

ΑΤΕΙ ΚΡΗΤΗΣ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΧΑΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ MICROSOFT EXCEL**

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:

ΕΥΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΔΑΦΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΧΑΝΙΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Δρ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΡΙΔΗΣ

Ευχαριστίες,

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε ιδιαίτερα τον υπεύθυνο καθηγητή της πτυχιακής μας άσκησης κύριο Δρ, Κωνσταντίνο Πετρίδη για την πολύτιμη πολύωρη και κατατοπιστικότατη συμβολή του στην διεκπεραίωση αυτής εργασίας καθώς και για την επιλογή μας

Επίσης θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον καθηγητή Πλιάκη για την συμβολή στην κατανόηση μαθηματικών ορισμών και αξιωμάτων.

Τέλος ευχαριστούμε όλους τους αναγνώστες αυτού του εγχειρήματος, τους καθηγητές καθώς και βοηθούς του ιδρύματος που συντέλεσαν στο να αποκομίσουμε τόσο την θεωρητική όσο και πρακτική γνώση ανώτατης τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, αποπερατώνοντας έτσι την εκπόνηση της πτυχιακής εργασίας.

Εισαγωγή

Το Microsoft Excel είναι ένα πρόγραμμα για τη δημιουργία και την επεξεργασία λογιστικών φύλλων. Αυτό σημαίνει ότι τα βασικά αρχεία που φτιάχνουμε με τη βοήθειά του, έχουν τη μορφή λογιστικών φύλλων. Κάτι δηλαδή σαν τις σελίδες με τις οριζόντιες γραμμές και στήλες που χρησιμοποιούσαν οι λογιστές, με τη διαφορά ότι στην περίπτωση του Excel οι διάφοροι υπολογισμοί και συσχετισμοί γίνονται αυτόματα από τον υπολογιστή. Οι δυνατότητές του, όμως, δεν σταματούν εδώ. Ένα λογιστικό φύλλο (ή "φύλλο εργασίας") αποτελεί μια πολύ ευέλικτη "οντότητα", η χρησιμότητα της οποίας μπορεί να ξεπεράσει τα αυστηρά όρια της "λογιστικής". Χρήση του, για παράδειγμα, είναι η απλή ταξινόμηση δεδομένων, η κατασκευή γραφικών παραστάσεων, ακόμη και η δημιουργία πινάκων και ετικετών, σε συνεργασία με το γνωστό πρόγραμμα επεξεργασίας κειμένου Microsoft Word. Επίσης, επάνω στα φύλλα εργασίας του Excel μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε χρώμα, να σχεδιάσουμε, ακόμη και να εισαγάγουμε εικόνες, λογιστικών βιβλίων.

Όπως όλες οι εφαρμογές των Windows, το Excel χρησιμοποιεί αρχεία για να αποθηκεύει τα δεδομένα. Τα αρχεία αυτά (ουσιαστικά τα λογιστικά φύλλα) δεν παρουσιάζουν καμία ιδιαιτερότητα, ως προς τη διαχείρισή τους, σε σχέση με τα υπόλοιπα αρχεία του λειτουργικού συστήματος. Επίσης, η χρήση του Excel διέπεται από όλους τους βασικούς κανόνες που ισχύουν στο "παραθυρικό" περιβάλλον, οπότε και στο Excel συναντάμε έννοιες όπως "Μενού", "Αντιγραφή", "Επικόλληση", "Γραμματοσειρά" κ.λπ.

Στόχος μας είναι να χρησιμοποιήσουμε το Excel ως εργαλείο για την επίλυση μαθηματικών εξισώσεων και στη συνέχεια να αποδώσουμε γραφικά τα αποτελέσματά μας. Ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση αριθμητικών εξισώσεων άλλαξε άρδην με την χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Οι μυριάδες μαθηματικών πράξεων απαιτούσαν την επιστράτευση ενός πλήθους μαθηματικών για τον προσδιορισμό της αριθμητικής τιμής και του πλέον απλού ολοκληρώματος. Σήμερα μπορούν να γίνουν μέσω του υπολογιστή σε

κλάσματα δευτερολέπτου. Επιπλέον η διαμόρφωση λογισμικών πακέτων, όπως το Excel, μετατρέπει την όλη διεργασία σχεδόν σε παιχνίδι.

Η μεθοδολογία που επιλέχτηκε για την προσέγγιση του στόχου της εργασίας βασίζεται σε συγκεκριμένα βήματα: **Πρόβλημα - θεωρία - μέθοδος**. Το βήμα του προβλήματος έχει να κάνει με την επίλυση μαθηματικών εξισώσεων που μέσω αυτών θα κατανοήσουμε θεμελιακούς όρους του ηλεκτρομαγνητισμού. Κατά την θεωρητική προσέγγιση, θα προσπαθήσουμε να επεξηγήσουμε βασικές αρχές ηλεκτροστατικής και μαγνητοστατικής καθώς και να περιγράψουμε θεμελιακούς νόμους (όπως του Ampere, του Faraday, του Biot-Savart, του Coulomb κτλ) ακολουθούμενων κάποιων απλών παραδειγμάτων. Τέλος η μέθοδος που ακολουθεί βασίζεται στην χρήση του λογιστικού εργαλείου Excel 2003. Μέσω λοιπόν συγκεκριμένης βηματολογίας θα ολοκληρώσουμε συναρτήσεις με τους κανόνες του τραπεζοειδούς και του Simpson, θα υπολογίσουμε το μέτρο και την διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου φορτισμένης ράβδου και δακτυλίου καθώς και το δυναμικό τους. Θα επιλύσουμε την εξίσωση Poisson και θα την αποδώσουμε γραφικά. Θα μελετήσουμε αγωγούς και διηλεκτρικά, θα υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου δακτυλίου και θα το απεικονίσουμε. Τέλος θα αποδώσουμε σε γράφημα την μαγνητική επαγωγή του πηνίου και του πηνίου Helmholtz.

Η συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία είναι κατά κύρια βάση μια ηλεκτρονική εργασία. Τα δεδομένα, οι λύσεις και τα συμπεράσματα είναι αποθηκευμένα σε αρχεία Microsoft Excel. Για λόγους κατανόησης των προβλημάτων παραθέτουμε στο 4^ο κεφάλαιο κάποια εκτενή παραδείγματα εκτυπωμένα όπως ακριβώς εμφανίζονται στην επιφάνεια εργασίας του Excel, με παρατηρήσεις και σχόλια. Θέλουμε να διευκρινίσουμε ότι αυτά τα παραδείγματα αποτελούν μια προσπάθεια εξομοίωσης στο χαρτί μιας και είναι αδύνατο να αποτυπωθούν και να επεξηγηθούν όλα τα ηλεκτρονικά δεδομένα οι τρόποι κωδικοποίησης και οι γλώσσες “μηχανής”.

Ο καλύτερος τρόπος που συνιστά την κατανόηση της εν λόγω εργασίας, απαιτεί, το **συνδυασμό** χρήσης του Excel και συνάμα τη μελέτη του θεωρητικού κομματιού που υπάγεται στην παρούσα εργασία.

Η εργασία αποτελείται από **4 Κεφάλαια**.

Το **1^ο Κεφάλαιο: Μια πρώτη γνωριμία με το Excel**, ουσιαστικά αποτελεί μια εισαγωγή στο «χώρο» του Excel. Αποπειράται, μια πρώτη επαφή με τις βασικές, πλην, σημαντικές έννοιες όπως: δημιουργία βιβλίων και φύλλων εργασίας, αναφορές κελιών, αντιγραφές, επικολλήσεις και μετακινήσεις κελιών, συναρτήσεις και μαθηματικοί τύποι όπως και γραφικές παραστάσεις.

Στο **2^ο Κεφάλαιο: Τι μας περιγράφει η Ηλεκτροστατική**, αναλύονται και επεξηγούνται οι βασικές αρχές της ηλεκτροστατικής όπως: ο νόμος του Coulomb, η έννοια της έντασης, το ηλεκτρικό δυναμικό η εξίσωση Poisson, αγωγοί και διηλεκτρικά καθώς και παραδείγματα επί αυτών.

Στο **3^ο Κεφάλαιο: Τι μας περιγράφει η Μαγνητοστατική**, αναλύονται και επεξηγούνται οι βασικές αρχές της μαγνητοστατικής όπως: ο νόμος του Biot-Savart, του Faraday, του Ampere οι πηγές μαγνητικού πεδίου. Ακολουθεί παράδειγμα στο μαγνητικό πεδίο ενός ρευματοφόρου αγωγού.

Στο **4^ο Κεφάλαιο: Φυσική με το Excel**, ουσιαστικά γίνεται μια εξομοίωση κάποιων κατατοπιστικών παραδειγμάτων στο χαρτί. Η εξομοίωση αυτή, στόχο έχει, να βοηθήσει τον αναγνώστη να καταλάβει τα βήματα και την μεθοδολογία των ασκήσεων μέσω Excel. Αυτό το κεφάλαιο στην πραγματικότητα αποτελεί την πεμπτουσία της εργασίας. Θα ανακαλύψουμε την δυνατότητα που μας παρέχεται, στο να επεξεργαστούμε τα δεδομένα και να καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα. Ωστόσο, η πληθώρα συμπερασμάτων που προκύπτει, αποτελεί από μόνη της μια πρόκληση.

Το τελικό στάδιο της εργασίας περιλαμβάνει τα συμπεράσματα που προήλθαν από την εργασία.

Περίληψη

Μπορεί η πιο διαδεδομένη χρήση ενός υπολογιστή να είναι η επεξεργασία κειμένου, αλλά η πιο "φυσική" εργασία που μπορεί να επιτελέσει ο υπολογιστής είναι αυτή των μαθηματικών υπολογισμών. Τα προγράμματα μαθηματικών τα οποία διατίθενται στην αγορά είναι πολλά και καλύπτουν τους περισσότερους τομείς αυτής της τόσο ευρείας επιστήμης. Ωστόσο, τέτοιου είδους λογισμικό στοχεύει σε ένα κοινό επιστημόνων με ειδικές απαιτήσεις και όχι στους απλούς χρήστες.

Τα λογισμικά πακέτα που βρίσκονται στην διάθεση της επιστήμης εξελίσσονται συνεχώς. Η πτυχιακή εργασία που περιγράφεται θα μπορούσε να είχε διαμορφωθεί πριν λίγα χρόνια με τη χρήση ενός άλλου πακέτου λογιστικών φύλλων όπως το **Lotus 1-2-3** ή το **Framework**. Η παρόν εργασία βασίζεται στην ελληνική έκδοση του πακέτου **Excel 2003** γιατί είναι το πιο ευέλικτο λογισμικό εργαλείο για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας.

Το λογιστικό πακέτο **Excel** κατασκευάστηκε από την εταιρία Microsoft για την αντιμετώπιση λογιστικών αναγκών σε εμπορικές επιχειρήσεις. Πολύ σύντομα έγινε αντιληπτή η ισχυρή υπολογιστική του ικανότητα και ευελιξία. Είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί σε καθαρά επιστημονικούς υπολογισμούς. Με το **Excel** μπορεί κανείς να ταξινομήσει, να διαχειριστεί και να χρησιμοποιήσει για υπολογισμούς έναν τεράστιο όγκο δεδομένων, έχοντας παράλληλα ως σύμμαχο τις ευκολίες που παρέχουν όλες οι παραθυρικές εφαρμογές. Επίσης μπορούμε χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα για παρασκευή γραφικών παραστάσεων και εξομοίωση γραφημάτων σε τρισδιάστατο περιβάλλον.

Σκοπός της εργασίας είναι να κάνουμε φυσική, χρησιμοποιώντας τον ηλεκτρονικό υπολογιστή ως εργαλείο. Έτσι θα χρησιμοποιήσουμε τις δυνατότητες του **Excel** για να βρούμε π.χ. την αναλυτική μορφή μιας συνάρτησης f μέσα σε κλάσματα δευτερολέπτου, κατ' επέκταση να

υπολογίσουμε το ηλεκτροστατικό και το μαγνητοστατικό πεδίο ενός δίσκου, δακτυλίου ή ρευματοφόρου αγωγού μέσα σε προκλητικά μικρό χρόνο.

Ο κύριος όγκος της εργασίας μαζί με τα αποτελέσματα και την επεξεργασία αποτελούν ηλεκτρονικό υλικό. Αυτό σημαίνει ότι είναι αποθηκευμένα σε ηλεκτρονικά αρχεία και η πρόσβαση σε αυτά απαιτεί ηλεκτρονικό υπολογιστή και χρήση του προγράμματος **Microsoft Excel**. Στόχος λοιπόν αυτής της εργασίας δεν είναι η εισαγωγή του αναγνώστη σε λειτουργικό περιβάλλον Η/Υ ή εκμάθηση βασικών αρχών λογιστικών προγραμμάτων. Θεωρούμε ότι οι αναγνώστες κατέχουν ήδη το βασικό επίπεδο χρήσης Η/Υ και του λογιστικού προγράμματος **Microsoft Excel**.

Συμπερασματικά, αναλύοντας κανείς αυτή τη πτυχιακή εργασία θα μπορούσε να πει ότι για τον αναλυτικό υπολογισμό - χωρίς χρήση Η/Υ - ολοκληρωμάτων και σύνθετων πράξεων θα χρειαζόντουσαν αρκετά χρόνια αλάθητων πράξεων από ομάδες μαθηματικών. Έτσι με το **Excel** αφιερώνουμε όλο μας τον χρόνο για την μελέτη και κατανόηση προβλημάτων του ηλεκτρομαγνητισμού, χωρίς να χρονοτριβούμε λύνοντας μαθηματικές πράξεις.

Περιεχόμενα

	Σελίδα
Εισαγωγή	1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: Μια πρώτη γνωριμία με το Excel

1.1	Εισαγωγή	5
1.2	Βιβλία φύλλα και κελιά	5
1.3	Αναφορά σε κελιά	6
1.4	Επιλογή, αντιγραφή και μετακίνηση κελιών	9
1.5	Μαθηματικοί τύποι	10
1.6	Συναρτήσεις του Excel	14
1.7	Γραφικές Παραστάσεις	15
1.8	Η Γλώσσα Visual Basic	16

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: Τι μας περιγράφει η ηλεκτροστατική

2.1	Το Ηλεκτροστατικό Πεδίο	17
2.1.1	Εισαγωγή	17
2.1.2	Το ηλεκτρικό φορτίο	18
2.1.3	Ο Νόμος του Coulomb	19
2.1.4	Το Ηλεκτρικό Πεδίο	21

2.1.5	Παράδειγμα πάνω στο νόμο του Coulomb	26
2.2	Ένταση ηλεκτρικού πεδίου	30
2.2.1	Ένταση	30
2.2.2	Δυναμικές γραμμές	31
2.2.3	Ο στροβιλισμός του E	32
2.2.4	Παράδειγμα στην ένταση του ηλεκτρικού πεδίου	34
2.3.1	Ηλεκτρικό δυναμικό	35
2.3.2	Παράδειγμα στο ηλεκτρικό δυναμικό	42
2.4	Εξίσωση Poisson και εξίσωση Laplace	44
2.5	Αγωγοί και διηλεκτρικά	45
2.5.1	Αγωγοί	45
2.5.2	Χωρητικότητα	45
2.5.3	Πυκνωτές με διηλεκτρικά	47
2.5.4	Παράδειγμα στους πυκνωτές	49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο: Μαγνητοστατική

3.1	Εισαγωγή – Μαγνητισμός	50
3.2	Ο νόμος των Ampere και Maxwell	62
3.3	Ο νόμος του Faraday (ηλεκτρομαγνητική επαγωγή)	68
3.4	Ο νόμος BIOT - SAVART	71
3.5	Πηγές μαγνητικού πεδίου	73
3.6	Παράδειγμα στο μαγνητικό πεδίο ενός ρευματοφόρου αγωγού	80

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: Φυσική με το Excel

4.1	Εισαγωγή	83
4.2	Αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων	84
4.3	Εργαστηριακή Άσκηση 2.1	84
4.4	Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ράβδου	91
4.5	Εργαστηριακή Άσκηση 3.1	93
4.6	Η μαγνητική Επαγωγή Ευθύγραμμου ρευματοφόρου Αγωγού	99
4.7	Εργαστηριακή Άσκηση 7.1	100
	Γραφικές παραστάσεις	108
	Συμπεράσματα	132
	Βιβλιογραφία	133

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Μια πρώτη γνωριμία με το Excel

1.1 Εισαγωγή

Στην σύγχρονη πανεπιστημιακή εκπαίδευση, ιδιαίτερα στις Σχολές Θετικών επιστημών και στις Πολυτεχνικές σχολές, έχει καθιερωθεί η εισαγωγή του φοιτητή σε μεθόδους ηλεκτρονικού υπολογιστή ήδη από το πρώτο εξάμηνο. Είναι επομένως πιθανόν πολλοί από τους αναγνώστες του παρόντος βιβλίου να είναι ήδη εξοικειωμένοι με το πακέτο Excel. Στο κεφάλαιο αυτό θα επιστήσουμε την προσοχή μας σε κάποιες βασικές ιδιότητες του Excel τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε επαλληλιημένως στα επόμενα κεφάλαια αυτού του βιβλίου.

1.2 Βιβλία φύλλα και κελιά

Το Excel δημιουργεί αρχικά ένα **Βιβλίο** με μερικά **Φύλλα**. Στο Βιβλίο δίνεται αυτόματα ο τίτλος «βιβλίο 1», ενώ τα Φύλλα διακρίνονται με τις ονομασίες «φύλλο 1», «φύλλο 2», κλπ. Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να μετονομάσουμε τον τίτλο ενός βιβλίου ώστε να ανταποκρίνεται καλύτερα στο θέμα μας. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να μετονομάσουμε και τα φύλλα μας. Μπορούμε ακόμα να διαγράψουμε, να προσθέσουμε νέα φύλλα ή και να τα μεταφέρουμε από το ένα βιβλίο στο άλλο.

Κάθε φύλλο του Excel είναι διαγραμματισμένο σε **στήλες** και **σειρές**, όπως ακριβώς και τα παλιά λογιστικά βιβλία. Η τομή μια σειράς με μια στήλη δημιουργεί ένα **κελί**, όπου μπορεί να καταχωρηθεί ένας αριθμός μια ημερομηνία ή να υπολογιστή η αριθμητική τιμή ενός μαθηματικού τύπου ή μια συνάρτησης.

Μπορείτε να επιλέξετε ένα συγκεκριμένο κελί με το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού. Το Excel διερευνά την φύση της πληροφορίας που

πληκτρολογήσατε και στην συνέχεια ερμηνεύει ανάλογα τα δεδομένα που εισάγατε. Αν πληκτρολογήσετε έναν αριθμό, το Excel αποθηκεύει την αριθμητική τιμή και μπορεί να την χρησιμοποιήσει σε υπολογισμούς.

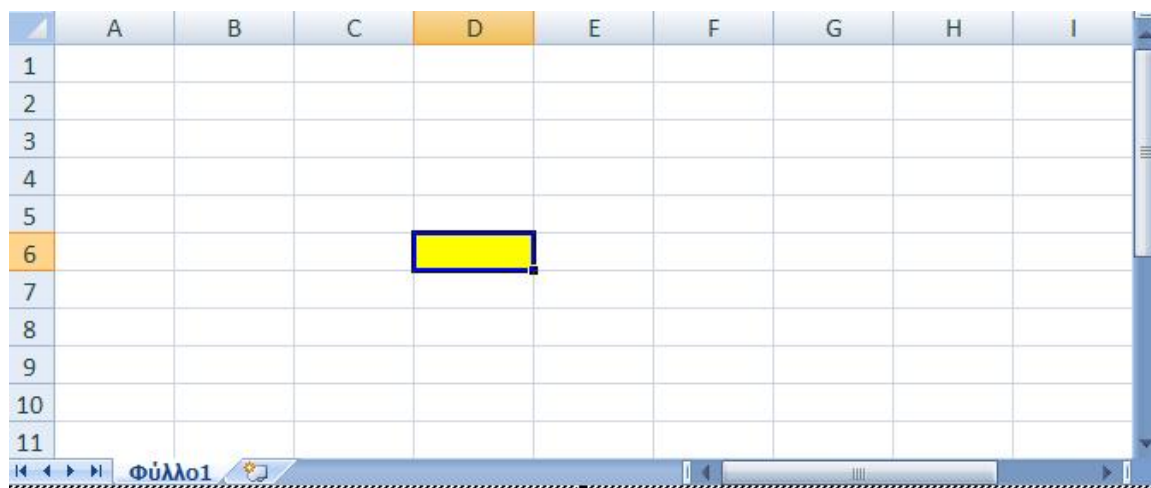
Σημαντικό : εάν πληκτρολογήσετε ένα μίγμα αριθμών και γραμμάτων ,η πληροφορία αυτήν θα αποθηκευτεί σαν κείμενο. Αν η πληκτρολόγηση αρχίζει με το σύμβολο (=) , το Excel , αποθηκεύει το περιεχόμενο του κελιού ως μαθηματικό τύπο.

Κάθε κελί ενός φύλλου χαρακτηρίζεται από δύο ιδιότητες: το περιεχόμενο και την τιμή του. Το περιεχόμενο είναι ότι πληκτρολογείτε στο κελί και η τιμή του είναι ότι εμφανίζεται στην οθόνη . Για κείμενο και αριθμούς το περιεχόμενο και η τιμή ταυτίζονται. Για μαθηματικούς τύπους, το περιεχόμενο είναι το κείμενο που πληκτρολογήσατε και η τιμή είναι το αποτέλεσμα, υπό μορφή αριθμού, που εμφανίζεται στην οθόνη.

Επιλέγοντας ένα κελί ή μια ομάδα κελιών μπορείτε να μορφοποιήσετε την εμφάνιση τους με τα ανάλογα εικονίδια στην γραμμή εργαλείων. Μπορείτε να στοιχίσετε την τιμή που εμφανίζεται στην οθόνη αριστερά, δεξιά ή στο κέντρο του κελιού. Μπορείτε να εμφανίζετε τους χαρακτήρες ως πλάγιους , έντονους η υπογραμμισμένους. Τέλος , μπορείτε να τονίσετε ένα η περισσότερα κελιά με περίγραμμα , σκίαση ή απόχρωση της επιλογής σας. Η μορφοποίηση ενός κελιού δεν επηρεάζει το περιεχόμενο του.

1.3 Αναφορά σε κελιά

Ένα κελί του Excel μπορεί να αναφέρεται στο περιεχόμενο ενός άλλου κελιού μέσω συντεταγμένων του δευτέρου στο ίδιο η σε άλλο φύλλο. Όπως φαίνετε στο σχήμα 1-1, οι στήλες ενός φύλλου αριθμούνται σύμφωνα με την διαδοχή του Αγγλικού αλφαβήτου (A,B,C,.....) από αριστερά προς τα δεξιά, ενώ οι σειρές με την διαδοχή των φυσικών αριθμών (1,2,3...) από τα άνω προς τα κάτω. Έτσι στην επόμενη εικόνα το γραμμοσκιασμένο κελί αναφέρεται ως το κελί D6.



Σχήμα 1-1

Η αναφορά ενός κελιού σε ένα άλλο είναι η απλούστερη δυνατή που μόλις περιγράψαμε. Αν για παράδειγμα στο κελί G3 υπάρχει αποθηκευμένη η τιμή 3,17 και στο κελί H7 πληκτρολογηθεί

=G3

το κελί H7 θα εμφανίσει την τιμή 3,17. η αναφορά μπορεί να αφορά κελί άλλου φύλλου. Η σύνταξη είναι :

Όνομα φύλλου!ΣτήληΓραμμή

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να αναφερθούμε στο κελί που βρίσκεται στο φύλλο Πεδίο με συντεταγμένες G4, η αναφορά είναι :

Πεδίο!G4

Μια σημαντική, και ιδιότητα του προηγούμενου τρόπου αναφοράς σε ένα κελί είναι ότι η αναφορά έχει σχετικό χαρακτήρα. Αν, όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα,

The image shows a screenshot of a Microsoft Excel spreadsheet. The grid has columns labeled A through I and rows labeled 1 through 11. Cell B3 is highlighted in yellow. Cell D5 is also highlighted in yellow and contains the formula '=B3'. The column header 'D' is highlighted in orange, and the row header '5' is highlighted in orange.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4									
5				=B3					
6									
7									
8									
9									
10									
11									

Σχήμα 1-2

Στο κελί D6 πληκτρολογούμε την ένδειξη =B3, τούτο δεν σημαίνει ότι αναφερόμαστε απαραίτητα στο κελί που βρίσκεται στην στήλη B και στην σειρά 3. Σημαίνει ότι στο κελί D6 θα εμφανιστεί το περιεχόμενο του κελιού με συντεταγμένες 2 στήλες αριστερότερα και 3 σειρές πιο πάνω από το κελί D6. Η σχετική αυτή αναφορά σε συντεταγμένες μπορεί να μετατραπεί σε απόλυτη αναφορά με την χρήση του συμβόλου \$ Πχ, η αναφορά \$F\$7 αφορά το κελί που όντως βρίσκεται στη στήλη F και στην σειρά 7. Κατά τον ίδιο τρόπο, αναφορές μπορούν να έχουν μεικτό χαρακτήρα. Αν για παράδειγμα, το κελί D6 περιέχει την αναφορά \$B5, αυτήν αφορά το κελί D6, ενώ η αναφορά H\$11 αφορά το κελί που βρίσκεται τέσσερις στήλες δεξιότερα και στη σειρά 11. Ο χαρακτήρας της αναφοράς σε ένα κελί, όπως θα δούμε αμέσως στη συνέχεια, παίζει ρόλο κατά την αντιγραφή ή μεταφορά του περιεχομένου κελιών.

1.4 Επιλογή, αντιγραφή και μετακίνηση κελιών

Όπως ήδη αναφέρθηκε, μπορείτε να επιλέξετε ένα κελί με το αριστερό του ποντικιού. Ένα επιλεγμένο κελί εμφανίζεται στην οθόνη με μαύρο χρώμα. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορείτε να επιλέξετε μια περιοχή κελιών κρατώντας πατημένο το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού και σύροντας κατάλληλα το ποντίκι. Στο συμβολισμό του Excel, μια περιοχή σημειώνεται με το σημείο της άνω και της κάτω γραμμής (:). Για παράδειγμα, η περιοχή που ορίζεται από την τομή των στηλών C έως F και των σειρών 9 έως 14 σημειώνεται από την περιοχή C9:F14. Μια επιλεγμένη περιοχή εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή με μαύρο χρώμα, εκτός από το άνω αριστερά κελί, το οποίο εμφανίζεται με λεύκη σκίαση και μαύρο περίγραμμα (κανείς εκτός από τους κατασκευαστές του Excel δεν γνωρίζει γιατί συμβαίνει το τελευταίο!) .Το περιεχόμενο των κελιών μπορεί να υποστεί αντιγραφή, αποκοπή και επικόλληση, όπως και στους περισσότερους κειμενογράφους. Με την επιλογή από τα μενού :

Επεξεργασία → Αποκοπή

ή

Επεξεργασία → Αντιγραφή

το περιεχόμενο του κελιού ή της περιοχής κελιών που έχουν επιλεγεί αντιγράφεται στο πρόχειρο των windows. Στην πρώτη περίπτωση εξαφανίζεται από τα επιλεγμένα κελιά, ενώ στην δεύτερη απλώς αντιγράφεται και παραμένει στην αρχική θέση. Σε μια επόμενη επιλογή από τα μενού :

Επεξεργασία → Επικόλληση

το περιεχόμενο στο πρόχειρο μεταφέρεται σε κάποιο άλλο κελί ή περιοχή που έχει στο μεταξύ επιλεγεί με τον τρόπο αυτό μπορείτε να αντιγράψετε ή να μεταφέρετε το περιεχόμενο ενός κελιού σε ένα άλλο ή το περιεχόμενο ενός κελιού σε μια περιοχή κελιών. Μπορείτε ακόμη να αντιγράψετε ή να

μεταφέρετε το περιεχόμενο μιας περιοχής σε μία άλλη. Στην τελευταία περίπτωση όμως υπάρχουν και ορισμένοι κανόνες που πρέπει να τηρηθούν ως προς το σχήμα και το μέγεθος των περιοχών.

Πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα ότι κατά την μεταφορά της πληροφορίας από το ένα κελί στο άλλο, μεταφέρεται το περιεχόμενο του κελιού και όχι απαραίτητα η τιμή του. Αν οι δύο ιδιότητες του κελιού ταυτίζονται, όπως στην περίπτωση αριθμού ή κειμένου, τότε το περιεχόμενο και η τιμή του θυγατρικού κελιού επίσης ταυτίζονται με τις αντίστοιχες ιδιότητες του μητρικού. Αν όμως το περιεχόμενο του μητρικού κελιού περιέχει μια σχετική αναφορά, η τιμή που θα προκύψει μετά την μεταφορά μπορεί να αλλάξει. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την περίπτωση όπου το κελί D6 περιέχει την ένδειξη =B3 και στο κελί B3 είναι αποθηκευμένος ο αριθμός 4.372. Η τιμή που θα εμφανιστεί στο κελί D6 είναι επίσης ο αριθμός 4.372. Αν τώρα αντιγράψετε το κελί D6 στο κελί F7 το Excel θα μεταφράσει την ένδειξη =B3 ως το «περιεχόμενο του κελιού με συντεταγμένες 2 στήλες αριστερότερα και 3 σειρές πιο πάνω από το κελί F7», δηλαδή το περιεχόμενο του κελιού D5- το οποίο μπορεί να μην είναι ο αριθμός 4.372.

Βεβαίως, διαφορετική θα είναι η συμπεριφορά αν η αναφορά που μεταφέρεται είναι απόλυτη. Για να συνεχίσουμε το προηγούμενο παράδειγμα, αν το κελί D6 περιέχει τη ένδειξη =\$B\$3, η τιμή που θα εμφανιστεί μετά την μεταφορά στο κελί F7 θα είναι επίσης 4.372. Επαφίεται στον αναγνώστη να προσδιορίσει ποιο θα είναι το αποτέλεσμα μεταφοράς μικτών αναφορών, όπως =\$B3 ή =B\$3.

1..5 Μαθηματικοί τύποι

Το περιεχόμενο ενός κελιού μπορεί να είναι ένας **μαθηματικός τύπος**, δηλαδή μια αλγεβρική έκφραση που περιέχει αριθμούς, μεταβλητές και σύμβολα αλγεβρικών πράξεων. Στην περίπτωση αυτή η τιμή του κελιού που εμφανίζεται στην οθόνη είναι η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής έκφρασης μετά την εκτέλεση όλων των πράξεων. Το Excel αντιλαμβάνεται ότι το κείμενο

που πληκτρολογήσατε αποτελεί μαθηματικό τύπο από το σημείο «ίσον» (=) που πρέπει να προτάξετε στην όλη έκφραση. Αν το σημείο «ίσον» λείπει, το Excel εκλαμβάνει την έκφραση ως κείμενο.

Η σύνταξη ενός μαθηματικού τύπου σε μια γλώσσα που αντιλαμβάνεται το Excel είναι εξαιρετικά απλή – πηγάζει σχεδόν αυθόρμητα από τη διαίσθησή σας. Είναι βέβαιο ότι σύντομα θα εκπλαγείτε με την ευκολία που θα διαπιστώσετε κατά τη σύνταξη και των πλέον περίπλοκων αλγεβρικών εκφράσεων. Για να είναι έγκυρος ένας μαθηματικός τύπος και α είναι δυνατή η εύρεση της αριθμητικής τιμής θα πρέπει να τηρηθούν ορισμένοι απλοί κανόνες:

1. Η αριθμητική τιμή όλων των μεταβλητών πρέπει να έχει οριστεί εκ των προτέρων, δηλαδή να βρίσκεται αποθηκευμένη σε κάποιο κελί του Excel. Αν, για παράδειγμα η αλγεβρική έκφραση περιέχει τη μεταβλητή x , η τιμή του x πρέπει να είναι διαθέσιμη, π.χ. αποθηκευμένη στο κελί B2.
2. Όλες οι αλγεβρικές πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών πρέπει να αναγράφονται διεξοδικά. Για παράδειγμα, η συνήθης συντόμευση στην άλγεβρα $3x$ αναγνωρίζεται από το Excel ως κείμενο. Αν θέλετε να αποτελέσει μέρος μαθηματικού τύπου, θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε το σημείο του πολλαπλασιασμού (*) και να γράψετε $2*x$.

Τα σύμβολα που αναγνωρίζει το Excel ως τελεστές αλγεβρικών πράξεων περιέχονται στον Πίνακα 1-1.

Με τις απλές αυτές οδηγίες πρέπει να είστε τώρα έτοιμοι να συντάξετε τον πρώτο σας μαθηματικό τύπο στη γλώσσα του Excel. Θεωρείστε, ως πρώτο παράδειγμα, το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$5x^2 - 7x + 4 \quad (1.1)$$

Όπου η τιμή του x είναι αποθηκευμένη στο κελί B2 του ίδιου Φύλλου. Χωρίς μεγάλη δυσκολία είναι βέβαιο ότι θα γράψετε

$$=5*B2^2-7B2+4 \quad (1.2)$$

Πίνακας 1-1 Τελεστές αλγεβρικών πράξεων στο Excel και βαθμός προτεραιότητας.

<u>Τελεστής</u>	<u>Αλγεβρική πράξη</u>	<u>Προτεραιότητα</u>
Αρνητική τιμή	-	1
Ύψωση σε δύναμη	^	2
Πολλισμός	*	3
Διαίρεση	/	3
Άθροισμα	+	4
Αφαίρεση	-	4
Ισότητα	=	5
Μικρότερο από	<	6
Μεγαλύτερο από	>	6
Μικρότερο ή ίσο	<=	6
Μεγαλύτερο ή ίσο	>=	6
Διάφορο	<>	6

Αν το Excel συναντήσει την τελευταία έκφραση, θα εκτελέσει όλες τις αλγεβρικές πράξεις και στο κελί θα εμφανιστεί η αριθμητική τιμή του αποτελέσματος.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1-1, το Excel έχει υιοθετήσει εσωτερικά ορισμένους κανόνες για τη διαδοχή εκτέλεσης αλγεβρικών πράξεων. Κατά την εύρεση της αριθμητικής τιμής μιας αλγεβρικής έκφρασης οι πράξεις εκτελούνται με τη σειρά που επιβάλλει ο βαθμός προτεραιότητας στον Πίνακα 1-1. Για παράδειγμα, στη εξ. (1.2) θα εκτελεστεί πρώτα η ύψωση της τιμής του κελιού B2 στο τετράγωνο, θα ακολουθήσουν οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και στο τέλος θα εκτελεστούν οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης .

Αν δυο πράξεις έχουν τον ίδιο βαθμό προτεραιότητας, θα εκτελεστούν διαδοχικά από δεξιά προς τα αριστερά.

Ο βαθμός προτεραιότητας εκτέλεσης αλγεβρικών πράξεων από το Excel μπορεί να ορισμένες φορές να οδηγήσει σε διάφορο αποτέλεσμα από επιθυμητό. Θεωρείστε για παράδειγμα, την αλγεβρική έκφραση

$$\frac{3x^2 + 5}{x - 1} \quad (1.3)$$

με την τιμή της μεταβλητής x αποθηκευμένη στο κελί A4. Χωρίς πολύ σκέψη θα μπορούσε κανείς να τη μεταφράσει ως

$$=3*A4^2+5/A4-1 \quad (1.4)$$

Το Excel όμως, όπως μόλις είδαμε, θα εκτελέσει τις πράξεις της εξ. (1.4) με την εξής σειρά: Θα υψώσει πρώτα την τιμή του κελιού A4 στο τετράγωνο. Στη συνέχεια θα διαιρέσει τον αριθμό 5 με την τιμή του κελιού A4 και θα πολλαπλασιάσει την τιμή του $(A4)^2$ με τον αριθμό 3. Τέλος θα προσθέσει τα δύο αποτελέσματα του δευτέρου σταδίου και θα αφαιρέσει τον αριθμό 1. Η αλγεβρική έκφραση επομένως που αντιστοιχεί στη σύνταξη της εξ. (1.4) είναι η

$$3x^2 + \frac{5}{x} - 1$$

Κάτι πολύ διαφορετικό απ' ότι αποσκοπούσε η εξ. (1.3). Πώς είναι επομένως δυνατόν να αλλάξουμε τη διαδοχή των πράξεων ώστε η σύνταξη στη γλώσσα του Excel να αντιπροσωπεύει την αλγεβρική έκφραση της εξ. (1.3); *Με τη χρήση παρενθέσεων.*

Η διεργασία που υπονοεί η εξ. (1.3) είναι η διαίρεση του διωνύμου $3x^2+5$ προς το διώνυμο $x-1$. Σε συμβολισμό μπορούμε να γράψουμε στη γλώσσα του Excel

$$=(3*A4^2+5)/(A4-1) \quad (1.4)$$

μια έκφραση που δεν επιδέχεται αμφισβήτηση ως προς τη διαδοχή των πράξεων. Η χρήση παρενθέσεων κατά τη σύνταξη ενός μαθηματικού τύπου είναι κάτι που μπορεί να αλλάξει καθοριστικά τη διαδοχή και σημασία των πράξεων. Ακόμη όμως και αν δεν επιφέρει καμιά αλλαγή στο τελικό αποτέλεσμα μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση του αποτελέσματος που επιδιώκεται.

Δυο παρατηρήσεις που αφορούν θέματα, τα οποία ίσως θα προκάλεσαν την περιέργεια του αναγνώστη είναι επιβεβλημένη. Κατά περίεργο τρόπο το Excel θεωρεί τον μετασχηματισμό ενός αλγεβρικού αριθμού στον αντίθετο του (με πρόσημο << - >>) ως μια ιδιαίτερη αλγεβρική πράξη – και μάλιστα στην εκτέλεσή της δίνει την πρώτη προτεραιότητα. Τούτο δεν συμβαίνει σε άλλες γλώσσες όπως στη FORTRAN ή στην Visual Basic. Έτσι, για παράδειγμα, στη γλώσσα του Excel, η έκφραση $=-1^2$ οδηγεί στο αριθμητικό αποτέλεσμα 1, ενώ, σε όλες τις άλλες γλώσσες το σημείο << - >> έχει την προτεραιότητα της αφαίρεσης και το αποτέλεσμα είναι 1. Στη γλώσσα του Excel η προηγούμενη έκφραση μπορεί να γίνει συμβατή προς τις άλλες γλώσσες του ηλεκτρονικού υπολογιστή αν γραφεί ως $=(-1)^2$.

1.6 Συναρτήσεις του Excel

Οι συναρτήσεις του Excel υπολογίζουν αθροίσματα αριθμών, τριγωνομετρικούς αριθμούς, λογαρίθμους, εκθετικές εκφράσεις, κτλ. Στη συνέχεια του βιβλίου θα αντλήσουμε από τη βιβλιοθήκη και θα μελετήσουμε εκεί τη χρήση κάθε συνάρτησης, όπου και όποτε οι ανάγκες μας για τη σύνταξη ενός μαθηματικού τύπου το απαιτούν. Μπορεί κανείς να περιεργαστεί τις διαθέσιμες συναρτήσεις στο μενού **Βοήθεια** του Excel.

