

ΤΕΙ Κρήτης-Σχολή Εφαρμοσμένων Επιστημών
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών Τ.Ε

Πτυχιακή Εργασία

με θέμα

Εφαρμογές της Θεωρίας Ανίχνευσης
Σήματος σε Δίκτυα Αισθητήρων



Γκαγκαουδάκη Ιωάννα

Επιβλέπων καθηγητής
ΚΟΚΚΙΝΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ,
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΧΑΝΙΑ 2014

Ευχαριστίες

Θα θελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου ΚΟ. *ΚΟΚΚΙΝΟ ΕΥΑΓΓΕΛΟ* κυρίως για την εμπιστοσύνη, υπομονή και καθοδήγηση που έδειξε στο θέμα της πτυχιακής, αλλά και για τις πολύτιμες συμβουλές του για την μετέπειτα καριέρα μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που τόσα χρόνια με στηρίζουν και ιδιαίτερα κατά τα χρόνια της φοίτησης μου, καθώς και για την παιδεία, την γνώση και την αγάπη που μου προσέφεραν και μου προσφέρουν καθημερινά.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ-ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός αυτής της πτυχιακής είναι να επικεντρωθούμε στην ανάπτυξη μεθοδολογιών για:

α) λήψη αποφάσεων,

β) εκτίμηση παραμέτρων και

γ) εκτίμηση σημάτων. Και στις τρεις περιπτώσεις η κύρια έμφαση θα δοθεί στην παρουσίαση βέλτιστων τεχνικών. Επειδή ωστόσο οι βέλτιστες τεχνικές απαιτούν υψηλό επίπεδο γνώσης του προβλήματος, απαίτηση η οποία δυστυχώς για τις περισσότερες εφαρμογές είναι μη ρεαλιστική, καθίσταται αναγκαία η αναζήτηση εναλλακτικών μεθοδολογιών με χαμηλότερες ανάγκες σε εκ των προτέρων πληροφορία. Λόγω φυσικά της έλλειψης λεπτομερούς πληροφορίας, οι εν λόγω τεχνικές υστερούν σε απόδοση σε σύγκριση με τις βέλτιστες αλλά, από την άλλη πλευρά, είναι πρακτικά εφαρμόσιμες.

Θα βρεθούν τα κατάλληλα κριτήρια απόφασης για εκτιμητές οι οποίοι έχουν σχεδιασθεί να λειτουργούν υπό Bayesian και Neyman-Pearson πλαίσια απόφασης, για την περίπτωση που η ισχύς εκπομπής είναι γνωστή στον δέκτη (Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας -Maximum Likelihood Estimation) καθώς και για την περίπτωση που δεν είναι γνωστή (Sub-Optimum Likelihood Estimation)

Τέλος, ας σημειωθεί ότι η ανάπτυξη των βέλτιστων τεχνικών, πέρα φυσικά από θεωρητικό, παρουσιάζει επίσης και πρακτικό ενδιαφέρον, αφού η απόδοσή τους αποτελεί σημείο αναφοράς για οποιαδήποτε εναλλακτική τεχνική.

INTRODUCTION-REVIEW

The aim of this project, is to focus on developing methodologies for:

a) decision making ,

b) parameter estimation and

c) estimate of signals. In all three cases, the main accent will be given in the presentation of most optimal techniques. However, since the best techniques require a high level of knowledge of the problem, requirement which unfortunately for most applications it is not realistic, it is necessary to search for alternative methodologies with lower needs in advance information. Because naturally the lack of in detail information, these techniques fall short in performance compared to the best, but on the other hand, is entirely practical.

Will be found the suitable criteria of decision for estimators which have been drawn to function under Bayesian and Neyman-Pearson frames of decision, on the case where the transmission power is known to the receiver (maximum likelihood estimation -Maximum Likelihood Estimation) and the absence is known (Sub-Optimum Likelihood Estimation)

Finally, as is marked that the development of the best techniques, beyond naturally from theorist, also presents practical interest, since their performance is a benchmark for any alternative technique.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	2
ΠΡΟΛΟΓΟΣ-ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	3
ΠΗΓΕΣ-REFERENCES.....	88

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

- Εισαγωγή, χρησιμότητα και εφαρμογές της ανίχνευσης και εκτίμησης σήματος.....8
- Στατιστική θεωρία απόφασης.....9
- Παρουσίαση του κριτηρίου Bayes και εννοιών όπως:
 - Κόστος.....11
 - Ρίσκο.....15
 - Παράδειγμα εύρεσης του αναλογικού τεστ (*likelihood ratio test*), λάθους συναγερμού (*false alarm*) και την πιθανότητα ανίχνευσης (*probability of detection*).16
 - Παράδειγμα εύρεσης κατωφλίου βασιζόμενοι σε περισσότερα του ενός δείγματα.....19
- Εκτίμηση Παραμέτρων του εκπεμπόμενου σήματος.....21
- Maximum Likelihood Estimation (MLE) – Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας.....22
- Παράδειγμα (στην MLE).....22
- Neyman-Pearson κριτήριο.....25
- Παράδειγμα στατιστικής θεωρίας απόφασης.....26
- Receiver Operating Characteristic (ROC).....29
- Σύνθετος Υποθετικός Έλεγχος.....34
- Παραδειγμα με λευκό θόρυβο Gauss.....34
- Τυχαία Μεταβλητή Θ36
- Παραδειγμα με τη σταθερα M να είναι μια Gaussian τυχαία μεταβλητή.....37
- Παραδειγμα με μεταβλητη θ μη τυχαία και αγνωστη.....39
- Διαδοχικη Ανιχνευση.....43

- Παραδειγμα προσδιορισμου κανόνα απόφασης και αναμενόμενη τιμή του K σύμφωνα με κάθε υπόθεση49
- Περίληψη κεφαλαιου51

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

- Ραδιενεργός Ανίχνευση Πηγής με Δίκτυα Αισθητήρων52
- Εισαγωγή, ανίχνευση ραδιενεργιας σε μια πηγη53
- Μεθοδοι ανιχνευσης
 - Επισκόπηση της Bayesian μεθοδολογίας ταξινόμησης.....54
 - $P_r(\text{data})$ και παραγόντες Poisson.....54
 - Υποδομή και αναφορά στη μέθοδο Monte Carlo.....55
 - Προσομοιώσεις που διαμορφώνουν τυχαία τη μεταφορά ραδιενεργων πηγων.....57
- Αποτελεσματα.....
 - Σε περιοχή επιτήρησης μεμονωμένων αισθητήρων.....59
 - Προσομοιώσεις DSN-Distributed Sensor Network ανίχνευσης.....62
- Συμπερασματα της εφαρμογής Bayesian μεθόδου στους αισθητήρες δικτυων.....64
- Παραρτημα, Ολοκληρωμα του αναμενομενου ευρους σηματον.....66
- Περίληψη κεφαλαιου.....68

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

- Εισαγωγή στη Λήψη Αποφάσεων στα Δίκτυα Αισθητήρων Παρατηρώντας τις διαδικασίες Poisson.....70
- Δηλώση του προβληματος και υποθεσεις.....71
- Κυρια αποτελεσματα ληψης αποφασεων.....73
- Αναλυση αποδοσης από τις διαδικασίες Poisson.....76
- Παραδειγμα: Πυρηνικης Ανιχνευσης.....79
- Συμπερασματα αναλυσης.....85
- Παραρτημα τυπων της διαδικασιας Poisson.....85
- Περίληψη κεφαλαιου.....87

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Καλύπτονται έννοιες:

- Εισαγωγή, χρησιμότητα και εφαρμογές της ανίχνευσης και εκτίμησης σήματος.
- Εφαρμογή της θεωρίας των πιθανοτήτων στην ανίχνευση και εκτίμηση σήματος.
- Παράμετρος ανίχνευσης.
- Παρουσίαση του κριτηρίου Bayes και εννοιών όπως:
 - Κόστος
 - Ρίσκο
 - Παράδειγμα εύρεσης του αναλογικού τεστ (*likelihood ratio test*), λάθους συναγερμού (false alarm) και την πιθανότητα ανίχνευσης (probability of detection).
 - Παράδειγμα εύρεσης κατωφλίου βασιζόμενοι σε περισσότερα του ενός δείγματα.
- Εκτίμηση Παραμέτρων του εκπεμπόμενου σήματος.
- Maximum Likelihood Estimation (MLE) – Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας.
- Παράδειγμα (στην MLE).
- Δοκιμή σύνθετης υπόθεσης.
- Παράδειγμα με λευκό θόρυβο Gauss.
- Τυχαία Μεταβλητή Θ .
- Δοκιμή UMP.
- Διαδοχική Ανίχνευση.
- Ανεπιθύμητη παράμετρος M .
- H_0 απλή υπόθεση και H_1 σύνθετη υπόθεση.
- Διακύμανση σ_m^2 .

Εισαγωγή

Γενικότερα μιλώντας, η ανίχνευση και εκτίμηση ασχολείται με την μελέτη της επεξεργασίας της πληροφορίας, η οποία μεταφέρεται με διάφορες μορφές σημάτων, με τελικό σκοπό να ανακτήσουμε την πληροφορία μέσα από τα σήματα αυτά. Εφαρμογές της θεωρίας της ανίχνευσης σήματος μπορούν να βρεθούν σε πολλά πεδία όπως επικοινωνίες και αυτόματος έλεγχος. Για παράδειγμα, στις τηλεπικοινωνίες, εφαρμογές όπως η μετάδοση σήματος, Radar, η ανίχνευση και εκτίμηση σήματος προσφέρει το θεωρητικό και αναλυτικό υπόβαθρο για τον σχεδιασμό αποτελεσματικών τηλεπικοινωνιακών δεκτών. Εναλλακτικά, στον τομέα του αυτοματισμού, η ανίχνευση και εκτίμηση σήματος οδηγεί σε τεχνικές στο να φτιαχτούν καλύτερα και με μεγαλύτερη ακρίβεια μηχανήματα, ανάλογα με τις συνθήκες που λαμβάνουν χώρα στο σύστημα που πρόκειται να ελεγχθεί.

Ένα παράδειγμα χρήσης της ανίχνευσης και εκτίμησης σήματος στα Radar, είναι όταν έχει εκπεμφθεί ένας ηλεκτρομαγνητικός παλμός και περιμένουμε την ηχώ για την υπόδειξη ενός στόχου. Λόγω των ατμοσφαιρικών ανωμαλιών, ηλεκτρονικός θόρυβος ο οποίος γεννιέται μέσα στα μηχανήματα, διαφόρων ειδών ανακλάσεις από άλλα αντικείμενα, μας οδηγούν σε μια πιο ασαφή εικόνα του στόχου, και έτσι επιστρατεύουμε την στατιστική, διότι πλέον μιλάμε για την πιθανότητα σωστής ανίχνευσης. Άρα η θεωρία της ανίχνευσης και εκτίμησης σήματος, μας βοηθά στο να διαλέξουμε την καλύτερη τεχνική για την ανίχνευση των σημάτων που μας ενδιαφέρουν. Επιπλέον, έχοντας καθορίσει με κάποιο βαθμό βεβαιότητας ότι ο στόχος είναι παρών, θα μπορούμε να υπολογίσουμε επιπλέον χαρακτηριστικά του στόχου, όπως ταχύτητα, ύψος, μέγεθος, κ.α.. Αυτές οι εκτιμήσεις είναι πολύ χρήσιμες στο να ελέγξουμε την κεραία για την συνεχή παρακολούθηση του στόχου, ή ακόμα και να ελέγξουμε εμείς οι ίδιοι τον στόχο, για την διατήρηση μιας επιθυμητής πορείας.

Άλλες συγκεκριμένες εφαρμογές της τεχνικής της ανίχνευσης και εκτίμησης σήματος είναι στον τομέα της σεισμολογίας, ράδιο-αστρονομία, sonar, επεξεργασία ήχου και εικόνας, επεξεργασία ιατρικών σημάτων και στις οπτικές επικοινωνίες.

Γενικότερα, οι εφαρμογές της ανίχνευσης και εκτίμησης σήματος περιλαμβάνουν την επινόηση των καταλληλότερων κριτηρίων για την αποδοτικότερη εκτίμηση σήματος το οποίο είναι εμπλουτισμένο διαφόρων ειδών προσθετικού θορύβου, ο οποίος δυσχεραίνει, την εκτίμηση του σήματος το οποίο είναι άγνωστο στον παρατηρητή, και ρίχνει την απόδοση του συστήματος λήψης.

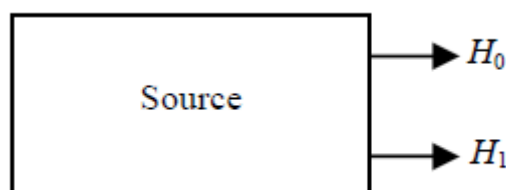
Βασικά στοιχεία της μελέτης της θεωρίας της ανίχνευσης και εκτίμησης σήματος, είναι η έννοια μιας τυχαίας μεταβλητής Y η οποία παίρνει τυχαίες τιμές μέσα από ένα παρατηρούμενο σετ Γ , το οποίο μπορεί να είναι ένα σετ από πίνακες, κυματομορφές, πραγματικοί αριθμοί, ή κάποιο άλλο σετ και στην ουσία περιλαμβάνει κάθε πιθανή μορφή σήματος που μπορούμε να λάβουμε από την πηγή. Από την παρατήρηση Y μπορούμε να ανακτήσουμε πληροφορία σχετικά με τα φαινόμενα που 'διαμόρφωσαν' την Y . Υπάρχουν δύο τύποι προβλημάτων τα οποία μας ενδιαφέρουν:

- *προβλήματα ανίχνευσης*, όπου επιθυμούμε να διαλέξουμε μέσα από ένα πεπερασμένο αριθμό δυνατών παρατηρήσεων, την σωστή ‘αντιστοιχία’ παρατήρησης-εκπεμπόμενου σήματος.
- *Προβλήματα εκτίμησης* όπου επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την τιμή/τιμές μιας ποσότητας/ποσοτήτων όπου η παρατήρηση έγινε με έμμεσο τρόπο.

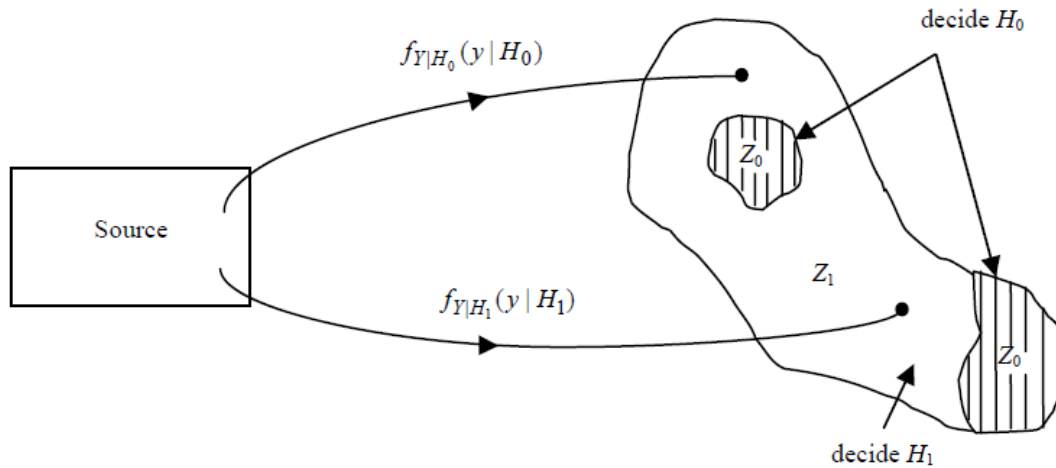
5.1 Στατιστική Θεωρία Απόφασης

Στη καθημερινή ζωή μας, λαμβάνουμε συνεχώς αποφάσεις. Λαμβάνοντας υπόψη μερικές υποθέσεις, επιλέγεται ένα κριτήριο, επάνω στο οποίο πρέπει να ληφθεί μια απόφαση. Παραδείγματος χάριν, η εφαρμοσμένη μηχανική, όταν υπάρχει ένα πρόβλημα ανίχνευσης σημάτων ραντάρ, το επιστρεφόμενο σήμα μπορεί να παρατηρηθεί και μια απόφαση λαμβάνεται ως προς το εάν ένας στόχος είναι παρών ή απών. Σε ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνιών, μια ακολουθία από 0 και 1 μπορεί να διαβιβαστεί μέσα από κάποιο μέσο. Στο δέκτη, τα λαμβανόμενα σήματα που αντιπροσωπεύουν τα 0 και 1 αλλοιώνονται στο μέσο από κάποιο πρόσθετο θόρυβο και από το θόρυβο των δεκτών. Ο δέκτης δεν ξέρει ποιο σήμα αντιπροσωπεύει το μηδέν και ποιο σήμα αντιπροσωπεύει το ένα, αλλά πρέπει να λάβει μια απόφαση εάν τα λαμβανόμενα σήματα αντιπροσωπεύουν το 0 ή το 1. Η διαδικασία όπου ο δέκτης αναλαμβάνει την επιλογή ενός κανόνα απόφασης ονομάζεται θεωρία ανίχνευσης σήματος.

Σε κάθε περίπτωση η σύνδεση ανάμεσα στο παρατηρούμενο δείγμα και το σήμα που εκπέμφθηκε, μετριέται με όρους πιθανότητας. Και αυτό γιατί η στατιστική συμπεριφορά της Y , επηρεάζεται στην στιγμιαία κατάσταση (στιγμιαία διότι οι παραμορφωτικές διαδικασίες είναι τυχαίες και έτσι έχουν κάποια κατανομή πιθανότητας) της (ή και περισσότερες της μίας) παραμορφωτικής διαδικασίας. Και έτσι βλέπουμε ότι το μοντέλο για το παρατηρούμενο σετ Γ , περιλαμβάνει μια οικογένεια από κατανομές πιθανότητας, του οποίου οι όροι οι οποίοι αντιστοιχούν στην στιγμιαία τιμή που έλαβαν μέσα από την κατανομή που τις διέπει την στιγμή της παρατήρησης. Το πρόβλημα είναι να βρούμε το μοντέλο το οποίο είναι κατάλληλο για την περιγραφή της κατανομής του εισερχόμενου σήματος, γιατί το κατώφλι που θα θέσουμε για την εκτίμηση, είναι διαφορετικό για κάθε κατανομή. Σε περίπτωση που γίνει λάθος μοντελοποίηση, ως συνέπεια θα έχουμε να τεθεί σε λάθος τιμή το κατώφλι, με δραματικές συνέπειες στην απόδοση του δέκτη. Ένα άλλο στοιχείο που θα μας απασχολήσει είναι η περίπτωση να έχουμε ή και να μη έχουμε στην γνώση μας οποιοδήποτε στοιχείο το οποίο χαρακτηρίζει την κατανομή του εκπεμφθέντος σήματος. Αυτήν την γνώση την ονομάζουμε *prior knowledge* (prior διότι εκφράζει πληροφορία για την ισχύ αποστολής αλλά και με ποια πιθανότητα εκπέμπεται το κάθε σήμα).



Παρατηρούμε μια πηγή η οποία εκπέμπει δύο διαφορετικά σήματα. Η γνώση της ισχύς αποστολής του έκαστο σήματος, αλλά και με τι πιθανότητα θα αποσταλεί το έκαστο σήμα, ονομάζεται prior knowledge.



Στο σχήμα αυτό παρατηρούμε τις πιθανοφάνειες $f_{Y|H_0}(y|H_0)$ για το σήμα '0' και $f_{Y|H_1}(y|H_1)$ για το σήμα '1'. Επίσης εάν το άμορφο σήμα δηλώνει πιθανότητα, τότε ο όγκος του θα ισούται με '1'. Οι περιοχές Z_0 και Z_1 δηλώνουν την πιθανότητα να εκτιμηθεί το εκπεμπόμενο σήμα '0', ή '1'. Με βάση το τελευταίο, βλέπουμε από το σχήμα ότι το σήμα '1' έχει σωστά εκτιμηθεί σαν '1' από τον δέκτη, ενώ το σήμα '0' έχει εκτιμηθεί λάθος σαν '1'. Εάν το βελάκι $f_{Y|H_0}(y|H_0)$ κατέληγε σε μια από τις δύο περιοχές Z_0 , τότε θα είχα σωστή εκτίμηση και για το '0'.

Οι πιθανές εκδοχές σε ένα δυαδικό σύστημα είναι λοιπόν:

1. Να εκτιμήσουμε το σήμα σαν H_0 ενώ το είναι H_0 σωστό.
2. Να εκτιμήσουμε το σήμα σαν H_0 ενώ το είναι H_1 σωστό.
3. Να εκτιμήσουμε το σήμα σαν H_1 ενώ το είναι H_0 σωστό.
4. Να εκτιμήσουμε το σήμα σαν H_1 ενώ το είναι H_1 σωστό.

Προσέξτε ότι στις περιπτώσεις (1) και (4), ο δέκτης λαμβάνει την σωστή απόφαση, ενώ στις περιπτώσεις (2) και (3), ο δέκτης κάνει λάθος. Σε ένα σύστημα Radar, η περίπτωση (2) λέγεται *miss*, η περίπτωση (3) λέγεται *false alarm* και η περίπτωση (4) λέγεται *detection*.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε διάφορες τεχνικές που χρειάζονται για να λύσουμε προβλήματα ανίχνευσης σήματος.

Το κριτήριο Bayes

Στην χρήση του κριτηρίου Bayes, λαμβάνουμε υπόψη μας δύο υποθέσεις. Πρώτον, να γνωρίζουμε με τι πιθανότητα θα εκπεμφθεί το σήμα '0' και '1'. Αυτές οι πιθανότητες λέγονται *priori* πιθανότητες, $P(H_0)$ και $P(H_1)$ αντίστοιχα. Δοσμένες τις *priori* πιθανότητες, και γνωρίζοντας ότι το σήμα που θα εκπεμφθεί, θα είναι '0' ή '1', έχουμε:

$$P_0 + P_1 = 1$$

Υπάρχει όμως η πιθανότητα να γίνει λάθος εκτίμηση του σήματος που λαμβάνω, και έτσι ανάλογα με την εφαρμογή θα έχω και ανάλογο κόστος. Για παράδειγμα, δεν μπορώ να έχω το ίδιο κόστος σε μια αναπαραγωγή τραγουδιού και σε μια στρατιωτική εφαρμογή όπου μπορεί να υπάρχει στόχος, και το Radar να μην μου τον υποδείξει. Θέτουμε λοιπόν D_i $i=0,1$, όπου το D_0 δηλώνει την ενέργεια 'αποφάσισε ότι το λαμβανόμενο σήμα είναι το '0'' και όπου το D_1 δηλώνει την ενέργεια 'αποφάσισε ότι το λαμβανόμενο σήμα είναι το '1''. Επίσης θέτουμε το κόστος ανάλογα με την εκτίμηση που έχει ήδη γίνει στον δέκτη $C_{i,j}$ $i,j=0,1$ το οποίο δίνει το κόστος που θα έχουμε στην περίπτωση που η υπόθεση H_j είναι σωστή και η εκτίμηση που έχει κάνει ο δέκτης είναι η C_i .



Τα πιθανά κόστη θα είναι λοιπόν:

1. C_{00} για την περίπτωση (1).
2. C_{01} για την περίπτωση (2).
3. C_{10} για την περίπτωση (3).
4. C_{11} για την περίπτωση (4).

Ο στόχος μας είναι να βρούμε εκείνο το κατώφλι απόφασης έτσι όπου το μέσο κόστος $E[C]$ το οποίο είναι γνωστό και σαν *ρίσκο* \mathfrak{R} να είναι το ελάχιστο. Η πράξη $E[C]$ δηλώνει αναμενόμενη τιμή. Έχει επίσης υποτεθεί ότι το κόστος να παρθεί λάθος απόφαση, είναι μεγαλύτερη από το να παρθεί σωστή απόφαση.

$$C_{01} > C_{11}$$

Και

$$C_{10} > C_{00}$$

Εάν γνωρίζουμε την τομή των πιθανοτήτων $P(D_i)$ και $P(H_j)$, δηλαδή να γνωρίζουμε την *joint probability* $P(D_i, H_j)$ για κάθε συνδυασμό των i και j , τότε το μέσο κόστος θα είναι:

$$\mathfrak{R} = E[C] = C_{00}P(D_0, H_0) + C_{01}P(D_0, H_1) + C_{10}P(D_1, H_0) + C_{11}P(D_1, H_1)$$

Και από τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$P(D_i, H_j) = P(D_i | H_j)P(H_j)$$

Οι υπο-συνθήκη πιθανότητες ~~$P(D_i | H_j)$~~ $i, j \in \{0, 1\}$ τότε για τις περιοχές που φαίνονται στο σχήμα 2, έχουμε:

- **Υπο-συνθήκη πιθανότητα:** δηλώνει το πόσο πιθανό είναι να γνωρίζουμε την H_j και εκτίμηση να είναι η D_i .

$$P(D_0 | H_0) \equiv P(\text{decide } H_0 | H_0 \text{ true}) = \int_{Z_0} f_{Y|H_0}(y | H_0) dy \quad (1)$$

$$P(D_0 | H_1) \equiv P(\text{decide } H_0 | H_1 \text{ true}) = \int_{Z_0} f_{Y|H_1}(y | H_1) dy \quad (2)$$

$$P(D_1 | H_0) \equiv P(\text{decide } H_1 | H_0 \text{ true}) = \int_{Z_1} f_{Y|H_0}(y | H_0) dy \quad (3)$$

$$P(D_1 | H_1) \equiv P(\text{decide } H_1 | H_1 \text{ true}) = \int_{Z_1} f_{Y|H_1}(y | H_1) dy \quad (4)$$

Οι πιθανότητες ~~$P(D_0 | H_0)$~~ ~~$P(D_1 | H_1)$~~ και $P(D_1 | H_1)$ δηλώνουν την πιθανότητα λάθους P_M , την πιθανότητα λάθους συναγερωμού (σε σύστημα Radar) P_F και πιθανότητα συναγερωμού P_D αντίστοιχα. Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$P_M = 1 - P_D$$

Και

$$\del{P(D_0 | H_1)} = 1 - P_F$$

Συνεπώς η πιθανότητα να έχουμε σωστή ανίχνευση είναι:

$$\begin{aligned} P(\text{correct decision}) &= P(c) = P(D_0, H_0) + P(D_1, H_1) \\ &= P(D_0 | H_0)P(H_0) + P(D_1 | H_1)P(H_1) \\ &= (1 - P_F)P_0 + P_D P_1 \end{aligned}$$

Και η πιθανότητα λάθους είναι:

$$\begin{aligned}
 P(\text{error}) = P(\varepsilon) &= P(D_0, H_1) + P(D_1, H_0) \\
 &= P(D_0 | H_1)P(H_1) + P(D_1 | H_0)P(H_0) \\
 &= P_M P_1 + P_F P_0
 \end{aligned}$$

Ένα γράφημα με την συνάρτηση πιθανότητας λάθους $P_c(c)$, φαίνεται στο σχήμα 3. Το μέσο κόστος τώρα γίνεται:

$$\mathfrak{R} = E[C] = C_{00}(1 - P_F)P_0 + C_{01}(1 - P_D)P_1 + C_{10}P_F P_0 + C_{11}P_D P_1$$

Το επόμενο βήμα για να βγει το μέσο κόστος είναι να αντικαταστήσουμε τους όρους πιθανότητας λάθους, και ανίχνευσης με τις περιοχές που δείχνονται στα ολοκληρώματα (1)~(4).

