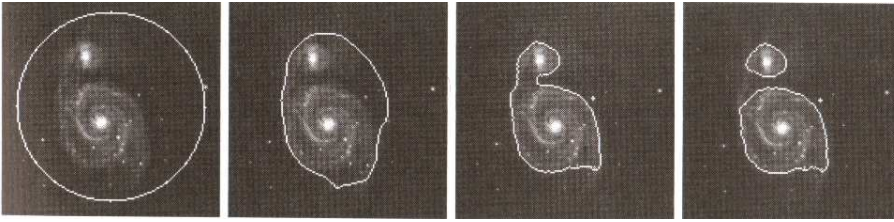
Παρακάτω εξετάζουμε πρόσφατες περιπτώσεις ζιτεορικά με αυτά τα δυο θέματα.

4.19 Τελευταίες πρόοδοι

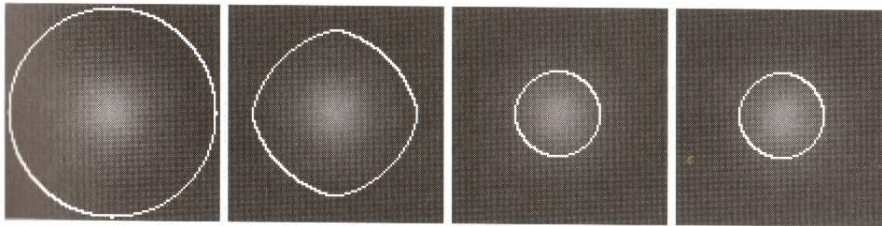
4.19.1 Καθολικά κριτήρια τερματισμού

Παρουσιάσαμε πρόσφατα ενεργά μοντέλα περιγραμμάτων και 'snakes' τα οποία χρησιμοποιούν την κλίση για να σταματήσουν την καμπύλη. Υπάρχουν όμως αντικείμενα στα οποία δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τα όρια τους ή είναι κακώς προσδιορισμένα από την κλίση. Αυτά περιλαμβάνουν συγκεχυμένα όρια και νοητά περιγράμματα (όρια μεγαλύτερων αντικειμένων ορισμένα από μικρότερα, [K]), όπως φαίνεται στην εικόνα 4.14.

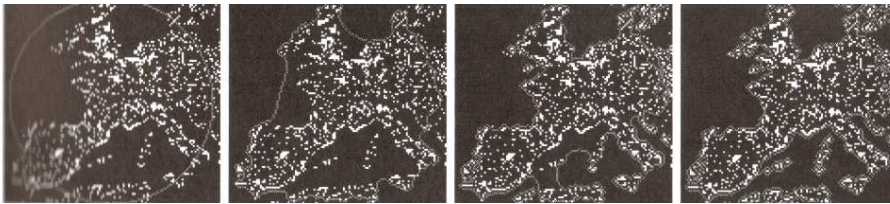
Παρουσιάζουμε εδώ ένα διαφορετικό μοντέλο περιγράμματος το οποίο ονομάζεται 'χωρίς άκρες' [1]28. Η κεντρική ιδέα είναι να αναζητήσουμε τις πληροφορίες μέσα στις περιοχές και όχι στα όρια. Ας περιγράψουμε λοιπόν αυτό το μοντέλο. Έστω u_0 ότι είναι η αρχική εικόνα για κατάτμηση και c



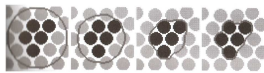
Σχήμα 4.7: Συγκεχυμένα περιγράμματα ενός γαλαξία.



Σχήμα 4.8: Περιγράμματα ενός θολού κυκλικού αντικειμένου.



Σχήμα 4.9: Νοητά περιγράμματα για εικόνες που παρουσιάζουν Ευρωπαϊκά φώτα τη νύχτα.



Νοητά περιγράμματα. Άλλο ένα παράδειγμα το οποίο δείχνει την ομαδοποίηση με βάση την χρωματική ταυτότητα.