Συναρτήσεις του Excel χρησιμοποιούνται λίγο, πολύ όπως και σε κάθε άλλη γλώσσα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Κατά τη σύνταξη ενός μαθηματικού τύπου, πληκτρολογείται το όνομα της συνάρτησης, ενώ μέσα σε παρενθέσεις

ακολουθούν οι μεταβλητές της συνάρτησης. Στην ελληνική έκδοση του Excel, οι μεταβλητές χωρίζονται με το σύμβολο του ερωτηματικού (;). Έτσι, η συνάρτηση SIN(A4) επιστρέφει το ημίτονο του αριθμού που βρίσκεται αποθηκευμένος στο κελί A4, ενώ η συνάρτηση LN(3*F6^2/4+1) επιστρέφει το φυσικό λογάριθμο της ποσότητας $\frac{3}{4} x^2 + 1$, όπου η τιμή του x βρίσκεται αποθηκευμένη στο κελί F6. Οι μεταβλητές μιας συνάρτησης μπορεί να είναι αριθμοί, αναφορές σε κελιά, μαθηματικοί τύποι ή άλλες συναρτήσεις. Αν η μεταβλητή μιας συνάρτησης δεν βρίσκεται μέσα στο εύρος τιμών που αναμένει η συνάρτηση (π.χ. αν προσπαθήσετε να βρείτε τον φυσικό λογάριθμο ενός αρνητικού αριθμού), το αποτέλεσμα είναι η διαγνωστική ένδειξη #ΑΡΙΘΜΟΣ!. Αν η μεταβλητή δεν έχει τη σωστή μορφή (έχει π.χ. τη μορφή κειμένου, ενώ η συνάρτηση αναμένει αριθμό) η ένδειξη στο αντίστοιχο κελί είναι #ΤΙΜΗ!.

1.7 Γραφικές Παραστάσεις

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε μια περιοχή τιμών των μεταβλητών της αυξάνει κατά πολύ την εποπτική μας ικανότητα. Το Excel διαθέτει ένα πλούσιο οπλοστάσιο λογισμικών εργαλείων για τη γρήγορη και εύκολη δημιουργία γραφημάτων σε δυο ή τρεις διαστάσεις.

1.8 Η Γλώσσα Visual Basic

Πέρα από τις συναρτήσεις που διατίθενται προς άμεση χρήση από το Excel, υπάρχει και η ευχέρεια ορισμού επί τούτου συναρτήσεων οποιασδήποτε μορφής. Από την 5η έκδοση του Excel και μετέπειτα η Microsoft έχει ενσωματώσει στο πακέτο ένα υποσύνολο της γλώσσας Visual Basic με την ονομασία Visual Basic Applications (VBA). Η σύνταξη στη γλώσσα VBA είναι παρόμοια με τη σύνταξη μαθηματικών τύπων του Excel, ενώ η δομή της

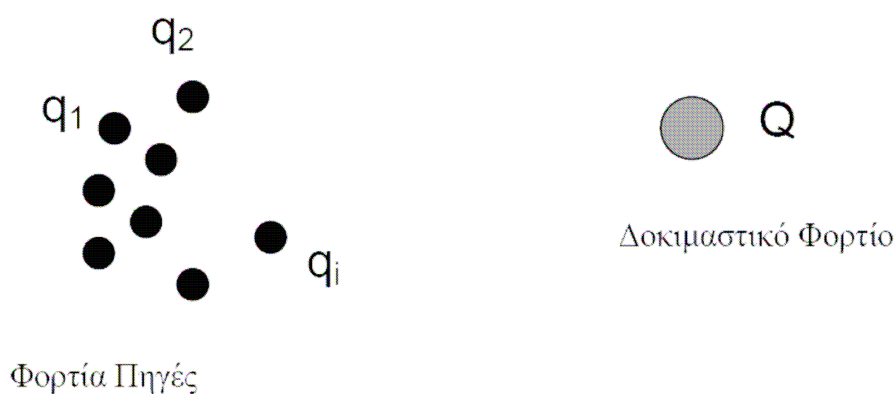
γλώσσας έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με προηγούμενες γλώσσες ηλεκτρονικού υπολογιστή όπως η FORTRAN.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Τι μας περιγράφει η ηλεκτροστατική

2.1 Το Ηλεκτροστατικό Πεδίο

2.1.1 Εισαγωγή

Το θεμελιώδες πρόβλημα της ηλεκτροστατικής θεωρίας είναι ο υπολογισμός της δύναμης που ασκεί μια ομάδα σημειακών ηλεκτρικών φορτίων q_1, q_2, \dots, q_N (φορτία πηγές) σε ένα φορτίο Q (δοκιμαστικό φορτίο).



Σχήμα 2.1

Τα φορτία – πηγές αλλά και το δοκιμαστικό φορτίο μπορούν να βρίσκονται σε κίνηση.

Με την βοήθεια της **αρχής της επαλληλίας** μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη αυτή. Σύμφωνα με την παραπάνω αρχή η αλληλεπίδραση μεταξύ 2 οποιανδήποτε σημειακών φορτίων δεν επηρεάζεται καθόλου από παρουσία άλλων φορτίων. Αυτό σημαίνει για να υπολογίσουμε την δύναμη στο Q μπορούμε πρώτα να υπολογίσουμε την δύναμη F_1 που οφείλεται στο q_1 μόνο (αγνοώντας όλα τα άλλα), μετά να υπολογίσουμε την δύναμη F_2 , που οφείλεται στο q_2 μόνο και ούτως καθεξής. Τέλος βρίσκουμε το διανυσματικό άθροισμα όλων των μεμονωμένων δυνάμεων $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$.

Η δύναμη στο Q δεν εξαρτάται μονάχα από την απόσταση που το χωρίζει από το κάθε φορτίο πηγή άλλα και από τις 2 ταχύτητες τους καθώς και από την επιτάχυνση του q. Λόγω του ότι τα «νέα» στον ηλεκτρομαγνητισμό ταξιδεύουν με την ταχύτητα

του φωτός, έτσι το Q το ενδιαφέρει η θέση, ταχύτητα και η επιτάχυνση που είχε το q όταν το μήνυμα έφυγε από αυτό.

Στην αρχή αυτού του μαθήματος θα θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση όπου όλα τα φορτία πηγές είναι ακίνητα (τα δοκιμαστικά φορτία μπορούν να κινούνται). Η κατάσταση αυτή είναι γνωστή ως **Ηλεκτροστατική**.

2.1.2 Το ηλεκτρικό φορτίο

Η μελέτη της αλληλεπιδράσεως μεταξύ των υλικών σωμάτων οδηγεί στην παραδοχή μιας φυσικής ποσότητας του ηλεκτρικού φορτίου. Μονάδα μέτρησης του φορτίου είναι το Coulomb.

Το ηλεκτρικό φορτίο έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Στην Φύση απαντούν δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου (δυσμός του ηλεκτρικού φορτίου). Τα ομόνυμα φορτία απωθούνται, ενώ τα ετερόνυμα έλκονται.
2. Η δύναμη ανάμεσα σε δυο ηλεκτρικά φορτία είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασης τους.
3. Το ηλεκτρικό φορτίο ενός μεμονωμένου συστήματος διατηρείται. Μεμονωμένο είναι εκείνο το σύστημα στο οποίο δεν γίνεται ανταλλαγή μάζας, άρα και φορτίου, με το περιβάλλον.
4. Το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένο, δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του φορτίου του ηλεκτρονίου ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Cb}$).

2.1.3 Ο Νόμος του Coulomb

Η δύναμη που ασκείται σε ένα σημειακό φορτίο Q από ένα άλλο σημειακό φορτίο q που ηρεμεί σε απόσταση r δίνεται από τον νόμο του Coulomb σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \quad (2.1)$$

Η σταθερά ϵ_0 ονομάζεται σταθερά του κενού. Στο S.I. η τιμή της σταθεράς αυτής είναι η παρακάτω

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \quad (2.2)$$

Για άλλα μέσα από το κενό, η σταθερά ϵ_0 στην σχέση (2.1) αντικαθίστανται από την όπου η $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ονομάζεται σχετική ηλεκτρική διαπερατότητα του μέσου (ένας καθαρός αριθμός). Σε όλα τα προβλήματα και παραδείγματα υποθέτουμε ότι έχουμε κενό και δεχόμαστε την προσεγγιστική τιμή του ϵ_0 εκτός αν δηλώνεται σαφώς κάτι διαφορετικό.

Ο νόμος του Coulomb μπορεί να εκφραστεί επίσης χρησιμοποιώντας την σταθερά του Coulomb k

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad (2.3)$$

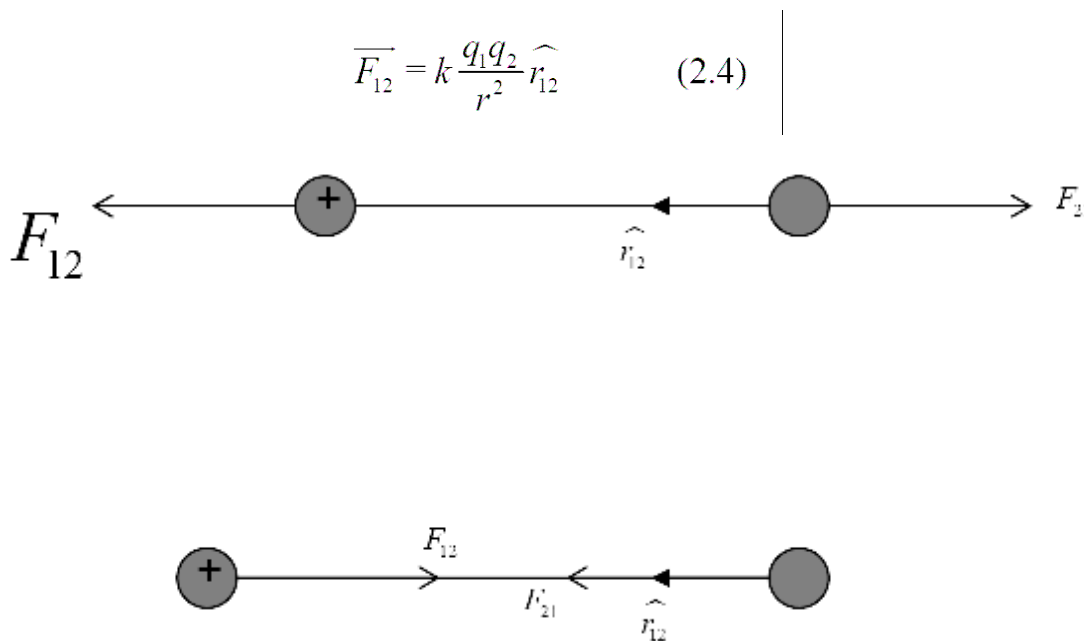
Στον παρακάτω πίνακα περιέχονται τα φορτία και οι μάζες του ηλεκτρονίου, του πρωτονίου και η μάζα του νετρονίου.

Σωματίδιο	Φορτίο (C)	Μάζα (Kg)
Ηλεκτρόνιο (e)	$-1.6021917 \times 10^{-19}$	9.1095×10^{-31}
Πρωτόνιο (p)	$1.6021917 \times 10^{-19}$	1.67261×10^{-27}
Νετρόνιο (n)	0	1.67492×10^{-27}

Όταν χρησιμοποιούμε τον νόμο του Coulomb δεν πρέπει να λησμονούμε ποτέ ότι η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος επομένως για να ορισθεί πλήρως θα πρέπει να καθοριστεί εκτός του μέτρου της η φορά και η διεύθυνση της. Να σημειωθεί επίσης ότι ο νόμος του Coulomb ισχύει ακριβώς μόνο για σημειακά φορτία.

Εάν συμβολίσουμε με \hat{r}_{12} το μοναδιαίο διάνυσμα που κατευθύνεται από το φορτίο q_2 στο στοιχειώδες φορτίο q_1 τότε συμβολίζοντας με F_{12} την ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το φορτίο q_2 στο q_1 , μπορούμε να γράψουμε την διανυσματική σχέση

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.2: Δύναμη Coulomb

Από 2^ο νόμο του Νεύτωνα η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται από το q_1 στο q_2 είναι ίση σε μέτρο με την δύναμη που ασκεί το φορτίο q_2 στο q_1 αλλά αντίθετη σε κατεύθυνση, δηλαδή $F_{12} = -F_{21}$.

Βλέπουμε ότι η σχέση που εκφράζει η δύναμη του Coulomb είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης που χωρίζει τα 2 φορτία. Επίσης η δύναμη του Coulomb είναι ανάλογη με το γινόμενο των φορτίων. Ασκείται κατά μήκος της ευθείας που ενώνει το Q με το q δηλαδή είναι μια κεντρική δύναμη. Είναι απωστική, όπως είπαμε και προηγουμένως, ανάμεσα σε ομόσημα φορτία και ελκτική ανάμεσα σε ετερόσημα φορτία.

Επίσης το μέτρο της δύναμης Coulomb εξαρτάται και από το μέσο στο οποίο είναι τοποθετημένα τα φορτία αφού μεταβάλλεται η τιμή της σταθεράς Coulomb άρα και το μέτρο της k

Οι δυνάμεις Coulomb είναι αρκετές τάξεις μεγέθους ισχυρότερες από τις δυνάμεις της παγκόσμιας έλξεως (βαρυτικές).

2.1.4 Το Ηλεκτρικό Πεδίο

Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου E (ή αλλιώς το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου) σε ένα τυχαίο σημείο του χώρου είναι εξ ορισμού ίσο προς το πηλίκο της δύναμης που ασκείται πάνω σε ένα δοκιμαστικό θετικό φορτίο q_0 , που βρίσκεται στο σημείο αυτό, δια του φορτίου αυτού, q_0 .

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (2.5)$$

Αντικαθιστώντας την δύναμη F από την σχέση (2.4) στην (2.5), παίρνουμε

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (2.6)$$

οπού Q είναι το φορτίο πηγή του ηλεκτρικού πεδίου E.

Να σημειωθεί ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου E περιγράφει το εξωτερικό προς το q_0 πεδίο, δηλαδή δεν περιγράφει το πεδίο που παράγει το ίδιο το q_0 . Από την σχέση (2.5) είναι εύκολο να εξαγάγουμε τις μονάδες μέτρησης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, που είναι το Nt/Cb .

Η διεύθυνση του E είναι η ίδια με αυτήν της δύναμης F. Το ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου ανεξάρτητα εάν τοποθετήσουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο στο σημείο αυτό. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μια ‘πραγματική’ φυσική οντότητα που γεμίζει τον χώρο γύρω από το ηλεκτρικό φορτίο.

Έστω τώρα ότι έχουμε πολλά σημειακά φορτία και θέλουμε να βρούμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο του χώρου P (δες παρακάτω σχήμα). Στο παρακάτω σχήμα έχουμε πολλά σημειακά φορτία q_1, q_2, \dots, q_N σε αποστάσεις r_1, r_2, \dots, r_N από το δοκιμαστικό φορτίο Q που υπάρχει στο σημείο P. Η ολική δύναμη που ασκείται στο Q θα είναι το **διανυσματικό άθροισμα** των δυνάμεων που ασκούν τα q_1, q_2, \dots, q_N στο Q. Δηλαδή

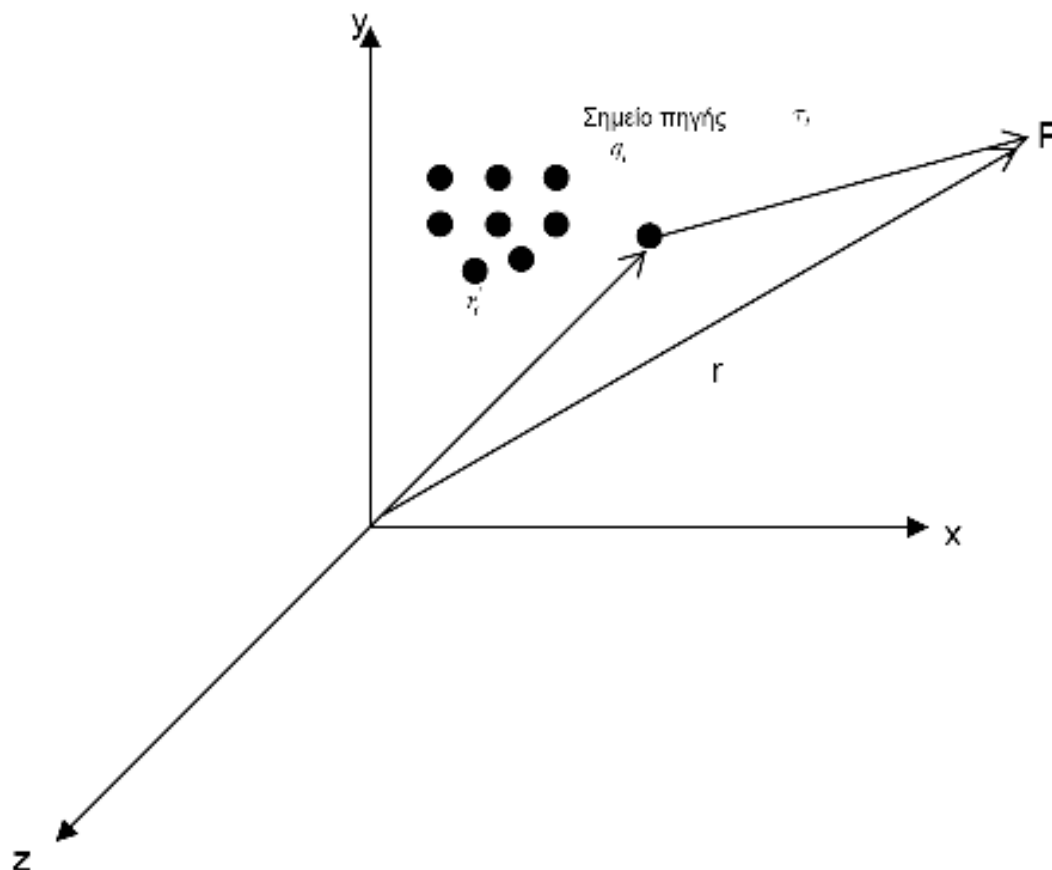
$$F = F_1 + F_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2 Q}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right) \quad (2.7)$$

Από σχέσεις (2.5), (2.7) μπορούμε να βγάλουμε το εξής αποτέλεσμα

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (2.8)$$

όπου το E είναι το ολικό ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν τα φορτία q_1, q_2, \dots, q_N στο σημείο P και είναι ίσο με το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργεί το κάθε στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο στο σημείο P

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (2.9)$$

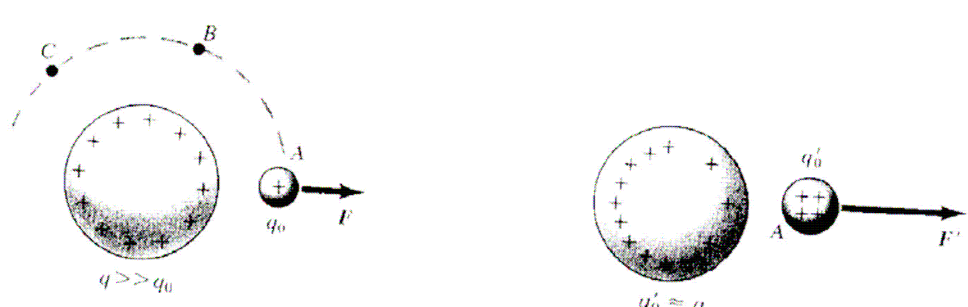


Σχήμα 2.3

Από την σχέση (2.9) βλέπουμε ότι το ολικό ηλεκτρικό πεδίο **εξαρτάται** από την θέση του σημείου P, και το σύστημα των φορτίων q_i και επίσης **δεν εξαρτάται** από το δοκιμαστικό φορτίο Q. Όπως είδαμε και παραπάνω η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ένα **διανυσματικό μέγεθος** και η ένταση μιας ομάδας σημειακών φορτίων υπολογίζεται κάνοντας χρήση της αρχής της υπέρθεσης.

Πρέπει να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι όταν εφαρμόζουμε την εξίσωση (2.5) και κατ' επέκταση την εξίσωση (2.9) θα πρέπει το δοκιμαστικό φορτίο q_0 να είναι επαρκώς μικρό έτσι ώστε να μην επηρεάζει την κατανομή φορτίου που δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν το δοκιμαστικό φορτίο έχει μεγάλη τιμή έτσι ώστε να επηρεάζει την κατανομή φορτίου τότε η δύναμη που ασκείται στο δοκιμαστικό φορτίο, άρα και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, σε ίσα απέχοντα σημεία από την

κατανομή δεν είναι η ίδια, όπως προβλέπει ο νόμος του Coulomb άλλα και η σχέση (2.9).

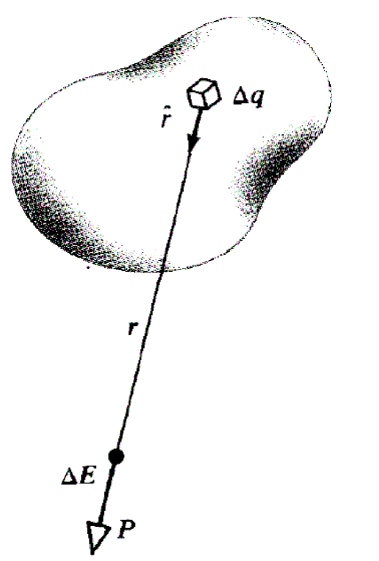


Σχήμα 2.4 (Serway ‘Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Παρατηρώντας το σχήμα 2.4, στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε την σχέση (2.5), (2.9) άλλα στην δεύτερη περίπτωση δεν μπορούμε μια και λόγω της ανακατανομής του φορτίου της πηγής του Η.Π. από το μεγάλο δοκιμαστικό φορτίο για το ίδιο σημείο A και για την ίδια κατανομή φορτίου ισχύει $F_A/q_0 \neq F_A/q'_0$.

Συχνά χρειάζεται να μελετήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείτε από συνεχή κατανομή φορτίου. Συνεχή κατανομή φορτίου λέμε ότι έχουμε όταν τα φορτία πηγές βρίσκονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο συγκριτικά με την απόσταση προς το σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο. Το πυκνό αυτό σύστημα ηλεκτρικών φορτίων είναι ισοδύναμο με μια συνεχή κατανομή φορτίων με το ίδιο συνολικό φορτίο κατανεμημένο στην ίδια περιοχή του χώρου ή μιας επιφάνειας.

Η μεθοδολογία που ακολουθούμε για να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου από συνεχή κατανομή φορτίου είναι η ακόλουθη και εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.5: Δημιουργία Ηλεκτροστατικού πεδίου από στοιχειώδες φορτίο
(Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Στο παραπάνω σχήμα χωρίζουμε την κατανομή μου σε πολλά απειροστά κομματάκια και αντιμετωπίζουμε το καθένα από αυτά σαν ένα διακριτό σημειακό φορτίο Δq . Κατόπιν χρησιμοποιούμε τον νόμο του Coulomb, σχέση (2.7), για να υπολογίσουμε το πεδίο που δημιουργεί στο σημείο P το καθένα από τα φορτία Δq . Τέλος βρίσκουμε το συνολικό πεδίο αθροίζοντας, ολοκληρώνοντας, διανυσματικά τα επιμέρους πεδία.

Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με ομογενής κατανομές φορτίου. Το φορτίο είναι ομογενές κατανομημένο πάνω σε μια ράβδο ή πάνω σε ένα δακτύλιο ή πάνω σε μια σφαίρα για παράδειγμα. Έτσι εισάγονται οι έννοιες τις γραμμικής, επιφανειακής και χωρικής πυκνότητας φορτίου. Οι ορισμοί των εννοιών αυτών είναι

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{Q}{l}$$

$$\sigma = \frac{dq}{dA} = \frac{Q}{A} \quad (2.10)$$

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{Q}{V}$$

Στην (2.10) ορίζονται η γραμμική, η επιφανειακή και η χωρική πυκνότητα τις συνεχούς κατανομής αντίστοιχα. Οι μονάδες μέτρησης των λ , σ και ρ είναι αντίστοιχα $Cb/m, Cb/m^2, Cb/m^3$. Το ολικό λοιπόν φορτίο πάνω σε μια συνεχή κατανομή φορτίου δίνεται από τις σχέσεις

$$\sum_{i=1}^n () q_i \sim \int_{\text{γραμμή}} () \lambda dl \sim \int_{\text{επιφάνεια}} () \sigma dA \sim \int_{\text{όγκος}} () \rho dV \quad (2.11)$$

Έτσι για παράδειγμα το ηλεκτρικό πεδίο μιας γραμμικής πυκνότητας, επιφανειακής και χωρικής πυκνότητας φορτίου χρησιμοποιώντας τις (2.9), (2.11) μπορεί να γραφεί ως

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{γραμμή}} \frac{\hat{r}}{r^2} \lambda dl$$

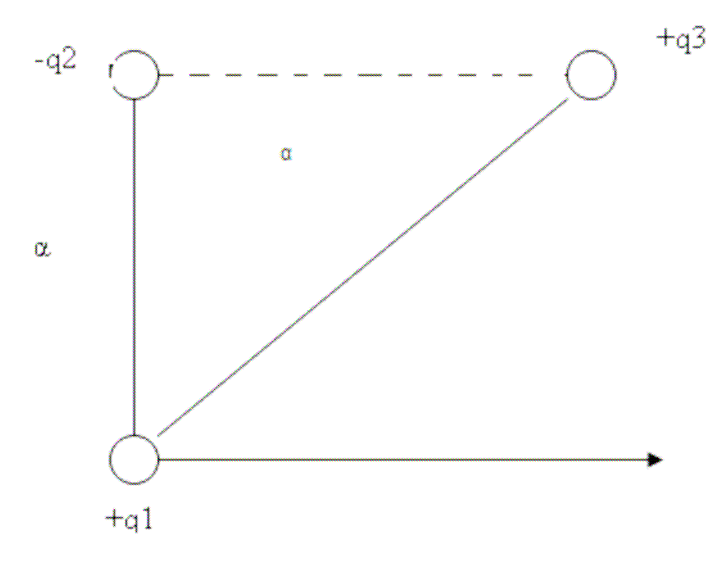
$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{επιφάνεια}} \frac{\hat{r}}{r^2} \sigma dA \quad (2.12)$$

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{όγκος}} \frac{\hat{r}}{r^2} \rho dV$$

2.1.5 Παράδειγμα πάνω στο νόμο του Coulomb

Θεωρήστε ότι 3 σημειακά φορτία κινούνται στις κορυφές ενός τριγώνου όπως στο παρακάτω σχήμα. Τα φορτία $q_1=q_3=5\mu C$ και $q_2= -2\mu C$ ($1\mu C=10^{-6} C$) και $a=6,1 m$. Βρείτε την συνισταμένη δύναμη στο q_3 .

Λύση

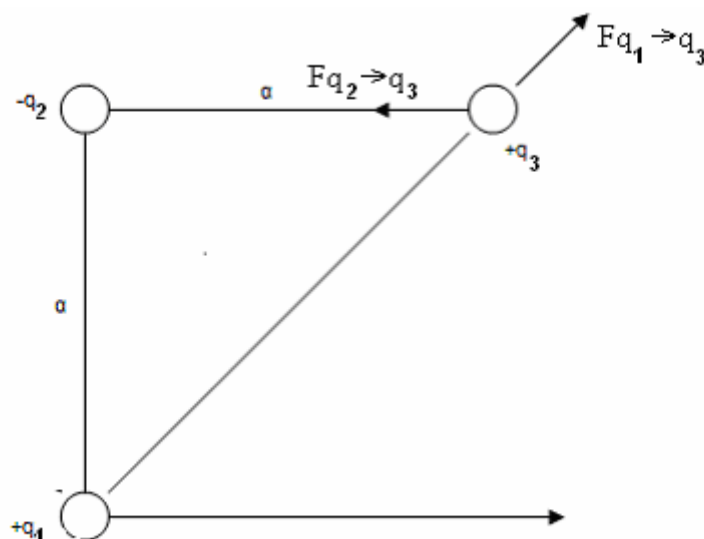


Σχήμα 2.6

Η δύναμη μεταξύ σημειακών φορτίων δίνεται από τον νόμο του Coulomb. Το μέτρο της δύναμης αυτής είναι:

$$F = k_{\eta\lambda} \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \quad (1)$$

Θα πρέπει να θυμάστε ότι ομώνυμα φορτία απωθούνται ενώ τα ετερόνυμα έλκονται. Επομένως :



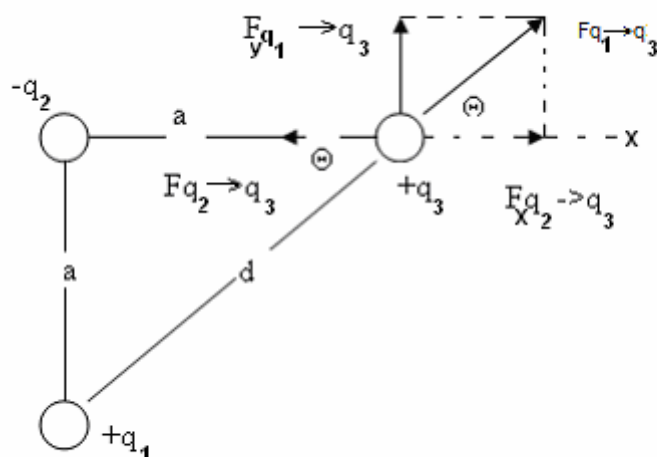
Σχήμα 2.7

Επίσης θα πρέπει να θυμάστε από την θεωρία ότι οι $F_{q_2 \rightarrow q_3}$, $F_{q_1 \rightarrow q_3}$ ενεργούν πάνω στην ευθεία που συνδέει τα 2 φορτία.

Λόγω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ολική δύναμη πάνω στο σημείο που βρίσκεται το q_3 θα πρέπει:

1. Να αναλύσω τις $F_{q_1 \rightarrow q_3}$, $F_{q_2 \rightarrow q_3}$ στις συνισταμένες τους στους άξονες X,Y.
2. Να υπολογίσω το μέτρο της κάθε συνισταμένης ΣF_x , ΣF_y κάνοντας χρήση της (1).
3. Υπολογίζω την ολική δύναμη.

Επομένως:



Σχήμα 2.8

Συνιστώσες $F_{q_1 \rightarrow q_3}$: **άξονας X**

$$F_{q_1 \rightarrow q_3x} = F_{q_1 \rightarrow q_3} \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{q_1 \rightarrow q_3x} = K_{ηλ} \frac{|q_1| |q_2|}{d^2} \cos \theta (2)$$

Από ορθογώνιο τρίγωνο παραπάνω σχήματος έχουμε :

$$\left. \begin{array}{l} \cos \Theta = a / d \\ d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \Theta = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Από (3) και (2) έχω ότι:

$$F_{q1 \rightarrow q3(x)} = K_{\eta\lambda} \frac{|q_1||q_3|}{2a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\rightarrow F_{q1 \rightarrow q3(x)} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow F_{q1 \rightarrow q3(x)} = 7.97 \text{ Nt}$$

Στον άξονα X ασκείται η $F_{q2 \rightarrow q3}$ της οποίας το μέτρο είναι ίσο με :

$$F_{q2 \rightarrow q3} = K_{\eta\lambda} \frac{|q_2||q_3|}{a^2} \Rightarrow F_{q2 \rightarrow q3} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} \Rightarrow F_{q2 \rightarrow q3} = 9 \text{ Nt}$$

Άξονα Y: Στον άξονα αυτό υπάρχει μονάχα η $F_{yq1 \rightarrow q3}$ επομένως

$$\left. \begin{array}{l} F_{q1 \rightarrow q3y} = K_{\eta\lambda} \frac{|q_1||q_3|}{(a\sqrt{2})^2} \sin \Theta \\ \sin \Theta = a / d = a / a\sqrt{2} = 1 / \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow F_{q1 \rightarrow q3y} = 9 \cdot 10^9 \frac{25 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 0.01} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow F_{q1 \rightarrow q3y} = 7.97 \text{ Nt}$$

Επομένως η ολική δύναμη στο σημείο που είναι το q_3 γράφεται ως διάνυσμα :

$$F_{\eta\lambda} = (-1.03i + 7.97j) \text{ Nt}$$

Το μέτρο της 4 είναι:

$$|F_{\eta\lambda}| = \sqrt{(F_{\eta\lambda x})^2 + (F_{\eta\lambda y})^2} = \sqrt{1.06 + 63.52} \Rightarrow |F_{\eta\lambda}| = \sqrt{64.58} = 8 \text{ Nt}$$

$$\tan \theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = 7.97 / 1.03 = 7.73 \quad \left| \quad \theta = \tan^{-1} 7.73 = 1.44 \text{ rad} \right|$$

2.2 Ένταση ηλεκτρικού πεδίου

2.2.1 Ένταση

Ένταση \vec{E} σε ένα σημείο ηλεκτρικού πεδίου, ονομάζουμε το φυσικό διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο του μέτρου της δύναμης που ασκείται σε φορτίο q που βρίσκεται σε αυτό το σημείο προς το φορτίο αυτό και κατεύθυνση την κατεύθυνση της δύναμης, αν αυτή ασκείται σε θετικό φορτίο.

Δηλαδή η ένταση σε ένα σημείο έχει την εξής κατεύθυνση: Διεύθυνση την ευθεία που ενώνει τα δύο σημειακά φορτία και φορά προς το φορτίο-πηγή αν είναι αρνητικό, αλλιώς την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά (που "βλέπει" αντίθετα του φορτίου-πηγής). Αυτό συμβαίνει γιατί το δοκιμαστικό φορτίο θεωρείται (διεθνής σύμβαση) μικρό και θετικό.

Έτσι βλέπουμε ότι η ένταση έχει το πλεονέκτημα να είναι ανεξάρτητη του δοκιμαστικού φορτίου, αλλά διατηρεί το μειονέκτημα του διανύσματος. Αν αντικαταστήσουμε στον ορισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου τον τύπο με τον οποίο υπολογίζουμε τη δύναμη από το νόμο του Coulomb, έχουμε:

$$\vec{E} = \frac{F}{|q_2|} \iff \vec{E} = \frac{k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}}{|q_2|} \iff \vec{E} = k \frac{|q_1|}{r^2}$$

Εάν έχουμε πολλά φορτία-πηγές, τότε το ηλεκτρικό πεδίο στο τυχαίο σημείο R θα είναι

$$\vec{E}(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Ο παραπάνω ορισμός αφορά το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από έναν αριθμό *σημειακών* φορτίων. Μερικές φορές, ωστόσο, χρειάζεται να μελετήσουμε *συνεχείς* κατανομές φορτίου, όπως για παράδειγμα μια σφαίρα με φορτίο κατανεμημένο στην επιφάνειά της, ή ένας κύλινδρος με κατανεμημένο το φορτίο στο εσωτερικό του. Στην περίπτωση αυτή, το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται από τη σχέση

$$\vec{E}(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\hat{r}}{r^2} \rho d\tau$$

όπου με ρ συμβολίζεται η *χωρική πυκνότητα* φορτίου, και το ολοκλήρωμα εκτελείται σε όλον τον όγκο στον οποίο εμπεριέχεται το φορτίο. Αντίστοιχες σχέσεις υπάρχουν και για *επιφανειακές* ή *γραμμικές* πυκνότητες φορτίου, όπου τα αντίστοιχα ολοκληρώματα είναι επιφανειακά και απλά, αντί για τριπλά που έχουμε στην παραπάνω σχέση. Υπάρχει, επίσης, και άλλος ένας τρόπος υπολογισμού των ηλεκτρικών πεδίων, σε περιπτώσεις όπου το πρόβλημα διέπεται από κάποια συμμετρία. Η μέθοδος αυτή, γίνεται με τη βοήθεια του νόμου του Gauss.

2.2.2 Δυναμικές γραμμές

Επειδή δεν μπορούμε να αντιληφθούμε απευθείας το ηλεκτρικό πεδίο με τις αισθήσεις μας, χρησιμοποιούμε τις *δυναμικές γραμμές* γι' αυτόν το σκοπό. Ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια των δυναμικών γραμμών ήταν ο [Μάικλ Φαραντέι](#) (1791-1867). Οι δυναμικές γραμμές είναι φανταστικές γραμμές που σχεδιάζουμε σε μία περιοχή το χώρου έτσι ώστε σε κάθε σημείο, το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου να εφάπτεται σε εκείνο ακριβώς το σημείο. Οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές δείχνουν την κατεύθυνση του \vec{E} σε κάθε σημείο. Απομακρύνονται από τα θετικά φορτία και καταλήγουν σε

αρνητικά. Η πυκνότητά τους στο χώρο είναι ανάλογη του \vec{E} , δηλαδή η ένταση του πεδίου έχει μεγαλύτερο μέτρο στις περιοχές που είναι πυκνότερες οι δυναμικές γραμμές. Σε κάθε σημείο, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μία μόνο κατεύθυνση, οπότε από κάθε σημείο του χώρου περνάει μία μόνο δυναμική γραμμή. Οι δυναμικές γραμμές, δηλαδή, δεν τέμνονται ποτέ.

Βέβαια, υπάρχει τρόπος για να δούμε τις δυναμικές γραμμές. Παίρνουμε μία λεκάνη που είναι φτιαγμένη από μονωτικό υλικό, βάζουμε μέσα μονωτικό υγρό (π.χ. καστορέλαιο) και ρίχνουμε σπόρους χλόης ή σουσαμιού οι οποίοι επιπλέουν. Εν συνεχεία τοποθετούμε με κατάλληλο τρόπο ένα μικρό φορτισμένο σώμα σε ένα σημείο του υγρού και διαπιστώνουμε ότι οι σπόροι θα διαταχθούν έτσι ώστε να φαίνονται οι δυναμικές γραμμές. Αυτό το φαινόμενο ερμηνεύεται με την επαγωγική φόρτιση των σπόρων.

2.2.3 Ο στροβιλισμός του E

Έστω ένα σημειακό φορτίο q το οποίο δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης E , όπως είναι ήδη γνωστό, ίσης με

$$E = k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (2.23)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον στροβιλισμό του παραπάνω πεδίου. Από κεφάλαιο ένα των σημειώσεων αυτών γνωρίζουμε ότι ο στροβιλισμός ενός πεδίου μπορεί να υπολογιστεί μέσα από το θεώρημα του Stokes και εκφράζεται από την σχέση

$$\int_{\text{επιφάνεια}} (\nabla \times E) dA = \oint_{\text{συνοριακή γραμμή}} E \cdot dl \quad (2.24)$$

Ας ξεκινήσουμε αρχικά να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αυτού του πεδίου από ένα σημείο a σε ένα σημείο b,

$$\int_a^b E \cdot dl \quad (2.25)$$

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες το διαφορικό dl στο παραπάνω ολοκλήρωμα εκφράζεται ως $dl = dr\hat{r} - rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}$ άρα η ολοκληρωτέα ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα (2.25) μπορεί να γραφεί ως

$$E \cdot dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr \quad (2.26)$$

Επομένως από επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζω ότι

$$\int_a^b E \cdot dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right) \quad (2.27)$$

Οπού r_a είναι η απόσταση του σημείου a από την αρχή των αξόνων και r_b είναι ομοίως η απόσταση του σημείου b από την αρχή των αξόνων. Παρατηρούμε από το αποτέλεσμα ότι το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που μπορούμε να ακολουθήσουμε και εξαρτάται αποκλειστικά από το τελικό και αρχικό σημείο. Πιο συγκεκριμένα το αποτέλεσμα του παραπάνω ολοκληρώματος εξαρτάται από το πόσο μακριά βρίσκονται τα σημεία a & b από την αρχή των αξόνων. Αυτό συμβαίνει γιατί η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτάται από την ακτινική του συνιστώσα μόνο και έτσι οποιεσδήποτε συνεισφορές από συνιστώσες κατά την διεύθυνση των $\hat{\theta}$ & $\hat{\phi}$ δεν επηρεάζει την τιμή του ολοκληρώματος μια και τέτοια μετατόπιση προς αυτές τις διευθύνσεις εξαλείφονται από το εσωτερικό γινόμενο $E \cdot dl$. Το ολοκλήρωμα μιας κλειστής διαδρομής είναι προφανώς από παραπάνω αποτέλεσμα ($r_a = r_b$) ίσο με μηδέν ή

$$\oint E \cdot dl = 0 \quad (2.28)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes και με βάση το αποτέλεσμα (2.28) προκύπτει ότι

$$\nabla \times E = 0 \quad (2.29)$$

Η παραπάνω σχέση αποδείχθηκε για ένα σημειακό φορτίο ισχύει όμως για οποιαδήποτε στατική κατανομή φορτίου.