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R} &= P_0 C_{00} \int_{Z_0} f_{Y|H_0}(y | H_0) dy + P_1 C_{01} \int_{Z_0} f_{Y|H_1}(y | H_1) dy \\
 &\quad + P_0 C_{10} \int_{Z_1} f_{Y|H_0}(y | H_0) dy + P_1 C_{11} \int_{Z_1} f_{Y|H_1}(y | H_1) dy \quad (5)
 \end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε και το γεγονός ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων ισούται με:

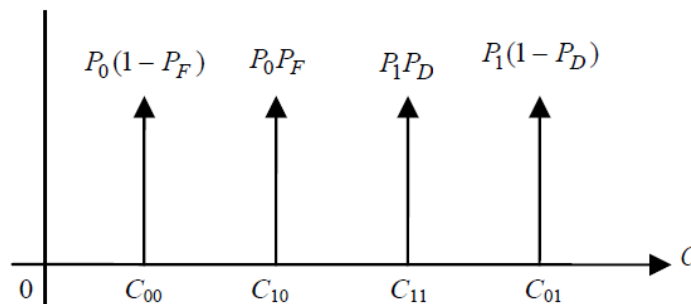
$$\int_{Z_0} f_{Y|H_j}(y | H_j) dy + \int_{Z_1} f_{Y|H_j}(y | H_j) dy = 1, \quad j = 0, 1$$

Τότε μπορούμε στην (5) να αντικαταστήσουμε όπου:

$$\int_{Z_1} f_{Y|H_j}(y | H_j) dy = 1 - \int_{Z_0} f_{Y|H_j}(y | H_j) dy, \quad j = 0, 1$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R} &= P_0 C_{10} + P_1 C_{11} \\
 &\quad + \int_{Z_0} \{ [P_1(C_{01} - C_{11})f_{Y|H_1}(y | H_1)] - [P_0(C_{10} - C_{00})f_{Y|H_0}(y | H_0)] \} dy
 \end{aligned}$$



Συναρτήσεις πυκνότητας κόστους

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $P_0 C_{10} + P_1 C_{11}$ είναι μια σταθερά και ανεξάρτητη από τα κόστη που θα έχουμε ορίσει για τον παρατηρούμενο χώρο, και η μόνη μεταβλητή που είναι ικανή να αλλάξει το κόστος, είναι η περιοχή Z_0 , και αυτό γιατί, αλλάζοντας το 'εύρος' της περιοχής αυτής, επηρεάζουμε το πόσο μεγάλος θα είναι ο δεύτερος όρος μέσα στο ολοκλήρωμα:

$$\left[P_1 (C_{01} - C_{11}) f_{Y|H_1}(y|H_1) \text{ and } P_0 (C_{10} - C_{00}) f_{Y|H_0}(y|H_0) \right]$$

Όσο μεγαλώνει ο δεύτερος όρος, τόσο μικρότερο κόστος θα έχουμε σε περίπτωση λάθους εκτίμησης. Εάν ισχύει:

$$P_1 (C_{01} - C_{11}) f_{Y|H_1}(y|H_1) < P_0 (C_{10} - C_{00}) f_{Y|H_0}(y|H_0)$$

Τότε η εκτίμηση μας θα είναι η υπόθεση H_0 , και αν αλλάξει η φορά της ανισότητας, τότε η εκτίμηση μας θα είναι η H_1 . Για να γίνει πιο 'ευανάγνωστο', διαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{f_{Y|H_1}(y|H_1)}{f_{Y|H_0}(y|H_0)} > \frac{P_0 (C_{10} - C_{00})}{P_1 (C_{01} - C_{11})}$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή σαν κανόνας του Bayes's, το κλάσμα δηλώνει *Likelihood Ratio* (αναλογία πιθανοφάνειας) $\Lambda(y)$. Άρα

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H_1}(y|H_1)}{f_{Y|H_0}(y|H_0)}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι εάν πάρουμε K δείγματα από μια παρατηρούμενη κυματομορφή, (έστω τα δείγματα αυτά να είναι $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_K$), τότε ο κανόνας που αποφασίζουμε για την υπόθεση H_0 ή H_1 γίνεται:

$$\Lambda(\mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{Y}|H_1}(\mathbf{y}|H_1)}{f_{\mathbf{Y}|H_0}(\mathbf{y}|H_0)}$$

Όπου όμως αυτή την φορά η παρατήρηση \mathbf{y} είναι ένα διάνυσμα (πίνακας) ο οποίος αποτελείται από K στοιχεία.

$$\mathbf{Y}^T = [Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_K]$$

Το κατώφλι είναι όπως και προηγουμένως ίσο με:

$$\eta = \frac{P_0 (C_{10} - C_{00})}{P_1 (C_{01} - C_{11})}$$

Έτσι με την εφαρμογή του κριτηρίου Bayes, το κριτήριο το οποίο ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος είναι το *likelihood test*:

$$\Lambda(\mathbf{y}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta$$

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι το τεστ αυτό διεξάγεται απλώς επεξεργάζοντας τον πίνακα παρατηρήσεων και συγκρίνοντας τον με το κατώφλι. Με αυτόν τον τρόπο, σε περίπτωση που οι *prior* πιθανότητες, ή και τα κόστη αλλάξουν, το μόνο που έχουμε να κάνουμε για να αναπροσαρμόσουμε τον δέκτη μας, είναι να καταχωρήσουμε τις καινούργιες τιμές στο κατώφλι.

Λόγω του ότι ο φυσικός λογάριθμος είναι μια μονοτονικά αυξανόμενη συνάρτηση όπως βλέπουμε στο σχήμα 4, και το γεγονός ότι το κατώφλι είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν και δεν μπορεί να πάρει αρνητική τιμή, μπορούμε να λογαριθμίσουμε και το *likelihood ratio test*, αλλά και το κατώφλι, και δεν θα έχουμε καμία αλλαγή στο αποτέλεσμα.

$$\ln \Lambda(\mathbf{y}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln \eta$$

Προσέχουμε ότι εάν διαλέξουμε το κόστος της λάθος εκτίμησης να είναι ίσο με ένα, και το κόστος της σωστής εκτίμησης να είναι ίσο με μηδέν,

$$C_{01} = C_{10} = 1$$

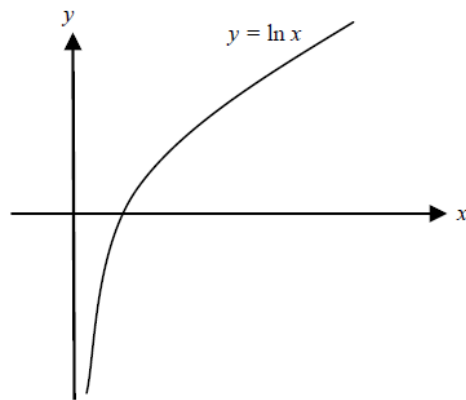
Και

$$C_{00} = C_{11} = 0$$

Το ρίσκο έτσι γίνεται

$$\mathfrak{R} = P_M P_1 + P_F P_0 = P(\varepsilon)$$

Σε αυτήν την περίπτωση το να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο κόστος είναι ίσο με το να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα λάθους. Οι δέκτες για τέτοιες τιμές του κόστους, λέγονται *δέκτες ελάχιστης πιθανότητας λάθους* (*minimum probability of error receivers*). Το κατώφλι γίνεται τότε $n = P_0/P_1$. Σε περίπτωση που οι *prior* πιθανότητες είναι ίσες, τότε λόγω του ότι το κατώφλι θα ισούται με ένα, αν λογαριθμίσουμε το κατώφλι θα είναι ίσο με το μηδέν.



Σχήμα 4 Γραφική απεικόνιση συνάρτησης λογαρίθμου.

Παράδειγμα 1

Σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα, αναλογιστείτε μια πηγή η οποία εκπέμπει δύο σήματα, το '0' και το '1'. Το '0' αποστέλλεται με μηδενική ισχύ, και το '1' με στάθμη τάσης ίση με 'm'. Το λαμβανόμενο σήμα αλλοιώνεται από λευκό προσθετικό θόρυβο N ο οποίος έχει μηδενικό μέσο όρο και διακύμανση σ^2 .

- Βρείτε το *likelihood test* και ορίστε τις περιοχές απόφασης.
- Υπολογίστε την πιθανότητα του λάθους συναγεμού (false alarm) και την πιθανότητα ανίχνευσης (probability of detection).

Λύση

Το λαμβανόμενο σήμα για την έκαστο υπόθεση έχει τιμή:

$$\begin{aligned} H_1 : Y &= m + N \\ H_0 : Y &= N \end{aligned}$$

Υπό την υπόθεση λοιπόν H_0 , η πιθανοφάνεια είναι:

$$f_{Y|H_0}(y | H_0) = f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Υπό την υπόθεση H_1 ο μέσος όρος της παρατήρησης Y είναι ~~$E[Y] = E[m + N]$~~ , αφού μέσος όρος του θορύβου είναι μηδέν. Η διακύμανση της παρατήρησης είναι:

$$\text{var}[Y] = \text{var}[m + N] = E[(m + N)^2] - (E[m + n])^2 = E[N^2] = \sigma^2$$

Άρα:

$$f_{Y|H_1}(y | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(y-m)^2}{\sigma^2}\right]$$

Αυτή η διαπίστωση είναι πολύ σημαντική, λόγω του ότι είτε υπό την υπόθεση H_0 , είτε υπό την υπόθεση H_1 , η διακύμανση των δειγμάτων παραμένει η ίδια, και έτσι μπορούμε να απλοποιήσουμε στο αναλογικό τεστ (*likelihood ratio*):

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H_1}(y | H_1)}{f_{Y|H_0}(y | H_0)} = \exp\left(-\frac{m^2 - 2ym}{2\sigma^2}\right)$$

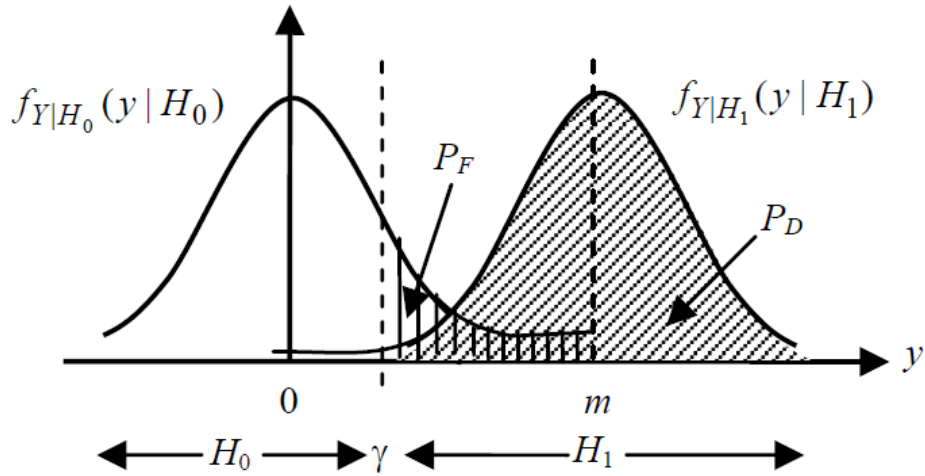
Το επόμενο βήμα είναι να πάρουμε τον φυσικό λογάριθμο και για τα δύο μέλη της εξίσωσης για να μπορούμε να 'ξεφορτωθούμε' το εκθετικό.

$$\ln \Lambda(y) = \frac{m}{\sigma^2} y - \frac{m^2}{2\sigma^2} \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{matrix} \ln \eta$$

Σειρά έχει να λύσουμε ως προς την παρατηρούμενη τιμή y :

$$y \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{matrix} \frac{\sigma^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2} = \gamma$$

Αυτό που κάνουμε για να αποφανθούμε εάν το παρατηρούμενο δείγμα είναι ίσο με την υπόθεση H_0 , είτε η υπόθεση H_1 είναι να συγκρίνουμε το y με το κατώφλι γ . Εάν η παρατήρηση είναι πιο μεγάλη από την τιμή που έχει το γ , τότε έχουμε την υπόθεση H_1 . Αλλιώς έχουμε την υπόθεση H_0 . Οι περιοχές απόφασης φαίνονται στο σχήμα 5.



Σχήμα 5 Περιοχές απόφασης.

(b) Οι πιθανότητες λάθος συναγερού και ανίχνευσης είναι:

- Πιθανότητα λάθους:

$$P_F = P(\text{decide } H_1 \mid H_0 \text{ true}) = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) = \text{erfc}_*\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)$$

Όπου

$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

- Πιθανότητα σωστής ανίχνευσης:

$$P_D = P(\text{decide } H_1 \mid H_1 \text{ true}) = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy = Q\left(\frac{\gamma-m}{\sigma}\right)$$

Παράδειγμα 2

Υποθέστε ότι ο δέκτης του προηγούμενου παραδείγματος παίρνει K δείγματα Y_1, Y_2, \dots, Y_K από το λαμβανόμενο σήμα. Τα δείγματα θορύβου είναι ανεξάρτητες Gaussian μεταβλητές, κάθε μια με μηδενικό μέσο όρο και διακύμανση σ^2 . Να βρεθεί ο βέλτιστος κανόνας απόφασης.

Λύση:

Το λαμβανόμενο σήμα υπό την υπόθεση H_0 και H_1 είναι:

$$\begin{aligned} H_1 : Y_k &= m + N, \quad k = 1, 2, \dots, K \\ H_0 : Y_k &= N, \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned}$$

Υπό την υπόθεση H_0 , η πιθανοφάνεια της k -οστής παρατήρησης είναι:

$$f_{Y_k|H_0}(y_k | H_0) = f_{N_k}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}\right)$$

Υπό την υπόθεση H_1 , η πιθανοφάνεια της k -οστής παρατήρησης είναι μια τυχαία Gaussian μεταβλητή με μέσο όρο m και διακύμανση σ^2 . Έτσι η πιθανοφάνεια για αυτήν την υπόθεση είναι:

$$f_{Y_k|H_1}(y_k | H_1) = f_{N_k}(y_k - m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(y_k - m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Το επόμενο βήμα είναι να βγάλουμε το τεστ πιθανοφάνειας το οποίο είναι ίσο με:

$$\Lambda(\mathbf{y}) = \frac{f_{Y|H_1}(\mathbf{y} | H_1)}{f_{Y|H_0}(\mathbf{y} | H_0)}$$

Όμως έχουμε πραγματοποιήσει δειγματοληψία (K δείγματα) και εφόσον τα δείγματα αυτά είναι στατιστικά ανεξάρτητα, η joint density function των K δειγμάτων ισούται με το γινόμενο της έκαστο πυκνότητας πιθανότητας για το κάθε δείγμα. Άρα θα έχουμε:

$$f_{Y|H_0}(\mathbf{y} | H_0) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}} \quad f_{Y|H_1}(\mathbf{y} | H_1) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}}$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας:

$$\prod_k e^{x_k} = e^{\sum_k x_k}$$

Το τεστ πιθανοφάνειας γίνεται:

$$\Lambda(\mathbf{y}) = \exp \left[\sum_{k=1}^K \frac{y_k^2}{2\sigma^2} - \sum_{k=1}^K \frac{(y_k - m)^2}{2\sigma^2} \right] = \exp \left[\frac{m}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K y_k - \frac{Km^2}{2\sigma^2} \right]$$

Αν πάρουμε τον φυσικό λογάριθμο και για τα δύο μέλη της εξίσωσης, θα έχουμε:

$$\ln \Lambda(\mathbf{y}) = \frac{m}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K y_k - \frac{Km^2}{2\sigma^2} \begin{array}{l} > \ln \eta \\ < \end{array} \begin{array}{l} H_1 \\ H_0 \end{array}$$

Αν λύσουμε ως προς y_k , το ισοδύναμο τεστ γίνεται:

$$\sum_{k=1}^K y_k \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \frac{\sigma^2}{m} \ln \eta + \frac{Km}{2} \begin{array}{l} H_1 \\ H_0 \end{array}$$

Αυτό που έχει να κάνει τώρα ο δέκτης είναι να πάρει τα K δείγματα, να τα προσθέσει και να τα συγκρίνει με το κατώφλι:

$$\frac{\sigma^2}{m} \ln \eta + \frac{Km}{2}$$

Εκτίμηση Παραμέτρων του εκπεμπόμενου σήματος

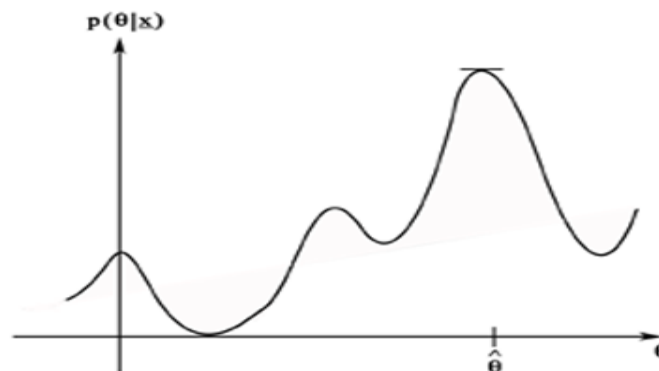
Σε προηγούμενη ενότητα είδαμε την υλοποίηση ενός δέκτη ο οποίος δεχόταν ένα σήμα εμπλουτισμένο με θόρυβο και έπρεπε να αποφασίσει ανάμεσα σε 2 πιθανές υποθέσεις, το σήμα που στάλθηκε. Συγκεκριμένα, έπρεπε να αποφασίσει ο δέκτης ανάμεσα στην υπόθεση H_0 και στην H_1 .

Σε αυτήν την ενότητα, υποθέτουμε ότι ο δέκτης έχει ήδη λάβει την σωστή απόφαση, όμως κάποιες παράμετροι που σχετίζονται με το σήμα παραμένουν άγνωστοι. Αυτές οι παράμετροι μπορεί να είναι η διακύμανση, ή και η θέση (*location estimation*). Ο στόχος μας είναι να πραγματοποιήσουμε δειγματοληψία στο σήμα που λάβαμε και αποφασίσαμε ότι συμβολίζει π.χ. το '1' ή το '0'.

Έστω Y_1, Y_2, \dots, Y_k να είναι τα δείγματα που πήρα από το λαμβανόμενο σήμα Y , τα οποία είναι ανεξάρτητα και ιδιοκατανομημένα (i.i.d.) και σχηματίζουν κατανομή πιθανότητας η οποία με την σειρά της εξαρτάται άμεσα από την παράμετρο που ψάχνουμε (έστω την παράμετρο 'θ' η οποία δηλώνει την θέση ή τον μέσο όρο της κατανομής). Για να εκτιμήσουμε την παράμετρο αυτή, χρησιμοποιούμε την τιμή που έχει το έкаστο δείγμα (Y_1, Y_2, \dots, Y_k είναι οι τιμές που έχουν τα δείγματα Y_1, Y_2, \dots, Y_k), Για να μην γίνει σύγχυση ανάμεσα στα Y_1, Y_2, \dots, Y_k και στα y_1, y_2, \dots, y_k , με τα κεφαλαία συμβολίζουμε την δειγματοληψία νούμερο $1, 2, \dots, k$ και τα μικρά συμβολίζουμε τι τιμή έχει η έкаστο δειγματοληψία.

Τα μικρά λοιπόν y_1, y_2, \dots, y_k στην συνέχεια χρησιμοποιούνται από την συνάρτηση $g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ για να προκύψει στο τέλος η εκτίμηση της παραμέτρου που επιζητούμε.

$$\hat{\theta} = g(y_1, y_2, \dots, y_k)$$



Αυτό που επιζητούμε είναι μια προσέγγιση της παραμέτρου 'θ' έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανοφάνεια

$$p(\theta | \underline{x})$$

Προσέξτε ότι ο συμβολισμός μιας παραμέτρου η οποία είναι η εκτίμηση μιας άλλης παραμέτρου, συμβολίζεται με το καπελάκι $\hat{\theta}$.

Η παράμετρος που πρόκειται να εκτιμηθεί μπορεί να είναι τυχαία, ή μη-τυχαία. Η εκτίμηση τυχαίων παραμέτρων καλείται *Bayes Estimation* (εκτίμηση Bayes) όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, ενώ η εκτίμηση μη-τυχαίων παραμέτρων καλείται *maximum likelihood estimation* (MLE) ή αλλιώς *εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας*.

Maximum Likelihood Estimation – Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Όπως είπαμε προηγουμένως, η εκτίμηση μη-τυχαίων παραμέτρων δίνεται από την *maximum likelihood estimation*. Αν Y_1, Y_2, \dots, Y_K είναι τα δείγματα (K στον αριθμό) μιας τυχαίας μεταβλητής (τυχαίας διότι αυτή μπορεί να είναι για παράδειγμα είτε το σήμα '0' ή το σήμα '1' ενός δυαδικού συστήματος), τα οποία δείγματα έχουν τιμή y_1, y_2, \dots, y_K έκαστο. Όπως πολύ καλά γνωρίζουμε, εάν κάνουμε δειγματοληψία σε ένα φαινόμενο που λαμβάνει χώρα, τότε αν υπερθέσω τα δείγματα αυτά, θα προκύψει μια κατανομή η οποία περιγράφει το φαινόμενο αυτό. Στην δική μας περίπτωση περιγράφει την κατανομή που έχει το λαμβανόμενο σήμα μέσω της συνάρτησης $f_{Y|\theta}(y|\theta)$ η οποία δίνει μια κατανομή πιθανότητας που έχει μέσο όρο την τιμή θ . Η likelihood συνάρτηση $L(\theta)$ λόγω των K δειγμάτων, γίνεται:

$$L(\theta) = f_{Y_1, \dots, Y_K|\theta}(y_1, y_2, \dots, y_K | \theta) = f_{Y|\theta}(y | \theta) = \prod_{k=1}^K f_{Y_k|\theta}(y_k | \theta)$$

Είπαμε ότι η κατανομή αυτή έχει μέσο όρο την τιμή θ . Επίσης στο σημείο αυτό η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα εμφανίζει και την μέγιστη τιμή της. Αρκεί λοιπόν να βρούμε το ακρότατο συνάρτησης αυτής και θα έχουμε πετύχει μια πολύ καλή προσέγγιση της τιμής θ . Πως γίνεται τώρα να βρούμε το ακρότατο αυτής της συνάρτησης; Λόγω του ότι δεν είναι δυνατό να βρεθεί μέσω της απευθείας παραγωγίσιμης της συνάρτησης πιθανοφάνειας, πρέπει να βρούμε μια άλλη συνάρτηση η οποία να έχει την ίδια μονοτονία με την συνάρτηση της πιθανοφάνειας. Αυτή δεν είναι άλλη από τον φυσικό λογάριθμο. Λογαριθμίζουμε λοιπόν την συνάρτηση πιθανοφάνειας, Παραγωγίζουμε και έτσι δεν έχουμε καμία αλλαγή στην τιμή της παραμέτρου που θα προκύψει. Η συνάρτηση που θα πρέπει να λυθεί είναι λοιπόν:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_{Y|\theta}(y | \theta) = 0$$

Παράδειγμα

Σε παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας είδαμε την περίπτωση που το λαμβανόμενο σήμα μπορεί να πάρει δύο διαφορετικές τιμές: '0' και '1'. Το σύστημα υπόθεσης ήταν δηλαδή:

$$\begin{aligned} H_1 : Y_k &= m + N_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \\ H_0 : Y_k &= N_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι η παράμετρος m (παράμετρος θέσης) είναι άγνωστη, να βρεθεί η εκτίμηση \hat{m}_{ml} μέγιστης πιθανοφάνειας (ML) του μέσου όρου της κατανομής που περιγράφει το σήμα '1'.

Λύση

Λόγω του ότι τα δείγματα που θα χρησιμοποιήσω για να βρω την παράμετρο είναι i.i.d., η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$f_{Y|M}(\mathbf{y} | m) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_k - m)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{(2\pi)^{K/2} \sigma^K} \exp\left[-\sum_{k=1}^K \frac{(y_k - m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Βλέπετε ότι λόγω των K δειγμάτων, η συνάρτηση που περιγράφει την κατανομή είναι το γινόμενο των δειγμάτων στην κατανομή αυτή. Εμείς θέλουμε να ‘απομονώσουμε’ την παράμετρο ‘ m ’ η οποία βρίσκεται στο εκθετικό. Εδώ βλέπετε πόσο χρήσιμη είναι η λογαρίθμηση, διότι έτσι θα ‘ξεφορτωθώ’ το εκθετικό. Έχουμε με την λογαρίθμηση:

$$\ln f_{Y|M}(\mathbf{y} | m) = \ln\left[\frac{1}{(2\pi)^{K/2} \sigma^K}\right] - \sum_{k=1}^K \frac{(y_k - m)^2}{2\sigma^2}$$

Το επόμενο βήμα είναι να ‘σπάσω’ το άθροισμα σε δύο αθροίσματα και μετά να παραγωγίσω μερικώς ως προς m :

$$\frac{\partial \ln f_{Y|M}(\mathbf{y} | m)}{\partial m} = \sum_{k=1}^K \frac{y_k - m}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^K \frac{y_k}{\sigma^2} - \frac{Km}{\sigma^2} = \frac{K}{\sigma^2} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y_k - m \right) = 0$$

Τώρα το μόνο που μένει είναι να λύσω ως προς m , και έχω:

$$m = (1/k) \sum_{k=1}^K y_k$$

Όμως αυτό δεν είναι σωστό διότι η τελευταία σχέση δεν μας δίνει την πραγματική τιμή της παραμέτρου, αλλά μια εκτίμηση αυτής. Πιο σωστά λοιπόν θα έπρεπε να γράψουμε:

$$\hat{m}_{ml} = (1/k) \sum_{k=1}^K y_k$$

Αυτή η σχέση όμως είναι ο γνωστός σε όλους μας, μέσος όρος.

Σε περίπτωση που έχω ένα δυαδικό σύστημα εκπομπής, ποιο θα είναι εκείνο το κριτήριο που θα με οδηγήσει στην εκτίμηση;

Ας δούμε πρώτα την περίπτωση που θα βασιστώ σε ένα δείγμα. Εάν ισχύει η πιθανοφάνεια ~~H_1~~ , τότε αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα το λαμβανόμενο δείγμα y να είναι η υπόθεση H_1 , είναι πιο μεγάλη από την υπόθεση H_0 . Εάν η κατανομή που εμφανίζει ο θόρυβος που προστέθηκε στο σήμα είναι Gaussian, τότε η υπόθεση H_1 θα έχει τιμή $H_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{N}$ και η υπόθεση H_0 θα έχει τιμή $H_0 = \mathcal{E}_0 + \mathcal{N}$.

- Όπου \mathcal{N} είναι ο προστιθέμενος θόρυβος με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση σ^2
- Όπου \mathcal{E}_1 είναι μια μη-αρνητική σταθερά η οποία πολλαπλασιάζεται με την μέγιστη στάθμη ισχύος, \mathcal{P} , που αποστέλλεται το σήμα και καθορίζει πόσο τις εκατό θα έχει υποβιβαστεί η στάθμη του εκπεμπόμενου σήματος, σε σχέση με την μέγιστη στάθμη που μπορεί να πάρει.

Για παράδειγμα εάν $\mathcal{G}=10\text{ Watt}$ και $\epsilon_1=0.8$, τότε το σήμα '1' θα αποστέλλεται με ισχύ

Με βάση αυτές τις διευκρινίσεις, το δείγμα y υπό την υπόθεση H_1 θα πάρει τιμή:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

Και το δείγμα y υπό την υπόθεση H_0 , θα πάρει τιμή:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις, μπορούμε να βγάλουμε το εξής σπουδαίο συμπέρασμα: εφόσον και οι δύο σχέσεις εκφράζουν μια πιθανοφάνεια, όταν η μια πιθανοφάνεια έχει πιο μεγάλη τιμή από την άλλη, τότε αυτή θα είναι και η εκτίμηση μας:

Αν ισχύει λοιπόν $\frac{P(y|H_1)}{P(y|H_0)}$, τότε ισχύει ότι το παρατηρούμενο διάνυσμα y είναι πιο πιθανό να είναι η υπόθεση H_1 παρά η υπόθεση H_0 . Άρα αν διαιρέσουμε με $P(y|H_0)$ και πάρουμε τον φυσικό λογάριθμο του κλάσματος αυτού, θα έχουμε το κριτήριο απόφασης να γίνεται:

$$\ln \frac{P(y|H_1)}{P(y|H_0)}$$

5.4 Κριτήριο Neyman-PEARSON

Στις προηγούμενες ενότητες, έχουμε δει ότι για το κριτήριο των Bayes χρειαζόμαστε εκ των προτέρων τη γνώση πιθανοτήτων και αναθέσεις του κόστους για κάθε πιθανή απόφαση. Τότε έχουμε μελετήσει το μικροτερο κριτήριο, το οποίο είναι χρήσιμο σε καταστάσεις όπου η γνώση των προτέρων πιθανοτήτων δεν είναι δυνατή. Σε πολλές άλλες φυσικές καταστάσεις, όπως η ανίχνευση ραντάρ, είναι πολύ δύσκολο να δοθεί ρεαλιστικό κόστος και οι εκ των προτέρων πιθανότητες. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία, χρησιμοποιούμε την υπό όρους πιθανότητα ψευδή συναγερμου, PF, και του Π.Δ. ανίχνευσης. Η δοκιμή Neyman-Pearson απαιτεί το PF να καθοριστεί σε κάποια αξία, ενώ το PD μεγιστοποιείται. Από $PM = 1 - PD$, μεγιστοποιώντας το PD είναι ισοδύναμο με την ελαχιστοποίηση PM.

Προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν τα PM (μεγιστοποίηση PD) με τον περιορισμό ότι $PF = \alpha$, χρησιμοποιούμε το λογισμό για τα ακρότατα, και αποτελούν το στόχο J λειτουργία για να Ανίχνευση Σήματος και Εκτίμηση

$$J = PM + \lambda (PF - \alpha)$$

όπου $\lambda (\lambda \geq 0)$ είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Σημειώνουμε ότι, δεδομένης της παρατήρησης στο Z χώρο, υπάρχουν πολλές περιοχές απόφασης Z_1 για τις οποίες το $PF = \alpha$. Το ζήτημα είναι να καθορίσουν τις περιφέρειες απόφαση για την οποία το PM είναι ελάχιστο. Κατά συνέπεια, έχουμε ξαναγράψει την αντικειμενική συνάρτηση J άποψη της περιοχής αποφάσεως για να ληφθεί

$$J = \int_{Z_0} f_{Y|H_1}(y|H_1)dy + \lambda \left[\int_{Z_1} f_{Y|H_0}(y|H_0)dy - \alpha \right] \quad (5.71)$$

Χρησιμοποιώντας την $Z = Z_0 \cup Z_1$, (5.71) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} J &= \int_{Z_0} f_{Y|H_1}(y|H_1)dy + \lambda \left[\int_{Z_0} f_{Y|H_0}(y|H_0)dy - \alpha \right] \\ &= \lambda(1 - \alpha) + \int_{Z_0} [f_{Y|H_1}(y|H_1) - \lambda f_{Y|H_0}(y|H_0)]dy \end{aligned} \quad (5.72)$$

Ως εκ τούτου, J ελαχιστοποιείται όταν οι τιμές για τις οποίες $f_{Y|H_1}(y|H_1) > \lambda f_{Y|H_0}(y|H_0)$ έχουν καθορισθεί στην περιοχή απόφασης Z_1 . Ο κανόνας απόφασης είναι, ως εκ τούτου,

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H_1}(y|H_1)}{f_{Y|H_0}(y|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \lambda \quad (5.73)$$

Το όριο που προέρχεται από το κριτήριο του Bayes ισοδυναμεί με λ , το Lagrange πολλαπλασιαστή στη δοκιμή Neyman-Pearson (NP) για την οποία η πιθανότητα ψευδούς συναγερμού είναι στερεωμένη στην τιμή α . Αν ορίσουμε την υπό όρους πυκνότητας της Λ , δεδομένου ότι H_0 είναι αλήθεια, όπως $f_{\Lambda|H_0}(\lambda|H_0)$, στη συνέχεια, $PF = \alpha$ μπορεί να γραφεί ως

$$P_F = \int_{Z_1} f_{Y|H_0}(y|H_0) dy = \int_{\lambda}^{\infty} f_{\Lambda(y)|H_0}[\lambda(y)|H_0] d\lambda \quad (5.74)$$

Η δοκιμή αυτή ονομάζεται πιο ισχυρή από το επίπεδο α , αν πιθανότητα της απόρριψης H_0 είναι α .

παράδειγμα 5.7

Εξετάστε το δυαδικό πρόβλημα με υπόθεση που έλαβε υπό όρους τις πιθανότητες

Στατιστική θεωρία της απόφασης

$$f_{Y|H_0}(y|H_0) = \frac{1}{2(1-e^{-1})} e^{-|y|} \text{ for } |y| \leq 1 \text{ and } f_{Y|H_1}(y|H_1) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Οι υποθέσεις H_0 και H_1 είναι εξίσου πιθανό.

(α) Βρείτε τις περιφέρειες απόφασης για τις οποίες η πιθανότητα λάθους είναι ελάχιστη.

(β) Υπολογίστε την ελάχιστη πιθανότητα σφάλματος.

(γ) Βρείτε τον κανόνα απόφασης με βάση το κριτήριο Neyman-Pearson, έτσι ώστε η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού να περιορίζεται και να είναι $PF = 0.5$.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα ανίχνευσης για τη δεδομένη πίεση του PF στο (B).

λύση

(α) Η ελάχιστη πιθανότητα σφάλματος δέκτη απαιτεί $C_{00}=C_{11}=0$ και $C_{01}=C_{10}=1$. Δεδομένου ότι οι εκ των προτέρων πιθανότητες είναι ίσες, ο έλεγχος του λόγου πιθανοφάνειας μειώνει σε

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H_1}(y|H_1)}{f_{Y|H_0}(y|H_0)} \begin{matrix} > & H_1 \\ < & H_0 \end{matrix} 1$$

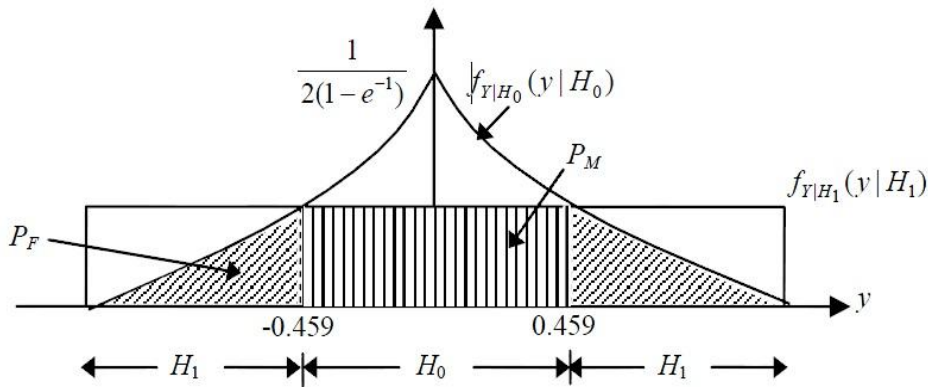
Δηλαδή, επιλέγουμε την υπόθεση για την οποία $F_{Y|H_j}(y|H_j)$, $j = 0, 1$, είναι η μέγιστη.

$$\Lambda(y) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2(1-e^{-1})} e^{-|y|}} \begin{matrix} > & H_1 \\ < & H_0 \end{matrix} \eta$$

$$\frac{1-e^{-1}}{e^{-|y|}} \begin{matrix} > & H_1 \\ < & H_0 \end{matrix} \eta \quad \text{or} \quad |y| \begin{matrix} > & H_1 \\ < & H_0 \end{matrix} -\ln \frac{1-e^{-1}}{\eta} = \gamma$$

Οι περιοχές λήψης είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.11. Σημειώστε ότι έχουμε αποφασίσει H_1 για $-1 \leq y \leq -0.459$ και $0.459 \leq y \leq 1$, και αποφασίζουμε H_0 για $-0.459 < y < 0.459$.

(β) Η πιθανότητα σφάλματος είναι $P(\epsilon) = P_0P_F + P_1P_M$, όπου



Σχήμα 5.11 Απόφαση περιοχής για παράδειγμα 5.7.

$$P_F = P(\text{decide } H_1 | H_0 \text{ true}) = \frac{1}{2(1 - e^{-1})} \left(\int_{-1}^{-0.459} e^y dy + \int_{0.459}^1 e^{-y} dy \right) = 0.418$$

και $PM = P(H_0 \text{ αποφασίσει} | H_1 \text{ αλήθεια}) = 2 [(0.459) (1/2)] = 0.459$.

Έτσι, η πιθανότητα σφάλματος είναι $P(\epsilon) = (1/2) (0,418 + 0,459) = 0,4385$.

(γ) Κατά τη χρήση του κριτηρίου Neyman-Pearson, έχουμε

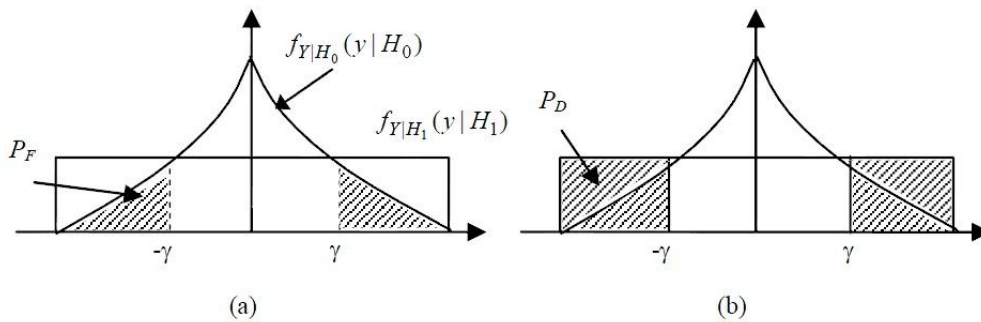
P_F είναι όπως δείχνεται στο Σχήμα 5.12 (α). Ως εκ τούτου,
 $P_F = P(D_1 | H_0)$

$$= \frac{1}{2(1 - e^{-1})} \left(\int_{-1}^{-\gamma} e^y dy + \int_{-\gamma}^1 e^{-y} dy \right) = 0.5 \Rightarrow \gamma = 0.38$$

είναι το μονοπατι.

(δ) Η πιθανότητα ανίχνευσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.12 (β),
 είναι $= 2 [(1 - 0,38) (1/2)] = 0,62$.

Σχήμα 5.12 Περιοχές που δείχνει:



(α) P_F
 και
 (β) P_D .

Receiver Operating Characteristic (ROC)

Ένα διαγραμμα της πιθανότητας ανίχνευσης, PD, σε σχέση με την πιθανότητα ψευδούς συναγερμού με το όριο ως παράμετρο αναφέρεται ως λειτουργικού χαρακτηριστικού δέκτης (ROC) καμπύλης. Σημειώνουμε ότι η ROC εξαρτάται από τη λειτουργία της πυκνότητας του παρατηρούμενου σήματος υπο ορους, που είναι, $F_{y|H_j}$ ($y|H_j$), $j = 0, 1$, και δεν αποδίδεται στις δαπάνες, ή οι εκ των προτέρων πιθανότητες. Θα εξηγήσουμε την έννοια του ROC μέσω ενός παραδείγματος. Από το Παράδειγμα 5.2, ο κανόνας απόφασης είναι

$$T(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^K y_k \begin{array}{l} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{array} \frac{\sigma^2}{m} \ln \eta + \frac{Km}{2}$$

Παρατηρούμε ότι η επαρκής στατιστική $T(\mathbf{Y})$ είναι Gaussian. Υπολογίζοντας την μέση τιμή και τη διακύμανση της στατιστικής για κάθε υπόθεση, παίρνουμε

$$E[T(\mathbf{Y}) | H_0] = E\left[\sum_{k=1}^K Y_k | H_0\right] = 0$$

$$\text{var}[T(\mathbf{Y}) | H_0] = \text{var}\left[\sum_{k=1}^K Y_k | H_0\right] = K\sigma^2$$

$$E[T(\mathbf{Y}) | H_1] = E\left[\sum_{k=1}^K Y_k | H_1\right] = Km$$

$$\text{var}[T(\mathbf{Y}) | H_1] = \text{var}\left[\sum_{k=1}^K Y_k | H_1\right] = K\sigma^2$$

Ως εκ τούτου, για να ληφθεί μια μονάδα διακύμανσης σε κάθε υπόθεση, θα πρέπει να εξομαλύνει το στατιστικό αποτέλεσμα της δοκιμής από $\sqrt{K\sigma}$ να δώσει $\text{var}[T(Y)|H_1] = \text{var}[T(Y)|H_0] = 1$, $E[T(Y)|H_0] = 1$, και $E[T(Y)|H_1] = \sqrt{Km}/\sigma$. Για τη διακύμανση της $T(Y)$ στο πλαίσιο H_0 ίσο με το ένα, η απόσταση μεταξύ των δύο μέσων ορίζεται ως

$$d \triangleq m_1 - m_0 \quad (5.75)$$

όπου m_0 και m_1 είναι τα μέσα κάτω από την υπόθεση H_0 και H_1 , αντίστοιχα. Δηλαδή, $d = \sqrt{Km} / \sigma$. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η

$$d^2 = \frac{Km^2}{\sigma^2} = \frac{K^2 m^2}{K\sigma^2} = \frac{S_0}{N_0}$$

μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σήμα-προς-θόρυβο, όπου η ισχύς του σήματος είναι $S_0 = K^2 m^2$ και η ισχύς του θορύβου είναι $N_0 = K\sigma^2$. Τα όρια συναρτήσεων πυκνότητας της στατιστικής σύμφωνα με υποθέσεις H_0 και H_1 είναι

$$f_{T|H_0}(t | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \quad \text{and} \quad f_{T|H_1}(t | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-d)^2/2}$$

Ο κανόνας της απόφασης καθίσταται

$$T(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{K\sigma}} \sum_{k=1}^K y_k \begin{array}{l} H_1 \\ > \frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2} \\ < \\ H_0 \end{array}$$

Είναι οι πιθανότητες ψευδούς συναγεμού και ανίχνευσης

$$P_F = \int_{\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}}^{\infty} f_{T|H_0}(t | H_0) dt = Q\left(\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

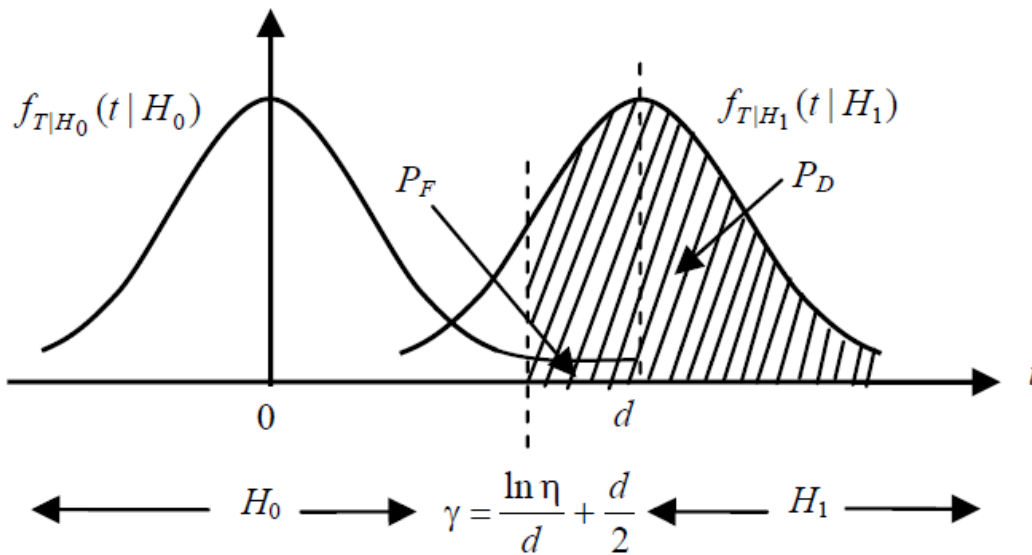
και

$$P_D = \int_{\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}}^{\infty} f_{T|H_1}(t | H_1) dt = Q\left(\frac{\ln \eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

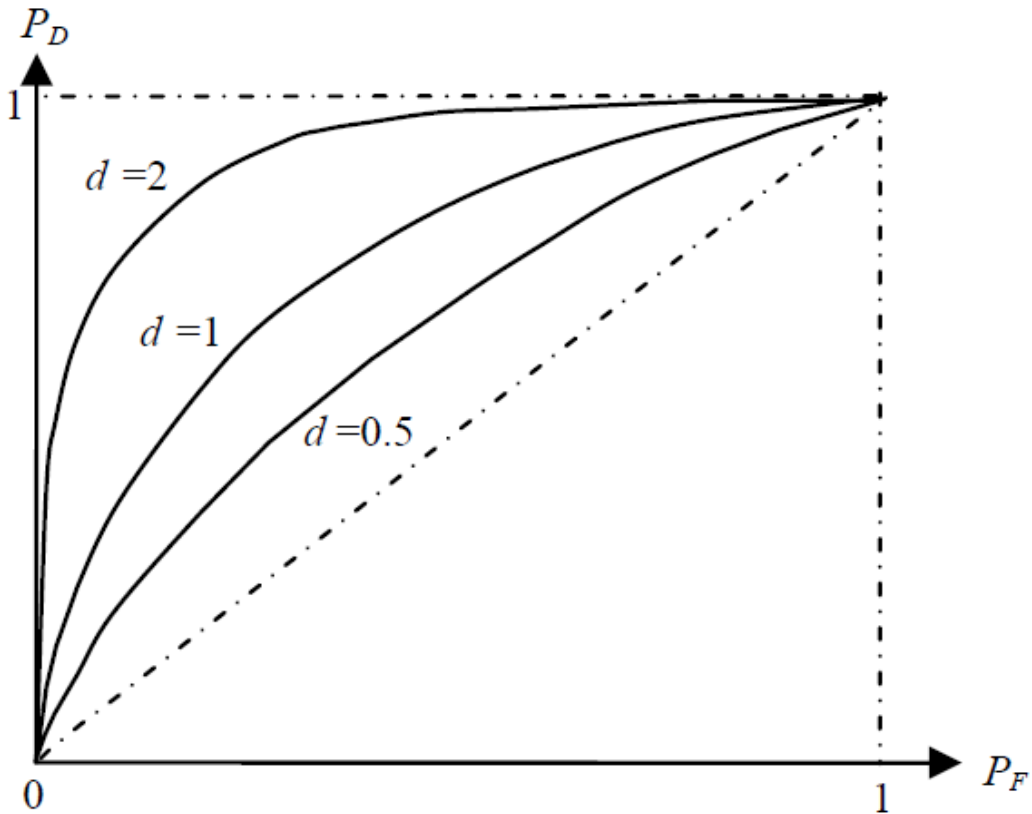
Οι υπό όρους λειτουργίες πυκνότητας $FY|H_j$ ($y|H_j$), $j = 0, 1$, και οι πιθανότητες ανίχνευσης ακόμα και ψευδή συναγεμού είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.13.

Η διαφοροποίηση των γ ορίων, οι περιοχές που εκπροσωπούν PD και PF ποικίλλουν.

Οι αντίστοιχες καμπύλες ROC φαίνονται στο Σχήμα 5.14. Παρατηρούμε ότι όσο η d αυξάνει, η πιθανότητα ανίχνευσης των αυξήσεων για μια δεδομένη πιθανότητα ψευδούς συναγεμού. Ωστόσο, το όριο παραμένει σταθερό για ένα σταθερό, ακόμη και ως PF D αυξάνει. Έτσι, η d δίνει ένα μέτρο της δοκιμής την υπόθεση, και ως εκ τούτου επίσης ονομάζεται *παράμετρος ανίχνευσης*.



Σχήμα 5.13 Απόφαση περιοχές που εμφανίζουν PD και PF.



Σχήμα 5.14 ROC με d ως παράμετρο.

Τα δύο ακραία σημεία του ROC για τις $P_F=PD=1$ και $P_F=PD=0$ είναι εύκολο να επαληθευτούν. Δεδομένου ότι τόσο ο δέκτης Neyman-Pearson όσο και ο δέκτης του Bayes απασχολούν το τεστ λόγου πιθανότητας, και δεδομένου ότι η $\Lambda(y)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, οι PD και PF μπορούν να γράφουν ως

$$P_D = P(\text{decide } H_1 | H_1 \text{ true}) = \int_{\eta}^{\infty} f_{\Lambda|H_1}(\lambda | H_1) d\lambda \tag{5.76}$$

και

$$P_F = P(\text{decide } H_1 | H_0 \text{ true}) = \int_{\eta}^{\infty} f_{\Lambda|H_0}(\lambda | H_0) d\lambda \tag{5.77}$$

$\Lambda(y)$ είναι η αναλογία των δύο αρνητικών ποσοτήτων, $F_{Y|H_1}(y|H_1)$ και $F_{Y|H_0}(y|H_0)$, και έτσι παίρνει τιμές από το μηδέν έως το άπειρο. Όταν το όριο η είναι μηδενικό ($\eta=0$ αντιστοιχεί σε $P_0=0$), η υπόθεση H_1 είναι πάντα αλήθεια, και έτσι $PD=PF=1$.

Όταν το όριο είναι η άπειρο ($\eta \rightarrow \infty$ αντιστοιχεί σε $P_1 = 0$), η υπόθεση H_0 είναι πάντα αλήθεια, και έτσι $PD = PF = 0$. Τούτο σαφώς απεικονίζεται στην Εικόνα 5.14.

Η κλίση της ROC σε ένα συγκεκριμένο σημείο στην καμπύλη αντιπροσωπεύει τη κλίση η για τη δοκιμή Neyman-Pearson για την επίτευξη PD και PF σε εκείνο το σημείο. Λαμβάνοντας την παράγωγο της (5.76) και (5.77) σε σχέση με η , έχουμε

$$\frac{dP_D}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \int_{\eta}^{\infty} f_{\Lambda|H_1}(\lambda | H_1) d\lambda = -f_{\Lambda|H_1}(\eta | H_1) \quad (5.78)$$

ΚΑΙ

$$\frac{dP_F}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \int_{\eta}^{\infty} f_{\Lambda|H_0}(\lambda | H_0) d\lambda = -f_{\Lambda|H_0}(\eta | H_0) \quad (5.79)$$

ΕΠΙΣΗΣ

$$P_D(\eta) = P[\Lambda(y) \geq \eta | H_1] = \int_{\eta}^{\infty} f_{\Lambda|H_1}[\lambda(y) | H_1] d\lambda = \int_{\eta}^{\infty} \Lambda(y) f_{\Lambda|H_0}[\lambda(y) | H_0] d\lambda \quad (5.80)$$

Λαμβάνοντας την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης σε σχέση με η , παίρνουμε

$$\frac{dP_D}{d\eta} = -\eta f_{\Lambda|H_1}(\eta | H_0) \quad (5.81)$$

Συνδυάζοντας (5.78), (5.79), και (5.80) έχει ως αποτέλεσμα

$$\frac{f_{\Lambda|H_1}(\eta | H_1)}{f_{\Lambda|H_0}(\eta | H_0)} = \eta \quad (5.82)$$

και

$$\frac{dP_D}{DP_F} = \eta \quad (5.83)$$

Στο κριτήριο του Bayes το " η " προσδιορίζεται από τις πρώτες πιθανότητες και το κόστος. Κατά συνέπεια, η πιθανότητα ανίχνευσης, P_D , και η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού, P_F , καθορίζονται στο σημείο της καμπύλης ROC στο το οποίο η εφαπτομένη έχει κλίση " η ". Η minimax εξίσωση αντιπροσωπεύει μια ευθεία γραμμή στο $P_D - P_F$ επίπεδο εκκίνησης στο σημείο $P_D = 0$ και $P_F = 1$, και διασχίζει την καμπύλη ROC. Η κλίση της εφαπτεται της διασταύρωσης με την ROC είναι " η " κατωφλίου.

Σύνθετος Υποθετικός Έλεγχος

Σε απλό πρόβλημα υπόθεσης που εξετάσαμε προηγουμένως, οι παράμετροι χαρακτήριζαν μια υπόθεση που είναι ήδη γνωστή. Σε πολλές περιπτώσεις, οι παράμετροι χαρακτηρίζουν υποθέσεις που μπορεί να μην είναι γνώριμες. Σε αυτήν την περίπτωση, η υπόθεση ονομάζεται "σύνθετη υπόθεση".

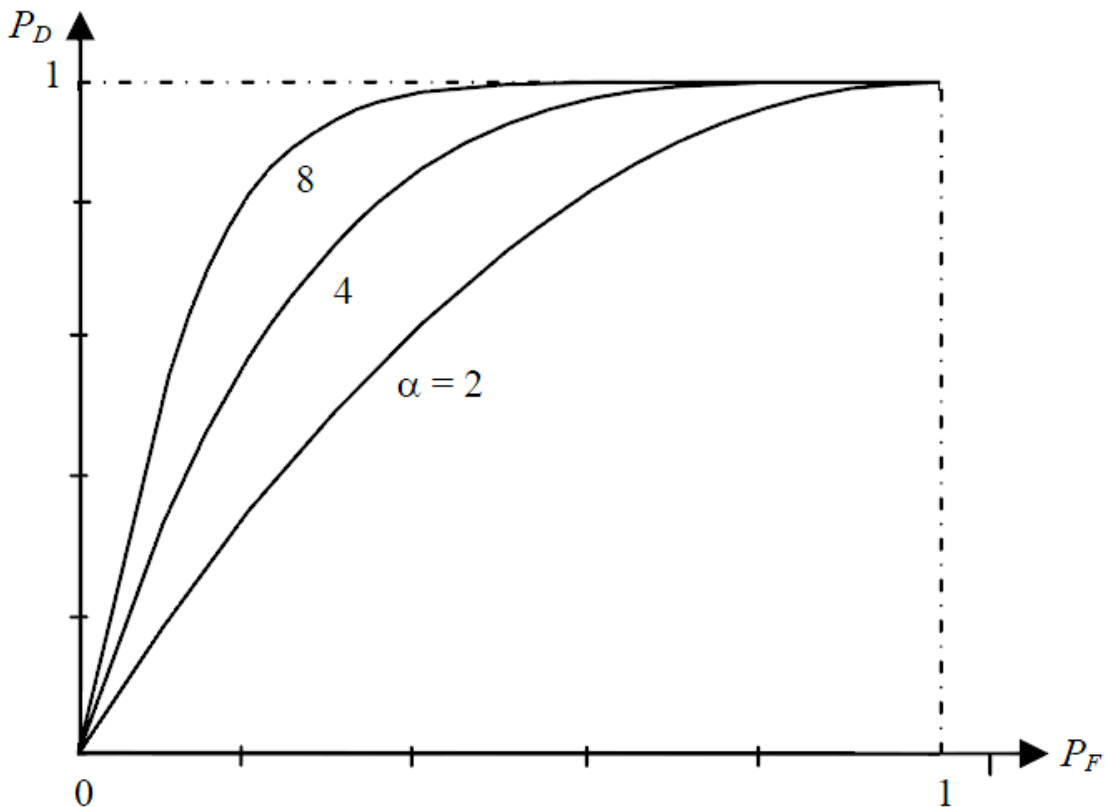
παράδειγμα 5.9

Εξετάζουμε την κατάσταση όπου οι παρατηρήσεις για κάθε υπόθεση δίνονται από

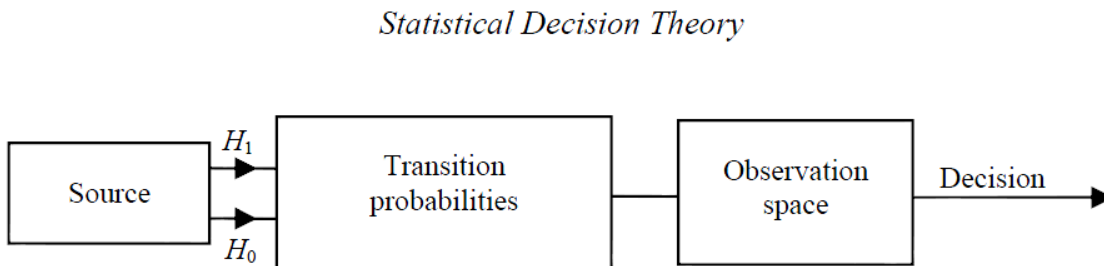
$$H_1: Y = m + N$$

$$H_0: Y = N$$

όπου το N υποδηλώνει ένα λευκό θόρυβο Gauss μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης σ^2 , και το m είναι άγνωστο. Στη συνέχεια, μπορούμε να πούμε ότι H_0 είναι μια απλή υπόθεση, και H_1 μια σύνθετη υπόθεση.



Σχήμα 5.15 ROC του Παραδείγματος 5.8.



Σχήμα 5.16 Σχηματικό διάγραμμα που δείχνει σύνθετη υπόθεση.

Στις προηγούμενες ενότητες, αναπτύξαμε τη θεωρία σχεδιασμού καλών δοκιμών για απλές υποθέσεις. Εξετάζουμε τώρα δοκιμές για σύνθετες υποθέσεις. Η κατάσταση μπορεί να περιγραφεί καλύτερα από το ακόλουθο διάγραμμα του Σχήματος 5.16.

Κάθε υπόθεση χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο παραμέτρων \mathbf{K} , τέτοια ώστε

$$\boldsymbol{\Theta}^T = [\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_K] \quad (5.84)$$

Δύο περιπτώσεις θα εξεταστούν.

