

**Τ.Ε.Ι. ΚΡΗΤΗΣ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΧΑΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ**



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**“Ισοσταθμιστές Καναλιού, Συστήματα
Πολλαπλών Καναλιών και Πολλαπλών
Φερόντων, και Τεχνικές Διεύρυνσης
Φάσματος”**

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Ντούγιας Κωνσταντίνος
ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Κόκκινος Ευάγγελος**

2006

T.E.I. OF CRETE
CHANIA BRANCH
ELECTRONIC
DEPARTMENT



DEGREE THESIS

**“Channel Equalizers, Multichannel and
Multicarrier Systems, and Spread Spectrum
Techniques”**

THOROUGHNESS: Dougias Constantinos
ADVISER: Kokinos Evangelos

2006

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία, ασχολούμαστε με τους ισοσταθμιστές καναλιού, με τα συστήματα επικοινωνίας πολλαπλών καναλιών και πολλαπλών φερόντων, και με τις τεχνικές διεύρυνσης φάσματος. Μια σύντομη περίληψη των παραπάνω θεμάτων δίνεται στην εισαγωγή.

Το Κεφάλαιο 1 ασχολείται με τη μελέτη της ψηφιακής επικοινωνίας μέσω μη ιδανικών καναλιών περιορισμένου εύρους ζώνης μοντελοποιημένων ως γραμμικά φίλτρα. Εξετάζεται ο βέλτιστος δέκτης για ένα κανάλι με ISI (MLSE δέκτης) και εξετάζεται η συμπεριφορά του. Επίσης, μελετώνται οι γραμμικοί ισοσταθμιστές καναλιού. Αναφέρονται τα κριτήρια βελτιστοποίησης των συντελεστών τους, και εξετάζεται η απόδοσή τους, τόσο στην ιδανική περίπτωση (ισοσταθμιστές άπειρου μήκους), όσο και στην πρακτική. Τέλος, μελετάται ο ισοσταθμιστής αναδραστικής απόφασης, ο οποίος (όπως και ο MLSE) είναι μη γραμμικός.

Το Κεφάλαιο 2 εξετάζει τη χρήση προσαρμοστικών ισοσταθμιστών καναλιού για χρονικά μεταβαλλόμενα κανάλια. Μελετώνται διάφοροι αλγόριθμοι προσαρμογής (LMS, RLS κ.λ.π.) για όλες τις δομές ισοσταθμιστών (MSE, DFE κ.λ.π.). Δίνεται έμφαση στη σύγκλιση των αλγόριθμων. Το κεφάλαιο κλείνει με μια πραγμάτευση των τυφλών ισοσταθμιστών.

Το Κεφάλαιο 3 ξεκινάει με μια θεώρηση των συστημάτων πολλαπλών καναλιών. Συγκεκριμένα, εξετάζεται η απόδοσή τους για διάφορα σχήματα σηματοδοσίας (δυναδική σηματοδοσία, M – αδική ορθογώνια σηματοδοσία κ.λ.π.). Στη συνέχεια, εξετάζονται τα συστήματα πολλαπλών φερόντων. Συγκεκριμένα, μελετάται η χωρητικότητα ενός τέτοιου συστήματος σε ένα μη ιδανικό κανάλι, καθώς και ένα σύστημα πολλαπλών φερόντων βασισμένο στον FFT.

Κλείνουμε με το Κεφάλαιο 4, το οποίο μελετά τις τεχνικές διεύρυνσης φάσματος. Εξετάζουμε τις δύο κύριες μορφές σημάτων διευρυμένου φάσματος, τα σήματα άμεσης ακολουθίας (DS) και τα σήματα αλμάτων συχνότητας (FH), καθώς και τα συστήματα που βασίζονται σε αυτά τα σήματα. Μελετάμε τη συμπεριφορά τους απέναντι σε διάφορα είδη παρεμβολής (CW, PB κ.λ.π.), τις εμπορικές εφαρμογές τους, καθώς και το συγχρονισμό των συστημάτων αυτών. Σε όλο το κεφάλαιο δίνεται έμφαση στην επίδραση της κωδικοποίησης στην απόδοση του συστήματος.

Στην εκπόνηση της εργασίας αυτής, βοήθησαν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, πολλά άτομα στα οποία είμαι ευγνώμων. Καταρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου, κ. Κόκκινο Ευάγγελο, για την άψογη συνεργασία που είχαμε σε όλα τα επίπεδα, και για την πίστη που έδειξε στο πρόσωπό μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το φίλο μου, Καρακατσάνη Γεώργιο, για τις διάφορες συζητήσεις που κάναμε κατά καιρούς σε παρεμφερή με την εργασία αυτή θέματα, και μου έδιναν το ερέθισμα πάντα να συνεχίζω την προσπάθεια.

Επίσης, οφείλω πολλά ευχαριστώ στον τεχνικό του Ο.Τ.Ε., Μπασάκη Δημήτριο, ο οποίος κατά τη διάρκεια της πρακτικής μου εξάσκησης, μου έμαθε πολλά, και το έκανε με χαρά. Είχε πραγματικά τη διάθεση να μοιραστεί όσα ξέρει (στη θεωρία και στην πράξη). Εκτός των γνώσεων που αποκόμισα, για μένα η συνεργασία μας ήταν ένα μάθημα ζωής.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στους γονείς μου για την αγάπη και τη στήριξή τους. Ελπίζω η προσπάθεια που καταβάλλω αλλά και το αποτέλεσμα της να είναι μια ελάχιστη “ανταπόδοση” όσων έκαναν για να μου δώσουν το δικαίωμα να κυνηγήσω τα όνειρά μου.

PREFACE

At the current degree thesis, we study channel equalizers, multichannel and multicarrier systems, and spread spectrum techniques. A brief overview of these concepts is given at the introduction..

Chapter 1 treats the digital communication through band – limited linear filter channels. We obtain the optimum receiver for a channel with ISI (MLSE) and we study his performance. Also, we study linear channel equalizers. First, we talk about the coefficients optimization criterions, and then we examine their performance for the ideal (infinite length equalizer) and for the practical (finite length equalizer) case. Finally, we treat Decision – Feedback Equalizer, witch (like MLSE) is non - linear.

Chapter 2 treats the use of adaptive channel equalizers for time – variant channels. We study several adaptation algorithms (LMS, RLS κ.λ.π.) for all the equalizers structures (MSE, DFE e.t.c.). We emphasize at the converge properties of the algorithms. The chapter is ending with a treatment of blind equalizers.

Chapter 3 starts with a treatment of multichannel systems. Particularly, we study their performance for several signaling schemes (binary, M – ary orthogonal e.t.c.). Then, we study multicarrier systems. We will obtain the capacity of such a system for a non – ideal linear filter channel, and we will tread a FFT – based system..

Finally, Chapter 4 treats spread spectrum techniquesWe study the two major spread spectrum signals, the direct sequence (DS) and the frequency – hopped (FH) signals, as and the corresponding systems. We study their behavior against several interference types (CW, PB κ.λ.π.), their commercial applications, as and their synchronization. Throughout this chapter, we emphasize at the effect of coding to the performance of the system..

At the elaboration of this thesis, several persons they helped me – one way or another- and I am graceful to them. Firstly, I would like to thank my adviser, Mr. Kokino Evangelo, for the perfect cooperation, and for his faith at me.

Also, I would like to thank my friend, Katakatsani George, for our conversations about communications, which gave me the spur to continue the effort..

Furthermore, I am graceful to O.T.E’s technician, Basaki Dimitrio, who learned me a lot when I was doing my practice training. He really had the benevolence to share his knowledge (at theory and at practice). Besides the knowledge I earned, our cooperation it was for me a course of life.

Finally, I am most graceful to my parents, for their love and their support. I hope my effort and the result thee is a tiny “payback” to their effort to give me the right to follow my dreams.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή (ελληνική)	17
Εισαγωγή (αγγλική)	20
1 Επικοινωνία Μέσω Καναλιών Περιορισμένου Εύρους Ζώνης Μοντελοποιημένων ως Γραμμικά Φίλτρα	23
1.1 Βέλτιστοι Δέκτες για Κανάλια με ISI και AWGN	24
1.1.1 <i>Βέλτιστος Δέκτης Μέγιστης Πιθανοφάνειας</i>	24
1.1.2 <i>Μοντέλο Διακριτού Χρόνου για Κανάλι με ISI</i>	27
1.1.3 <i>Ο Αλγόριθμος Viterbi για το Μοντέλο Διακριτού Χρόνου Καναλιού Λευκού Θορύβου</i>	31
1.1.4 <i>Απόδοση του MLSE για Κανάλια με ISI</i>	34
1.2 Γραμμική Ισοστάθμιση	45
1.2.1 <i>Κριτήριο Παραμόρφωσης Κορυφής</i>	46
1.2.2 <i>Κριτήριο Μέσον Τετραγωνικού Σφάλματος (MSE)</i>	52
1.2.3 <i>Χαρακτηριστικές Απόδοσης του MSE Ισοσταθμιστή</i>	57
1.2.4 <i>Κλασματικοί Ισοσταθμιστές</i>	64
1.3 Ισοσταθμιστής Αναδραστικής Απόφασης	68
1.3.1 <i>Βελτιστοποίηση Συντελεστών</i>	68
1.3.2 <i>Χαρακτηριστικές Απόδοσης του DFE</i>	69
1.3.3 <i>Προβλέπων Ισοσταθμιστής Αναδραστικής Απόφασης</i>	73
1.4 Βιβλιογραφικές Παρατηρήσεις και Αναφορές	75
2 Προσαρμοστική Ισοστάθμιση	77
2.1 Προσαρμοστικός Γραμμικός Ισοσταθμιστής	77
2.1.1 <i>Ο Αλγόριθμος Μηδενικού Εξαναγκασμού</i>	78
2.1.2 <i>Ο Αλγόριθμος LMS</i>	80
2.1.3 <i>Ιδιότητες Σύγκλισης του LMS Αλγόριθμου</i>	84
2.1.4 <i>Πλεονάζων MSE Λόγω Ενθόρυβων Εκτιμήσεων Κλίσης</i>	86
2.1.5 <i>Γραμμικοί Ισοσταθμιστές Βασικής Ζώνης και Γραμμικοί Ισοσταθμιστές Ζώνης Διέλευσης</i>	90
2.2 Προσαρμοστικός Ισοσταθμιστής Αναδραστικής Απόφασης	90
2.2.1 <i>Προσαρμοστική Ισοστάθμιση Κωδικοποιημένων Trellis Σημάτων</i>	92
2.3 Ένας Προσαρμοστικός Εκτιμητής Καναλιού για ML Ανίχνευση Ακολουθιών	94

2.4	Αναδρομικοί Αλγόριθμοι Ελάχιστων Τετραγώνων για Προσαρμοστική Ισοστάθμιση	96
2.4.1	<i>Αναδρομικός Αλγόριθμος Ελάχιστων Τετραγώνων (Kalman)</i>	98
2.4.2	<i>Γραμμική Πρόβλεψη και το Φίλτρο Πλέγματος</i>	103
2.5	Αυτοανακτώμενη (Τυφλή) Ισοστάθμιση	107
2.5.1	<i>Τυφλή Ισοστάθμιση Βασισμένη στο Κριτήριο Μέγιστης Πιθανοφάνειας</i>	108
2.5.2	<i>Αλγόριθμοι Στοχαστικής Κλίσης</i>	113
2.5.3	<i>Αλγόριθμοι Τυφλής Ισοστάθμισης Βασισμένοι σε Στατιστικά Δεύτερης Τάξης και σε Στατιστικά Ανώτερης Τάξης</i>	119
2.6	Βιβλιογραφικές Παρατηρήσεις και Αναφορές	121
3	Συστήματα Πολλαπλών Καναλιών και Πολλαπλών Φερόντων	124
3.1	Ψηφιακές Επικοινωνίες Πολλαπλών Καναλιών σε AWGN Κανάλια	124
3.1.1	<i>Διαδικά Σήματα</i>	126
3.1.2	<i>M – αδικά Ορθογώνια Σήματα</i>	129
3.2	Επικοινωνίες Πολλαπλών Φερόντων	131
3.2.1	<i>Χωρητικότητα ενός μη Ιδανικού Καναλιού Μοντελοποιημένου ως Γραμμικό Φίλτρο</i>	132
3.2.2	<i>Σύστημα Πολλαπλών Φερόντων Βασισμένο στον FFT</i>	135
3.3	Βιβλιογραφικές Παρατηρήσεις και Αναφορές	138
4	Σήματα Διευρυμένου Φάσματος για Ψηφιακές Επικοινωνίες	141
4.1	Μοντέλο Ψηφιακού Συστήματος Επικοινωνίας Διευρυμένου Φάσματος	143
4.2	Σήματα Διευρυμένου Φάσματος Άμεσης Ακολουθίας	144
4.2.1	<i>Ρυθμός Απόδοσης Σφαλμάτων του Αποκωδικοποιητή</i>	148
4.2.2	<i>Κάποιες Εφαρμογές των DS Σημάτων Διευρυμένου Φάσματος</i>	159
4.2.3	<i>Επίδραση Παλμικής Παρεμβολής στα DS Συστήματα Διευρυμένου Φάσματος</i>	165
4.2.4	<i>Δημιουργία PN Ακολουθιών</i>	173
4.3	Σήματα Διευρυμένου Φάσματος με Άλματα Συχνότητας	178
4.3.1	<i>Απόδοση FH Σημάτων Διευρυμένου Φάσματος σε AWGN Κανάλι</i>	180
4.3.2	<i>Απόδοση FH Σημάτων Διευρυμένου Φάσματος σε Παρεμβολή Μερικής Ζώνης</i>	183
4.3.3	<i>Ένα CDMA Σύστημα Βασισμένο σε FH Σήματα Διευρυμένου Φάσματος</i>	191

4.4	Άλλα Είδη Σημάτων Διευρυμένου Φάσματος	192
4.5	Συγχρονισμός Συστημάτων Διευρυμένου Φάσματος	193
4.6	Βιβλιογραφικές Παρατηρήσεις και Αναφορές	200

CONTENTS

Introduction (Greek)	17
Introduction (English)	20
1 Communication Through Band – Limited Linear Filter Channel	23
1.1 Optimum Receiver for Channels with ISI and AWGN	24
1.1.1 <i>Optimum Maximum – Likelihood Receiver</i>	24
1.1.2 <i>A Discrete – Time Model for a Channel with ISI</i>	27
1.1.3 <i>The Viterbi Algorithm for the Discrete – Time White Noise Filter Model</i>	31
1.1.4 <i>Performance of MLSE for Channels with ISI</i>	34
1.2 Linear Equalization	45
1.2.1 <i>Peak Distortion Criterion</i>	46
1.2.2 <i>Mean – Square – Error (MSE) Criterion</i>	52
1.2.3 <i>Performance Characteristics of the MSE Equalizer</i>	57
1.2.4 <i>Fractinally Spaced Equalizers</i>	64
1.3 Decision – Feedback Equalizer	68
1.3.1 <i>Coefficient Optimization</i>	68
1.3.2 <i>Performance Characteristics of DFE</i>	69
1.3.3 <i>Predictive Decision – Feedback Equalizer</i>	73
1.4 Bibliographical Notes and References	75
2 Adaptive Equalization	77
2.1 Adaptive Linear Equalizer	77
2.1.1 <i>The Zero – Forcing Algorithm</i>	78
2.1.2 <i>The LMS Algorithm</i>	80
2.1.3 <i>Convergence Properties of the LMS Algorithm</i>	84
2.1.4 <i>Excess MSE Due to Noisy Gradient Estimates</i>	86
2.1.5 <i>Baseband and Passband Linear Equalizers</i>	90
2.2 Adaptive Decision – Feedback Equalizer	90
2.2.1 <i>Adaptive Equalization of Trellis – Coded Signals</i>	92
2.3 An Adaptive Channel Estimator for ML Sequence Detection	94

2.4	Rescursive Least – Squares Algorithms for Adaptive Equalization	96
2.4.1	<i>Rescursive Least - Squares(Kalman) Algorithm</i>	98
2.4.2	<i>Linear Prediction and the Lattice Filter</i>	103
2.5	Self – Recovering (Blind) Equalization	107
2.5.1	<i>Blind Equalization Based on the Maximum – Likelihood Criterion</i>	108
2.5.2	<i>Stochastic Gradient Algorithms</i>	113
2.5.3	<i>Blind Equalization Algorithms Based on Second – and Higher – Order Signal Statistics</i>	119
2.6	Bibliographical Notes and References	121
3	Multichannel and Multicarrier Systems	124
3.1	Multichannel Digital Communications in AWGN Channels	124
3.1.1	<i>Binary Sugnals</i>	126
3.1.2	<i>M – ary Orthogonal Signals</i>	129
3.2	Multicarrier Communications	131
3.2.1	<i>Capacity of a Nonideal Linear Filter Channel</i>	132
3.2.2	<i>An FFT Based Multicarrier System</i>	135
3.3	Bibliographical Notes and References	138
4	Σήματα Διευρυμένου Φάσματος για Ψηφιακές Επικοινωνίες	141
4.1	Model of Spread Spectrum Digital Communication System	143
4.2	Direct Sequence Spread Spectrum Signals	144
4.2.1	<i>Error Rate Performance of the Decoder</i>	148
4.2.2	<i>Some Applications of DS Spread Spectrum Signals</i>	159
4.2.3	<i>Effect of Pulsed Interference on DS Spread Spectrum Systems</i>	165
4.2.4	<i>Generation of PN Sequences</i>	173
4.3	Frequency – Hopped Spread Spectrum Signals	178
4.3.1	<i>Performance of FH Spread Spectrum Signals in an AWGN Channel</i>	180
4.3.2	<i>Performacne of FH Spread Spectrum Signals in Partial – Band Interference</i>	183
4.3.3	<i>A CDMA System Based on FH Spread Spectrum Signals</i>	191
4.4	Other Types of Spread Spectrum Signals	192
4.5	Synchronization of Spread Spectrum Systems	193
4.6	Bibliographical Notes and References	200

*Στη μνήμη της...
Σάντρας.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με τρία θέματα. Το πρώτο είναι η επικοινωνία μέσω μη ιδανικών καναλιών περιορισμένου εύρους ζώνης μοντελοποιημένων ως γραμμικά φίλτρα υπό την παρουσία προσθετικού λευκού γκαουσιανού θορύβου (Additive White Gaussian Noise, AWGN). Ο περιορισμός σε εύρος ζώνης που θέτει το κανάλι και η παραμόρφωσή του δημιουργούν διασυμβολική παρεμβολή (Inter – Symbol Interference, ISI). Αυτό που συμβαίνει δηλαδή, είναι ότι οι παλμοί, καθώς φιλτράρονται από το κανάλι, απλώνουν στο χρόνο. Έτσι, κάποια διαδοχικά σύμβολα επικαλύπτονται. Αυτό το γεγονός μπορεί να προκαλέσει προβλήματα στο δέκτη. Συγκεκριμένα, είναι πολύ πιθανό κατά τη διαδικασία της ανίχνευσης ο φωρατής να λάβει λάθος αποφάσεις, δηλαδή να έχουμε σφάλματα συμβόλου (και σε τελική ανάλυση, σφάλματα bit). Γιατί; Μα είναι προφανές. Η επικάλυψη των διαδοχικών συμβόλων αλλάζει την τιμή τους (περνάει ενέργεια από το ένα σύμβολο στο γειτονικό του). Έτσι, όταν ο δέκτης συγκρίνει τις τιμές των συμβόλων με τις τιμές αναφοράς (“πρωτότυπα”), τότε η σύγκριση είναι πολύ πιθανό να γίνει λάθος. Επομένως, η ISI οδηγεί τελικά σε αύξηση του ρυθμού σφαλμάτων bit (Bit Error Rate, BER) και σε υποβάθμιση της απόδοσης του συστήματος.

Αν το κανάλι είναι γνωστό μπορούμε να σχεδιάσουμε βέλτιστα φίλτρα εκπομπής και λήψης ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του Nyquist για μηδενική ISI. Όμως, στις περισσότερες περιπτώσεις το κανάλι είναι άγνωστο εκ των προτέρων, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της επικοινωνίας δεδομένων μέσω του δημόσιου επιλεγόμενου τηλεφωνικού δικτύου (Public Switched Telephone Network, PSTN). Σε μια τέτοια, δε μπορούμε να σχεδιάσουμε βέλτιστα φίλτρα εκπομπής και λήψης ώστε να μηδενίσουμε την ISI. Αντί αυτού, χρησιμοποιούμε κάποιες διατάξεις στο δέκτη (σε συνδυασμό με τα φίλτρα εκπομπής – λήψης, τα οποία τα σχεδιάζουμε σα να ήταν το κανάλι ιδανικό) ώστε να αντισταθμίσουμε (δηλαδή να μειώσουμε ή να εξαφανίσουμε τελείως) την ISI. Οι διατάξεις αυτές ονομάζονται ισοσταθμιστές καναλιού (channel equalizers). Συνήθως, πρόκειται για ψηφιακά φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response, FIR) με ρυθμιζόμενους συντελεστές, εφοδιασμένα με έναν αλγόριθμο υπολογισμού των βέλτιστων συντελεστών.