2.2.4 Παράδειγμα στην ένταση του ηλεκτρικού πεδίου

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάποια περιοχή του χώρου δίνεται από την συνάρτηση:

$$V(x, y) = -A(x^3 + 3y) \quad \text{όπου } A \text{ σταθερά.}$$

Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

Λύση

Η σχέση που συνδέει το Η/Π με το δυναμικό είναι η:

$$E = -\nabla V = -\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) V \quad (1)$$

Αντικαθιστώ την συνάρτηση της τάσης στην (1) οπότε:

$$E = -\hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(-Ax^3) - \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}(-13y) + \hat{k}(0) \Leftrightarrow \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow E(x, y) = (3Ax^2)\hat{i} - \hat{j}(13A)$$

2.3.1 Ηλεκτρικό δυναμικό

Από την σχέση (2.29) βλέπουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι μια οποιαδήποτε διανυσματική συνάρτηση άλλα μια συνάρτηση της οποίας ο στροβιλισμός είναι πάντα μηδέν.

Από το κεφάλαιο ένα είδαμε ισχύει ότι για ένα διάνυσμα του οποίου ο στροβιλισμός είναι μηδέν τότε ισούται με την απόκλιση κάποιου βαθμωτού μεγέθους.

Το κλειστό ολοκλήρωμα της (2.28) είναι μηδέν και έτσι προκύπτει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της (2.27) εξαρτάται μονάχα από τις θέσεις ως προς την αρχή των αξόνων των a και b και είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή. Για τον λόγο αυτό μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση έτσι ώστε

$$V(P) = -\int_o^P E \cdot dl \quad (2.30)$$

Όπου (o) είναι ένα σταθερό σημείο για το οποίο έχουμε εκ των προτέρων συμφωνήσει. Το V εξαρτάται μόνο από το σημείο P. Το V ονομάζεται **ηλεκτρικό δυναμικό**. Μπορεί να γραφεί η διαφορά δυναμικού ως εξής

$$V(b) - V(a) = -\int_o^b E \cdot dl + \int_o^a E \cdot dl = -\int_o^b E \cdot dl - \int_a^o E \cdot dl = -\int_a^b E \cdot dl \quad (2.31)$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα των κλίσεων και την (2.31) παίρνουμε

$$V(b) - V(a) = \int_a^b (\nabla V) dl \quad (2.32)$$

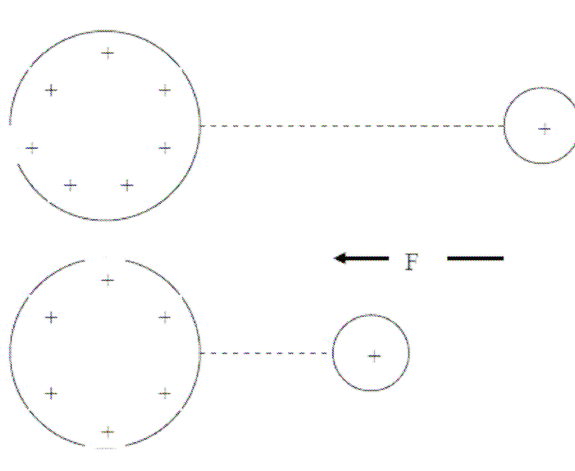
Συγκρίνοντας (2.31), (2.32) έχουμε

$$E = -\nabla V \quad (2.33)$$

Η σχέση (2.33) είναι από τις πιο σημαντικές σχέσεις της ηλεκτροστατικής και μας πληροφορεί ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι η κλίση ενός βαθμωτού δυναμικού.

Μπορούμε να περιγράψουμε τα ηλεκτροστατικά φαινόμενα, αντί να χρησιμοποιούμε το διανυσματικό μέγεθος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, με το βαθμωτό μέγεθος του ηλεκτρικού δυναμικού. Αυτό μας διευκολύνει μια και το ηλεκτρικό δυναμικό ορίζεται πλήρως (ως μονόμετρο μέγεθος) μονάχα από το μέτρο του σε μια θέση του ηλεκτροστατικού πεδίου.

Γνωρίζουμε από μηχανική ότι ένα σώμα έχει δυναμική ενέργεια λόγω θέσης. Αντίστοιχα ένα φορτισμένο σωματίδιο έχει δυναμική ενέργεια λόγω θέσης μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Για να μετακινήσουμε ένα φορτισμένο σωματίδιο αντίθετα προς την φορά ηλεκτρικού πεδίου ενός φορτισμένου σώματος θα πρέπει να δαπανήσουμε έργο. Το έργο αυτό μεταβάλλει την δυναμική ενέργεια του φορτισμένου σωματιδίου. Είναι θετικό στην περίπτωση που αυξάνει την δυναμική ενέργεια του φορτισμένου σωματιδίου και αρνητικό αν την ελαττώνει. Έστω το παρακάτω σύστημα 2 φορτισμένων σφαιρών. Για να σπρώξετε την μικρή σφαίρα προς την μεγάλη θα πρέπει να δαπανήσετε έργο, ώστε να υπερνικήσετε την ηλεκτρική άπωση.



Το έργο που εκτελείται για να μετακινηθεί το σωματίδιο στην νέα του θέση αυξάνει την ενέργεια του. Η ενέργεια που έχει το σωματίδιο λόγω θέσης του ονομάζεται **ηλεκτρική δυναμική ενέργεια**. Αν τώρα το σωματίδιο αφεθεί ελεύθερο θα απομακρυνθεί από επιταχυνόμενο από την σφαίρα, και η ηλεκτρική δυναμική του ενέργεια θα μετατραπεί σε κινητική. Αν τώρα στην θέση της μικρής σφαίρας είχαμε ένα σωματίδιο με διπλάσιο ή τριπλάσιο φορτίο θα έπρεπε να δαπανήσουμε διπλάσιο ή τριπλάσιο έργο. Αντίστοιχα το σωματίδιο θα αποκτούσε διπλάσια ή τριπλάσια δυναμική ενέργεια. Είναι λοιπόν βολικότερο στην ηλεκτροστατική να ασχολούμαστε με την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου. Ένα σωματίδιο με διπλάσιο φορτίο από ένα άλλο φορτίο θα έχει αντίστοιχα διπλάσια δυναμική ενέργεια στο ίδιο σημείο του ηλεκτρικού πεδίου. Η έννοια της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα φορτίου ονομάζεται **το ηλεκτρικό δυναμικό**.

Είδαμε ότι η διαφορά δυναμικού ορίζεται από την σχέση (2.32). Ένας ισοδύναμος ορισμός της διαφοράς δυναμικού που σχετίζεται και με τα παραπάνω είναι ο ακόλουθος:

Ορίζουμε ότι η διαφορά δυναμικού (ή τάση) $V_b - V_a$ – ανάμεσα στα σημεία a και b ισούται με το πηλίκο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας δια του δοκιμαστικού φορτίου q_0 , σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.34)$$

Με αφορμή την σχέση (2.34) θα πρέπει να τονίσουμε ότι δεν πρέπει να συγχέουμε την διαφορά δυναμικού με την δυναμική ενέργεια που είναι 2

τελείως διαφορετικοί φυσικοί όροι και θα έπρεπε να έχουν διαφορετικές ονομασίες.

Λόγω τώρα του ότι η διαφορά δυναμικού είναι ανάλογη της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του φορτίου και η τελευταία είναι μονόμετρο μέγεθος, θα πρέπει και η διαφορά δυναμικού να είναι επίσης μονόμετρο μέγεθος. Μονάδα μέτρησης του της διαφοράς δυναμικού είναι το Volt στο S.I.

Στην Ατομική και Πυρηνική Φυσική χρησιμοποιούμε την μονάδα eV ηλεκτρονιοβόλτ. Το eV ισούται εξ ορισμού με την ενέργεια την οποία ένα ηλεκτρόνιο (ή ένα πρωτόνιο) κερδίζει όταν κινηθεί μέσα από διαφορά δυναμικού ενός Volt. Γνωρίσουμε όμως ότι η απόλυτη τιμή του φορτίου e είναι ίση με $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Αφού λοιπόν $1\text{V} = 1\text{J/C}$ η σχέση που μετατρέπει το eV σε joule είναι η παρακάτω

$$1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (2.35)$$

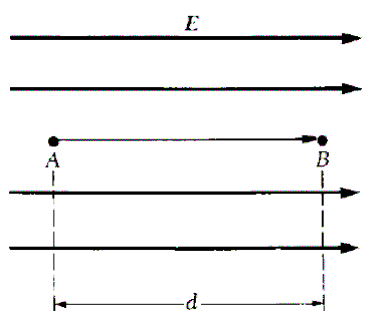
Από την (2.34) παρατηρούμε ότι ισχύει το παρακάτω

Η διαφορά δυναμικού $V_b - V_a$ ισούται με το έργο ανά μονάδα φορτίου που παράγει ή καταναλίσκει μια εξωτερική δύναμη για να μετακινήσει ένα δοκιμαστικό φορτίο από το σημείο a στο σημείο b χωρίς να μεταβάλει την κινητική του ενέργεια.

Σημασία έχουν μονάχα οι διαφορές του δυναμικού. Για αυτό το λόγο πολλές φορές μπορούμε να ορίσουμε ένα σημείο στο οποίο η συνάρτηση του δυναμικού είναι μηδέν, δεξ εξίσωση (2.30) (σημείο ο). Συνήθως αυτό το σημείο το επιλέγουμε στο άπειρο. Έτσι μετά την επιλογή του σημείου σταθερού δυναμικού στο άπειρο, μπορούμε να δηλώσουμε ότι το δυναμικό σε ένα σημείο του ηλεκτρικού πεδίου ισούται με το έργο ανά μονάδα φορτίου που παράγεται ή καταναλίσκεται κατά την μεταφορά ενός θετικού δοκιμαστικού φορτίου από το άπειρο στο σημείο αυτό. Μετά από αυτό η εξίσωση (2.34) εκφράζει το δυναμικό ενός σημείου,

$$V_p = - \int_{\infty}^p \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.36)$$

Ας μελετήσουμε τώρα την διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε 2 σημεία A και B που βρίσκονται μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και απέχουν απόσταση d (δες παρακάτω σχήμα).



Σχήμα 2.15: Έργο που καταναλώνεται κατά την μετάβαση από το A στο B (Griffiths «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική»)

Σύμφωνα με τα παραπάνω το έργο που θα δαπανηθεί για την μετάβαση από το σημείο A στο B είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που θα ακολουθήσουμε. Αυτό γιατί το ηλεκτρικό πεδίο είναι διατηρητικό. Αν υπολογίσουμε τώρα την διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία A & B χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.31) και έχουμε

$$V_B - V_A = - \int_A^B E ds \quad (2.37)$$

Λόγω του ότι το πεδίο είναι ομογενές το E έχει σταθερό μέτρο και κατεύθυνση με αποτέλεσμα να μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα. Έτσι

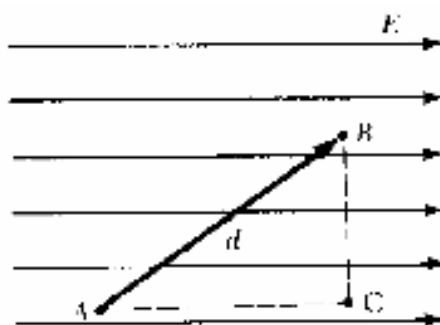
$$\Delta V = -E \int_A^B ds = -Ed \quad (2.38)$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι το αποτέλεσμα του ότι το σημείο B είναι σε χαμηλότερο δυναμικό από το A δηλαδή $V_B < V_A$. Από την σχέση (2.38) και την (2.34) μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας

$$\Delta U = q_o \Delta V = -q_o E d \quad (2.39)$$

Βλέπουμε ότι όταν το q_o είναι θετικό το ΔU είναι αρνητικό. Με άλλα λόγια όταν ένα **θετικό** φορτίο κινείται παράλληλα προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου χάνει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια. Αυτό προκύπτει σκεπτόμενοι ότι εάν ένα θετικό φορτίο αφηθεί ελεύθερο μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο σε αυτό θα ασκηθεί μια δύναμη με αποτέλεσμα να το επιταχύνει προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Εφόσον θα αυξηθεί η κινητική του ενέργεια θα μειωθεί η δυναμική του. Για το αρνητικό φορτίο ισχύουν τα αντίστροφα. oqE

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου τα σημεία ανάμεσα στα οποία θα υπολογίσουμε την διαφορά δυναμικού δεν ισαπέχουν από τον άξονα x όπως στην προηγούμενη περίπτωση άλλα το ηλεκτρικό πεδίο εξακολουθεί να είναι παράλληλο με τον άξονα x.



Σχήμα 2.16: Κατανάλωση έργου κατά την μετακίνηση ηλεκτρικού φορτίου από το A στο B (Griffiths, « Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική»)

Για τον υπολογισμό της διαφοράς δυναμικού και σε αυτή την περίπτωση θα πάρουμε την εξίσωση (2.34) και έχουμε

$$\Delta V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \mathbf{E} \cdot \int_a^b d\mathbf{s} = - \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \quad (2.40)$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι ίση με

$$\Delta U = q_c \Delta V = -q_c \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \quad (2.41)$$

Από την (2.41) βλέπουμε ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται σε επίπεδα κάθετα στο ηλεκτρικό πεδίο έχουν το ίδιο δυναμικό. Οι επιφάνειες πάνω στις οποίες το δυναμικό είναι το ίδιο παντού ονομάζονται **ισοδυναμικές επιφάνειες**. Όπως εύκολα μπορεί να εξαχθεί το έργο που καταναλώνουμε για να μετακινήσουμε ένα φορτίο πάνω σε μια ισοδυναμική επιφάνεια είναι μηδέν.

Η σχέση (2.27) μας δίνει την διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε 2 σημεία a και b που απέχουν από το σημειακό φορτίο πηγής r_a και r_b αντίστοιχα. Αν πάρουμε το σημείο r_b να είναι στο άπειρο γνωρίζουμε από σύμβαση που παίρνουμε ότι το δυναμικό σε αυτό το σημείο είναι μηδέν. Η σχέση που προκύπτει είναι το δυναμικό σημειακού φορτίου και εκφράζεται από την παρακάτω σχέση

$$V = k \frac{q}{r} \quad (2.42)$$

Από την σχέση (2.42) βλέπουμε ότι οι ισοδυναμικές επιφάνειες ενός σημειακού φορτίου είναι ομόκεντρες σφαίρες που έχουν στο κέντρο το σημειακό φορτίο.

Η αρχή της επαλληλίας στην ηλεκτροδυναμική αναφέρεται στην δύναμη που ασκείται σε ένα δοκιμαστικό φορτίο Q και μας πληροφορεί ότι η συνολική δύναμη στο Q είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που οφείλονται σε κάθε ένα από τα φορτία πηγές

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots \quad (2.43)$$

Διαιρώντας την σχέση (2.43) με το δοκιμαστικό φορτίο Q υπολογίζουμε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο που βρίσκεται το Q. Άρα

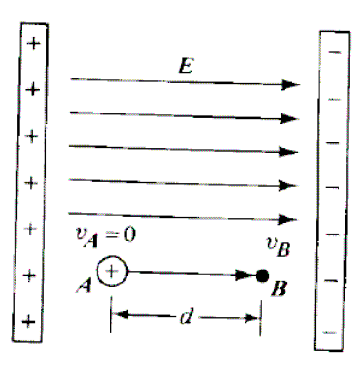
$$E = E_1 + E_2 + \dots \quad (2.44)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.44) από το κοινό σημείο μέχρι το σημείο P συμπεραίνουμε ότι το δυναμικό είναι το άθροισμα των δυναμικών που οφείλεται σε όλα τα επί μέρους φορτία πηγές. Έτσι:

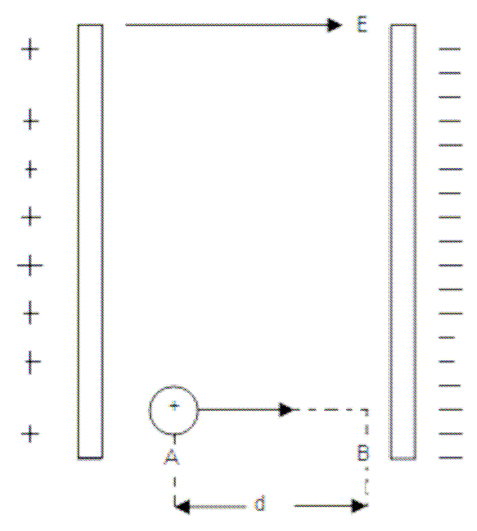
$$V = k \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (2.45)$$

2.3.2 Παράδειγμα στο ηλεκτρικό δυναμικό

Ένα πρωτόνιο που αρχικά ηρεμεί αφήνεται ελεύθερο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Το πεδίο έχει μέτρο $8 \times 10^4 \text{ V/m}$ και κατευθύνεται παράλληλα προς τον θετικό άξονα x. Το πρωτόνιο μετατοπίζεται κατά 0.5 m προς την κατεύθυνση του E. (α) Υπολογίστε την μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σημεία A και B. (β) Υπολογίστε την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του πρωτονίου η οποία αντιστοιχεί στην μετατόπιση αυτή.



Λύση



$$U_B - U_A = \Delta V_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow$$

$$q_{(p)} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \Rightarrow E \cdot dS = |E| \cdot |dS| \quad (2)$$

(α)

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = \frac{U_B - U_A}{q} = - \int_A^B E \cdot dS \quad (1)$$

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B 8 \cdot 10^1 \cdot dS =$$

$$= 8 \cdot 10^4 (0.5) = 4 \cdot 10^4 \text{ volt}$$

Το (-) έχει την φυσική σημασία ότι το (e) κινείται από την θέση του υψηλότερου δυναμικού προς το χαμηλότερο δυναμικό.

(β)

Από (1) μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας:

$$\left. \begin{array}{l} U_B - U_A = \Delta V_{A \rightarrow B} * q_{(p)} \\ q_{(p)} = 1.6 * 10^{-19} \text{ C} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow U_B - U_A = (4 * 10^4 \text{ V}) * (1.6 * 10^{-19}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow U_B - U_A = -6.4 * 10^{-15} \text{ joules} \end{array}$$

2.4 Εξίσωση Poisson και εξίσωση Laplace

Το ηλεκτρικό πεδίο είδαμε συνδέεται με το δυναμικό μέσω της σχέσης (2.33). Το ερώτημα που προκύπτει είναι πως θα εκφράσουμε τις θεμελιώδεις εξισώσεις για το ηλεκτρικό πεδίο E, τον νόμο Gauss και τον στροβιλισμό του ηλεκτρικού πεδίου, χρησιμοποιώντας το δυναμικό.

Ο νόμος του Gauss και πιο συγκεκριμένα η διαφορική μορφή του νόμου του Gauss μπορεί να γραφεί ως συναρτήσει του δυναμικού ως εξής

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.63)$$

Η σχέση (2.63) ονομάζεται εξίσωση Poisson. Σε περιοχές όπου δεν υπάρχουν φορτία δηλαδή $\rho = 0$ η εξίσωση (2.63) γράφεται ως εξής

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.64)$$

Η εξίσωση (2.64) είναι γνωστή ως εξίσωση Laplace.

Ο στροβιλισμός του Η.Π. συναρτήσσει του δυναμικού μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\nabla \times E = \nabla \times (-\nabla V) \quad (2.65)$$

Η (2.65) όντως επιβεβαιώνει τον νόμο του αστρόβιλου ηλεκτρικού πεδίου μιας και ο στροβιλισμός της κλίσης είναι πάντα μηδέν.

Το συμπέρασμα που βγαίνει είναι ότι για να υπολογίσουμε το δυναμικό χρειαζόμαστε μια μόνο διαφορική εξίσωση αυτή του Poisson αλλά για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο χρειαζόμαστε 2 αυτές του Gauss και την $\nabla \times E = 0$.

2.5 Αγωγοί και διηλεκτρικά

2.5.1 Αγωγοί

Στη Φυσική, ως αγωγοί χαρακτηρίζονται υλικά σώματα των οποίων τα άτομα διαθέτουν ελεύθερα ηλεκτρόνια με συνέπεια να επιτρέπουν την ελεύθερη κίνηση ηλεκτρικών φορτίων μέσω αυτών. Πολλοί αγωγοί είναι μέταλλα, όπως ο χαλκός και το αλουμίνιο, αλλά υπάρχουν και μη μεταλλικοί αγωγοί. Υπό την επίδραση διαφοράς δυναμικού στα άκρα ενός αγωγού, τα ηλεκτρικά φορτία που κινούνται στο εσωτερικό του δημιουργούν ηλεκτρικό ρεύμα. Η ροή του ηλεκτρικού ρεύματος παράγει θερμότητα, η οποία εξαρτάται από την αντίσταση του αγωγού.

Σε αντίθεση με τους αγωγούς, τα υλικά που δεν επιτρέπουν την κίνηση φορτίων στο εσωτερικό τους, συνεπώς στερούνται ελεύθερων ηλεκτρονίων, λέγονται μονωτές. Τέτοια υλικά είναι π.χ. το γυαλί, η πορσελάνη, ο βακελίτης, το καουτσούκ, τα πλαστικά, το αποσταγμένο νερό, ο ξηρός αέρας και το κενό.

Υπάρχει και μία τρίτη, ενδιάμεση κατηγορία υλικών, οι ημιαγωγοί (π.χ. πυρίτιο, γερμάνιο), στους οποίους ένας μικρός αριθμός ηλεκτρικών φορτίων μπορεί να κινείται. Οι ιδιότητες των ημιαγωγών εξαρτώνται σημαντικά από τη θερμοκρασία, καθώς και από τις προσμίξεις που περιέχουν.

Κάτω από μία «κρίσιμη» θερμοκρασία, ορισμένα υλικά (που μπορεί να είναι αγωγοί ή και μονωτές σε συνήθεις θερμοκρασίες) μετατρέπονται σε υπεραγωγούς, δηλαδή σε αγωγούς με μηδενική αντίσταση.

2.5.2 Χωρητικότητα

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις ιδιότητες των πυκνωτών. Οι πυκνωτές αποτελούνται από 2 αντίθετα, άλλα ίσα, φορτισμένους αγωγούς οποιουδήποτε σχήματος και από ένα μονωτή ο οποίος τοποθετείται ανάμεσα στους 2 αγωγούς. Το μονωτικό αυτό υλικό το ονομάζουμε διηλεκτρικό και οι ηλεκτρικές του ιδιότητες μπορούν να εξηγηθούν βάσει των ατομικών ιδιοτήτων του υλικού.

Οι πυκνωτές σήμερα χρησιμοποιούνται σε

- Στα κυκλώματα συντονισμού των ραδιοφώνων
 - Ως φίλτρα σε τροφοδοτικά κυκλώματα
 - Στον περιορισμό των σπινθήρων στα συστήματα εκκίνησης των κινητήρων των αυτοκινήτων
 - Για αποθήκευση ενέργειας στα διάφορα ηλεκτρικά κυκλώματα
- Η χωρητικότητα του πυκνωτή εξαρτάται από την γεωμετρία του και από το διηλεκτρικό που υπάρχει ανάμεσα στις 2 πλάκες του (αγωγοί).

Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή ορίζεται ως εξής

Ορίζουμε ότι η χωρητικότητα C ενός πυκνωτή είναι ίση με το πηλίκο της απόλυτης τιμής του φορτίου ενός από τους 2 αγωγούς του δια της απόλυτης τιμής της διαφοράς δυναμικού των 2 αγωγών. Δηλαδή

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.66)$$

Οι 2 αγωγοί που αποτελούν τον πυκνωτή ονομάζονται οπλισμοί του. Οι οπλισμοί είναι φορτισμένοι με ίσο άλλα αντίθετο φορτίο. Μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας ενός πυκνωτή είναι το Farad, F, ($1F = 1 \text{ CbVolt}$). Στο εμπόριο συναντούμε πυκνωτές που έχουν χωρητικότητες της τάξεως των μF & pF .

Από ορισμό της χωρητικότητας καταλαβαίνουμε ότι είναι πάντα ένας θετικός αριθμός και εφόσον η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε 2 πυκνωτές αυξάνει ανάλογα με το φορτίο τους καταλαβαίνουμε ότι η χωρητικότητα παραμένει σταθερή.

2.5.3 Πυκνωτές με διηλεκτρικά

Τα διηλεκτρικά, τα οποία θα αναλύσουμε παρακάτω, δεν είναι αγωγοί του ηλεκτρισμού. Παραδείγματα διηλεκτρικών υλικών είναι το γυαλί, το καουτσούκ. Όταν το διηλεκτρικό τοποθετηθεί ανάμεσα στους οπλισμούς, και καταλάβει όλο το χώρο, ενός πυκνωτή αυξάνει την χωρητικότητα του κατά ένα συντελεστή κ . Ο συντελεστής αυτός ονομάζεται **σχετική διηλεκτρική σταθερά** και είναι καθαρός αριθμός. Η σχετική διηλεκτρική σταθερά συνδέει την διηλεκτρική σταθερά του μέσου ϵ με την διηλεκτρική σταθερά του κενού ϵ_0 ($\kappa = \epsilon / \epsilon_0$). Μετά την τοποθέτηση διηλεκτρικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή ισχύει ότι

$$C = \kappa C_0 \quad (2.79)$$

Όπου C_0 είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή εν απουσία του διηλεκτρικού. Στην περίπτωση επίπεδου πυκνωτή έχουμε ότι

$$C = \epsilon_0 \kappa \frac{A}{d} \quad (2.80)$$

Από την σχέση (2.80) βλέπουμε ότι μειώνοντας την απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή αυξάνουμε την χωρητικότητα του. Η μικρότερη δυνατή απόσταση μεταξύ των οπλισμών είναι αυτή στην οποία οι ηλεκτρικές εκκενώσεις θα αρχίσουν να διαπερνούν το διηλεκτρικό που υπάρχει ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή. Η μέγιστη δυνατή διαφορά δυναμικού που μπορεί να υπάρξει ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή για μια δεδομένη απόσταση d καθορίζεται από την αντοχή του διηλεκτρικού. Εάν το εξωτερικό πεδίο ξεπεράσει την αντοχή του διηλεκτρικού υλικού τότε καταστρέφονται οι μονωτικές ιδιότητες του υλικού και το υλικό άγει ηλεκτρικό φορτίο. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει την σχετική διηλεκτρική σταθερά διαφόρων διηλεκτρικών υλικών και την αντοχή τους σε εξωτερικά ηλεκτρικά πεδία.

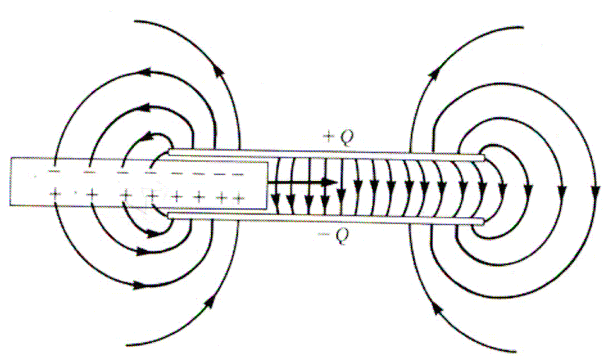
Κενό	1.00000	—
Αέρας	1.00059	3×10^6
Βακελίτης	4.9	24×10^6
Χαλαζίας	3.78	8×10^6
Γυαλί πυρέξ	5.6	14×10^6
Πολυστερήνη	2.56	24×10^6
Τεφάλ	2.1	60×10^6
Συνθετικό λάστιχο	6.7	12×10^6
Νάυλον	3.4	14×10^6
Χαρτί	3.7	16×10^6
Τιτανιούχο στρόντιο	233	8×10^6
Νερό	80	—
Έλαιο σιλικόνης	2.5	15×10^6

Ανακεφαλαιώνοντας τα πλεονεκτήματα χρήσης διηλεκτρικού ανάμεσα στους οπλισμούς πυκνωτή είναι τα παρακάτω

1. Το διηλεκτρικό αυξάνει την χωρητικότητα του πυκνωτή
2. Το διηλεκτρικό αυξάνει την μέγιστη τάση λειτουργίας ενός πυκνωτή

3. Μπορούμε να το χρησιμοποιούμε για μηχανική ενίσχυση του χώρου ανάμεσα στους αγωγικούς οπλισμούς του πυκνωτή.

Η αποθηκευμένη ενέργεια ενός πυκνωτή μειώνεται με την τοποθέτηση διηλεκτρικού ανάμεσα στους οπλισμούς του. Αυτό γιατί ο πυκνωτής καταναλώνει έργο πάνω στο διηλεκτρικό. Τα φορτία του πυκνωτή έλκουν το διηλεκτρικό μέσα στον πυκνωτή. Η έλξη οφείλεται στο ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο στα άκρα των οπλισμών του πυκνωτή. Η οριζόντια συνιστώσα, δεξ παρακάτω σχήμα, του ανομοιογενούς ηλεκτρικού πεδίου στα άκρα των πλακών δρα πάνω στα φορτία του διηλεκτρικού. Το αποτέλεσμα είναι η συνισταμένη δύναμη να είναι οριζόντια και κατευθύνεται προς το εσωτερικό του πυκνωτή.



Σχήμα 2.31: Έργο που καταναλώνεται από την εισχώρηση διηλεκτρικού μέσα σε ένα πυκνωτή (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

2.5.4 Παράδειγμα στους πυκνωτές

Κάθε οπλισμός ενός επίπεδου πυκνωτή έχει επιφάνεια $A = 2\text{cm}^2 = 2 \times 10^{-4} \text{m}^2$ και η απόσταση μεταξύ των οπλισμών είναι $d = 1 \text{mm} = 10^{-3} \text{m}$. Υπολογίστε την χωρητικότητα του.

Λύση

Η σχέση που δίνει την χωρητικότητα ενός πυκνωτή είναι:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (1)$$

Ο επίπεδος πυκνωτής είναι αυτός που οι οπλισμοί του είναι 2 παράλληλες πλάκες επιφάνειας A . Η χωρητικότητα του δίνεται από την σχέση:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2)$$

Επομένως αντικαθιστώντας από τα δεδομένα της άσκησης στην (2) έχουμε:

$$C = \left(8.85 * 10^{-12} \frac{C^2}{N * m^2} \right) * \left(\frac{2 * 10^{-1} m^2}{1 * 10^{-3} m} \right) \Leftrightarrow$$
$$C = 1.77 \text{ pF}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μαγνητοστατική

3.1. Εισαγωγή - Μαγνητισμός

Ο όρος μαγνητισμός προέρχεται από την περιοχή της Μαγνησίας όπου πριν από 2000 χρόνια οι αρχαίοι Έλληνες ανακάλυψαν ένα πέτρωμα που είχε την ξεχωριστή ιδιότητα να έλκει κομμάτια σιδήρου. Το υλικό αυτό το ονόμασαν μαγνήτη.

Πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκε από του Κινέζους το 12^ο αιώνα για την κατασκευή πυξίδων που αποτελούν πολύ σημαντικό βοήθημα για την ναυσιπλοΐα. Το 19^ο αιώνα, γύρω στο 1830, ο Γάλλος φυσικός Andre – Marie Ampere πρότεινε ότι **πηγή κάθε μαγνητικού φαινομένου είναι το ηλεκτρικό ρεύμα.**

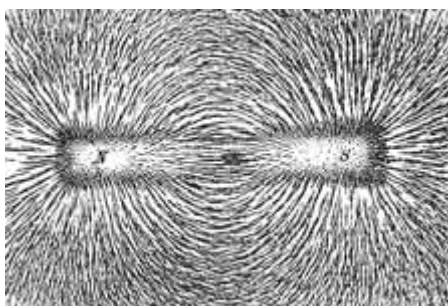
Εκτός από την ηλεκτρική δύναμη που ασκείται ανάμεσα σε 2 φορτισμένα σωματίδια υπάρχει και ένα άλλο είδος δύναμης που αναπτύσσεται ανάμεσα σε κινούμενα φορτισμένα σωματίδια. Η δύναμη αυτή είναι γνωστή ως **μαγνητική δύναμη**. Η πηγή της μαγνητικής αυτής δύναμης είναι η κίνηση των φορτισμένων σωματιδίων και κυρίως των ηλεκτρονίων. Στην περιστροφή των ηλεκτρονίων γύρω από τα άτομα και γύρω από τον εαυτό τους (σπίν) οφείλονται οι μαγνητικές ιδιότητες των υλικών.

Οι μαγνητικές δυνάμεις παρουσιάζουν μερικές ομοιότητες με τις ηλεκτρικές. Όπως και οι ηλεκτρικές έτσι και οι μαγνητικές είναι αντιστρόφως ανάλογες με το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των μαγνητών. Επίσης οι μαγνήτες είναι δυνατόν να απωθούνται ή να έλκονται χωρίς να έρθουν σε επαφή, ανάλογα ποια άκρα τους φέρονται σε κοντινή απόσταση, όπως ακριβώς συμβαίνει μεταξύ των φορτισμένων σωματιδίων στην περίπτωση των ηλεκτρικών δυνάμεων. Οι ηλεκτρικές δυνάμεις οφείλονται στα ηλεκτρικά φορτία ενώ οι μαγνητικές οφείλονται στις περιοχές που ονομάζονται μαγνήτες. Κάθε μαγνήτης χαρακτηρίζεται από ένα νότιο πόλο και από ένα βόρειο πόλο. Στην φύση **δεν συναντούμε απομονωμένους πόλους**. Δεν είναι δυνατόν να

συναντήσουμε ένα νότιο πόλο χωρίς να υπάρχει στην περιοχή και ένας βόρειος. Αυτή είναι μια διαφορά μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων και των μαγνητικών πόλων. Οι μαγνητικοί πόλοι δεν μπορούν να απομονωθούν όπως συμβαίνει με τα ηλεκτρικά φορτία. Αν κόψουμε ένα μαγνήτη σε 2 κομμάτια και τα 2 αυτά κομμάτια θα αποτελούν αυτοτελείς μαγνήτες!! Όταν ένας βόρειος ή νότιος πόλος πλησιάσει ένα βόρειο ή νότιο πόλο τότε οι 2 πόλοι απωθούνται ενώ στην περίπτωση που ένας νότιος ή βόρειος πόλος πλησιάσει ένα βόρειο ή νότιο πόλο αντίστοιχα, τότε οι 2 πόλοι έλκονται. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Οι ομώνυμοι πόλοι απωθούνται ενώ οι ετερόνυμοι πόλοι έλκονται

Αν σκορπίσετε ρινίσματα σιδήρου γύρω από ένα μαγνήτη αυτά θα διαταχθούν γύρω από τον μαγνήτη σε ένα χαρακτηριστικό σχηματισμό γραμμών που τον περιβάλλουν. Στον χώρο γύρω από τον μαγνήτη λέμε ότι υπάρχει **μαγνητικό πεδίο**. Τα ρινίσματα σιδήρου διατάσσονται πάνω στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου.



Σχήμα 3.1: Ραβδόμορφος Μαγνήτης («Οι Έννοιες της Φυσικής», P.G. Hewitt, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης)

Το πεδίο έξω από τον μαγνήτη κατευθύνεται από τον βόρειο πόλο προς τον νότιο. Στα σημεία που οι δυναμικές γραμμές είναι πιο πυκνές το μαγνητικό πεδίο είναι πιο ισχυρό ενώ στην περιοχή που είναι πιο αραιές το πεδίο είναι πιο αδύναμο. Το πεδίο που οφείλεται σε ένα μαγνήτη είναι πιο ισχυρό στην περιοχή των πόλων του.

Ο μαγνητισμός σχετίζεται άμεσα με τον ηλεκτρισμό. Πιο συγκεκριμένα με ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο σχετίζεται ένα ηλεκτρικό πεδίο και ένα

μαγνητικό πεδίο. Το τελευταίο δημιουργείται από την κίνηση του ηλεκτρικού φορτίου.

Ειπώθηκε προηγουμένως ότι τα μαγνητικά φαινόμενα οφείλονται στην κίνηση φορτισμένων σωματιδίων. Που υπάρχει τέτοια κίνηση σε ένα μαγνητικό υλικό; Η κίνηση αυτή οφείλεται στην περιστροφή των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα των ατόμων και την ιδιοπεριστροφή τους γύρω από τον εαυτό τους. Στους περισσότερους μαγνήτες η κύρια συνεισφορά στον μαγνητισμό είναι αυτή που οφείλεται στην ιδιοπεριστροφή.

Κάθε περιστρεφόμενο ηλεκτρόνιο είναι ένας μικροσκοπικός μαγνήτης. Δύο ηλεκτρόνια που περιστρέφονται κατά την ίδια φορά δημιουργούν ένα ισχυρό μαγνήτη, ενώ 2 ηλεκτρόνια που περιστρέφονται κατά αντίθετες φορές δρουν το ένα εναντίον του άλλου. Αυτό γιατί τα μαγνητικά τους πεδία αλληλοαναιρούνται. Ο λόγος που τα περισσότερα υλικά δεν έχουν μαγνητικές ιδιότητες είναι ότι οι φορές περιστροφής των ηλεκτρονίων έχουν αντίθετες φορές με αποτέλεσμα να μην δημιουργούν μαγνητικά πεδία. Σε υλικά όπως ο σίδηρος, το νικέλιο, το κοβάλτιο τα μαγνητικά πεδία δεν αλληλοαναιρούνται με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν μαγνητικές ιδιότητες. Οι περισσότεροι μαγνήτες είναι κράματα των παραπάνω υλικών.