- Πρώτα, το $\boldsymbol{\Theta}$ μπορεί να είναι μια τυχαία μεταβλητή με γνωστές συναρτήσεις πυκνότητας $f_{\boldsymbol{\Theta}|H_1}(\boldsymbol{\Theta}|H_1)$ και $f_{\boldsymbol{\Theta}|H_0}(\boldsymbol{\Theta}|H_0)$.
- Δεύτερον, το $\boldsymbol{\Theta}$ μπορεί να μην είναι μια τυχαία μεταβλητή, αλλά ακόμα μια άγνωστη σταθερά.

5.5.1 Θ Τυχαία Μεταβλητή

Εάν Θ είναι μια τυχαία μεταβλητή με γνωστές συναρτήσεις πυκνότητας, $f_{\Theta|H_1}(\Theta|H_1)$ και $f_{\Theta|H_0}(\Theta|H_0)$, τότε η απόφαση λαμβάνεται με τη χρήση του κριτηρίου Bayes ελαχιστοποιώντας τον κίνδυνο. Η ανάλυση είναι όπως πριν. Προκειμένου να εφαρμοστεί η δοκιμή αναλογία-πιθανότητας, χρειαζόμαστε $f_{Y|H_1}(\mathbf{y}|H_1)$ και $f_{Y|H_0}(\mathbf{y}|H_0)$. Που εύκολα έχουν παραχθεί από το μέσο όρο όλων των δυνατών τιμών της Θ . Δηλαδή,

$$f_{Y|H_j}(\mathbf{y} | H_j) = \int f_{Y|\Theta,H_j}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, H_j) f_{\Theta|H_j}(\boldsymbol{\theta} | H_j) d\boldsymbol{\theta} \quad , \quad j=0,1 \quad (5,85)$$

Ο λόγος πιθανότητας γίνεται

$$\Lambda(\mathbf{y}) = \frac{f_{Y|H_1}(\mathbf{y} | H_1)}{f_{Y|H_0}(\mathbf{y} | H_0)} = \frac{\int f_{Y|\Theta,H_1}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, H_1) f_{\Theta|H_1}(\boldsymbol{\theta} | H_1) d\boldsymbol{\theta}}{\int f_{Y|\Theta,H_0}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, H_0) f_{\Theta|H_0}(\boldsymbol{\theta} | H_0) d\boldsymbol{\theta}} \quad (5.86)$$

παράδειγμα 5.10

Εξετάζουμε το πρόβλημα του παραδείγματος 5.9, όπου η σταθερά m , τώρα συμβολίζεται M , είναι μια Gaussian τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σ_m^2 .

Καθορίζουμε το βέλτιστο κανόνα απόφασης.

Λύση

Χρησιμοποιώντας την (5.86), ο βέλτιστος κανόνας απόφασης μπορεί να ληφθεί άμεσα από τον έλεγχο του λογο πιθανότητας. Ως εκ τούτου,

$$\Lambda(y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|M,H_1}(y | m, H_1) f_{M|H_1}(m | H_1) dm}{f_{Y|H_0}(y | H_0)}$$

Σημειώστε ότι μόνο το H_1 είναι μια σύνθετη υπόθεση, και κατά συνέπεια ο αριθμητής $\Lambda(y)$ είναι ενσωματωμένος πάνω από το M . Δεδομένου ότι η πραγματική τιμή του M δεν είναι σημαντική, το M αναφέρεται ως «ανεπιθύμητη παράμετρος». Ο αριθμητής $\Lambda(y)$, συμβολίζεται $N(y)$, είναι

$$\begin{aligned} N(y) &= \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_m} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma_m^2}\right] dm \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_m} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\sigma_m^2 + \sigma^2}{2\sigma^2\sigma_m^2} \left(m^2 - \frac{2\sigma_m^2 y}{\sigma_m^2 + \sigma^2} m\right) - \frac{y^2}{2\sigma^2}\right] dm \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας το τετράγωνο στον εκθέτη, το $N(y)$ γίνεται

$$\begin{aligned}
 N(y) &= \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_m} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\sigma_m^2 + \sigma^2}{2\sigma^2\sigma_m^2} \left(m - \frac{\sigma_m^2 y}{\sigma_m^2 + \sigma^2}\right)^2 - \frac{\sigma_m^2 y^2}{2\sigma^2(\sigma_m^2 + \sigma^2)} - \frac{y^2}{2\sigma^2}\right] dm \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_m} \exp\left[-\frac{y^2}{2(\sigma_m^2 + \sigma^2)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\sigma_m^2 + \sigma^2}{2\sigma^2\sigma_m^2} \left(m - \frac{\sigma_m^2 y}{\sigma_m^2 + \sigma^2}\right)^2\right] dm
 \end{aligned}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\sigma_m^2 + \sigma^2}{2\sigma^2\sigma_m^2} \left(m - \frac{\sigma_m^2 y}{\sigma_m^2 + \sigma^2}\right)^2\right] dm = \sqrt{2\pi} \frac{\sigma\sigma_m}{\sqrt{\sigma_m^2 + \sigma^2}}$$

το $N(y)$ γίνεται

$$f_{Y|H_1}(Y | H_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma_m^2 + \sigma^2}} \exp\left[-\frac{y^2}{2(\sigma_m^2 + \sigma^2)}\right]$$

Ο έλεγχος του λόγου πιθανότητας μειώνει

$$\Lambda(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma_m^2 + \sigma^2}} \exp\left[-\frac{y^2}{2(\sigma_m^2 + \sigma^2)}\right]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right]} \begin{matrix} H_1 \\ > \eta \\ < \\ H_0 \end{matrix}$$

Λαμβάνοντας το φυσικό λογάριθμο και στις δύο πλευρές και απλοποιώντας την έκφραση, εμείς αποκτήσαμε

$$\begin{array}{c} H_1 \\ y^2 > \\ < \\ H_0 \end{array} \frac{2\sigma^2(\sigma_m^2 + \sigma^2)}{\sigma_m^2} \left[\ln \eta + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma_m^2}{\sigma^2} \right) \right]$$

Παρατηρούμε ότι η ακριβής γνώση «της ανεπιθύμητης παράμετρου» m δεν είναι σημαντική γιατί δεν εμφανίζεται στον κανόνα απόφασης.

5.5.2 Μη τυχαίο και Άγνωστος

Αν το θ δεν είναι μια τυχαία μεταβλητή, αλλά παραμένει άγνωστος, η δοκιμή του Bayes δεν εφαρμόζεται πλέον, δεδομένου ότι θ δεν έχει πιθανότητα συνάρτηση πυκνότητας πέρα από την οποία $F_{Y|\theta, H_j}(y|\theta, H_j)$, $j = 0, 1$, μπορεί να υπολογιστεί κατα μέσο όρο, και συνεπώς ο κίνδυνος δεν μπορεί να είναι καθορισμένος. Αντ' αυτού, χρησιμοποιούμε τη δοκιμή Neyman-Pearson. Σε αυτή την περίπτωση, μεγιστοποιήσουμε τη πιθανότητα ανίχνευσης, P_D , ενώ η πιθανότητα ψευδούς συναγερού, P_F , είναι σταθερή, δεδομένου ότι η υποτιθέμενη τιμή θ είναι η πραγματική αξία. Η εκτέλεση αυτής της δοκιμής για διάφορες τιμές του θ οδηγεί σε μια πλοκή P_D έναντι θ , γνωστή ως συνάρτηση δύναμης. Μια δοκιμή που μεγιστοποιεί την πιθανότητα ανίχνευσης όπως αναφέρθηκαν παραπάνω για όλες τις πιθανές τιμές του θ αναφέρεται ως ομοιόμορφα περισσότερο ισχυρή (UMP) δοκιμή. Ως εκ τούτου, μία δοκιμή UMP μεγιστοποιεί την πιθανότητα ανίχνευσης ανεξάρτητα από τις τιμές του θ . Αν H_0 είναι μια απλή υπόθεση και H_1 είναι μια σύνθετη υπόθεση, τότε η δοκιμή ονομάζεται UMP (του επιπέδου α) εάν είναι το ισχυρότερο του επιπέδου α .

Παράδειγμα 5.11

Εξετάζουμε το πρόβλημα του παραδείγματος 5.9, όπου το m είναι μια θετική σταθερά. Καθορίζουμε το βέλτιστο κανόνα απόφασης.

Λύση

Οι υπό όρους λειτουργίες πυκνότητας από τις H_0 και H_1 είναι

$$H_0 : f_{Y|H_0}(y | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$H_1 : f_{Y|H_1}(y | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Η ακριβής τιμή του m δεν είναι γνωστή, αλλά είναι γνωστό ότι είναι θετική. Υποθέτοντας μια τιμή του m , η δοκιμή του λόγου πιθανότητας δίνεται από

$$\Lambda(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(y^2 - my + m^2)}{2\sigma^2}\right]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)} \begin{matrix} > \eta & H_1 \\ < \eta & H_0 \end{matrix}$$

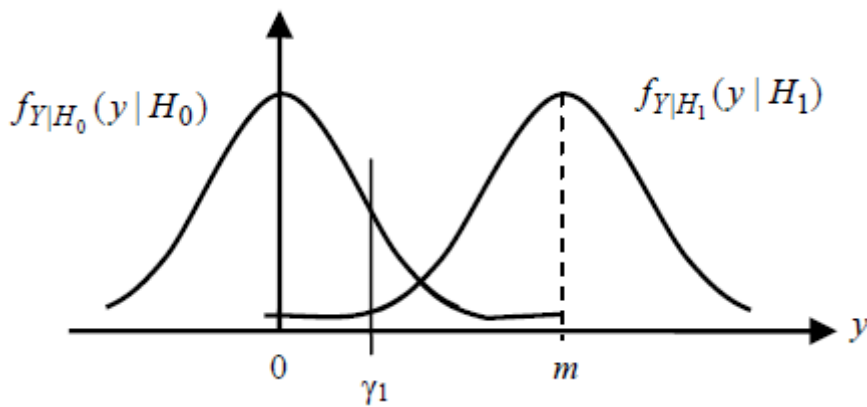
Απλοποιώντας την πιθανότητα αναλογίας και λαμβάνοντας το φυσικό λογαρίθμο, έχουμε

$$y \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{\sigma^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2} = \gamma_1 \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix}$$

Σημειώνουμε ότι το όριο η ορίζεται από την καθορισμένη τιμή της πιθανότητα εσφαλμένου συναγερωμού PF. Στην πραγματικότητα, η γνώση της η δεν είναι απαραίτητο να προσδιορίσει το γ_1 . Υποθέτοντας γ_1 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.17, έχουμε

$$P_F = \int_{\gamma_1}^{\infty} f_{Y|H_0}(y | H_0) dy = \int_{\gamma_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

Αφού προσδιορισθεί το γ_1 , η εφαρμογή της δοκιμής λόγου-πιθανότητας δεν απαιτεί καμία γνώση της m . Δηλαδή, μια καλύτερη δοκιμή μπορεί να σχεδιαστεί ανεξάρτητα από m . Ως εκ τούτου, υπάρχει μια δοκιμή UMP.



Σχήμα 5.17 Threshold γ_1 για τη σύνθετη υπόθεση

$$\begin{array}{c}
 H_1 \\
 y > \gamma_1 \\
 y < \gamma_1 \\
 H_0
 \end{array}$$

Ομοίως, εάν το m είναι άγνωστο αλλά αρνητικό, η πιθανότητα αναλογίας-δοκιμής μειώνει το

$$\begin{array}{c}
 H_0 \\
 y > \frac{\sigma^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2} = \gamma_2 \\
 y < \frac{\sigma^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2} = \gamma_2 \\
 H_1
 \end{array}$$

γ_2 καθορίζεται από τη καθορισμένη πιθανότητα του ψεύτικου συναγερμού για να είναι

$$P_F = \int_{-\infty}^{\gamma_2} f_{Y|H_0}(y | H_0) dy = \int_{-\infty}^{\gamma_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

Ξανά, μια δοκιμή UMP υπάρχει, δεδομένου ότι η εφαρμογή του λόγου πιθανότητας είναι ανεξάρτητη από m . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η πιθανότητα ανίχνευσης και για τις δύο περιπτώσεις, $m < 0$ και το $m > 0$, δεν μπορεί να αξιολογηθεί, επειδή η ακριβής τιμή του m δεν είναι γνωστή. Παρ'όλα αυτά, η δοκιμή είναι η βέλτιστη για όλες τις πιθανές θετικές ή αρνητικές τιμές του m . Σημειώνουμε ότι η δοκιμή που σχεδιάστηκε για το θετικό m δεν είναι η ίδια για το αρνητικό m . Κατά συνέπεια, εάν το m είναι άγνωστος και παίρνει όλες τις δυνατές τιμές, θετικές και αρνητικές, δεν υπάρχει μια δοκιμή UMP. Γνωρίζουμε από τον ορισμό ότι μια δοκιμή UMP υπάρχει εάν είναι βέλτιστο για όλες τις πιθανές τιμές του m . Στην περίπτωση αυτή, η δοκιμή σχεδιάστηκε για τη θετική (αρνητική) m δεν είναι η καλύτερη για την αρνητική (θετική) m . Αυτό απαιτεί ότι πρόκειται να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές δοκιμές, οι οποίες θα συζητηθούν παρακάτω αφού έχουμε καλύψει την εκτίμηση της μέγιστης πιθανότητας (MLE).

5.6 ΔΙΑΔΟΧΙΚΗ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ

Στις προηγούμενες ενότητες, εξετάσαμε τη θεωρία της δοκιμής υποθέσεων, έτσι καθορίστηκε ο αριθμός των παρατηρήσεων στον οποίο βασίζεται η δοκιμή. Σε πολλές πρακτικές καταστάσεις, οι παρατηρήσεις μπορούν να ληφθούν με διαδοχικό τρόπο, έτσι η δοκιμή εκτελείται μετά από κάθε παρατήρηση. Κάθε φορά που λαμβάνεται μια παρατήρηση, οι τρεις πιθανές αποφάσεις που γίνονται είναι:

1. Αποφασίστε H_1
2. Αποφασίστε H_0
3. Δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία ώστε να αποφασίστε υπέρ της H_1 ή H_0 .

Αν οι αποφάσεις (1) ή (2) λαμβάνονται, η διαδικασία ελέγχου υπόθεσης σταματά. Διαφορετικά, μια πρόσθετη παρατήρηση λαμβάνεται, και η δοκιμή εκτελείται ξανά. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου ληφθεί απόφαση είτε υπέρ της H_1 ή H_0 . Σημειώνουμε ότι ο αριθμός παρατήρησης K δεν είναι σταθερός, αλλά είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η δοκιμή εκτελείται μετά από κάθε παρατήρηση όπου υπολογίζουμε την πιθανότητα αναλογίας και συγκρίνεται το με δύο κατώτατα όρια, η_0 και η_1 . Μια τέτοια δοκιμή που κάνει μια από τις τρεις πιθανές απόφαση, όπου αναφέρονται πιο πάνω, μετά την παρατήρηση k th ονομάζεται ως *διαδοχική δοκιμή πιθανότητα αναλογίας*. Ας Y_k , $k = 1, 2, \dots, K$, αντιπροσωπεύουν το δείγμα k th του διανυσματικού Y_K ορισμένο ως

$$Y_K^T = [Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_K] \quad (5.87)$$

Ο λόγος πιθανότητας με βάση τις πρώτες παρατηρήσεις K είναι

$$\Lambda(y_K) = \frac{f_{Y_K|H_1}(y_K | H_1)}{f_{Y_K|H_0}(y_K | H_0)} \quad (5.88)$$

Για να υπολογίσουμε την αναλογία πιθανότητας (5.88), πρέπει να γνωρίζουμε την κοινή πυκνότητα λειτουργίας των παρατηρήσεων K . Για απλότητα, υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις είναι ταυτόσημα

κατανεμημένες, και λαμβάνονται ανεξάρτητα. Ο λόγος πιθανότητας μπορεί να γραφτεί ως προϊόν των λόγων πιθανότητας K που λαμβάνουν

$$\Lambda(\mathbf{y}_K) = \frac{f_{\mathbf{Y}_K|H_1}(\mathbf{y}_K | H_1)}{f_{\mathbf{Y}_K|H_0}(\mathbf{y}_K | H_0)} = \prod_{k=1}^K \frac{f_{Y_k|H_1}(y_k | H_1)}{f_{Y_k|H_0}(y_k | H_0)} \quad (5.89)$$

Ο στόχος είναι να καθοριστεί η_0 και η_1 σύμφωνα με το P_F , η πιθανότητα ψεύτικου συναγερμού, και P_M , η πιθανότητα αποτυχίας. θέτουμε

$$P_F = \alpha \quad (5.90)$$

και

$$P_M = \beta \quad (5.91)$$

και εκτελούμε την ακόλουθη δοκιμή.

Αν $\Lambda(\mathbf{y}_K) \geq \eta_1$ (5.92) αποφασίζουμε υπέρ του H_1 .

Εάν $\Lambda(\mathbf{y}_K) \leq \eta_0$ (5.93) αποφασίζουμε υπέρ του H_0 .

Διαφορετικά,

εάν $\eta_0 < \Lambda(\mathbf{y}_K) < \eta_1$ (5.94) παίρνουμε μια πρόσθετη παρατήρηση και να εκτελέσει μια άλλη δοκιμή.

Η πιθανότητα ανίχνευσης, P_D , από την άποψη του ολοκληρώματος περα από το διάστημα παρατήρησης είναι

$$P_D = P(\text{decide } H_1 | H_1 \text{ true}) = \int_{Z_1} f_{\mathbf{Y}_K|H_1}(\mathbf{y}_K | H_1) d\mathbf{y}_K \quad (5.95)$$

Χρησιμοποιώντας την (5.88), το P_D μπορεί να γραφτεί ως

$$P_D = \int_{Z_1} \Lambda(\mathbf{y}_K) f_{\mathbf{Y}_K|H_0}(\mathbf{y}_K | H_0) d\mathbf{y}_K \quad (5.96)$$

Η απόφαση υπέρ της H_1 σημαίνει ότι $\Lambda(y_K) \geq \eta_1$. Ως εκ τούτου, αντικαθιστώντας τη (5.92) με τη (5.96), παίρνουμε την ανισότητα

$$P_D \geq \eta_1 \int_{Z_1} f_{Y_K|H_0}(y_K | H_0) dy_K \quad (5.97)$$

Σημειώνουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{Z_1} f_{Y_K|H_0}(y_K | H_0) dy_K = P_F = \alpha \quad (5.98)$$

και από $P_D = 1 - P_M = 1 - \beta$, (5.97) μειώνει σε

$$1 - \beta \geq \eta_1 \alpha \quad (5.99)$$

ή, το κατώτατο όριο η_1 είναι

$$\eta_1 \leq \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (5.100)$$

Παρομοίως, μπορεί να αποδειχθεί ότι η η_0 καταφλίου είναι

$$\eta_0 \geq \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad (5.101)$$

Σε αυτό το στάδιο, κάποιες σημαντικές ερωτήσεις πρέπει να διερευνηθούν και να απαντηθούν.

Ποια είναι η πιθανότητα ότι η διαδικασία ποτέ δεν τελειώνει ;

Ποιες είναι μερικές από τις ιδιότητες κατανομής της τυχαίας μεταβλητής K ;

Ειδικότερα, ποια είναι η αναμενόμενη τιμή αυτού του μεγέθους δείγματος K ;

Για να απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα, είναι πολύ πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε τη λειτουργία καταγραφής πιθανότητας.

Λαμβάνοντας το φυσικό λογάριθμο (5.94), παίρνουμε

$$\ln \eta_0 < \ln \frac{f_{Y_1|H_1}(y_1 | H_1)}{f_{Y_1|H_0}(y_1 | H_0)} + \dots + \ln \frac{f_{Y_K|H_1}(y_K | H_1)}{f_{Y_K|H_0}(y_K | H_0)} < \ln \eta_1 \quad (5.102)$$

Αφήνουμε τον όρο k_{th} , $k = 1, 2, \dots, K$, του παραπάνω αθροίσματος να συμβολίζεται ως

$$L(y_k) = \ln \frac{f_{Y_k|H_1}(y_k | H_1)}{f_{Y_k|H_0}(y_k | H_0)} \quad (5.103)$$

τότε το (5.102) γίνεται

$$\ln \eta_0 < L(y_1) + \dots + L(y_k) + \dots + L(y_K) < \ln \eta_1 \quad (5.104)$$

Το άθροισμα αυτό μπορεί να γραφτεί με μια αναδρομική σχέση, όπως

$$L(y_K) = L(y_{K-1}) + L(y_K) \quad (5.105a)$$

οπου

$$L(y_{K-1}) = L(y_1) + L(y_2) + \dots + L(y_{K-1}) = \sum_{k=1}^{K-1} L(y_k) \quad (5.105b)$$

If hypothesis H_1 is true, a detection is declared when $L(\mathbf{y}_K) \geq \ln \eta_1$ with probability $PD = 1 - PM = 1 - \beta$. A miss occurs when $L(\mathbf{y}_K) \leq \ln \eta_0$ with probability $PM = \beta$. Hence, the expected value of $L(\mathbf{y}_K)$ under hypothesis H_1 is

Προκειμένου να υπολογιστεί το $E[K]$, ο μέσος αριθμός παρατηρήσεων στο πλαίσιο κάθε υπόθεσης, υποθέτουμε ότι η δοκιμή τερματίζεται με K παρατηρήσεις με πιθανότητα ένα. Αυτή η υπόθεση συνεπάγεται ότι $L(\mathbf{y}_K)$ παίρνει δύο δυνατές τιμές, $\ln \eta_0$ και $\ln \eta_1$.

Αν η υπόθεση H_1 είναι αληθής, μια ανίχνευση δηλώνεται όταν $L(\mathbf{y}_K) \geq \ln \eta_1$ με πιθανότητα $P_D = 1 - P_M = 1 - \beta$.

Μια χαμένη ευκαιρία προκύπτει όταν $L(\mathbf{y}_K) \leq \ln \eta_0$ με πιθανότητα $P_M = \beta$.

Ως εκ τούτου, η αναμενόμενη τιμή της $L(\mathbf{y}_K)$ υπό την υπόθεση H_1 είναι

$$E[L(\mathbf{y}_K) | H_1] = \beta \ln \eta_0 + (1 - \beta) \ln \eta_1 \quad (5.106)$$

Με τον ίδιο συλλογισμό, η αναμενόμενη τιμή της $L(\mathbf{y}_K)$ υπό την υπόθεση H_0 είναι

$$E[L(\mathbf{y}_K) | H_0] = \alpha \ln \eta_1 + (1 - \alpha) \ln \eta_0 \quad (5.107)$$

Έστω B μια τυχαία μεταβλητή, λαμβάνοντας δυαδικούς αριθμούς μηδέν και το ένα, έτσι ώστε

καμία απόφαση με $(k-1)$ στο δείγμα

$$B_k = \begin{cases} 1, & \text{no decision made up to } (k-1) \text{ sample} \\ 0, & \text{decision made at an earlier sample} \end{cases} \quad (5.108)$$

απόφαση που λαμβάνεται σε ένα προηγούμενο δείγμα

δηλαδή, το B_k εξαρτάται από τις παρατηρήσεις $Y_k, k = 1, 2, \dots, K-1$, και όχι από Y_K . Ξαναγράφοντας την αναλογία log-πιθανότητα όσον αφορά την τυχαία μεταβλητή B , παίρνουμε

$$L(\mathbf{y}_K) = \sum_{k=1}^K L(y_K) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k L(y_K) \quad (5.109)$$

Δεδομένου ότι οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένα, έχουμε

$$E[L(\mathbf{y}_K) | H_j] = E[L(y) | H_j] \sum_{k=1}^{\infty} E[B_k], \quad j = 0, 1 \quad (5.110a)$$

όπου

$$E[L(y) | H_j] = E[L(y_1) | H_j] = \dots = E[L(y_K) | H_j] \quad (5.110b)$$

Το άθροισμα (5.110a) είναι απλά

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[B_k] = \sum_{k=1}^{\infty} P(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(K = k) = E[K] \quad (5.111)$$

Αντικαθιστώντας την (5.111) και (5.110b) σε (5.106), παίρνουμε

$$E[L(y) | H_1] E[K | H_1] = \alpha \ln \eta_1 + (1 - \alpha) \ln \eta_0 \quad (5.112)$$

ή

$$E[K | H_1] = \frac{(1-\beta) \ln \eta_1 + \beta \ln \eta_0}{E[L(y) | H_1]} \quad (5.113)$$

Ομοίως, η αναμενόμενη τιμή του K υπό υπόθεση του H_0 αναμένεται ότι θα είναι

$$E[K | H_0] = \frac{\alpha \ln \eta_1 + (1-\alpha) \ln \eta_0}{E[L(y) | H_0]} \quad (5.114)$$

Για να απαντήσουμε το ερώτημα ότι η διαδικασία τερματίζεται με πιθανότητα ένα, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(K \geq k) = 0 \quad (5.115)$$

η οποία είναι απλή. Επιπλέον, μπορεί ναδειχθεί ότι η αναμενόμενη αξία του αριθμού των παρατηρήσεων K σύμφωνα με κάθε υπόθεση είναι ελάχιστη για τις καθορισμένες τιμές των P_F και P_M .

παράδειγμα 5.12

Ας υποθέσουμε ότι ο δέκτης του παραδείγματος 5.2 παίρνει K παρατηρήσεις διαδοχικά. Αν η διακύμανση $\sigma^2 = 1$ και η μέση $m = 1$. Προσδιορίστε:

- (α) Το κανόνα απόφασης, έτσι ώστε $P_F = \alpha = 0.1 = P_M = \beta$.
- (β) Την αναμενόμενη τιμή της K σύμφωνα με κάθε υπόθεση.

Λύση

(α) Ο ορισμός του κανόνα απόφασης εκφράζεται με (5.92), (5.93) και (5.94).

Κατά συνέπεια, πρέπει να λύσουμε το λόγο πιθανότητας στο k th στάδιο και για κατώτατα όρια η_0 και η_1 . Αντικαθιστώντας για $\sigma^2 = 1$ και $m = 1$ το λογο πιθανότητας παράδειγμα 5.2, παίρνουμε το λογο πιθανότητας στο k th στάδιο να είναι

$$\Lambda(\mathbf{y}_K) = \exp\left(\sum_{k=1}^K y_k - \frac{K}{2}\right)$$

Ο λόγος καταγραφής πιθανότητας είναι απλά

$$L(\mathbf{y}_K) = \ln \Lambda(\mathbf{y}_K) = \sum_{k=1}^K y_k - \frac{K}{2}$$

Από (5.100) και (5.101), τα δύο κατώτατα όρια είναι

$$\ln \eta_1 = 2.197 \text{ and } \ln \eta_0 = -2.197$$

Ως εκ τούτου, ο κανόνας απόφασης όσον αφορά την αναλογία log-πιθανότητας είναι:

If $L(y_K) \geq 2.197$, απόφαση H_1 .

If $L(y_K) \leq -2.197$, απόφαση H_0 .

If $-2.197 \leq L(y_K) \leq 2.197$, παίρνουμε μια επιπλέον παρατήρηση $K+1$ και να εκτελούμε άλλη δοκιμή.

(β) Οι αναμενόμενες τιμές του K σύμφωνα με τις υποθέσεις H_1 και H_0 δίνονται από (5.113) και (5.114), αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι πρέπει να λάβουμε $E[L(y) | H_1]$ και $E[L(y) | H_0]$.

Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις είναι πανομοιότυπες, έχουμε $E[L(y) | H_1] = 1 - (1/2) = 1/2$ και $E[L(y) | H_0] = 0 - (1/2) = -1/2$.

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $E[L(y) | H_1]$ και $E[L(y) | H_0]$ στις (5.113) και (5.114), παίρνουμε $E[K | H_1] = 3.515$ και $E[K | H_0] = 3.515$.