είναι η εξελισσόμενη καμπύλη και k_1, k_2 είναι δύο άγνωστες σταθερές. Οι ... παρουσίασαν το παρακάτω πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\inf_{k_1, k_2, c} F(k_1, k_2, C) = \mu c + \int_{C^i} |u_0 - i_1|^2 + \int_{C^o} |u_0 - i_2|^2$$

όπου μ είναι μια θετική παράμετρος, C^i, C^o το εσωτερικό και το εξωτερικό της καμπύλης. Αυτό το μοντέλο ψάχνει για την καλύτερη προσέγγιση της εικόνας u_0 ως ένα σύνολο περιοχών με μόνο δύο διαφορές (k_1, k_2). Τυπικά μια από τις περιοχές αντιπροσωπεύει τα αντικείμενα προς ανίχνευση (εσωτερικό c), και η δεύτερη ανταποκρίνεται στο φόντο (εξωτερικό c). Το c θα είναι το όριο ανάμεσα σε αυτές τις δύο περιοχές. Αυτό το μοντέλο σχετίζεται με τη δυαδική κατάτμηση και έχει πολλά πλεονεκτήματα. Επιτρέπει την ανίχνευση και των δύο περιγραμμάτων με ή χωρίς κλίση και ανιχνεύει αυτόματα εσωτερικά περιγράμματα (θυμηθείτε το εσωτερικό του cd στην εικόνα αντικειμένων) και είναι ανθεκτικό στο θόρυβο. Αυτή η προσέγγιση έχει εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας την μέθοδο των σταθμικών συνόλων που παρουσιάσαμε προηγούμενα. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Heaviside H , μπορούμε να ξαναγράψουμε την ενέργεια F ως

$$\tilde{F}(k_1, k_2, \phi) = \mu \int_{\Omega} |\nabla H(\phi)| + |u_0 - i_1|^2 H(\phi) + |u_0 - i_2|^2 (1 - H(\phi))$$

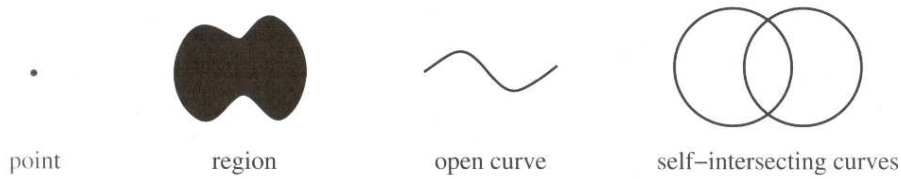
όπου φείναι η συνάρτηση των σταθμικών συνόλων. Για να βρούμε το ελάχιστο πρέπει να σκεφτούμε ότι το πρόβλημα του συναρτησιοειδούς F δεν είναι Gateaux διαφορίσιμο ως προς την τρίτη μεταβλητή. Ο λόγος είναι ότι η συνάρτηση Heaviside δεν είναι διαφορίσιμη. Το πρόβλημα εξομαλύνεται με την εισαγωγή της H_ϵ - μίας C^1 προσέγγισης του H . Έτσι για να ελαχιστοποιήσουμε το F σε σχέση με k_1, k_2, ϕ πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις

$$i_1 = \frac{\int_{\Omega} u_0 H(\phi)}{\int_{\Omega} H(\phi)}, \quad i_2 = \frac{\int_{\Omega} u_0 (1 - H(\phi))}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi))}$$