Ανάλογα με το αν το φίλτρο είναι γραμμικό ή όχι (δηλαδή αν υπάρχει ή αν δεν υπάρχει ανατροφοδότηση της εξόδου στην είσοδο), οι ισοσταθμιστές χωρίζονται σε γραμμικούς (linear equalizers) και σε μη γραμμικούς (non – linear equalizers). Βασικά, οι γραμμικοί ισοσταθμιστές αποτελούνται από ένα γραμμικό εγκάρσιο (FIR) φίλτρο ρυθμιζόμενων συντελεστών (σε κάποιες περιπτώσεις βέβαια, έχουν τη μορφή πλέγματος). Σκοπός τους είναι να “καθαρίζουν” τα δείγματα του λαμβανόμενου σήματος από την ISI και να τα δίνουν μετά (“καθαρά”) στο δέκτη για τη διαδικασία της απόφασης. Για να επιτύχουν καλύτερη απόδοση, πρέπει να επιλέξουν τα βέλτιστα βάρη απόληξης (tap weights). Αυτό μπορεί να γίνει είτε με το κριτήριο παραμόρφωσης κορυφής (peak distortion criterion), είτε με το κριτήριο

ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Minimum Mean Square Error, MMSE). Στην πρώτη περίπτωση, ο ισοσταθμιστής είναι βασικά το αντίστροφο φίλτρο στην απόκριση συχνότητας του καναλιού. Στην ουσία, προσπαθεί να κάνει “επίπεδη” την απόκριση συχνότητας του καναλιού (δηλαδή να το κάνει να φαίνεται ιδανικό κανάλι) ή ισοδύναμα, όση την κρουστική απόκριση του καναλιού. Με άλλα λόγια, προσπαθεί να επιβάλλει μηδενισμούς στα σημεία δειγματοληψίας, ώστε να μην υπάρχει ISI σε αυτά τα σημεία (άλλωστε, αυτές είναι οι χρονικές στιγμές που μας ενδιαφέρουν.) Για αυτό το λόγο, ονομάζεται ισοσταθμιστής επιβολής μηδενισμών (Zero – Forcing equalizer, ZF). Η ISI έχει συγκεκριμένο μήκος. Όσο πιο μεγάλο το μήκος του φίλτρου από τη χρονική διασπορά του καναλιού, τόσο καλύτερη η απόδοσή του. Όμως, πάντα θα υπάρχει μια “παραμένουσα” ISI, μιας που για να μηδενιστεί η ISI απαιτείται ένα φίλτρο με άπειρους συντελεστές. Εκτός αυτού, αφού ο ισοσταθμιστής ZF υλοποιείται ως το ανάστροφο φίλτρο του καναλιού, τότε όταν υπάρχουν συχνοτικά βυθίσματα, θα ενισχύει το θόρυβο (του οποίου την επίδραση δε λαμβάνει πουθενά υπόψη του). Επομένως, η χρήση του δε συνίσταται για κανάλια με βυθίσματα (π.χ. κυψελοειδή κινητά ραδιοκανάλια, ιονοσφαιρικά κανάλια πολλαπλών διαδρομών κ.λ.π.). Αν χαλαρώσουμε λίγο το κριτήριο μηδενισμών που έχουμε θέσει που έχουμε θέσει, μπορούμε να λάβουμε καλύτερη απόδοση, λαμβάνοντας υπόψη μας το θόρυβο. Πώς γίνεται αυτό; Απλά, τώρα προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την ισχύ του συνδυασμένου σήματος σήμα σφάλματος – θόρυβος.

Ο ισοσταθμιστής αναδραστικής απόκρισης (Decision – Feedback, DFE) είναι ένας μη γραμμικός ισοσταθμιστής. Αποτελείται από ένα πρόσθιο φίλτρο (στην ουσία, ένα γραμμικό ισοσταθμιστή), και από ένα φίλτρο ανάδρασης. Το φίλτρο ανάδρασης χρησιμοποιεί τις αποφάσεις του φωρατή για προηγούμενα σύμβολα (ο οποίος φωρατής τροφοδοτείται από το πρόσθιο φίλτρο) ώστε να εξαλείψει την ISI στο παρόν σύμβολο. Προφανώς, αν συμβεί κάποιο σφάλμα συμβόλου, τότε αυτό θα το σφάλμα θα διαδοθεί, υποβαθμίζοντας την απόδοση του συστήματος. Ευτυχώς, η διάδοση δεν είναι καταστρεπτική. Γενικά, ο DFE έχει καλύτερη απόδοση από τους γραμμικούς ισοσταθμιστές.

Ο βέλτιστος δέκτης πάντως για κανάλια με ISI είναι ο εκτιμητής ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Sequence Estimator, MLSE) ή ισοσταθμιστής Viterbi. Πρόκειται για ένα μη γραμμικό δέκτη ο οποίος αντί να προσπαθεί να καθαρίσει το λαμβανόμενο σύμβολο από την ISI, προσπαθεί να μετρήσει το κανάλι, και να ταιριάζει καλύτερα στο περιβάλλον μετάδοσης, ώστε να πάρει την καλύτερη απόφαση. Το συνολικό σύστημα φίλτρο εκπομπής – κανάλι – φίλτρο λήψης – δειγματολήπτης μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα ισοδύναμο φίλτρο διακριτού χρόνου. Άρα, η έξοδος του μπορεί να περιγραφεί από μια μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων (Finite States Machine, FSM). Δηλαδή, η μνήμη του σήματος (που εισάγει το κανάλι) αναπαρίσταται από ένα δικτυωτό διάγραμμα (trellis). Ο MLSE εκτελεί αναζήτηση trellis μέσω του αλγόριθμου Viterbi (Viterbi Algorithm, VA). Ο VA είναι ένας ακολουθιακός αλγόριθμος για να εκτελούμε την αναζήτηση trellis. Μέσω του αλγόριθμου Viterbi μειώνεται η υπολογιστική πολυπλοκότητα (και άρα και η χρονική καθυστέρηση, που είναι απαγορευτική για real – time εφαρμογές) και η πολυπλοκότητα υλοποίησης (που έχει να κάνει με το κόστος), αλλά παραμένει ιδιαίτερα υψηλή για μεγάλης έκτασης ISI ή για σήματα με πολλές συμβολοκαταστάσεις. Για αυτό, συνήθως, επιλέγονται υποβέλτιστοι δέκτες. Πάντως, ο MLSE έχει την καλύτερη θεωρητική απόδοση, και αποτελεί σημείο αναφοράς για σύγκριση και αξιολόγηση ανάμεσα στους διάφορους ισοσταθμιστές.

Αν η απόσταση ανάμεσα στις απολήξεις του ισοσταθμιστή είναι ίση με τη διάρκεια σηματοδοσίας, τότε μιλάμε για ένα ισοσταθμιστή συμβόλου (symbol –

spaced equalizer). Ένας τέτοιος ισοσταθμιστής, πρέπει να καταπολεμήσει και την ISI των “ψευδώτυπων” (alias components) του σήματος. Από την άλλη, αν η απόσταση ανάμεσα στις απολήξεις του είναι μικρότερη της διάρκειας του συμβόλου, τότε μιλάμε για έναν κλασματικό ισοσταθμιστή (fractionally – spaced equalizer), ο οποίος δεν αντιμετωπίζει τέτοια προβλήματα.

Τέλος, όσον αφορά τους ισοσταθμιστές, όταν έχουμε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο – άρα τυχαίο – κανάλι (π.χ. ασύρματο ραδιοκανάλι διαλείψεων πολλαπλών διαδρομών), τότε δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προρυθμισμένους ισοσταθμιστές (preset equalizers), δηλ. ισοσταθμιστές με σταθερούς συντελεστές. Είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε προσαρμοστικούς ισοσταθμιστές (adaptive equalizers). Αυτοί, πριν την εκπομπή των δεδομένων, και σε τακτά χρονικά διαστήματα, μετράνε το κανάλι μέσω μιας ακολουθίας εκμάθησης (training sequence), ώστε να ρυθμίσουν κάθε φορά τους συντελεστές τους με βέλτιστο τρόπο. Κάποια στιγμή, μετά από αρκετές επαναλήψεις, περνάνε σε τρόπο λειτουργίας βασισμένο στις αποφάσεις τους (decision – directed mode). Εδώ πρέπει να σημειώσουμε πως η ακολουθία εκμάθησης είναι συνήθως μια ψευδοθορυβική ακολουθία (Pseudo – Noise sequence, PN), λόγω της φασματικής κατανομής της ενέργειάς της.

Το δεύτερο θέμα με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι τα συστήματα πολλαπλών καναλιών (multiple channel systems) και τα συστήματα πολλαπλών φερόντων (multiple carrier systems). Τα μεν πρώτα, χρησιμοποιούνται για να παρέχουμε diversity στο σήμα (π.χ. να μειώσουμε την επίδραση ενός συχνοτικού συστήματος). Τα τελευταία χρησιμοποιούνται για να μετατρέψουμε ένα ευρυζωνικό κανάλι συχνοεπιλεκτικών διαλείψεων σε πολλά στενά κανάλια επίπεδων διαλείψεων. Εκτός από την frequency diversity που παρέχουμε στο σύστημα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προσαρμοστική διαμόρφωση και να επιτύχουμε ιδιαίτερα υψηλούς ρυθμούς μετάδοσης. Επίσης, χρησιμοποιούμε απλούς μιγαδικούς ισοσταθμιστές (βασικά, ένας πολλαπλασιαστής ανά υποκανάλι και κάποια σήματα πιλότοι για τη μέτρηση του καναλιού). Για να χρησιμοποιήσουμε καλύτερα το διαθέσιμο εύρος ζώνης, τα κανάλια είναι ορθογωνικά μεταξύ τους. Λόγω της συνθήκης ορθογωνικότητας, ο διαμορφωτής και ο αποδιαμορφωτής υλοποιούνται αποδοτικά μέσω IFFT/FFT.

Το τρίτο θέμα έχει να κάνει με τις τεχνικές διεύρυνσης φάσματος (spread spectrum techniques). Με τη βοήθεια μιας PN κωδικής ακολουθίας, διευρύνουμε το φάσμα του σήματος πολύ περισσότερο από ότι με τη διαδικασία της διαμόρφωσης. Έχουμε συνήθως διεύρυνση άμεσης ακολουθίας (Direct – Sequence, DS) ή διεύρυνση με άλματα συχνότητας (Frequency – Hopping, FH). Η κωδική ακολουθία είναι συγκεκριμένη και έχει γνώση αυτής ο εξουσιοδοτημένος χρήστης μόνο. Η διεύρυνση προσφέρει frequency diversity και δίνει ένα κέρδος επεξεργασίας (Processing Gain, PG) στο σύστημα. Κρύβοντας το σήμα στο θόρυβο (διεύρυνση), και ανακτώντας το στο δέκτη (αποδιεύρυνση), χαρίζουμε ιδιωτικότητα επικοινωνίας (χαμηλή πιθανότητα αναχαίτισης), προστασία από διάφορα είδη παρεμβολών/ασφάλεια επικοινωνίας (κακόβουλων ή μη), και δυνατότητα επικοινωνιών πολλαπλής προσπέλασης.

INTRODUCTION

At this project, we will study three subjects. The first is the communication through non – ideal band limited linear filter channels with Additive White Gaussian Noise, AWGN. The bandwidth constraint and the distortion which introduce leads to Inter – Symbol Interference, ISI. In other words, pulses are smeared because of filtering effect. Thus, adjacent symbols are overlapping. This can cause troubles to the receiver. Particularly, it is very possible to have wrong decisions by the detector, because the value of the symbols have changed (the effect of overlapping). So, ISI leads finally to an increase to Bit Error Rate, BER and to performance degradation for the overall system.

If it is a known channel, we can design the optimal transmit and receive filter so to satisfy Nyquist' s criterion for zero ISI. But, at most cases, the channel is unknown a priori. Such a case is the data communication through PSTN. We can see clearly that we can't design optimal filters. So, we use some devices at the receiver (in combination with the transmit and receive filters, witch are not optimal now, because we design them like it is an ideal channel) to compensate (reduce or fully suppress) the ISI. These devices are called channel equalizers. Usually, there is Finite Impulse Response (FIR) digital filters with adjustable coefficients, and an algorithm for the computation of the optimal coefficients.

If the filter is linear, we call the equalizer linear too. Othewise (i.e. if we have feedback from the output to the input), we call it non – linear Basically, linear equalizers are transversal FIR filters (in some cases, they are lattice filter). They trye toy “clean up”the received samples from ISI and then give them (“clean”) at the receiver for the decision process. To achieve better performance, they must choose optimal tap weights. The selection criterion is either the peak distortion criterion, or the Minimum Mean Square Error, MMSE. At the former, the equalizer is basically the “inverse channel”. It tries to make “flat” channel's frequency response (make it almost ideal) or equivalently, makes channel's impulse response a simple Dirac impulse. In other words, it tries to have zero ISI at the sampling points. Therefore, we call it Zero – Forcing equalizer, ZF. H ISI has a finite length. The bigger the filter length from the channel dispersion, the better its performance. However, there is always exists a “residual” ISI. For zero ISI, we need a filter with infinite coefficients. Besides that, the ZF equalizer is implemented as the “inverse channel”. That means that, when we have deep at the channel frequency response, the equalizer reinforce the noise (which it not considering at the optimization process). So, we don't use an equalizer like that at a channel with notches, like mobile cellular channels. If we will use a less tie criterion and consider the excistence of noise, we can improve performance. How is that possible; We trying to minimize the combined signal – noise power.

Decision – Feedback, Equalizer, DFE is a non – linear equalizer. He involves a feedforward filter (a linear equalizer), and a feedback filter. Feedback filter uses

detectors decisions for previous symbols (the detector has as input the output of the feedforward filter) to compensate the ISI at the current symbol. Obviously, if we have a symbol error, then it will propagate, degrades that way system's performance. Fortunately, the propagation it isn't catastrophic. Generally, DFE has better performance than linear equalizers.

However, the optimal receiver for ISI channels is the Maximum Likelihood Sequence Estimator, MLSE or Viterbi equalizer. It is a non – linear receiver. It doesn't try to "clean" the received symbol from ISI. Instead, tries to measure the channel, and to match itself to the transmission environment. With that method, it will have the best decision. The overall serial system transmit filter – channel – receive filter – sampler can be represented by an equivalent discrete – time filter. So, his output is described by a Finite States Machine, FSM. That means signals memory is represented by a trellis. MLSE performs trellis search with Viterbi Algorithm, VA. The VA is a sequential algorithm to perform trellis search and reduce the computational complexity (so, and the time delay, which is non – acceptable for real – time communications) and the implementation complexity (that means, it reduce the cost). However, it is still very computational complex for channels with ISI with high length or for signals with many states. Therefore, we usually use sub – optimal equalizers. But, MLSE has the best theoretical performance and we use it as a benchmark.

If equalizer's tap interval is equal to signaling interval, we talk for a symbol – spaced equalizer. Such an equalizer has to compensate the ISI and for signal's alias components. At the other hand, if equalizer's tap interval is less than signaling interval, we talk for a fractionally – spaced equalizer, which doesn't have such problems.

Finally, for a time – variant – that means random – channel (for example, a wireless multipath fading radio – channel), we can't use preset equalizers (equalizers with fixed coefficients). We have to use adaptive equalizers. Before data transmission, and with a repetitive manner, adaptive equalizers measures channel with a training sequence, to adjust every single time the coefficients with an optimal way. After some iterations, the equalizer switches to decision – directed mode. We have to state that the training sequence is usually a Pseudo – Noise sequence, PN, because it's energy distribution at the frequency domain.

The second subject that we will study is multiple channel systems and multiple carrier systems. The former we use them for diversity (for example, to reduce the effect of a frequency notch). The latter is used to convert a wideband frequency – selective channel to many narrow flat fading channels. We also provide frequency diversity that way. Furthermore, we can have adaptive modulation and, thus, increase transmission rate. Also, we use simple equalizers (basically, a complex multiplier per sub – channel, and some pilots for the channel measurement). For better use of the available channel bandwidth, the sub – channels are orthogonal. Because of the orthogonality, the modulator and the demodulator are efficiently implemented by the IFFT/FFT correspondingly.

The third subject is about spreading techniques. We use a PN code sequence to spread signals spectrum much more than with modulation. We usually have Direct – Sequence, DS or Frequency – Hopping, FH. The code word is unique and only the authenticated user knows it Spreading offers frequency diversity (Processing Gain, PG to the system. Hiding the signal at the background noise (spreading), and detect it at the receiver (despreading), we have communication privacy (Low Probability of

Intercept, LPI), secure communications (Anti – Jamming property, AJ), and multiple access capability (Code Division Multiple Access, CDMA)..

ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕΣΩ
ΚΑΝΑΛΙΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟΥ
ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ
ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ
ΩΣ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

Η διαδικασία σχεδίασης φίλτρων διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης για κανάλια περιορισμένου εύρους ζώνης βασίζεται στην υπόθεση ότι η χαρακτηριστική απόκριση $C(f)$ είναι γνωστή εκ των προτέρων. Παρόλα αυτά, σε πρακτικά συστήματα ψηφιακών επικοινωνιών που σχεδιάζονται για να μεταδίδουν σε υψηλές ταχύτητες μέσω καναλιών περιορισμένου εύρους ζώνης, η απόκριση συχνότητας $C(f)$ του καναλιού δεν είναι γνωστή με ικανοποιητική ακρίβεια ώστε να είναι δυνατός ο σχεδιασμός βέλτιστου φίλτρου για το διαμορφωτή και τον αποδιαμορφωτή. Για παράδειγμα, στην ψηφιακή επικοινωνία μέσω του επιλεγόμενου τηλεφωνικού δικτύου, το κανάλι επικοινωνίας θα είναι διαφορετικό κάθε φορά που καλούμε έναν αριθμό, γιατί η διαδρομή του καναλιού θα είναι διαφορετική. Αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός καναλιού του οποίου τα χαρακτηριστικά είναι άγνωστα εκ των προτέρων. Υπάρχουν επίσης και άλλοι τύποι καναλιών, π.χ. ασύρματα κανάλια όπως τα ραδιοκανάλια και τα υποβρύχια ακουστικά κανάλια, των οποίων οι χαρακτηριστικές απόκρισης συχνότητας είναι χρονικά μεταβαλλόμενες. Για τέτοια κανάλια, δεν είναι εφικτό να σχεδιάσουμε βέλτιστα σταθερά φίλτρα αποδιαμόρφωσης.

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε το πρόβλημα της σχεδίασης δέκτη υπό την παρουσία της παραμόρφωσης του καναλιού, η οποία δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, και του AWGN. Η παραμόρφωση του καναλιού έχει ως αποτέλεσμα διασυμβολική παρεμβολή, η οποία αν δεν αντισταθμιστεί, προκαλεί υψηλό ρυθμό σφαλμάτων. Η λύση στο πρόβλημα της ISI είναι να σχεδιάσουμε ένα δέκτη ο οποίος να χρησιμοποιεί διάφορα μέσα για να αντισταθμίσει ή να μειώσει την ISI στο λαμβανόμενο σήμα. Ο αντισταθμιστής για την ISI ονομάζεται **ισοσταθμιστής ή εξισωτής (equalizer)**.

Τρεις τύποι μεθόδων ισοστάθμισης πραγματεύονται σε αυτό το κεφάλαιο. Η μία βασίζεται στο **κριτήριο ανίχνευσης ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Sequence Detection criterion)**, το οποίο είναι βέλτιστο από την σκοπιά της πιθανότητας σφάλματος. Μια δεύτερη μέθοδος ισοστάθμισης βασίζεται στη χρήση ενός γραμμικού φίλτρου με ρυθμιζόμενους συντελεστές. Η τρίτη μέθοδος ισοστάθμισης που περιγράφεται εκμεταλλεύεται τη χρήση

προγενέστερα ανιχνευμένων συμβόλων για να καταπνίξει την ISI στα παρόντα σύμβολα που ανιχνεύονται, και ονομάζεται **ισοστάθμιση αναδραστικής απόφασης (Decision – Feedback Equalization)**. Ξεκινάμε με την εξαγωγή του βέλτιστου ανιχνευτή για κανάλια με ISI.

1.1 ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΔΕΚΤΗΣ ΓΙΑ ΚΑΝΑΛΙΑ ΜΕ ISI ΚΑΙ AWGN

Σε αυτό το τμήμα, εξάγουμε τη δομή του βέλτιστου αποδιαμορφωτή και ανιχνευτή για ψηφιακή μετάδοση μέσω ενός μη ιδανικού καναλιού περιορισμένου εύρους ζώνης με προσθετικό γκαουσιανό θόρυβο. Ξεκινάμε με το μεταδιδόμενο (ισοδύναμο χαμηλοπερατό) σήμα το οποίο δίνεται ως γνωστόν από την:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t - nT) \quad (1.1 - 1)$$

Το λαμβανόμενο (ισοδύναμο χαμηλοπερατό) σήμα εκφράζεται ως

$$r_l(t) = \sum_n I_n h(t - nT) + z(t) \quad (1.1 - 2)$$

όπου η $h(t)$ αναπαριστά την απόκριση του καναλιού στο σήμα εισόδου, παλμό $g(t)$, και η $z(t)$ αναπαριστά τον προσθετικό λευκό γκαουσιανό θόρυβο.

Πρώτα θα δείξουμε ότι ο βέλτιστος αποδιαμορφωτής μπορεί να θεωρηθεί ως ένα προσαρμοσμένο φίλτρο στην $h(t)$, ακολουθούμενο από ένα δειγματολήπτη ο οποίος λειτουργεί με ρυθμό συμβόλου $1/T$ και ένα εξελιγμένο επεξεργαστικό αλγόριθμο για να υπολογίζουμε την πληροφοριακή ακολουθία $\{I_n\}$ από τις τιμές των δειγμάτων. Συνεπώς, τα δείγματα στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι αρκετά για την εκτίμηση της ακολουθίας $\{I_n\}$.