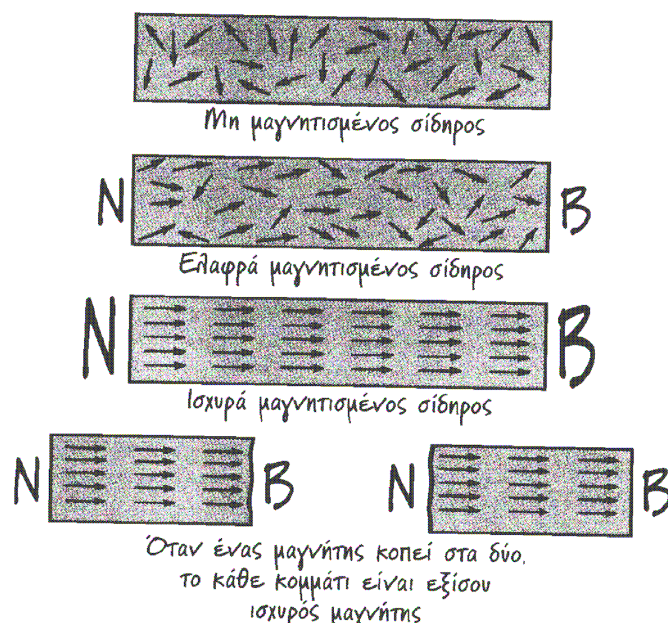
Το μαγνητικό πεδίο ενός ατόμου σιδήρου είναι τόσο ισχυρό ώστε να αλληλεπιδρά με το μαγνητικό πεδίο των γειτονικών του ατόμων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τα άτομα αυτά να ευθυγραμμίζονται και να δημιουργούν περιοχές μικροσκοπικών διαστάσεων όπου υπάρχουν εκατομμύρια ευθυγραμμισμένα άτομα. Οι περιοχές αυτές ονομάζονται **μαγνητικές περιοχές**. Με ανάλογο τρόπο της ευθυγράμμισης των ατόμων μέσα στις μαγνητικές περιοχές, ομοίως ευθυγραμμίζονται και οι διάφορες μαγνητικές περιοχές μεταξύ τους.

Ένα καρφί σιδήρου δεν είναι απαραίτητος μαγνήτης γιατί μπορεί οι μαγνητικές του περιοχές να μην είναι ευθυγραμμισμένες. Αν όμως φέρουμε τον μαγνήτη μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο τότε οι μαγνητικές περιοχές του σιδήρου θα ευθυγραμμιστούν και θα αποκτήσει μαγνητικές ιδιότητες. Όταν τώρα το μαγνητικό πεδίο αποσυρθεί οι περισσότερες ή και όλες οι μαγνητικές

περιοχές θα αποκτήσουν τυχαίες διευθύνσεις λόγω των θερμικών κινήσεων των ατόμων.

Οι μόνιμοι μαγνήτες κατασκευάζονται από κράματα σιδήρου που τοποθετούνται μέσα σε ισχυρά μαγνητικά πεδία.

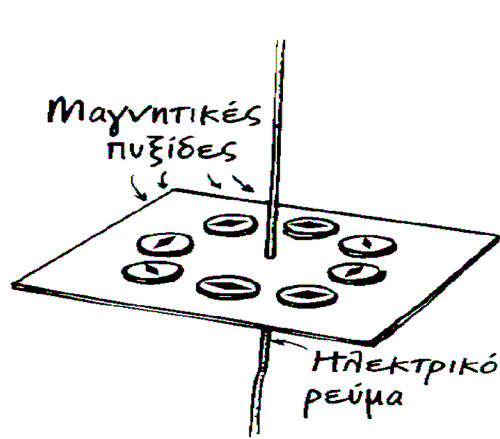
Το παρακάτω σχήμα εικονίζει διάφορες μαγνητικές καταστάσεις κομματιών σιδήρου.



Σχήμα 3.2: Μαγνητικές Περιοχές για διάφορα επίπεδα μαγνήτισης του σιδήρου («Οι Έννοιες της Φυσικής», P.G. Hewitt, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης)

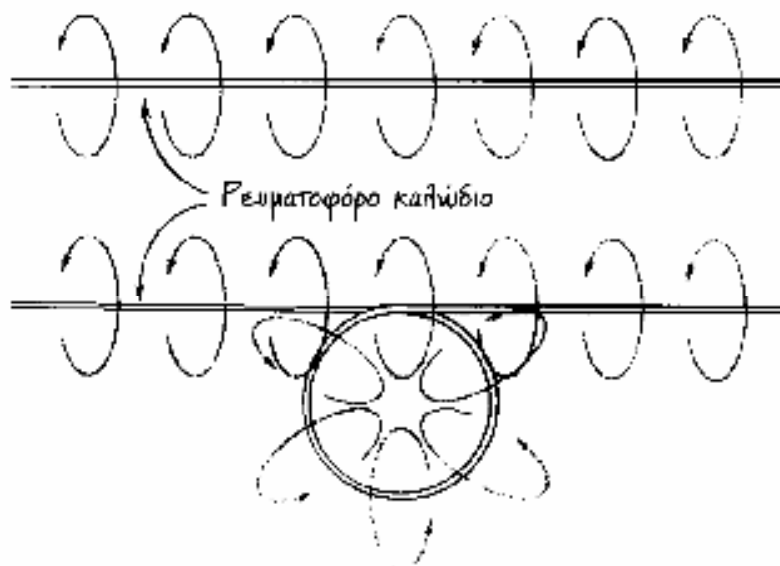
Αφού ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο είναι πηγή μαγνητικού πεδίου, τότε ένα ηλεκτρικό ρεύμα που είναι πολλά ηλεκτρικά φορτία σε κίνηση, είναι επίσης πηγή μαγνητικού πεδίου.

Το μαγνητικό πεδίο που περιβάλλει ένα ρευματοφόρο αγωγό είναι ομόκεντροι κύκλοι γύρω από αυτόν. Αυτό εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (Πείραμα Έρστεντ). Αν στο παρακάτω σχήμα η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος αντιστραφεί τότε η φορά του μαγνητικού πεδίου θα αντιστραφεί επίσης.



Σχήμα 3.3: Μαγνητικό Πεδίο Ρευματοφόρου Ευθύγραμμου Αγωγού («Οι Έννοιες της Φυσικής», P.G. Hewitt, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης)

Αν τώρα ο αγωγός καμφθεί τότε το μαγνητικό πεδίο θα διαπεράσει μέσα στο εσωτερικό βρόχο του αγωγού. Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών, άρα και η ένταση του μαγνητικού πεδίου, που διαπερνούν το εσωτερικό των βρόχων θα μεγαλώσει όσο μεγαλώνει ο αριθμός των κλειστών βρόχων.



Σχήμα 3.4: Μαγνητικό Πεδίο ευθύγραμμου και καμπύλου ρευματοφόρου σύρματος

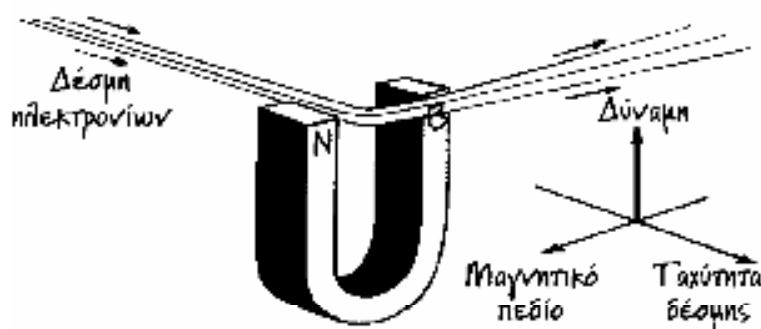
Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι το μαγνητικό πεδίο ενός ρευματοφόρου καλωδίου με πολλούς βρόχους μπορεί να πάρει πολύ υψηλή τιμή.

Ένα ρευματοφόρο σπειροειδές πηνίο είναι ένας **ηλεκτρομαγνήτης**. Για να ενισχύσουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένας μαγνήτης θα πρέπει

να αυξήσουμε το ηλεκτρικό ρεύμα που περνάει μέσα από αυτόν. Επίσης η ισχύς του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ένας μαγνήτης μπορεί να ενισχυθεί εάν μέσα σε αυτόν τοποθετήσουμε ένα κομμάτι σιδήρου. Οι μαγνητικές περιοχές του σιδήρου ευθυγραμμίζονται με το μαγνητικό πεδίο του ηλεκτρομαγνήτη με αποτέλεσμα την ενίσχυση του μαγνητικού πεδίου.

Στα νεκροταφεία αυτοκινήτων βλέπουμε τόσο ισχυρούς μαγνήτες που μπορούν να σηκώσουν ένα αυτοκίνητο. Το μαγνητικό τους πεδίο δεν μπορεί να δημιουργηθεί από την διέλευση μεγάλου ρεύματος μέσα από πηνία λόγω της θέρμανσης των τελευταίων. Τα τεράστια αυτά μαγνητικά πεδία για να δημιουργηθούν χρησιμοποιούν υπεραγωγία πηνία τα οποία μπορούν να διαπεραστούν ανεμπόδιστα από μεγάλα ρεύματα.

Ένα ακίνητο ηλεκτρικό φορτίο δεν αλληλεπιδρά με ένα μαγνητικό πεδίο. Εάν όμως το ηλεκτρικό φορτίο αρχίσει να κινείται τότε αποκαλύπτει τις μαγνητικές του ιδιότητες και αλληλεπιδρά με το μαγνητικό πεδίο. Ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο θα υποστεί μια δύναμη εκτροπής.



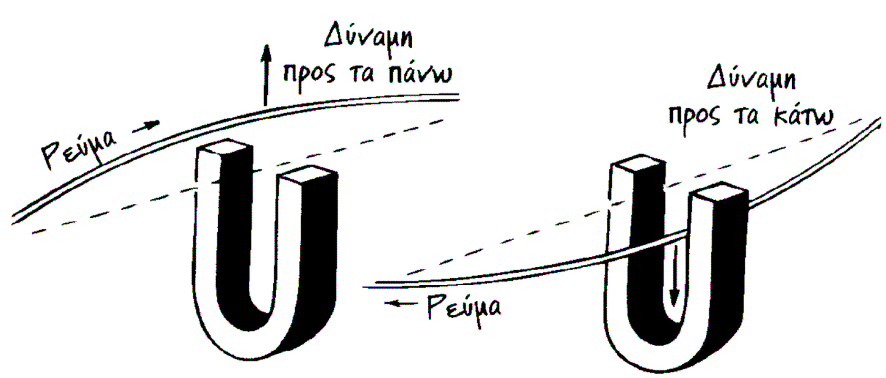
Σχήμα 3.5: Δύναμη Εκτροπής πάνω σε κινούμενο ηλεκτρόνιο μέσα σε μαγνητικό πεδίο
(«Οι Έννοιες της Φυσικής», P.G. Hewitt, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης)

Η δύναμη αυτή είναι κάθετη στην ταχύτητα του φορτισμένου σωματίου και είναι επίσης κάθετη στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Αυτό σημαίνει ότι εάν το φορτισμένο σωματίο κινείται παράλληλα με τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου τότε δεν θα εκτραπεί καθόλου. Εάν κινείται κάθετα

προς τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου τότε η δύναμη εκτροπής θα πάρει την μέγιστη τιμή της. Για οποιαδήποτε άλλη γωνία η τιμή της δύναμης εκτροπής θα πάρει μια ενδιάμεση τιμή.

Η μαγνητική δύναμη ή δύναμη εκτροπής που ασκείται από το μαγνητικό πεδίο προς το κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο είναι διαφορετική από τις βαρυτικές δυνάμεις ή τις ηλεκτρικές λόγω του γεγονότος ότι ασκείται κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν οι πηγές αλληλεπίδρασης.

Στο μαγνητικό πεδίο της Γης οφείλεται η προστασία μας από διάφορα φορτισμένα σωματίδια που φθάνουν από το διάστημα, αφού τα τελευταία εκτρέπονται από το γήινο μαγνητικό πεδίο. Αν δεν υπήρχε το μαγνητικό πεδίο της Γης τότε η ένταση των επιβλαβών κοσμικών ακτινών που προσπίπτουν στην Γη θα ήταν πολύ μεγαλύτερη. Είναι προφανές αφού ασκείται δύναμη σε ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο όταν βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, θα ασκείται δύναμη εκτροπής και σε ένα ρεύμα ,κινούμενα ηλεκτρικά φορτία, όταν αυτό βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Αν τα φορτισμένα αυτά σωματίδια είναι εγκλωβισμένα μέσα σε ένα καλώδιο θα υποστεί και το καλώδιο την ώθηση.

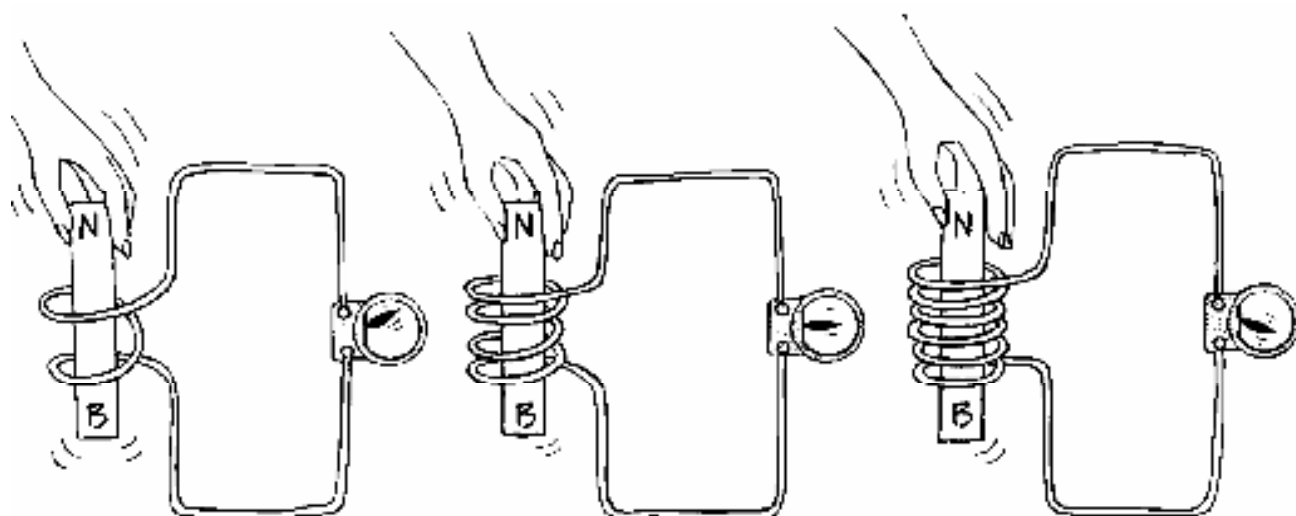


Σχήμα 3.6: Δύναμη που ασκείται από μαγνητικό πεδίο πάνω σε ρευματοφόρο αγωγό («Οι Έννοιες της Φυσικής», P.G. Hewitt, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης)

Αν η φορά του ρεύματος αντιστραφεί θα αντιστραφεί και η φορά της δύναμης εκτροπής. Η δύναμη που ασκείται σε ρευματοφόρο αγωγό είναι μέγιστη όταν το ρεύμα που το διαρρέει είναι κάθετο στις μαγνητικές γραμμές του πεδίου, ενώ παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν το ρεύμα είναι παράλληλο προς τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Και στην περίπτωση του

ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού η δύναμη εκτροπής είναι σε επίπεδο κάθετο από αυτό που ορίζουν ο αγωγός και το μαγνητικό πεδίο.

Το 1820 ο Ερνέστ ανακάλυψε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο. Ανέκυψε έτσι η ερώτηση μήπως και μπορούσε να δημιουργηθεί από το μαγνητικό πεδίο ηλεκτρικό ρεύμα. Η απάντηση δόθηκε το 1831 από 2 Φυσικούς τον Michael Faraday και τον J. Hentry. Ο Michael Faraday και J. Hentry ανακάλυψαν ότι μπορεί να παραχθεί ηλεκτρικό ρεύμα εάν ένας ραβδόμορφος μαγνήτης κινηθεί μέσα - έξω από ένα σύρμα που έχει την



Σχήμα 3.7: Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή – Πείραμα Faraday («Οι Έννοιες της Φυσικής», P.G. Hewitt, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης)

Η τάση στα άκρα ενός αγωγού επάγεται είτε κινείται το πεδίο ενός μαγνήτη κοντά σε ακίνητο αγωγό είτε κινείται ο αγωγός μέσα σε ένα στάσιμο μαγνητικό πεδίο. Όσο περισσότερες είναι οι σπείρες του σύρματος που κινούνται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο τόσο μεγαλύτερη είναι η επαγόμενη τάση. Αν σπρώξουμε ένα μαγνήτη μέσα σε ένα πηνίο με διπλάσιες σπείρες θα επαχθεί διπλάσια τάση, αν τον σπρώξουμε μέσα σε πηνίο μέσα σε πηνίο με δεκαπλάσιες σπείρες θα επαχθεί δεκαπλάσια τάση. Διαπιστώθηκε πειραματικά ότι είναι δυσκολότερο να σπρώξουμε τον μαγνήτη μέσα σε ένα πηνίο με περισσότερες σπείρες. Ο λόγος είναι ότι η επαγόμενη τάση δημιουργεί ρεύμα το οποίο δημιουργεί έναν ηλεκτρομαγνήτη που απωθεί τον μαγνήτη που

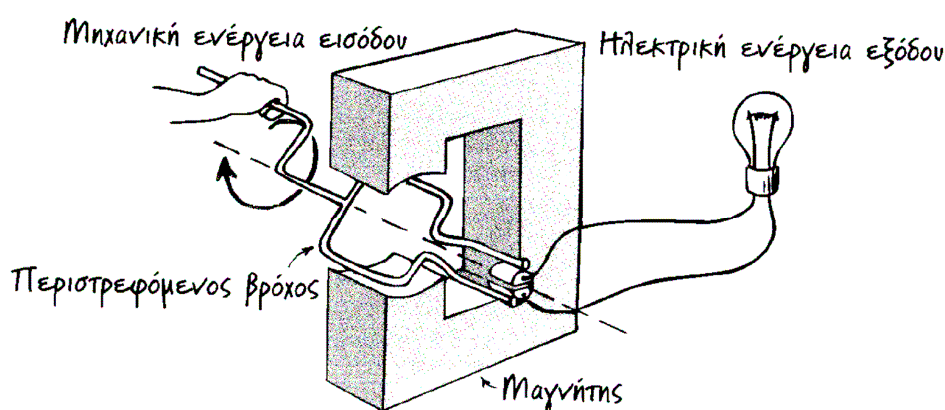
κινείται μέσα - έξω από το σπειροειδές σύρμα. Μεγαλύτερος αριθμός σπειρών σημαίνει μεγαλύτερη τάση, για την επαγωγή της οποίας απαιτείται να καταβάλουμε περισσότερο έργο.

Το μέγεθος της επαγόμενης τάσης εξαρτάται από το πόσο γρήγορα οι μαγνητικές γραμμές εισέρχονται ή εξέρχονται από αυτό. Επίσης εξαρτάται όπως είδαμε και παραπάνω από τον αριθμό των σπειρών. **Ο νόμος του Faraday** εκφράζει το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Η τάση που επάγεται σε ένα σπείρωμα είναι ανάλογη προς το γινόμενο του αριθμού των σπειρών επί τον ρυθμό της μεταβολής του μαγνητικού πεδίου στις σπείρες.

Ένας 3^{ος} τρόπος δημιουργίας ηλεκτρικού ρεύματος από ένα μαγνητικό πεδίο είναι μέσω μεταβολής του ρεύματος σε ένα γειτονικό αγωγίμο βρόχο. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου στην θέση του σπειροειδούς βρόχου δηλαδή την επαγωγή τάσης στα άκρα του.

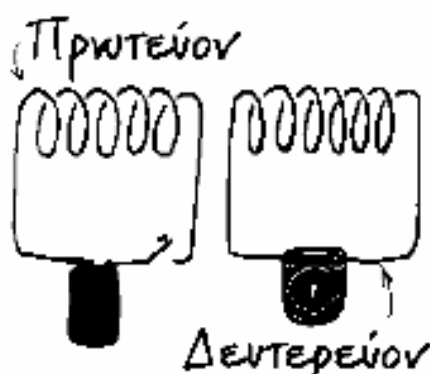
Εφαρμογή του νόμου του Faraday βρίσκουμε στις γεννήτριες ρεύματος. Η αρχή λειτουργίας της γεννήτριας εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.8: Αρχή λειτουργίας της Γεννήτριας («Οι Έννοιες της Φυσικής», P.G. Hewitt, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης)

Στο παραπάνω σχήμα είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι μπορούμε να παράγουμε ηλεκτρική ενέργεια με το να περιστρέφουμε ένα σπείρωμα μέσα σε ένα στάσιμο μαγνητικό πεδίο. Η παραπάνω διάταξη ονομάζεται γεννήτρια. Στην γεννήτρια η ενέργεια εισόδου είναι μηχανική και η ενέργεια εξόδου ηλεκτρική.

Η ηλεκτρική ενέργεια μπορεί να μεταφερθεί μέσω αγωγών άλλα μπορεί να μεταφερθεί και μέσω του κενού χώρου. Με την διάταξη του παρακάτω σχήματος μπορεί να γίνει μεταβίβαση ενέργειας από μια συσκευή σε μια άλλη.



Σχήμα 3.9: Μετασχηματιστής («Οι Έννοιες της Φυσικής», P.G. Hewitt, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης)

Το αριστερό πηνίο του παραπάνω σχήματος συνδέεται με μια μπαταρία και ονομάζεται πρωτεύον ενώ το δεξί συνδέεται με ένα γαλβανόμετρο και ονομάζεται δευτερεύον πηνίο. Η διάταξη αυτή είναι γνωστή ως **μετασχηματιστής**. Στην παραπάνω διάταξη με το που θα κλείσουμε το διακόπτη του πρωτεύοντος το δευτερεύον θα διαπεραστεί από ρεύμα με αποτέλεσμα το δευτερεύον πηνίο να διαπεραστεί και αυτό από ρεύμα για μικρό χρονικό διάστημα. Αν ανοίξουμε τον διακόπτη τότε και πάλι το δευτερεύον πηνίο θα διαπεραστεί από ένα παλμό ρεύματος. Η εξήγηση της αρχής λειτουργίας του μετασχηματιστή είναι απλή. Όταν το πρωτεύον πηνίο αρχίζει να διαρρέεται από ρεύμα, αναπτύσσεται γύρω του μαγνητικό πεδίο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το μαγνητικό πεδίο γύρω από το πρωτεύον να αυξάνεται. Τα 2 πηνία βρίσκονται σε κοντινή απόσταση με αποτέλεσμα το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο που αναπτύσσεται στο πρωτεύον να μεταφέρεται και στο

δευτερεύον πηνίο, και επομένως στα άκρα του να επάγεται τάση. Η επαγωγή της τάσης είναι προσωρινή στο δευτερεύον πηνίο μια και όταν σταθεροποιηθεί το ρεύμα στο πρωτεύον πηνίο τότε η τάση στο δευτερεύον θα γίνει ίση με μηδέν. Την στιγμή τώρα που ανοίγει ο διακόπτης το ρεύμα στο πρωτεύον θα πέσει στην τιμή μηδέν με αποτέλεσμα να μεταβληθεί η τιμή του μαγνητικού πεδίου. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την μεταβολή της μαγνητικής ροής μέσα από το δευτερεύον πηνίο άρα την επαγωγή τάσης στα άκρα του, με αντίστροφη τώρα πολικότητα από την αρχικά επαγόμενη τάση. Μόλις το ρεύμα μηδενιστεί στο πρωτεύον θα πάψει να επάγεται τάση στο δευτερεύον. Στην πραγματικότητα για να μην ανοίγουμε και κλείνουμε τον διακόπτη συνδέουμε το πρωτεύον πηνίο με μια πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος. Στην περίπτωση αυτή η συχνότητα των περιοδικών μεταβολών του μαγνητικού πεδίου ισούται με την συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος. Και έτσι έχουμε έναν μετασχηματιστή.

Αν τα πηνία έχουν ισάριθμες σπείρες τότε η τάση που επάγεται στο δευτερεύον πηνίο είναι η ίδια με την τιμή της τάσης στο πρωτεύον. Αν ο αριθμός των σπειρών του πρωτεύοντος πηνίου είναι περισσότερες από του δευτερεύοντος τότε η τάση που επάγεται στο τελευταίο είναι μικρότερη από αυτή του πρωτεύοντος (**υποβιβασμός τάσης**). Αν συμβαίνει το αντίθετο έχουμε **ανύψωση τάσης**.

Οι ρευματοφόρες σπείρες ενός πηνίου δεν αλληλεπιδρούν μόνο με σπείρες άλλων πηνίων αλλά αλληλεπιδρούν και μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα κάθε σπείρα αλληλεπιδρά με το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί μια άλλη σπείρα του πηνίου. Αυτό είναι το φαινόμενο της **αυτεπαγωγής**. Το αποτέλεσμα είναι η επαγωγή τάσης με πολικότητα που αντιτίθεται στην μεταβολή της τάσης που την δημιούργησε. Η τάση αυτή ονομάζεται **ηλεκτρεγερτική δύναμη εξ αυτεπαγωγής**.

Μέχρι τώρα μελετήσαμε την επαγωγή από την σκοπιά της παραγωγής τάσης και ρεύματος. Τα ηλεκτρικά πεδία με την σειρά τους δημιουργούν τις τάσεις και τα ρεύματα. Το φαινόμενο της επαγωγής λαμβάνει χώρα

ανεξάρτητα αν υπάρχει ή όχι κάποιο αγώγιμο σύρμα ή κάποιο άλλο μέσο. Η επαγωγή περιγράφεται από τον νόμο του Faraday στην γενική μορφή του είναι:

Σε οποιαδήποτε περιοχή του χώρου σημειώνεται χρονική μεταβολή ενός μαγνητικού πεδίου επάγεται ηλεκτρικό πεδίο. Το μέγεθος του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου είναι ανάλογο προς τον ρυθμό μεταβολής του μαγνητικού πεδίου. Η κατεύθυνση του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετη στην κατεύθυνση του μεταβαλλόμενου μαγνητικού.

Υπάρχει και ένας δεύτερος νόμος παρόμοιος με τον νόμο του Faraday μόνο που σε αυτόν οι ρόλοι του μαγνητικού πεδίου με το ηλεκτρικό αντιστρέφονται. Διατυπώθηκε από τον Maxwell και είναι ο παρακάτω:

Σε οποιαδήποτε περιοχή του χώρου σημειώνεται χρονική μεταβολή ενός ηλεκτρικού πεδίου επάγεται μαγνητικό πεδίο. Το μέγεθος του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου είναι ανάλογο με τον ρυθμό μεταβολής του ηλεκτρικού. Η κατεύθυνση του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου είναι κάθετη στην κατεύθυνση του μεταβαλλόμενου ηλεκτρικού.

3.2 Ο νόμος των Ampere και Maxwell

Η σχέση :

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

σχέση 3.1

ισχύει για τα ακίνητα ηλεκτρικά φορτία άλλα και για τα κινούμενα. Δηλαδή το ρ μπορεί να είναι συναρτήσεως του χρόνου και της θέσης.

Ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί ηλεκτρικό ρεύμα. Από την αρχή διατήρησης του φορτίου, η οποία μας πληροφορεί ότι το φορτίο δεν δημιουργείται άλλα ούτε καταστρέφεται, η πυκνότητα ρεύματος J και η πυκνότητα φορτίου ρ συνδέονται με την σχέση:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

σχέση (3.2)

Αν το J είναι σταθερό με τον χρόνο, στάσιμη κατανομή ρεύματος, τότε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί B συνδέεται με την πυκνότητα ρεύματος μέσω του νόμου του Ampere,

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

σχέση (3.3)

Ενδιαφερόμαστε τώρα για κατανομές φορτίων που μεταβάλλονται με τον χρόνο με αποτέλεσμα

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

π.χ. ένας πυκνωτής που εκφορτίζεται μέσω μιας αντίστασης, που σε συνδυασμό με την (3.2) δίνει

$$\nabla \cdot J \neq 0$$

σχέση (3.4)

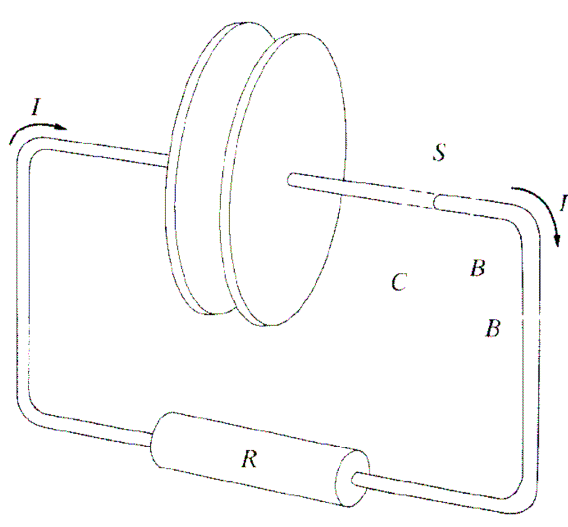
Γνωρίζουμε ότι η απόκλιση του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου είναι πάντα μηδέν, επομένως από εξίσωση (3.3) έχουμε:

$$\nabla \cdot J = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times B) = 0$$

Σχέση 3.5

Παρατηρείται όμως ότι η εξίσωση (3.5) έρχεται σε αντίθεση με την (3.4) χωρίς καμιά από τις 2 να είναι λάθος. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η εξίσωση (3.3) δεν είναι όλη η αλήθεια γιατί δεν μπορεί να περιγράψει την περίπτωση που η πυκνότητα ρεύματος μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να εξεταστεί αν μελετήσουμε το παράδειγμα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 3.10: Ρεύμα Διαρροής («Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός», E.M. Purcell, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ)

Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από την κλειστή διαδρομή C που περικλείει την επιφάνεια S και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stokes έχουμε:

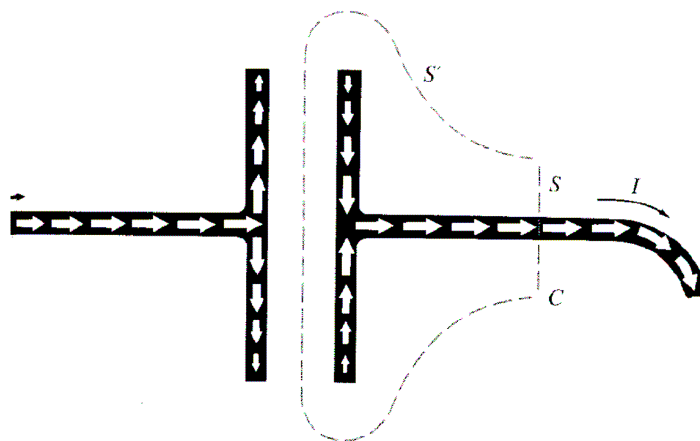
$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

σχέση 3.6

Η επιφάνεια S διασχίζει τελείως τον αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I. Μέσα στον αγωγό ο στροβιλισμός του B είναι ίσος με και το ολοκλήρωμα στα δεξιά γίνεται $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$. Επομένως αν η κλειστή διαδρομή C είναι αρκετά μακριά από τον πυκνωτή και κοντά στον ρευματοφόρο αγωγό τότε το μαγνητικό πεδίο που

δημιουργείται δεν διαφέρει σε τίποτα από το μαγνητικό πεδίο γύρω από οποιαδήποτε ρευματοφόρο αγωγό.

Ας επιλέξουμε τώρα μια επιφάνεια S' η οποία καταλήγει στην κλειστή διαδρομή C αλλά περικλείει και τον χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή.



Σχήμα 3.11 : Ρεύμα μετατόπισης («Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός», E.M. Purcell, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ)

Η επιφάνεια αυτή δεν διαρρέεται από ρεύμα, μια και οι οπλισμοί μεταξύ του πυκνωτή δεν διαρρέονται από ρεύμα. Παρόλα αυτά δεν μπορεί ο στροβιλισμός του B να είναι μηδέν σε ολόκληρη την επιφάνεια S' . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το curl (στροβιλισμός) του B πάνω στην επιφάνεια S' θα πρέπει να εξαρτάται και από μια άλλη ποσότητα εκτός από την πυκνότητα ρεύματος J . Επομένως η εξίσωση (4.4) πρέπει να συμπληρωθεί με κάποιο extra όρο που να μπορεί να περιγράψει και την περίπτωση μεταβαλλόμενων κατανομών φορτίου.

Στο κεφάλαιο 3 των σημειώσεων αυτών είδαμε ότι μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

σχέση (3.7)

Αν πρέπει να ισχύει η συμμετρία μεταξύ E και B τότε θα πρέπει και μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο να δημιουργεί μαγνητικό πεδίο. Η σχέση αυτή είναι η παρακάτω:

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

σχέση (3.8)

Η σχέση (3.8) συμπληρώνει και την σχέση (3.3) για να περιγράψει και την περίπτωση μεταβαλλόμενων ηλεκτρικών κατανομών. Επομένως η σχέση (3.3) από την (3.8) γράφεται ως εξής:

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

σχέση (3.9)

Υπολογίζοντας την απόκλιση της (3.9) έχουμε:

$$\nabla \cdot (\nabla \times B) = \mu_0 \nabla \cdot J + \mu_0 \nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

σχέση (3.10)

Το αριστερό μέρος της (3.10) είναι πάντα μηδέν, στο δεξί μέρος μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά της παραγωγίσισης ως προς τις συντεταγμένες του χώρου και τον χρόνο και να καταλήξουμε στην

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \varepsilon_0 E) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

σχέση (3.11)

Η (3.11) επιβεβαιώνει ότι ο extra όρος στην (3.9) περιγράφει τις μεταβαλλόμενες κατανομές φορτίου. Από εξισώσεις (3.10), (3.11) προκύπτει ότι:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

σχέση (3.12)

Ο νέος όρος επιλύει λοιπόν το πρόβλημα που προέκυψε προηγουμένως.

Η διανυσματική συνάρτηση

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

δημιουργεί μια συνέχεια στην κατανομή του ρεύματος αγωγιμότητας. Ο Maxwell ονόμασε την συνέχεια αυτή πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης J_d .

Έτσι η εξίσωση (3.9) γράφεται ως εξής :

$$\nabla \times B = \mu_0 (J + J_d)$$

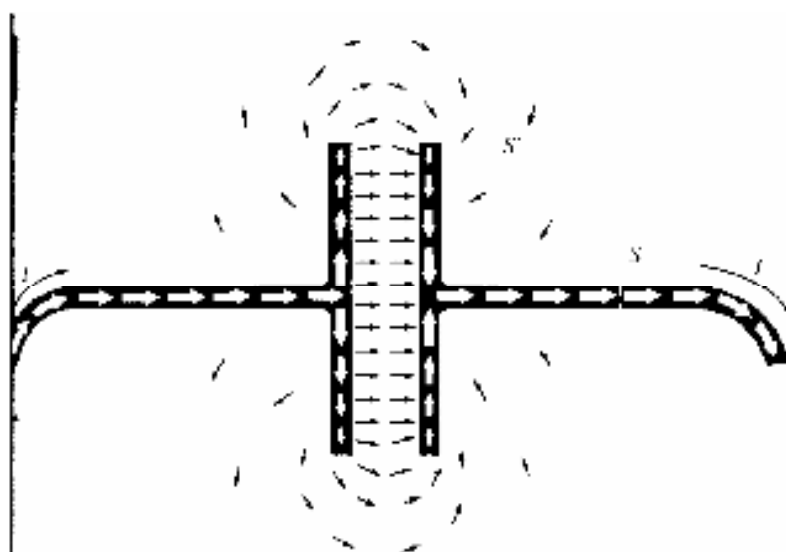
σχέση (3.13)

όπου J είναι το ρεύμα αγωγιμότητας και το J_d δίνεται από την σχέση:

$$J_d = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

σχέση (3.14)

Η εξίσωση (3.13) είναι γνωστή ως νόμος των Ampere – Maxwell. Η (3.14) μας πληροφορεί ότι το μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο είναι πηγή ενός ισοδύναμου ρεύματος, του ρεύματος μετατόπισης. Η πλήρης εικόνα με τι είδους ρεύμα διαρρέει ένα πυκνωτή δίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Σχήμα 3.12: Το ρεύμα αγωγιμότητας (με λευκά βέλη) και το ρεύμα μετατόπισης (μαύρα βέλη) («Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός», E.M. Purcell, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ)

Η εξίσωση (3.13) σε ολοκληρωτική μορφή μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\oint B \cdot dS = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

σχέση (3.15)

Ο extra όρος χρειάστηκε για να είμαστε συνεπής με τον εξίσωση συνέχειας του ηλεκτρικού φορτίου (δες εξίσωση (3.12). Ανακεφαλαιώνοντας ο νόμος των Ampere και Maxwell μας ενημερώνει ότι:

Τα μαγνητικά πεδία παράγονται από τα ρεύματα αγωγιμότητας και από τα μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία.

3.3 Ο νόμος του Faraday (ηλεκτρομαγνητική επαγωγή)

Ορίζουμε το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου B χρησιμοποιώντας την μαγνητική δύναμη την οποία υφίσταται ένα κινούμενο φορτίο, με ταχύτητα v .

Τα χαρακτηριστικά της μαγνητικής δύναμης που ασκείται σε ένα κινούμενο δοκιμαστικό φορτίο είναι τα ακόλουθα:

1. Η μαγνητική δύναμη είναι ανάλογη προς το φορτίο q και την ταχύτητα v του σωματίου.
2. Το μέτρο και η κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης εξαρτάται από το διάνυσμα της ταχύτητας του σωματίου καθώς και από το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

3. Όταν ένα φορτισμένο σωματίο κινείται παράλληλα με την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου τότε η μαγνητική δύναμη που ασκείται πάνω σε αυτό είναι ίση με μηδέν.
4. Όταν το διάνυσμα της ταχύτητας σχηματίζει γωνία θ με το μαγνητικό πεδίο, η μαγνητική δύναμη F είναι κάθετη στο v και στο B . δηλαδή είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα v και B .
5. Η μαγνητική δύναμη που δρα πάνω σε ένα θετικό φορτίο έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που δρα πάνω σε ένα αρνητικό φορτίο το οποίο κινείται στην ίδια την κατεύθυνση.
6. Εάν το διάνυσμα της ταχύτητας v του κινούμενου φορτίου σχηματίζει γωνία θ με το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου τότε το μέτρο της μαγνητικής δύναμης είναι ανάλογο του ημιτόνου της γωνίας αυτής.

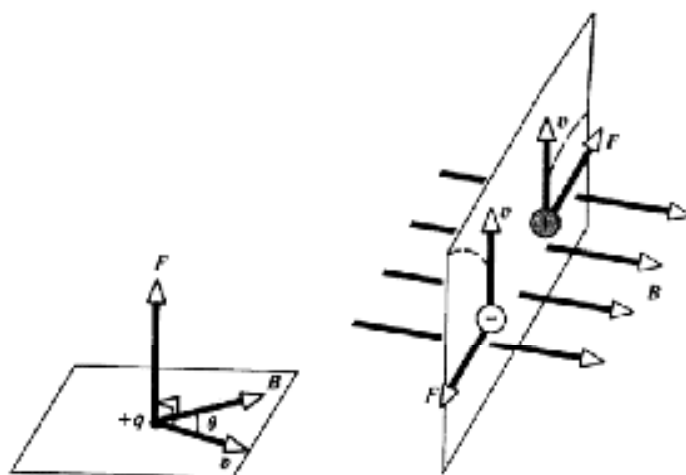
Από τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορεί να εξαχθεί η μαθηματική σχέση η οποία υπολογίζει το μέτρο και την διεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται πάνω σε ένα κινούμενο φορτίο. Η σχέση αυτή είναι η

$$F = qv \times B$$

σχέση (3.16)

Από (3.16) προκύπτει ότι η κατεύθυνση της δύναμης F βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζει το v και B . Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται

(α) η διεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται σε κινούμενο φορτίο και (β) η κατεύθυνση των δυνάμεων που ασκούνται σε αρνητικό και θετικό φορτίο που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο B .