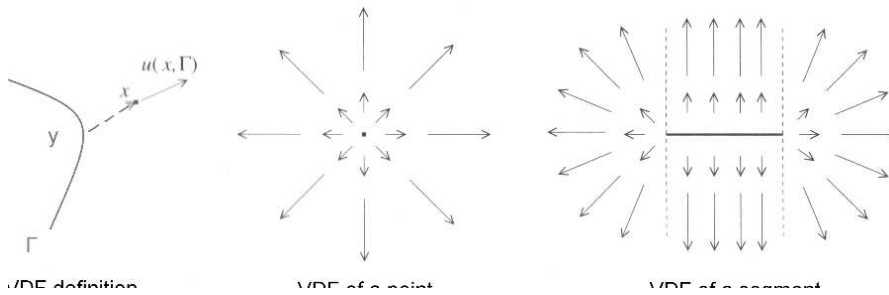
και

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta_\epsilon \left(\mu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - |u_0 - i_1|^2 + |u_0 - i_2|^2 \right)$$

όπου $\delta_\epsilon = H'_\epsilon$. Δεν χρειαζόμαστε H_ϵ για να υπολογίσουμε το i_1, i_2 . Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να εφαρμοστούν χρησιμοποιώντας καθιερωμένες μεθόδους πεπερασμένων διαφορών. Στις εικόνες (14-18) φαίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα από [ABI]2628 αναδεικνύοντας τις διαφορετικές δυνατές προσεγγίσεις. Θεωρητικά μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ελαχιστοποιητών της ενέργειας \tilde{F} αλλά η σύγκλιση του αλγόριθμου είναι ένα ανοιχτό πρόβλημα. Εν κατακλείδι, ζητούμε ότι το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται για την κατάτμηση εικόνων όπως και το Mumford-Shah [2]29, διανυσματικές εικόνες [BB], υφή [ABI]6465, και ταξινόμησης [ΣΒΑΖ].



Σχήμα 4.10: Παραδείγματα σχημάτων στις 2 διαστάσεις που δεν μπορούν να περιγραφούν με σταθμικά σύνολα.



Σχήμα 4.11: Συνάρτηση διανυσματικής απόστασης (VDF): Ορισμός και παραδείγματα.

4.20 Γενικότερα σχήματα

Όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, τα σύνολα επιπέδου είναι ένας εύκολος τρόπος για να περιγραφεις και να εφαρμόσεις την εξέλιξη των υπερεπιφανειών και έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλές περιπτώσεις. Δυστυχώς η περιγραφή έχει δυο κύριους περιορισμούς. Ο πρώτος είναι ότι τα σύνολα επιπέδου δεν μας επιτρέπουν την παρουσίαση σχημάτων που δεν είναι ομαλές καμπύλες: σημεία, καμπύλες τομές και ακίδες ή ανοιχτά χωρία (βλ. εικ. 19).

Για να ξεπεράσουμε αυτές τις δυσκολίες ζητούμε πρόσφατες προτάσεις για εναλλακτικά σύνολα επιπέδου [;]169170. Η παρουσίαση και η εξέλιξη των αντικειμένων χρησιμοποιείται στη θέση της συνάρτησης απόστασης $d(x, \Gamma) = \underline{x} - \underline{y}$ η συνάρτηση διανυσματικής απόστασης $u(\underline{x}, \Gamma) = |\underline{x} - \underline{y}|$ (βλ. εικ. 20 για παραδείγματα). Αυτή η συνάρτηση έχει εξαιρετικές ιδιότητες και συναφείς ΜΔΕ που ικανοποιούνται από την $u(\underline{x})$ μας επιτρέπει να φανταστούμε περιπλοκότερων κινήσεων από αυτές που μελετώνται από την τυπική μέθοδο σταθμικών συνόλων (\square). Αυτή η προοπτική είναι πολλά υποσχόμενη και θα πρέπει να ερευνηθεί περισσότερο και ειδικότερα από αριθμητική άποψης.