Δηλαδή, χρειαζόμαστε τέσσερα δείγματα για να αποκτήσουμε την απόδοση που καθορίζεται από $P_F = P_M = 0,1$

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο κεφάλαιο αυτό, έχουμε αναπτύξει τις βασικές έννοιες του έλεγχου υποθέσεων. Πρώτον, μελετήσαμε το κριτήριο Bayes, το οποίο προϋποθέτει τη εκ των προτέρων γνώση της πιθανότητας για κάθε υπόθεση, και την ανάθεση κόστους της σε κάθε ενδεχόμενη απόφαση. Το μέσο κόστος, γνωστό ως συνάρτηση κινδύνου, ελαχιστοποιήθηκε για να ληφθεί ο βέλτιστος κανόνας απόφασης. Χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο του Bayes για τον απλό δυαδικό έλεγχο υποθέσεων και για τον έλεγχο M -ary υποθέσεων. Το κριτήριο minimax, το οποίο ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος για μια επιλεγμένη εκ των προτέρων πιθανότητα, P_1 , μελετήθηκε στην παράγραφο 5.3. Το κριτήριο minimax εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου η εκ των προτέρων πιθανότητα δεν είναι γνωστή, αν και είναι πιθανή η ανάθεση ρεαλιστικού κόστους σε διάφορες αποφάσεις. Σε περιπτώσεις όπου η ανάθεση ρεαλιστικού κόστους δεν είναι δυνατή και οι εκ των προτέρων πιθανότητες δεν είναι γνωστές, εξετάζουμε τη προσέγγιση Neyman-Pearson. Στο κριτήριο Neyman - Pearson, η πιθανότητα ανίχνευσης (ή αποτυχίας ανίχνευσης) είναι μεγιστοποιημένη (ή ελαχιστοποιημένη), ενώ η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού έχει μια προκαθορισμένη σταθερή τιμή. Το λειτουργικό χαρακτηριστικό του δέκτη, το οποίο είναι μια γραφική παράσταση της πιθανότητας ανίχνευσης έναντι της πιθανότητας ψευδούς συναγερμού, ήταν χρήσιμα στην ανάλυση της απόδοσης των ανιχνευτών με βάση την προσέγγιση Neyman - Pearson. Επιπλέον στο κεφάλαιο μελετήθηκε το πρόβλημα του σύνθετου υποθετικού ελέγχου. Η σύνθετη υπόθεση χαρακτηρίζεται από μια άγνωστη παράμετρο. Όταν η παράμετρος ήταν μια τυχαία μεταβλητή με μια γνωστή συνάρτηση πυκνότητας, εφαρμόσαμε τον έλεγχο του λόγου πιθανοφάνειας παίρνοντας την μέση τιμή της υπό συνθήκη συνάρτησης πυκνότητας που αντιστοιχεί στις υποθέσεις, για όλες τις πιθανές τιμές της παραμέτρου. Ωστόσο, εάν η παράμετρος δεν ήταν τυχαία αλλά παραμένει άγνωστη, τότε η δοκιμασία του Bayes δεν ήταν πλέον σε ισχύ, και αντ' αυτού χρησιμοποιούμε το κριτήριο Neyman - Pearson. Επιπλέον, όταν ήταν δυνατό να εφαρμοστεί η δοκιμή Neyman - Pearson σε όλες τις πιθανές τιμές της παραμέτρου, μια ομοιόμορφα πιο ισχυρή δοκιμή ειπώθηκε ότι υπάρχει. Ολοκληρώσαμε αυτό το κεφάλαιο με μια σύντομη παράγραφο για τη διαδοχική ανίχνευση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Καλύπτονται έννοιες:

- Κατανεμημένο δίκτυο αισθητήρων.
- Ακτινοβολία γάμμα.
- Αναφορά στο μετρητή Geiger-Müller.
- Η ολοκλήρωση Monte Carlo.
- Οι στατιστικές Poisson.
- Bayesian μεθοδολογία ταξινόμησης.
- DSN ανίχνευση.

Ραδιενεργός Ανίχνευση Πηγής με Δίκτυα Αισθητήρων

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ολοκληρωμένη ανίχνευση της μεταφοράς πυρηνικών υλικών είναι ένα ζητούμενο για την ασφάλεια της πατρίδας μας. Η πύλη έλεγχου είναι η αντίστοιχη κατάσταση προόδου, αλλά στο μέλλον διανεμημένη στα δίκτυα αισθητήρων (DSNs) θα μπορούσαν να παρέχουν την ευρύτερη επιτήρηση. Όπως θα φανει, οι μέθοδοί μας για τη ραδιενεργό ανίχνευση πηγής είναι επεξεργασίες επάνω σε εκείνες που παράγουν τις εκτιμήσεις των παραμέτρων πηγής, δηλ., αντιμετωπίζοντας ένα αντίστροφο πρόβλημα. Εδώ, στο δίκτυο οι κόμβοι είναι στάσιμοι και η πηγή είναι κινητή. Οι κόμβοι είναι εξοπλισμένοι με έναν αισθητήρα ακτινοβολίας που καταγράφει τις αριθμήσεις τέτοιες σαν μετρητή Geiger-Müller. Για την ανίχνευση, κάποιος θα μπορούσε να εφαρμόσει ένα (υπόβαθρο εξαρτώμενο) κατώτατο όριο στις αθροισμένες αριθμήσεις, αλλά για αυτήν την προσέγγιση για να είναι αποτελεσματικός, η τροχιά της πηγής πρέπει, στην ουσία, να είναι γνωστή, και εδώ εξερευνάμε γενικότερες μεθόδους, αποτελεσματικές για ιδιαίτερα πιθανές τροχιές. Εδώ, το σήμα αναφέρεται στις αριθμήσεις που προέρχονται από την πηγή, εκτιμώντας ότι το υπόλοιπο προέρχεται από το υπόβαθρο. Και τα δύο συστατικά υποτίθεται ότι υπακούν στη στατιστική Poisson. Τα πρότυπά μας αφορούν τις πηγές γάμμα, π.χ., η « $1/r^2$ κάμψη» του σήματος. Λαμβάνοντας υπόψη ένα δίκτυο αισθητήρων, το οποίο περιλαμβάνει υπόβαθρο και το σήμα, Ποιες μέθοδοι αντέχουν οικονομικά στην τελευταία ευαισθησία από την ανίχνευση; Οι Bayesian μέθοδοι αποτελούν το βέλτιστο βασισμένο συμπέρασμα μέσα σε ένα κόσμο σεναρίων. Περιγράφουμε την εφαρμογή αυτών των μεθόδων για τη ραδιενεργό ανίχνευση πηγής, με τα σενάρια που περιλαμβάνουν τα διάφορα εύρη πηγής και τροχιάς. Οι παρόντες στόχοι είναι στοιχειώδεις. Αυτό το κεφάλαιο παρέχει προκαταρκτικές ιδέες στο φάκελο της αποτελεσματικότητας της Bayesian ανίχνευσης εναντίον των υπολογιστικών απαιτήσεων του για δίκτυα με 10-320 κόμβους που επεκτείνονται μέσα σε ένα μήκος οδόστρωμα: ένα απλό πρότυπο με τις πρακτικές διακλαδώσεις [1], [5]. Bayesian μέθοδοι για την εκτίμηση παραμέτρου πηγής που εκτίθεται ένας υπολογιστικός εκθέτης πολυπλοκότητας στον αριθμό παράμετρου που υπολογίζεται [3], περιορίζοντας τη δυνατότητα εκτέλεσης του και ενθαρρύνοντας ανησυχίες ότι η ειδικότητά του για την ανίχνευση πρέπει να είναι πάρα πολύ υπολογιστικά εντατική για να είναι πάντα χρήσιμη. Καθιερώνουμε εδώ ότι για την ανίχνευση, η περιοχή αποτελεσματικότητάς τους πρέπει να περιλαμβάνει περίπλοκα και ρεαλιστικά πρότυπα.

II. ΜΕΘΟΔΟΙ

A. επισκόπηση της Bayesian μεθοδολογίας ταξινόμησης

Το θεμέλιο για τις Bayesian μεθόδους είναι ένας παραμετροποιημένος τύπος για την πιθανότητα των στοιχείων: Pr στοιχεία. Εδώ, οι παράμετροι καθορίζουν το εύρος και την τροχιά μιας πηγής, διατύπωση στη πιθανότητα των στοιχείων αισθητήρων είναι απλή, όπως θα φανεί [δηλαδή (1) και (2)]. Εδώ, οι κατηγορίες αποτελούν ένα χώρισμα του «διαστήματος παραμέτρου». Επιπλέον, υπάρχουν δύο φυσικές κατηγορίες: είτε μια ραδιενεργός πηγή είναι ή δεν είναι συναφής σε μια διευκρινισμένη περιοχή κατά τη διάρκεια ενός δεδομένου χρονικού διαστήματος. Η πιθανότητα που τα στοιχεία προέρχονται από την κατηγορία c , έδειξε P_c ; $c=1, 2$, ακολουθούν από τα ολοκληρώματα, I_c , $Pr(\text{data})$ πέρα από το αντίστοιχο μέρος του διαστήματος παραμέτρου – με την κατάλληλη παράμετρο βάρη (πολλαπλασιαστικοί παράγοντες): οι διάσημες «προγενέστερες πιθανότητες,» συχνά υποτιθέμενη σταθερά μέσα στις κατηγορίες. Κανόνας Bayes [δηλαδή(4)] βεβαιώνει P_c τους ίσους το πηλίκο του I_c από το άθροισμα των I_c 's. Θεσπίζουμε έναν φυσικό κανόνα ταξινόμησης: Συμπεράνετε την κατηγορία με το μέγιστο, και εάν υπάρχει ένας δεσμός, κατόπιν συμπεραίνει μιας από τις κατηγορίες με το μέγιστο ομοιόμορφα στην τύχη. Κατά συνέπεια, για τη δεδομένη αριθμηση στοιχεία, εάν το ολοκλήρωμα, πέρα από την κατηγορία «συναφών πηγών» υπερβαίνει αυτός για τις «nonincident πηγές,» έπειτα το εν λογο γεγονός ταξινομείται ως περιστατικό και αντίστροφα.

B. Pr(data)

Αφήστε \mathbf{x} και \mathbf{y} τις αρχικές συντεταγμένες της πηγής, και δώστε εύρος \mathbf{a} και μια ταχύτητα \mathbf{u} προς τη θετική κατεύθυνση. Η παράμετρος a είναι οι αναμενόμενες «αριθμήσεις» (διαστασιολογημένος m^2s^{-1}). Για παράδειγμα, ένας αισθητήρας στους μετρητές απόστασης d από την πηγή, έχει ένα αναμενόμενο ποσοστό ίσου αποκτίσεων σημάτων a/d^2 ανά δευτερόλεπτο. Κατά συνέπεια, το a ενσωματώνει τα χαρακτηριστικά τόσο της πηγής όσο και του αισθητήρα. Οι αριθμήσεις που καταγράφονται σε έναν στάσιμο κόμβο στη θέση (x_s, y_s) , πέρα από το διάστημα $[0, t]$, λαμβάνεται να ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο όρο

$$\mu_s = bt + \frac{a}{|y - y_s|v} \times \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{x - x_s + vt}{|y - y_s|} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x - x_s}{|y - y_s|} \right) \right\} \quad (1)$$

όπου b (διαστάσεις s^{-1}) δείχνει το αναμενόμενο υπόβαθρο ποσοστό. [(1) προκύπτει από (7), παραγόμενος στο παράρτημα.] Για την απλότητα, υποτίθεται ότι ήταν ο ίδιος για όλους τους αισθητήρες [5]. Κατά συνέπεια, εάν ένας αισθητήρας με τον αναμενόμενο αριθμό των μ_s αρχείων k αριθμήσεων, έπειτα η αντίστοιχη πιθανότητα (Poisson) αυτά τα στοιχεία είναι ίσο με

$$\exp\{-\mu_s\} \frac{\mu_s^k}{k!}.$$

Το προϊόν τέτοιων «παραγόντων Poisson» για όλους τους αισθητήρες και για τα χρονικά διαστήματα με τα διαθέσιμα στοιχεία αποτελεί την προϋπόθεση για την πιθανότητα των στοιχείων, μια λειτουργία των παραμέτρων a , u , x και y

$$\Pr(\text{data}) = \prod_{s=1}^S \prod_{\tau=1}^T \exp\{-\mu_{s\tau}\} \frac{\mu_{s\tau}^{k_{s\tau}}}{k_{s\tau}!} \quad (2)$$

Οπού S είναι ο αριθμός κόμβων και T ο αριθμός χρονικών διαστημάτων πέρα από ποια σήματα έχει συλλεχθεί και όπου $K_{s\tau}$ δείχνει τον αριθμό των μετρήσεων που καταγράφονται στον κόμβο s πέρα από το διάστημα τ , λαμβάνοντας υπόψη την αντίστοιχη αναμενόμενη αξία $\mu_{s\tau}$. Η πιθανότητα που τα στοιχεία προέρχονται από την κατηγορία είναι ανάλογη σε ένα ολοκλήρωμα της $\Pr(\text{data})$

$$I_c = \frac{1}{|V_c|} \int_{V_c} \Pr(\text{data}) d\pi; \quad c = 1, 2 \quad (3)$$

όπου π δείχνει τις παραμέτρους (a , u , x και y) οπού V_c είναι η μερίδα της διαστημικής αποτελώντας κατηγορία παραμέτρου c και όπου ο αντίστοιχος όγκος δείχνεται $|V_c|$; $c=1, 2$. Εξίσωση (3) περιέχει το μη π-εξαρτώμενο παράγοντας κατά συνέπεια, οι προγενέστερες πιθανότητες αποτίθενται σταθερά μέσα στις κατηγορίες.

Γ. Υποδομή

Είναι προφανές ότι, (3) πρέπει να αξιολογηθεί αριθμητικά όπως είναι ο κανόνας για τις Bayesian στατιστικές [7]. Ακόμα κι αν στατιστικός οι διακυμάνσεις ήταν αμελητέες και ακόμη και για $S=1$, ολοκληρώματα πέρα από το επίπεδο τα σύνολα (1) θα έθεταν μια πρόκληση για την αναλυτική αξιολόγηση. Για τους παρόντες στόχους, και η μεγάλη «δυναμική περιοχή» από τα integrands και τη μέτρια διαστατικότητα (ο αριθμός παραμέτρου) συνιστούμε τις μεθόδους του Monte Carlo (δειγματοληψία) που είναι τυποποιημένες αριθμητικές μέθοδοι τετραγωνισμού [8, CH. 4]. Λόγω των σταθερών προγενέστερων πιθανοτήτων, I_c προσεγγίστηκε από την ομοιόμορφη δειγματοληψία V_c : το άθροισμα των integrands σημείων που διαιρούνται με τον αριθμό σημείων δειγματοληψίας συγκλίνει στο I_c , από (3) [8], [9]. Επιπλέον, για να ματαιώσει υποχειρίση και υπερχειρίση, πετυχαίνοντας κάθε σημείο, ο λογάριθμος του μερικού ποσού υιοθετήθηκε κατάλληλα αυξημένος. Εφαρμόσαμε (3) και για τις δύο

κατηγορίες μας. Κατά συνέπεια, με τις ίσες προγενέστερες πιθανότητες να ανήκει σε κάθε κατηγορία, η πιθανότητα P_c , από να ανήκει κατηγορία στα δεδομένα και στοιχεία αρίθμησης $k11, k12, \dots, kST$ είναι ίσος με

$$P_c = \frac{I_c}{I_1 + I_2}, \quad c = 1, 2. \quad (4)$$

TABLE I

RATES OF “GETTING IT RIGHT” (TP, TN) FOR SOURCES OF DIFFERING AMPLITUDES, AND BACKGROUNDS, USING DATA FROM 32 SENSORS, RANDOMLY PLACED IN THE ROADWAY, WITH THE SAME CONFIGURATION IN ALL CASES. THE ROW FOR $b = 10$ IS REPRODUCED FROM TABLE II. 1,000 DIFFERENT, UNIFORMLY DISTRIBUTED TRAJECTORIES (OF EACH CLASS) WERE SIMULATED AND THE MAXIMUM I WAS USED TO PREDICT THE CLASS. FOR THE CASES WITH $b = 1$, THE $\Xi = 10^{-3}$, MODESTLY DIMINISHING THE $a = 10$ TN RATE FROM WHAT IT WOULD HAVE BEEN FOR THE DEFAULT VALUES OF

$a =$	1	10	100	1000
$b = 1$ TP	0.54	0.79	–	–
$b = 1$ TN	0.50	0.84	–	–
$b = 10$ TP	0.52	0.68	0.99	–
$b = 10$ TN	0.50	0.89	1.00	–
$b = 100$ TP	–	0.52	0.71	0.99
$b = 100$ TN	–	0.50	0.50	1.00

Σημειώστε ότι η μορφή του (4) επιτρέπει την παράλειψη της δημιουργίας παραγωγικών από (2). Επομένως, επιλέξαμε ομοιόμορφα από V_c ; $c=1,2$, να παραγάγει τροχιές και εύρη πηγή. Για κάθε πηγή, χρησιμοποιήσαμε (1) για να λάβει το αντίστοιχο μ_{st} ; $s=1,2, \dots, S$, $t=1,2, \dots, T$ και k_{ST} λήφθηκε έπειτα με τη δειγματοληψία μιας διανομής Poisson με το μέσο όρο μ_{ST} [10, Poisson-τυχαία-μεταβλητή παραγωγή]. Έπειτα, (4) αξιολογήθηκε, χρησιμοποιώντας (3), ουσιαστικά, την αναλογία χρόνων $I_c > I_{c'}$ που καταγράφονται ($c \neq c'$) για να λάβουν την εκτίμηση σε σωστό ποσοστό ταξινόμησης. Χίλιες δοκιμές ήταν χαρακτηριστικά εφαρμοσμένο, και για τις δύο κατηγορίες, για να λάβει τα ποσοστά που δίνονται στο αποτέλεσμα. Για τη πρώτη θέση των τροχιών, το ποσοστό ταξινόμησης καλείται αληθινά θετικό ποσοστό (TP), και για τη δεύτερη κατηγορία, αυτό το ποσοστό καλείται αληθινά αρνητικό ποσοστό (της TN). Όταν $I_c = I_{c'}$, δηλ., το μέγεθος της σχετικής διαφοράς από τους λογαριθμούς του ήταν αρκετά μικρό μην υπερβαίνοντας μια διακοπή Ξ στο μέγεθος η αντίστοιχη αρίθμηση της σωστής ταξινόμησης αυξήθηκε στο $1/2$. Εισάγαμε το Ξ επειδή, διαφορετικά, κοντά στο όριο ανίχνευσης, το ποσοστό TP μειώθηκε μερικές φορές 0.4 (επιστρέφοντας σε 0.5 με μικρότερο a). Με τους σημερινούς μας στόχους, τέτοια πιθανώς τεχνητή συμπεριφορά ήταν για την απόσπαση της προσοχής, και καταργήθηκε με τη χρησιμοποίηση $\Xi = 10^{-4}$ για τις τροχιές που συμβαίνουν και $\Xi = 10^{-5}$ για τις τροχιές που δε συμβαίνουν. Εκτός αν οι

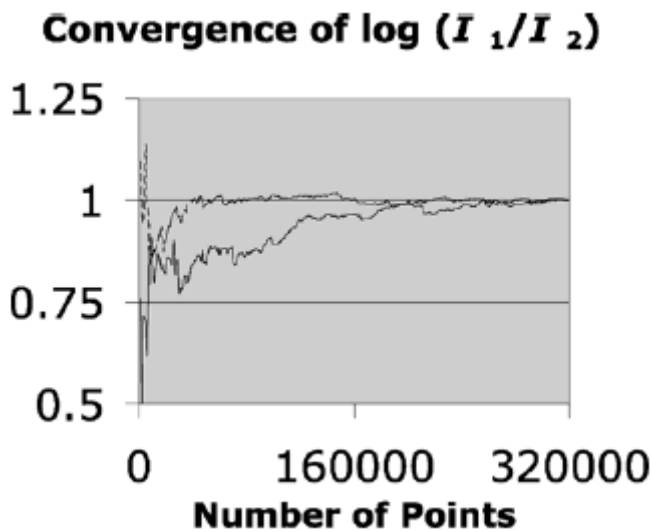
διευκρινισμένες αυτές τιμές Ξ που χρησιμοποιήθηκαν. Για τη σωστή ταξινόμηση τα ποσοστά μεγαλύτερα από 0.6 με τέτοιο Ξ 's είχαν την αμελητέα επίδραση.

Δ. Προσομοιώσεις

Οι προσομοιώσεις μας διαμορφώνουν τυχαία τη μεταφορά ραδιενεργών πηγών σε οχήματα που κινούνται σε ευθεία οδοστρώματα με τη βοήθεια σταθερών πηγών ταχύτητας. Ταχύτητες u , έχουν ληφθεί μεταξύ 10m/s και 30m/s για να είναι εξίσου πιθανό. Τα εύρη της πηγής κυμαίνονται μεταξύ 10^{-1} και 10^3 . Συνήθως η ακτινοβολία υποβάθρου λαμβάνεται για να έχει μια (σχετικά υψηλή) αναμενόμενη τιμή 10 [3], μια αρκετό μικρή τιμή σύμφωνα με στατιστικές διακυμάνσεις που επηρεάζουν τα αποτελέσματά μας [δηλαδή πίνακας I]. Τα στοιχεία συλλέχθηκαν για 20 διαδοχικά χρονικά διαστήματα, δηλ., $T=20$ κάθε ένα από διάρκεια του 1sec. Το τμήμα του οδοστρώματος «υπό επιτήρηση» μεταφέρθηκε σε ένα ορθογώνιο με ένα πλάτος 10μ και το μήκος 600μ. Η x συντεταγμένη ήταν παράλληλα στο μακροχρόνιο άξονα, και η y συντεταγμένη στον κοντό άξονα. (Για την απλότητα, όλες «οι συντεταγμένες» ήταν υποτιθέμενα ίσες με μηδέν.) Κατά συνέπεια, η πρώτη θέση αποτελείται από όλα τα γεγονα τροχιών επάνω σε αυτό το ορθογώνιο: τα γεγονότα επιθυμούν να ανιχνεύσει. Πιο αναλυτικά, να στραφεί το ορθογώνιο στην προέλευση, μια πηγή ταχύτητας με το μέγεθος u είχε αρχική συντεταγμένη x ομοιόμορφο του $[-10u -300, 300-10u]$ και η y συντεταγμένη του $[-5, 5]$. Τέτοιες τροχιές εντοπίστηκαν στην πηγή στα 10μ και για το ορθογώνιο στα 600μ για συλλογή δεδομένων της 20ης δεκαετίας. Κατά συνέπεια, V_1 είναι μια πρισματική μερίδα του διαστήματος παραμέτρου, τα x , y και u , υπαγονται στα εξαρτώμενα διαστήματα, $[-10u-300, 300-10u]$, $[-5, 5]$ και $[10, 30]$, αντίστοιχα. Η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από τις παραμέτρους για τις μακροχρόνιες τροχιές της 20ης δεκαετίας διατομή ενός τετραγώνου, που κεντροθετείται για το ορθογώνιο, με πλευρές δύο μεγέθη μεγαλύτερα από την περιφέρεια επ'αυτού αποκλείοντας τις τροχιές της πρώτης θέσης. Θα μπορούσαμε να έχουμε επιλέξει αποτελεσματικά τις απείρως απόμακρες τροχιές που αποτελούν αυτή τη κατηγορία, και να παραγάγει ακτινοβολία υποβάθρου μόνο στο στοιχείο αρίθμησης, αλλά η επιλογή μας προσδοκά επικερδώς τις πραγματικές ασάφειες επειδή πηγές V_2 «κοντά» V_1 μίμουντε τα τελευταία. Για αυτές τις πηγές, που χρησιμοποιούν από 10^4 στα 10^5 σημεία για τον υπολογισμό του I_C 's συγκαλύπτει αποτελεσματικά τις διακυμάνσεις στις εκτιμήσεις TP και στα ποσοστά της TN. Ένας κατάλληλος αριθμός σημείων εμφανίστηκε να είναι κατά ένα μεγάλο μέρος εξαρτώμενος από τον αριθμό κόμβων, με $p=10^4$ κατάλληλο για τις προσομοιώσεις που περιλαμβάνουν δέκα κόμβους και $p=10^5$ για προσομοιώσεις που περιλαμβάνουν 100 κόμβους. Καθώς ο αριθμός των κόμβων αυξάνεται, μια μεγαλύτερη ποικιλία των τροχιών πρέπει να προσομοιωθεί για την αποτελεσματική οριοθέτηση των υπογραφών στα δεδομένα των τροχιών. Για το καθορισμό του αριθμού των κόμβων, δεν επηρεάζει τον αποτελεσματικό αριθμό επιλογής σημείων. Για την προώθηση κάποιας πληροφορίας σχετικά με αυτά τα βασικά συστατικά των υποδομών της μεθοδολογίας μας, παρέχουμε τα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις 100 περιστατικών και τυχαίες τροχιές με 32 τυχαία τοποθετημένους κόμβους και με $\alpha=10$ (δίδοντας ένα ανιχνεύσιμο σήμα). κυμαίνονταν μέχρι 320 000. ΣΧ. 1 απεικονίζει το μέσο όρο, πάνω από τροχιές, των

$$\frac{\log \left(\frac{I_1(p)}{I_2(p)} \right)}{\log \left(\frac{I_1(320\,000)}{I_2(320\,000)} \right)}$$

Οι "μισό-αριθμοί" για τη σύγκλιση είναι περίπου $p=100\,000$ και $p=20\,000$, για τα περιστατικά και τα μη περιστατικά τροχιών, αντίστοιχα, γεγονός που σημαίνει ότι για τα κύρια αποτελέσματα της προσομοίωσης μας, τα ποσοστά που εμφανίζονται στις $S=32$ ($p=32\,000$) στοιχεία του Πίνακα II, θα μπορούσε να φανερώσει τον υπόλοιπο θόρυβο. Οι μέσοι όροι των $\log I_1(32000)$ ήταν ανάλογη με 8.952,9 και 8.365,5, και οι μέσοι όροι των $\log I_2(32000)$ ήταν ανάλογη με 8.584,5 και 8.365,9, αντίστοιχα. [Υπενθυμίζουμε ότι (4) επέτρεψε παράλειψη των παραγοντικών από συντελεστές Poisson.] Έτσι, συνοπτικά, επειδή οι βασικοί τύποι, όπως (3), είναι γραμμικές στον αριθμό των κόμβων S , η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ανίχνευσης μας είναι περίπου S^2 .



ΣΧ. 1. Σύγκλιση του $\log (I_1/I_2)$. Τετμημένη: $1000 \leq p \leq 320\,000$.

Συντεταγμένη: $[(\log (I_1(p) = I_2(p)))/(\log (I_1(320000) = I_2(320000)))]$;

Ο μέσος όρος είναι πάνω από 100, ομοιόμορφα επιλεγμένες τροχιές. Η πάνω καμπύλη προέρχεται από τυχαίες τροχιές, η κάτω καμπύλη προέρχεται από περιστατικά τροχιών.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

Τιμές σωστού ποσοστού των (TP, TN) πηγών με πλάτος 0.1 μεσω 1000 και για 10, 32, 100, ή 320 κόμβους, ενιαία κατανέμημενους τυχαία. Για να διευκολυνθεί η σύγκριση, η ίδια διαμορφωση χρησιμοποιήθηκε για όλες τις προσομοιώσεις με τον ίδιο αριθμό κόμβων. Για μια δεδομένη διαμορφωση κομβων, 1000 διαφορετικές, ομοιόμορφα κατανεμημένες πορείες (κάθε κατηγορίας) προσομοιώθηκαν και το μέγιστο I_c 'S χρησιμοποιείται για να πρόβλεψη τη κατηγορία, χρησιμοποιώντας το Ξ'S των μεθοδων.

S	$a =$	0.1	.3125	1.0	3.125	10.0	31.25	100.0	312.5	1000.
10	TP	–	–	0.51	0.52	0.58	0.57	0.83	0.99	1.00
10	TN	–	–	0.53	0.71	0.82	0.89	0.96	1.00	1.00
32	TP	–	0.50	0.52	0.56	0.68	0.82	0.99	1.00	–
32	TN	–	0.50	0.50	0.72	0.89	0.98	1.00	1.00	–
100	TP	0.50	0.52	0.54	0.62	0.83	0.99	1.00	–	–
100	TN	0.50	0.50	0.50	0.72	0.96	1.00	1.00	–	–
320	TP	–	–	0.58	0.75	0.97	–	–	–	–
320	TN	–	–	0.50	0.78	1.00	–	–	–	–

Ο χρόνος εκτέλεσης για την κατάλληλη ανάλυση της αξίας 20 δευτερολέπτων δεδομένων προσομοίωσης για δέκα κόμβους, τα σημεία 10^4 δειγματοληψίας που υπολογίζουν I_1 και I_2 , ήταν περίπου 5 δευτερολεπτα σε έναν επεξεργαστή 2.2-Ghz.