Σχήμα 3.13: (α) Διεύθυνση μαγνητικής δύναμης (β) Διεύθυνση μαγνητικών δυνάμεων πάνω σε θετικά και αρνητικά φορτισμένα φορτία. (“Physics for Scientists & Engineers”, Serway, Τόμος II)

Το μέτρο της μαγνητικής δύναμης πάνω σε κινούμενο στοιχειώδες φορτίο δίνεται από την (3.16) και είναι

$$F = qvB \sin \theta$$

σχήμα (3.17)

όπου θ είναι η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα v και B . Από την (3.17) παρατηρούμε ότι η μαγνητική δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα στοιχειώδες φορτίο που κινείται υπό γωνία θ ίση με 0° , είναι ίση με μηδέν. Επίσης από την ίδια σχέση προκύπτει ότι η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα φορτίο που κινείται υπό γωνία $\theta = 90^\circ$ παίρνει την μέγιστη τιμή της και είναι ίση με $qv \cdot B$. Από τα χαρακτηριστικά που έχει η μαγνητική δύναμη μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν αρκετές ομοιότητες άλλα και διαφορές μεταξύ των ηλεκτρικών και των μαγνητικών δυνάμεων. Οι διαφορές είναι οι παρακάτω:

1. Η ηλεκτρική δύναμη κατευθύνεται πάντοτε παράλληλα (ή αντιπαράλληλα) προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου, ενώ η μαγνητική δύναμη είναι κάθετη προς το μαγνητικό πεδίο.

2. Η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα φορτίο είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα του σωματίου, ενώ η μαγνητική δύναμη δρα μόνο πάνω σε κινούμενα ηλεκτρικώς φορτισμένα σωματάρια.
3. Η ηλεκτρική δύναμη παράγει έργο καθώς μετακινεί ένα φορτισμένο σωματάριο, ενώ η μαγνητική δύναμη αν προέρχεται από σταθερό μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο μια και η μαγνητική δύναμη είναι κάθετη στην μετατόπιση τού φορτίου.

Από την παρατήρηση 3 βγαίνει το παρακάτω συμπέρασμα

Όταν ένα φορτίο κινείται με ταχύτητα v , ένα σταθερό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μπορεί να μεταβάλλει την κατεύθυνση αλλά όχι και το μέτρο της ταχύτητας του.

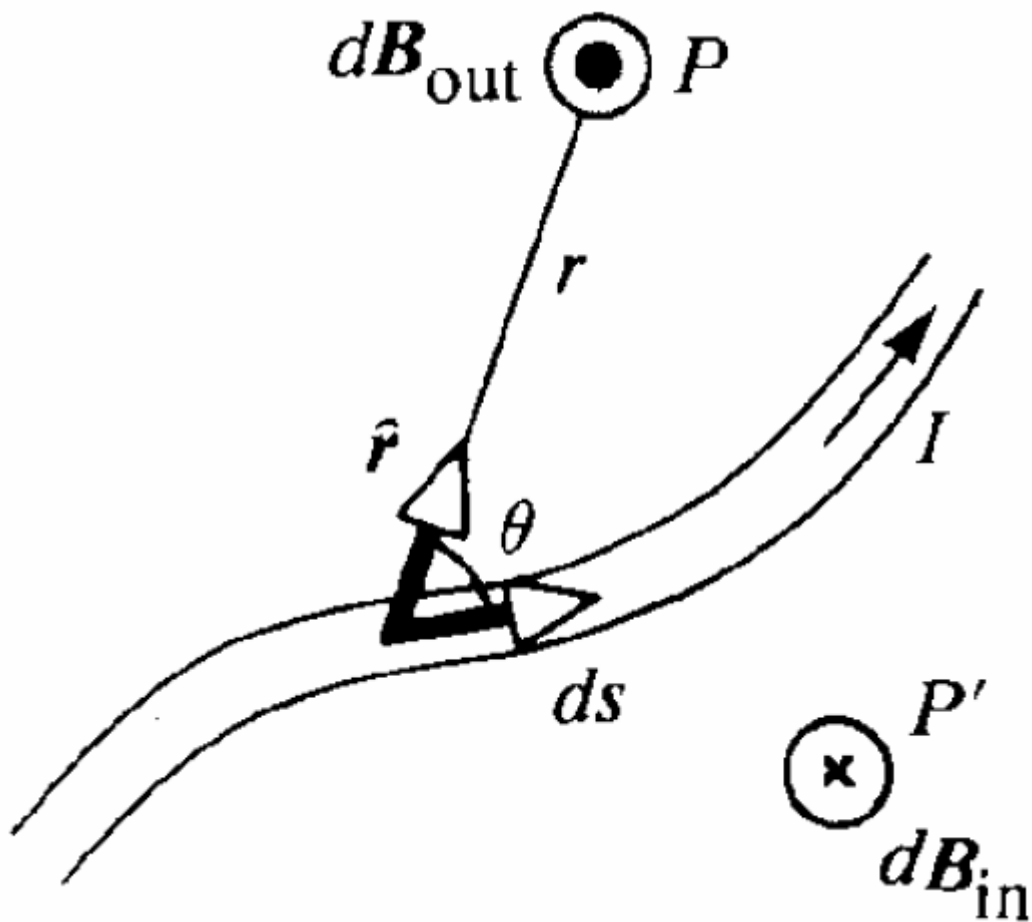
Μονάδα μέτρησης της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι tesla. Συχνά χρησιμοποιούμε την μονάδα του cgs που είναι το gauss. Η μετατροπή του tesla σε gauss γίνεται βάση της $1T = 10^4 G$.

3.4 Ο νόμος BIOT - SAVART

Οι Jean Baptiste Biot και Felix Savart βασιζόμενοι στις πειραματικές τους μετρήσεις διατύπωσαν ένα εμπειρικό νόμο ο οποίος επιτρέπει να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ρευματοφόρος αγωγός σε ένα σημείο του χώρου P. Πιο συγκεκριμένα ο νόμος των Biot Savart ορίζει ότι εάν ένα σύρμα διαρρέεται από ένα σταθερό ρεύμα I, τότε ένα στοιχειώδες τμήμα ds του σύρματος αυτού δημιουργεί σε ένα σημείο P στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο dB (δες παρακάτω σχήμα).

Τα χαρακτηριστικά του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ρευματοφόρος αγωγός είναι:

- Το διάνυσμα $d\mathbf{B}$ είναι κάθετο στο ds (που έχει την κατεύθυνση του ρεύματος) καθώς και στο μοναδιαίο διάνυσμα που κατευθύνεται από το στοιχειώδες τμήμα ds προς το σημείο P . $r \perp ds$
- Το μέτρο του $d\mathbf{B}$ είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το r^2 , όπου r είναι η απόσταση του τμήματος ds από το σημείο P . $2r$
- Το μέτρο του $d\mathbf{B}$ είναι ανάλογο προς το ρεύμα και προς το μήκος ds του στοιχείου.
- Το μέτρο του $d\mathbf{B}$ είναι ανάλογο προς το $\sin\theta$, όπου θ είναι η γωνία που περιέχεται από τα διανύσματα ds και r .



Σχήμα 3.18: Νόμος Biot- Savart (“Physics for Scientists & Engineers”, Serway, Τόμος II)

Ο νόμος των Biot-Savart περιγράφεται από την σχέση

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

σχέση 3.18

όπου μ_0 είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού ($4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb/Am} \cdot \text{m}$).
Ολοκληρώνοντας την σχέση (3.23) μπορούμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που

δημιουργεί ρευματοφόρος αγωγός πεπερασμένου μήκους. Έτσι το ολικό μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ρευματοφόρος αγωγός πεπερασμένου μήκους

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds \times \hat{r}}{r^2}$$

σε ένα σημείο P δίνεται από

Σχέση 3.19

Ανάμεσα στο νόμο των Biot – Savart και στον νόμο του Coulomb υπάρχουν οι παρακάτω ομοιότητες:

- Το στοιχειώδες ρεύμα $I ds$ παράγει μαγνητικό πεδίο ενώ το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο παράγει ηλεκτρικό πεδίο.
- Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι αντιστρόφως ανάλογο με το τετράγωνο της απόστασης ανάμεσα στην πηγή του μαγνητικού πεδίου και του σημείου που εξετάζουμε την ένταση του.

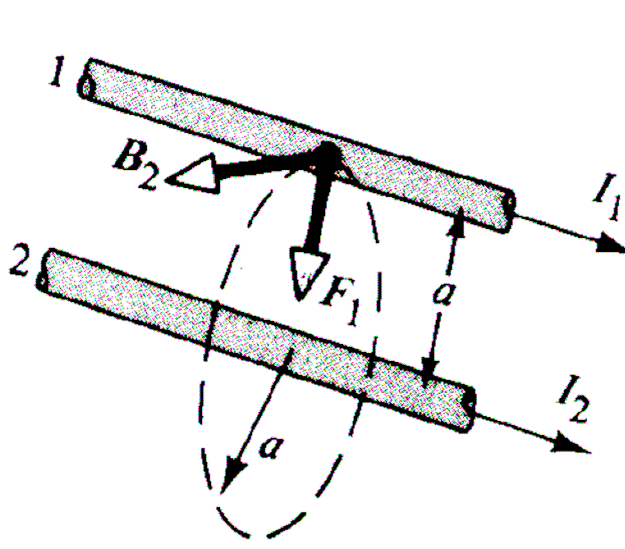
Υπάρχουν όμως και μια ενδιαφέρουσα διαφορά ανάμεσα στους νόμους του Biot – Savart και του νόμου του Coulomb. Αυτή είναι η παρακάτω:

- Η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου E είναι πάνω στην κατεύθυνση που ενώνει το σημειακό φορτίο πηγή με το σημείο που εξετάζουμε το ηλεκτρικό πεδίο (ακτινική διεύθυνση). Από την άλλη η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου B είναι κάθετη στο επίπεδο της πηγής του πεδίου που είναι το στοιχειώδες ρευματοφόρο τμήμα ds και του σημείου που μελετάμε το μαγνητικό πεδίο.

3.5 Πηγές μαγνητικού πεδίου

Είδαμε από τον νόμο των Biot Savart ότι ένας ρευματοφόρος αγωγός δημιουργεί το δικό του μαγνητικό πεδίο. Είναι προφανές λοιπόν ότι εάν τοποθετήσουμε κοντά τον ένα στο άλλο 2 ρευματοφόρους αγωγούς που διαρρέονται από ρεύμα, το μαγνητικό πεδίο του ενός είναι εξωτερικό μαγνητικό πεδίο για τον άλλο και επομένως ασκεί μαγνητική δύναμη επάνω του.

Θεωρήστε τους παρακάτω ευθύγραμμους ρευματοφόρους αγωγούς οι οποίοι διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα I_1 και I_2 και απέχουν μεταξύ τους απόσταση a (βλέπε παρακάτω σχήμα)



Σχήμα 3.19: Παράλληλοι Ρευματοφόροι Αγωγοί (“Physics for Scientists & Engineers”, Serway, Τόμος II)

Ο αγωγός 2 ως ρευματοφόρος δημιουργεί μαγνητικό πεδίο. Η ένταση B_2 του πεδίου αυτού είναι ίση με :

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$$

σχέση 3.20

Το μαγνητικό πεδίο που περιγράφει η σχέση (3.20) είναι κάθετο στην διεύθυνση διάδοσης του ρεύματος που διαρρέει τους 2 αγωγούς.

Από προηγούμενη εικόνα είναι φανερό ότι ο ρευματοφόρος αγωγός 1 βρίσκεται μέσα στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο που περιγράφει η σχέση (3.20). Επομένως πάνω στον αγωγό 1 θα ασκηθεί δύναμη F_1 από το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο αγωγός 2, που δίνεται από την σχέση:

$$F_1 = I_1 B_2 = I_1 l \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \rightarrow \frac{F_1}{l} = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi a}$$

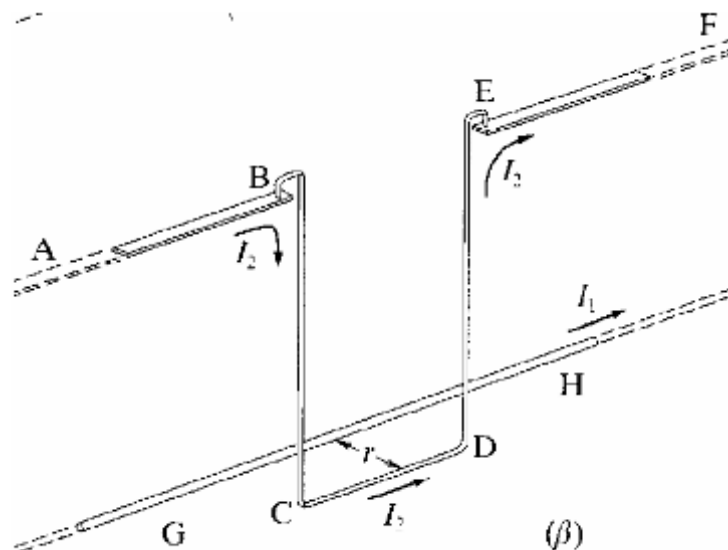
Σχέση 3.21

Προφανώς η δύναμη που ασκείται πάνω στον αγωγό 2 από το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο ένα δίνεται από μια παρόμοια σχέση της (3.21).

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του δεξιού χεριού παρατηρούμε ότι η δύναμη F_1 είναι ελκτική. Αν τα ρεύματα τώρα γίνουν αντίρροπα τότε εφαρμόζοντας ξανά τον κανόνα του δεξιού χεριού παρατηρούμε ότι η δύναμη θα είναι απωστική μεταξύ των 2 παράλληλα τοποθετημένων ρευματοφόρων αγωγών. Ως συμπέρασμα μπορούμε να εξαγάγουμε την παρακάτω δήλωση:

Παράλληλοι αγωγοί που διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα έλκονται, ενώ όταν τα ρεύματα είναι αντίρροπα οι παράλληλοι αγωγοί απωθούνται.

Η δύναμη μεταξύ 2 ρευματοφόρων αγωγών μπορεί να μετρηθεί πολύ ευκόλα χρησιμοποιώντας την παρακάτω διάταξη.



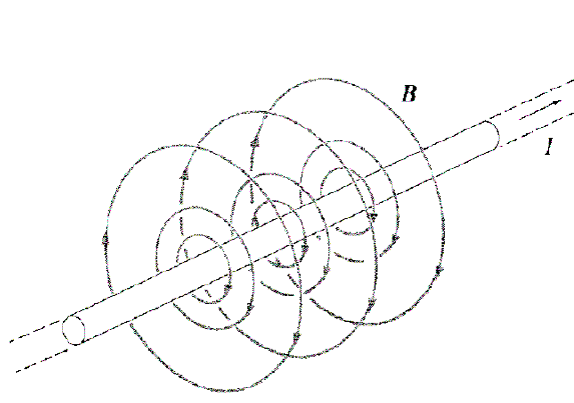
Σχήμα 3.20: Πειραματική διάταξη για τον υπολογισμό της δύναμης μεταξύ 2 ρευματοφόρων αγωγών («Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός», Ε.Μ. Purcell, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ)

Η σχέση (3.21) χρησιμοποιείται για τον ορισμό του Ampere (μονάδα μέτρησης έντασης ηλεκτρικού ρεύματος) και του Coulomb (μονάδα μέτρησης του ηλεκτρικού φορτίου). Οι ορισμοί παρατίθενται παρακάτω:

Εάν έχουμε 2 παράλληλα σύρματα τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 1m μεταξύ τους και τα οποία διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, τότε, όταν η δύναμη ανά μονάδα μήκους που υφίσταται κάθε σύρμα είναι ίση με 7210Nm^{-2} , η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κάθε σύρμα εξ ορισμού ισούται με 1 A.

Εάν ένας αγωγός διαρρέεται από σταθερό ρεύμα 1 A, τότε η ποσότητα του ηλεκτρικού φορτίου που διέρχεται από μια διατομή του αγωγού σε 1 s είναι 1 Coulomb.

Το μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου αγωγού σχηματίζει ομόκεντρους κύκλους γύρω από αυτόν, που κείνται σε επίπεδο κάθετο από αυτό του ρευματοφόρου αγωγού, όπως εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.21: Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού («Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός», E.M. Purcell, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ)

Η κατεύθυνση του B μπορεί να βρεθεί ακολουθώντας τον εξής κανόνα: Εάν πιάσουμε ένα ευθύγραμμο σύρμα με το δεξί χέρι έτσι ώστε ο αντίχειρας να δείχνει προς την κατεύθυνση του ρεύματος, τότε τα δάχτυλα θα κλείσουν γύρω από το σύρμα κατά την κατεύθυνση του B .

Όταν το ρεύμα αντιστραφεί τότε και η φορά του μαγνητικού πεδίου αντιστρέφεται.

Ας επιστρέψουμε όμως στο προηγούμενο σχήμα. Παρατηρήθηκε ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου αλλάζει εάν μεταβληθεί η απόσταση του σημείου εξέτασης του μαγνητικού πεδίου ή η ένταση του ρεύματος αλλάξει.

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από τον ρευματοφόρο αγωγό για μια κλειστή διαδρομή κάθετη στο επίπεδο του ρευματοφόρου σύρματος. Ας πάρουμε ως κλειστή διαδρομή μια κυκλική διαδρομή ακτίνας r που περικλείει το σύρμα (δες προηγούμενο σχήμα). Για μια τέτοια διαδρομή, μήκος ίσο με $2\pi r$, το μαγνητικό πεδίο είναι πάντα παράλληλο με την διαδρομή με αποτέλεσμα

$$\oint B \cdot dS = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

Σχέση 3.22

Από την 3.2 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή που διαγράφεται γύρω από το σύρμα πρέπει να δώσει την ίδια τιμή μαγνητικού πεδίου.

Προφανώς για μια διαδρομή η οποία περιβάλλει το ρεύμα N φορές θα δώσει ένα αποτέλεσμα για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (3.22) N φορές μεγαλύτερο. Επίσης από την (3.22) προκύπτει ότι για κλειστή διαδρομή που δεν περιέχει ρευματοφόρο αγωγό τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μηδέν.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως νόμος του Ampere και ισχύει για κάθε κλειστή διαδρομή από την οποία διέρχεται σταθερό με τον χρόνο ρεύμα. Δηλαδή:

Ο νόμος του Ampere ορίζει ότι το γραμμικό ολοκλήρωμα του γύρω από οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή ισούται με $BdS \cdot oI\mu$, όπου I είναι το ολικό σταθερό ρεύμα που διέρχεται μέσα από οποιαδήποτε επιφάνεια η οποία περιβάλλεται από την κλειστή διαδρομή. Δηλαδή

$$\oint B \cdot dS = \mu_o I$$

Σχέση 3.23

Ο νόμος του Ampere ισχύει μονάχα για σταθερά ρεύματα.

Ο νόμος του Ampere είναι χρήσιμος για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από διατάξεις οι οποίες παρουσιάζουν υψηλό βαθμό συμμετρίας, όπως ο νόμος του Gauss είναι χρήσιμος για να υπολογίσουμε το ηλεκτροστατικό πεδίο που δημιουργείται από συμμετρικές κατανομές φορτίου.

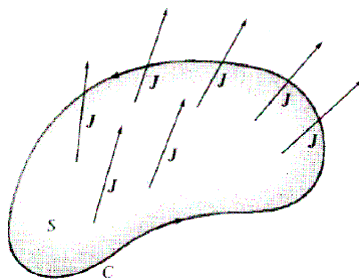
Μια πιο γενική έκφραση της σχέσης (3.23) αναφέρεται σε κατανομές όγκου του ρεύματος. Μια γενική κατανομή όγκου στατικού ρεύματος περιγράφεται από την πυκνότητα του ρεύματος $J(x, y, z)$, η οποία μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο άλλα παραμένει σταθερή ως προς τον χρόνο.

Για ρεύματα που δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο η πυκνότητα φορτίου ικανοποιεί την σχέση συνέχειας ή αλλιώς τη σχέση διατήρησης του φορτίου

$$\nabla \cdot J = 0$$

Σχέση 3.24

Αν πάρουμε μια οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη C που περικλείει μια κλειστή επιφάνεια το συνολικό ρεύμα που εγκλείεται δίνεται από την σχέση :



Σχήμα 3.22: Τοπική πυκνότητα ρεύματος J («Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική», Griffiths, Τόμος I).

Μια γενικότερη έκφραση της σχέσεως (3.23) μπορεί να εξαχθεί από τον ορισμό της πυκνότητας ρεύματος. Άρα

$$\int_C B \cdot dS = \mu_o \int_S J \cdot da$$

Σχέση 3.25

Από θεώρημα Stokes και εξίσωση (3.25) προκύπτει η διαφορική μορφή του νόμου του Ampere,

$$\nabla \times B = \mu_o J$$

Σχέση 3.26

Η εξίσωση (3.26) είναι η γενικότερη εξίσωση που μας ενημερώνει ότι το μαγνητικό πεδίο έχει ως πηγή του τα κινούμενα φορτία. Δεν είναι όμως αρκετή για τον πλήρη προσδιορισμό του B μια και αρκετά διανυσματικά πεδία μπορεί να έχουν τον ίδιο στροβιλισμό. Για αυτό τον λόγο η (3.26) πρέπει να συμπληρωθεί με μια επιπλέον συνθήκη.

Την συνθήκη αυτή μας την δίνει η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου. Ισχύει ότι, και αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα στην φύση, ότι η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν,

$$\nabla \cdot B = 0$$

Σχέση 3.27

Η (3.27) μας πληροφορεί ότι δεν υπάρχει κλειστή επιφάνεια που να περικλείει ακόμα και ρευματοφόρο αγωγό που να διαρέεται συνολικά από μαγνητική ροή (θα ορισθεί παρακάτω) προς τα μέσα ή προς τα έξω. Η εξίσωση (3.27) εκφράζει τον νόμο του Gauss για τον μαγνητισμό ο οποίος μας πληροφορεί ότι :

Ο νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό ορίζει ότι η ολική(ή καθαρή) ροή γραμμών μαγνητικού πεδίου (ή μαγνητική ροή) που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια είναι πάντοτε μηδενική:

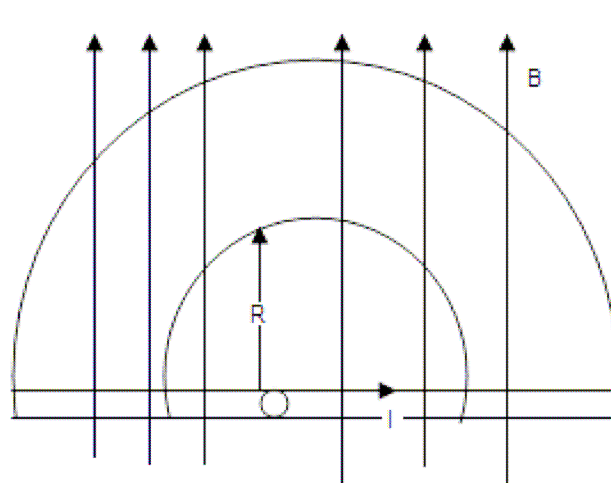
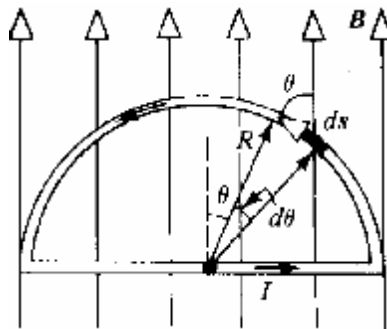
$$\oint B \cdot dA = 0$$

Σχέση 3.28

Από εξισώσεις (3.26), (3.27) μπορούν να προσδιορίσουν την ένταση του μαγνητικού πεδίου αν δίνεται το J.

3.6 Παράδειγμα στο μαγνητικό πεδίο ενός ρευματοφόρου αγωγού

Ένα σύρμα σχηματίζει κλειστό ημικύκλιο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα I και κείται πάνω στο πεδίο xy παρουσία ομογενούς μαγνητικού πεδίου που είναι παράλληλο προς την θετική κατεύθυνση του άξονα y. Υπολογίστε τις μαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται στο ευθύγραμμο μέρος, καθώς και στο καμπύλο μέρος του σύρματος.



Χωρίζουμε τον αγωγό σε απειροστά ευθύγραμμα τμήματα μήκους ds . Η δύναμη που ασκείται από το Μ.Π σε κάθε τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα είναι ίση με:

$$d\vec{F} = I d\vec{S} \times \vec{B}$$

Σχέση 1

Από (1) παρατηρούμε ότι η μαγνητική δύναμη που ασκείται ευθύγραμμου σε ένα στοιχειώδες τμήμα ds του αγωγού είναι ίση με:

$$dF = IdsB$$

Σχέση 2

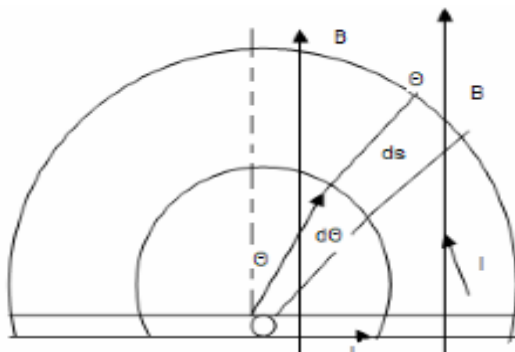
Η (2) ισχύει μια και $ds \perp B$ στο ευθύγραμμο τμήμα και άρα $\sin 90^\circ = +1$ στην 1.

Από (2) η ολική μαγνητική δύναμη πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα είναι:

$$F_1 = BI \int_0^{2R} ds \Rightarrow F_{1\text{ευθύγραμμοτμήμα}} = 2RIB$$

Σχέση 3

Για τον υπολογισμό της μαγνητικής δύναμης έχουμε το παρακάτω σχήμα:



σχήμα:3

$$\left. \begin{aligned}
 dF &= Id\vec{s} \times \vec{B} = IdsB \sin \theta \\
 \text{Αλλά } ds &= R d\theta \\
 \Rightarrow dF &= IBR \sin \theta d\theta \quad (4)
 \end{aligned} \right\}$$

Ολοκληρώνουμε την (4) για να υπολογίσουμε την ολική δύναμη πάνω στην κοίλη πλευρά. Άρα :

$$\begin{aligned}
 F_{ολ} &= \int_0^{\pi} IRB \sin \theta d\theta = IRB \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \\
 &= +IRB \int_0^{\pi} d(-\cos \theta) =
 \end{aligned}$$

$$= IRB[-\cos \theta]_0^{\pi} = IRB[+1+1] = 2IBR \quad (5)$$

Η κατεύθυνση της (5) είναι κάθετη προς την σελίδα του βιβλίου. Έχει φορά προς την σελίδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Φυσική με το Excel

4.1 Εισαγωγή

Αυτό το κεφάλαιο ουσιαστικά είναι η παρουσίαση της όλης ηλεκτρονικής εργασίας που έγινε με χρήση του λογιστικού προγράμματος Microsoft Excel. Το ηλεκτρονικό κομμάτι της εργασίας βασίζεται πάνω στο βιβλίο "*Φυσική με το Excel - Ηλεκτρομαγνητισμός*" της Π.Α Ασημακοπούλου καθηγητού του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Το βιβλίο αυτό είναι κατά βάση ένα εγχειρίδιο, που μας βοηθά να επιλύσουμε προβλήματα του Ηλεκτρομαγνητισμού μέσω του Excel. Παρατίθενται μεθοδολογίες και τρόποι βήμα-βήμα καθώς και πολλές άλυτες ασκήσεις.

Στόχος αυτής της πτυχιακής εργασίας ήταν η επίλυση όλων των άλυτων ασκήσεων καθώς και των παραδειγμάτων. Να ενταχτεί ως διδακτικό υλικό και ενδεχομένως να αποτελέσει εργαλείο εκμάθησης των σπουδαστών, σε εργαστήρια φυσικής και ηλεκτρομαγνητισμού.

Όλο το ηλεκτρονικό υλικό που προήλθε από την παρούσα πτυχιακή εργασία είναι αποθηκευμένο σε αρχεία του Excel. Επειδή δεν είναι δυνατόν να εκτυπωθούν και να διατυπωθούν όλα πλήρως στο χαρτί, ο αναγνώστης πρέπει να χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα Excel για την αποτελεσματικότερη κατανόηση της εργασίας.

Παρακάτω παρουσιάζονται 3 λυμένα προβλήματα, τα οποία με τη κατάλληλη μελέτη και εκτενής συζήτηση, κρίθηκαν ποιο απλά και κατατοπιστικά μετά από συνεννόηση μας με τον υπεύθυνο καθηγητή της πτυχιακής μας εργασίας Κ. Πετρίδη.

4.2 Αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων

Ήδη από τον 19^ο αιώνα είναι γνωστοί δύο κανόνες για την ολοκλήρωση μιας συνάρτησης, που θα παραθέσουμε εδώ υπό την μορφή «συνταγής» χωρίς περαιτέρω απόδειξη.

Κανόνας του τραπεζοειδούς:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h \left[\frac{5}{12} f_1 + \frac{13}{12} f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{N-2} + \frac{13}{12} f_{N-1} + \frac{5}{12} f_N \right] + \left(\frac{1}{N^3} \right) \quad (2.5)$$

Κανόνας του Simpson:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h \left[\frac{1}{3} f_1 + \frac{4}{13} f_2 + \frac{2}{3} f_3 + \frac{4}{3} f_4 + \dots + \frac{2}{3} f_{N-2} + \frac{4}{3} f_{N-1} + \frac{1}{3} f_N \right] + \left(\frac{1}{N^4} \right) \quad (2.6)$$

Στον κανόνα του Simpson τα αποσιωπητικά (...) δηλώνουν εναλλαγή όρων με συντελεστές 2/3 και 4/3. Ο τελευταίος όρος στις προηγούμενες εκφράσεις δίνει την εκτίμηση του σφάλματος στον υπολογισμό. Όπως αναμένεται δηλώνει ότι η ακρίβεια αυξάνει με αντίστοιχη αύξηση του αριθμού N (ή σμίκρυνση του βήματος h) της ολοκλήρωσης.

4.3 Εργαστηριακή Άσκηση 2.1

Αριθμητική ολοκλήρωση συνάρτησης

Ως παράδειγμα αριθμητικής ολοκλήρωσης θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{(x^2 + \alpha^2)^{\frac{9}{2}}} \quad (2.7)$$

με άριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^2 + \alpha^2)^{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{5} \frac{x^5}{(x^2 + \alpha^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{(x^2 + \alpha^2)^{\frac{7}{2}}} \right) \quad (2.8)$$

που βρέθηκε σε κάποιο εγχειρίδιο συλλογής ολοκληρωμάτων.

1. Δημιουργήστε ένα νέο βιβλίο του Excel. Μετονομάστε το φύλλο 1 **Δεδομένα** και το φύλλο 2 **Αθροίσματα**.
2. Στο φύλλο **Δεδομένα** καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί A1, το κάτω και άνω όριο της ολοκλήρωσης και την τιμή της σταθεράς α στην εξ. (2.8), π.χ.

	A	B	C
1	κάτω όριο	-1	
2	Άνω όριο	1	
3	σταθερά	4	

Στο φύλλο **Αθροίσματα**, στα κελιά A1 και B1, τοποθετήστε το βήμα ολοκλήρωσης h . Για διαχωρισμό του πεδίου ολοκλήρωσης σε 1000 τμήματα, η τιμή του διαστήματος h στο κελί B1 πρέπει να δίνεται από τη συνάρτηση

$$=0.001*(\text{Δεδομένα!B2}-\text{Δεδομένα!B1})$$

Με τη συνάρτηση αυτή στο κελί B1, το φύλλο **Αθροίσματα** πρέπει να έχει τη μορφή

	A	B	C
1	$h=$	0.002	
2			

4. Στη σειρά 3 τοποθετήστε τις επικεφαλίδες που περιέχονται στο επόμενο σχήμα

	A	B	C	D
1	h=	0.002		
2				
3	x	f(x)	τραπεζοειδής	simpson
4				

5. Στο κελί A4 τοποθετήστε την τιμή του κάτω ορίου της ολοκλήρωσης

=Δεδομένα!\$β\$1

6. Στο κελί A5 αυξήστε την τιμή του x κατά το βήμα h, γράφοντας

=A4+\$B\$1

7. Αντιγράψτε το κελί A5 στα κελιά A6 μέχρι A1004. Η τιμή στο κελί A1004 πρέπει να είναι τώρα 1.

8. Δημιουργήστε μια συνάρτηση του Excel που να αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $f(x,a)$ της εξ. (2.8). Για το σκοπό αυτό:

- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Μακροεντολές**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση της εξίσωσης (2.8) η συνάρτηση είναι:

Function f(x,a)

$$F = x^4 / (x^2 + a^2)^{(9/2)}$$

End function

- Θα παρατηρήσετε ότι το Βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο φύλλο με την ονομασία *Μονάδα 1* που περιέχει την προηγούμενη συνάρτηση.

9. Στη στήλη B του φύλλου *Άθροισματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $f(x, \alpha)$.

- Στο κελί B4 εισάγετε την έκφραση

$$=f(A4; \text{Δεδομένα!}\$B\$3)$$

- Αντιγράψτε το κελί B4 στα κελιά B5 μέχρι B1004.

10. Στη στήλη C του φύλλου *Άθροισματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $f(x, \alpha)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Τραπεζοειδούς.

- Στο κελί C4 εισάγετε

$$= 5/12 * B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C4 στο κελί C1004.

- Στο κελί C5 εισάγετε

$$=13/12 * B5$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C5 στο κελί C1003.

- Στο κελί C6 εισάγετε

=B6

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C6 στα κελιά C7: C1002.

11. Στη στήλη D του φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $f(x,\alpha)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Simpson.

- Στο κελί D4 εισάγετε

=1/3 * B4

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D4 στο κελί D1004.
- Στο κελί D5 εισάγετε

=4/3 * B5

Και στο κελί D6

=2/3 *B6

- Επιλέξτε τα κελιά D5 και D6 και αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού D5 στο κελί D1003.

12. Στο φύλλο *Δεδομένα*, με απαρχή το κελί A5 δημιουργήστε ένα κατάλογο για τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης.

	A	B	C
1	κάτω όριο	-1	
2	Άνω όριο	1	
3	σταθερά	4	
4			
5	Αθροίσματα f(x)		
6	τραπεζοειδές		
7	Simpson		
8	Αναλυτικά		

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής “Αθροίσματα f(x)” (κελί B4) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από το απλό άθροισμα των τιμών της συνάρτησης επί το βήμα:

$$= \text{Αθροίσματα!B1*Sum*Αθροίσματα!B4:Αθροίσματα!B1004}$$

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής “Τραπεζοειδές” (κελί B5) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από τον κανόνα του τραπεζοειδούς:

$$= \text{Αθροίσματα!B1*Sum*Αθροίσματα!C4:Αθροίσματα!C1004}$$

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής “Simpson” (κελί B6) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από τον κανόνα του Simpson:

$$= \text{Αθροίσματα!B1*Sum*Αθροίσματα!D4:Αθροίσματα!D1004}$$

13. Για σύγκριση με την τιμή που δίνει η αναλυτική έκφραση του ολοκληρώματος στην εξ. (2.8) θα πρέπει να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $g(x, \alpha)$. Όπως προηγουμένως, επιλέξτε από τα μενού του Excel **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Μακροεντολές**. Στο παράθυρο που θα ανοίξει γράψτε την

συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση της εξ. (2.8) η σύνταξη είναι:

Function g(x, a)

$$g = 1 / a ^ 4 * (1 / 5 * x ^ 5 / (x ^ 2 + a ^ 2) ^ (5 / 2) - 1 / 7 * x ^ 7 / (x ^ 2 + a ^ 2) ^ (7 / 2))$$

End Function

- Θα παρατηρήσετε ότι το βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο φύλλο με την ονομασία *Μονάδα 2* που περιέχει την προηγούμενη συνάρτηση.
- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής “Αναλυτικά” (κελί B7) υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει από την αναλυτική έκφραση της εξ. (2.8):

$$=g(B2;B3) - g(B1;B3)$$

- Θα παρατηρήσετε στο φύλλο δεδομένα το εξής αποτέλεσμα

	A	B	C
1	κάτω όριο	-1	
2	Άνω όριο	1	
3	σταθερά	4	
4			
5	Αθροίσματα f(x)	1.26201E-06	
6	τραπεζοειδές	1.25619E-06	
7	Simpson	1.25619E-06	
8	Αναλυτικά	1.25619E-06	

4.4 Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ράβδου

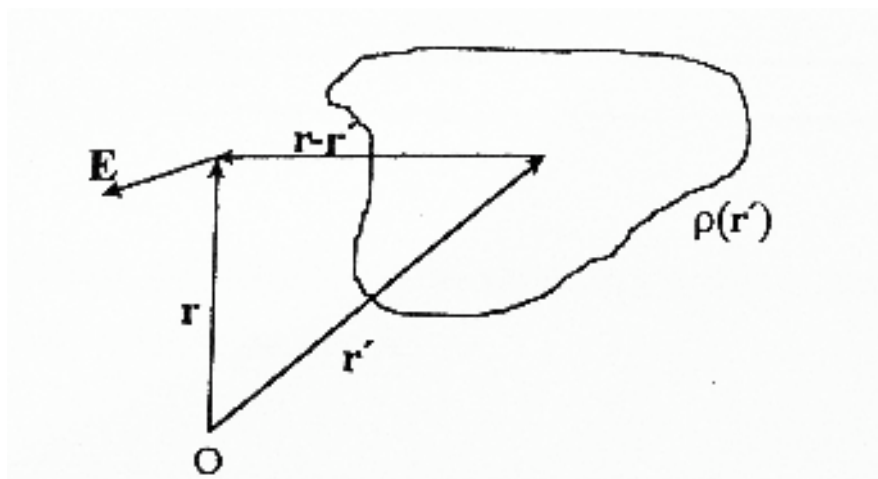
Θεωρείστε μια ράβδο ολικού μήκους l κατά τον άξονα X και με το μέσο της στην αρχή των συντεταγμένων. Η ράβδος φέρει καθ' όλο το μήκος της σταθερή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου $\lambda [C m^{-1}]$. Θεωρείστε ακόμη ένα σημείο P στις συντεταγμένες $(x,y) = (b,a)$. Η γεωμετρία της διάταξης δίνεται στο σχήμα 3-2.