4.21 Τοπικές εκτιμήσεις για τη ροή σταθμικών συνόλων

4.21.1 Εισαγωγή

Στη συνέχεια θα εξάγουμε διάφορες εκτιμήσεις στη μορφή ανισοτήτων Harnack για τη ροή σταθμικών συνόλων, [TPP]. Οι εκτιμήσεις αυτού του τύπου ελήφθησαν σε διάφορα προβλήματα:

- για την κατασκευή της φάσης HM ακτινοβολίας με πειράματα σκιαγραφίας [PM1, PM2, PM3, PM4]
- για τον όγκο κομβικών συνόλων [P1],
- για το ρυθμό έκρηξης της καμπυλότητας σε μία αναλυτική υπερεπιφάνεια [P2],
- για την διακύμανση της συνάρτησης ροής χρόνου και μέσης καμπυλότητας των χρονοφύλλων ενός χωροχρόνου με τέλειο ρευστό [?],
- για τη διακύμανση της ταχύτητας και του στροβιλισμού ενός τέλειου ρευστού [PP2].

Η γενική αρχή για τη λήψη αυτών των εκτιμήσεων είναι η ακόλουθη:

θεωρούμε ότι μπορούμε να ελέγξουμε ένα κατάλληλο μέγεθος- γεωμετρικό ή φυσικό: π.χ. φωτεινότητα, καμπυλότητα, στοβιλισμός, πυκνότητα- μέσω τοπικών εκτιμήσεων κλίσεως. Τα σύνολα στα οποία έχουμε αυτές τις εκτιμήσεις κλίσεως προσεγγίζονται από συγκεκριμένα ημιαλγεβρικά σύνολα, τα οποία ορίζονται με πολυώνυμα τα οποία κατασκευάζουμε με μία ποσοστική εκδοχή του θεωρήματος Stone-Weierstrass. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη επαναληπτική διαδικασία Moser για να λάβουμε την εκτίμηση Harnack (Τέτοιου είδους εκτιμήσεις για μπάλες αποδείχθηκαν από τους Nash-De Giorgi). Τα αποτελέσματα αυτά πρακτικά μας επιτρέπουν να επιταχύνουμε τη σύγκλιση της συνήθους ροής σταθμικών συνόλων να έχουμε καλύτερη αρχική συνθήκη.¹ Βασικό συστατικό για την προσαρμογή στα ημιαλγεβρικά σύνολα είναι η γενικευμένη ανισότητα Hardy [ΠΓΗ, ΠΜ1] που επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό των σταθερών.

4.21.2 Ανισότητα Hardy

Η λήψη των εκτιμήσεων θα βασιστεί στην ακόλουθη ανισότητα τύπου Χαρντ που αποδείχθηκε στα [ΠΓΗ], [;]. Έστω $P : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ένα πολυώνυμο βαθμού

¹Η συνήθης αρχική συνθήκη της απόστασης από δοσμένη καμπύλη δεν παραβιάζεται: οι τιμές μιας αναλυτικής συνάρτησης ελέγχουν μέσω της ανισότητας Łosasiewicz την απόσταση από το μηδενικό σταθμικό σύνολο

4.21. ΤΟΠΙΚΕΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΡΟΗ ΣΤΑΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ 79

m που λαμβάνεται να προσεγγίζει τη συνάρτηση $\gamma = |\nabla I|^2$ σε κατάλληλο χωρίο. Τότε εάν $Q = \left| \frac{\nabla P}{P} \right|^2$, $Q = P^{-2/m}$:

$$\int_{\Omega} Q f^2 \leq C(Q) \int_{\Omega} |\nabla f|^2$$

4.21.3 Χωρία εντοπισμού

Θεωρούμε τα σύνολο εντοπισμού:

$$\Lambda_{\gamma, m, \eta} = \{ \underline{x} \in \mathbf{R}^2 / |\gamma - P|\nabla\eta \}$$

στο οποίο έχουμε έλεγχο της φωτεινότητας.