1.1.1 Βέλτιστος Δέκτης Μέγιστης Πιθανόφάνειας

Ας επεκτείνουμε το λαμβανόμενο σήμα $r_l(t)$ στη σειρά

$$r_l(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N r_k f_k(t) \quad (1.1 - 3)$$

όπου $\{f_k(t)\}$ είναι ένα πλήρες σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων και $\{r_k\}$ είναι οι τηρούμενες τυχαίες μεταβλητές που λαμβάνονται προβάλλοντας το $r_l(t)$ πάνω στο σύνολο $\{f_k(t)\}$. Μπορεί να φανεί εύκολα ότι

$$r_k = \sum_n I_n h_{kn} + z_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.1 - 4)$$

όπου h_{kn} η τιμή που εξάγεται προβάλλοντας την $h(t-nT)$ στην $f_k(t)$, και z_k είναι η τιμή που εξάγεται προβάλλοντας την $z(t)$ στην $f_k(t)$. Η ακολουθία $\{z_k\}$ είναι γκαουσιανή με μηδενική μέση τιμή και συμεταβλητότητα

$$\frac{1}{2}E(z_k^* z_m) = N_0 \delta_{km} \quad (1.1-5)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας της από κοινού πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $\mathbf{r}_N = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_N]$, η οποία εξαρτάται από την εκπεμπόμενη ακολουθία $\mathbf{I}_p = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_p]$, όπου $p \leq N$, είναι

$$p(\mathbf{r}_N | \mathbf{I}_p) = \left(\frac{1}{2\pi N_0} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2N_0} \sum_{k=1}^N \left| r_k - \sum_n I_n h_{kn} \right|^2 \right) \quad (1.1-6)$$

Στο όριο, όσο ο αριθμός N της παρατηρούμενης τυχαίας μεταβλητής προσεγγίζει το άπειρο, ο λογάριθμος της $p(\mathbf{r}_N | \mathbf{I}_p)$ είναι ανάλογος των μετρικών $PM(\mathbf{I}_p)$, οι οποίες ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} PM(\mathbf{I}_p) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left| r_l(t) - \sum_n I_n h(t-nT) \right|^2 dt \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} |r_l(t)|^2 dt + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_n \left[I_n^* \int_{-\infty}^{\infty} r_l(t) h^*(t-nT) dt \right] \right\} \\ &\quad - \sum_n \sum_m I_n^* I_m \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t-nT) h(t-mT) dt \end{aligned} \quad (1.1-7)$$

Οι εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας των συμβόλων I_1, I_2, \dots, I_p είναι εκείνες που μεγιστοποιούν αυτή την ποσότητα. Παρατηρήστε όμως ότι το ολοκλήρωμα του $|r_l(t)|^2$ είναι κοινό σε όλες τις μετρικές και για αυτό το λόγο μπορεί να απορριφθεί. Το άλλο ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει την $r(t)$ “οδηγεί” στις μεταβλητές

$$y_n = y(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} r_l(t) h^*(t-nT) dt \quad (1.1-8)$$

Αυτές οι μεταβλητές μπορούν να γεννηθούν περνώντας το $r(t)$ μέσα από ένα φίλτρο προσαρμοσμένο στην $h(t)$ και δειγματοληπώντας την έξοδο με ρυθμό συμβόλου $1/T$. Τα δείγματα $\{y_n\}$ σχηματίζουν ένα σύνολο με επαρκή στατιστικά δεδομένα για τον υπολογισμό της $PM(\mathbf{I}_p)$ ή, ισοδύναμα, των μετρικών συσχέτισης

$$CM(\mathbf{I}_p) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \left[\sum_n I_n^* y_n \right] - \sum_n \sum_m I_n^* I_m x_{n-m} \right\} \quad (1.1 - 9)$$

όπου, εξ ορισμού, $x(t)$ είναι η απόκριση του προσαρμοσμένου φίλτρου στο $h(t)$ και

$$x_n = x(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) h(t + nT) dt \quad (1.1 - 10)$$

Για αυτό το λόγο, το $x(t)$ αναπαριστά την έξοδο ενός φίλτρου το οποίο έχει μια κρουστική απόκριση $h^*(-t)$ και μια διέγερση $h(t)$. Με άλλα λόγια, το $x(t)$ αναπαριστά τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του $h(t)$. Συνεπώς, το $\{x_n\}$ αναπαριστά τα δείγματα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του $h(t)$, τα οποία λαμβάνονταν περιοδικά κάθε $1/T$. Δεν μας απασχολούν ιδιαίτερα τα μη αιτιατά χαρακτηριστικά του προσαρμοσμένου στο $h(t)$ φίλτρου, από τη στιγμή που στην πράξη μπορούμε να εισάγουμε μια αρκετά μεγάλη καθυστέρηση για να εξασφαλίσουμε την αιτιότητα του προσαρμοσμένου φίλτρου.

Αν αντικαταστήσουμε την $r_l(t)$ στην (1.1 - 8) χρησιμοποιώντας την (1.1 - 1), θα πάρουμε

$$y_k = \sum_n I_n x_{k-n} + v_k \quad (1.1 - 11)$$

όπου η v_k συμβολίζει την ακολουθία προσθετικού θορύβου της εξόδου του προσαρμοσμένου φίλτρου. Με άλλα λόγια

$$v_k = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) h^*(t - kT) dt \quad (1.1 - 12)$$

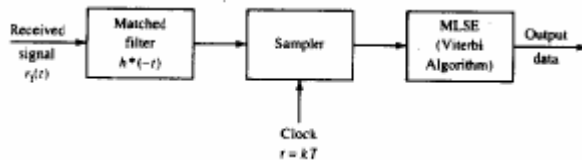
Η έξοδος του αποδιαμορφωτή (προσαρμοσμένο φίλτρο) στις στιγμές δειγματοληψίας είναι μολυσμένη από ISI όπως φαίνεται από την (1.1 - 11). Σε κάθε πρακτικό σύστημα, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η ISI επηρεάζει ένα πεπερασμένο αριθμό συμβόλων. Για αυτό το λόγο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n = 0$ για $|n| > L$. Συνεπώς, η παρατηρούμενη ISI στην έξοδο του αποδιαμορφωτή μπορεί να θεωρηθεί ως η έξοδος μιας μηχανής πεπερασμένων καταστάσεων. Αυτό συνεπάγεται ότι η έξοδος του καναλιού με ISI μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα δικτυωτό διάγραμμα (trellis), και η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας της πληροφοριακής ακολουθίας (I_1, I_2, \dots, I_p) είναι απλά η πιο πιθανή διαδρομή μέσω του δικτυωτού διαγράμματος δοσμένης της λαμβανόμενης από την έξοδο του αποδιαμορφωτή ακολουθίας $\{y_n\}$. Ξεκάθαρα, ο αλγόριθμος Viterbi προσφέρει ένα αποδοτικό τρόπο για την εκτέλεση της αναζήτησης δικτυωτού διαγράμματος.

Οι μετρικές για την **εκτίμηση ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Sequence Estimation, MLSE)** της ακολουθίας $\{I_k\}$ υπολογίζονται από

την (1.1 – 9). Μπορεί να δείχθει ότι αυτές οι μετρικές γίνεται να υπολογιστούν αναδρομικά στον αλγόριθμο Viterbi, σύμφωνα με τη σχέση

$$CM(\mathbf{I}_n) = CM_{n-1}(\mathbf{I}_{n-1}) + \text{Re} \left\{ I_n^* \left(2y_n - x_0 I_n - 2 \sum_{m=1}^L x_m I_{n-m} \right) \right\} \quad (1.1 - 13)$$

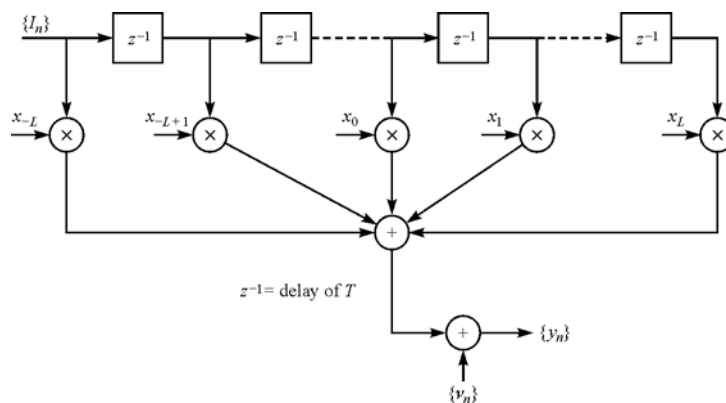
Το σχήμα 1.1 – 1 δείχνει το διάγραμμα βαθμίδων του βέλτιστου δέκτη για ένα AWGN κανάλι με ISI.



ΣΧΗΜΑ 1.1 – 1 Βέλτιστος δέκτης για ένα κανάλι με AWGN και ISI.

1.1.2 Ένα Μοντέλο Διακριτού Χρόνου για ένα Κανάλι με ISI

Ασχολούμενοι με κανάλια περιορισμένου εύρους ζώνης τα οποία έχουν ως αποτέλεσμα ISI, είναι βολικό να αναπτύξουμε ένα ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου για το αναλογικό (συνεχούς χρόνου) σύστημα. Αφού ο πομπός στέλνει σύμβολα διακριτού χρόνου με ένα ρυθμό $1/T$ σύμβολα/δευτερόλεπτο, και η δειγματολαμβανόμενη έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου στο δέκτη είναι επίσης ένα σήμα διακριτού χρόνου με δείγματα που λαμβάνουν χώρα με ένα ρυθμό $1/T$ δείγματα ανά δευτερόλεπτο, έπεται ότι η σε σειρά σύνδεση του αναλογικού φίλτρου στον πομπό με κρουστική απόκριση $g(t)$, του καναλιού με κρουστική απόκριση $c(t)$, του προσαρμοσμένου φίλτρου στο δέκτη με κρουστική απόκριση $h^*(-t)$ και του δειγματολήπτη μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα ισοδύναμο εγκάρσιο ψηφιακό φίλτρο το οποίο έχει συντελεστές κέρδους απόληξης $\{x_k\}$. Συνεπώς, έχουμε ένα ισοδύναμο εγκάρσιο φίλτρο διακριτού χρόνου το οποίο χωρίζει ένα χρονικό διάστημα $2LT$ δευτερολέπτων. Η είσοδος του είναι η ακολουθία συμβόλων πληροφορίας $\{I_k\}$ και η έξοδος του είναι η ακολουθία διακριτού χρόνου $\{y_k\}$, η οποία δίνεται από την (1.1 – 11). Το ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου φαίνεται στο Σχ.1.1 – 2.



ΣΧΗΜΑ 1.1 – 2 Ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου καναλιού με ISI.

Η κύρια δυσκολία με αυτό το μοντέλο διακριτού χρόνου βρίσκεται στην αποτίμηση της απόδοσης των ποικίλων μεθόδων ισοστάθμισης ή εκτίμησης οι οποίες συζητούνται στα επόμενα τμήματα. Η δυσκολία προκαλείται από τις συσχετίσεις στην ακολουθία θορύβου $\{v_k\}$ στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου. Δηλαδή, το σύνολο των μεταβλητών θορύβου $\{v_k\}$ είναι μια ακολουθία γκαουσιανής κατανομής με μηδενική μέση τιμή και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$\frac{1}{2}E(v_k^* v_j) = \begin{cases} N_0 x_{k-j} & (|k-j| \leq L) \\ 0 & (\text{αλλιως}) \end{cases} \quad (1.1-14)$$

Για αυτό το λόγο, η ακολουθία θορύβου είναι συσχετισμένη εκτός αν $x_k = 0$, $k \neq 0$. Από τη στιγμή που είναι πιο βολικό να διαπραγματευόμαστε την ακολουθία λευκού θορύβου όταν υπολογίζουμε την απόδοση του ρυθμού σφαλμάτων, είναι επιθυμητό να “λευκάνουμε” την ακολουθία θορύβου με επιπλέον φιλτράρισμα της ακολουθίας $\{y_k\}$. Ένα φίλτρο διακριτού χρόνου “λευκώματος” θορύβου καθορίζεται ως ακολούθως.

Έστω ότι η $X(z)$ συμβολίζει τον (αμφίπλευρο) μετασχηματισμό z της δειγματολαμβανόμενης συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $\{x_k\}$. Με άλλα λόγια:

$$X(z) = \sum_{k=-L}^L x_k z^{-k} \quad (1.1-15)$$

Αφού $x_k = x_{-k}^*$, συνεπάγεται ότι $X(z) = X^*(z^{-1})$ και οι $2L$ ρίζες της $X(z)$ παρουσιάζουν την εξής συμμετρία: αν είναι η ρ μια ρίζα, τότε η $1/\rho^*$ είναι επίσης μια ρίζα. Για αυτό το λόγο, η $X(z)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί και να εκφραστεί ως

$$X(z) = F(z)F^*(z^{-1}) \quad (1.1-16)$$

όπου το $F(z)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού L το οποίο έχει τις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L$ και το $F^*(z^{-1})$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού L το οποίο έχει τις ρίζες $1/\rho_1^*, 1/\rho_2^*, \dots, 1/\rho_L^*$. Τότε, ένα κατάλληλο φίλτρο “λευκώματος” θορύβου έχει ένα μετασχηματισμό z $1/F^*(z^{-1})$. Αφού υπάρχουν 2^L πιθανές επιλογές για τις ρίζες του $F^*(z^{-1})$, όπου η κάθε επιλογή έχει ως αποτέλεσμα μια χαρακτηριστική του φίλτρου η οποία είναι ταυτόσημη στο μέτρο αλλά διαφορετική στη φάση από τις άλλες επιλογές ριζών, προτείνουμε την επιλογή της μοναδικής $F^*(z^{-1})$ η οποία έχει ελάχιστη φάση. Με άλλα λόγια, επιλέγουμε το πολυώνυμο που έχει όλες τις ρίζες του μέσα στο μοναδιαίο κύκλο. Έτσι, όταν όλες οι ρίζες του $F^*(z^{-1})$ είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, το $1/F^*(z^{-1})$ είναι ένα φυσικά υλοποιήσιμο, ευσταθές,

αναδρομικό φίλτρο διακριτού χρόνου.[†] Συνεπώς, το πέρασμα της ακολουθίας $\{y_k\}$ μέσα από το ψηφιακό φίλτρο $1/F^*(z^{-1})$ έχει ως αποτέλεσμα μια ακολουθία εξόδου $\{v_k\}$ η οποία μπορεί να εκφραστεί ως

$$v_k = \sum_{n=0}^L f_n I_{k-n} + n_k \quad (1.1 - 17)$$

όπου $\{n_k\}$ είναι μια ακολουθία λευκού γκαουσιανού θορύβου και $\{f_k\}$ είναι ένα σύνολο συντελεστών απόληξης ενός ισοδύναμου εγκάρσιου φίλτρου διακριτού χρόνου το οποίο έχει μια συνάρτηση μεταφοράς $F(z)$. Γενικά, η ακολουθία $\{v_k\}$ είναι μιγαδική.

Περίληπτικά, η σε σειρά σύνδεση του φίλτρου εκπομπής $g(t)$, του καναλιού $c(t)$, του προσαρμοσμένου φίλτρου $h^*(-t)$, του δειγματολήπτη, και του φίλτρου διακριτού χρόνου “λευκώματος” θορύβου $1/F^*(z^{-1})$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα ισοδύναμο εγκάρσιο φίλτρο διακριτού χρόνου το οποίο έχει το σύνολο $\{f_k\}$ ως τους συντελεστές απόληξής του. Η ακολουθία προσθετικού θορύβου $\{n_k\}$ η οποία μολύνει την έξοδο του εγκάρσιου φίλτρου διακριτού χρόνου είναι μια ακολουθία λευκού γκαουσιανού θορύβου η οποία έχει μηδενική μέση τιμή και διακύμανση N_0 . Στο σχήμα 1.1 – 3 φαίνεται το μοντέλο ενός ισοδύναμου συστήματος διακριτού χρόνου με λευκό θόρυβο. Αναφερόμαστε σε αυτό το μοντέλο ως το **ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου φίλτρου λευκού θορύβου (equivalent discrete – time white noise filter model)**.

Παράδειγμα 1.1 – 1

Υποθέστε ότι το σήμα του μεταδιδόμενου παλμού $g(t)$ έχει διάρκεια T και μοναδιαία ενέργεια και το σήμα του λαμβανόμενου παλμού είναι $h(t) = g(t) + ag(t-T)$. Ας προσδιορίσουμε το ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου του φίλτρου λευκού θορύβου. Η δειγματολαμβανόμενη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από την

$$x_k = \begin{cases} a^* & (k = -1) \\ 1 + |a|^2 & (k = 0) \\ a & (k = 1) \end{cases} \quad (1.1 - 18)$$

Ο μετασχηματισμός z της x_k είναι

[†] Μετακινώντας την συνθήκη ευστάθειας, μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι η $F^*(z^{-1})$ έχει ρίζες στο μοναδιαίο κύκλο.

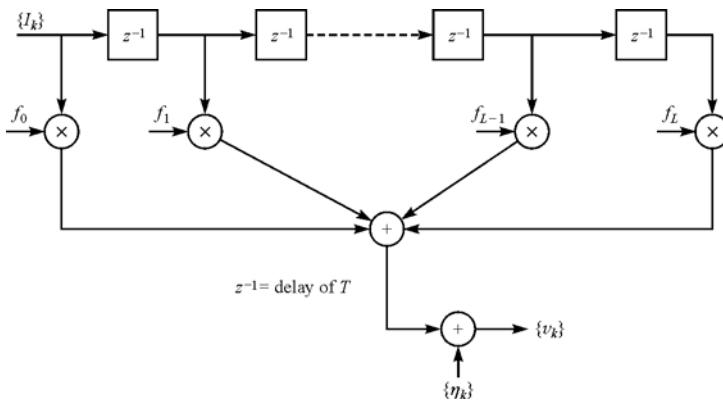
$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{k=-1}^1 x_k z^{-k} \\
&= a^* z + (1 + |a|^2) + az^{-1} \\
&= (az^{-1} + 1)(a^* z + 1)
\end{aligned} \tag{1.1 - 19}$$

Κάτω από την υπόθεση ότι $|a| > 1$, μένει η επιλογή $F(z) = (az^{-1} + 1)$, ώστε το ισοδύναμο εγκάρσιο φίλτρο να αποτελείται από δύο απολήξεις που έχουν συντελεστές απόληξης $f_0 = 1, f_1 = a$. Παρατηρήστε ότι η ακολουθία συσχέτισης $\{x_k\}$ μπορεί να εκφραστεί με όρους της $\{f_k\}$ ως

$$x_k = \sum_{n=0}^{L-k} f_n^* f_{n+k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L \tag{1.1 - 20}$$

Όταν η κρουστική απόκριση του καναλιού αλλάζει αργά με το χρόνο, το προσαρμοσμένο φίλτρο στο δέκτη γίνεται ένα χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο. Σε αυτή την περίπτωση, οι χρονικές μεταβολές του ζεύγους κανάλι/προσαρμοσμένο φίλτρο έχουν ως αποτέλεσμα ένα φίλτρο διακριτού χρόνου με χρονικά μεταβαλλόμενους συντελεστές. Ως συνέπεια, έχουμε φαινόμενα χρονικά μεταβαλλόμενης διασυμβολικής παρεμβολής, τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν από το φίλτρο που φαίνεται στο Σχ.1.1 - 3, όπου οι συντελεστές απόληξης μεταβάλλονται αργά με το χρόνο.

Το μοντέλο του γραμμικού φίλτρου διακριτού χρόνου λευκού θορύβου για τα φαινόμενα διασυμβολικής παρεμβολής που προκύπτουν στη ψηφιακή μετάδοση υψηλής ταχύτητας διαμέσου μη ιδανικών καναλιών περιορισμένου εύρους ζώνης θα χρησιμοποιηθεί στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου στη συζήτησή μας για τις μεθόδους αντιστάθμισης για την παρεμβολή. Γενικά, οι μέθοδοι αντιστάθμισης ονομάζονται **μέθοδοι ισοστάθμισης (equalization techniques)** ή **αλγόριθμοι ισοστάθμισης (equalization algorithms)**.



ΣΧΗΜΑ 1.1 - 3 Ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου με λευκό θόρυβο και ISI.

1.1.3 Ο Αλγόριθμος Viterbi για το Μοντέλο Φίλτρου Διακριτού Χρόνου Λευκού Θορύβου

Η MLSE της πληροφοριακής ακολουθίας $\{I_k\}$ περιγράφεται πιο εύκολα με όρους της λαμβανόμενης ακολουθίας $\{v_k\}$ στην έξοδο του φίλτρου “λευκώματος”. Υπό την παρουσία της διασυμβολικής παρεμβολής η οποία καλύπτει $L+1$ σύμβολα (L συνιστώσες παρεμβολής), το κριτήριο MLSE είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα της ανίχνευσης της κατάστασης μιας μηχανής πεπερασμένων καταστάσεων διακριτού χρόνου. Η μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων σε αυτή την περίπτωση είναι το ισοδύναμο κανάλι διακριτού χρόνου με συντελεστές $\{f_k\}$, και η κατάστασή της κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τις L πιο πρόσφατες εισόδους. Με άλλα λόγια, η κατάσταση σε χρόνο k είναι:

$$S_k = (I_{k-1}, I_{k-2}, \dots, I_{k-L}) \quad (1.1 - 21)$$

όπου $I_k = 0$ για $k \leq 0$. Για αυτό το λόγο, αν τα σύμβολα πληροφορίας είναι M – αδικά, το κανάλι/φίλτρο έχει M^L καταστάσεις. Συνεπώς, το κανάλι περιγράφεται από ένα δικτυωτό διάγραμμα M^L καταστάσεων και ο αλγόριθμος Viterbi θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει την πιο πιθανή διαδρομή μέσω του δικτυωτού διαγράμματος.

Οι μετρικές που χρησιμοποιούνται στην αναζήτηση δικτυωτού διαγράμματος είναι παρόμοιες με τις μετρικές που χρησιμοποιούνται στην αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης των συνελκτικών κωδικών. Εν συντομία, ξεκινάμε με τα δείγματα v_1, v_2, \dots, v_{L+1} από τα οποία υπολογίζουμε τις M^{L+1} μετρικές

$$\sum_{k=1}^{L+1} \ln p(v_k | I_k, I_{k-1}, \dots, I_{k-L}) \quad (1.1 - 21)$$

Οι M^{L+1} πιθανές ακολουθίες των $I_{L+1}, I_L, \dots, I_2, I_1$ υποδιαιρούνται σε M^L ομάδες αντίστοιχες στις M^L καταστάσεις $(I_{L+1}, I_L, \dots, I_2)$. Παρατηρήστε ότι οι M ακολουθίες σε κάθε ομάδα (κατάσταση) διαφέρουν στο I_1 και ταιριάζουν με τις διαδρομές μέσω του δικτυωτού διαγράμματος που ενώνονται σε ένα κόμβο. Από τις M ακολουθίες σε κάθε μια από τις M^L καταστάσεις, επιλέγουμε την ακολουθία με τη μεγαλύτερη πιθανότητα (ως προς I_1) και εκχωρούμε στην ακολουθία που απέμεινε τη μετρική

$$\begin{aligned} PM_1(\mathbf{I}_{L+1}) &= PM_1(I_{L+1}, I_L, \dots, I_2) \\ &= \max_{I_1} \sum_{k=1}^{L+1} \ln p(v_k | I_k, I_{k-1}, \dots, I_{k-L}) \end{aligned} \quad (1.1 - 23)$$

Οι $M-1$ απομένουσες ακολουθίες από κάθε μια από τις M^L ομάδες απορρίπτονται Έτσι, μένουμε με M^L “επιζήσαντες” ακολουθίες και τις μετρικές τους.