Μπορούμε να δείξουμε ότι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου E στο σημείο P δίνονται από τις σχέσεις:

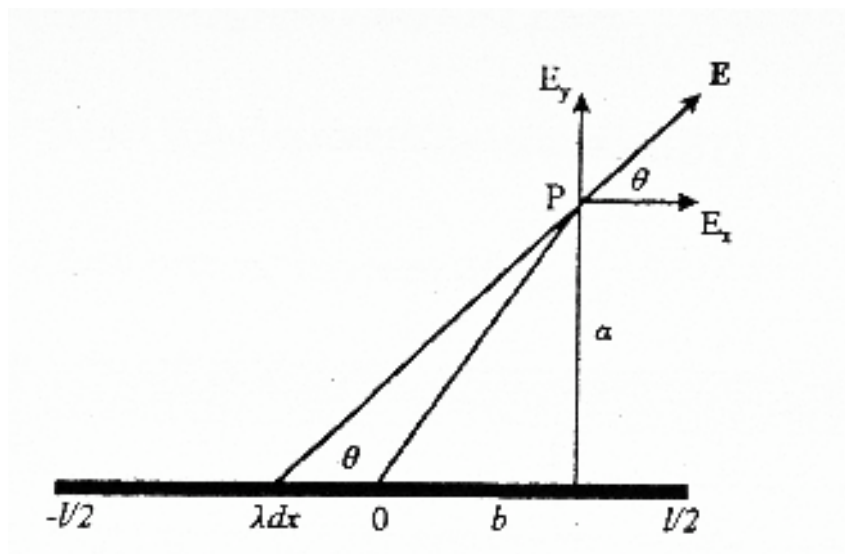
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} e_x(x,a,b) dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{(b-x)dx}{[(b-x)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (3.3\alpha)$$

$$E_y = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} e_y(x,a,b) dx = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{[(b-x)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (3.3\beta)$$

Οι εξισώσεις (3.3) είναι δυνατόν να ολοκληρωθούν αναλυτικά με αποτέλεσμα :



Σχήμα 3-1 το ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου $\rho(r)$.



Σχήμα 3-2 ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ράβδου

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(b - l/2)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(b + l/2)^2 + a^2}} \right] \quad (3.4\alpha)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{b + l/2}{\sqrt{(b + l/2)^2 + a^2}} - \frac{b - l/2}{\sqrt{(b - l/2)^2 + a^2}} \right] \quad (3.4\beta)$$

Η γωνία θ που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο E με τη διεύθυνση της ράβδου είναι

$$\theta = \tan^{-1} \frac{E_y}{E_x} \quad (3.5)$$

4.5 Εργαστηριακή άσκηση 3.1

Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ράβδου

1. Δημιουργήστε ένα βιβλίο του Excel. Μετονομάστε το φύλλο 1 *Δεδομένα* και το φύλλο 2 *Αθροίσματα*.
2. Στο φύλλο δεδομένα καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί A1, το κάτω και το άνω όριο της ολοκλήρωσης, π.χ.

	A	B	C
1	Κάτω όριο	-2	
2	Άνω όριο	2	
3			

3. Στο φύλλο *Δεδομένα* καταγράψτε, αρχίζοντας από το κελί D1, τις σταθερές $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, λ , l , a και b που υπεισέρχονται στις εξ. (3.3), π.χ.

	D	E	F	G
1	$1/4\pi\epsilon_0=$	8,96E+09	$\lambda=$	3,00E-08
2	L=	4		
3	a=	6		
4	b=	1,5		

4. Στο φύλλο *Αθροίσματα*, στα κελιά A1 και B1, τοποθετήστε το βήμα της ολοκλήρωσης h

	A	B
1	h=	0,004
2		

Για διαχωρισμό του πεδίου ολοκλήρωσης σε 1000 τμήματα, η τιμή του διαστήματος h στο κελί B1 είναι :

$$=0,001*(\text{δεδομένα!B2}-\text{δεδομένα!B1})$$

5. Στη σειρά 3 εισάγετε τις επικεφαλίδες :

	A	B	C	D	E	F	G
1	$h=$	0,004					
2							
3	x	$E_x(a,b)$	Τραπεζοειδές Simpson		$E_y(a,b)$	Τραπεζοειδές Simpson	

6. Στο κελί A4 τοποθετείστε την τιμή του κάτω ορίου της ολοκλήρωσης:

$$=\text{δεδομένα!}\$B\$1$$

7. Στο κελί A5 αυξήστε την τιμή του x κατά το βήμα h , γράφοντας:

$$=A4+\$B\$1$$

8. Αντιγράψτε το κελί A5 στα κελιά A6 μέχρι A1004. Η τιμή στο κελί A1004 πρέπει να είναι τώρα 2.

9. Δημιουργήστε μια συνάρτηση στο Excel που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση

$e_x(x,a,b)$ που ολοκληρώνεται στην εξ. (3.3α). Για το σκοπό αυτό :

- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Μακροεντολές**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση της εξ (3.3α) η σύνταξη είναι:

Function Ex(x, a, b)

$$Ex = (b - x) / ((b - x) ^ 2 + a ^ 2) ^ (3 / 2)$$

End Function

- Θα παρατηρήσετε ότι το βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο φύλλο με την ονομασία *Μονάδα 1* που περιέχει την προηγούμενη συνάρτηση.

•

10. Δημιουργήστε μια συνάρτηση του Excel που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $e_y(x,a,b)$ που ολοκληρώνεται στην εξ. (3.3β). Για αυτό το σκοπό :

- Επιλέξτε **Εργαλεία** → **Μακροεντολή** → **Μακροεντολές**
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει γράψτε την συνάρτηση σε γλώσσα *Visual Basic*. Για την συνάρτηση της εξ (3.3β) η σύνταξη είναι:

•

```
Function Ey(x, a, b)
Ey = a / ((b - x) ^ 2 + a ^ 2) ^ (3 / 2)
End Function
```

- Θα παρατηρήσετε ότι το βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο φύλλο με την ονομασία *Μονάδα 2* που περιέχει την προηγούμενη συνάρτηση.

11. Στη στήλη B του φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $e_x(x,a,b)$.

- Στο κελί B4 εισάγετε την έκφραση:

```
=Ex(A4;δεδομένα!$E$3;δεδομένα!$E$4)
```

- Αντιγράψτε το κελί B4 στα κελιά B5 μέχρι B1004.

12. Στη στήλη C του φύλλου αθροίσματα καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $e_x(x,a,b)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του τραπεζοειδούς.

- Στο κελί C4 εισάγετε :

$$=5/12*B4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C4 στο κελί C1004.

- Στο κελί C5 εισάγετε

$$=13/12*B5$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C5 στο κελί C1003.

- Στο κελί C6 εισάγετε

$$=B6$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού C6 στα κελιά C7:C1004.

13. Στη στήλη D του φύλλου αθροίσματα καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $e_x(x,a,b)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Simpson.

- Στο κελί εισάγεται την έκφραση

$$=Ey(A4;δεδομένα!E3;δεδομένα!E4)$$

- Αντιγράψτε το κελί E4 στα κελιά E5 με E1004.

15. Στη στήλη F του φύλλου *Αθροίσματα* καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης : $e_y(x,a,b)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του τραπεζοειδούς.

- Στο κελί F4 εισάγετε :

$$=5/12*E4$$

- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού F4 στο κελί F1004.
- Στο κελί F5 εισάγετε :
 $=13/12*E5$
- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού F5 στο κελί F1003.
- Στο κελί F6 εισάγετε
 $=E6$
- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού F6 στα κελιά F7: F1002.

16. Στη στήλη G του φύλλου αθροίσματα καταχωρίστε τις τιμές της συνάρτησης $e_y(x,a,b)$ που απαιτούνται στο άθροισμα του κανόνα του Simpson.

- Στο κελί G4 εισάγετε
 $=1/3*E4$
- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού G4 στο κελί G1004.
- Στο κελί G5 εισάγετε
 $=4*3*E5$
και στο κελί G6
 $=2/3*E6$
- Επιλέξτε τα κελιά G5 και G6 και αντιγράψτε το περιεχόμενό τους στα κελιά G7: G1002.
- Αντιγράψτε το περιεχόμενο του κελιού G5 στο κελί G1003.

17. Στο φύλλο *Δεδομένα* , με απαρχή το κελί A5 δημιουργήστε ένα κατάλογο για τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης

5		E(x)	E(y)
6	Τραπεζοειδές		
7	Simpson		
8	Αναλυτικά		
9			
10	Γωνία		

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής “Τραπεζοειδές” (κελί B6 και C6) υπολογίστε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν από τον κανόνα του Τραπεζοειδούς:

B6:

$$= \$G\$1 * \$E\$1 * \text{αθροίσματα!} \$B\$1 * \text{SUM}(\text{αθροίσματα!} C4 : \text{αθροίσματα!} C1004)$$

C6:

$$= \$G\$1 * \$E\$1 * \text{αθροίσματα!} \$B\$1 * \text{SUM}(\text{αθροίσματα!} F4 : \text{αθροίσματα!} F1004)$$

- Στο δεξιό μέρος της εγγραφής “Simpson (κελί B7 και C7) υπολογίστε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν από τον κανόνα του Simpson.

B7:

$$= \$G\$1 * \$E\$1 * \text{αθροίσματα!} \$B\$1 * \text{SUM}(\text{αθροίσματα!} D4 : \text{αθροίσματα!} D1004)$$

C7:

$$= \$G\$1 * \$E\$1 * \text{αθροίσματα!} \$B\$1 * \text{SUM}(\text{αθροίσματα!} G4 : \text{αθροίσματα!} G1004)$$

Στο δεξιό μέρος της εγγραφής “Αναλυτικά” (κελί B8 και C8) υπολογίστε τα ολοκληρώματα όπως προκύπτουν από της αναλυτικές εκφράσεις των εξ. (3.4):

B8:

$$=G1*E1*(1/((E4-E2/2)^2+E3^2)^{0,5}-1/((E4+E2/2)^2+E3^2)^{0,5})$$

C8:

$$=G1*E1/E3*((E4+E2/2)/((E4+E2/2)^2+E3^2)^{0,5}-(E4-E2/2)/((E4-E2/2)^2+E3^2)^{0,5})$$

18. Στο κελί B10 υπολογίστε την γωνία θ που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο E με τη διεύθυνση της ράβδου

B10:

$$=ATAN2(B6;C6)*180/PI()$$

Όπου η συνάρτηση του Excel ATAN2(X,Y) επιστρέφει, σε ακτίνια, την γωνία με

$$X=\sin(\theta)$$

$$Y=\cos(\theta)$$

Και PI()είναι μια συνάρτηση του Excel που επιστρέφει την τιμή του π με ακρίβεια 15 ψηφίων. Ο παράγοντας 180/PI() μετατρέπει τα ακτίνια σε μοίρες.

4.6 Μαγνητική Επαγωγή ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού.

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, θα θεωρήσουμε ένα λεπτό αγωγό κατά τον άξονα Z , ο οποίος διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και φέρει σταθερό ρεύμα I . Η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} σε ένα σημείο το οποίο προσδιορίζεται από το άνυσμα θέσης \mathbf{r} , βρίσκεται στο επίπεδο XY και είναι κάθετο προς το \mathbf{r} . Το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής μπορεί να προσδιοριστεί από τον νόμο του Ampere ως :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει το άνωσμα θέσης με τον άξονα X , τότε η γωνία Θ που σχηματίζει η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} με τον θετικό άξονα X είναι:

$$\theta = \theta + \frac{\pi}{2}$$

Σχήμα 7-1 Μαγνητική επαγωγή γύρω από το ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό

4.7 Εργαστηριακή άσκηση 7.1

1. Δημιουργείστε ένα νέο βιβλίο του Excel με τα εξής Φύλλα:
 - Δεδομένα
 - Πεδίο
 - Γωνία
 - Γωνία B
2. Στο φύλλο δεδομένα γράψτε τα δεδομένα του προβλήματος σας, ήτοι την τιμή του ρεύματος και την τιμή της σταθεράς $\mu_0/2\pi$. Ο αγωγός θεωρείτε ότι τέμνει κάθετα το επίπεδο του φύλλου σε ένα χώρο (2C-

1)*(2C-1) κελιών με κέντρο το κελί (C,C). Με απαρχή το κελί A1, γράψτε για παράδειγμα (C=13) τα δεδομένα

	A	B	C
1	Διαστάσεις=	25	
2	κέντρο=	13	
3			
4	ρεύμα=	10	
5	$\mu_0/2\pi$ =	1,40E-06	

3. Στο φύλλο πεδίο στο κελί A1 γράψτε την μαγνητική επαγωγή της

$$\text{εξίσωσης : } B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int J(r') \times \frac{(r-r')}{|r-r'|^3} d^3r' \text{ η οποία απειρίζεται για } r=0. \text{ Η}$$

συνθήκη αυτή είναι δυνατόν να ελεγχθεί με μια συνάρτηση IF που περιβάλλει τον υπολογισμό. Η έκφραση που μπορείτε να γράψετε είναι :

$$\begin{aligned} &=IF(AND(ROW()=\text{δεδομένα!}\$B\$2;COLUMN()=\text{δεδομένα!}\$B\$2); \\ & \text{"(ΑΓΩΓΟΣ)"}; \text{δεδομένα!}\$B\$5 * \text{δεδομένα!}\$B\$4 / \text{SQRT}((\text{ROW()}- \\ & \text{δεδομένα!}\$B\$2)^2 + (\text{COLUMN()}- \\ & \text{δεδομένα!}\$B\$2)^2)) \end{aligned}$$

4. Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψετε σε όλη την περιοχή A1:Y25

5. Στο φύλλο γωνία καταγράψτε την γωνία θ του σχήματος 7-1 για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση του Excel ATAN2, που επιστρέφει την αντίστροφη εφαπτομένη $\tan^{-1}\theta$. Η έκφραση που μπορείτε να γράψετε είναι :

$$\begin{aligned} &=IF(AND(\text{δεδομένα!}\$B\$2=\text{ROW()}; \text{δεδομένα!}\$B\$2 \\ & =\text{COLUMN()}); 0; IF((\text{δεδομένα!}\$B\$2- \\ & \text{ROW()}) < 0; \text{ATAN2}((\text{COLUMN()}- \end{aligned}$$

δεδομένα!\$B\$2);(δεδομένα!\$B\$2-
ROW()))*180/PI()+360;ATAN2((COLUMN()-
δεδομένα!\$B\$2);(δεδομένα!\$B\$2-
ROW()))*180/PI()))

Η συμπεριφορά της ATAN2 στην αρχή των συντεταγμένων ελέγχεται από την εξωτερική συνάρτηση IF.

Οι τιμές στο φύλο γωνία κατανέμονται ως εξής :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y		
1	135	132,5104	129,0066	126,8899	123,6901	120,2984	116,5661	112,6199	108,4349	104,0362	99,46232	94,73564	90	86,23836	82,53768	78,90376	75,66556	71,963014	69,14985	67,30014	65,43495	59,74356	56,30993	53,1301	50,19443	47,48965	45
2	137,4896	135	132,2737	129,2894	126,0274	122,4712	118,6105	114,444	109,9631	105,2851	100,3346	95,1943	90	84,82557	79,69516	74,7426	70,01899	65,66635	61,39854	57,52881	53,97263	50,71059	47,7851	45	42,51045		
3	140,944	137,783	135	131,9872	128,6698	124,992	120,9638	116,5661	111,8014	106,8992	101,3099	95,71069	90	84,28941	78,69307	73,30076	68,19889	63,43495	59,03824	55,00798	51,34019	48,01279	45	42,77369	39,85857		
4	143,301	140,706	138,0128	135	131,6335	127,875	123,6901	119,0546	113,9823	108,4349	102,5388	96,34019	90	83,66391	77,4719	71,56335	66,03751	60,9454	56,30993	52,12592	48,36646	45	41,98721	39,28841	36,8899		
5	146,3289	143,9726	141,3402	138,8865	135	131,1859	126,8899	122,0354	116,5661	110,566	104,0362	97,1262	90	82,87498	76,96376	69,44395	63,43495	57,99462	53,1301	48,81407	45	41,63334	38,66981	36,02737	33,69037		
6	149,7436	147,3288	145,008	142,125	138,8141	135	130,6013	126,5377	119,7449	113,1986	105,9454	98,1301	90	81,8899	74,0546	66,80141	60,28512	54,46232	49,38871	45	41,6893	37,87498	34,99202	32,47119	30,2644		
7	153,4349	151,3385	149,0382	146,3389	143,1301	139,3987	135	129,8035	123,6901	116,5661	108,4349	99,46232	90	80,53768	71,56335	63,43495	56,30993	50,19443	45	40,60129	36,8899	33,69037	30,96376	28,61046	26,56335		
8	157,3801	155,595	153,4349	150,9454	147,9946	144,4623	140,1944	135	128,6698	120,9638	111,8014	101,3099	90	78,69307	68,19889	59,03824	51,34019	45	39,80657	36,53768	32,03638	29,0546	26,56335	24,44295	22,61986		
9	161,5661	160,0169	158,1986	156,0375	153,4349	150,2651	146,3099	141,3402	135	128,8899	116,5661	104,0362	90	76,96376	63,43495	53,1301	45	38,66989	33,69037	29,74488	26,56335	23,98249	21,80141	19,88311	18,43495		
10	166,3638	164,7449	163,3008	161,5661	159,444	156,8014	153,4349	149,0382	143,1301	135	123,6901	108,4349	90	71,56335	56,30993	45	36,8899	30,96376	26,56335	23,19889	20,56635	18,43495	16,689924	15,26512	14,03824		
11	170,6377	169,6982	168,8901	167,4712	165,9638	164,0546	161,9661	158,1986	153,4349	146,3099	135	116,5661	90	63,43495	45	33,69037	26,56335	21,80141	18,43495	15,9454	14,03824	12,52881	11,30993	10,30485	9,462322		
12	175,284	174,0386	172,8984	173,6698	172,875	171,8899	170,5377	168,6901	166,9638	161,5661	153,4349	135	90	45	26,56335	18,43495	14,03824	11,30993	9,462322	8,130102	7,126306	6,340192	5,718993	5,194429	4,783642		
13	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
14	184,7636	183,1944	181,7105	180,3402	187,125	188,1301	189,4623	191,3099	194,0362	198,4349	206,5661	225	270	315	333,4349	341,5661	345,9638	348,6901	350,5377	351,8899	352,875	353,6698	354,2894	354,8295	355,2964		
15	189,4623	190,3048	191,3099	192,5288	194,0382	195,9454	198,4349	201,8014	206,5661	213,6901	225	242,4349	270	296,5661	315	328,3099	333,4349	338,1986	341,5661	344,0546	345,9638	347,4712	348,6901	349,6982	350,5377		
16	194,0382	195,2651	196,6982	198,4349	200,566	203,1986	206,5661	210,9638	216,8899	225	236,3099	251,5661	270	298,4349	303,6901	315	323,1301	329,0382	333,4349	336,8014	339,444	341,5661	343,3008	344,7449	345,9638		
17	198,4349	199,9831	201,8014	203,9638	206,5661	209,7449	213,6901	218,6698	225	233,1301	243,4349	256,9638	270	294,0382	298,5661	306,8899	315	321,3402	326,3099	330,2651	333,4349	336,0375	338,1986	340,0169	341,5661		
18	202,6199	204,444	206,5661	209,0546	212,0384	216,5377	219,8899	225	231,3402	239,0382	248,1986	259,6901	270	291,3099	291,8014	300,9638	308,6698	315	320,1944	324,4623	327,9946	330,9454	333,4349	335,566	337,3801		
19	206,5661	208,6105	210,9638	213,6901	216,8899	220,6013	225	230,1944	236,3099	243,4349	251,5661	260,5377	270	279,4623	288,4349	296,5661	303,6901	309,8036	315	319,3987	323,1301	326,3099	329,0382	331,3886	333,4349		
20	210,2664	212,4712	214,992	217,875	221,1859	225	229,3987	234,4623	240,2651	246,8014	254,0546	261,8899	270	278,1301	286,9454	293,1986	299,7449	305,5377	310,6013	315	318,6141	322,125	326,008	327,5288	329,7436		
21	213,6901	216,0274	218,6698	221,6335	225	228,8141	233,1301	237,9946	243,4349	249,444	256,9638	262,875	270	277,125	284,0382	290,566	296,5661	302,0384	306,8899	311,1859	315	318,6665	321,3402	323,9726	326,3099		
22	216,8899	219,2894	221,9872	225	228,8865	232,125	236,3099	240,9454	246,0375	251,5661	257,4712	263,6698	270	276,3402	282,5388	288,4349	293,9825	299,0546	303,6901	307,875	311,6335	315	318,0128	320,7105	323,1301		
23	219,9896	222,737	225	228,0128	231,3402	236,008	239,0382	243,4349	248,1986	253,3008	258,6901	264,2894	270	275,7106	281,3099	286,6992	291,8014	296,5661	300,9638	304,992	308,6698	311,9922	315	317,7661	320,1944		
24	223,104	225	227,2853	230,7106	233,9726	237,3288	241,3895	245,566	250,0169	254,7449	259,6982	264,8895	270	273,1944	280,3048	286,5651	292,9831	299,444	296,6105	302,4712	306,0274	309,2894	312,2737	315	317,4896		
25	225	227,4896	230,1944	233,1301	236,3099	239,7436	243,4349	247,3801	251,5661	256,9638	260,5377	265,2864	270	271,7636	279,4623	284,0382	288,4349	292,6199	296,5661	300,2664	303,6901	306,8899	309,8895	312,5104	315		

6. Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την σε όλη την περιοχή A1:Y25.

7. Στο φύλλο γωνία Β τοποθετείστε την γωνία της εξίσωσης: $I = \int J \cdot dA$

Παρατηρείται ότι με την προηγούμενη εξίσωση οι γωνίες που σχηματίζει το άνυσμα Β με τον άξονα Χ μπορεί να έχουν τιμή μεγαλύτερη από 360^0 . Η έκφραση που μπορείτε να γράψετε είναι:

$$=IF(\text{γωνία!A1}+90>360;\text{γωνία!A1}-270;\text{γωνία!A1}+90)$$

8. Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε την προηγούμενη έκφραση και αντιγράψτε την στην όλη την περιοχή Α1:Υ25.

Οι τιμές στο φύλλο γωνία κατανέμονται ως εξής :

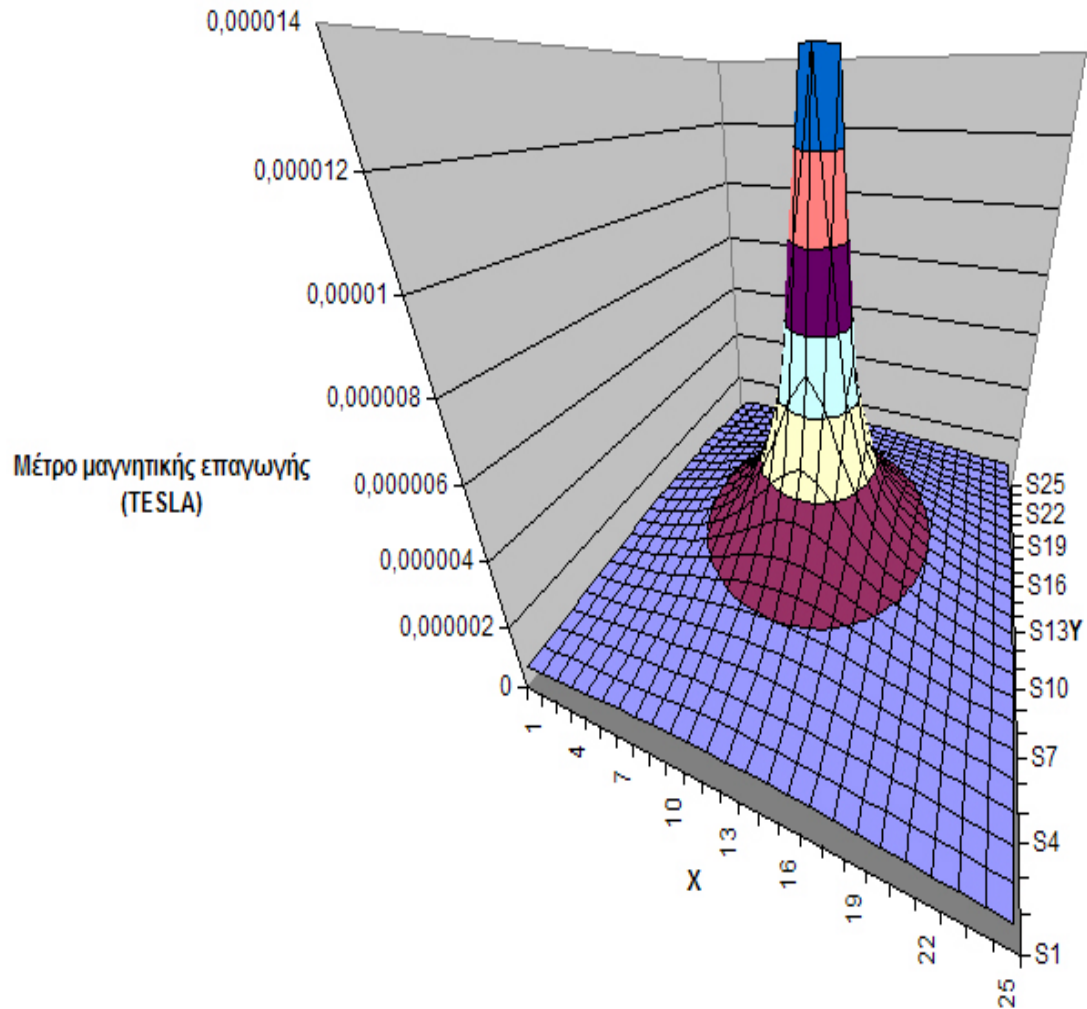
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	
229	222.514	219.8056	216.6889	213.6901	210.2564	206.5651	202.6199	198.4249	194.0262	189.4623	184.7638	180.1752884	175.29284	170.5377	165.9538	161.5651	157.5007	153.1449	149.7426	146.5099	143.1507	140.1944	137.4886	135	
227	222.737	219.2894	216.0274	212.4712	208.6108	204.444	199.9531	195.2551	190.3349	185.1944	180.1740295	175.29284	170.5377	165.9538	161.5651	157.5007	153.1449	149.7426	146.5099	143.1507	140.1944	137.4886	135	222.514	
220	227.783	225	221.9872	218.6889	214.992	210.9633	206.5651	201.8014	196.6992	191.3099	185.7108	180.1740295	175.29284	170.5377	165.9538	161.5651	157.5007	153.1449	149.0382	145.008	141.3402	138.0128	135	227.277	
233	309.1301	320.7106	328.0128	325	321.6335	317.978	313.6901	309.0546	303.9825	298.4249	292.3088	285.5651	279.2108	272.3398	265.8638	259.7851	253.0007	246.5099	240.2944	234.3499	228.6651	223.2307	218.0362	213.0638	
5	236.3099	233.9726	231.3402	228.3665	225	221.1699	216.8899	212.0254	206.5651	200.555	194.0262	187.425	180.1740295	172.875	165.9538	159.444	153.1449	147.9946	143.1307	138.0141	135	131.6335	128.6589	126.0274	
6	239.7456	237.3288	235.008	232.125	228.814	225	220.6013	216.5377	209.7449	203.1996	195.9454	188.1307	180.1740295	171.8899	164.0546	155.8014	150.2551	144.4823	139.3987	135	131.1699	127.875	124.992	122.4712	
7	243.4249	241.3085	239.0382	236.5399	233.1307	228.3887	223	219.0366	213.6901	208.5651	198.4249	189.4623	180.1740295	170.5377	161.5651	153.1449	146.3099	140.1944	135	130.6013	126.8899	123.6901	120.9633	118.6108	
8	247.3801	245.556	243.4249	240.9454	237.9946	234.4823	230.1944	225	218.6588	210.9633	201.8014	191.3099	180.1740295	169.8891	158.1986	149.0382	141.3402	135	129.8386	123.5377	122.0254	119.0546	116.5651	114.444	
9	251.5651	250.0169	248.1986	246.0375	243.4249	240.2551	236.3099	231.3402	225	216.8899	206.5651	194.0262	180.1740295	168.9638	153.1449	143.1307	135	128.6588	123.6907	119.7449	116.5651	113.9825	111.8014	109.9837	
10	255.9538	254.7449	253.3008	251.5651	249.444	246.8014	243.4249	239.0382	233.1307	225	213.6901	198.4249	180.1740295	168.9638	153.1449	143.1307	135	126.8899	120.9633	116.5651	113.9825	110.9633	108.6992	106.4249	
11	260.5377	259.6882	258.6901	257.4712	255.9638	254.0546	251.5651	248.1986	243.4249	236.3099	225	208.5651	180.1740295	163.4249	135	123.6907	116.5651	111.8014	106.4249	103.9454	104.0262	102.5388	101.3099	100.3048	
12	265.3284	264.8386	264.2894	263.6588	262.875	261.8899	260.5377	258.6901	256.9638	251.5651	243.4249	225	180.1740295	135	116.5651	108.4249	104.0262	101.3099	99.48232	98.1307	97.12882	96.34019	95.7189	94.78384	
13	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270
14	274.7638	273.944	273.106	272.5402	271.125	270.1307	270.4823	269.3099	268.0382	268.4249	266.5651	265	265.9538	45	63.4249	71.56505	78.96376	86.8987	82.57498	81.8899	82.87498	83.65907	84.28847	84.82557	85.22836
15	279.4823	280.3349	281.3389	282.5288	284.0262	285.9454	288.4249	291.8014	296.5651	303.6901	315	333.4249	360	26.56505	45	96.30993	63.42495	68.19839	74.9546	78.96376	77.47119	76.69007	79.6915	80.53788	
16	284.0382	285.5651	286.8982	288.4249	290.565	293.1986	296.5651	300.9633	306.8899	315	336.3099	341.5651	360	18.42495	33.69007	45	63.1307	69.03824	63.42495	66.80141	69.4495	71.56505	73.30075	74.74488	75.9678
17	288.4249	289.9837	291.8014	293.9638	296.5651	299.7449	303.6901	308.6589	315	333.1307	333.4249	345.9638	360	14.02624	26.56505	36.8899	45	51.34019	56.30993	60.28512	63.42495	66.03751	68.19839	70.01689	71.66305
18	292.6199	294.444	296.5651	299.0546	302.0254	305.5377	309.8899	315	321.3402	329.0382	338.1986	346.6901	360	11.30983	21.80141	30.96376	38.69831	45	40.19443	54.48232	57.99482	60.9454	63.42495	65.59505	67.38014
19	296.5651	298.6106	300.9633	303.6901	306.8899	310.6013	315	307.1944	306.3099	333.4249	341.5651	360	8.130102	18.42495	26.56505	33.69007	39.83557	45	49.38871	53.1307	56.30993	59.03824	61.38864	63.42495	
20	300.2564	302.4712	304.992	307.875	311.6989	315	319.3887	324.4823	330.2551	336.8014	344.0546	351.8899	360	8.130102	15.9454	23.19889	29.74488	35.53788	40.60129	45	48.81407	52.12882	55.00799	57.33881	59.12886
21	303.6901	305.8274	308.6588	311.6335	315	318.8141	323.1307	327.9946	333.4249	339.444	345.9638	352.875	360	7.125076	14.02624	20.56505	26.56505	32.03538	36.8899	41.8893	45	48.38846	51.34019	53.97363	56.38963
22	306.8899	309.2894	311.9872	315	318.8141	323.1307	327.9946	333.4249	339.444	345.9638	352.875	360	6.340182	12.53881	18.42495	23.98249	29.0546	33.69007	37.87498	41.63384	45	48.01079	50.71689	53.1307	
23	309.8386	312.737	315	318.8141	323.1307	327.9946	333.4249	339.444	345.9638	352.875	360	5.718993	10.30485	16.69992	21.80141	26.56505	30.96376	34.99982	38.65987	41.98772	45	47.78531	50.19443		
24	312.5104	315	317.7883	320.7106	323.9726	327.5388	331.3889	335.5651	340.0169	344.7449	349.6982	354.8385	360	5.194429	10.30485	15.26512	19.88311	24.44935	28.61046	32.47119	36.02737	39.28841	42.27889	45	47.48865
25	315	317.4886	320.1944	323.1307	326.3099	329.4249	333.1307	337.3801	341.5651	345.9638	350.5377	355.2884	360	4.783842	9.482322	14.02624	18.42495	22.61986	26.56505	30.28844	33.69007	36.8899	39.83557	42.51045	45

9. Η εποπτεία της μαγνητικής επαγωγής που δημιουργεί ο αγωγός στο χώρο αυξάνει αν αποδώσουμε τις τιμές του φύλλου πεδίο σε τριδιάστατο γράφημα.

- Στο φύλλο πεδίο επιλέξτε την περιοχή A1:Y25.
- Από τα μενού επιλέξτε **Εισαγωγή** → **Γραφήματος** → **Σε νέο φύλλο**.
- Στο παράθυρο που θα ανοίξει επιλέξτε **Επόμενο**.
- Επιλέξτε ως επιλογή μορφής για το γράφημα επιφάνειας 3Δ το **1** → **Επόμενο**.
- Θα εμφανιστεί ένα δείγμα γραφήματος. Επιλέξτε **Επόμενο**.
- Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί συμπληρώστε τον τίτλο του γραφήματος και του άξονες Z, X, και Y π.χ
Τίτλος γραφήματος:
Μαγνητική επαγωγή γύρω από ρευματοφόρο αγωγό
Κατηγορία (X): X
Τιμή (Z): Μέτρο μαγνητικής επαγωγής (Tesla)
Σειρά (Y): Y
Προσθήκη υπομνήματος : Όχι
- Επιλέξτε: **Τέλος**
- Θα παρατηρήσετε ότι το βιβλίο του Excel έχει προσθέσει ένα νέο φύλλο με την ονομασία *Γράφημα1* που περιέχει την γραφική παράσταση.
- ,μπορείτε να αλλάξετε την προοπτική του γραφήματος για καλύτερη εποπτεία. Προς τον σκοπό αυτό επιλέξτε το γράφημα και από το μενού του **Excel** επιλέξτε **Μορφή** → **Προβολής 3Δ...**
. Ακολουθείστε τις οδηγίες του παραθύρου που θα ανοίξει.
- Παρατηρείστε ότι το γράφημα έχει δυναμική υπόσταση. Κάθε μεταβολή των τιμών στο φύλλο Δυναμικό ανανεώνει το γράφημα.

Παρακάτω παρουσιάζεται το Γράφημα

■
Μαγνητική επαγωγή γύρω από ρευματοφόρο αγωγό



■

Σημειώνεται ότι οι ασκήσεις καθώς και τα παραδείγματα που περιέχονται σε αυτό το βιβλίο έχουν λυθεί και διατίθενται σε ηλεκτρονική μορφή .

Συμπεράσματα

Ολοκληρώνοντας την εργασία αυτή, ανακαλύψαμε τις πάμπολλες δυνατότητες του χρήσιμου αυτού εργαλείου που ακούει στο όνομα **Microsoft Excel**.

Συμπερασματικά αυτό που αντιλαμβάνεται κανείς από την επισκόπηση αυτής της εργασίας είναι η ισχυρή υπολογιστική ικανότητα και ευελιξία του προγράμματος Excel. Αξίζει να παραδεχτούμε ότι το συγκεκριμένο πρόγραμμα, είναι ένα πολύ καλό «όπλο» στα χέρια κάθε επιστήμονα, φοιτητή, εργαζόμενου και απλού χρήστη που μπορεί να το χρησιμοποιήσει με αποτελεσματικότητα και ακρίβεια στην επίλυση προβλημάτων της Φυσικής. Ο επίδοξος χρήστης μπορεί να εισάγει μεγάλο όγκο δεδομένων, να τα επεξεργαστεί και να φτάσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα σε χρόνους αδιανόητα μικρούς. Συγκεκριμένα στον Ηλεκτρομαγνητισμό, και με την βοήθεια τις Visual Basic που προσφέρεται στο Excel, επιλύσαμε πολλές εξισώσεις με σύνθετα ολοκληρώματα που μέσω του χαρτιού θα ήταν χρονικά απαγορευτικό. Αποδώσαμε γραφικά, μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία καθώς καμπύλες συναρτήσεων και άλλα. Μια άλλη πολύ σημαντική παρατήρηση είναι ότι με το Excel μπορεί κανείς να τροποποιήσει τα ήδη αποθηκευμένα αρχεία (π.χ. μια συνάρτηση γραμμένη σε γλώσσα Visual Basic) και να τα φέρει στα «μέτρα» του προβλήματός του.

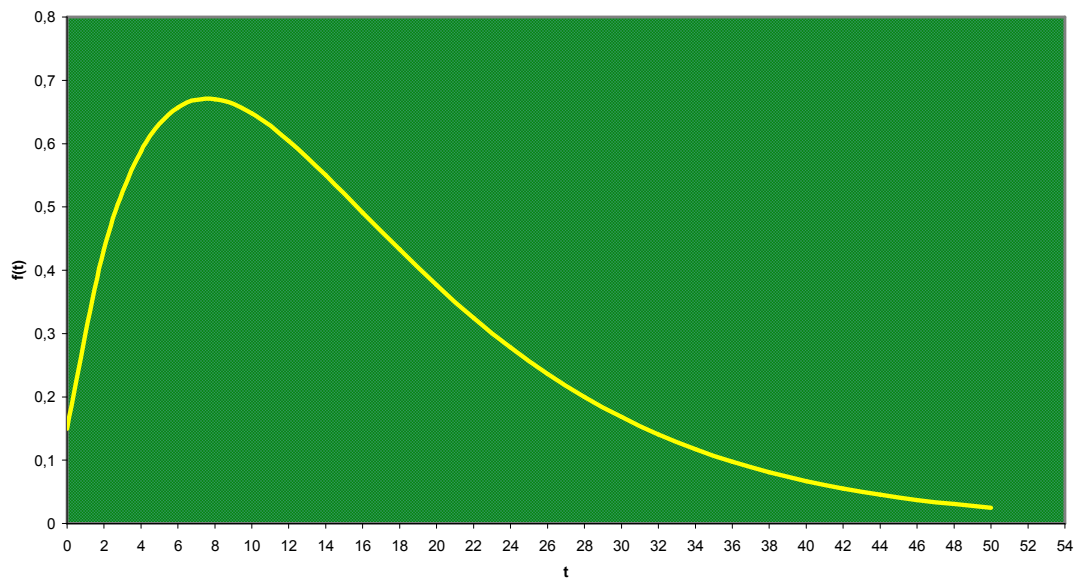
Κλείνοντας αυτή την εργασία θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι το Excel δεν θα μας μάθει Φυσική ούτε θα μας διδάξει ολοκληρώματα και συναρτήσεις. Αυτό που μας προσφέρει είναι αρκετές δυνατότητες ως υπολογιστικό εργαλείο που μόνο με το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο μπορούμε να αξιοποιήσουμε.