4.21.4 Η ανισότητα Harnack

Η εξίσωση ροής των σταθμικών συνόλων:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla I|)|\nabla u| \operatorname{div}(\nu) + a + (\nabla g, \nabla u)$$

πολλαπλασιασμένη με μία κατάλληλη συνάρτηση δοκιμής χ , $\operatorname{supp}(\chi) \subset \Lambda_{\gamma, m, \eta}$, μας δίδει με χωρική ολοκλήρωση:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Lambda_{\gamma, \mu}} u = \int_{\Lambda_{\gamma, \mu}} |\nabla u| \operatorname{div}(\underline{\nu})$$

αυτή μέσω της ανισότητας Hardy και της τεχνικής Moser και Simon λαμβάνουμε την ανισότητα :

$$\sup_{\tilde{\Lambda}} |u| \leq C(\gamma, \eta, m) \inf_{\tilde{\Lambda}_\tau} |u|$$

όπου $\tilde{\Lambda}_0 = [0, t) \times \Lambda_{\eta/2}$, $\tilde{\Lambda}_\tau = [\tau, t + \tau) \times \Lambda_\eta$

Βιβλιογραφία

- [AS] Adalsteinsson D., Sethian J. A., *The fast construction of extension*, J. Comp. Phys., **148**, (1), 2-22, (1999)
- [ABI] Alvarez O., Barron E. N., Ishii H., *Hopf-Lax formulas for semicontinuous data*, Indiana Un. Math. J., **48**, 993-1035, (1999)
- [AL] Ambrosio L., *A compactness theorem for a new class of functions of bounded variation*, Boll. Unione. Math. It., **VII**, (4), 857-881, (1989)
- [AL] Ambrosio L., *Variational problems in SBV and image segmentation*, Acta Applicandae Mathematicae, **17**, 1-40, (1989)
- [AT] Ambrosio L., Tortorelli V. M., *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ - convergence*, CPAM, **XLIII**, (1), 999-1036, (1990)
- [ABF] Aubert G., Blanc-Feraud, *Some remarks on the equivalence between 2D-3D classical snakes and geodesic active contours*, IJCV, **34**, (1), 19-28, (1999)
- [AA] Aujol J. F., Aubert G., *Signed distance functions and viscosity solutions of discontinuous Hamilton-Jacobi equations*, Technical Report 4507, INRIA (2002)
- [BC] Bellettini G., Coscia A., *Approximation of a functional depending on jumps and corners*, Bol. Uni. Mat. Italiana, **8**, (1), 151-181, (1994)
- [BC] Bellettini G., Coscia A., *Discrete approximation of a free discontinuity problem*, Num. Funct. Anal. Optimiz., **15**, (3-4), 201-224, (1994)
- [BI] Blake A., Isard M., *Active Contours*, Springer-Verlag, (1998)
- [BZ] Blake A., Zisserman A., *Visual Reconstruction*, MIT Press, (1987)
- [B1] Bonnet A., *Caractérisation des minima globaux de la fonctionnelle de Mumford-Shah en segmentation d'images*, CRAS, **321**, (1), 1121-1126, (1995)
- [B2] Bonnet A., *Sur la régularité des bords de minima de la fonctionnelle de Mumford-Shah*, CRAS, **321**, (1), 1275-1279, (1995).
- [B3] Bonnet A., *On the regularity of the edge set of Mumford-Shah minimizers*, Prog. Nonlin. Differ. Equat., **25**, 93-103, (1996)