Έπειτα από αποδοχή της v_{L+2} , οι M^L “επιζήσαντες” ακολουθίες επεκτείνονται κατά ένα στάδιο, και οι αντίστοιχες M^{L+1} πιθανότητες για τις επεκταμένες ακολουθίες υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες μετρικές και τη νέα αύξηση, η οποία είναι $\ln p(v_{L+2} | I_{L+2}, I_{L+1}, \dots, I_2)$. Οι M^{L+1} ακολουθίες υποδιαιρούνται εκ νέου σε M^L ομάδες, αντίστοιχες με τις M^L πιθανές καταστάσεις (I_{L+2}, \dots, I_3) και επιλέγεται η πιο πιθανή ακολουθία από κάθε ομάδα, ενώ οι υπόλοιπες $M - 1$ ακολουθίες απορρίπτονται.

Η διαδικασία περιγράφεται στη συνέχεια με την αποδοχή διαδοχικών δειγμάτων του σήματος. Γενικά, έπειτα από την αποδοχή της v_{L+k} , οι μετρικές[†]

$$PM_k(\mathbf{I}_{L+k}) = \max_{I_k} [\ln p(v_{L+k} | I_{L+k}, \dots, I_k) + PM_{k-1}(\mathbf{I}_{L+k-1})] \quad (1.1 - 24)$$

οι οποίες υπολογίζονται δίνουν τις πιθανότητες των M^L ακολουθιών που “επέζησαν”. Έτσι, καθώς λαμβάνεται κάθε δείγμα του σήματος, ο αλγόριθμος Viterbi περιλαμβάνει αρχικά τον υπολογισμό των M^{L+1} πιθανοτήτων

$$\ln p(v_{L+k} | I_{L+k}, \dots, I_k) + PM_{k-1}(\mathbf{I}_{L+k-1}) \quad (1.1 - 25)$$

οι οποίες αντιστοιχούν στις M^{L+1} ακολουθίες που σχηματίζουν τις συνέχεις των M^L ακολουθιών που “επέζησαν” από το προηγούμενο στάδιο της διαδικασίας. Έπειτα οι M^{L+1} ακολουθίες υποδιαιρούνται σε M^L ομάδες, όπου κάθε ομάδα περιέχει M ακολουθίες οι οποίες τερματίζουν στο ίδιο σύνολο συμβόλων I_{L+k}, \dots, I_{k+1} και διαφέρουν στο σύμβολο I_k . Από κάθε ομάδα των M ακολουθιών, επιλέγουμε αυτή που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα όπως φαίνεται από την (1.1 - 24), ενώ οι υπόλοιπες $M - 1$ ακολουθίες απορρίπτονται. Έτσι, μένουμε ξανά με M^L ακολουθίες οι οποίες έχουν τις μετρικές $PM_k(\mathbf{I}_{L+k})$.

Όπως δείξαμε προηγουμένως, η καθυστέρηση στην ανίχνευση κάθε συμβόλου πληροφορίας είναι μεταβλητή. Στην πράξη, η μεταβλητή καθυστέρηση αποφεύγεται περικόπτοντας τις επιζήσαντες ακολουθίες στα q πιο πρόσφατα σύμβολα, όπου $q \gg L$, επιτυγχάνοντας έτσι μια σταθερή καθυστέρηση. Στην περίπτωση που οι M^L επιζήσαντες ακολουθίες σε χρόνο k διαφωνούν στο σύμβολο I_{k-q} , θα μπορούσε να επιλεγεί το σύμβολο στη πιο πιθανή ακολουθία. Η απώλεια στην απόδοση που προκαλείται από αυτή τη σχεδόν βέλτιστη διαδικασία απόφασης είναι αμελητέα αν $q \geq 5L$.

Παράδειγμα 1.1 - 2

Για επεξηγηματικούς σκοπούς, υποθέστε ότι ένα διπλοδυαδικό παλμικό σήμα χρησιμοποιείται για να μεταδώσει ένα σήμα PAM με τέσσερις στάθμες ($M = 4$).

[†] Παρατηρούμε ότι οι μετρικές $PM_k(\mathbf{I})$ είναι απλά συνδεδεμένες με τις μετρικές της Ευκλείδειας απόστασης $DM_k(\mathbf{I})$ όπου ο προσθετικός θόρυβος είναι γκαουσιανός.

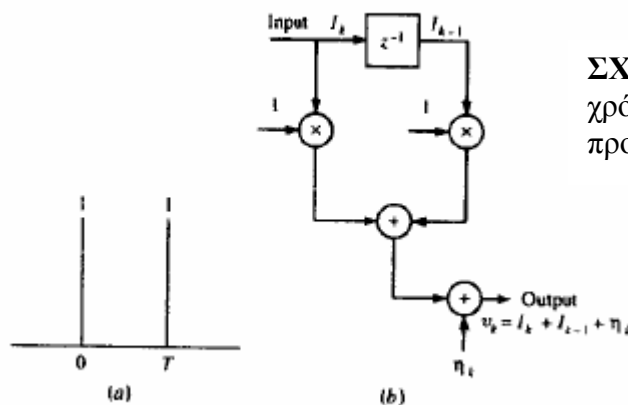
Έτσι, κάθε σύμβολο είναι ένας αριθμός που επιλέγεται από το σύνολο $\{-3, -1, 1, 3\}$. Η ελεγχόμενη διασυμβολική παρεμβολή σε αυτό το σήμα μερικής απόκρισης αναπαριστάται από ένα μοντέλο ενός ισοδύναμου καναλιού διακριτού χρόνου το οποίο φαίνεται στο Σχ.1.1 – 4. Υποθέστε ότι έχουμε λάβει τα v_1 και v_2 , όπου

$$\begin{aligned} v_1 &= I_1 + n_1 \\ v_2 &= I_2 + n_2 \end{aligned} \quad (1.1 - 26)$$

και $\{n_i\}$ είναι μια ακολουθία στατιστικά ανεξάρτητου γκαουσιανού θορύβου μηδενικής μέσης τιμής. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις 16 μετρικές

$$PM_1(I_2, I_1) = -\sum_{k=1}^2 \left(v_k - \sum_{j=0}^1 I_{k-j} \right)^2, \quad I_1, I_2 = \pm 1, \pm 3 \quad (1.1 - 27)$$

όπου $I_k = 0$ για $k \leq 0$.



ΣΧΗΜΑ 1.1 – 4 Ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου για διασυμβολική παρεμβολή που προκύπτει από ένα διπλοδυαδικό παλμό.

Παρατηρήστε ότι όλα τα διαδοχικά λαμβανόμενα σήματα $\{v_i\}$ δεν περιλαμβάνουν το I_1 . Για αυτό το λόγο, σε αυτό το στάδιο, μπορούμε να απορρίψουμε 12 από τα 16 πιθανά ζευγάρια $\{I_1, I_2\}$. Αυτό το βήμα επεξηγείται από το δέντροδιάγραμμα που φαίνεται στο Σχ.1.1 – 6. Με άλλα λόγια, αφού υπολογίσουμε τις 16 μετρικές που σχετίζονται με τις 16 διαδρομές στο δέντροδιάγραμμα, απορρίπτουμε τρεις από τις τέσσερις διαδρομές που τερματίζουν με $I_2 = 3$ και κρατάμε τις πιο πιθανές από αυτές τις τέσσερις. Έτσι, η μετρική για τη διαδρομή που επιβιώνει είναι

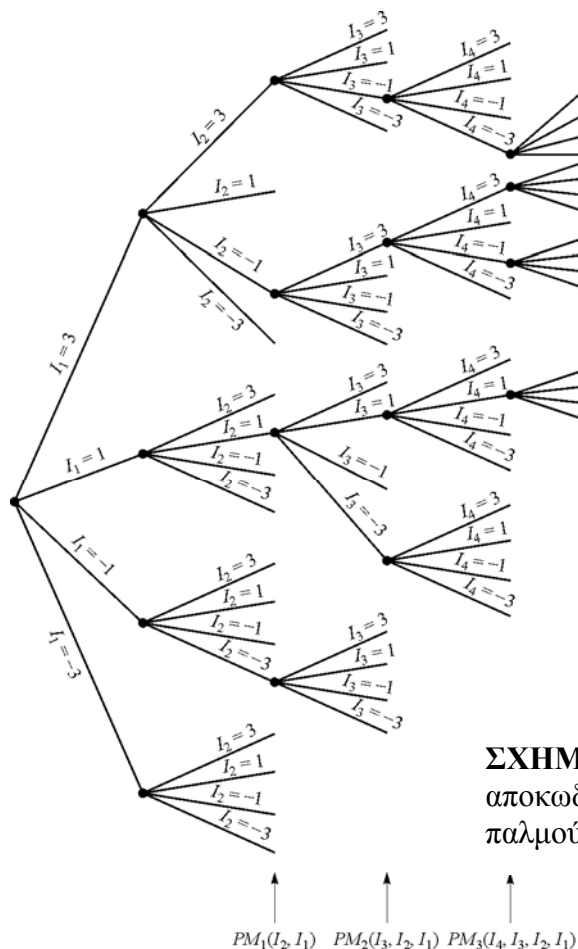
$$PM_1(I_2 = 3, I_1) = \max_{I_1} \left[-\sum_{k=1}^2 \left(v_k - \sum_{j=0}^1 I_{k-j} \right)^2 \right]$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε σύνολο των τεσσάρων διαδρομών που τερματίζουν με $I_2 = 1$, $I_2 = -1$, και $I_2 = -3$. Έτσι τέσσερις διαδρομές και οι αντίστοιχες μετρικές τους επιβιώνουν αφού ληφθούν οι v_1 και v_2 .

Όταν λαμβάνεται η v_3 , οι τέσσερις διαδρομές επεκτείνονται όπως φαίνεται στο Σχ.1.1 – 5, για να αποφέρουν 16 διαδρομές και 16 αντίστοιχες μετρικές, που δίνονται από την

$$PM_2(I_3, I_2, I_1) = PM_1(I_2, I_1) - \left(v_3 - \sum_{j=0}^1 I_{3-j} \right)^2 \quad (1.1 - 28)$$

Από τις τέσσερις διαδρομές που καταλήγουν με το $I_3 = 3$, κρατάμε τις πιο πιθανές. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται εκ νέου για $I_3 = 1$, $I_3 = -1$, και $I_3 = -3$. Συνεπώς, μόνο τέσσερις διαδρομές επιβιώνουν σε αυτό το στάδιο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται τότε για κάθε διαδοχικά λαμβανόμενο σήμα v_k για $k > 3$.



ΣΧΗΜΑ 1.1 – 5 Δεντροδιάγραμμα για αποκωδικοποίηση Viterbi του διπλοδυαδικού παλμού.

1.1.4 Απόδοση της MLSE για Κανάλια με ISI

Πρέπει τώρα να καθορίσουμε την πιθανότητα σφάλματος για την MLSE της λαμβανόμενης πληροφοριακής ακολουθίας όταν η πληροφορία μεταδίδεται μέσω

PAM και ο προσθετικός θόρυβος είναι γκαουσιανός. Η ομοιότητα μεταξύ ενός συνελκτικού κώδικα και ενός καναλιού διασυμβολικής παρεμβολής πεπερασμένης διάρκειας συνεπάγεται ότι η μέθοδος για τον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος του τελευταίου μεταφέρεται από το πρώτο. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται με κάποια τροποποίηση η μέθοδος για τον υπολογισμό της απόδοσης της αποκωδικοποίησης ήπιας απόφασης ενός συνελκτικού κώδικα μέσω του αλγόριθμου Viterbi.

Στη σηματοδοσία PAM με προσθετικό γκαουσιανό θόρυβο και διασυμβολική παρεμβολή, οι μετρικές που χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο Viterbi μπορούν να εκφραστούν όπως στην (1.1 – 24), ή ισοδύναμα, ως

$$PM_{k-L}(\mathbf{I}_k) = PM_{k-L-1}(\mathbf{I}_{k-1}) - \left(v_k - \sum_{j=0}^L f_j I_{k-j} \right)^2 \quad (1.1 - 29)$$

όπου τα σύμβολα $\{I_n\}$ μπορούν να πάρουν τις τιμές $\pm d, \pm 3d, \dots, \pm(M-1)d$, και $2d$ είναι η απόσταση μεταξύ διαδοχικών σταθμών. Το δικτυωτό διάγραμμα έχει M^L καταστάσεις, που ορίζονται σε χρόνο k ως

$$S_k(I_{k-1}, I_{k-2}, \dots, I_{k-L}) \quad (1.1 - 30)$$

Έστω ότι τα σύμβολα που εκτιμήσαμε από τον αλγόριθμο Viterbi συμβολίζονται με $\{\tilde{I}_n\}$ και οι αντίστοιχες καταστάσεις που εκτιμήσαμε σε χρόνο k με

$$\tilde{S}_k = (\tilde{I}_{k-1}, \tilde{I}_{k-2}, \dots, \tilde{I}_{k-L}) \quad (1.1 - 31)$$

Τώρα υποθέστε ότι η διαδρομή που εκτιμήσαμε μέσω του δικτυωτού διαγράμματος αποκλίνει από τη σωστή διαδρομή σε χρόνο k και επανενώνεται με τη σωστή διαδρομή σε χρόνο $k+l$. Έτσι, $\tilde{S}_k = S_k$ και $\tilde{S}_{k+l} = S_{k+l}$, αλλά $\tilde{S}_m \neq S_m$ για $k < m < k+l$. Όπως και σε ένα συνελκτικό κώδικα, αυτό το ονομάζουμε **περίπτωση σφάλματος (error event)**. Αφού το κανάλι καλύπτει $L+1$ σύμβολα, έπεται ότι $l \geq L+1$.

Για μια τέτοια περίπτωση σφάλματος, έχουμε $\tilde{I}_k \neq I_k$ και $\tilde{I}_{k+l-L-1} \neq I_{k+l-L-1}$, αλλά $\tilde{I}_m = I_m$ για $k-L \leq m \leq k-1$ και $k+l-L \leq m \leq k+l-1$. Είναι βολικό να ορίσουμε ένα διάνυσμα σφάλματος $\boldsymbol{\varepsilon}$ το οποίο αντιστοιχεί σε αυτή την περίπτωση σφάλματος ως

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_k \quad \varepsilon_{k+1} \quad \dots \quad \varepsilon_{k+l-L-1}] \quad (1.1 - 32)$$

όπου οι συνιστώσες του $\boldsymbol{\varepsilon}$ ορίζονται ως

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2d}(I_j - \tilde{I}_j), \quad j = k, k+1, \dots, k+l-L-1 \quad (1.1 - 33)$$

Ο παράγοντας κανονικοποίησης $2d$ στην (1.1 – 33) έχει ως αποτέλεσμα να παίρνουν τα στοιχεία ε_j τις τιμές $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm(M-1)$. Επιπλέον, το διάνυσμα

σφάλματος χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες $\varepsilon_k \neq 0$, $\varepsilon_{k+l-L-1} \neq 0$, και επιπλέον δεν υπάρχει ακολουθία από L συνεχόμενα στοιχεία που να είναι μηδέν. Συσχετιζόμενο με το διάνυσμα σφάλματος στην (1.1 – 32) είναι το πολυώνυμο βαθμού $l - L - 1$,

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}z^{-1} + \varepsilon_{k+2}z^{-2} + \dots + \varepsilon_{k+l-L-1}z^{-(l-L-1)} \quad (1.1 - 34)$$

Επιθυμούμε να καθορίσουμε την πιθανότητα εμφάνισης της περίπτωσης σφάλματος που ξεκινά σε χρόνο k και χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα σφάλματος ε που δίνεται από την (1.1 – 32), ή ισοδύναμα, από το πολυώνυμο που δίνεται στην (1.1 – 34). Για να το επιτύχουμε αυτό, ακολουθούμε τη διαδικασία που αναπτύχθηκε από τον Forney (1972). Συγκεκριμένα, για να λάβει χώρα το διάνυσμα σφάλματος ε , πρέπει να συμβούν οι επόμενες τρεις υποπεριπτώσεις E_1 , E_2 , και E_3 :

E_1 : σε χρόνο k , $\tilde{S}_k = S_k$.

E_2 : τα πληροφοριακά σύμβολα $I_k, I_{k+1}, \dots, I_{k+l-L-1}$ όταν προστίθενται στην κλιμακωτή ακολουθία σφάλματος $2d(\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_{k+l-L-1})$ πρέπει να δίνουν ως αποτέλεσμα μια επιτρεπτή ακολουθία. Με άλλα λόγια, η ακολουθία $\tilde{I}_k, \tilde{I}_{k+1}, \dots, \tilde{I}_{k+l-L-1}$ πρέπει να έχει τιμές επιλεγόμενες από το $\pm d, \pm 3d, \pm \dots, \pm(M-1)d$.

E_3 : για $k \leq m < k+l$, το άθροισμα των μετρικών των κλάδων των υπολογισμένων διαδρομών υπερβαίνει το άθροισμα των μετρικών των κλάδων της σωστής διαδρομής.

Η πιθανότητα εμφάνισης της E_3 είναι

$$P(E_3) = P \left[\sum_{i=k}^{k+l-1} \left(v_i - \sum_{j=0}^L f_j \tilde{I}_{i-j} \right)^2 < \sum_{i=k}^{k+l-1} \left(v_i - \sum_{j=0}^L f_j I_{i-j} \right)^2 \right] \quad (1.1 - 35)$$

Αλλά

$$v_i = \sum_{j=0}^L f_j I_{i-j} + n_i \quad (1.1 - 36)$$

όπου $\{n_i\}$ μια πραγματική ακολουθία λευκού γκαουσιανού θορύβου. Αντικατάσταση της (1.1 – 36) στην (1.1 – 35) δίνει

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P \left[\sum_{i=k}^{k+l-1} \left(n_i + 2d \sum_{j=0}^L f_j \varepsilon_{i-j} \right)^2 < \sum_{i=k}^{k+l-1} n_i^2 \right] = \\ &= P \left[4d \sum_{i=k}^{k+l-1} n_i \left(\sum_{j=0}^L f_j \varepsilon_{i-j} \right) < -4d^2 \sum_{i=k}^{k+l-1} \left(\sum_{j=0}^L f_j \varepsilon_{i-j} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.1 - 37)$$

όπου $\varepsilon_j = 0$ για $j < k$ και $j > k + l - L - 1$. Αν ορίσουμε

$$a_i = \sum_{j=0}^L f_j \varepsilon_{i-j} \quad (1.1 - 38)$$

τότε η (1.1 - 37) μπορεί να εκφραστεί ως

$$P(E_3) = P\left(\sum_{i=k}^{k+l-1} a_i n_i < -d \sum_{i=k}^{k+l-1} a_i^2\right) \quad (1.1 - 39)$$

όπου ο παράγοντας $4d$ επειδή ήταν κοινός και στα δύο μέλη απλοποιήθηκε. Τώρα η (1.1 - 39) είναι απλά η πιθανότητα ενός γραμμικού συνδυασμού στατιστικά ανεξάρτητων γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών να είναι μικρότερος από κάποιο αρνητικό αριθμό. Έτσι

$$P(E_3) = Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0} \sum_{i=k}^{k+l-1} a_i^2}\right) \quad (1.1 - 40)$$

Για ευκολία, ορίζουμε

$$\delta^2(\mathbf{\varepsilon}) = \sum_{i=k}^{k+l-1} a_i^2 = \sum_{i=k}^{k+l-1} \left(\sum_{j=0}^L f_j \varepsilon_{i-j}\right)^2 \quad (1.1 - 41)$$

όπου $\varepsilon_j = 0$ για $j < k$ και $j > k + l - L - 1$. Παρατηρήστε ότι οι συντελεστές $\{a_i\}$ που προκύπτουν από τη συνέλιξη των $\{f_j\}$ με τους $\{\varepsilon_j\}$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} a(z) &= F(z)\varepsilon(z) \\ &= a_k + a_{k+1}z^{-1} + \dots + a_{k+l-1}z^{-(l-1)} \end{aligned} \quad (1.1 - 42)$$

Επιπλέον, η $\delta^2(\mathbf{\varepsilon})$ είναι απλώς ίση με το συντελεστή του z^0 στο πολυώνυμο

$$a(z)a(z^{-1}) = F(z)F(z^{-1})\varepsilon(z)\varepsilon(z^{-1}) = X(z)\varepsilon(z)\varepsilon(z^{-1}) \quad (1.1 - 43)$$

Ονομάζουμε την $\delta^2(\mathbf{\varepsilon})$ **ευκλείδιο βάρος (Euclidean weight)** της περίπτωσης σφάλματος $\mathbf{\varepsilon}$.

Μια εναλλακτική μέθοδος για να αναπαραστήσουμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης των $\{f_j\}$ και $\{\varepsilon_j\}$ είναι με τη μορφή πινάκων:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}\mathbf{f}$$

όπου \mathbf{a} είναι ένα l - διάστατο διάνυσμα, \mathbf{f} είναι ένα διάνυσμα $(L+1)$ διαστάσεων, και \mathbf{e} είναι ένας $l \times (L+1)$ πίνακας, που ορίζονται ως

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_{k+l-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_k & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k+1} & \varepsilon_k & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k+2} & \varepsilon_{k+1} & \varepsilon_k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{k+l-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \varepsilon_{k+l-L-1} \end{bmatrix} \quad (1.1 - 44)$$

Τότε

$$\begin{aligned} \delta^2(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \mathbf{a}'\mathbf{a} \\ &= \mathbf{f}'\mathbf{e}'\mathbf{e}\mathbf{f} \\ &= \mathbf{f}'\mathbf{A}\mathbf{f} \end{aligned} \quad (1.1 - 45)$$

όπου \mathbf{A} είναι ένας $(L+1) \times (L+1)$ πίνακας της μορφής

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}'\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_L \\ \beta_1 & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{L-1} \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \cdots & \beta_{L-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_L & \beta_{L-1} & \beta_{L-2} & \cdots & \beta_0 \end{bmatrix} \quad (1.1 - 46)$$

και

$$\beta_m = \sum_{i=k}^{k+l-1-m} \varepsilon_i \varepsilon_{i+m} \quad (1.1 - 47)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τις (1.1 - 41) και (1.1 - 42) είτε τις (1.1 - 46) και (1.1 - 47) για να εκτιμήσουμε την απόδοση του ρυθμού σφαλμάτων. Μελετάμε αυτούς τους υπολογισμούς αργότερα. Για τώρα καταλήγουμε ότι η πιθανότητα της υποπερίπτωσης E_3 , η οποία δίνεται από την (1.1 - 40), μπορεί να εκφραστεί ως

$$P(E_3) = Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}} \delta^2(\boldsymbol{\varepsilon})\right)$$

$$= Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2 - 1}} \gamma_{\text{av}} \delta^2(\mathbf{\epsilon}) \right) \quad (1.1 - 48)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση

$$d^2 = \frac{3}{M^2 - 1} TP_{\text{av}} \quad (1.1 - 49)$$

για να εξαλείψουμε το d^2 , και $\gamma_{\text{av}} = TP_{\text{av}} / N_0$. Παρατηρήστε ότι, με απουσία της διασυμβολικής παρεμβολής, $\delta^2(\mathbf{\epsilon}) = 1$ και η $P(E_3)$ είναι ανάλογη με τη πιθανότητα σφάλματος συμβόλου του M -αδικού PAM.