ΙΙΙ. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

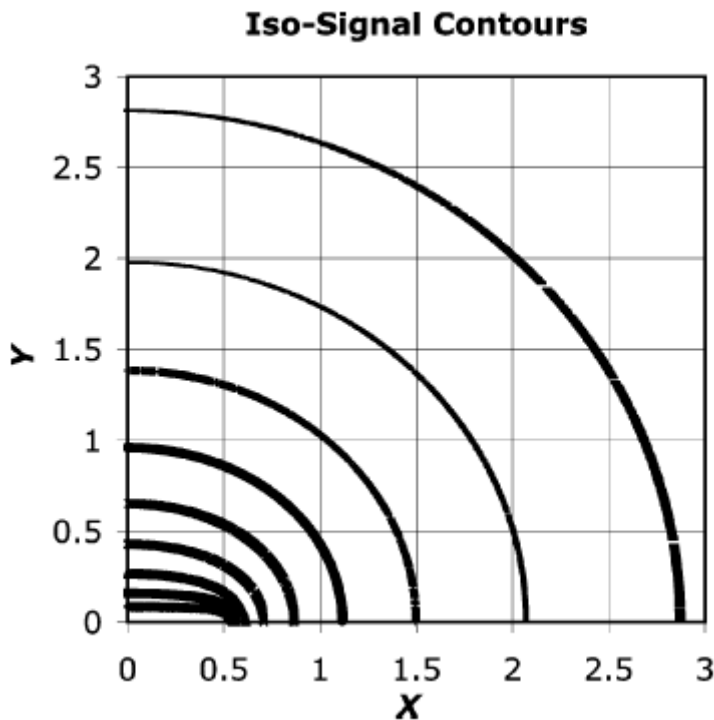
A. Περιοχή της επιτήρησης των μεμονωμένων αισθητήρων.

Το βασικό κίνητρο σε αυτό το χειρόγραφο είναι να αποκαλύψει τις εξαρτήσεις των δυνατοτήτων ανίχνευσης πηγής ραδιενέργειας ενός DSN με τη διαμόρφωση του κόμβου. Επομενως, για αρχη, ερευνούμε όλες τις δυνατότητες ανίχνευσης ενός μεμονωμένου αισθητήρα, απλουστευμένο στο χαρακτηρισμό της περιοχής που περιβάλλει την πηγή μέσα στο οποίο ένας στάσιμος αισθητήρας λαμβάνει ένα ανωτερο αποκοπης αναμενόμενο σήμα από μια σταθερή ραδιενεργό πηγή ταχύτητας: περιοχή

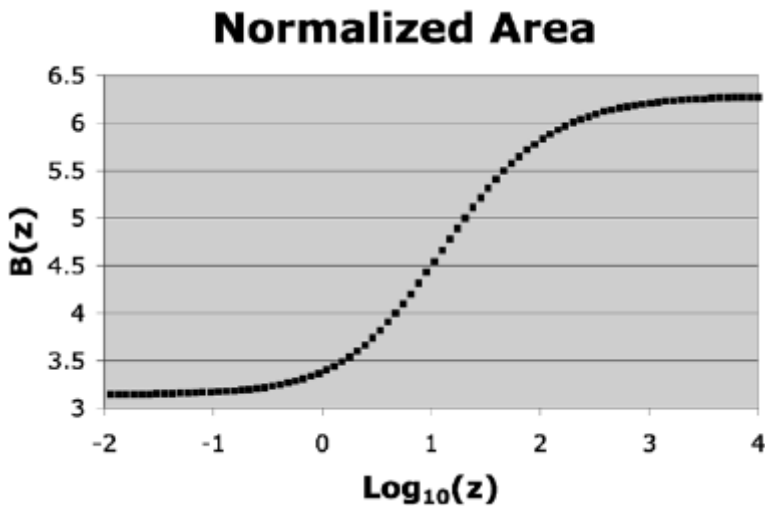
ανίχνευσης. Υποθέστε ότι οι κινήσεις της πηγής κατά μήκος του x -άξονα είναι με σταθερή ταχύτητα u , και διερχεται προέλευση στο μεσαίο σημείο ενός χρονικού διαστήματος μήκους ℓ , κατά τη διάρκεια του οποίου το σήμα συλλέγεται. Συμβολίζοντας ut με l και at με a , το αναμενόμενο σήμα σε έναν αισθητήρα που βρίσκεται (x,y) είναι ίσος με, από (1)

$$\frac{\alpha}{|y| \ell} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{x + \frac{\ell}{2}}{|y|} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x - \frac{\ell}{2}}{|y|} \right) \right\}. \quad (5)$$

ΣΧ. 2 Είναι ένα διάγραμμα περιγράμματος (5), με $l=1$, με επίκεντρο την προέλευση, και $a=1$, για $0 \leq x, y \leq 3$. ΣΧ. 2 πυξίδες η μεταβολή του



ΣΧ. 2. Περιγράμματα Iso-σήματος για μια κίνηση της πηγής. Ένα διάγραμμα περιγράμματος του (5), με $l=1$ και $a=1$ για $0 \leq x, y \leq 3$. Οι καμπύλες απεικονίζουν τόπους όπου (5) αξιολογεί έως 32 (κάτω αριστερά), 16, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, και 1/8 (επάνω δεξιά), αντιστοίχα.



ΣΧ. 3. $B(z)$. WOLOG $l=1$. Η ομαλοποιημένη περιοχή $B(\Gamma/\alpha)$ ($=A\Gamma/\alpha$) του τμήματος του επίπεδου xy όπου (5) υπερβαίνει Γ προσδιορίστηκε από τη Monte Carlo προσομοίωση για διάφορες τιμές του λόγου Γ/α . Λεπτομερώς, 10^8 ομοιόμορφα δείγματα επιλεχθηκαν στο πλαίσιο ενός ορθογωνίου του οποίου τα διαγώνια σημεία ήταν $(0,0)$ και $(\sqrt{\alpha/\Gamma} + 1/2, \sqrt{\alpha/\Gamma})$, επειδή τοποθετώντας τον αισθητήρα σε άλλο σημείο του πρώτου τεταρτημόριο θα αποδώσει μια τιμή (5) μικρότερη από Γ . Η αναλογία των σημείων για την οποία το αναμενόμενο σήμα υπερέβη Γ πολλαπλασιάστηκε από το χώρο αυτό ορθογώνιο, με τέσσερις και Γ/α για να δώσει τις αναφερθείσες τιμές για τη συνάρτηση $B(z)$; Δηλαδή (6). Η τετμημένη είναι η βάση λογάριθμος δέκα z ; $-2 < z < 4$. Η συντεταγμένη είναι $B(z)$; $\pi < B(z) < 2\pi$. Το σχήμα της περιοχής από περίπου γραμμική (κοντινο πεδίο) για να κύκλιο (μακρινό πεδίο). Τώρα σκεφτείτε το χώρο A του τομέα της ανίχνευσης: το τμήμα του (x,y) -επιπέδου έτσι ώστε το σήμα, δίνεται από την (5), υπερβαίνει την αποκοπή Γ . Κλιμάκωση εκτιμήσεις απόδοσης

$$A = \frac{\alpha}{\Gamma} B \left(\frac{\Gamma \ell^2}{\alpha} \right) \quad (6)$$

όπου $B(z)$ μπορεί να βρεθεί, για παράδειγμα, με προσδιορισμό της αντίστοιχης περιοχής μετά να καθορίζει αυθαίρετα l . Αφήνοντας $l=1$, οι περιοχές αυτές εκτιμήθηκαν από τη Monte Carlo ολοκλήρωση. $B(z)$ εμφανίζεται σε σχημα σιγμα στον ημιλογαριθμικό άξονα Σχήμα. 3. Σημειώστε ότι όταν $z < 10^{-2}$, $B(z)=\pi$, και όταν $10^4 < z$, $B(z)=2\pi$, οι οριακές περιπτώσεις είναι η προαναφερθείσα κυκλικές και γραμμικές τομείς, αντιστοίχως

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ

Τιμές σωστού ποσοστού των (TP, TN) πηγών με διαφορά πλατη χρησιμοποιώντας δεδομένα από 32 αισθητήρες. Για τις κορυφές γραμμών, ο αισθητήρας ισαπέχει και τοποθετείται κατά μήκος 600 μέτρα σε γωνίες ορθογωνίου. Για τις μεσες γραμμές, οι αισθητήρες ισαπέχουν με απόσταση $x=0$ και $-5 \leq y \leq 5$. Η κάτω γραμμές, αναπαράγονται από τον ΠΙΝΑΚΑ ΙΙ, αφορούν τυχαία τοποθέτηση των 32 αισθητήρων μέσα στο οδόστρωμα. 1.000 διαφορετικές, ομοιόμορφα κατανεμημένες τροχιές (κάθε κατηγορίας) προσομοιώθηκαν και το μέγιστο I_c χρησιμοποιήθηκε για την πρόβλεψη της κατηγορίας, όπως περιγράφεται στις μεθόδους.

$a =$	1	10	100
TP	0.50	0.52	0.70
TN	0.50	0.57	0.87
TP	0.52	0.72	0.81
TN	0.50	0.95	0.99
TP	0.52	0.68	0.99
TN	0.50	0.89	1.00

Συνοπτικά, ο τομέας της περιοχής ανίχνευσης, A , είναι ουσιαστικά, ανάλογος προς a/Γ . Λόγω της επιρροής του $B(z)$, ωστόσο, (με l σταθερό) το A μπορεί να μην ανταποκρίνεται στην αύξηση τόσο πολύ όπως το a/Γ , δίνοντας τις ικανότητες ανίχνευσης ενός ενιαίου αισθητήρα «λιγότερο γραμμικό» μέσα στο a/Γ .

B. Προσομοιώσεις DSN-Distributed Sensor Network, ανίχνευσης.

Πολλές από τις προσομοιώσεις αφορούν την τοποθέτηση DSN κόμβων ομοιόμορφα και τυχαία στα 10 m με 600 m στο εσωτερικό ενός ορθογώνιου μοντελοποίητη στο μέρος του δρόμου. Αναφέρουμε εκτιμήσεις για τα ποσοστά TP και του TN, υπενθυμίζοντας ότι τα πρώτα δείχνουν τη πιθανότητα που μια συναφή πηγή προκύπτει για να είναι συναφής και η τελευταία δηλώνει την πιθανότητα μιας τυχαίας πηγής να συμπεραίνεται ότι είναι τυχαία. Τα ποσοστά αυτά εμφανίζονται στους πίνακες I και II, και ο πίνακας III παρουσιάζει ανάλογα αποτελέσματα για την εναλλακτική τοποθέτηση κόμβων. Για την ερμηνεία αυτών των πινάκων, σημειώστε ότι κάθε 1 sec διάστημα συλλογής δεδομένων, ο αναμενόμενος αριθμός σήματος σε έναν ανιχνευτή με 1μ απόσταση από την πηγή a , με εξαίρεση τον Πίνακα I, στον οποίο ο ρυθμός υποβάθρου ήταν ίσος με 10 s^{-1} [3]. Σημειώστε, στον Πίνακα II, η μη μονοτονία των συντελεστών TP για $S=10$. Ενώ αυτό μπορεί εν μέρει να οφείλεται σε διακυμάνσεις στις προσομοιώσεις μας, είναι επίσης πιθανό ότι το υλοποιούνται κόμβο διαμόρφωση είναι εξίσου αποτελεσματική στην ανίχνευση των πηγών με $a=10$ ως πηγές με $a=31,25$ διότι η μη μονοτονία επέμεινε στην πιο εκτεταμένη προσομοίωση (τα δεδομένα δεν παρουσιάζονται). Στην περιοχή γύρω από την πάνω δεξιά γωνία του πίνακα II, μπορεί να

εχει παρατηρηθεί ότι η μείωση του α είναι από αμοιβαίες αυξήσεις του S . Σκεφτείτε, όμως, ότι $100=\alpha S$. Όπως το α μειώνεται ανα δέκα σε ενότητα, υπάρχει μια σταδιακή μείωση της TP και μια απότομη καμψη της TN . Προσεκτικότερη εξέταση των περιπτώσεων αυτών δίνεται στο πίνακα IV.

Ετσι, με $\alpha S=100$, μειώνοντας το α συνήθως οδηγεί σε μικρότερο "σήμα" ή μικρότερο "σήμα προς θόρυβο", το τελευταίο για τυχαίες πηγές, και ως εκ τούτου, φαίνεται ότι η αντίστοιχη τάση για τα ποσοστά ανίχνευσης, που εκτίθενται στον Πίνακα II, έχει ακριβεία. Τα φαινόμενα αυτά παρουσιάζονται στο συμπέρασμα.

Για να ξεκινήσει έρευνες σχετικά με τη πολυπλοκότητα του "χώρου διαστηματος" και τις υπολογιστικές απαιτήσεις της Bayesian μεθόδου, καθορίζουμε πόσα δείγμα σημεία απαιτούντε για τη σύγκλιση της TP και TN τιμής, περίπου μεσα σε 1% των ασυμπτωτικής τιμών, για τα σύνολα των διαδρομών των διαφόρων περιπλοκών και για τα δίκτυα με 10 κόμβους, δηλ., $S=10$. Για τα προηγούμενα διαστήματα παραμέτρου, ο αντίστοιχος $\rho=10^4$.

ΠΙΝΑΚΑΣ IV

Εδώ, $\alpha S=100$, ετσι οι αντίστοιχες τιμές του S είναι 100, 32 και 10. Με T να αντιπροσωπευει είτε το TP η το TN , το E_T δειχνει τον αντιστοιχο μεσο ορο του $(\log I_1 - \log I_2) / (\log I_1 + \log I_2)$ και σ_T είναι η αντίστοιχη τυπική απόκλιση.

$\alpha =$	1.0	3.125	10.0
E_{TP}	7×10^{-4}	5×10^{-4}	3×10^{-3}
σ_{TP}	1×10^{-2}	3×10^{-3}	2×10^{-2}
E_{TN}	-2×10^{-6}	-8×10^{-6}	-3×10^{-5}
σ_{TN}	3×10^{-6}	1×10^{-5}	4×10^{-5}

Τα απλουστευμένα διαστήματα ελήφθησαν με τη λήψη όλων των ταχυτήτων ισα με 20m/s (ο μέσος όρος στις προηγούμενες προσομοιώσεις). Συγκρίτικα η ακρίβεια των ποσοστών επιτεύχθηκε με $\rho=10^4$. Τα διαστήματα «Complexified» λήφθησαν δινοντας μη περιστατικές πηγές όπως χ και γ δύο συστατικά της ταχύτητας, με τα πρώτα όντας θετικά και με το μέγεθος της ταχύτητας διανεμημένης ομοιόμορφα μεταξύ 10 και 30m/s, όπως πριν. Οι συναντησεις με τα ανω και κατω σημεία (600μ) οδήγησαν σε ελαστικές συγκρούσεις: αντιστροφή γ -συστατικό της ταχύτητας. Οι μη περιστατικές πηγές κινουντε παράλληλα προς τον άξονα του οδοστρώματος, όπως πριν. Μόνο συγκρατημένα ένα μεγαλύτερο ρ απαιτήθηκε για την επίτευξη συγκρίσιμης ακρίβειας: $\rho=10^5$ αρκει για τη λήψη του συγκρίσιμου επιπέδου ακρίβειας. Για $\alpha=100$, στην τελευταία περίπτωση το αντίστοιχο ποσοστό TP ήταν 0,75. Ο πίνακας II δίνει 0,83 για την ανάλογη περίπτωση όπου η ταχύτητα είναι παράλληλη στον χ -άξονα. Για τα απλουστευμένα σύνολα με μόνο μία ταχύτητα, το αντίστοιχο ποσοστό TP ήταν 0,88. (Το αντίστοιχο ποσοστο TN ήταν ουσιαστικά ίδιο.) Προσομοιώνουμε επίσης τις εναλλακτικές διαμορφώσεις κόμβων, όλες με $S=32$. Μια από αυτές τις διαμορφώσεις είχε μια ομοιόμορφη τοποθέτηση των κόμβων της κατά μήκος μιας ορθογώνιας περιοχής. Η επέκταση αυτή έχει πρακτικά πλεονεκτήματά, η επέκταση μέσα στο οδόστρωμα αναμένει, περαιτέρω αναλυση. Η νέα διαμόρφωση χώριζε τους κόμβους σε ομοιόμορφα διαστήματα κατά μήκος του άξονα, στην εγκάρσια μορφη του οδόστρωματος-μια πύλη μεσαιου τμηματος όργανο ελέγχου. Πρέπει να σημειωθεί ότι ένα ποσοστό των τροχιών της V_1 δεν περάσε μέσω της πύλης, καθώς το διάστημα παραμέτρου δεν ήταν σχεδιασμένο και δοκιμασμενο για αυτες. Για ομοιόμορφα τα ποσοστά TP και TN

συγκρίνονται με τα ποσοστά που δίνονται στον πίνακα II, μια τυχαία τοποθέτηση με τον ίδιο αριθμό κόμβων μέσα σε ορθογώνια περιοχή. Για ευκολία, αυτά τα ποσοστά δίνονται στον πίνακα III. Τέλος, μελετήσαμε τις επιδράσεις με την αλλαγή ποσοστού στο υποβάθρο. Οι προσομοιώσεις αυτές είχαν 32 αισθητήρες, τυχαία τοποθετημένες στο οδόστρωμα. Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα I. Φαίνεται ότι το S πρέπει να υπερβαίνει τους 32 αισθητήρες προκειμένου να μειώσει τη μόχλευση στο b , όταν το a είναι μικρό.

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Με βάση τα αποτελέσματά μας, η εφαρμογή της Bayesian μεθόδου στους αισθητήρες δικτύων μπορεί να είναι αποδοτική. Επιπλέον, ανάλογα με τα φαινόμενα που παρατηρούνται, όπως το να μην επεκτείνεται η απόδοση, θα πρέπει να εμφανιστεί κάπου αλλού.

Η προσομοίωση είναι αποτελεσματική για τις τοποθετήσεις τυχαίων κόμβων [δλδ πίνακας III]. Για παράδειγμα, κάποιος εύκολα μπορεί να ανιχνεύσει πηγή εύρους $31.25s^{-1}$, που κινείται με σταθερή ταχύτητα από 10 ως $30ms^{-1}$, όταν το επίπεδο είναι ίσο με $10s^{-1}$, χρησιμοποιώντας 100 αισθητήρες τυχαία τοποθετημένους σε ένα τμήμα $6.000m^2$ του επιπέδου. Η τοποθέτηση αυτή ήταν πολύ λιγότερο αποδοτική.

Για να απεικονίσουμε τις επιπτώσεις των αποτελεσμάτων μας στην απαγόρευση, εξετάζουμε, για παράδειγμα, μια μονάδα τηλεθεραπείας που χρησιμοποιείται για τη θεραπεία του καρκίνου, όπως το Theratron Equinox με πλήρες συμπλήρωμα από κοβάλτιο -60. Με την εμφυτη θωράκιση του και στην κλειστή λειτουργία του, η ακτινοβολία, σε απόσταση 1m, δεν είναι περισσότερο από $2mrem$ ($0.2 SV$)/min. Το τελευταίο είναι περίπου 60 φορές το επίπεδο [$300mrem$ ($30 SV$) το/yr], και οι κινητές πηγές που εκπέμπουν τέτοια σήματα πρέπει να είναι ανιχνεύσιμες από 10 κόμβους οδόστρωματος DSN, βάση προσομοιώσεις με $a=312,5$ και με υπόβαθρο $10s^{-1}$ [δλδ πίνακας II], είναι το θέμα για τις ακόλουθες προειδοποιήσεις. Η αύξηση του αριθμού των κόμβων θα μπορούσε να είναι κατάλληλη για άλλα υπάρχοντα ποσοστά (βλ. πίνακα I). Επιπλέον, το σήμα θα μπορούσε να είναι ασθενέστερο από μια πηγή στο επίπεδο από τα ήδη υπάρχοντα πρότυπα - σε οδικό δίκτυο. Οι επιδράσεις της ουσιαστικής μείωσης της προηγούμενης πιθανότητας για τη συχνότητα θα πρέπει να είναι μέτρια, καθώς αυτό αποτελεί χαρακτηριστικό της Bayesian μεθόδου. Άλλες διαμορφώσεις, όπως η διαμορφωση πύλης-όπως Πίνακας III, θα μπορούσε να είναι εξίσου πλεονεκτική για την εφαρμογή αυτή.

Από (6), με μια πρώτη προσέγγιση, η περιοχή κάτω από την επιτήρηση ενός αισθητήρα είναι ανάλογη με όλα τα άλλα σταθερά [δλδ (6)], και η μέση συνολική περιοχή υπό την επιτήρηση του DSN είναι περίπου

ανάλογη ως προς aS . Από το Πίνακα II, διαπιστώνουμε εμπειρικά ότι για $\sqrt{S/a} \lesssim 6$ τα ποσοστά ανίχνευσης εξαρτώνται κατά κύριο λόγο μόνο από aS , όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει από τις αντίστοιχες διαγωνίες του πίνακα II, αλλά κατά τα άλλα, αποκλίνουν από αυτή την απλή εξάρτηση (βλ. [5]). Θα μπορούσε κανείς να προσπαθήσει να αιτιολογήσει τα τελευταία φαινόμενα με το a -εξαρτώμενο "morphing" των τομέων ανίχνευσης αισθητήρα, που απεικονίζεται στο ΣΧ. 2.

Εξετάστε, για παράδειγμα, (6) με $a=10$ και $S=10$ έναντι $a=1$ και $S=100$. Με $t=1$, $a=1$ και $\Gamma = 10 \sim b$ και $l = 20$ m (μέση τιμή), από (6), στην περιοχή Α "σύμφωνα με την επιτήρηση" από κάθε αισθητήρα είναι περίπου $6/10m^2$ ($z = \Gamma l^2 / a = 4000$). Και στις δύο περιπτώσεις, το λιγότερο από 1% του εμβαδού της περιοχής συχνότητας είναι υπό παρακολούθηση από έναν αισθητήρα, και το λιγότερο για 0,01% από

περισσότερους αισθητήρες, υπονοώντας ότι η "επιφανειακές προβλέψεις" για έναν αισθητήρα θα πρέπει να επεκταθούν το δίκτυο. Επιπλέον, 100 αισθητήρες με $a=1$ θα πρέπει να έχουν από κοινού μεγαλύτερη επιτήρηση από 10 αισθητήρες με $a=10$. Επομένως, το πρώτο δίκτυο αισθητήρων θα πρέπει να αυξηθεί αντίστοιχα με το TP ποσοστό, σε αντίθεση με τα αποτελέσματά μας.

Η προσφυγή μας είναι στοχαστική. Κοντά στο όριο ανίχνευσης, τα τελευταία φαινόμενα πρέπει να αντικατοπτρίζουν την πιθανότητα εμφάνισης δεδομένων που μιμούνται της πηγής. Προσοχή μπορεί να επικεντρωθεί σε σήμα που υπάρχει στο παρασκήνιο, καθώς αυτό βρίσκεται υπο ανίχνευση. Το μειώνουμε και αφήνουμε $S \propto a^{-1}$.

Παρά το γεγονός ότι ο αναμενόμενος αριθμός των αισθητήρων που λαμβάνουν ένα παραπάνω σήμα αποκοπής παραμένει ο ίδιος, ο αριθμός των «άλλων γραμμών» αισθητήρων -που μόνο λάμβανουν- θα αυξηθεί $\propto a^{-1}$. Το συμπέρασμα είναι ότι για μια αποτελεσματική αποκοπή στην ανίχνευση, με βάση την Gaussian στατιστική, πρέπει να τεθεί σε μείωση $\propto \sqrt{\log S}$.

Αν και αυτή η εξάρτηση είναι αδυναμική, εντούτοις θα αρκούσε, σε εύρος $10 \leq S \leq 320$, για τη σωστή οργάνωση των αποκλίσεων που παρατηρήθηκαν από την aS -εξάρτηση. Η υπόθεση αυτή φανερώνει την πρόβλεψη ότι, για όλες τις τιμές των aS , οι μειώσεις του a , σε τελική ανάλυση, δεν αποκατάσσουν την αντίστοιχη αύξηση της τιμής S . Τα δεδομένα μας δεν είναι αρκετά εκτεταμένα για να διάκρινουν μεταξύ της προηγούμενης χρησιμοποιημένης \sqrt{S} εξάρτησης και $\sqrt{\log S}$ εξάρτησης. Θα ήταν χρήσιμο να αποσαφηνίσει η κατάσταση και, ως εκ τούτου, να είναι σε θέση να προβλέψει ανάλογη συμπεριφορά για πιο περίπλοκα σύμπαντα τροχιών. Η μη κλιμάκωση θα είναι πολύ πιο εμφανής σε δίκτυα αισθητήρων εκτεταμένα με τρεις διαστάσεις.

Οι υπολογιστικές απαιτήσεις των Bayesian μεθόδων έχουν αποδειχθεί ότι είναι σημαντικές αλλά όχι απαγορευτικές. Σε αντίθεση με την εκτίμηση των παραμέτρων μιας ραδιενεργού πηγής, για τις οποίες οι κλίμακες χρόνου εκτέλεσης εκθετικά στον αριθμό των παραμέτρων [3], για την ανίχνευση, είναι ένα οφέλος όπου η ρεαλιστική πηγή παράμετρος χώρου φαίνεται να είναι επιδεκτική στις Bayesian μεθόδους διότι τα πραγματικά προβλήματα συνεπάγονται μεγαλύτερη πολυπλοκότητα από το πρότυπο εδώ. Η δυσκολία που υπάρχει μέσα στην ανίχνευση φαίνεται να αυξάνει αυτήν την πολυπλοκότητα [5] -αυτό είναι ένα θέμα που αξίζει περαιτέρω θεωρητική έρευνα. Για μια σχετικά απλή παράμετρο του χώρου μας, σε πέντε CPU δευτερόλεπτα, αναλύθηκαν 20 δευτερόλεπτα (με 20 χρόνια διαστήματα) δεδομένων από δέκα κόμβους, με αμελητέες απαιτήσεις μνήμης. Κατά συνέπεια, για τα μέτρια, θα απαιτείται ελάχιστη βελτιώσης για την εφαρμογή τους σχετικά με τους βασικούς επεξεργαστές που συνήθως αναγνωρίζονται σε κόμβους DSN, προκειμένου να επιτευχθεί η Bayesian ανίχνευση σε πραγματικό χρόνο. Για παράδειγμα, πρόσφατες μέθοδοι Monte Carlo προσφέρουν συγκρίσιμες ακρίβειες της ολοκλήρωσης με μειωμένη υπολογιστική πολυπλοκότητα [3], [14].

Παρά το γεγονός ότι αρκούσε να αντιμετωπίσουμε πολλά θέματα εμπειρικά εδώ, παραμένουν πρόσθετες προκλήσεις για θεωρητικές μελέτες. Θα ήταν χρήσιμο, για παράδειγμα, η προβλέψη της "διακυμάνσεις στην ταξινόμηση" συναρτησης της έκτασης της δειγματοληψίας μιας παραμέτρου στο χώρο: συναφής προβλέψεις με στατιστικές ιδιότητες των εκτιμήσεων για I_1/I_2 [δηλαδή Σχ. 1]. Ένας πιο φιλόδοξος στόχος θα ήταν μια ασυμπτωτική ανώτατου όριου στην Bayesian μεθοδολογία σε αποτελεσματικό χρόνο εκτέλεσης, που εφαρμόζεται όταν ο αριθμός των κόμβων αυξάνεται επ'αόριστον: προβολή που παρατηρήθηκε έδειξε περίπου τετραγωνική εξάρτηση με τον αριθμό των κόμβων.