- [BB] Bourdin B., *Image segmentation with a finite element method*, Math. Model. Numer. Anal., **33**, (2), 229-244, (1999)
- [BA] Braides A., *Approximation of free discontinuity problems volume of lecture notes in mathematics*, Springer-Verlag, (1998)
- [BDM] Braides A., Dal Maso G., *Non-local approximation of the Mumford-Shah functional*, Calc. Var. PDE, **5**, (4), 293-322, (1997)
- [C] Canny J. F., *Finding edges and lines in images. Technical Report*, MIT, Artificial Intelligence laboratory, (June 1983)
- [CLT] Carriero M., Leaci A., Tomarrelli F., *A second order model in image segmentation : Blake Zisserman functional*, Nonlinear Differ.Equ.Appl., **25**, 57-72, (1996)
- [CCCD] Caseelles V., Catta F., Coll T., Didos F., *A geometric model for active contours*, Numer. Math., **66**, 1-31, (1993)
- [CKS] Caselles V., Kimmel R., Sapiro G., *Geodesic active contours*, Proceedings of the 5th International Conference on Computer Vision, Comp. Society Press, 694-699, (1995)
- [CKS] Caselles V., Kimmel R., Sapiro G., *Geodesic active contours*, IJCV, **22**, (1), 61-79, (1997)
- [CA] Chambolle A., *Image segmentation by variational methods : Mumford - Shah functional and the discrete approximation*, Jour. Appl. Math, **55**, (3), 827-863, (1995)
- [CDM] Chambolle A., Dal Maso G., *Discrete approximations of the Mumford - Shah functional in dimension two*, M2AN , **33**, (4), 651-672, (1999)
- [CSV] Chan T., Sandberg B. Y., Vese L., *Active contours without edges for vector-valued images*, Jour. Vis. Commun. Im. Repres., **11**, 130-141, (2000)
- [CV1] Chan T., Vese L., *Active contours without edges*, Technical Report 98-53, UCLA CAM Report, (1999)
- [CV2] Chan T., Vese L., *Image segmentation using level sets and the piecewise constant Mumford-Shah model*, Technical Report 00-14, UCLA CAM Report, (2000)
- [CV3] Chan T., Vese L., *Active contours without edges*, IEEE Trans. Im. Proc., **10**, (2), 266-277, (February 2001)
- [CV4] Chan T., Vese L., *A level set algorithm for minimizing the Mumford-Shah functional in image processing*, 1st IEEE Work. Var. Level Sets. Meth. Comp. Vis., 161-168, (2001)
- [DM] Dal Maso G., *An Introduction to Γ -Convergence*, Prog. NDE and Applic. Birkhäuser, (1993)
- [D] David G., *Singular set of minimizers for the Mumford-Shah functional*, Birkhauser, (2005)

- [DG] De Giorgi E., *Free discontinuity problems in calculus of variations*, Front. Pure Appl. Math., Coll. Pap. Ded. J. L. Lions, 55-62, (1991)
- [DGA] De Giorgi E., Ambrosio L., *Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni*, Att. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., **82**, 199-210, (1988)
- [DGCL] De Giorgi E., Carriero M., Leaci A., *Existence theorem for a maximum problem with a free discontinuity set*, Arc. Rat. Mech. Anal., **108**, 195-218, (1989)
- [D] Deriche R., *Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector*, IJCV, **1**, (2), 167-187, (May 1987).
- [DT] Dervieux A., Thomasset F., *A finite element method for the simulation of Rayleigh-Taylor instability*, Lect. Not. Math., **771**, 145-159, (1979)
- [EG] Epstein C. L., Gage M., *The curve shortening flow*, Wave Motion: Theory, Modelling and Computation. Springer-Verlag, (1987)
- [E] Evans L. C., *Partial Differential Equations*, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics. AMS, (1998)
- [GT] Gilbarg D., Trudinger N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of second order*, **XIII**, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, (1983)
- [G] Gobbino M., *Finite difference approximation of the Mumford-Shah functional*, CPAM, **51**, (2), 197-228, (1998)
- [GF1] Gomes J., Faugeras O., *Representing and evolving smooth manifolds of arbitrary dimension embedded in R^n as the intersection of n hypersurfaces: the vector distance functions*, Technical Report 4012, INRIA, (2000)
- [GF2] Gomes J., Faugeras O., *The vector distance function*, IJCV, **52**, (2/3), 161-167, (2003)
- [GP] Grisvard P., *Elliptic problems in Nonsmooth Domains*, volume XIV Mon. Studies in Mathematics, (1985)
- [H] Haralick R., *Digital step edges from zero crossing of second directional derivatives*, IEEE Trans. PAMI, **6**, (1), 58-68, (1984)
- [I] Ishii H., *Existence and uniqueness of solutions of Hamilton Jacobi equations*, **29**, 167-188, (1986)
- [IR] Ishii H., Ramaswamy M., *Uniqueness results for a class of Hamilton-Jacobi equations with singular coefficients*, CPDE., **20**, 2187-2213, (1995)
- [K] Kanizsa G., *Grammatica Del Vedere*, Bologna: II Mulino, (1980)
- [KWT] Kass M., Witkin A., Terzopoulos D., *Snakes:Active contour models*, 1st Intern. Conf. CV, 259-268, (1987)