Η πιθανότητα της υποπερίπτωσης E_2 εξαρτάται μόνο από τις στατιστικές ιδιότητες της ακολουθίας εισόδου. Υποθέτουμε ότι τα πληροφοριακά σύμβολα είναι ισοπίθανα και ότι τα σύμβολα στη μεταδιδόμενη ακολουθία είναι στατιστικώς ανεξάρτητα. Τότε, για ένα σφάλμα της μορφής $|\epsilon_i| = j$, $j = 1, 2, \dots, M-1$, υπάρχουν $M-j$ πιθανές τιμές του I_i τέτοιες ώστε

$$I_i = \tilde{I}_i + 2d\epsilon_i$$

Για αυτό το λόγο

$$P(E_2) = \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M} \quad (1.1 - 50)$$

Η πιθανότητα της υποπερίπτωσης E_1 είναι πολύ πιο δύσκολο να υπολογιστεί ακριβώς λόγω της εξάρτησής της από την υποπερίπτωση E_3 . Δηλαδή, πρέπει να υπολογίσουμε την $P(E_1|E_3)$. Όμως, $P(E_1|E_3) = 1 - P_M$, όπου P_M είναι η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου. Για αυτό το λόγο η $P(E_1|E_3)$ προσεγγίζεται καλά (και είναι άνω φραγμένη) από τη μονάδα για λογικά χαμηλές πιθανότητες σφάλματος συμβόλου. Άρα, η πιθανότητα της περίπτωσης σφάλματος $\mathbf{\epsilon}$ είναι καλά προσεγγισμένη και άνω φραγμένη ως

$$P(\mathbf{\epsilon}) = Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2 - 1}} \gamma_{\text{av}} \delta^2(\mathbf{\epsilon}) \right) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M} \quad (1.1 - 51)$$

Έστω E το σύνολο όλων των περιπτώσεων σφάλματος $\mathbf{\epsilon}$ που ξεκινούν σε χρόνο k και έστω $w(\mathbf{\epsilon})$ ο αντίστοιχος αριθμός μη μηδενικών συνιστωσών (βάρος Hamming ή αριθμός των σφαλμάτων συμβόλου) σε κάθε περίπτωση σφάλματος $\mathbf{\epsilon}$. Τότε η πιθανότητα ενός σφάλματος συμβόλου είναι άνω φραγμένη (φράγμα ένωσης) καθώς

$$\begin{aligned}
P_M &\leq \sum_{\mathbf{\epsilon} \in E} w(\mathbf{\epsilon}) P(\mathbf{\epsilon}) \\
&\leq \sum_{\mathbf{\epsilon} \in E} w(\mathbf{\epsilon}) Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}} \gamma_{av} \delta^2(\mathbf{\epsilon}) \right) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M}
\end{aligned} \tag{1.1-52}$$

Τώρα έστω D το σύνολο όλων των $\delta(\mathbf{\epsilon})$. Για κάθε $\delta \in D$, έστω E_δ το υποσύνολο των περιπτώσεων σφάλματος για τις οποίες $\delta(\mathbf{\epsilon}) = \delta$. Τότε η (1.1-52) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned}
P_M &\leq \sum_{\delta \in D} Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}} \gamma_{av} \delta^2 \right) \left[\sum_{\mathbf{\epsilon} \in E_\delta} w(\mathbf{\epsilon}) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M} \right] \\
&\leq \sum_{\delta \in D} K_\delta Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}} \gamma_{av} \delta^2 \right)
\end{aligned} \tag{1.1-53}$$

όπου

$$K_\delta = \sum_{\mathbf{\epsilon} \in E_\delta} w(\mathbf{\epsilon}) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M} \tag{1.1-54}$$

Η έκφραση για την πιθανότητα σφάλματος στην (1.1-53) είναι όμοια με τη μορφή της πιθανότητας σφάλματος για ένα συνελκτικό κώδικα με αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης. Οι παράγοντες βάρους $\{K_\delta\}$ μπορούν να καθοριστούν μέσω του διαγράμματος κατάστασης σφάλματος, το οποίο είναι παρόμοιο με το διάγραμμα καταστάσεων ενός συνελκτικού κωδικοποιητή. Αυτή η προσέγγιση έχει επεξηγηθεί από τον Forney (1972) και τους Viterbi και Omura (1979).

Όμως, γενικά, η χρήση του διαγράμματος κατάστασης σφάλματος για τον υπολογισμό της P_M είναι βαρετή. Αντί για αυτό, μπορούμε να απλοποιήσουμε τον υπολογισμό της P_M εστιάζοντας στον κύριο όρο στο άθροισμα της (1.1-53). Λόγω της εκθετικής εξάρτησης κάθε όρου του αθροίσματος, η έκφραση της P_M κυριαρχείται από τον όρο που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή του δ , ο οποίος συμβολίζεται ως δ_{\min} . Για αυτό το λόγο η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου μπορεί να προσεγγισθεί ως

$$P_M \approx K_{\delta_{\min}} Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}} \gamma_{av} \delta_{\min}^2 \right) \tag{1.1-55}$$

όπου

$$K_{\delta_{\min}} = \sum_{\mathbf{\epsilon} \in E_{\delta_{\min}}} w(\mathbf{\epsilon}) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M} \tag{1.1-56}$$

Γενικά, $\delta_{\min}^2 \leq 1$. Για αυτό το λόγο, το $10 \log \delta_{\min}^2$ αναπαριστά την απώλεια σε SNR λόγω της διασυμβολικής παρεμβολής.

Η ελάχιστη τιμή του δ μπορεί να καθοριστεί είτε από την (1.1 – 41) είτε με αποτίμηση του πολυωνύμου δευτέρου βαθμού στην (1.1 – 45) για διαφορετικές ακολουθίες σφάλματος. Στα δύο επόμενα παραδείγματα χρησιμοποιούμε την (1.1 – 41).

Παράδειγμα 1.1 – 3

Θεωρήστε ένα κανάλι δύο διαδρομών ($L=1$) με αυθαίρετους συντελεστές f_0 και f_1 που ικανοποιούν τον περιορισμό $f_0^2 + f_1^2 = 1$. Η χαρακτηριστική του καναλιού είναι

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} \quad (1.1 - 57)$$

Για μια περίπτωση σφάλματος μήκους n ,

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z^{-1} + \dots + \varepsilon_{n-1} z^{-(n-1)}, \quad n \geq 1 \quad (1.1 - 58)$$

Το γινόμενο $a(z) = F(z)\varepsilon(z)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$a(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \quad (1.1 - 59)$$

όπου $a_0 = \varepsilon_0 f_0$ και $a_n = f_1 \varepsilon_{n-1}$. Αφού $\varepsilon_0 \neq 0$, $\varepsilon_{n-1} \neq 0$, και

$$\delta^2(\mathbf{\varepsilon}) = \sum_{k=0}^n a_k^2 \quad (1.1 - 60)$$

έπεται ότι

$$\delta_{\min}^2 \geq f_0^2 + f_1^2 = 1$$

Πράγματι, $\delta_{\min}^2 = 1$ όταν συμβαίνει ένα μόνο σφάλμα, με άλλα λόγια όταν $\varepsilon(z) = \varepsilon_0$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχουν απώλειες σε SNR στην εκτίμηση ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας των πληροφοριακών συμβόλων όταν η διασπορά του καναλιού έχει μήκος 2.

Παράδειγμα 1.1 – 4

Η ελεγχόμενη διασυμβολική παρεμβολή σε ένα σήμα μερικής απόκρισης μπορεί να εξεταστεί να έχει δημιουργηθεί από ένα κανάλι χρονικής διασποράς. Έτσι, η διασυμβολική παρεμβολή από ένα διπλοδυαδικό παλμό μπορεί να αναπαρασταθεί από την (κανονικοποιημένη) χαρακτηριστική καναλιού

$$F(z) = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}z^{-1} \quad (1.1 - 61)$$

Ομοίως, η αναπαράσταση για ένα τροποποιημένο διπλοδυαδικό παλμό είναι

$$F(z) = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}z^{-2} \quad (1.1 - 62)$$

Η ελάχιστη απόσταση είναι $\delta_{\min}^2 = 1$ για κάθε περίπτωση σφάλματος της μορφής

$$\varepsilon(z) = \pm \left(1 - z^{-1} - z^{-2} - \dots - z^{-(n-1)}\right), \quad n \geq 1 \quad (1.1 - 63)$$

για το κανάλι που δίνεται από την (1.1 - 61) αφού

$$a(z) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \mp \sqrt{\frac{1}{2}}z^{-n}$$

Ομοίως, όταν

$$\varepsilon(z) = \pm \left(1 + z^{-2} + z^{-4} + \dots + z^{-2(n-1)}\right), \quad n \geq 1 \quad (1.1 - 64)$$

τότε $\delta_{\min}^2 = 1$ για το κανάλι που δίνεται από την (1.1 - 62), αφού

$$a(z) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \mp \sqrt{\frac{1}{2}}z^{-2n}$$

Για αυτό το λόγο η MLSE αυτών των δύο σημάτων μερικής απόκρισης έχει ως αποτέλεσμα έλλειψη απωλειών σε SNR. Σε αντίθεση με τα παραπάνω, η υποβέλτιστη σύμβολο - με - σύμβολο ανίχνευση που περιγράφηκε προηγουμένως έχει ως αποτέλεσμα μία απώλεια 2,1 dB.

Η σταθερά $K_{\delta_{\min}}$ εκτιμάται εύκολα για αυτά τα δύο σήματα. Με προκωδικοποίηση ο αριθμός των σφαλμάτων των συμβόλων εξόδου (βάρος Hamming) που σχετίζονται με τις περιπτώσεις σφάλματος στις (1.1 - 63) και (1.1 - 64) είναι δύο. Για αυτό το λόγο,

$$K_{\delta_{\min}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M-1}{M}\right)^n = 2(M-1) \quad (1.1 - 65)$$

Από την άλλη μεριά, χωρίς προκωδικοποίηση, αυτές οι περιπτώσεις σφάλματος καταλήγουν σε n σφάλματα συμβόλου, και, για αυτό το λόγο,

$$K_{\delta_{\min}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{M-1}{M}\right)^n = 2M(M-1) \quad (1.1 - 66)$$

Σαν μια τελική άσκηση, θα μελετήσουμε την εκτίμηση του δ_{\min}^2 από το πολυώνυμο δεύτερου βαθμού στην (1.1 – 45). Ο πίνακας \mathbf{A} του πολυωνύμου δεύτερου βαθμού είναι ορισμένος για θετικές τιμές. Για αυτό το λόγο, όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές. Αν οι ιδιοτιμές είναι $\{\mu_k(\boldsymbol{\varepsilon})\}$ και $\{\mathbf{v}_k(\boldsymbol{\varepsilon})\}$ είναι τα αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του \mathbf{A} για μια περίπτωση σφάλματος $\boldsymbol{\varepsilon}$, τότε το πολυώνυμο δεύτερου βαθμού στην (1.1 – 45) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\delta^2(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{L+1} \mu_k(\boldsymbol{\varepsilon}) [\mathbf{f}'\mathbf{v}_k(\boldsymbol{\varepsilon})]^2 \quad (1.1 - 67)$$

Με άλλα λόγια, η $\delta^2(\boldsymbol{\varepsilon})$ εκφράζεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός των κάθετων προβολών του διανύσματος καναλιού \mathbf{f} πάνω στα ιδιοδιανύσματα του \mathbf{A} . Κάθε κάθετη προβολή στο άθροισμα σταθμίζεται από τις αντίστοιχες ιδιοτιμές $\mu_k(\boldsymbol{\varepsilon})$, $k = 1, 2, \dots, L+1$. Τότε

$$\delta_{\min}^2 = \min_{\boldsymbol{\varepsilon}} \delta^2(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (1.1 - 68)$$

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η χαρακτηριστική του χειρότερου καναλιού για ένα δοσμένο μήκος $L+1$ μπορεί να ληφθεί βρίσκοντας τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ελάχιστη ιδιοτιμή. Έτσι, αν $\mu_{\min}(\boldsymbol{\varepsilon})$ είναι η ελάχιστη ιδιοτιμή για μια δοθείσα περίπτωση σφάλματος $\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\mathbf{v}_{\min}(\boldsymbol{\varepsilon})$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα τότε

$$\mu_{\min} = \min_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mu_{\min}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$\mathbf{f} = \min_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{v}_{\min}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

και

$$\delta_{\min}^2 = \mu_{\min}$$

Παράδειγμα 1.1 – 5

Θα καθορίσουμε το χειρότερο κανάλι χρονικής διασποράς μήκους 3 ($L=2$) βρίσκοντας την ελάχιστη ιδιοτιμή του \mathbf{A} για διαφορετικές περιπτώσεις σφάλματος. Έχουμε

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2}$$

όπου f_0 , f_1 , και f_2 είναι οι συνιστώσες του ιδιοδιανύσματος του \mathbf{A} που αντιστοιχεί στην ελάχιστη ιδιοτιμή. Μια περίπτωση σφάλματος της μορφής

$$\varepsilon(z) = 1 - z^{-1}$$

έχει ως αποτέλεσμα έναν πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ο οποίος έχει τις ιδιοτιμές $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2 + \sqrt{2}$, $\mu_3 = 2 - \sqrt{2}$. Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μ_3 είναι

$$\mathbf{v}'_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.1 - 69)$$

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τη δυαδική περίπτωση σφάλματος

$$\varepsilon(z) = 1 + z^{-1}$$

η οποία καταλήγει στον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας έχει ίδιες ιδιοτιμές με τον πίνακα της περίπτωσης $\varepsilon(z) = 1 - z^{-1}$.

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για την $\mu_3 = 2 - \sqrt{2}$ είναι

$$\mathbf{v}'_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.1 - 70)$$

Κάθε άλλα περίπτωση σφάλματος οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές για το μ_{\min} . Για αυτό το λόγο, $\mu_{\min} = 2 - \sqrt{2}$ και το κανάλι χειρότερης περίπτωσης είναι είτε

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{είτε} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Η απώλεια σε SNR από το κανάλι είναι

$$-10 \log \delta_{\min}^2 = -10 \log \mu_{\min} = 2,3 \text{ dB}$$

Επανάληψη του παραπάνω υπολογισμού για κανάλια με $L = 3, 4$, και 5 αποδίδει τα αποτελέσματα που φαίνονται στον Πίνακα 10.1 – 1.

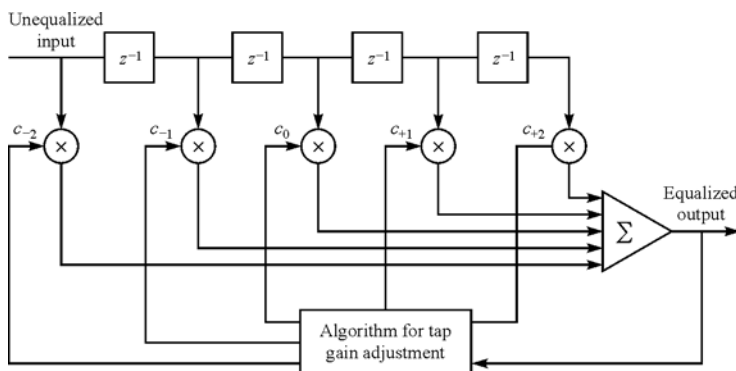
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1 – 1 ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΠΩΛΕΙΑ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΝΑΛΙΟΥ

Μήκος καναλιού $L + 1$	Απώλεια Απόδοσης $-10 \log \delta_{\min}^2$ (dB)	Κανάλι ελάχιστης απόστασης
3	2.3	0.50, 0.71, 0.50
4	4.2	0.38, 0.60, 0.60, 0.38
5	5.7	0.29, 0.50, 0.58, 0.50, 0.29
6	7.0	0.23, 0.42, 0.52, 0.52, 0.42, 0.23

1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Η MLSE για ένα κανάλι με ISI έχει μια υπολογιστική πολυπλοκότητα η οποία αυξάνεται εκθετικά με το μήκος της χρονικής διασποράς του καναλιού. Αν το μέγεθος του αλφάβητου των συμβόλων είναι M και ο αριθμός των συμβόλων παρεμβολής που συνεισφέρουν στην ISI είναι L , ο αλγόριθμος Viterbi υπολογίζει M^{L+1} μετρικές για κάθε νέο λαμβανόμενο σύμβολο. Στα περισσότερα κανάλια πρακτικού ενδιαφέροντος, μια τόσο μεγάλη υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι απαγορευτικά δαπανηρή για να υλοποιηθεί.

Σε αυτή και στις επόμενες ενότητες, περιγράφουμε δύο σχεδόν βέλτιστες προσεγγίσεις ισοστάθμισης καναλιού για να αντισταθμιστεί η ISI. Η μια προσέγγιση περιέχει ένα γραμμικό εγκάρσιο φίλτρο, το οποίο περιγράφεται σε αυτή την ενότητα. Οι δομές αυτών των φίλτρων έχουν μια υπολογιστική δυσκολία, ότι είναι γραμμικές συναρτήσεις της διασποράς του καναλιού μήκους L .



ΣΧΗΜΑ 1.2 – 1 Γραμμικό εγκάρσιο φίλτρο.

Το γραμμικό φίλτρο που χρησιμοποιείται πιο συχνά για εξίσωση είναι το εγκάρσιο φίλτρο το οποίο φαίνεται στο Σχ.1.2 – 1. Η είσοδος του είναι η ακολουθία $\{v_k\}$ η οποία δίνεται στην (1.1 – 17) και η έξοδος του είναι η εκτίμηση της πληροφοριακής ακολουθίας $\{I_k\}$. Η εκτίμηση του k – οστού συμβόλου μπορεί να εκφραστεί ως

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-K}^K c_j v_{k-j} \quad (1.2-1)$$

όπου $\{c_j\}$ είναι οι $2K+1$ μιγαδικοί συντελεστές βάρους απολήξεων του φίλτρου. Η εκτίμηση \hat{I}_k κβαντίζεται στο πλησιέστερο (σε απόσταση) πληροφοριακό σύμβολο για να σχηματίσει την απόφαση \tilde{I}_k . Αν η \tilde{I}_k δεν είναι ταυτόσημη με το μεταδιδόμενο πληροφοριακό σύμβολο I_k , έχει συμβεί ένα σφάλμα.

Αξιοσημείωτη έρευνα έχει γίνει στο κριτήριο για βελτιστοποίηση των συντελεστών του φίλτρου $\{c_k\}$. Αφού το πιο σημαντικό μέτρο της απόδοσης ενός ψηφιακού συστήματος επικοινωνιών είναι η μέση πιθανότητα σφάλματος, είναι επιθυμητό να διαλέξουμε τους συντελεστές που ελαχιστοποιούν αυτό το δείκτη απόδοσης. Όμως, η πιθανότητα σφάλματος είναι μια αυστηρά μη γραμμική συνάρτηση του $\{c_j\}$. Συνεπώς, η πιθανότητα σφάλματος ως ένας δείκτης απόδοσης για βελτιστοποίηση των συντελεστών βάρους απολήξεων του εξισωτή είναι ανεφάρμοστη.

Δύο κριτήρια έχουν βρει εκτεταμένη χρήση στην βελτιστοποίηση των συντελεστών του εξισωτή $\{c_j\}$. Το ένα είναι το κριτήριο της παραμόρφωσης κορυφής και το άλλο είναι το κριτήριο σφάλματος μέσου τετραγώνου.

1.2.1 Κριτήριο Παραμόρφωσης Κορυφής

Η μέγιστη παραμόρφωση ορίζεται απλά ως η χειρότερη περίπτωση διασυμβολικής παρεμβολής στην έξοδο του εξισωτή. Η ελαχιστοποίηση αυτού του δείκτη απόδοσης ονομάζεται **κριτήριο παραμόρφωσης κορυφής (peak distortion criterion)**. Πρώτα θα μελετήσουμε την ελαχιστοποίηση της παραμόρφωσης κορυφής υποθέτοντας ότι ο εξισωτής έχει ένα άπειρο πλήθος απολήξεων. Στη συνέχεια θα συζητήσουμε την περίπτωση στην οποία ο εγκάρσιος εξισωτής καλύπτει χρονικά μια πεπερασμένη χρονική διάρκεια.

Παρατηρούμε ότι η σε σειρά σύνδεση του μοντέλου του γραμμικού φίλτρου διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $\{f_n\}$ και ενός εξισωτή που έχει μια κρουστική απόκριση $\{c_n\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα απλό ισοδύναμο φίλτρο που έχει την κρουστική απόκριση

$$q_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{n-j} \quad (1.2-2)$$

Δηλαδή, $\{q_n\}$ είναι απλά η συνέλιξη των $\{c_n\}$ και $\{f_n\}$. Ο εξισωτής υποτίθεται ότι έχει ένα άπειρο πλήθος απολήξεων. Η έξοδος του την k -οστή στιγμή δειγματοληψίας μπορεί να εκφρασθεί στη μορφή

$$\hat{I}_k = q_0 I_k + \sum_{n \neq k} I_n q_{k-n} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j n_{k-j} \quad (1.2-3)$$

Ο πρώτος όρος στην (1.2 – 3) αναπαριστά μια κλιμακωμένη έκδοση του επιθυμητού συμβόλου. Για ευκολία, κανονικοποιούμε την q_0 στη μονάδα. Ο δεύτερος όρος είναι η διασυμβολική παρεμβολή. Η μέγιστη τιμή αυτής της παρεμβολής, η οποία ονομάζεται **παραμόρφωση κορυφής (peak distortion)**, είναι

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathbf{c}) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |q_n| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\substack{j=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_j f_{n-j} \right| \end{aligned} \quad (1.2 - 4)$$

Έτσι, η $\mathfrak{D}(\mathbf{c})$ είναι μια εξίσωση των βαρών απόληξης του εξισωτή.