Στην πράξη, τα στοιχεία των κόμβων δεν είναι περισσότερα από το θόρυβο, και, για την απόδοση, θα πρέπει να αναζητήσουμε τρόπους για να ανακαλύπτουν προσαρμοστικά κερδοφόρα υποσύνολα κόμβων για το Bayesian υπολογισμό. Η αλυσίδα του Markov Monte Carlo θα μπορούσε να είναι χρήσιμη για την

κατασκευή υποσύνολων σταθερού μεγέθους που μεγιστοποιούν τα $\Pr(\text{data})$ και η ανίχνευση θα μπορούσε να βασίζεται στο μέσο όρο της μέγιστης πιθανότητας. Αυτή η προσέγγιση θα μπορούσε, περιορίζοντας το θόρυβο, να βελτιώσει τα ποσοστά ανίχνευσης που βασίζονται στην ανάλυση των δεδομένων από όλους τους κόμβους, όπως επιδιώκεται εδώ-χωρίς σημαντική υποβάθμιση στα ποσοστά ανίχνευσης. Το προηγούμενο υπάρχει στην αποτελεσματική ανίχνευση πηγών με τις γνωστές τροχιές [3].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΟΥ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Το αναμενόμενο στιγμιαίο ποσοστό απόκτησης σήματων υποτίθεται να είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης από το τετράγωνο της πηγής, δηλαδή, η ανίχνευση υποτίθεται ότι είναι ισότροπική[3]. Στη συνέχεια, όταν η σχετική ταχύτητα μεταξύ της πηγής και του κόμβου είναι σταθερή, το ακόλουθο ολοκλήρωμα, πολλαπλασιαζόμενο με το πλάτος της πηγής (με διαστάσεις m^2s^{-1}) ισούται με το αναμενόμενο σήμα (ο αναμενόμενος αριθμός των μετρήσεων σήματος) συλλέγονται από έναν αισθητήρα από φορές 0 και $t(>0)$:

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}; t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \frac{dt'}{(\mathbf{v}t' + \mathbf{u})^2} = \int_0^t \frac{dt'}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})t'^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})t' + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

όπου \mathbf{u} δείχνει τη διαφορά συντεταγμένων μεταξύ πηγής και αισθητήρων, κατά το χρόνο 0, και με \mathbf{v} δηλώνει τη διαφορά μεταξύ ταχύτητας πηγής και αισθητήρα (υποτίθεται σταθερή μεταξύ 0 και t).

Εδώ, $\mathbf{u} \neq 0$ (επειδή, διαφορετικά, το ολοκλήρωμα είναι άπειρο).

Δύο περιπτώσεις παρουσιάζονται:

i) $\|\mathbf{v}\|=0$ (με $\|\mathbf{v}\|$ να δηλώνει τον Ευκλείδειο κανονα \mathbf{v}) και ii) διαφορετικά.

i) $I(\mathbf{u}, \mathbf{v}; t) = t/\|\mathbf{u}\|^2$.

ia) Όπου, αν $\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$, δλδ $\mathbf{u} = \gamma \mathbf{v}$ με $\gamma \neq 0$,

τότε

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}; t) = \begin{cases} \infty \\ \frac{t}{(\gamma(t+\gamma)\|\mathbf{v}\|^2)}, \end{cases}$$

αλλιώς $-t \leq \gamma \leq 0$.

ii.b) Εναλλακτικά, δηλ., $\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \neq (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$,

«ολοκληρώνοντας τις τετραγωνικές» αποδίδει άμεσα

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}; t) = \beta (\tan^{-1} \{ \beta (\|\mathbf{v}\|^2 t + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})) \} - \tan^{-1} \{ \beta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \}) \quad (7)$$

οπου το ευρος είναι $[-\pi/2, \pi/2]$ και οπου

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}}$$

με $\beta > 0$. Εδώ, (7), είναι η περίπτωση που μας ενδιαφέρει.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα όρια ανίχνευσης ενός δικτύου αισθητήρων για κινούμενες ραδιενεργές πηγές προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας Bayesian μεθόδους σε συνδυασμό με τη προσομοίωση σε υπολογιστή. Οι μελέτες αυτές έχουν σημειακές πηγές που κινούνται με σταθερή ταχύτητα, όπως ένα όχημα μεταφοράς σε ίσιο δρόμο. Για τα δίκτυα που περιλαμβάνουν δέκα κόμβους, οι αντίστοιχες Bayesian μέθοδοι είναι εκτελέσιμες σε πραγματικό χρόνο. Εμείς μελετάμε τις αυξανόμενες υπολογιστικές απαιτήσεις που υφίστανται οι μεγαλύτεροι αριθμοί κόμβων και οι παράμετροι της τροχιάς μιας πηγής. Η πολυπλοκότητα μεγαλώνει ανάλογα με το τετράγωνο του αριθμού των κόμβων όπως, και οι πολυάριθμες παράμετροι τροχιάς που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Ερευνήσαμε τις συνέπειες των διαφορετικών επιπέδων ακτινοβολίας που υπάρχει στο υπόβαθρο (περιβάλλον). Οι προσομοιώσεις αποδεικνύονται χρήσιμες στην αξιολόγηση υποψηφίων σχεδιαγραμμάτων κόμβων. Μελετήσαμε τις ικανότητες ανίχνευσης των μεμονωμένων αισθητήρων και την επεκτασιμότητα της ανίχνευσης με τη πυκνότητα αισθητήρων κοντά το όριο ανίχνευσης, που αυξάνει τον αριθμό αισθητήρων και μπορεί να αυξήσει αναλογικά την ευαισθησία δικτύων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Καλύπτονται έννοιες:

- Διαδικασίες Poisson.
- Ενταση διαδικασίας σημείου-Point processe.
- Κέντρο συντήξης-Fusion center.
- Ουρες Poisson.
- Πυρηνική ανίχνευση.
- Background intensity.
- Πιθανότητα ψευδούς συναγερού (PFA).

Λήψη Αποφάσεων στα Δίκτυα Αισθητήρων Παρατηρώντας τις διαδικασίες Poisson

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

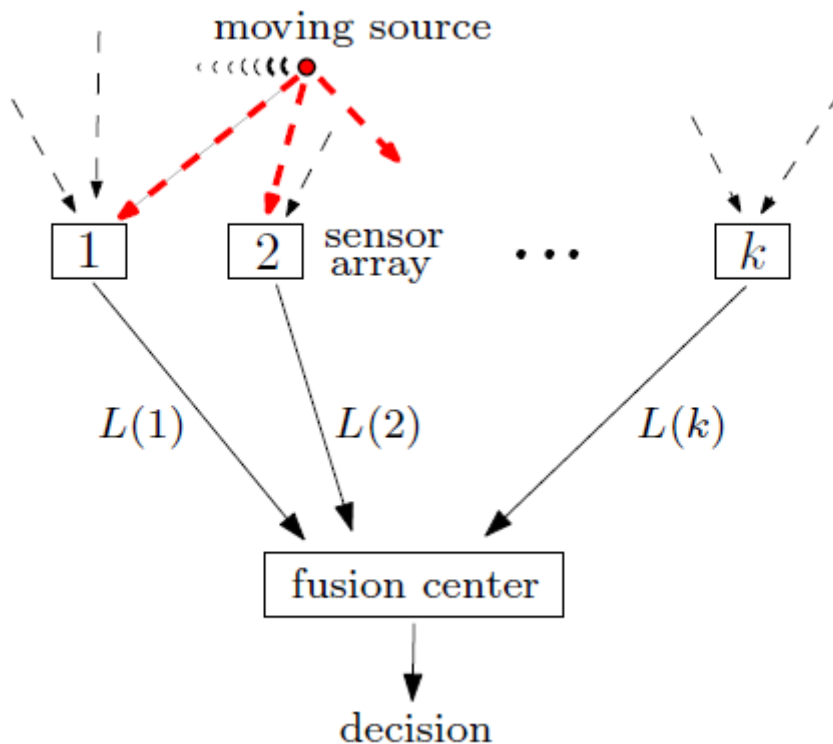
Σε εφαρμογές όπου κάποιος ενδιαφέρεται για να μετρήσει τη φυσική διαδικασία η οποία ποικίλει χωρικά και προσωρινά, η χρήση ενός δικτύου αισθητήρων προσφέρει πλεονεκτήματα σε σχέση με λύσεις μονών συσκευών. Δίκτυα αισθητήρων, κινητά και σταθερά, έχουν αναπτυχθεί για μια ευρεία ποικιλία εφαρμογών από περιβαλλοντολογική παρακολούθηση, ανυχνεύση παρεμβολών, περιοχή καλυψής και εντοπισμός πηγής στη χαρτογράφηση φυσικών ποσοτήτων χωρικά κατανομημένων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι ενδιαφερομένες φυσικές ποσότητες δημιουργούνται από τυχαίες διαδικασίες που χαρακτηρίζονται από γεγονότα που κυρίως εντοπίζονται στο χώρο και στο χρόνο. Παραδείγματα που περιλαμβάνουν πελάτες προς και από εγκαταστάσεις υπηρεσιών στην θεωρία της ουράς, είναι μια ηλεκτρονική εκπομπή από έναν φωτοανιχνευτή σε οπτικό τηλεπικοινωνιακό σύστημα, η δημιουργία ηλεκτρικών παλμών-νευρώνια, και η πυρηνική μέτρηση. Το μαθηματικό πλαίσιο για τη μοντελοποίηση και ανάλυση αυτών των τυχαίων διακριτών διαδικασιών παρέχεται από τη θεωρία των διαδικασιών σημείου (point processes). Μια πραγματοποίηση μιας διαδικασίας σημείου είναι μια τυχαία ακολουθία σημείων, με το κάθε σημείο να απεικονίζει τη χρονική και χωρική περιοχή ενός γεγονότος. Ο ρυθμός με τον οποίο προκύπτουν τα γεγονότα ονομάζεται η ένταση της διαδικασίας σημείου. Εάν κάποιος γνωρίζει εκ των προτέρων ότι η ένταση της διαδικασίας σημείου ανήκει σε ένα σετ πολλών πεπερασμένων εναλλακτικών, πώς μπορούν οι τοπικές πληροφορίες που συγκεντρώθηκαν σε ατομικούς ανιχνευτές να επεξεργαστούν και να επικοινωνήσουν για την επίτευξη μιας παγκόσμιας απόφασης. Στο πλαίσιο ανίχνευσης παράνομου ραδιενεργού υλικού, τέτοιες ερωτήσεις είναι υψίστης σημασίας για την εθνική ασφάλεια και διάδοση των πυρηνικών όπλων. Από την ανίχνευση (θωρακισμένου) πυρηνικού υλικού κατά τη μεταφορά, είναι πολύ δύσκολο, η επιλογή της ανάπτυξης δικτύων των ανιχνευτών ακτινοβολίας προτείνεται σε μια προσπάθεια να βελτιωθεί η αποτελεσματικότητα του συστήματος παρακολούθησης. Κλασικές προσεγγίσεις με βάση το δίκτυο λήψης περιλαμβάνει αισθητήρες μετεγκατάστασης το σύνολο των παρατηρήσεών τους σε μια κεντρική μονάδα επεξεργασίας, η οποία αναλύει τα δεδομένα και εκδίδει μια παγκόσμια απόφαση. Ενώ αυτή η συγκεντρωτική προσέγγιση έχει το πλεονέκτημα της χρήσης όλης της διαθέσιμης πληροφορίας, επιβάλλοντας σημαντική έξοδο επικοινωνίας. Εναλλακτικά, ένα αποκεντρωμένο ή κατανομημένο σύστημα λήψης αποφάσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί, σε αυτή τη ρύθμιση των πληροφοριών μέτρησης αισθητήρων επεξεργάζονται και διαβιβάζουν μια συμπιεσμένη έκδοση του - τυπικά υπό τη μορφή ενός μηνύματος με τιμές σε ένα πεπερασμένο αλφάβητο - σε ένα κέντρο συγχώνευσης, η οποία στη συνέχεια παρέχει μια απόφαση. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση του σημείου διαδικασιών, το πρόβλημα της λήψης αποφάσεων μεταξύ δύο εναλλακτικών υποθέσεων ("όλα σαφής" έναντι "συναγερμού") έχει αντιμετωπιστεί. Η κύρια ιδέα στην οποία βασίζεται η λύση περιλαμβάνει τον υπολογισμό της σωστής "αναλογίας πιθανότητας" και συγκρίνοντας κατά ένα κατώτατο όριο. Η μορφή του λόγου πιθανότητας για μια αρκετά μεγάλη κατηγορία του σημείου

διαδικασιών προσδιορίζεται. Στο συγκεκριμένο πλαίσιο των δικτύων ανίχνευσης ακτινοβολίας, σχετικές εργασίες βασίζονται με τις προσαρμογές της δοκιμής του λόγου πιθανοτήτων (LRT), χρησιμοποιώντας είτε διαδοχική ή ορισμένου διαστήματος θεωρία των δοκιμών και Bayesian ή Neyman-Pearson προσεγγίσεις. Με κάποια εξαίρεση, παρατηρήσεις αισθητήρων έχουν δείξει ότι είναι ανεξάρτητα ταυτόσημα κατανεμημένες (iid). Στην περίπτωση όπου υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ της πηγής και των αισθητήρων, όπως σε αυτό το έργο, επεξεργάζεται το σημείο περιγράφει την άφιξη των ακτίνων στους ανιχνευτές όπου είναι ο χρόνος ανομοιογένειας. Αυτό το έγγραφο αναπτύσσει μια βέλτιστη απόφαση κάνοντας σύστημα για τέτοιες χρονικές διαδικασίες με ανομοιογενές σημείο, υποθέτοντας ότι η κίνηση της πηγής είναι ύποπτα αποτρεπτική και γνωστή. Στη ρύθμιση μας, οι αισθητήρες επικοινωνούν με την επεξεργασία πληροφοριών υπό τη μορφή των τοπικά-αξονικό λόγο πιθανότητας στο κέντρο της σύντηξης. Το κέντρο της σύντηξης, στη συνέχεια, συνδυάζει αυτά τα μηνύματα για να καταλήξουμε σε μια απόφαση, χωρίς τυχόν ανάγκη για πρόσθετες πληροφορίες όπως η θέση ή τα ανεπεξέργαστα δεδομένα των επιμέρους αισθητήρων. Σε σχέση με την πλειοψηφία τους οι υπάρχουσες προσεγγίσεις που περιλαμβάνουν τη μετάδοση είτε από ωμά δεδομένα ή (εξαιρετικά συμπιεσμένο) από δυαδικές αποφάσεις για το κέντρο συγχώνευσης, η μέθοδός μας συνδυάζει την αποκεντρωμένη επεξεργασία με συγκεντρωτική διαδικασία λήψης αποφάσεων. Η δομή της ερευνάς είναι ως ακολούθως. Τμήμα II στα κράτη το πρόβλημα θεωρείται επίσημα. Τμήμα III η στρατηγική απόφαση κατασκευάζει και καθορίζει ως βέλτιστο το πλαίσιο της Neyman-Pearson προσεγγίσεις. Τμήμα IV απεικονίζει πώς τα όρια κατωφλίου για την εξέταση του λόγου πιθανοτήτων μπορεί να είναι σύμφωνα με συντηρητικές εκτιμήσεις, και τα αποτελέσματα αυτά εφαρμόζονται σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα πυρηνικής ανίχνευσης στο τμήμα V. Το τμήμα VI ολοκληρώνει την ερευνα.

II. ΔΗΛΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Εξετάστε μια συλλογή των αισθητήρων παρατηρώντας μια διαδικασία σημείου που παραγεται από

κάποιο φυσικό φαινόμενο. Ο στόχος είναι να αποφασίστε μεταξύ δύο υποθέσεων σχετικά με την κατάσταση του περιβάλλοντος. Για αυτόν τον λόγο, κάθε αισθητήρας επικοινωνεί με επεξεργασμένη έκδοση των παρατηρήσεών του σε ένα κέντρο σύντηξης, ο οποίος συνδυάζει όλα τα λαμβανόμενα μηνύματα σε μια δυαδική απόφαση (Εικ. 1). Η απόφαση πρέπει να ληφθεί μέσα σε ένα σταθερό χρονικό διάστημα.



Σχ.1. Η γενική αρχιτεκτονική του σχεδίου ανίχνευσης. Υπάρχει ένα δίκτυο από αισθητήρες όπου ο κάθε ένας μετρά το συνολικό αριθμό των ακτίνων που έχουν φθάσει σε αυτούς. Τα παχιά βέλη αντιπροσωπεύουν τις ακτίνες που εκπέμπονται από μια κινούμενη ραδιενεργό πηγή και οι λεπτές ακτίνες βελών από την ακτινοβολία υποβάθρου. Με βάση τον αριθμό και το συγχρονισμός της άφιξης εκείνων των αριθμήσεων, κάθε αισθητήρας υπολογίζει μια πιθανότητα αναλογία $L(i)$ που διαβιβάζεται έπειτα σε ένα κέντρο συντήξης. Το κέντρο συντήξης συνδυάζει αυτές τις πληροφορίες για να λάβει μια απόφαση σχετικά με την παρουσία ραδιενέργειας στο στόχο που κινείται μπροστά από τους αισθητήρες.

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως μια δυαδική δοκιμή υπόθεσης με βάση τις μετρήσεις από μια σειρά αισθητήρων K που συνδέονται σε μια παράλληλη δικτυακή αρχιτεκτονική, όπως φαίνεται στο σχημα1. Ας H_0 και H_1 δηλώνουν τις δύο υποθέσεις σχετικά με την κατάσταση του περιβάλλοντος, παραδείγματος χάριν, η απουσία ή η παρουσία του α ραδιενεργός πηγή για τον κινούμενο στόχο.

Υπόθεση1: Η ανάγνωση στον αισθητήρα i , όπου $1 \leq i \leq k$, είναι ένα μη μειωμένο Z^+ εκτιμημένο τμηματικά σταθερό, συνεχόμενα σωστή λειτουργία, η οποία αυξάνει σε βήματα του ενός μεγέθους.

Υπόθεση2: Ρυθμισμένος στην υπόθεση H_j , $j \in \{0,1\}$, οι παρατηρήσεις σε διαφορετικούς αισθητήρες είναι ανεξάρτητες. Οι παρατηρήσεις αισθητήρων διαμορφώνεται ως ανομοιογενή Poisson διεργασίες, των οποίων οι εντάσεις είναι αιτιοκρατικές λειτουργίες του χρόνου. Ειδικότερα, για $1 \leq i \leq k$, ο αισθητήρας i παρατηρεί μια διαδικασία Poisson, της οποίας ο χρόνος που εξαρτάται από την ένταση κάτω H_0 είναι b_i

(·), ενώ σύμφωνα με H_1 είναι $b_i(\cdot) + R_i(\cdot)$. Η ρητή εξάρτηση των εντάσεων στην ώρα προκύπτει εγκαίρως από γνωστή κίνηση του στόχου, η οποία είναι μια πιθανή «πηγή» του σημείου διαδικασίας με την ένταση R_i .

Το πρόβλημα ανίχνευσης μπορεί τώρα να συνοψιστεί ως εξής: Υποθέστε ότι $T > 0$ είναι ο χρόνος απόφασης, δηλαδή, ο χρόνος κατά τον οποίο πρέπει να ληφθεί μια απόφαση. Με δεδομένη την ενιαία υλοποίηση του k -διαστάσεων διάνυσμα Poisson διαδικασιών κατά τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα $[0, T]$ (τα στοιχεία k που αντιστοιχούν σε k αισθητήρες), αποφασίζει κατά πόσον οι εντάσεις δίνονται από το b_i συλλογή ή από την συλλογή $b_i + R_i(\cdot)$, $1 \leq i \leq k$. Ως κλίμακα το φυσικό χρόνο $t \in [0, T]$, με την εισαγωγή ενός ανακλιμακωμένου χρόνου παράμετρου $t \in [0, 1]$, η οποία ορίζεται από

$$t \triangleq \frac{\tau}{T} . \quad (1)$$

Υπάρχουν μερικά αναλυτικά οφέλη στην εργασία με αδιάστατο χρόνο t . Οι εντάσεις των αντίστοιχων διαδικασιών Poisson πρέπει επίσης να είναι ως προς το t . Για $1 \leq i \leq k$, η ένταση στον αισθητήρα i σε χρόνο $t \in [0, 1]$ υπό το H_0 γίνεται $T\beta_i(t)$ (βλέπε προσάρτημα) και στο πλαίσιο H_1 καθίσταται $T(\beta_i(t) + \nu_i(t))$, όπου

$$\beta_i(t) \triangleq b_i(T \cdot t) \text{ and } \nu_i(t) \triangleq R_i(T \cdot t) . \quad (2)$$

Όπως ορίζεται, οι λειτουργίες β_i και ν_i εξαρτώνται από το χρόνο λήψης T , έτσι για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό ρίχνουμε αυτήν την εξάρτηση.

Τέλος, οι ακόλουθες υποθέσεις θα επιβληθούν στην β_i και ν_i .

Υπόθεση 3: Για $1 \leq i \leq K$, $\beta_i: [0, 1] \rightarrow [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ είναι μια οριακή, συνεχής λειτουργία με $0 < \beta_{\min} < \beta_{\max} < \infty$, $\beta_{\min}, \beta_{\max}$ ανεξάρτητος του $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Υπόθεση 4: Για $1 \leq i \leq k$, $\nu_i: [0, 1] \rightarrow [V_{\min}, V_{\max}]$ είναι μια οριακή, συνεχής λειτουργία με $0 < V_{\min} < V_{\max} < \infty$, V_{\min}, V_{\max} ανεξάρτητος του $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

III ΚΥΡΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Αρχίζουμε με ένα μετρήσιμο διάστημα (Ω, \mathcal{F}) υποστήριζοντας ένα K -διαστάσεων διάνυσμα του υπολογισμού επεξεργάζεται $N_t = (N_t(1), \dots, N_t(K))$, $T \in [0, 1]$. Ο χώρος του δείγματος είναι η σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων, από ένα τυχαίο πείραμα και \mathcal{F} είναι η α -πεδίου (ή β -άλγεβρα) των γεγονότων. Διαισθητικά, $N_t(i)$ είναι ο αριθμός των εγγεγραμμένων στον αισθητήρα όπου $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ έως (και συμπεριλαμβανομένη) τη χρονική στιγμή $t \in [0, 1]$. Υποθέσεις H_0 και H_1 αντιστοιχούν στα μέτρα

πιθανότητας P_0 και P_1 για (Ω, \mathcal{F}) , σε σχέση με την οποία το $N_{t(i)}$, $1 \leq i \leq k$, είναι ανεξάρτητο Poisson επεξεργάζεται με εντάσεις $T\beta_{i(t)}$ και $T(\beta_{i(t)} + V_{i(t)})$, αντιστοίχως. Το πρόβλημα της απόφασης είναι έτσι από τον εντοπισμο του σωστού μέτρου πιθανότητας (P_0 έναντι P_1) σε (Ω, \mathcal{F}) , με βάση την υλοποίηση της k -διαστάσεων διαδικασία $N_t = (N_t(1), \dots, N_t(k))$.

Εμείς θα παρακολουθούμε τη ροή των πληροφοριών με τη χρήση $(\mathcal{F}_t^N : 0 \leq t \leq 1)$ που παράγεται από τη διαδικασία N_t . Για κάθε περίπτωση, $A \in \mathcal{F}_t^N$, ένας παρατηρητής της διαδρομή του δείγματος $s \rightarrow N_s$, $0 \leq s \leq t$, γνωρίζει κατά τον χρόνο t κατά πόσον ή όχι το γεγονός έχει συμβεί. Αν κάποιος χρησιμοποιεί το τεστ $A1 \in \mathcal{F}_t^N$ (δηλ. H_1 αποφασίζει αν το αποτέλεσμα $\omega \in A_1$, ή H_0 εάν το αποτέλεσμα $\omega \in \Omega \setminus A_1$), τότε θα μπορούσε να συμβεί και να υπάρχουν δύο είδη λαθών. Ενας ψευδής συναγερμός συμβαίνει όταν $\omega \in A_1$ (δηλ. κάποιος αποφασίζει H_1), ενώ είναι η H_0 σωστή υπόθεση. Μια απωλεια συμβαίνει όταν $\omega \in \Omega \setminus A_1$ (δηλ. ένας αποφασίζει H_0), ενώ H_1 είναι η σωστή υπόθεση. Σαφώς, η πιθανότητα ψευδούς συναγερμού είναι $P_0(A1)$, ενώ η πιθανότητα αποτυχίας είναι $P_1(\Omega \setminus A1)$. Η πιθανότητα ανίχνευσης δίνεται από $P1(A1) = 1 - P1(\Omega \setminus A1)$.

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει μια βέλτιστη πολιτική στο Neyman-Pearson παράδειγμα για τη λήψη αποφάσεων στα πρόβλημα. Η βέλτιστη πολιτική είναι ένα δοκιμαστικό όριο για μια υπολογίσιμη πιθανότητα που μεγιστοποιεί τη πιθανότητα ανίχνευσης μεταξύ όλων των δοκιμών με πιθανότητα ψευδούς συναγερμού μικρότερη ή ίση με ένα προκαθορισμένο $\alpha \in (0,1)$.

Θεώρημα 1ο (Κυρία αποτέλεσμα): Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P_0)$ είναι μια πιθανότητα χώρου, στην οποία $N_t = (N_t(1), \dots, N_t(k))$, $t \in [0,1]$, είναι ένα διάνυσμα ανεξάρτητο με τις διεργασίες Poisson των οποίων τα συστατικά $N_t(i)$ έχουν εντάσεις $T\beta_i(t)$, $1 \leq i \leq k$, με $\beta_i(t)$ ικανοποίηση υπόθεσης 3η. Ας $(\tau_n(i): n \geq 1)$ υποδηλώνουν οι χρόνοι άλματος $N_t(i)$, $1 \leq i \leq k$ και για $t \in [0,1]$, ορίζουν την L_t διαδικασία

$$L_t \triangleq \prod_{i=1}^k L_t(i) \quad (3)$$

με

$$L_t(i) \triangleq \exp\left(-T \int_0^t \nu_i(s) ds\right) \prod_{n=1}^{N_t(i)} \left(1 + \frac{\nu_i(\tau_n(i))}{\beta_i(\tau_n(i))}\right) \quad (4)$$

οπού $\nu_i(\cdot)$ ικανοποιεί την 4η υπόθεση. Κατά συνθήκη, $\prod_{n=1}^0 (\cdot) = 1$.

1) Ένα μέτρο για την πιθανότητα P_1 στον (Ω, \mathcal{F}) , απολύτως συνεχής σε σχέση με P_0 , μπορεί να ορίζεται από

$$\frac{dP_1}{dP_0} \triangleq L_1, \quad (5)$$

όπου το L_1 δίνεται από την (3) και (4) με $t = 1$. Επιπλέον, σε σχέση με την P_1 , $N_t(i)$ για $1 \leq i \leq k$, είναι ανεξάρτητο με το Poisson επεξεργάζεται πάνω από $t \in [0,1]$ με την ένταση της $T(\beta_i(t) + \nu_i(t))$.

2) Ας υποθέσουμε για $\alpha \in (0,1)$, υπάρχει $\sigma > 0$ τέτοιο ώστε

$$P_0(L_1 \geq \sigma) = \alpha. \quad (6)$$

Στη συνέχεια, η δοκιμή $A_1^* = \{L_1 \geq \sigma\}$ είναι η βέλτιστη για \mathcal{F}_1^N -παρατηρήσεις υπό την έννοια ότι για οποιαδήποτε $A_1 \in \mathcal{F}_1^N$ με $P_0(A_1) \leq \alpha$, έχουμε $P_1(A_1^*) \geq P_1(A_1)$.

Απόδειξη: Με μια τροποποίηση της απόδειξης [15, Θεώρημα VI.2.T4], μπορεί να αποδειχθεί ότι η διαδικασία $(L_t : t \in [0,1])$ είναι μη αρνητικός (P_0, \mathcal{F}_t^N) -martingale με $E_0[L_t] = E_0[L_0] = 1$ για όλα τα $t \in [0, 1]$. Ως εκ τούτου, σαν P_1 ορίζεται από (5) η πιθανότητα με μέτρο (Ω, \mathcal{F}) , η οποία είναι απολύτως συνεχής σε σχέση με P_0 . Το πρώτο μέρος του 1ου θεωρήματος ακολουθείται τώρα από [15, Θεώρημα VI.2.T3]

με

$$\lambda_t(i) \equiv T\beta_i(t), \quad \mu_t(i) = 1 + \nu_i(t)/\beta_i(t)$$

για $1 \leq i \leq k$ και $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^N$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το 2ο μέρος του 1ου Θεωρήματος. Από το L1 είναι μια μη αρνητική, \mathcal{F}_1^N -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή η οποία ικανοποιεί $P_1(A) = \int_A L_1(\omega) P_0(d\omega)$ για $A \in \mathcal{F}_1^N$, έπεται ότι L_1 είναι η (μοναδική) Radon-Nikodym παράγωγο του P_1 σε σχέση με το P_0 , και τα δύο μέτρα περιορίζονται σε \mathcal{F}_1^N . Το αποτέλεσμα είναι τώρα μια άμεση συνέπεια του Neyman-Pearson θεωρήματος.