Γραφικές Παραστάσεις

1)

Γραφική παράσταση της εξίσωσης $f(x) = (\alpha t + \beta)e^{-\gamma t}$ της εργαστηριακής άσκησης 1.5 βιβλίου σελίδα 30

Γραφική παράσταση Συνάρτησης f(t)



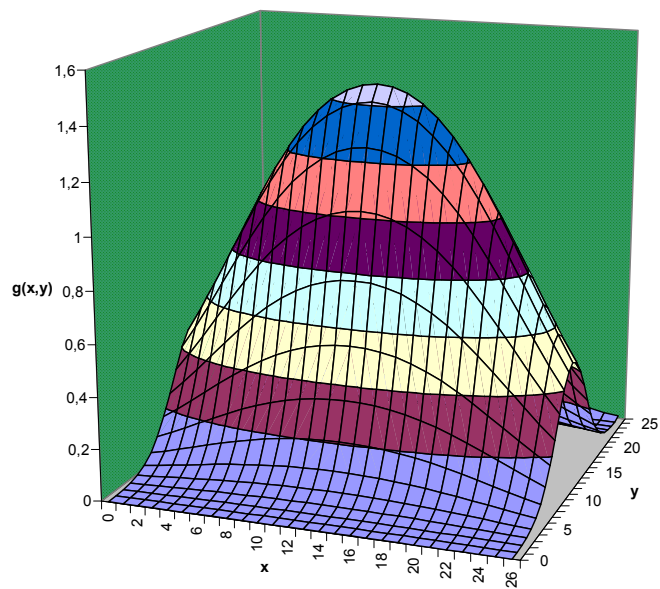
2)

Γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x, y) = \exp\left(-\frac{(y-a)^2}{\sigma_1^2}\right) \left[\exp\left(\frac{(x-a-\beta)^2}{\sigma_2^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x-a+\beta)^2}{\sigma_2^2}\right) \right] \quad \text{της}$$

εργαστηριακής άσκησης 1.6 βιβλίου σελίδα 32

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x,y)$



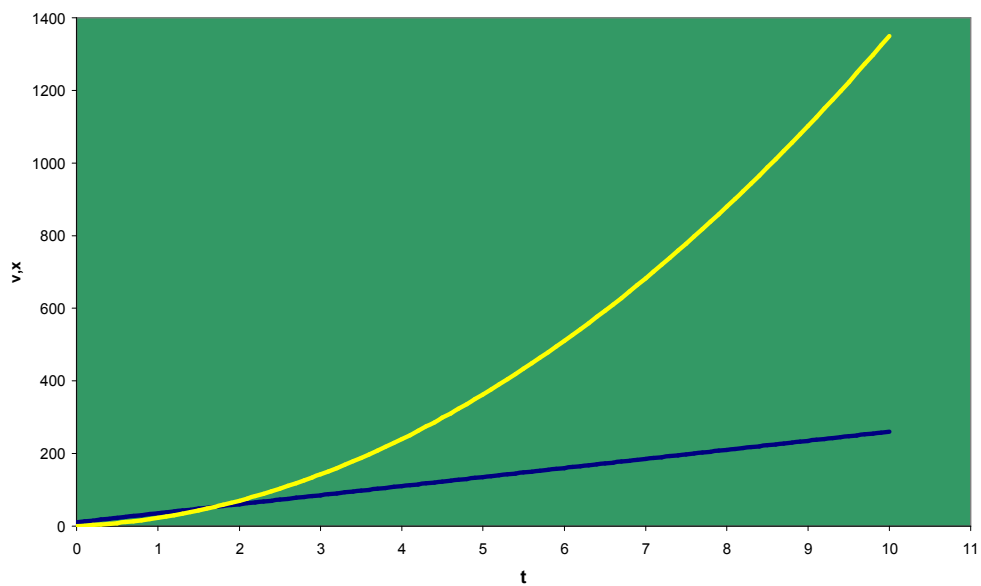
3)

Γραφική παράσταση των συναρτήσεων α) $v = v_0 + \gamma t$

β) $x = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2$ της άσκησης 1.4 βιβλίου σελίδα 35

Αποτυπώνεται η ταχύτητα v και ταχύτητα x συνάρτηση με τον χρόνο t

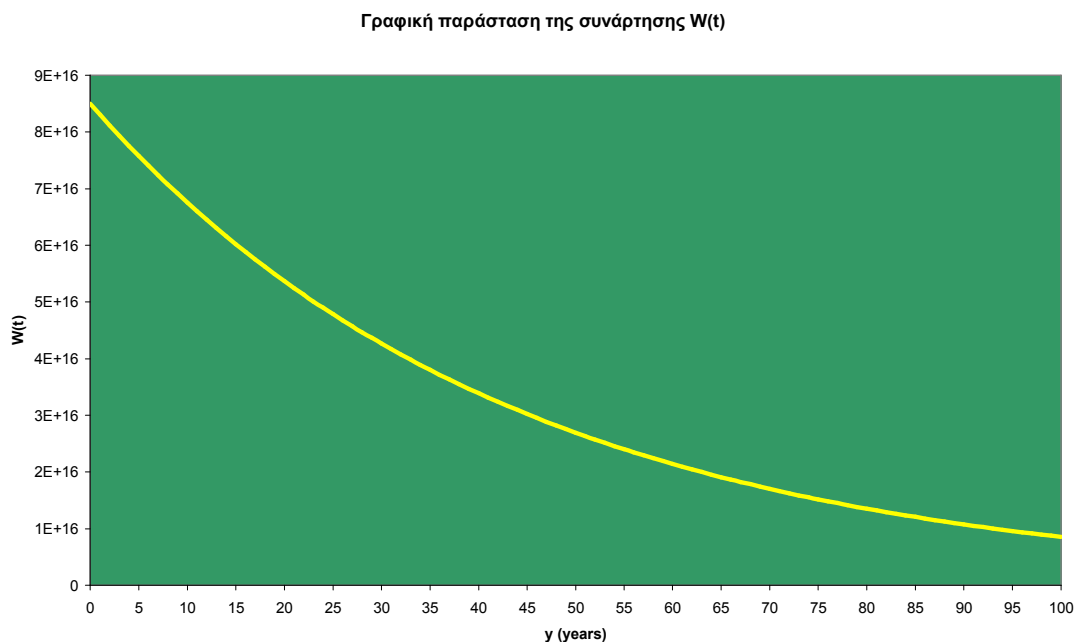
Γραφική παράσταση συναρτήσεων v,x



4)

Γραφική παράσταση της εξίσωσης $W(t) = W_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ της άσκησης 1.5 βιβλίου σελίδα 36

Αποτυπώνεται η εξασθένιση της ραδιενέργειας κατά το έτος 2004 στο 10 % από την αρχική της τιμή



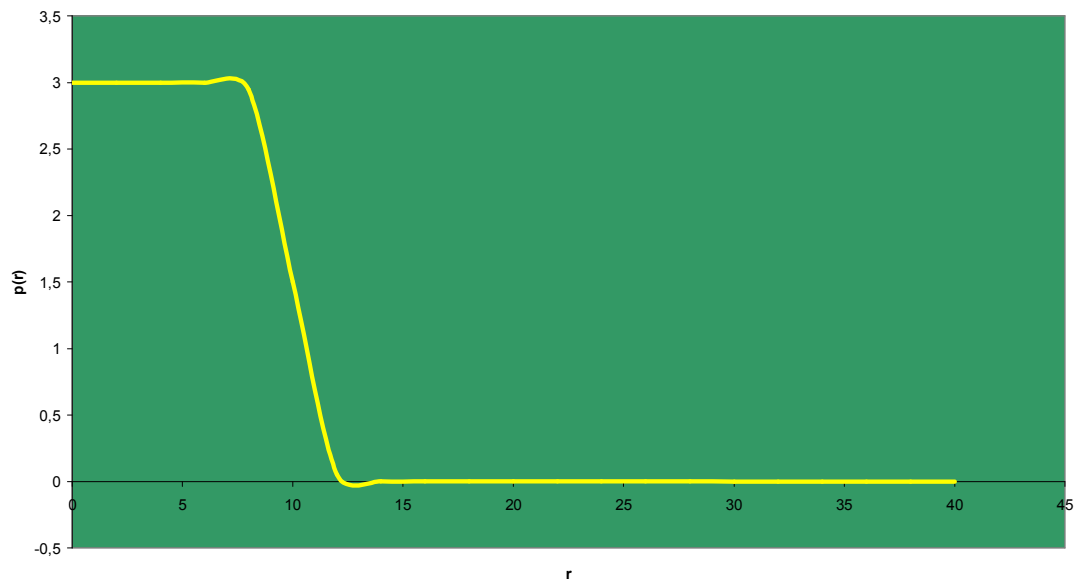
5)

Γραφική παράσταση της εξίσωσης $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R}{a}\right)}}$ της άσκησης

1.6β βιβλίου σελίδα 37.

Αποτυπώνεται η πυκνότητα μάζας της σφαίρας σε σχέση με την απόσταση από το κέντρο της

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\rho(r)$

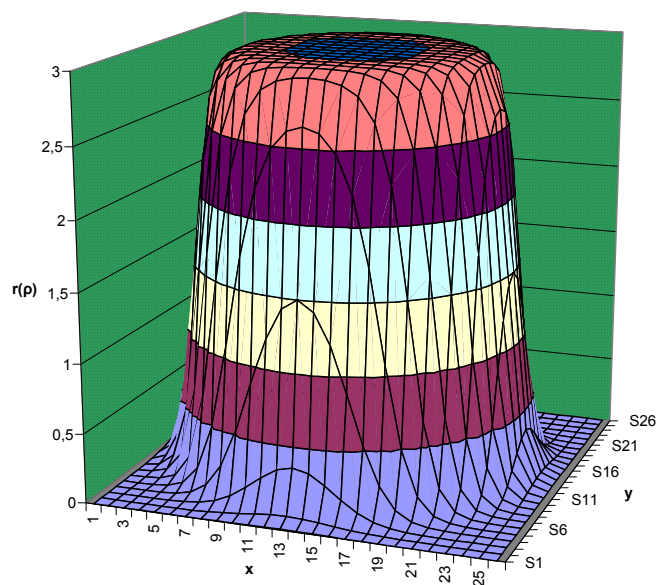


6)

Γραφική παράσταση της εξίσωσης $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R}{a}\right)}}$ όπου

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ της άσκησης 1.6 γ βιβλίου σελίδα 38

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $r(\rho)$



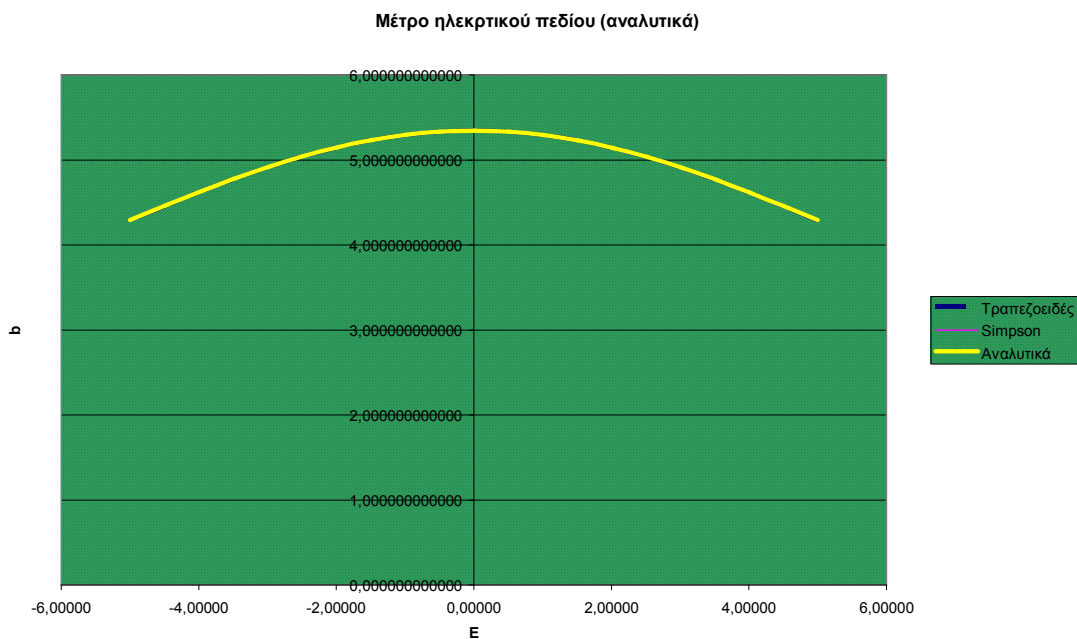
7)

Γραφική παράσταση των εξισώσεων του ηλεκτρικού πεδίου

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} e_x(x, a, b) dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{(b-x) dx}{[(b-x)^2 + a^2]^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} e_y(x, a, b) dx = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{[(b-x)^2 + a^2]^{3/2}}$$

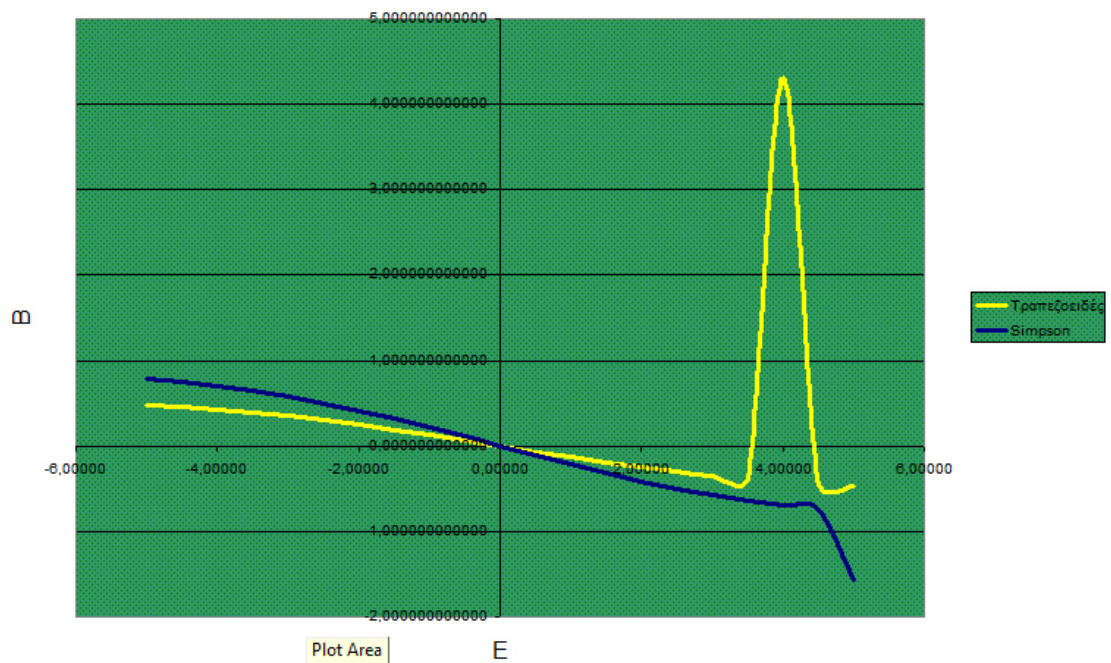
της άσκησης 3.1 βιβλίου σελίδα 76



8)

Γραφική παράσταση της κατανομής $\lambda(x) = \lambda_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ άσκησης 3.2 βιβλίου σελίδα 77.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης λ(x) 1ης



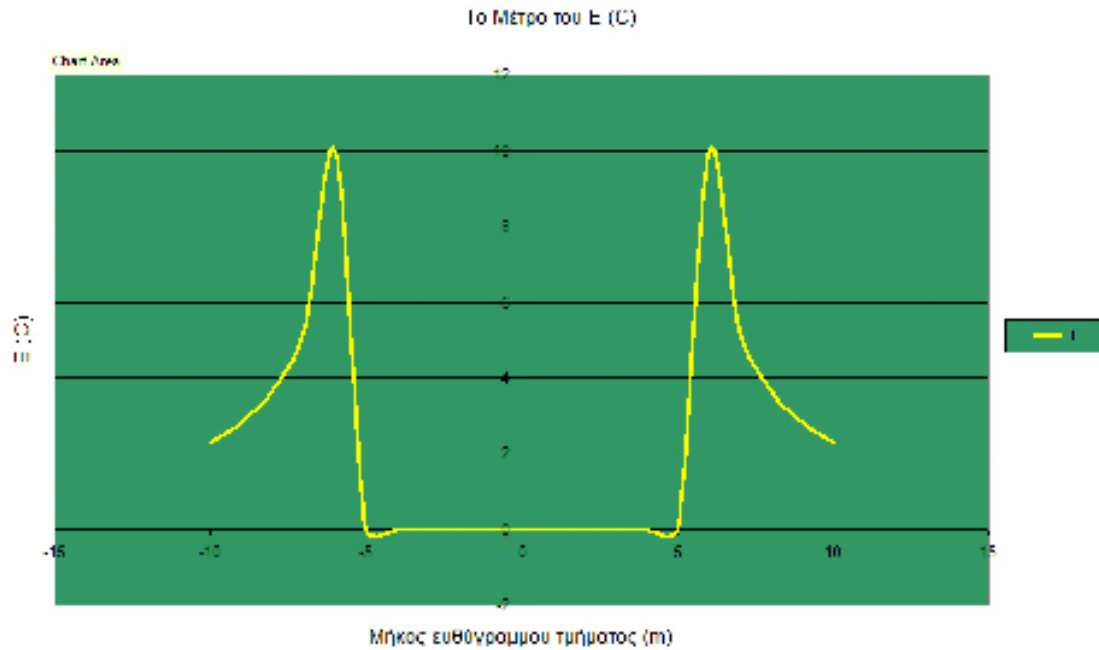
9)

Γραφική παράσταση των εξισώσεων αριθμητικής τιμής και διεύθυνσης

$$\text{ηλεκτρικού πεδίου } dE_z(\phi, R, x, z) = \frac{q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \frac{z d\phi}{[z^2 + x^2 + R^2 - 2Rx \cos \phi]^{3/2}}$$

$$dE_x(\phi, R, x, z) = \frac{q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \frac{(x - R \cos \phi) d\phi}{[z^2 + x^2 + R^2 - 2Rx \cos \phi]^{3/2}}$$

άσκησης 3.3 βιβλίου σελίδα 77



10)

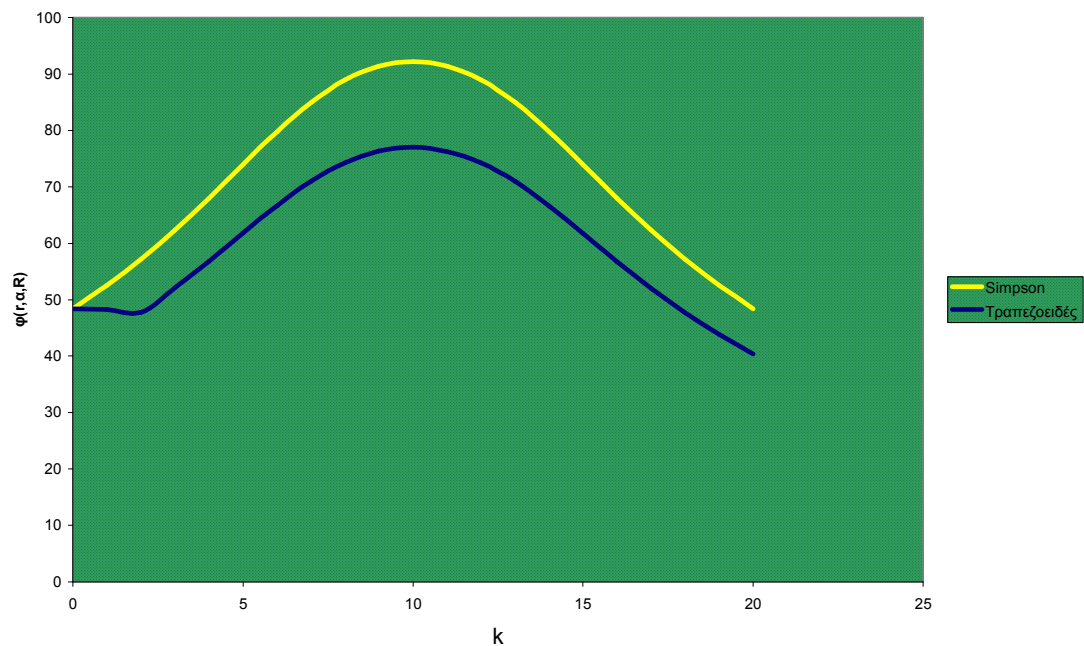
Γραφική παράσταση της συνάρτησης δυναμικού

$$\phi(r, a, R) = \frac{q}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin a \cos \theta}}$$

της άσκησης 4.1 βιβλίου

σελίδα 96

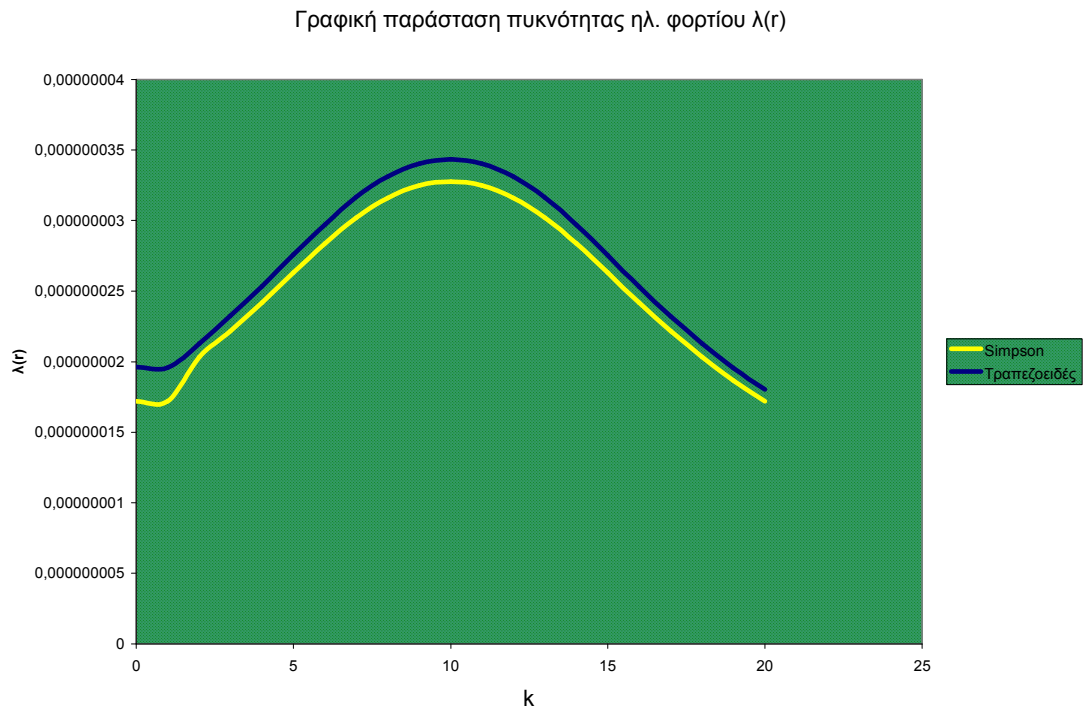
Γραφική Δυναμικού φορτισμένου δακτυλίου $\phi(r, a, R)$



11)

Γραφική παράσταση πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου της κατανομής: $\lambda(r) = \lambda_0 \cos(m\theta)$

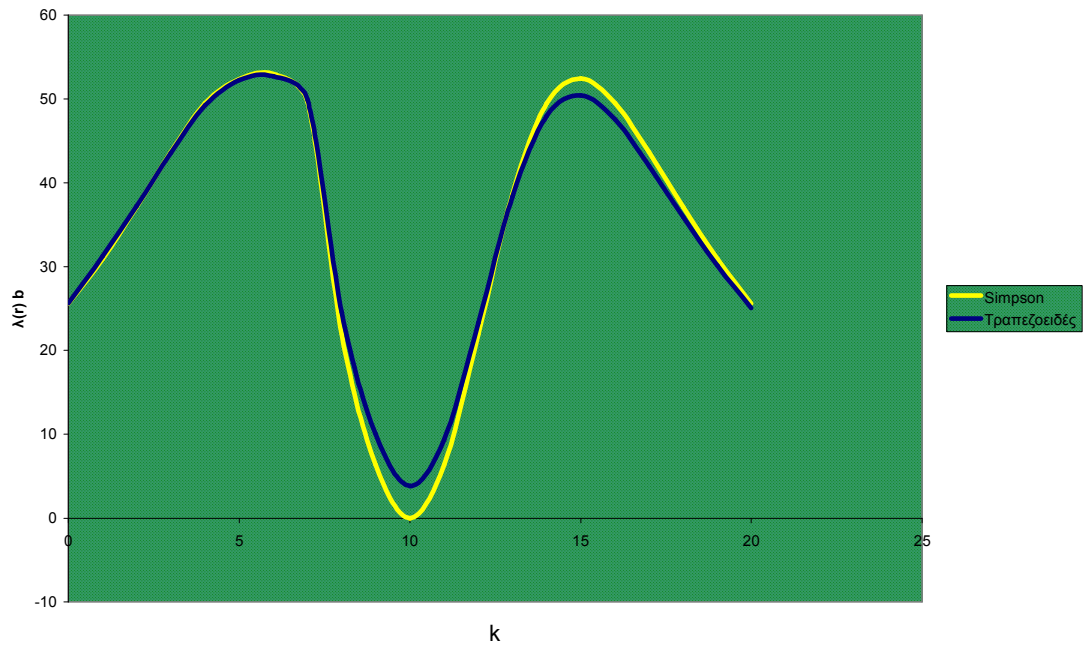
άσκησης 4.2 βιβλίου σελίδα 96



12)

Γραφική παράσταση πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου της κατανομής:
άσκησης 4.2β βιβλίου σελίδα 96

Γραφική παράσταση πυκνότητας ηλ. φορτίου $\lambda(r)$ b

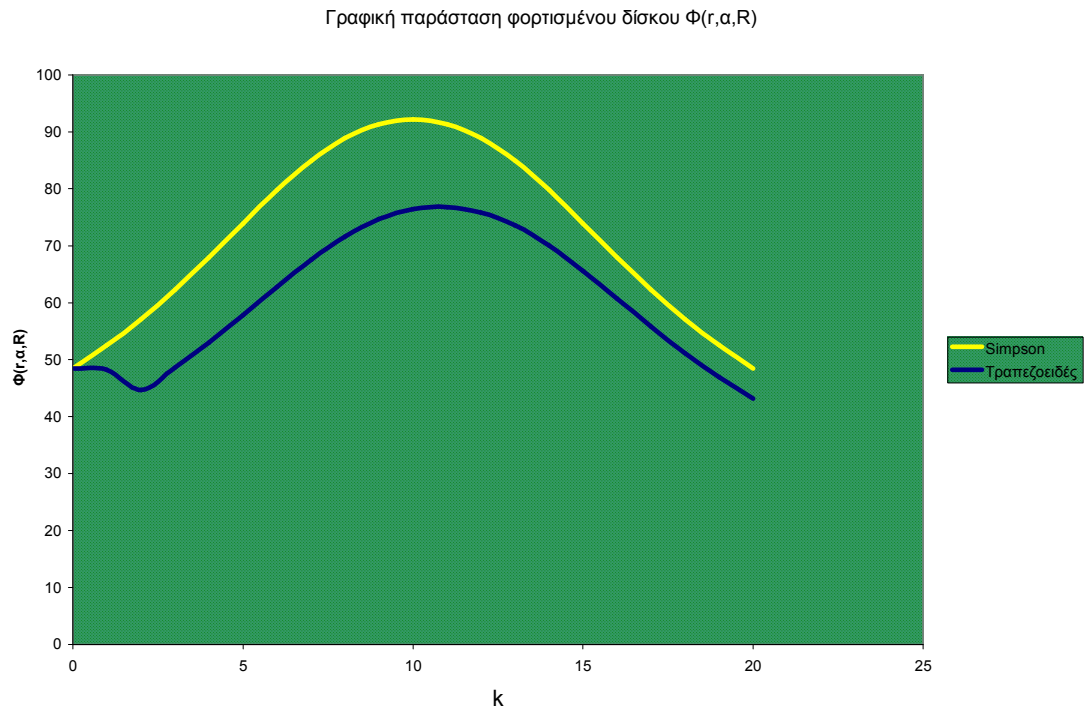


13)

Γραφική παράσταση αριθμητικής τιμής και διεύθυνσης που προκύπτει

από τις εξισώσεις: $\phi(r, a, R) = \frac{q}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin a \cos \theta}}$ και

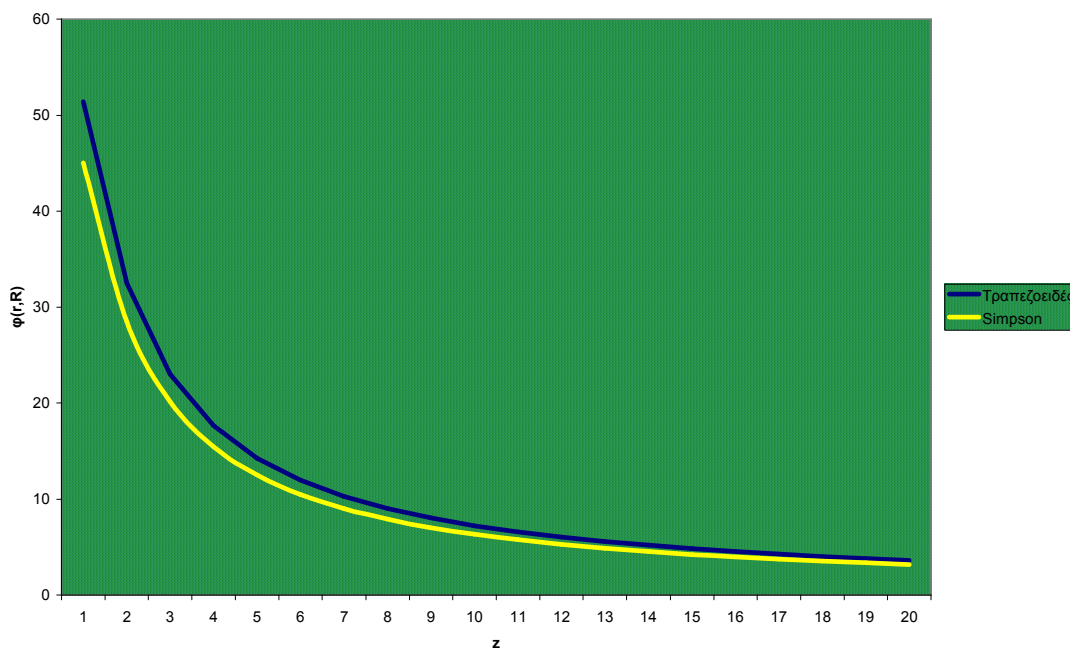
$\phi(r, a, R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\pi R^2} \int_0^R \phi(r, a, \rho) \rho d\rho$ της άσκησης 4.3 βιβλίου σελίδα 96



14)

Γραφική παράσταση επιφανιακής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου του δίσκου με κατανομή φορτίου $\sigma(r) = \sigma_0 e^{-\frac{r}{R}}$ άσκησης 4.5 βιβλίου σελίδα 96

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\phi(r,R)$



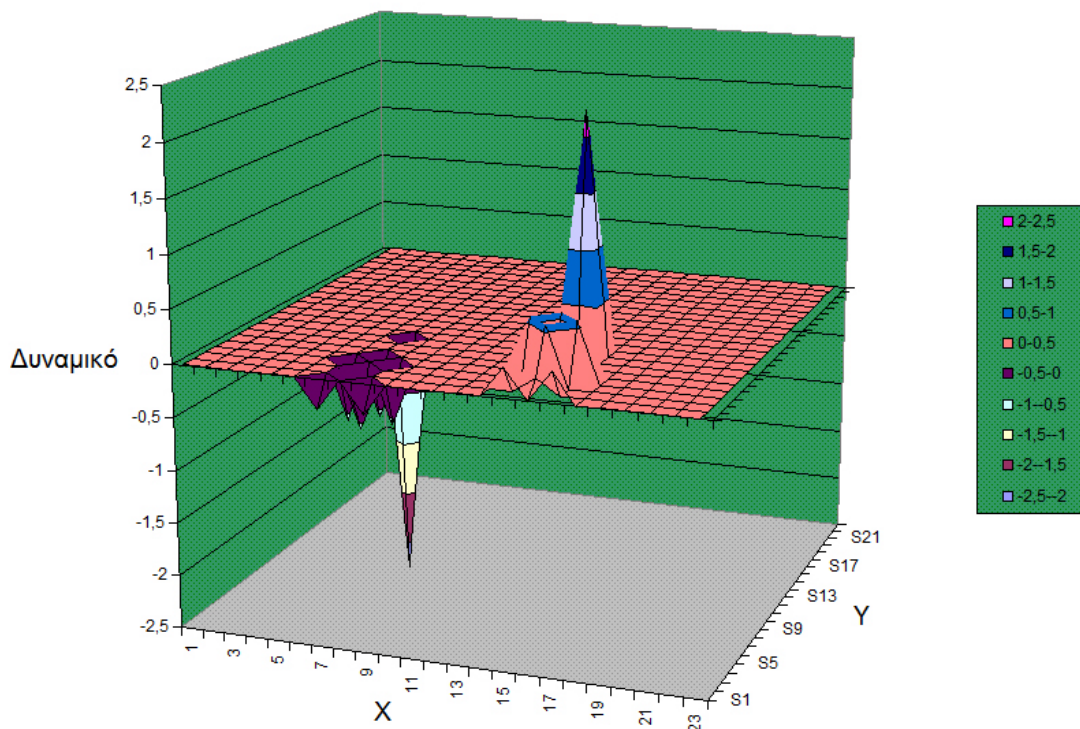
15)

Γραφική παράσταση της εξίσωσης poisson $\phi = \langle \phi \rangle + \frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0}$ όπου

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{4} [\phi(i, j+1) + \phi(i, j-1) + \phi(i+1, j) + \phi(i-1, j)]$$
 της εργαστηριακής

άσκησης 5.1 βιβλίου σελίδα 103

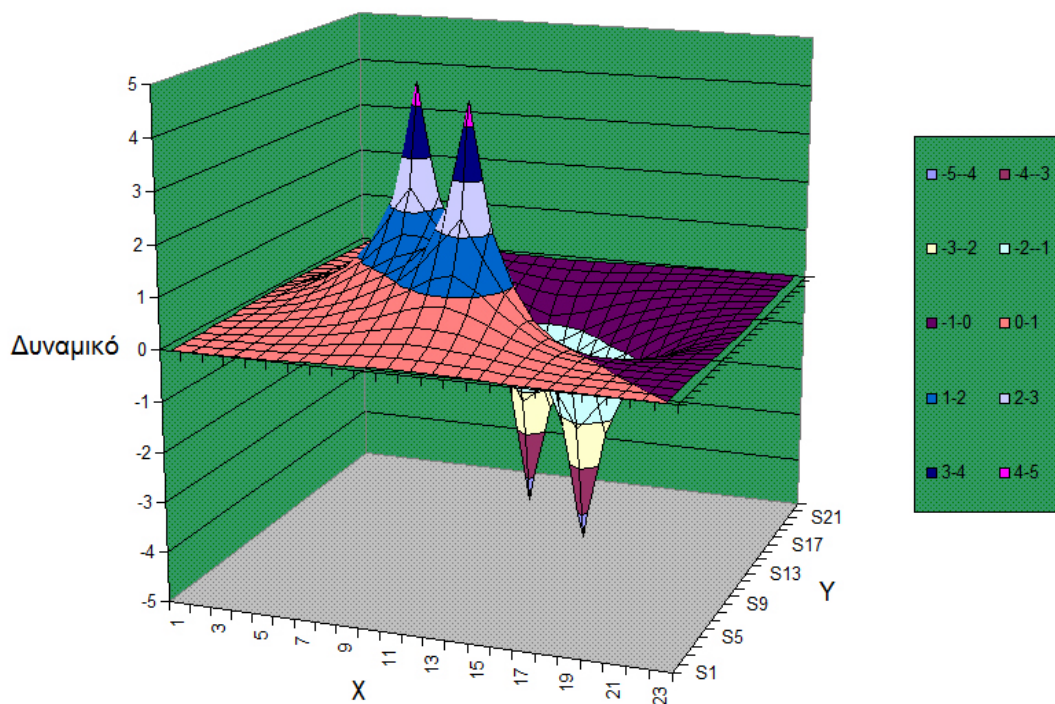
Δυναμικό ηλεκτρικού διπόλου



16)

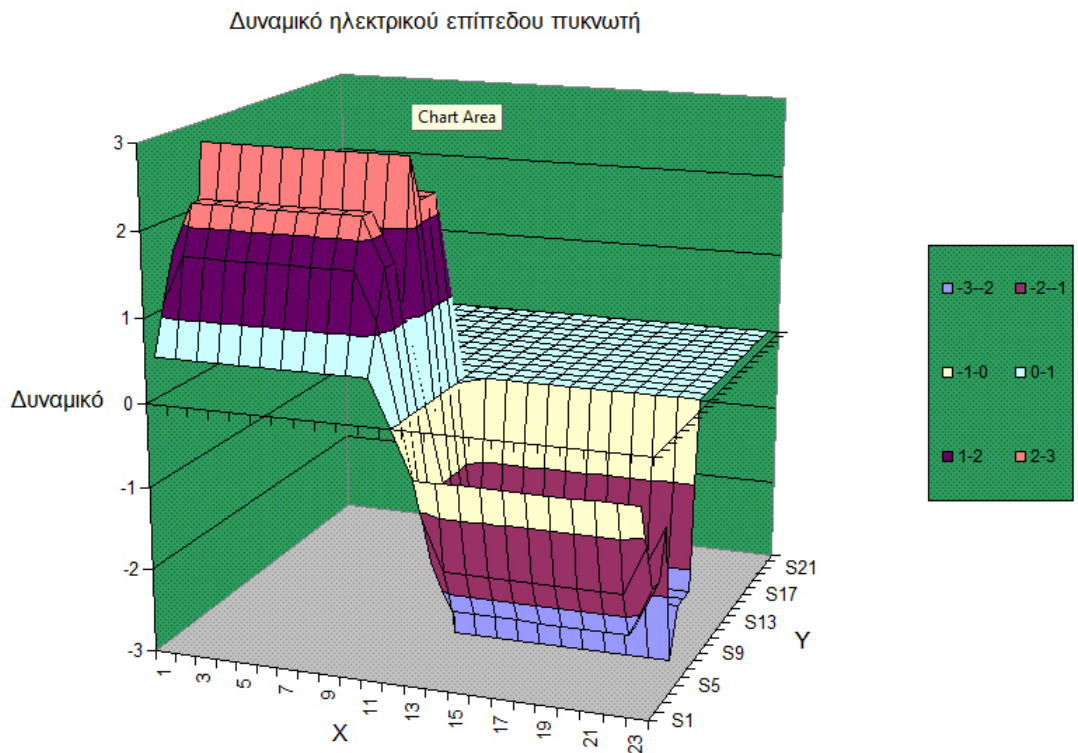
Γραφική παράσταση της συνάρτησης poisson (βλ. παραπάνω γραφική παράσταση) της άσκησης 5.1 βιβλίου σελίδα 114