Με έναν εξισωτή ο οποίος έχει έναν άπειρο αριθμό από απολήξεις, είναι δυνατόν να επιλέξουμε τα βάρη απόληξης έτσι ώστε $\mathfrak{D}(\mathbf{c}) = 0$. Με άλλα λόγια, $q_n = 0$ για κάθε n εκτός από το $n = 0$. Δηλαδή, η διασυμβολική παρεμβολή μπορεί να εξαλειφθεί πλήρως. Οι τιμές των βαρών απόληξης για να επιτύχουμε αυτό το στόχο καθορίζονται από τη συνθήκη

$$q_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{n-j} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (1.2 - 5)$$

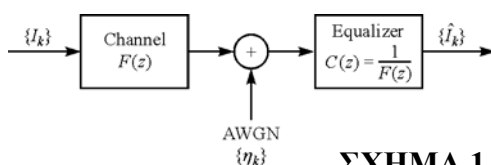
Παίρνοντας το μετασχηματισμό z της (1.2 – 5), λαμβάνουμε

$$Q(z) = C(z)F(z) = 1 \quad (1.2 - 6)$$

ή, απλά,

$$C(z) = \frac{1}{F(z)} \quad (1.2 - 7)$$

όπου το $C(z)$ συμβολίζει το μετασχηματισμό z του $\{c_j\}$. Παρατηρήστε ότι ο εξισωτής, με εξίσωση μεταφοράς $C(z)$, είναι απλά το αντίστροφο φίλτρο του μοντέλου γραμμικού φίλτρου $F(z)$. Με άλλα λόγια, πλήρης εξάλειψη της διασυμβολικής παρεμβολής απαιτεί τη χρήση ενός αντίστροφου στην $F(z)$ φίλτρου. Ένα τέτοιο φίλτρο το ονομάζουμε **φίλτρο μηδενικού εξαναγκασμού (zero – forcing filter)**. Το Σχήμα 1.2 – 2 δείχνει σε διάγραμμα βαθμίδων το ισοδύναμο διακριτού χρόνου καναλιού και ισοσταθμιστή.



ΣΧΗΜΑ 1.2 – 2 Διάγραμμα βαθμίδων του καναλιού με ισοσταθμιστή μηδενικού εξαναγκασμού.

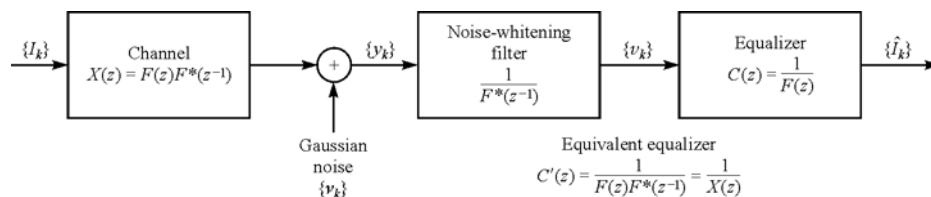
Η σε σειρά σύνδεση του φίλτρου λευκού θορύβου το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς $1/F^*(z^{-1})$ και του εξισωτή μηδενικού εξαναγκασμού ο οποίος έχει τη συνάρτηση μεταφοράς $1/F(z)$ έχει ως αποτέλεσμα ένα ισοδύναμο ισοσταθμιστή μηδενικού εξαναγκασμού ο οποίος έχει τη συνάρτηση μεταφοράς

$$C'(z) = \frac{1}{F(z)F^*(z^{-1})} = \frac{1}{X(z)} \quad (1.2 - 8)$$

όπως φαίνεται στο Σχ.1.2 – 3. Αυτό το συνδυασμένο φίλτρο έχει ως είσοδό του την ακολουθία $\{y_k\}$ των δειγμάτων από το προσαρμοσμένο φίλτρο, η οποία δίνεται από την (1.1 – 11). Η έξοδος του αποτελείται από τα επιθυμητά σύμβολα τα οποία είναι μολυσμένα μόνο από προσθετικό μηδενικής μέσης τιμής γκαουσιανό θόρυβο. Η κρουστική απόκριση του συνδυασμένου φίλτρου είναι

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{2\pi j} \oint C'(z) z^{k-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{k-1}}{X(z)} dz \end{aligned} \quad (1.2 - 9)$$

όπου η ολοκλήρωση εκτελείται σε ένα κλειστό περίγραμμα που βρίσκεται εντός της περιοχής σύγκλισης του $C'(z)$. Αφού η $X(z)$ είναι ένα πολυώνυμο με $2L$ ρίζες ($\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L, 1/\rho_1^*, 1/\rho_2^*, \dots, 1/\rho_L^*$), έπεται ότι η $C'(z)$ πρέπει να συγκλίνει σε μια δακτυλιοειδή περιοχή του επιπέδου z η οποία περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο ($z = e^{j\theta}$). Συνεπώς, το κλειστό περίγραμμα στο ολοκλήρωμα μπορεί να είναι ο μοναδιαίος κύκλος.



ΣΧΗΜΑ 1.2 – 3 Διάγραμμα βαθμίδων καναλιού με ισοδύναμο ισοσταθμιστή μηδενικού εξαναγκασμού.

Η απόδοση του ισοσταθμιστή άπειρων απολήξεων ο οποίος εξαφανίζει εντελώς τη διασυμβολική παρεμβολή μπορεί να εκφραστεί με όρους του λόγου σήματος – προς – θόρυβο (signal – to – noise ratio, SNR) στη έξοδό του. Για μαθηματική ευκολία, κανονικοποιούμε την ενέργεια του λαμβανόμενου σήματος σε μονάδα.[†] Αυτό συνεπάγεται ότι $q_0 = 1$ και ότι η προσδοκώμενη τιμή του $|I_k|^2$ είναι επίσης

[†] Αυτή η κανονικοποίηση χρησιμοποιείται σε όλο το κεφάλαιο για μαθηματική ευκολία.

μονάδα. Τότε ο SNR είναι απλά ο αντίστροφος της μεταβλητότητας του θορύβου σ_n^2 στην έξοδο του εξισωτή.

Η τιμή του σ_n^2 μπορεί απλά να καθορισθεί παρατηρώντας ότι η ακολουθία θορύβου $\{v_k\}$ στην είσοδο του ισοδύναμου εξισωτή μηδενικού εξαναγκασμού $C'(z)$ έχει μηδενική μέση τιμή και μια φασματική πυκνότητα ισχύος

$$\Phi_{vv}(\omega) = N_0 X(e^{j\omega T}), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (1.2 - 10)$$

όπου η $X(e^{j\omega T})$ εξάγεται από την $X(z)$ με την αντικατάσταση $z = e^{j\omega T}$. Αφού $C'(z) = 1/X(z)$, έπεται ότι η ακολουθία θορύβου στην έξοδο του εξισωτή έχει μια φασματική πυκνότητα ισχύος

$$\Phi_{mm}(\omega) = \frac{N_0}{X(e^{j\omega T})}, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (1.2 - 11)$$

Συνεπώς, η μεταβλητότητα της μεταβλητής του θορύβου στη έξοδο του ισοσταθμιστή είναι

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_{mm}(\omega) d\omega \\ &= \frac{TN_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{d\omega}{X(e^{j\omega T})} \end{aligned} \quad (1.2 - 12)$$

και ο SNR για τον ισοσταθμιστή μηδενικού εξαναγκασμού είναι

$$\begin{aligned} \gamma_\infty &= 1/\sigma_n^2 \\ &= \left[\frac{TN_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{d\omega}{X(e^{j\omega T})} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.2 - 13)$$

όπου ο κάτω δείκτης στο γ δηλώνει ότι ο εξισωτής έχει έναν άπειρο αριθμό από απολήξεις.

Τα φασματικά χαρακτηριστικά του $X(e^{j\omega T})$ αντιστοιχούν στο μετασχηματισμό Fourier της δειγματολαμβανόμενης ακολουθίας $\{x_n\}$ ο οποίος έχει μια ενδιαφέρουσα συγγένεια με το αναλογικό φίλτρο $H(\omega)$ που χρησιμοποιείται στο δέκτη. Αφού

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) h(t + kT) dt$$

η χρήση του θεωρήματος του Parseval αποφέρει

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 e^{j\omega kT} d\omega \quad (1.2 - 14)$$

όπου $H(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $h(t)$. Αλλά το ολοκλήρωμα στην (1.2 – 14) μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right) \right|^2 \right] e^{j\omega kT} d\omega \quad (1.2 - 15)$$

Τώρα, ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x_k\}$ είναι

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega kT} \quad (1.2 - 16)$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός αποφέρει

$$x_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega kT} d\omega \quad (1.2 - 17)$$

Από μια σύγκριση των (1.2 – 15) και (1.2 – 17), λαμβάνουμε την επιθυμητή σχέση μεταξύ των $X(e^{j\omega T})$ και $H(\omega)$. Δηλαδή,

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right) \right|^2, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (1.2 - 18)$$

όπου το δεξί σκέλος της (1.2 – 18) ονομάζεται **διπλωμένο φάσμα (folded spectrum)** του $|H(\omega)|^2$. Παρατηρούμε επίσης ότι $|H(\omega)|^2 = X(\omega)$, όπου $X(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κυματομορφής $x(t)$ και $x(t)$ είναι η απόκριση του προσαρμοσμένου φίλτρου στην είσοδο $h(t)$. Άρα το δεξί σκέλος της (1.2 – 18) μπορεί επίσης να εκφραστεί με όρους της $X(\omega)$.

Αντικατάσταση του $X(e^{j\omega T})$ στην (1.2 – 13) χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της (1.2 – 18) αποφέρει την επιθυμητή έκφραση για το SNR στη μορφή

$$\gamma_{\infty} = \left[\frac{T^2 N_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{d\omega}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega + 2\pi n/T)|^2} \right]^{-1} \quad (1.2 - 19)$$

Παρατηρούμε ότι αν η διπλωμένη φασματική χαρακτηριστική του $H(\omega)$ έχει κάποια μηδενικά, η υπό ολοκλήρωση έκφραση γίνεται άπειρη και ο SNR τείνει στο μηδέν. Με άλλα λόγια, η απόδοση του ισοσταθμιστή είναι φτωχή κάθε φορά που η διπλωμένη φασματική χαρακτηριστική έχει μηδενισμούς ή παίρνει μικρές τιμές. Αυτή

η συμπεριφορά λαμβάνει χώρα κυρίως γιατί ο ισοσταθμιστής, εξαλείφοντας τη διασυμβολική παρεμβολή, εντείνει τον προσθετικό θόρυβο. Για παράδειγμα, αν το κανάλι περιέχει ένα φασματικό μηδενισμό στην απόκριση συχνότητάς του, ο γραμμικός ισοσταθμιστής μηδενικής ισχύος προσπαθεί να τον αντισταθμίσει εισάγοντας ένα άπειρο κέρδος σε αυτή τη συχνότητα. Όμως αυτό εξουδετερώνει την παραμόρφωση του καναλιού με κόστος της αύξησης του προσθετικού θορύβου. Από την άλλη μεριά, ένα ιδανικό κανάλι ζευγαρωμένο με μια κατάλληλη σχεδίαση σήματος που έχει ως αποτέλεσμα απουσία διασυμβολικής παρεμβολής, θα έχει ένα διπλωμένο φάσμα που θα ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H \left(\omega + \frac{2\pi n}{T} \right) \right|^2 = T, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (1.2 - 20)$$

Σε αυτή την περίπτωση, ο SNR επιτυγχάνει τη μέγιστη τιμή του, δηλαδή

$$\gamma_{\infty} = \frac{1}{N_0} \quad (1.2 - 21)$$

Ισοσταθμιστής Πεπερασμένου Μήκους (Finite - Length Equalizer) Ας στρέψουμε τώρα την προσοχή μας σε έναν ισοσταθμιστή που έχει $2K + 1$ απολήξεις. Αφού $c_j = 0$ για $|j| > K$, η συνέλιξη του $\{f_n\}$ με το $\{c_n\}$ είναι μηδέν έξω από το εύρος $-K \leq n \leq K + L - 1$. Δηλαδή, $q_n = 0$ για $n < -K$ και $n > K + L - 1$. Με το q_0 κανονικοποιημένο στη μονάδα, η παραμόρφωση κορυφής είναι

$$\mathfrak{D}(\mathbf{c}) = \sum_{\substack{n=-K \\ n \neq 0}}^{K+L-1} |q_n| = \sum_{n=-K}^{K+L-1} \left| \sum_{\substack{j \\ n \neq 0}} c_j f_{n-j} \right| \quad (1.2 - 22)$$

Αν και ο ισοσταθμιστής έχει $2K + 1$ ρυθμιζόμενες παραμέτρους, υπάρχουν $2K + L$ μη μηδενικές τιμές στην απόκριση $\{q_n\}$. Άρα, είναι γενικά αδύνατο να εξαλείψουμε εντελώς τη διασυμβολική παρεμβολή στην έξοδο του ισοσταθμιστή. Υπάρχει πάντα κάποια υπολειπόμενη παρεμβολή όταν χρησιμοποιούνται οι βέλτιστοι συντελεστές. Το πρόβλημα είναι να ελαχιστοποιήσουμε την $\mathfrak{D}(\mathbf{c})$ ως προς τους συντελεστές $\{c_j\}$.

Η παραμόρφωση κορυφής που δίνεται από την (1.2 - 22) έχει δειχθεί από τον Lucky (1965) ότι είναι μια κυρτή συνάρτηση των συντελεστών $\{c_j\}$. Δηλαδή, έχει ένα απόλυτο ελάχιστο και κανένα σχετικό ελάχιστο. Η ελαχιστοποίησή της μπορεί να εκτελεστεί αριθμητικώς χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, τη μέθοδο της υπεραπότομης μείωσης. Λίγα μπορούν να ειπωθούν επιπλέον για τη γενική λύση σε αυτό το πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Ωστόσο, για μια ειδική αλλά σημαντική περίπτωση, η λύση για την ελαχιστοποίηση της $\mathfrak{D}(\mathbf{c})$ είναι γνωστή. Αυτή είναι η περίπτωση στην οποία η παραμόρφωση στην είσοδο του ισοσταθμιστή, η οποία ορίζεται ως

$$D_0 = \frac{1}{|f_0|} \sum_{n=1}^L |f_n| \quad (1.2 - 23)$$

είναι μικρότερη από τη μονάδα. Αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με το να έχουμε το μάτι ανοικτό πριν την εξίσωση. Δηλαδή, η διασυμβολική παρεμβολή δεν είναι αρκετά μεγάλη για να κλείσει το μάτι. Κάτω από αυτή τη συνθήκη, η παραμόρφωση κορυφής $\mathcal{D}(\mathbf{c})$ ελαχιστοποιείται επιλέγοντας τους συντελεστές του εξισωτή έτσι ώστε να αναγκάσουν το $q_n = 0$ για $1 \leq |n| \leq K$ και $q_0 = 1$. Με άλλα λόγια, η γενική λύση στην ελαχιστοποίηση της $\mathcal{D}(\mathbf{c})$, όταν $D_0 < 1$, είναι η λύση μηδενικού εξαναγκασμού (zero - forcing) για την $\{q_n\}$ στο εύρος $1 \leq |n| \leq K$. Όμως, οι τιμές του $\{q_n\}$ για $K + 1 \leq n \leq K + L - 1$ είναι γενικά μη μηδενικές. Αυτές οι μη μηδενικές τιμές αποτελούν τη παραμένουσα διασυμβολική παρεμβολή στην έξοδο του εξισωτή.

1.2.2 Κριτήριο Σφάλματος Μέσου Τετραγώνου

Στο **κριτήριο σφάλματος μέσου τετραγώνου (Mean Square Error criterion)**, οι συντελεστές βάρους απόληξης $\{c_j\}$ του ισοσταθμιστή είναι ρυθμισμένοι να ελαχιστοποιούν την τιμή του μέσου τετραγώνου του σφάλματος

$$\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k \quad (1.2 - 24)$$

όπου I_k είναι το πληροφοριακό σύμβολο που μεταδίδεται στο k - οστό διάστημα σηματοδότησης και \hat{I}_k είναι η εκτίμηση αυτού του συμβόλου στην έξοδο του εξισωτή, η οποία ορίστηκε στην (1.2 - 1). Όταν τα πληροφοριακά σύμβολα $\{I_k\}$ είναι μιγαδικά, ο δείκτης απόδοσης για το κριτήριο MSE, ο οποίος συμβολίζεται J , ορίζεται ως

$$\begin{aligned} J &= E|\varepsilon_k|^2 \\ &= E|I_k - \hat{I}_k|^2 \end{aligned} \quad (1.2 - 25)$$

Από την άλλη μεριά, όταν τα πληροφοριακά σύμβολα είναι πραγματικά, ο δείκτης απόδοσης είναι απλά το τετράγωνο του πραγματικού μέρους του ε_k . Σε κάθε περίπτωση, η J είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση των συντελεστών του ισοσταθμιστή $\{c_j\}$. Στη συζήτηση που ακολουθεί, μελετάμε την ελαχιστοποίηση της μιγαδικής μορφής που δίνεται στην (1.2 - 25).

Ισοσταθμιστής Άπειρου Μήκους (Infinite - Length Equalizer) Αρχικά, θα πρέπει να πάρουμε τους συντελεστές βάρους απόληξης οι οποίοι ελαχιστοποιούν την J όταν ο ισοσταθμιστής έχει έναν άπειρο αριθμό από απολήξεις. Σε αυτή την περίπτωση, η εκτίμηση \hat{I}_k εκφράζεται ως

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j v_{k-j} \quad (1.2-26)$$

Αντικατάσταση της (1.2-26) στην έκφραση για τη J που δίνεται στην (1.2-25) και επέκταση του αποτελέσματος αποφέρει μια δευτεροβάθμια συνάρτηση των συντελεστών $\{c_j\}$. Αυτή η συνάρτηση μπορεί εύκολα να ελαχιστοποιηθεί ως προς τους συντελεστές $\{c_j\}$ για να αποφέρει ένα σύνολο (άπειρων σε αριθμό) γραμμικών εξισώσεων για τους συντελεστές $\{c_j\}$. Εναλλακτικά, το σύνολο των γραμμικών εξισώσεων μπορεί να εξαχθεί εφαρμόζοντας την αρχή της ορθογωνικότητας στην εκτίμηση μέσου τετραγώνου. Δηλαδή, επιλέγουμε τους συντελεστές $\{c_j\}$ για να αποδώσουμε το σφάλμα ε_k ορθογώνια στην ακολουθία $\{v_{k-l}^*\}$ για $-\infty < l < \infty$. Έτσι,

$$E(\varepsilon_k v_{k-l}^*) = 0, \quad -\infty < l < \infty \quad (1.2-27)$$

Αντικατάσταση του ε_k στην (1.2-27) αποφέρει

$$E\left[\left(I_k - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j v_{k-j}\right)v_{k-l}^*\right] = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j E(v_{k-j} v_{k-l}^*) = E(I_k v_{k-l}^*), \quad -\infty < l < \infty \quad (1.2-28)$$

Για να αποτιμήσουμε τις συσχετίσεις στην (1.2-28), χρησιμοποιούμε την έκφραση για το v_k που δίνεται στην (1.1-17). Έτσι, παίρνουμε

$$\begin{aligned} E(v_{k-j} v_{k-l}^*) &= \sum_{n=0}^L f_n^* f_{n+l-j} + N_0 \delta_{lj} \\ &= \begin{cases} x_{l-j} + N_0 \delta_{lj} & (|l-j| \leq L) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2-29)$$

και

$$E(I_k v_{k-l}^*) = \begin{cases} f_{-l}^* & (-L \leq l \leq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (1.2-30)$$

Τώρα, αν αντικαταστήσουμε τις (1.2 – 29) και (1.2 – 30) στην (1.2 – 28) και πάρουμε το μετασχηματισμό z και των δύο πλευρών της προκύπτουσας εξίσωσης, θα λάβουμε

$$C(z)[F(z)F^*(z^{-1}) + N_0] = F^*(z^{-1}) \quad (1.2 - 31)$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του ισοσταθμιστή που βασίζεται στο κριτήριο MSE είναι

$$C(z) = \frac{F^*(z^{-1})}{F(z)F^*(z^{-1}) + N_0} \quad (1.2 - 32)$$

Όταν το φίλτρο λευκού θορύβου συμπεριλαμβάνεται στην $C(z)$, παίρνουμε ένα ισοδύναμο ισοσταθμιστή που έχει τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\begin{aligned} C'(z) &= \frac{1}{F(z)F^*(z^{-1}) + N_0} \\ &= \frac{1}{X(z) + N_0} \end{aligned} \quad (1.2 - 33)$$

Παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά μεταξύ αυτής της έκφρασης για το $C'(z)$ και αυτής που βασίζεται στο κριτήριο παραμόρφωσης κορυφής είναι ο παράγοντας φασματικής πυκνότητας θορύβου N_0 ο οποίος εμφανίζεται στην (1.2 – 33). Όταν ο N_0 είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με το σήμα, οι συντελεστές που ελαχιστοποιούν την παραμόρφωση κορυφής $\mathcal{D}(\mathbf{c})$ είναι περίπου ίσοι με τους συντελεστές που ελαχιστοποιούν το δείκτη απόδοσης J του MSE. Δηλαδή, καθώς το $N_0 \rightarrow 0$ στο όριο, τα δύο κριτήρια αποφέρουν την ίδια λύση για τα βάρη απόληξης. Συνεπώς, όταν $N_0 = 0$, η ελαχιστοποίηση του MSE οδηγεί σε πλήρη εξάλειψη της διασυμβολικής παρεμβολής. Από την άλλη μεριά, δε συμβαίνει το ίδιο όταν $N_0 \neq 0$. Γενικά, όταν $N_0 \neq 0$, υπάρχουν αμφότερα και η παραμένουσα διασυμβολική παρεμβολή και ο προσθετικός θόρυβος στην έξοδο του εξισωτή.