- [KKOTY1] Kichenassamy S., Kumar A., Olver P., Tannenbaum A., Yezzi A., *Gradient flows and geometric active contour models*, In Proc. of the 5th Intern. Conf. CV, 810-815, (1995)
- [KKOTY2] Kichenassamy S., Kumar A., Olver P., Tannenbaum A., Yezzi A., *Conformal curvature flows: from phase transitions to active vision*, Arch. Rat. Mech. Anal., **134**, 275-301, (1996)
- [LSU] Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uralcena N. N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Proc. AMS, (1968)
- [MSV1] Malladi R., Sethian J. A., Vemuri B. C., *Evolutionary fronts for topology-independent shape modeling and recovery*, Proceedings of the 3rd European Conference on computer vision, **800**, Lecture notes in computer science, 3-13, Sweden (May 1994)
- [MSV2] Malladi R., Sethian J. A., Vemuri B. C., *Shape modeling with front propagation: a level set approach*, IEEE Trans PAMI, **17**, (2), 158-175, (1995)
- [M] March R., *Visual reconstructions with discontinuities using variational methods*, Image Vision Computing, **10**, 30-38, (1992)
- [MV] Marr D., Vision, W. H freeman and Co., (1982)
- [MH] Marr D., Hildreth E., *Theory of edge detection*, Proc. Roy. Soc. London, **207**, 187-217, (1980)
- [MT] Massari U., Tamamini I., *Regularity properties of optimal segmentations*, J. Reine Angew. Math, **420**, 61-84, (1991)
- [MS1] Morel J. M., Solimini S., *Segmentation of images by variational methods: A constructive approach*, Rev. Math. Univ. Complut. Madrid, **1**, 169-182, (1988)
- [MS2] Morel J. M., Solimini S., *Segmentation d'images par methode variationnelle: Une preuve constructive d'existence*, CRAS, **308**, (15), 465-470, (1989)
- [MS3] Morel J. M., Solimini S., *Variational Methods in Image Segmentation*, Progr. NDE Applic., Birkhauser, Basel, (1995)
- [MS4] Mumford D., Shah J., *Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems*, CPAM, **42**, 577-684, (1989)
- [N] Noble J. A., *Description of image surfaces*, PHD thesis Rob. res. gr., Dep. of Engin. Sc., Oxford University (1989)
- [OF] Osher S., Fedkiw R. P., *Level set methods*, Tech. Rep. 00-08 , UCLA CAM Report, (2000)
- [OS] Osher S., Sethian J. A., *Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, Jour. Comp. Phys., **79**, (1), 12-49, (1988)