Δυναμικό ηλεκτρικού τετράπολου



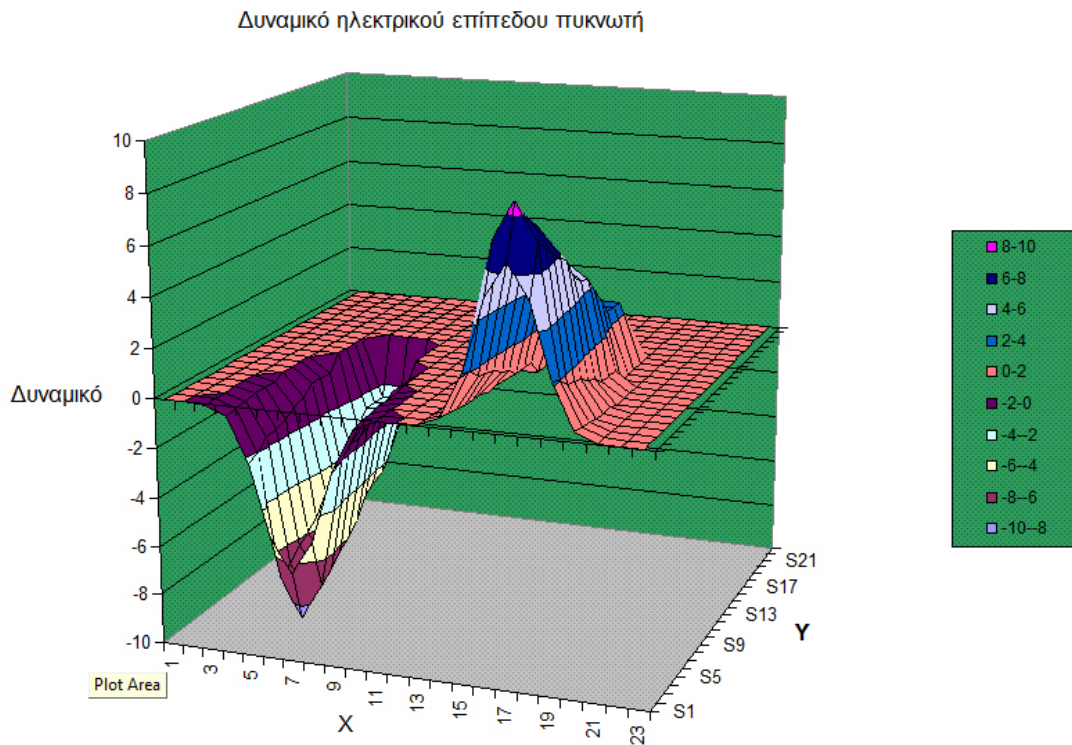
17)

Γραφική παράσταση της συνάρτησης poisson (βλ. παραπάνω γραφική παράσταση) της άσκησης 5.2 βιβλίου σελίδα 114



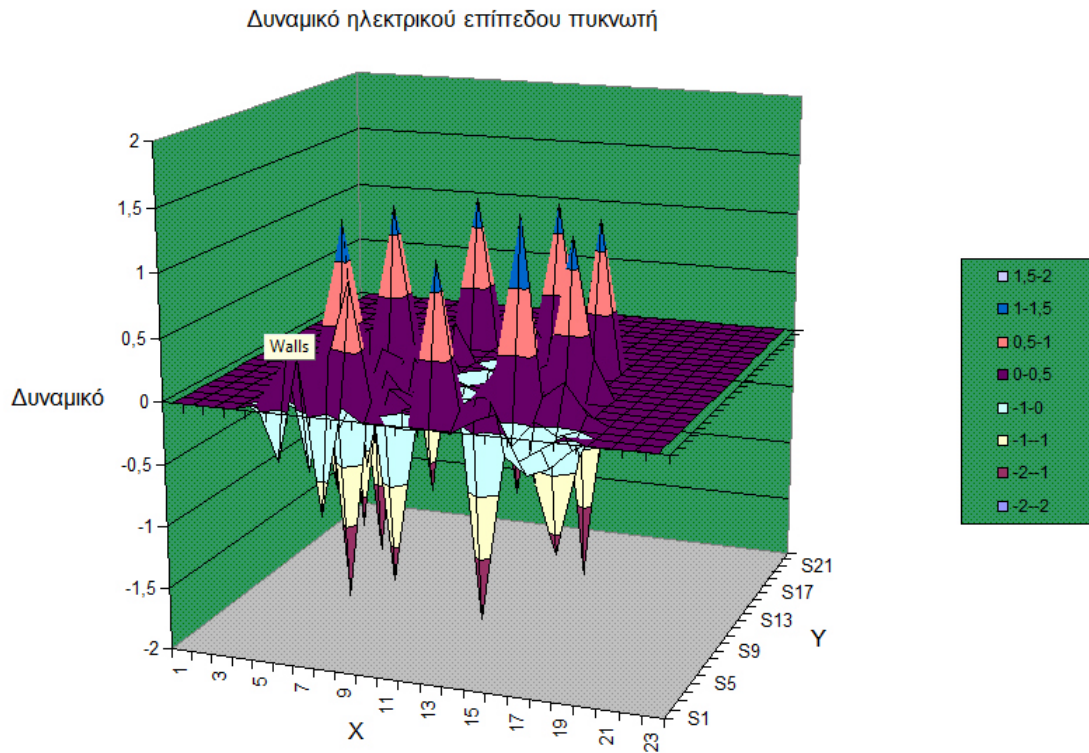
18)

Γραφική παράσταση της συνάρτησης poisson (βλ. παραπάνω γραφική παράσταση) της άσκησης 5.3 βιβλίου σελίδα 114



19)

Γραφική παράσταση της συνάρτησης poisson (βλ. παραπάνω γραφική παράσταση) της άσκησης 5.4 βιβλίου σελίδα 114

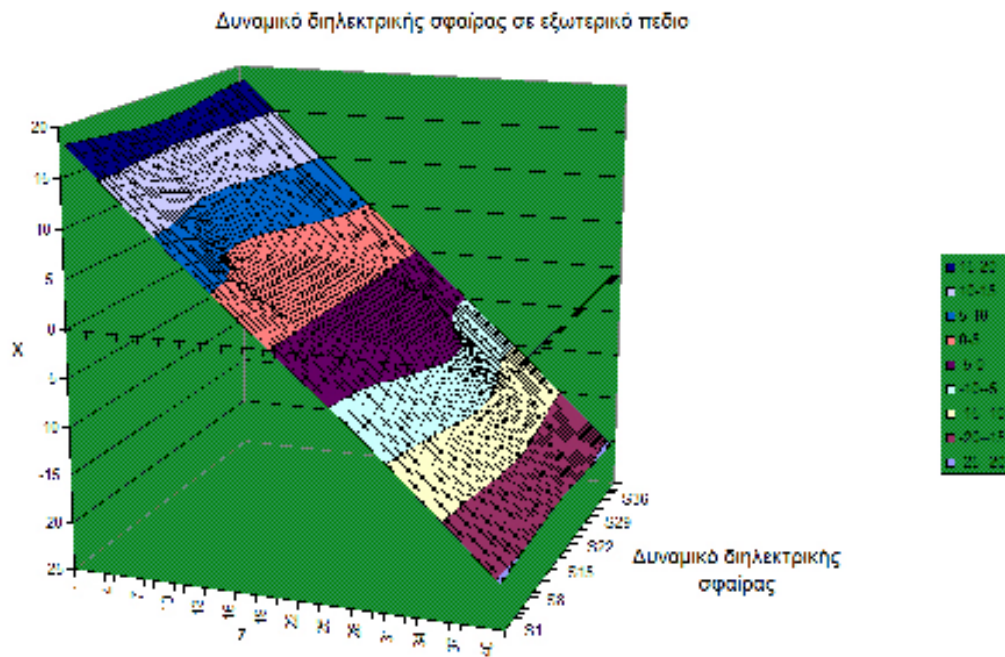


20)

Γραφική παράσταση της εξίσωσης με μορφή

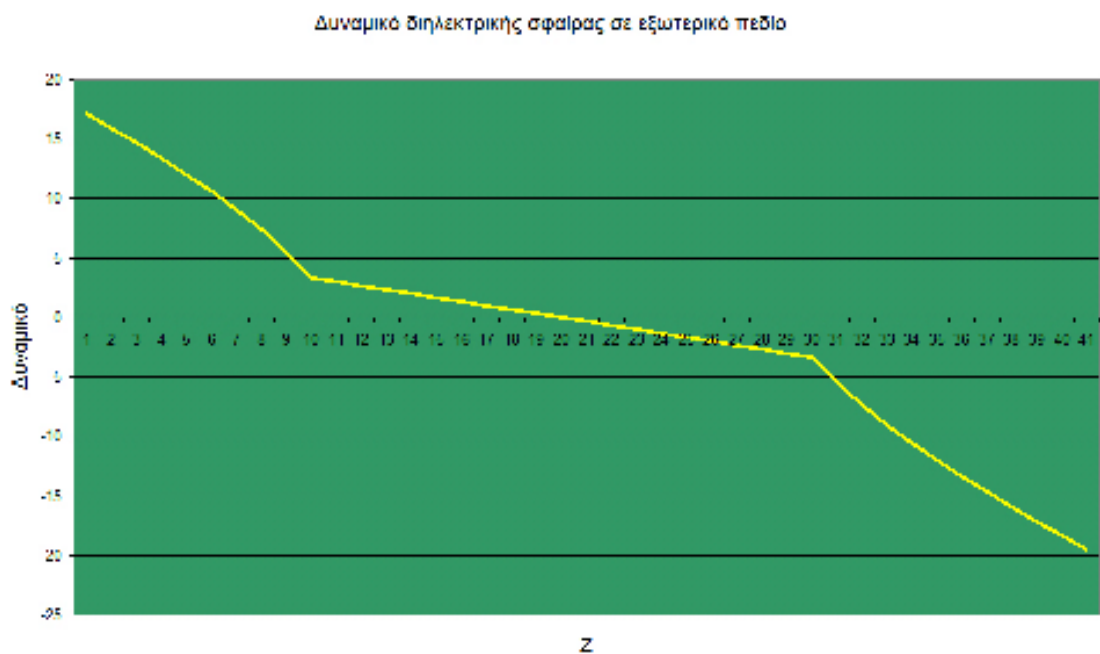
$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{3}{K_e + 2} E_0 r \cos \theta, & \text{για } r \leq R \\ -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{K_e - 1}{K_e + 2} \right) E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, & \text{για } r > R \end{cases}$$

εργαστηριακής άσκησης 6.1.1 βιβλίου σελίδα 126



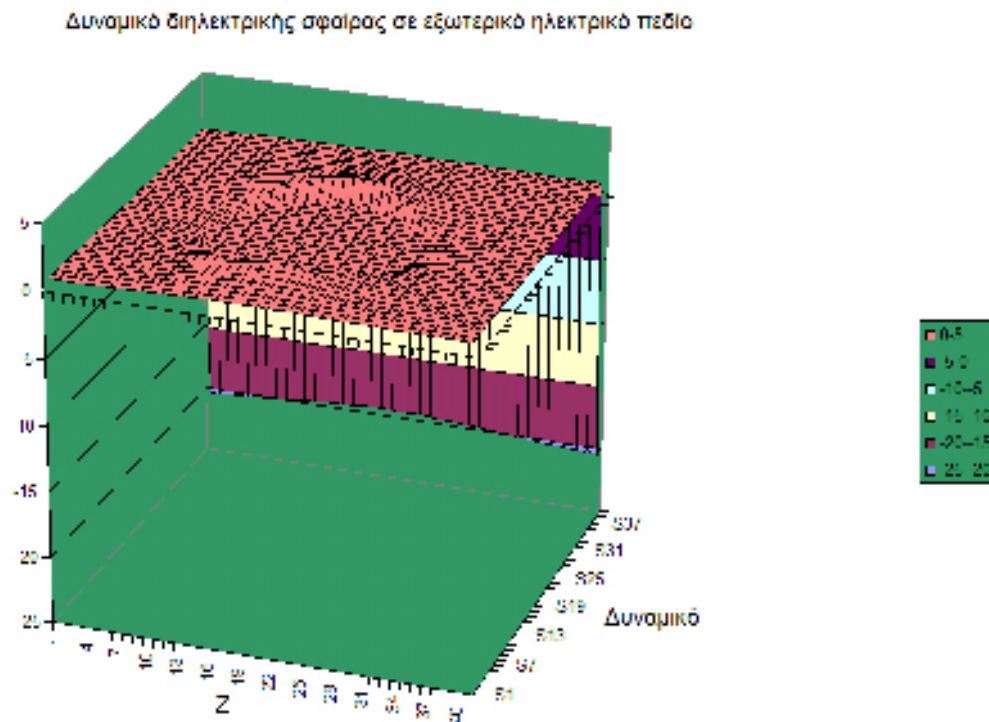
21)

Γραφική παράσταση εργαστηριακής άσκησης 6.1.2 βιβλίου σελίδα 126 που παρουσιάζει το δυναμικό της προηγούμενης γραφικής κατά την μια διάμετρο της σφαίρας



22)

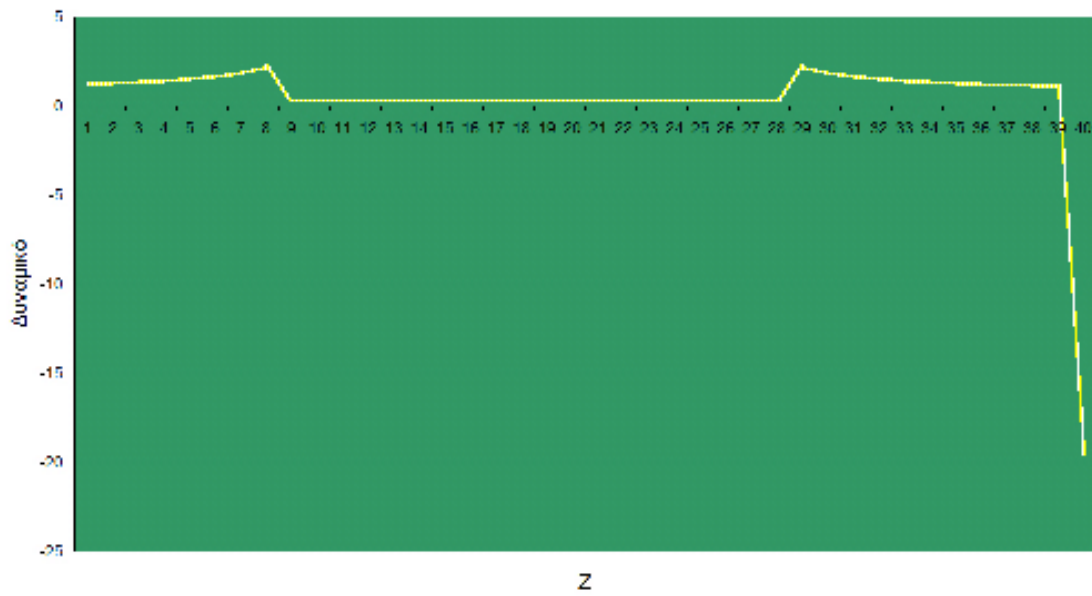
Γραφική παράσταση (εξίσωσης γραφήματος 20) για το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στον χώρο μέσα και γύρω από την σφαίρα εργαστηριακής άσκησης 6.1.3 βιβλίου σελίδα 126.



23)

Γραφική παράσταση εργαστηριακής άσκησης 6.1.4 βιβλίου σελίδα 126 που παρουσιάζει το δυναμικό της προηγούμενης γραφικής κατά την μια διάμετρο της σφαίρας

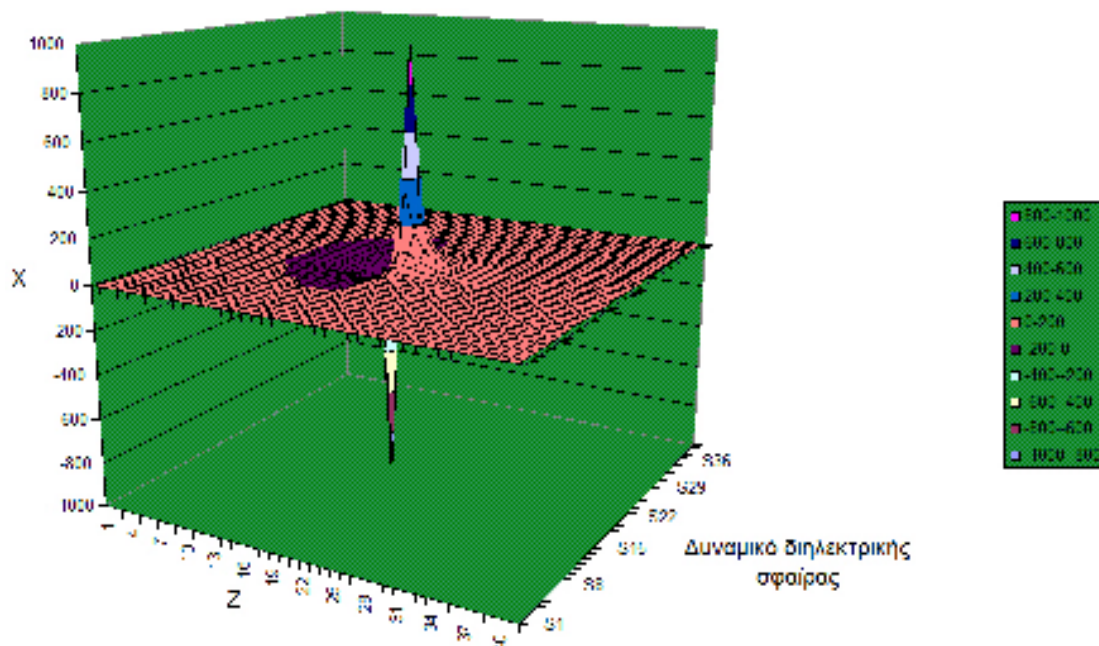
Δυναμικό διηλεκτρικής σφαίρας σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο



24)

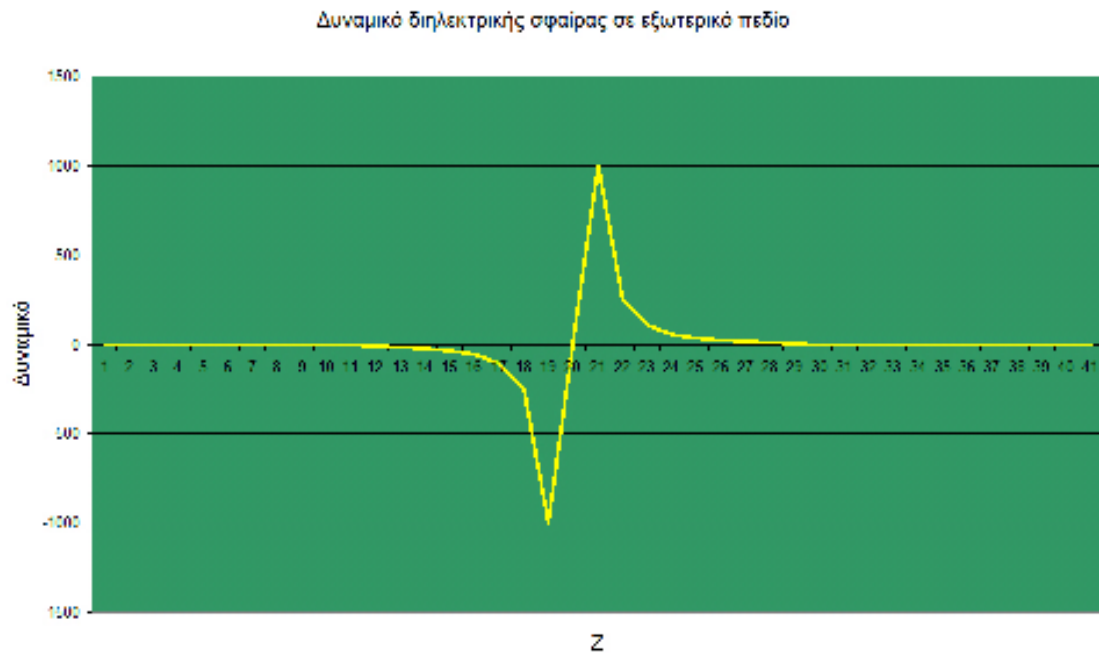
Γραφική παράσταση της εξίσωσης $\Phi_{εξω}(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$ της άσκησης 6.3.1 βιβλίου σελίδα 134

Δυναμικό διηλεκτρικής σφαίρας σε εξωτερικό πεδίο



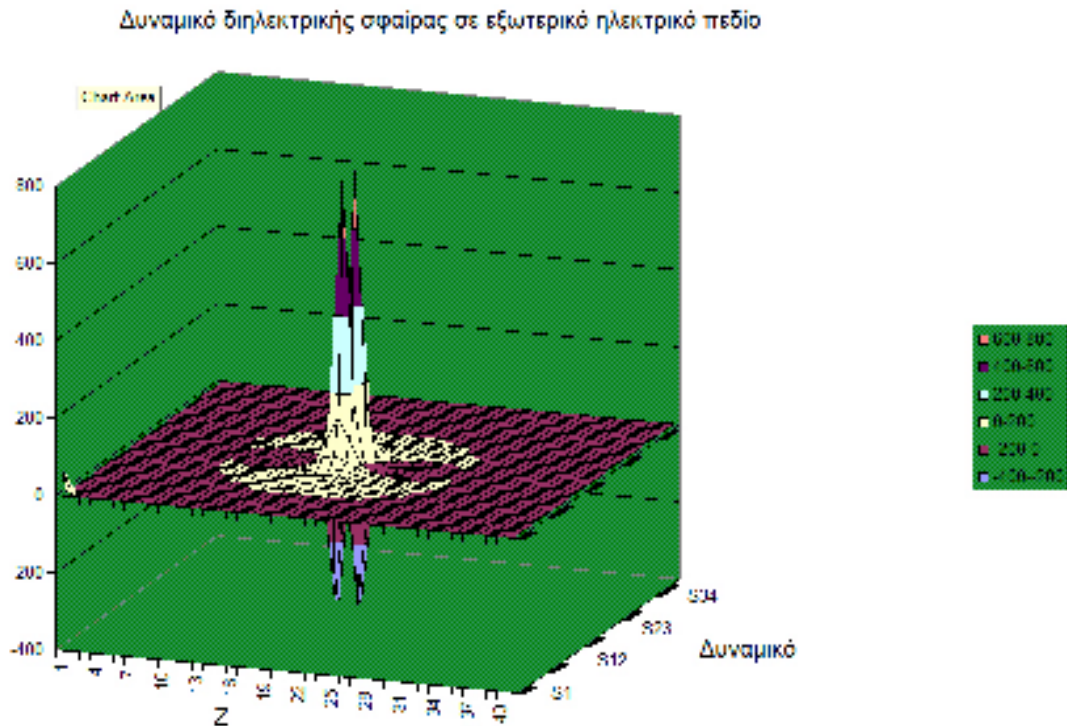
25)

Γραφική παράσταση που παρουσιάζει το δυναμικό της προηγούμενης γραφικής κατά την μια διάμετρο της σφαίρας άσκησης 6.3.2 βιβλίου σελίδα 134



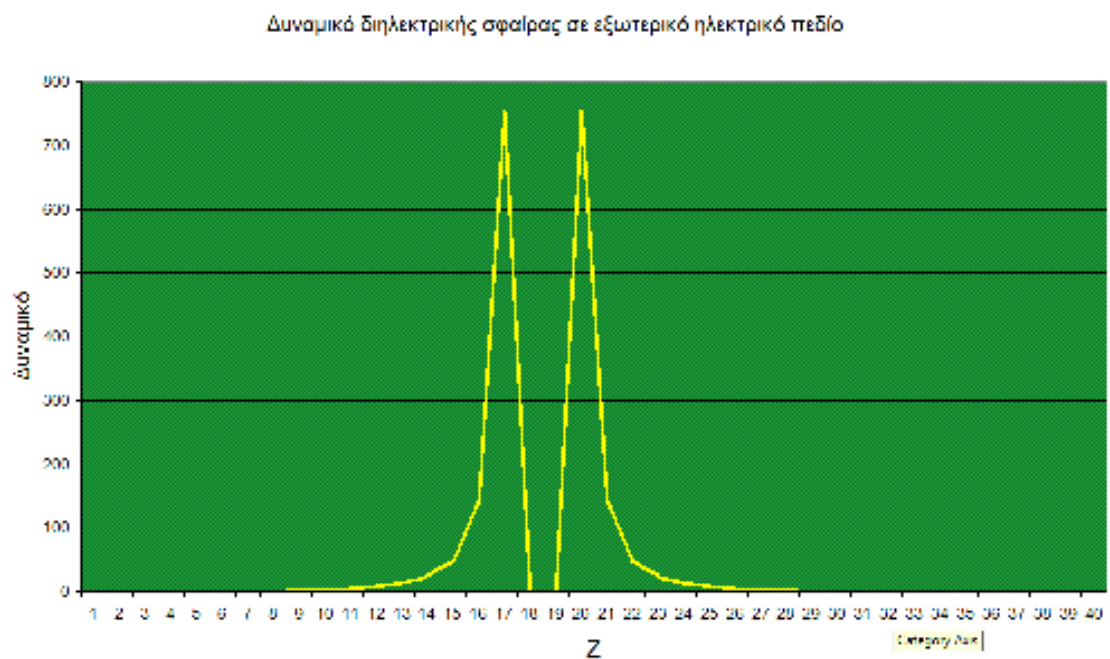
26)

Γραφική παράσταση για το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στον χώρο μέσα και γύρω από την σφαίρα άσκησης 6.3.3 βιβλίου σελίδα 134



27)

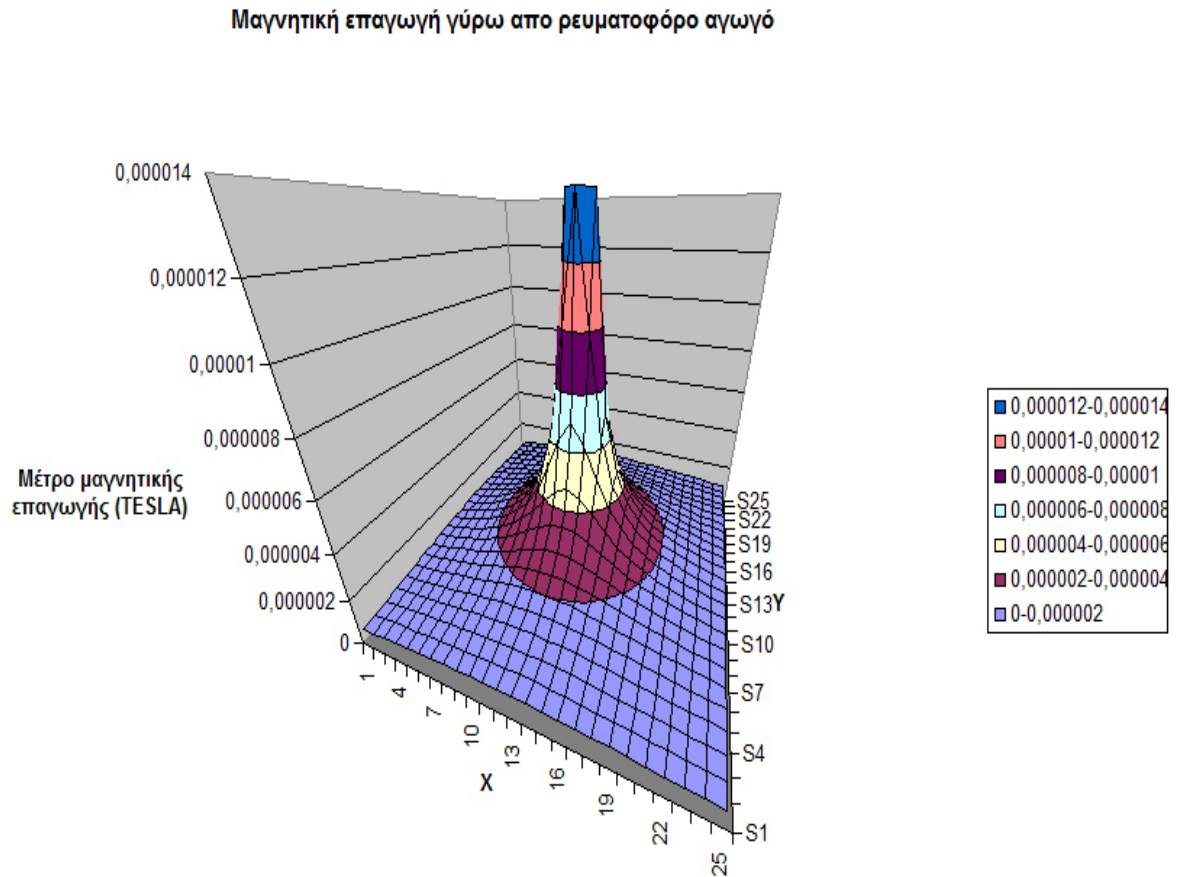
Γραφική παράσταση που παρουσιάζει το δυναμικό της προηγούμενης γραφικής κατά την μια διάμετρο της σφαίρας άσκησης 6.3.4 βιβλίου σελίδα 134



28)

Γραφική παράσταση άσκησης της εξίσωσης ρεύματος $I = \int_s J \cdot dA$ 7.1

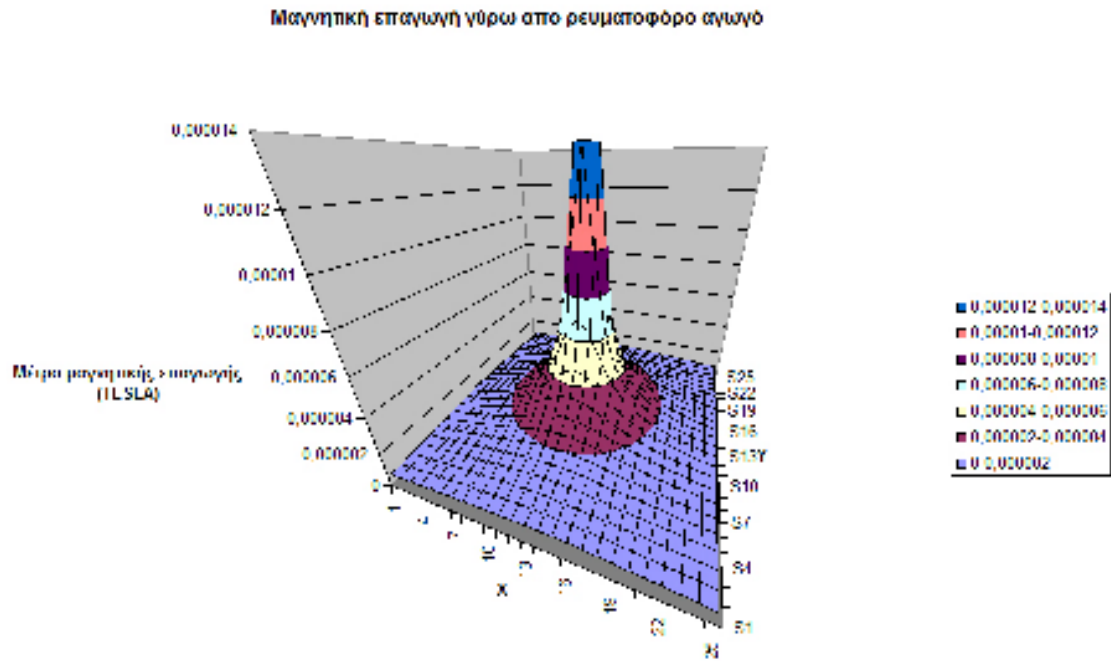
βιβλίου σελίδα 138



29)

Γραφική παράσταση της εξίσωσης ρεύματος $I = \int_s J \cdot dA$ άσκησης 7.2

βιβλίου σελίδα 143



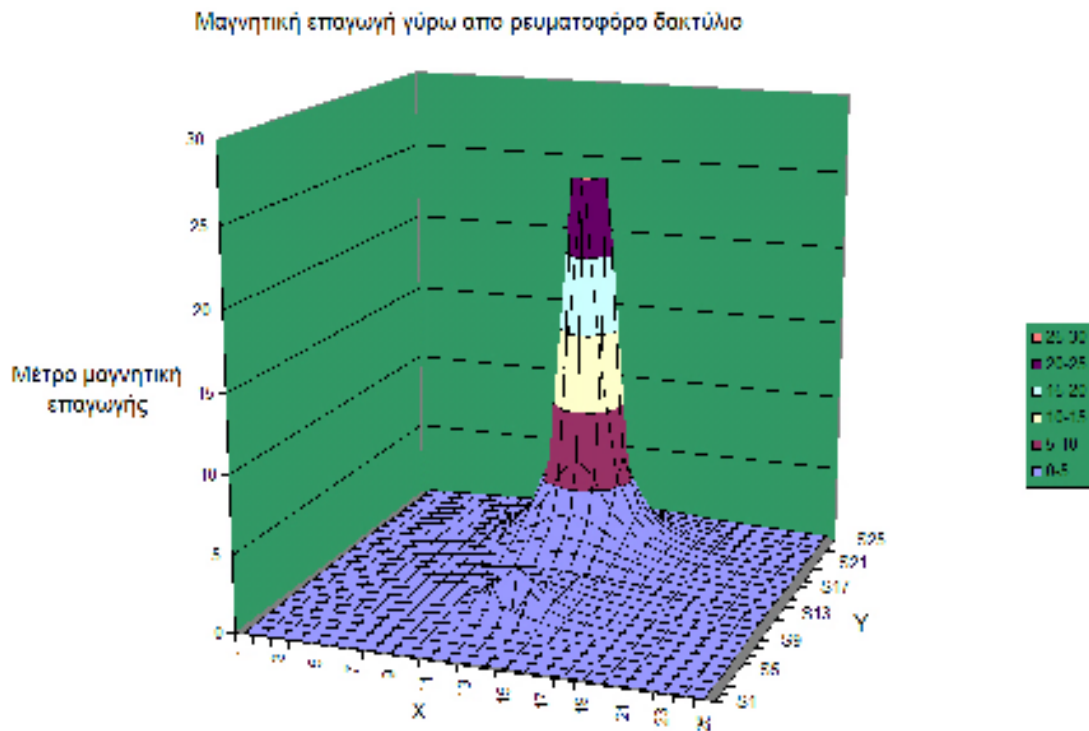
30)

Γραφική παράσταση της εξίσωσης από τον νόμο των Biot-Savart

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl(r-r')}{|r-r'|^3}$$

εργαστηριακής άσκησης Β δακτυλίου βιβλίου

σελίδα 164



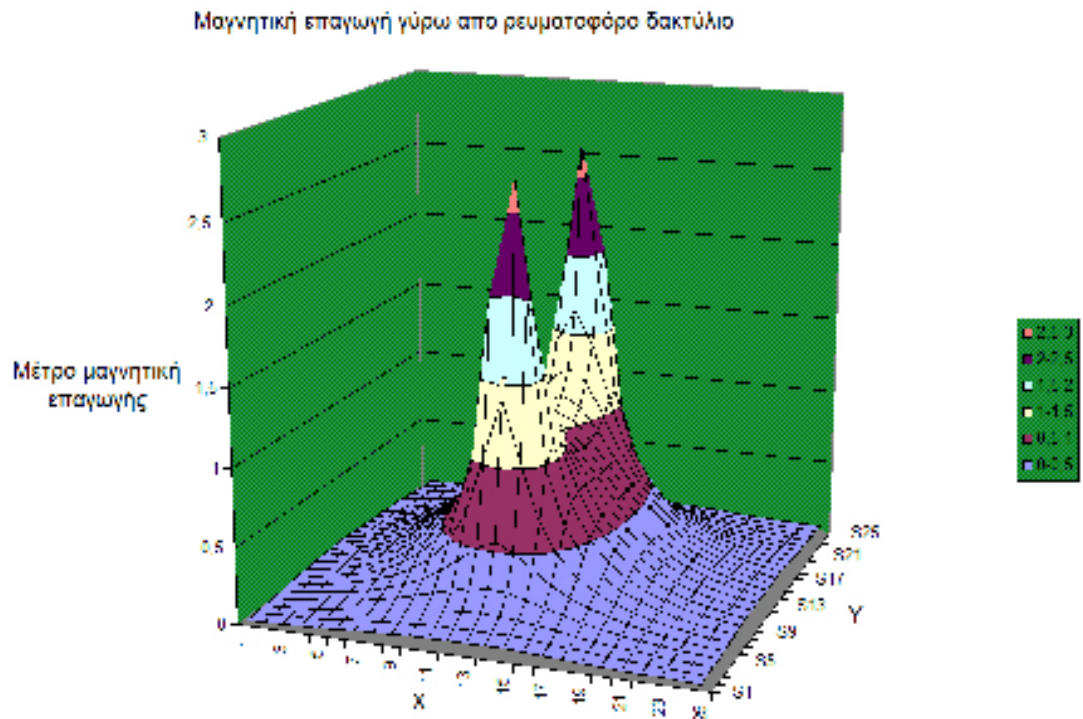
31)

Γραφική παράσταση των εξισώσεων

$$I_0(R, x, z) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \eta d\eta}{(R^2 + z^2 + x^2 - 2Rx \cos \eta)^{1/2}} \quad \text{και}$$

$$I_\kappa(R, x, z) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^\kappa \eta d\eta}{(R^2 + z^2 + x^2 - 2Rx \cos \eta)^{3/2}} \quad \text{μέσω του νόμου του simpson :}$$

άσκησης 8,3 Β δακτυλίου βιβλίου σελίδα 171



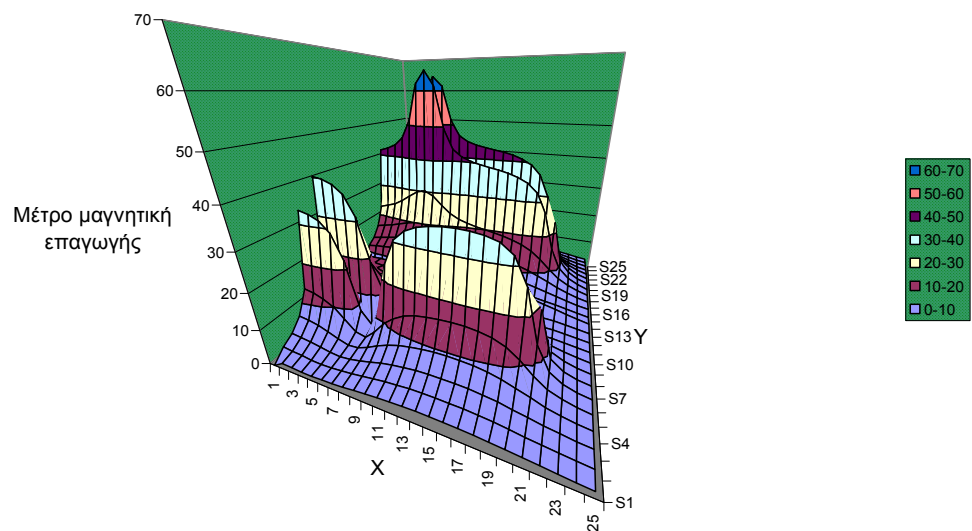
32)

Γραφική παράσταση των εξισώσεων $B_z(i, j) = \sum_{i'=i-L}^{i+L} b_z(i', j)$ και

$B_x(i, j) = \sum_{i'=i-L}^{i+L} b_x(i', j)$ για τον υπολογισμό της επαγωγής του πηνίου,

εργαστηριακής άσκησης Β πηνίου βιβλίου σελίδα 177

Μαγνητική επαγωγή πηνίου



Βιβλιογραφία

- **Σημειώσεις του Δρ. Κωνσταντίνου Πετρίδη:**
Σημειώσεις Εφαρμοσμένου Ηλεκτρομαγνητισμού
- *Ισότοπος:* Από τη Βικιπαίδεια, την ελεύθερη εγκυκλοπαίδεια
<http://www.wikipedia.org/>
- Π. Α. Ασημακοπούλου, Ιωάννινα 1998 :
Φυσική Με το Excel – Ηλεκτρομαγνητισμός