Ένα μέτρο της παραμένουσας διασυμβολικής παρεμβολής και του προσθετικού θορύβου εξάγεται αποτιμώντας την ελάχιστη τιμή του J , η οποία συμβολίζεται J_{\min} , όταν η συνάρτηση μεταφοράς $C(z)$ του εξισωτή δίνεται από την (1.2 – 32). Αφού $J = E|\varepsilon_k|^2 = E(\varepsilon_k I_k^*) - E(\varepsilon_k \hat{I}_k^*)$, και επειδή $E(\varepsilon_k \hat{I}_k^*) = 0$ ως συνέπεια των συνθηκών ορθογωνικότητας που δίνονται στην (1.2 – 27), έπεται ότι

$$\begin{aligned} J_{\min} &= E(\varepsilon_k I_k^*) \\ &= E|I_k|^2 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j E(v_{k-j} I_k^*) \end{aligned}$$

$$= 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{-j} \quad (1.2 - 34)$$

Αυτή η συγκεκριμένη μορφή για το J_{\min} δεν είναι πολύ κατατοπιστική. Μεγαλύτερη διορατικότητα στην απόδοση του ισοσταθμιστή ως μια συνάρτηση των χαρακτηριστικών του καναλιού λαμβάνεται όταν το άθροισμα στην (1.2 - 34) μετασχηματίζεται στο πεδίο της συχνότητας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί παρατηρώντας αρχικά ότι το άθροισμα στην (1.2 - 34) είναι η συνέλιξη του $\{c_j\}$ με το $\{f_j\}$, αποτιμημένη σε μια ολίσθηση του μηδενός. Έτσι, αν η $\{b_k\}$ συμβολίζει τη συνέλιξη αυτών των δύο ακολουθιών, το άθροισμα στην (1.2 - 34) είναι απλά ίσο με b_0 . Αφού ο μετασχηματισμός z της ακολουθίας $\{b_k\}$ είναι

$$\begin{aligned} B(z) &= C(z)F(z) \\ &= \frac{F(z)F^*(z^{-1})}{F(z)F^*(z^{-1}) + N_0} \\ &= \frac{X(z)}{X(z) + N_0} \end{aligned} \quad (1.2 - 35)$$

και ο όρος b_0 είναι

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{B(z)}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{X(z)}{z[X(z) + N_0]} dz \end{aligned} \quad (1.2 - 36)$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην (1.2 - 36) μπορεί να μετασχηματισθεί σε ένα ισοδύναμο γραμμικό ολοκλήρωμα με την αλλαγή μεταβλητής $z = e^{j\omega T}$. Το αποτέλεσμα αυτής της αλλαγής μεταβλητής είναι

$$b_0 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{X(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \quad (1.2 - 37)$$

Τελικά, αντικατάσταση του αποτελέσματος στην (1.2 - 37) για το άθροισμα στην (1.2 - 34) αποφέρει την επιθυμητή έκφραση για το ελάχιστο MSE στη μορφή

$$\begin{aligned} J_{\min} &= 1 - \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{X(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{N_0}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{N_0}{T^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega + 2\pi n/T)|^2 + N_0} d\omega \quad (1.2 - 38)$$

Λόγω της απουσίας διασυμβολικής παρεμβολής, $X(e^{j\omega T}) = 1$ και, για αυτό το λόγο,

$$J_{\min} = \frac{N_0}{1 + N_0} \quad (1.2 - 39)$$

Παρατηρούμε ότι $0 \leq J_{\min} \leq 1$. Επιπλέον, η σχέση μεταξύ του SNR εξόδου (κανονικοποιημένου ως προς την ενέργεια σήματος) γ_{∞} και του J_{\min} πρέπει να είναι

$$\gamma_{\infty} = \frac{1 - J_{\min}}{J_{\min}} \quad (1.2 - 40)$$

Το πιο σημαντικό, αυτή η σχέση μεταξύ γ_{∞} και J_{\min} εξακολουθεί να ισχύει επίσης όταν υπάρχει παραμένουσα διασυμβολική παρεμβολή σε συνδυασμό με το θόρυβο.

Ισοσταθμιστής Πεπερασμένου Μήκους (Finite – Length Equalizer) Ας στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στην περίπτωση που ο εγκάρσιος ισοσταθμιστής χωρίζει μια πεπερασμένη χρονική διάρκεια. Η έξοδος του ισοσταθμιστή στο k -οστό διάστημα σηματοδότησης είναι

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-K}^K c_j v_{k-j} \quad (1.2 - 41)$$

Η MSE για τον εξισωτή που έχει $2K + 1$ απολήξεις, η οποία συμβολίζεται με $J(K)$, είναι

$$J(K) = E \left| I_k - \hat{I}_k \right|^2 = E \left| I_k - \sum_{j=-K}^K c_j v_{k-j} \right|^2 \quad (1.2 - 42)$$

Ελαχιστοποίηση του $J(K)$ ως προς τα βάρη απόληξης $\{c_j\}$ ή, ισοδύναμα, αναγκάζοντας το σφάλμα $\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ να γίνει ορθογωνικό με τα δείγματα του σήματος v_{j-l}^* , $|l| \leq K$, αποφέρει το ακόλουθο σύνολο ταυτόχρονων συναρτήσεων:

$$\sum_{j=-K}^K c_j \Gamma_{ij} = \xi_l, \quad l = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (1.2 - 43)$$

όπου

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} x_{i-j} + N_0 \delta_{ij} & (|l-j| \leq L) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (1.2 - 44)$$

και

$$\xi_l = \begin{cases} f_{-l}^* & (-L \leq l \leq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (1.2 - 45)$$

Είναι βολικό να εκφράσουμε το σύνολο των γραμμικών εξισώσεων σε μορφή πινάκων. Έτσι,

$$\mathbf{\Gamma C} = \boldsymbol{\xi} \quad (1.2 - 46)$$

όπου το \mathbf{C} συμβολίζει το διάνυσμα στήλη των $2K+1$ συντελεστών βάρους απόληξης, το $\mathbf{\Gamma}$ συμβολίζει τον $(2K+1) \times (2K+1)$ ερμιτιανό πίνακα μεταβλητότητας με στοιχεία Γ_{ij} , και $\boldsymbol{\xi}$ είναι ένα $(2K+1)$ - διάστατο διάνυσμα στήλη με στοιχεία ξ_l . Η λύση της (1.2 - 46) είναι

$$\mathbf{C}_{\text{opt}} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\xi} \quad (1.2 - 47)$$

Έτσι, η λύση \mathbf{C}_{opt} συνεπάγεται αντιστροφή του πίνακα $\mathbf{\Gamma}$. Οι βέλτιστοι συντελεστές βάρους απόληξης οι οποίοι δίνονται από την (1.2 - 47) ελαχιστοποιούν το δείκτη απόδοσης $J(K)$, με αποτέλεσμα η ελάχιστη τιμή του $J(K)$ να είναι

$$\begin{aligned} J_{\min}(K) &= 1 - \sum_{j=-K}^0 c_j f_{-j} \\ &= 1 - \boldsymbol{\xi}^* \mathbf{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (1.2 - 48)$$

όπου το $\boldsymbol{\xi}^*$ αναπαριστά την αναστροφή του διανύσματος στήλης $\boldsymbol{\xi}$. Το $J_{\min}(K)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην (1.2 - 40) για να υπολογίσουμε τον SNR εξόδου για το γραμμικό εξισωτή με $2K+1$ συντελεστές απόληξης.

1.2.3 Χαρακτηριστικά Απόδοσης του Ισοσταθμιστή MSE

Σε αυτό το τμήμα της εργασίας, παρατηρούμε τα χαρακτηριστικά απόδοσης του γραμμικού ισοσταθμιστή ο οποίος βελτιστοποιείται χρησιμοποιώντας το κριτήριο MSE. Αμφότερα το ελάχιστο MSE και η πιθανότητα σφάλματος μελετώνται ως μέτρα απόδοσης για κάποια συγκεκριμένα κανάλια. Ξεκινάμε αποτιμώντας το ελάχιστο MSE, J_{\min} , και το SNR εξόδου, γ_{∞} , για δύο συγκεκριμένα κανάλια. Εν συνεχεία, μελετάμε την αποτίμηση της πιθανότητας σφάλματος.

Παράδειγμα 1.2 – 1

Αρχικά, μελετάμε ένα ισοδύναμο μοντέλο καναλιού διακριτού χρόνου το οποίο συνίσταται από δύο συνιστώσες f_0 και f_1 , οι οποίες κανονικοποιούνται ώστε να ισχύει $|f_0|^2 + |f_1|^2 = 1$. Τότε

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} \quad (1.2 - 49)$$

και

$$X(z) = f_0 f_1^* z + 1 + f_0^* f_1 z^{-1} \quad (1.2 - 50)$$

Η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας είναι

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega T}) &= f_0 f_1^* e^{j\omega T} + 1 + f_0^* f_1 e^{-j\omega T} \\ &= 1 + 2|f_0||f_1|\cos(\omega T + \theta) \end{aligned} \quad (1.2 - 51)$$

όπου θ είναι η γωνία του $f_0 f_1^*$. Παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική αυτού του καναλιού έχει ένα μηδενισμό στο $\omega = \pi/T$ όταν $f_0 = f_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ένας γραμμικός ισοσταθμιστής με ένα άπειρο αριθμό απολήξεων, ρυθμισμένων με βάση το κριτήριο MSE, θα έχει το ελάχιστο MSE που δίνεται από την (1.2 – 38). Αποτίμηση του ολοκληρώματος στην (1.2 – 38) για το $X(e^{j\omega T})$ που δίνεται στην (1.2 – 51) αποφέρει το αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{N_0}{\sqrt{N_0^2 + 2N_0(|f_0|^2 + |f_1|^2) + (|f_0|^2 - |f_1|^2)^2}} \\ &= \frac{N_0}{\sqrt{N_0^2 + 2N_0 + (|f_0|^2 - |f_1|^2)^2}} \end{aligned} \quad (1.2 - 52)$$

Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση όπου $f_0 = f_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Το ελάχιστο MSE είναι $J_{\min} = N_0 / \sqrt{N_0^2 + 2N_0}$ και ο αντίστοιχος SNR εξόδου είναι

$$\gamma_{\infty} = \sqrt{1 + \frac{2}{N_0}} - 1 \approx \left(\frac{2}{N_0}\right)^{1/2}, \quad N_0 \ll 1 \quad (1.2 - 53)$$

Αυτό το αποτέλεσμα πρέπει να συγκριθεί με τον SNR εξόδου του $1/N_0$ που παίρνουμε στην περίπτωση που δεν υπάρχει διασυμβολική παρεμβολή. Μια σημαντική απώλεια σε SNR λαμβάνει χώρα σε αυτό το κανάλι.

Παράδειγμα 1.2 – 2

Ως ένα δεύτερο παράδειγμα, μελετάμε μια χαρακτηριστική εκθετικής μείωσης της μορφής

$$f_k = \sqrt{1-a^2} a^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

όπου $a < 1$. Ο μετασχηματισμός Fourier αυτής της ακολουθίας είναι

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega T} \quad (1.2-54)$$

η οποία είναι μια συνάρτηση που περιέχει ένα ελάχιστο στο $\omega = \pi/T$. Ο SNR εξόδου για αυτό το κανάλι είναι

$$\begin{aligned} \gamma_\infty &= \left(\sqrt{1+2N_0 \frac{1+a^2}{1-a^2} + N_0^2} - 1 \right)^{-1} \\ &\approx \frac{1-a^2}{(1+a^2)N_0}, \quad N_0 \ll 1 \end{aligned} \quad (1.2-55)$$

Άρα, η απώλεια σε SNR λόγω της παρουσίας των παρεμβολών είναι

$$10 \log_{10} \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} \right)$$

Απόδοση της Πιθανότητας Σφάλματος του Γραμμικού Ισοσταθμιστή MSE
 Πριν, συζητήσαμε την απόδοση ενός γραμμικού ισοσταθμιστή σε σχέση με το ελάχιστο επιτεύξιμο MSE, J_{\min} , και το SNR εξόδου, γ , που σχετίζεται με το J_{\min} μέσω του τύπου στην (1.2 – 40). Δυστυχώς, δεν υπάρχει καμία απλή σχέση ανάμεσα σε αυτές τις ποσότητες και την πιθανότητα σφάλματος. Ο λόγος είναι ότι ο γραμμικός ισοσταθμιστής MSE περιέχει κάποια παραμένουσα διασυμβολική παρεμβολή στην έξοδό του. Αυτή η κατάσταση είναι διαφορετική από αυτή του άπειρα μεγάλου ισοσταθμιστή μηδενικού εξαναγκασμού, για την οποία δεν υπάρχει παραμένουσα παρεμβολή, αλλά μόνο γκαουσιανός θόρυβος. Η διασυμβολική παρεμβολή στην έξοδο του ισοσταθμιστή MSE δε χαρακτηρίζεται ικανοποιητικά ως μια έκφραση του προσθετικού γκαουσιανού θορύβου, και, για αυτό το λόγο, ο SNR εξόδου δε μετασχηματίζεται εύκολα σε μια ισοδύναμη πιθανότητα σφάλματος.

Μια προσέγγιση στον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος είναι μια μέθοδος η οποία αποφέρει ένα ακριβές αποτέλεσμα. Για να διαφωτίσουμε αυτή τη μέθοδο, ας θεωρήσουμε ένα σήμα PAM στο οποίο τα πληροφοριακά σύμβολα επιλέγονται από

το σύνολο με τιμές $2n - M - 1$, $n = 1, 2, \dots, M$, με ίση πιθανότητα. Τώρα θεωρήστε την απόφαση στο σύμβολο I_n . Η εκτίμηση του I_n είναι

$$\hat{I}_n = q_0 I_n + \sum_{k \neq n} I_k q_{n-k} + \sum_{j=-K}^K c_j n_{n-j} \quad (1.2 - 56)$$

όπου το $\{q_n\}$ αναπαριστά τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης του ισοσταθμιστή και του ισοδύναμου καναλιού. Με άλλα λόγια:

$$q_n = \sum_{k=-K}^K c_k f_{n-k} \quad (1.2 - 57)$$

και το σήμα εισόδου στον ισοσταθμιστή είναι

$$v_k = \sum_{j=0}^L f_j I_{k-j} + n_k \quad (1.2 - 58)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί σκέλος της (1.2 - 56) είναι το επιθυμητό σύμβολο, ο μεσαίος όρος είναι η διασυμβολική παρεμβολή, και ο τελευταίος όρος είναι ο γκαουσιανός θόρυβος. Η μεταβλητότητα του θορύβου είναι

$$\sigma_n^2 = N_0 \sum_{j=-K}^K c_j^2 \quad (1.2 - 59)$$

Για ένα ισοσταθμιστή με $2K + 1$ απολήξεις και μια απόκριση καναλιού που χωρίζει $L + 1$ σύμβολα, ο αριθμός των συμβόλων που περιλαμβάνονται στη διασυμβολική παρεμβολή είναι $2K + L$.

Ορίζουμε

$$\mathfrak{D} = \sum_{k \neq n} I_k q_{n-k} \quad (1.2 - 60)$$

Για μια συγκεκριμένη ακολουθία των $2K + L$ συμβόλων πληροφορίας, έστω \mathbf{I}_J , ο όρος της διασυμβολικής παρεμβολής $\mathfrak{D} = D_J$ είναι σταθερός. Η πιθανότητα σφάλματος για μια σταθερή D_J είναι

$$\begin{aligned} P_M(D_J) &= 2 \frac{(M-1)}{M} P(N + D_J > q_0) \\ &= \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{(q_0 - D_J)^2}{\sigma_n^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.2 - 61)$$

όπου το N συμβολίζει τον όρο του προσθετικού θορύβου. Η μέση πιθανότητα σφάλματος λαμβάνεται παίρνοντας το μέσο όρο της $P_M(D_J)$ για όλες τις πιθανές ακολουθίες \mathbf{I}_J . Δηλαδή,

$$\begin{aligned} P_M &= \sum_{\mathbf{I}_J} P_M(D_J) P(\mathbf{I}_J) \\ &= \frac{2(M-1)}{M} \sum_{\mathbf{I}_J} Q \left[\sqrt{\frac{(q_0 - D_J)^2}{\sigma_n^2}} \right] P(\mathbf{I}_J) \end{aligned} \quad (1.2 - 62)$$

Όταν όλες οι ακολουθίες είναι ισοπίθανες,

$$P(\mathbf{I}_J) = \frac{1}{M^{2K+L}} \quad (1.2 - 63)$$

Οι όροι της υπό συνθήκης πιθανότητας $P_M(D_J)$ κυριαρχούνται από την ακολουθία που αποφέρει τη μεγαλύτερη τιμή του D_J . Αυτό συμβαίνει όταν $I_n = \pm(M-1)$ και τα πρόσημα των πληροφοριακών συμβόλων ταιριάζουν με τα πρόσημα των αντίστοιχων $\{q_n\}$. Τότε,

$$D_J^* = (M-1) \sum_{k=0} |q_k|$$

και

$$P_M(D_J^*) = \frac{2(M-1)}{M} Q \left[\sqrt{\frac{q_0^2}{\sigma_n^2} \left(1 - \frac{M-1}{q_0} \sum_{k=0} |q_k| \right)^2} \right] \quad (1.2 - 64)$$

Έτσι, ένα άνω φράγμα στη μέση πιθανότητα σφάλματος για ακολουθίες ισοπίθανων συμβόλων είναι

$$P_M \leq P_M(D_J^*) \quad (1.2 - 65)$$

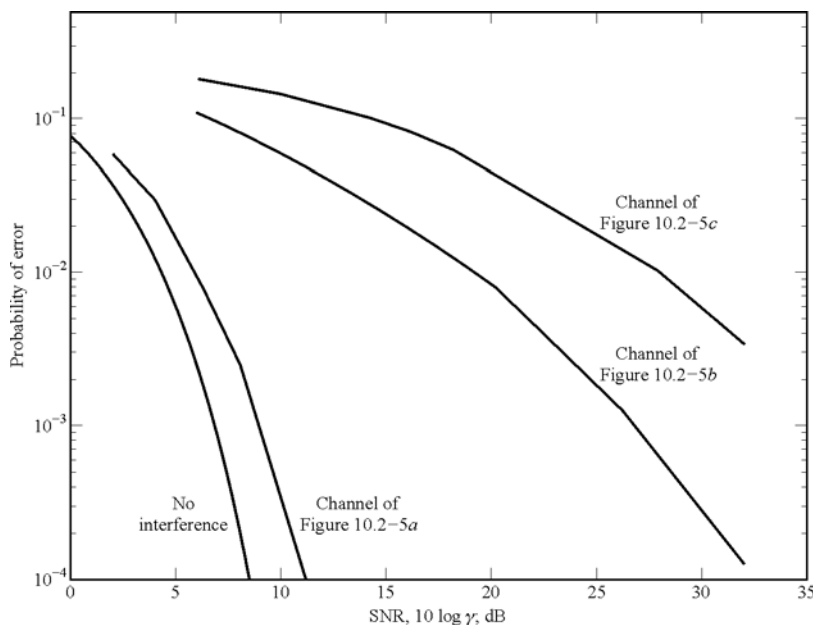
Αν ο υπολογισμός της ακριβής πιθανότητας σφάλματος στην (1.2 - 62) αποδεικνύεται πολύ δύσκολος και χρονοβόρος λόγω του μεγάλου αριθμού όρων στο άθροισμα και αν το άνω φράγμα είναι πολύ αόριστο, μπορούμε να καταφύγουμε σε μία από ένα αριθμό προσεγγιστικών μεθόδων που έχουν σχεδιαστεί, οι οποίες είναι γνωστές για το ότι αποφέρουν σφιχτά φράγματα στο P_M . Μια συζήτηση αυτών των διαφορετικών προσεγγίσεων θα μας πήγαινε πολύ εκτός πορείας. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να αναφερθεί στις δημοσιεύσεις των Saltzberg (1968), Lugannani (1969), Ho και Yeh (1970), Shimbo και Celebiler (1971), Glave (1972), και Yao και Tobin (1976).