Παρατήρηση 2: Το 1ο θεώρημα μας παρέχει μια λύση για το πρόβλημα της ανίχνευσης που συνδυάζει μια αποκεντρωμένη επεξεργασία χωρίς απώλειες με συγκεντρωτική λήψη αποφάσεων. Ειδικότερα, κάθε αισθητήρας συλλέγει πληροφορίες και σχηματίζει ένα λόγο πιθανότητας μέσω τοπικής επεξεργασίας. Στη συνέχεια, κατά το χρόνο λήψης T όλοι οι αισθητήρες πιθανοτατα επικοινωνούν στο κέντρο της σύντηξης που συνδυάζει άριστα την έννοια Neyman-Pearson για να παραχθεί η τελική απόφαση. Σημειώστε ότι αυτό είναι διαφορετικό από την αποκεντρωμένη ρύθμιση απόφασεων, σε αυτή οι αισθητήρες δεν στέλνουν αποφάσεις για το κέντρο ελεγχου ακτινοβολίας μάλλον στέλνουν μια επεξεργασμένη μορφή των επιμέρους παρατηρήσεων τους.

Παρατήρηση 3: Η σημασία της λήψης των ανεξάρτητων παρατηρήσεων είναι ότι ένα αρκετά μεγάλο τμήμα του υπολογισμού σχετικά με τη λήψη των αποφάσεων μπορεί να εντοπιστεί σε ατομικούς αισθητήρες, οδηγώντας έτσι σε σημαντική εξοικονόμηση του κόστους επικοινωνίας.

IV. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

Εδώ εμείς παρέχουμε ένα κατωτατο όριο για την πιθανότητα ανίχνευσης και ένα άνωτατο όριο για την πιθανότητα ψευδου συναγερμού όταν χρησιμοποιείται το προτεινόμενο σύστημα ανίχνευσης. Αποδεικνύεται ότι τα όρια και για τις δύο αυτές πιθανότητες αφορούν τις ουρές των (διαφορετικών) της κατανομής Poisson. Για να περιγράψουν με ακρίβεια τα αποτελέσματά μας, ακολουθούμε το συμβολισμό του.

Ορισμός 1(Poisson Tails): Για $\lambda > 0$, $j \in \mathbb{Z}^+$, ας $p(\lambda, j)$ η οποία χαρακτηρίζει την κατανομή Poisson

$$p(\lambda, j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} .$$

Η αριστερή και δεξιά ουρά πιθανότητας ορίζονται από αντιστοίχως.

$$P(\lambda, n) = \sum_{j=0}^n p(\lambda, j), \quad \bar{P}(\lambda, n) = \sum_{j=n}^{\infty} p(\lambda, j), \quad (7)$$

Σημειώστε ότι $P(\lambda, n-1) + P(\lambda, n) = 1$.

Οι ακόλουθες ποσότητες παρουσιάζουν επίσης ενδιαφέρον:

$$B = \sum_{i=1}^k \int_0^1 \beta_i(s) ds, \quad J = \sum_{i=1}^k \int_0^1 \nu_i(s) ds. \quad (8)$$

Όπως προκύπτει τώρα από το (3) - (4), ότι

$$L_1 = \exp(-JT) \prod_{i=1}^k \prod_{n=1}^{N_1(i)} \left(1 + \frac{\nu_i(\tau_n(i))}{\beta_i(\tau_n(i))} \right).$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τον ακέραιο λειτουργίας $[\cdot]$ η οποία αναθέτει σε έναν πραγματικό αριθμό x τον μικρότερο ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο από ή ίση με x . Για $\sigma > 0$, να θεωρήσει τη δοκιμή $A_1^* = \{L_1 \geq \sigma\}$. Ένα χαμηλότερο οριο δεσμεύεται για την πιθανότητα ανίχνευσης $P_1(L_1 \geq \sigma)$, και ένα ανώτερο όριο για την πιθανότητα ψευδούς συναγερού $P_0(L_1 \geq \sigma)$ μπορεί τώρα να ληφθεί ως εξής. Υπενθυμίζοντας Παραδοχές 3 και 4, ορίζουν

$$C = 1 + \frac{\nu_{\min}}{\beta_{\max}} \leq \min_{1 \leq i \leq k} \min_{0 \leq t \leq 1} \left(1 + \frac{\nu_i(t)}{\beta_i(t)} \right), \quad (9a)$$

$$D = 1 + \frac{\nu_{\max}}{\beta_{\min}} \geq \max_{1 \leq i \leq k} \max_{0 \leq t \leq 1} \left(1 + \frac{\nu_i(t)}{\beta_i(t)} \right). \quad (9b)$$

Σημειώστε ότι αν μπορεί κανείς να βρει ℓ, ℓ^+ έτσι ώστε $\ell \leq L_1 \leq \ell^+$ τότε για $j \in \{0,1\}$,

$$\mathbb{P}_j(\ell^- \geq \sigma) \leq \mathbb{P}_j(L_1 \geq \sigma) \leq \mathbb{P}_j(\ell^+ \geq \sigma) .$$

Αφήνοντας

$$\ell^- = \exp(-JT) \prod_{i=1}^k C^{N_1(i)} , \quad \ell^+ = \exp(-JT) \prod_{i=1}^k D^{N_1(i)}$$

να μπορεί να επαληθευτεί ότι $\ell \leq L_1 \leq \ell^+$.

Στη συνέχεια, σημειώστε ότι

$$\ell^- \geq \sigma \iff \sum_{i=1}^k N_1(i) \geq \frac{\log \sigma + JT}{\log C}$$

$$\ell^+ \geq \sigma \iff \sum_{i=1}^k N_1(i) \geq \frac{\log \sigma + JT}{\log D} .$$

Δεδομένου $N_1(i)$ για $1 \leq i \leq k$ είναι τυχαία ανεξάρτητες μεταβλητές Poisson με παραμέτρους

$T \int_0^1 \beta_i(s) ds$ σε σχέση με P_0 , αυτό προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^k N_1(i)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή

Poisson με παράμετρος $BT = (\sum_{i=1}^k \int_0^1 \beta_i(s) ds)T$ σε σχέση με την P_0 . Σύμφωνα με

αυτή τη πιθανότητα μέτρο $P_1, N_1(i)$ για $1 \leq i \leq k$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές Poisson με παραμέτρους

$T(\int_0^1 [\beta_i(s) + \nu_i(s)] ds)$. Συνεπώς, κατά το $P_1, \sum_{i=1}^k N_1(i)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή

Poisson με παράμετρο $(J + B)T$.

Ως εκ τούτου,

$$\mathbb{P}_1(L_1 \geq \sigma) \geq \bar{P} \left((J + B)T, \left\lceil \frac{\log \sigma + JT}{\log C} \right\rceil \right) \quad (10a)$$

$$\mathbb{P}_0(L_1 \geq \sigma) \leq \bar{P} \left(BT, \left\lceil \frac{\log \sigma + JT}{\log D} \right\rceil \right). \quad (10b)$$

V. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ

Ένα παράδειγμα προβλήματος ανίχνευσης που μπορεί να ταιριάζει σε αυτό το πλαίσιο είναι εκείνο της πυρηνικής ανίχνευσης που χρησιμοποιούν χωρικά κατανομημένους αισθητήρες. Οι αισθητήρες ακτινοβολίας πάντοτε καταγράφουν ακτινοβολία υποβάθρου (λόγω της κοσμικής ακτινοβολίας και λόγω των φυσικών ραδιενεργών ισωτόπων στο περιβάλλον). Η ελλείψη παράνομου πυρηνικού υλικού (υπόθεση H_0 είναι αληθής), οι αισθητήρες μετρούν απλά υπόβαθρο. Εάν το ραδιενεργό υλικό είναι παρόν (υπόθεση H_1 είναι αληθής), οι αισθητήρες καταγράφουν το άθροισμα των φωτονίων που προέρχονται από το υποβάθρο και τα φωτόνια που προέρχονται από το υλικό. Αυτές οι δύο πηγές ακτινοβολίας ενεργούν ανεξάρτητα, και κάποιος μπορεί να θεραπεύσει κάθε αισθητήρα παρατηρώντας μια ενιαία διαδικασία Poisson της οποίας η ένταση είναι το άθροισμα των εντάσεων λόγω υποβάθρου και υλικού (η πηγή). Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι να καθοριστεί σε ένα σταθερό χρονικό διάστημα κατά πόσο ένας στόχος περνώντας μπροστά από τους αισθητήρες, είναι μια πηγή ακτινοβολίας. Οι συγκεκριμένες παραδοχές για το πρόβλημα αυτό έχουν ως εξής: Χώρος εργασίας μας είναι το οριζόντιο επίπεδο, \mathbb{R}^2 . Έχουμε k αισθητήρες ομοιόμορφα κατανομημένες κατά μήκος του θετικού άξονα x σε θέσεις $x=0, x=\ell, x=2\ell, \dots, x=(k-1)\ell$, όπου $\ell=10$ m.

Για απλότητα εδώ, υποθέτουμε ότι οι αισθητήρες είναι πανομοιότυπα. Ας παρουμε $\tau \in [0, T]$ το φυσικό χρονικό διάστημα όπου ο στόχος έχει εντοπιστεί και καταγραφή αρίθμησης όπου ο στόχος έχει κινηθεί, και το τελικό χρόνο T κατά τον οποίο μια απόφαση πρέπει να γίνει για την ύπαρξη μιας πηγής. Ας $b_i(\tau)$

είναι η ένταση της ακτινοβολίας υποβάθρου στη θέση του αισθητήρα i , $1 \leq i \leq k$, το οποίο δεν πρέπει να είναι ομοιόμορφο κατανομημένο και γενικά μπορεί να είναι εξαρτώμενη από τον χρόνο.

Σε αυτό το παράδειγμα υποθέτουμε ότι η ένταση του υποβάθρου είναι χρονικά αμεταβλητη, τόσο $b_i(\tau) = b_i \in \mathbb{N}$, όπου b_i θεωρείται ότι κυμαίνεται εκθετικά μεταξύ οριων, απο ένα ελάχιστο $b_{\min} = 2$ cps έως ένα μέγιστο $b_{\max} = 8$ cps, με το μέγιστο να εμφανίζεται στον πρώτο και τον τελευταίο αισθητήρα και το ελάχιστο εμφανίζεται στον αισθητήρα που είναι στη μέση (Εικ. 2 (α)).

Υποθέτουμε ότι ο στόχος θα διέρχεται σε απόσταση $h = 20\text{m}$ από το x -άξονα, δηλαδή με σταθερα συντεταγμένων $y = h$, ετσι εμφανίζεται πρώτη φορά σε αρχική θέση $(x_0, h) = (-4, 20) \in \mathbb{R}^2$ και κινείται με σταθερή ταχύτητα $u = 20 \text{ m/s}$ στην θετικη κατεύθυνση του x -άξονα. Για να απεικονίσουμε τη διαδικασία παραγωγής, ας πάρουμε $k = 10$, και ας υποθέσουμε ότι η αποδεκτή πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού σε αυτη τη διαδικασια είναι $\alpha = 10^{-6}$ (βλέπε (10_β)).

Με $R_i(\tau)$, $1 \leq i \leq k$, που δηλώνει την απόσταση μεταξύ του αισθητήρα i και της πιθανής πηγής, η ένταση $R_i(\tau)$ στον αισθητήρα i που οφείλεται στην πηγή διαμορφώνεται στο

$$R_i(\tau) = \frac{\chi^\alpha}{r_i(\tau)^2}, \quad (11)$$

όπου $\alpha > 0$ είναι η δραστηριότητα των δυνητικών της πηγής και $\chi > 0$ είναι διατομή ετερογενων αισθητήρων.

Υποθέτουμε μια τιμή για χ_α να είναι ίσο με αυτό που έχει χρησιμοποιηθεί σε [19], αλλά θωρακισμένο με 9 cm μολύβδου, ρίχνοντας ετσι την ένταση της πηγής κατά τρεις τάξεις μεγέθους για $\chi_\alpha = 5.068$ cps. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει κάποιος αισθητήρας πιο κοντά από την απόσταση h με τον στόχο, εξασφαλίζοντας ετσι ότι $R_i(\tau)$ είναι πάντα εντος οριου. Δεδομένου ότι η θέση της πιθανής πηγής σε χρόνο $\tau \in [0, T]$ είναι $(x_0 + u\tau, h)$, η απόσταση $r_i(\tau)$ μεταξύ της πιθανης πηγης και αισθητήρα i , $1 \leq i \leq k$ δίδεται από

$$r_i(\tau) = \sqrt{(x_0 + u\tau - (i - 1)\ell)^2 + h^2}.$$

Υπενθυμίζοντας (11) και (2) με

$$T = \frac{(k-1)\ell - 2x_0}{v} = 9.8 \text{ s}$$

για την ώρα της αποφάσης, θα έχουμε για την κλίμακα μεταβλητή χρόνου

$$t = \frac{\tau}{T} \in [0, 1] \text{ βλέπε (1)}$$

$$\beta_i(t) = b_i(T \cdot t)$$

$$\nu_i(t) = R_i(T \cdot t) = \frac{\chi a}{(x_0 + vT \cdot t - (i-1)\ell)^2 + h^2}$$

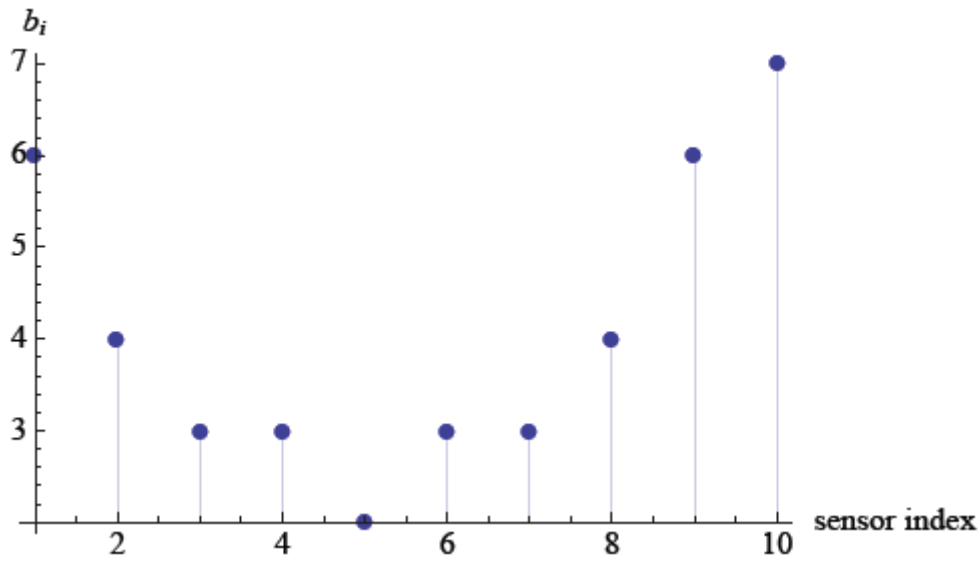
από

$$\int_0^1 \nu_i(s) ds = \frac{\chi a}{hvT} \tan^{-1} \left(\frac{x_0 + vT - (i-1)\ell}{h} \right) - \frac{\chi a}{hvT} \tan^{-1} \left(\frac{x_0 - (i-1)\ell}{h} \right),$$

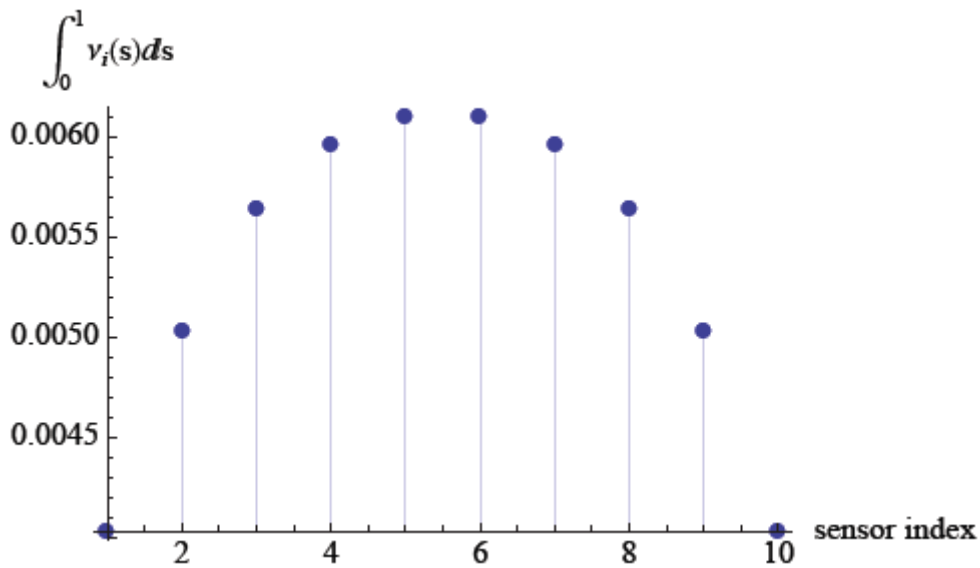
από (8) παίρνουμε

$$J = \frac{\chi a}{hvT} \sum_{i=1}^k \left[\text{atan} \left(\frac{x_0 + vT - (i-1)\ell}{h} \right) - \text{atan} \left(\frac{x_0 - (i-1)\ell}{h} \right) \right]$$

και για τη διαταξη δέκα αισθητήρων έχουμε $J = 0.05356 \text{ cps/m}^2$.



(α) background intensity



(b) $\int_0^1 \nu_i(s) ds$

fig2 Κατανομή της έντασης του υποβάθρου (επάνω) και ολοκληρωμένη αντίληψη

Ένταση πηγής (κάτω) κατά την εξεταζόμενη διάταξη δέκα αισθητήρων.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$r_{\min} = \min_{1 \leq i \leq k} \min_{0 \leq \tau \leq T} r_i(\tau) = h$$

$$r_{\max} = \max_{1 \leq i \leq k} \max_{0 \leq \tau \leq T} r_i(\tau) = \sqrt{(x_0 + vT)^2 + h^2} .$$

Έτσι, για την περίπτωση της διατάξης δέκα-αισθητήρων, (9) αποδίδει την τιμή

$$C = 1 + \frac{\chi^a}{[(x_0 + vT)^2 + h^2]\beta_{\max}} = 1 + 6.859 \times 10^{-5}$$

$$D = 1 + \frac{\chi^a}{h^2\beta_{\min}} = 1 + 6.335 \times 10^{-3}$$

σε μονάδες m^{-2} .

Ως αναφορά στο σχ.2(α), έχουμε

$$B = \sum_{i=1}^k \beta_i = 41 \text{ cps},$$

και με αυτό θα γυρίζουμε (10b) για να υπολογίσει αριθμητικά το κατώτατο όριο για την δοκιμή πιθανής αναλογίας. Αξιολογώντας αριθμητικά τη δεξιά πλευρά του (10b) για διαφορετικές τιμές του σ , βλέπουμε ότι για $\sigma = 14$, η πιθανότητα ψευδούς συναγερμού P_0 πέφτει κάτω από 10^{-6} το οποίο είναι αποδεκτό ποσοστό σφάλματος.

Ως εκ τούτου, ο κανόνας απόφασης βασίζεται στη δοκιμή:

$$L_1 \geq 14 \quad (12)$$

που φανερώνει πράγματι ότι ο στόχος είναι μια ραδιενεργός πηγή. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι υπάρχει συντηρητισμός ενσωματωμένος σε όρια (9), το οποίο καθιστά την πιθανότητα ανίχνευσης χρησιμοποιώντας (12) μικρό ψευδή συναγερμό ρυθμό. Η βελτίωση στα όρια (9) αποτελεί μέρος των συνεχιζόμενων εργασιών. Παρ' όλα αυτά, η ανάλυση εξακολουθεί να δίνει μια εικόνα για το αποτέλεσμα των διαφόρων παραμέτρων στην πιθανότητα ανίχνευσης. Για να απεικονίζουμε αυτό το σημείο, ας εξετάσουμε τη δυνατότητα χρήσης περισσότερων αισθητήρων με την ίδια απόσταση `όπως πριν. Χωρίς την αλλαγή του κανόνα (12) (διατηρώντας το ίδιο όριο), όπως τα δείχνει η ανάλυση (Εικ. 3) το ανώτατο όριο για το πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού (PFA) εκτιμάται στο (10b) να πέφτει μονοτονικά με την προσθήκη νέων αισθητήρων.

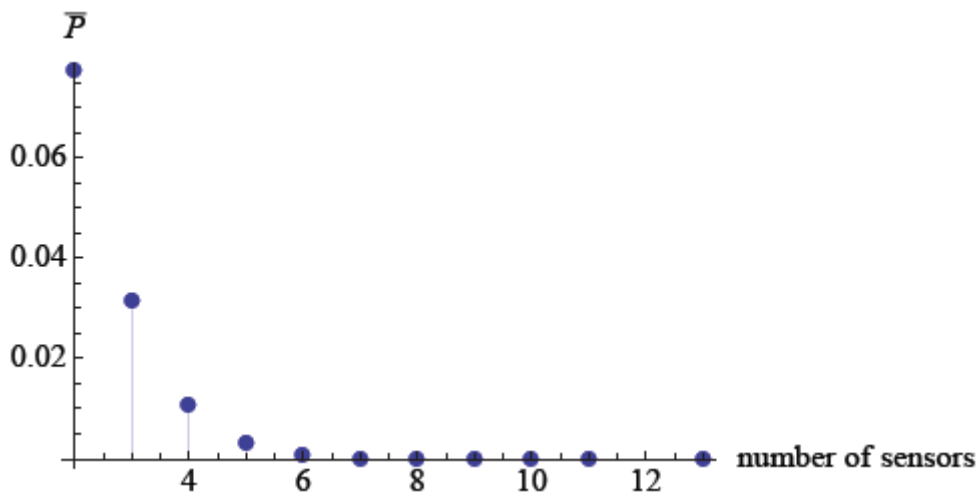


fig.3 Δεσμεύεται για την πιθανότητα ψευδούς συναγερμού (PFA) για $\sigma = 14$.

Χωρίς την επαναφορά της σταθεράς όριου, βλέπουμε ότι το ανώτατο όριο για την PFA μειώνεται εκθετικά με την προσθήκη νέων αισθητήρων. Για $k = 3$ αισθητήρες, $\sigma = 14$ αποδίδει μία PFA από 3%, ενώ για $k = 13$ αισθητήρες και για τον ίδιο σ το οριο πέφτει έως 1.5×10^{-9} .

VI. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ένα δίκτυο αισθητήρων χρησιμοποιείται για να αποφασίσει τα βέλτιστα ανάμεσα σε δύο υποθέσεις σχετικά με τα στατιστικά στοιχεία του time-inhomogeneous σημείο διαδικασίας. Οι αισθητήρες συλλέγουν στις μετρήσεις τους πάνω από ένα σταθερό χρονικό διάστημα, στο τέλος του οποίου μια μεταποιημένη περίληψη ανακοινώνεται στο κεντρο ελεγχου ακτινοβολίας. Ειδικότερα, κάθε αισθητήρας μεταδίδει μια τοπικά υπολογιζόμενη αναλογία πιθανότητας στο κέντρο ελεγχου, η οποία στη συνέχεια συγκρίνει το προϊόν του λόγου πιθανότητας αισθητήρα-ειδικά μεσα σε όρια για να καταλήξουμε σε μια απόφαση. Η ανάλυση αυτή βασίζεται σχετικά με τη διαμόρφωση Neyman-Pearson. Παρέχεται μια σειρά από συντηρητικά όρια απόδοσης σχετικά με τις πιθανότητες σφάλματος και το πλαίσιο εφαρμόζεται στο πρόβλημα της ανίχνευσης μιας μετακινούμενης ραδιενεργης πηγής χρησιμοποιώντας μια σειρά από αισθητήρες.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Η επίδραση του χρόνου εναλλαγή κλίμακας στην ένταση της Poisson διαδικασίας περιγράφεται από τη παρακάτω λήμμα. Ας υποθέσουμε ότι (Ω, \mathcal{F}, P) είναι ένας χώρος εξοπλισμένος με πιθανότητα $(\mathbb{G}_u : u \geq 0)$. Αν $\lambda(u)$ να είναι μη αρνητικός, η μετρήσιμη συνάρτηση ορίζεται στο $[0, +\infty)$ με

$$\int_0^u \lambda(v) dv < \infty$$
 για όλα τα $u > 0$. Έστω $(X_u : u \geq 0)$ είναι ένα (P, \mathbb{G}_u) - διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda(u)$. Λήμμα 1: Fix $T > 0$.

Έστω
$$t = \frac{u}{T}.$$

Έστω
$$Y_t = X_u = X_{T \cdot t},$$

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_u = \mathcal{G}_{T \cdot t} \text{ for } t \geq 0.$$

Ορίστε

$$\hat{\lambda}(t) \text{ on } [0, \infty)$$

με

$$\hat{\lambda}(t) \triangleq T\lambda(T \cdot t)$$

για $t \geq 0$.

Στη συνέχεια, Y_t είναι ένα (P, \mathcal{F}_t) διαδικασία-Poisson με ενταση $\hat{\lambda}(t)$.

Απόδειξη: Σημειώστε ότι το $\hat{\lambda}(t)$ είναι μη αρνητικό και μετρήσιμο σε

$$\int_0^t \hat{\lambda}(s) ds < \infty$$

για όλα τα $t > 0$.

Στη συνέχεια, αφού $X_{T \cdot t}$ είναι $\mathcal{G}_{T \cdot t}$ -μετρήσιμα για όλα τα $t \geq 0$, προκύπτει ότι Y_t είναι \mathcal{F}_t -προσαρμόσιμα.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης, πρέπει να δείξουμε ότι για $0 \leq s < t$, $Y_t - Y_s$ είναι ανεξάρτητα από \mathcal{F}_s και είναι μια τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο

$$\int_s^t \hat{\lambda}(\tau) d\tau. \text{ Since } X_{T \cdot t} - X_{T \cdot s}$$

Από $X_{T \cdot t} - X_{T \cdot s}$ είναι ανεξάρτητα από το $\mathcal{G}_{T \cdot s}$, προκύπτει ότι $Y_t - Y_s$ είναι ανεξάρτητη την \mathcal{F}_s .

Τέλος, για $n \in \mathbb{Z}^+$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_t - Y_s = n) &= \mathbb{P}(X_{T \cdot t} - X_{T \cdot s} = n) \\ &= \exp\left(-\int_{T \cdot s}^{T \cdot t} \lambda(u) du\right) \frac{\left(\int_{T \cdot s}^{T \cdot t} \lambda(u) du\right)^n}{n!} \\ &= \exp\left(-\int_s^t \hat{\lambda}(\tau) d\tau\right) \frac{\left(\int_s^t \hat{\lambda}(\tau) d\tau\right)^n}{n!} \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την αλλαγή της μεταβλητής $\tau = u/T$.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζεται το πρόβλημα ανίχνευσης όπου διάφοροι διανεμημένοι αισθητήρες στο χώρο παρατηρούν ανεξάρτητα μια ανομοιογενή χρονικά τυχαία διαδικασία. Ο στόχος είναι να αποφασίσει το σύστημα αισθητήρων, στο τέλος ενός σταθερού χρονικού διαστήματος, μεταξύ δύο υποθέσεων με βάση την παρατηρούμενη τυχαία διαδικασία. Στη προτεινόμενη αυτή μέθοδο, κάθε ένας από τους αισθητήρες διαβιβάζει κάθε φορά σε ένα κέντρο ελέγχου μια τοπικά επεξεργασμένη περίληψη των πληροφοριών του υπο την μορφή ενός λόγου πιθανοφάνειας. Το κέντρο ελέγχου συνδυάζει έπειτα αυτά τα μηνύματα για να λάβει μια βέλτιστη απόφαση στο πλαίσιο του κριτηρίου Neyman-Pearson. Η παραπάνω προσέγγιση χρησιμεύει ως ένα πρώτο βήμα για την ανάπτυξη ενός νέου αλγόριθμου (σταθερού διαστήματος) ανίχνευσης κινούμενων ραδιοενεργών πηγών που συνδυάζει αποκεντρωμένη επεξεργασία, με χρήση κεντρικής λήψης αποφάσεων.

ΠΗΓΕΣ-REFERENCES

- Signal Detection and Estimation Second Edition (*Mourad Barkat*)
- Wikipedia
- Radioactive Source Detection by Sensor Networks (*Sean M. Brennan, Angela M. Mielke, and David C. Torney, IEEE TRANSACTIONS ON NUCLEAR SCIENCE, VOL. 52, NO. 3, JUNE 2005*)
- Decision Making in Sensor Networks Observing Poisson Processes (*Chetan D. Pahlajani, Ioannis Poulakakis and Herbert G. Tanner*)