- [PD1] Paragios N., Deriche R., *Geodesic active regions for supervised texture segmentation*, Proc. of the 7th Intern. Conf. CV, Corfou-Greece (1999)
- [PD2] Paragios N., Deriche R., *Geodesic active regions: a new paradigm to deal with frame partition problems in computer vision*, Jour. Vis. Comm. Im. Repres., Spec. Iss. PDE in IP, CVCG, **13**, (1/2), 249-268, (2002)
- [PGH] Pliakis D., *Generalized Hardy's inequality*, arxiv:
- [P1] Pliakis D., *On the volume of nodal sets*, (προδημοσίευση).
- [P2] Pliakis D., *Heat expansion for isolated analytic hypersurface singularities*, (προδημοσίευση).
- [PM1] Pliakis D., Minardi S., *An iterative phase retrieval algorithm*, JOSA A, (2009)
- [PM2] Pliakis D., Minardi S., CLEO, (2009)
- [PM3] Falkenberg P, Pliakis D., Minardi S., Petsch T., *Digital holography from iterative phase estimates*, Optics Letters, (προς δημοσίευση)
- [PM4] Falkenberg P, Pliakis D., Minardi S., Petsch T., *On-line digital holography*, SPIE, (2010)
- [PP1] Papakostas T., Pliakis D., *Maximal slicing estimates for perfect fluid spacetimes*, (προδημοσίευση).
- [PP2] Papakostas T., Pliakis D., *Geometric estimates for perfect fluids*, (προδημοσίευση).
- [TPP] Thanasoulas S., Pliakis D., Papakostas T., *local estimates for the active contours flow*, (υπό προετοιμασία)
- [P] Prewitt J. M. S., *Object enhancement and extraction*, in Lipkin, B. S. Rosenfeld, Pict. Proc. Psych., 75-149, (1970)
- [R] Roberts L. G., *Machine perception of three dimensional solids*, Opt. Electr. Inf. Proc., 159-197, (1965)
- [RM1] Rosati M., *Asymptomatic behavior of a Geman-Mac Lure discrete model*, Technical Report 8, (1997)
- [RM2] Rosati M., *Asymptotic behavior of a Geman and McClure model*, Appl. Math. Optimiz., **41**, (1), 51-85, (2000)
- [RK] Rosenfeld A., Kak A.C., *Digital Picture Processing*, **1**, Acad. Press., (1982)
- [RMO] Ruuth S. J , Merriman B., Osher S., *A fixed grid method for capturing the motion of self-interesenting interfaces and related pdes*, Tec.Rep. 99-22, UCLA Comp. Appl. Math. Rep. (1999)
- [SBZ] Samson C., Blanc-Feraud L., Aubert G., Zerubia J., *A level set model in image classification*, **1682**, Lect. Not. Comp. Scien., 306-317, (1999)

- [S1] Sapiro G., *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*, Cambridge University Press, (2001)
- [S2] Sethian J. A., *Recent numerical algorithms for hypersurfaces moving with curvature dependent speed: Hamilton-Jacobi equations and conservation laws*, JDG, **31**, 131-136, (1990)
- [S3] Sethian J. A., *Level set methods and fast marching methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision*, Cambridge University Press, (1999)
- [SC] Shen J., Castan S., *An optimal linear operator for step edge detection*, Grap. Md. Im. Proc., **54**, (2), 112-133, (1992)
- [SLTZ] Siddiqi K., Lauziere Y., Tannenbaum, Zucker S., *Area and length minimizing flows for shape segmentation*, Trans. IP, **7**, 433-443, (1998)
- [SI] Sobel I., *An isotropic 3×3 image gradient operator*, Freeman editor, 376-379, (1990)
- [SP1] Soravia P., *Optimal control with discontinuous running cost*, In 39th IEEE Conf. Dec. Contr., 79-84, (2000)
- [SP2] Sovaria P., *Boundary value problems for Hamilton-Jacobi equations with discontinuous lagrangian*, Indiana Uni. Math. J., **51**, (2), 451-477, (2002)
- [SSO] Sussman M., Smereka P., Osher S., *A level set approach for computing solutions to incompressible two phase flow*, Jour. Comput. Phys., **114**, (1), 146-159, (1994)
- [TBAB] Teboul S., Blanc-Feraud L., Aubert G., Barlaud M., *Variational approach for edge preserving regularization using coupled PDE's*, IEEE Trans. IP, PDE in IP, **7**, (3), 387-397, (1998).
- [W] Witkin A. P., *Scale-space filtering*, In Int. J. AI, 1019-1021, (1983)
- [ZCMO] Zhao H. K., Chan T., Merriman B., Osher S., *A variational level set approach to multiphase motion*, J. Comp. Phys., **127**, (1), 179-195, (1996)