Ως επεξήγηση των περιορισμών επίδοσης ενός γραμμικού ισοσταθμιστή υπό την παρουσία διασυμβολικής παρεμβολής μεγάλου βαθμού, δείχνουμε στο Σχ.1.2 - 4 την

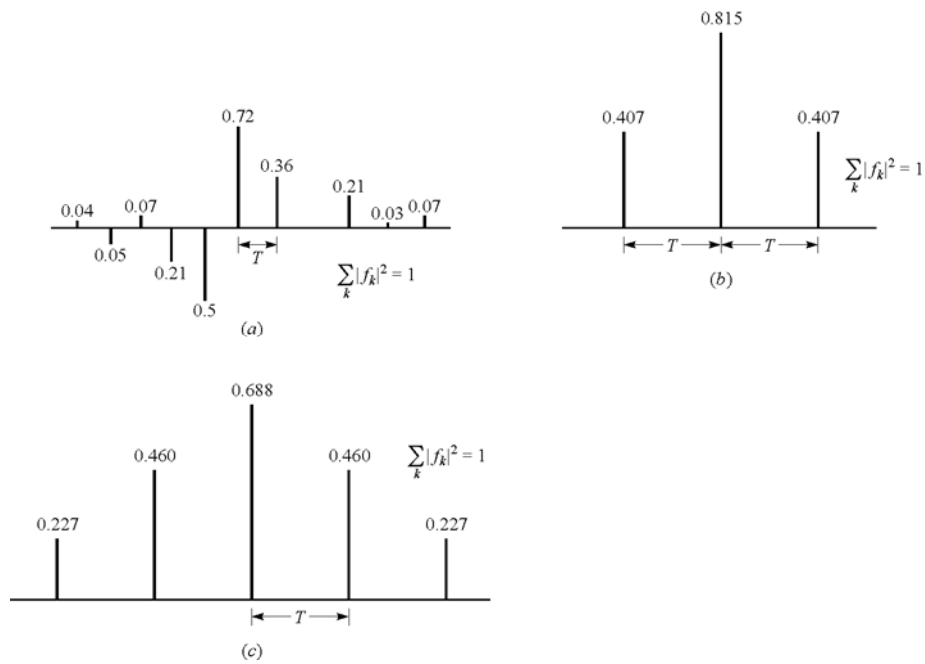
πιθανότητα σφάλματος για δυαδική (αντιποδική) σηματοδοσία, όπως μετρήθηκε από την εξομοίωση Monte Carlo, για τις τρεις χαρακτηριστικές καναλιών διακριτού χρόνου που φαίνονται στο Σχ.1.2 – 5. Για λόγους σύγκρισης, στο Σχ.1.2 – 4 φαίνεται επίσης η επίδοση που λαμβάνεται για ένα κανάλι χωρίς διασυμβολική παρεμβολή. Το ισοδύναμο κανάλι διακριτού χρόνου που φαίνεται στο Σχ.1.2 – 5(a) είναι τυπικό της απόδοσης ενός τηλεφωνικού καναλιού καλής ποιότητας. Αντιθέτως, οι χαρακτηριστικές των ισοδύναμων καναλιών διακριτού χρόνου που φαίνονται στα Σχ.1.2 – 5b) και (c) έχουν ως αποτέλεσμα μεγάλου βαθμού διασυμβολική παρεμβολή. Οι φασματικές χαρακτηριστικές $|X(e^{j\omega T})|$ για τα τρία κανάλια, οι οποίες φαίνονται στο Σχ.1.2 – 6, δείχνουν ξεκάθαρα ότι το κανάλι στο Σχ.1.2 – 5(c) έχει τη χειρότερη φασματική χαρακτηριστική. Για αυτό το λόγο η απόδοση του γραμμικού ισοσταθμιστή για αυτό το κανάλι είναι η φτωχότερη από τις τρεις περιπτώσεις. Επόμενο σε απόδοση είναι το κανάλι που φαίνεται στο Σχ.1.2 – 5(b), και τελικά, η καλύτερη απόδοση επιτυγχάνεται με το κανάλι που φαίνεται στο Σχ.1.2 – 5(a). Στην πραγματικότητα, ο ρυθμός σφαλμάτων του τελευταίου διαφέρει κατά 3 dB από το ρυθμό σφαλμάτων που επιτυγχάνεται χωρίς παρεμβολές.

Ένα συμπέρασμα που εντυπωσιάζει από τα αποτελέσματα στον SNR εξόδου γ_∞ και τα περιορισμένα αποτελέσματα της πιθανότητας σφάλματος που φαίνονται στο Σχ.1.2 – 4 είναι ότι ένας γραμμικός ισοσταθμιστής αποφέρει καλή απόδοση σε κανάλια όπως οι τηλεφωνικές γραμμές, όπου τα φασματικά χαρακτηριστικά των καναλιών συμπεριφέρονται ικανοποιητικά και δεν παρουσιάζουν φασματικούς μηδενισμούς. Από την άλλη μεριά, ένας γραμμικός ισοσταθμιστής είναι ανεπαρκής ως ένας αντισταθμιστής για τη διασυμβολική παρεμβολή σε κανάλια με φασματικούς μηδενισμούς, οι οποίοι μπορεί να υπάρξουν απρόσμενα στη ραδιομετάδοση.

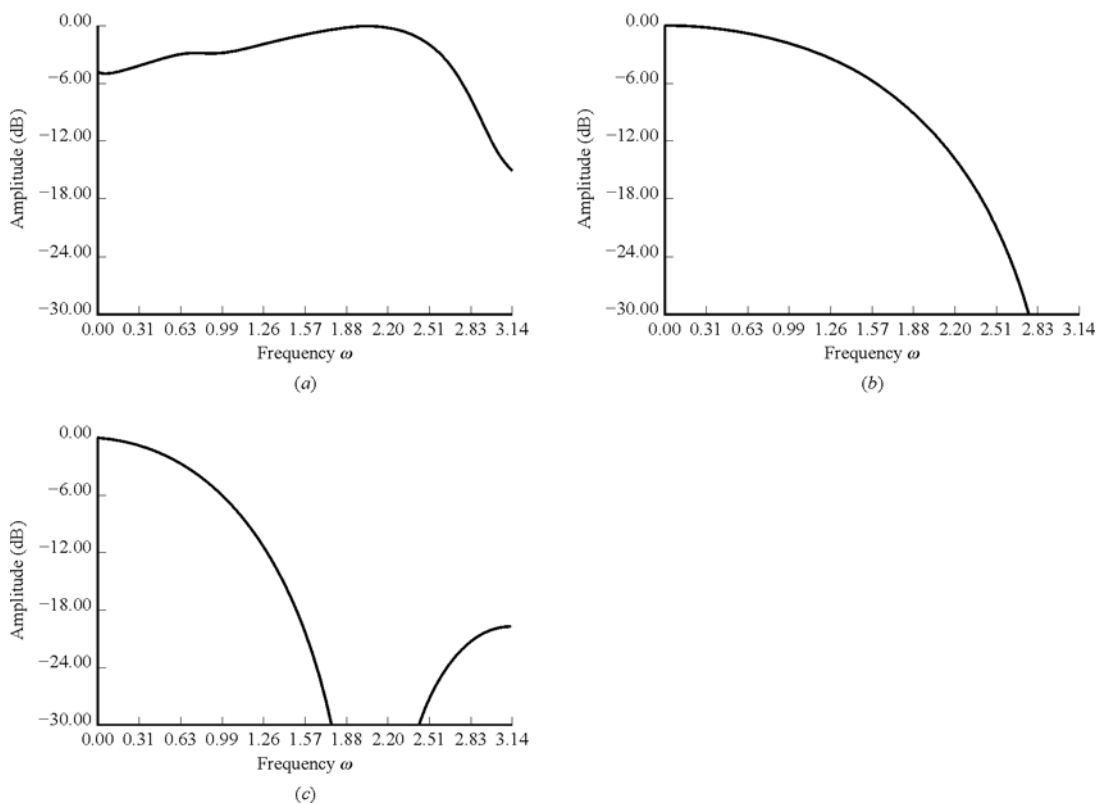
Ο βασικός περιορισμός του γραμμικού ισοσταθμιστή για να αντιμετωπίσει επιτυχώς μεγάλου βαθμού ISI έχει παρακινήσει μια αξιοσημείωτη ποσότητα έρευνας στους μη γραμμικούς ισοσταθμιστές με μικρή υπολογιστική πολυπλοκότητα. Ο ισοσταθμιστής αναδραστικής απόφασης που περιγράφεται στην ενότητα 1.3 φαίνεται να είναι μια αποτελεσματική λύση σε αυτό το πρόβλημα.



ΣΧΗΜΑ 1.2 – 4 Απόδοση ρυθμού σφαλμάτων γραμμικού MSE ισοσταθμιστή.



ΣΧΗΜΑ 1.2 – 5 Τρεις χαρακτηριστικές καναλιών διακριτού χρόνου.



ΣΧΗΜΑ 1.2 – 6 Φάσμα πλάτους για τα κανάλια που φαίνονται στα Σχ.1.2 – 5(a), 1.2 – 5(b) και 1.2 – 5(c) αντίστοιχα.

1.2.4 Κλασματικά Διαχωριζόμενοι Ισοσταθμιστές

Στις δομές των γραμμικών ισοσταθμιστών που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, οι απολήξεις του ισοσταθμιστή απέχουν η μία από την άλλη απόσταση ίση με τον αντίστροφο του ρυθμού συμβόλων. Με άλλα λόγια, ίση με τον αντίστροφο του ρυθμού σηματοδοσίας $1/T$. Αυτή η απόσταση απολήξεων είναι βέλτιστη αν ο ισοσταθμιστής προηγείται από ένα φίλτρο προσαρμοσμένο στον παραμορφωμένο μεταδιδόμενο παλμό του καναλιού. Όταν τα χαρακτηριστικά του καναλιού είναι άγνωστα, το φίλτρο του δέκτη προσαρμόζεται συνήθως στο μεταδιδόμενο παλμικό σήμα και ο χρόνος δειγματοληψίας βελτιστοποιείται για αυτό το σχεδόν βέλτιστο φίλτρο. Γενικά, αυτή η προσέγγιση οδηγεί σε μια απόδοση ισοσταθμιστή η οποία είναι πολύ ευαίσθητη στην επιλογή του χρόνου δειγματοληψίας.

Οι περιορισμοί του ρυθμού συμβόλων του εξισωτή είναι πάρα πολύ εύκολα ορατοί στο πεδίο της συχνότητας. Το φάσμα του σήματος στην είσοδο του ισοσταθμιστή μπορεί να εκφραστεί ως

$$Y_T(f) = \frac{1}{T} \sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{j2\pi(f-n/T)\tau_0} \quad (1.2 - 66)$$

όπου $Y_T(f)$ είναι το διπλωμένο φάσμα ή φάσμα ψευδώνυμων, όπου η διπλωμένη συχνότητα είναι $1/2T$. Παρατηρήστε ότι το φάσμα του λαμβανόμενου σήματος εξαρτάται από την επιλογή της καθυστέρησης δειγματοληψίας τ_0 . Το φάσμα του σήματος στην έξοδο του ισοσταθμιστή είναι $C_T(f)Y_T(f)$, όπου

$$C_T(f) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{-j2\pi f k T} \quad (1.2 - 67)$$

Είναι ξεκάθαρο από αυτές τις σχέσεις ότι ο ισοσταθμιστής ρυθμού συμβόλων μπορεί μόνο να εξισορροπήσει τις χαρακτηριστικές απόκρισης συχνότητας του ψευδότυπου λαμβανόμενου σήματος. Δε μπορεί να αντισταθμίσει την παραμόρφωση του καναλιού που ενυπάρχει στην $X(f)e^{j2\pi f \tau_0}$.

Σε αντίθεση με τον ισοσταθμιστή ρυθμού συμβόλων, ένας **κλασματικά διαχωριζόμενος ισοσταθμιστής (Fractionally Spaced Equalizer, FSE)** βασίζεται στη δειγματοληψία του εισερχόμενου σήματος τουλάχιστον τόσο γρήγορα όσο ο ρυθμός Nyquist. Για παράδειγμα, αν το μεταδιδόμενο σήμα αποτελείται από παλμούς που έχουν φάσμα ανυψωμένου συνημίτονου με ένα συντελεστή ολίσθησης β , το φάσμα του εκτείνεται μέχρι την $F_{\max} = (1+\beta)/2T$. Αυτό το σήμα μπορεί να δειγματοληπτηθεί στο δέκτη με ρυθμό

$$2F_{\max} = \frac{1+\beta}{T} \quad (1.2 - 69)$$

και μετά να διέλθει μέσω ενός ισοσταθμιστή με απόσταση μεταξύ των απολήξεων $T/(1+\beta)$. Για παράδειγμα, αν $\beta = 1$, μπορούμε να έχουμε ένα $\frac{1}{2}T$ - διαχωριζόμενο

ισοσταθμιστή. Αν $\beta = 0,5$, μπορούμε να έχουμε ένα $\frac{2}{3}T$ – διαχωριζόμενο ισοσταθμιστή, και ούτω κάθε εξής. Γενικά λοιπόν, ένας ψηφιακά υλοποιήσιμος κλασματικά διαχωριζόμενος ισοσταθμιστής έχει απόσταση μεταξύ των απολήξεων MT/N όπου M και N ακέραιοι και $N > M$. Συνήθως, στις περισσότερες εφαρμογές χρησιμοποιείται ένας $\frac{1}{2}T$ – διαχωριζόμενος ισοσταθμιστής.

Αφού η απόκριση συχνότητας του FSE είναι

$$C_{T'}(f) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{-j2\pi k T'} \quad (1.2 - 69)$$

όπου $T' = MT/N$, έπεται ότι η $C_{T'}(f)$ μπορεί να ισοσταθμίσει το φάσμα του λαμβανόμενου σήματος πέρα από τη συχνότητα Nyquist $f = 1/2T$ στην $f = (1 + \beta)/T = N/MT$. Το ισοσταθμισμένο φάσμα είναι

$$\begin{aligned} C_{T'}(f) Y_{T'}(f) &= C_{T'}(f) \sum_n X\left(f - \frac{n}{T'}\right) e^{j2\pi(f - n/T')\tau_0} \\ &= C_{T'}(f) \sum_n X\left(f - \frac{nN}{MT}\right) e^{j2\pi(f - nN/MT)\tau_0} \end{aligned} \quad (1.2 - 70)$$

Αφού $X(f) = 0$ για $|f| > N/MT$, η (1.2 – 70) μπορεί να εκφραστεί ως

$$C_{T'}(f) Y_{T'}(f) = C_{T'}(f) X(f) e^{j2\pi f \tau_0}, \quad |f| \leq \frac{1}{2T'} \quad (1.2 - 71)$$

Έτσι, παρατηρούμε ότι ο FSE αντισταθμίζει την παραμόρφωση του καναλιού στο λαμβανόμενο σήμα πριν την επίδραση των ψευδωνύμων λόγω του ρυθμού συμβόλων δειγματοληψίας. Με άλλα λόγια, η $C_{T'}(f)$ μπορεί να αντισταθμίσει οποιαδήποτε αυθαίρετα συγχρονισμένη φάση.

Η έξοδος του FSE δειγματοληπτείται στο ρυθμό συμβόλων $1/T$ και έχει το φάσμα

$$\sum_k C_{T'}\left(f - \frac{k}{T}\right) X\left(f - \frac{k}{T}\right) e^{j2\pi(f - k/T)\tau_0} \quad (1.2 - 72)$$

Ως αποτέλεσμα, ο βέλτιστος FSE είναι ισοδύναμος με το βέλτιστο γραμμικό δέκτη που αποτελείται από το προσαρμοσμένο φίλτρο ακολουθούμενο από ένα ισοσταθμιστή ρυθμού συμβόλων.

Ας μελετήσουμε τώρα τη ρύθμιση των συντελεστών απόληξης στον FSE. Η είσοδος στον FSE μπορεί να εκφραστεί ως

$$y\left(\frac{kMT}{N}\right) = \sum_n I_n x\left(\frac{kMT}{N} - nT\right) + v\left(\frac{kMT}{N}\right) \quad (1.2 - 73)$$

Σε κάθε διάστημα συμβόλου, ο FSE παράγει μια έξοδο της μορφής

$$\hat{I}_k = \sum_{n=-K}^K c_n y \left(kT - \frac{nMT}{N} \right) \quad (1.2 - 74)$$

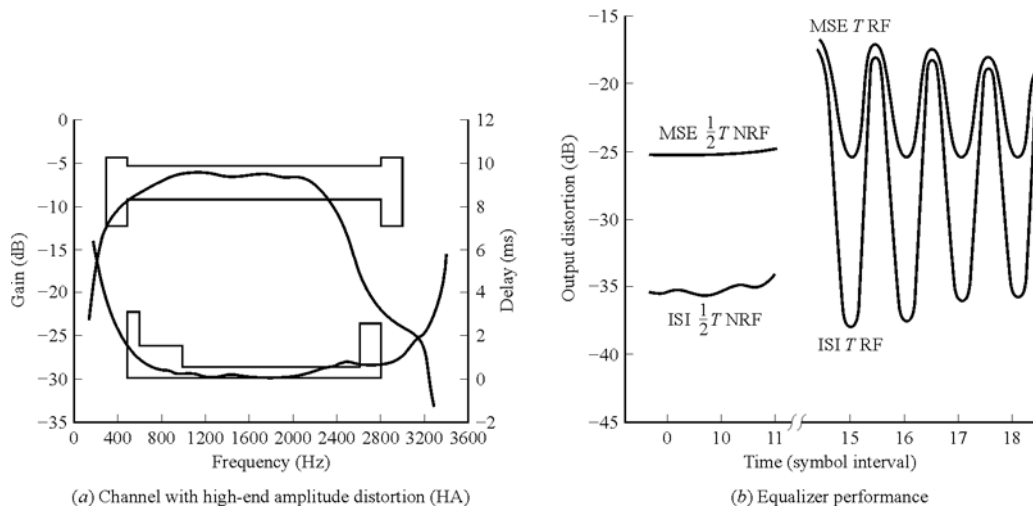
όπου οι συντελεστές του ισοσταθμιστή έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να ελαχιστοποιούν την MSE. Αυτή η βελτιστοποίηση οδηγεί σε ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων για τους συντελεστές του εξισωτή που έχουν τη λύση

$$\mathbf{C}_{\text{opt}} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \quad (1.2 - 75)$$

όπου \mathbf{A} είναι ο πίνακας συμεταβλητότητας των δεδομένων εισόδου και $\boldsymbol{\alpha}$ είναι το διάνυσμα της διανυσματικής συσχέτισης. Αυτές οι εξισώσεις είναι πανομοιότυπες με αυτές του για τον ισοσταθμιστή ρυθμού συμβόλων, αλλά υπάρχουν κάποιες λεπτές διαφορές. Μία από αυτές είναι ότι ο \mathbf{A} είναι Ερμιτιανός, αλλά όχι Toeplitz. Επιπρόσθετα, ο \mathbf{A} παρουσιάζει περιοδικότητες που ενυπάρχουν σε μια κυκλοστάσιμη διαδικασία, όπως δείχθηκε από τον Qureshi (1985). Ως αποτέλεσμα του κλασματικού διαχωρισμού, κάποιες από τις ιδιοτιμές του \mathbf{A} είναι σχεδόν μηδέν. Έχουν γίνει προσπάθειες από τον Long και άλλους (1988a, b) να εκμεταλλευθούν αυτή την ιδιότητα στη ρύθμιση των συντελεστών.

Μια ανάλυση της απόδοσης των κλασματικά διαχωριζόμενων ισοσταθμιστών, συμπεριλαμβανομένων των ιδιοτήτων σύγκλισής τους, δίνεται σε μια δημοσίευση από τον Ungerboeck (1976). Αποτελέσματα εξομοίωσης που επιδεικνύουν την αποτελεσματικότητα του FSE σε σχέση με έναν ισοσταθμιστή ρυθμού συμβόλων έχουν δοθεί επίσης στις δημοσιεύσεις των Qureshi και Forney (1977) και Gitlin και Weinstein (1981). Θα τοποθετηθούμε σε δύο παραδείγματα από αυτές τις δημοσιεύσεις. Πρώτα, το Σχ.1.2 - 7 δείχνει την απόδοση του ισοσταθμιστή ρυθμού συμβόλων και ενός $\frac{1}{2}T$ - FSE για ένα κανάλι με υψηλή παραμόρφωση πλάτους, του οποίου οι χαρακτηριστικές φαίνονται επίσης σε αυτό το σχήμα. Ο διαχωριζόμενος κατά σύμβολο ισοσταθμιστής προηγείται ενός προσαρμοσμένου στο μεταδιδόμενο παλμό φίλτρου το οποίο έχει ένα (τετραγωνικής ρίζας) φάσμα ανυψωμένου συνημίτονου με ένα συντελεστή ολίσθησης 20% ($\beta = 0,2$). Ο FSE ισοσταθμιστής δεν έπεται κανενός φίλτρου. Ο ρυθμός συμβόλων ήταν 2400 symbols/s και η διαμόρφωση ήταν QAM. Ο λαμβανόμενος SNR ήταν 30 dB. Και οι δύο ισοσταθμιστές είχαν 31 απολήξεις. Για αυτό το λόγο, ο $\frac{1}{2}T$ - FSE χωρίζει το μισό του χρονικού διαστήματος του ισοσταθμιστή ρυθμού συμβόλων. Παρόλα αυτά, ο FSE υπερτερούσε του ισοσταθμιστή ρυθμού συμβόλων όταν ο δεύτερος βελτιστοποιήθηκε στον καλύτερο χρόνο δειγματοληψίας. Επιπλέον, ο FSE δεν παρουσιάζει καμία ευαισθησία στο συγχρονισμό φάσης, όπως φαίνεται στο Σχ.1.2 - 7.

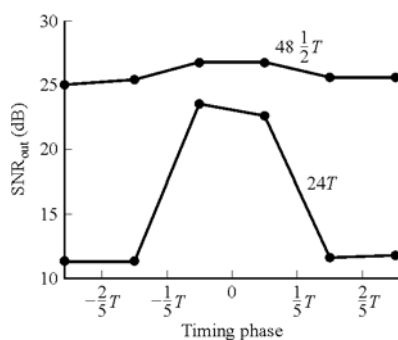
Παρόμοια αποτελέσματα ελήφθησαν από τους Gitlin και Weinstein. Για ένα κανάλι με φτωχή χαρακτηριστική καθυστέρησης περιβάλλουσας, η απόδοση του



ΣΧΗΜΑ 1.2 – 7 Επίδοση T – ισοσταθμιστή και $T/2$ – ισοσταθμιστή ως συνάρτηση της φάσης χρονισμού για 2.400 σύμβολα ανά δευτερόλεπτο. (Το NRF δηλώνει ότι δεν υπάρχει φίλτρο λήψης.) [Από τους Qureshi και Forney (1977) © 1977 IEEE.]

SNR του εξισωτή ρυθμού συμβόλων και ενός $\frac{1}{2}T$ – FSE εξισωτή φαίνεται στο

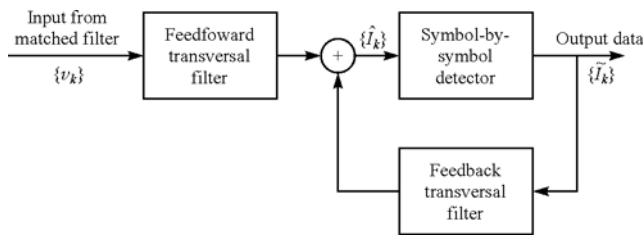
Σχ.1.2 - 8. Σε αυτή την περίπτωση, και οι δύο εξισωτές έχουν την ίδια χρονική έκταση. Ο T – χωριζόμενος ισοσταθμιστής είχε 24 απολήξεις ενώ ο FSE είχε 48 απολήξεις. Ο ρυθμός συμβόλων ήταν 2400 symbols/s και ο ρυθμός δεδομένων ήταν 9600 bits/s με διαμόρφωση QAM 16 καταστάσεων. Το παλμικό σήμα είχε ένα φάσμα ανυψωμένου συνημίτονου με $\beta = 0,12$. Παρατηρήστε ξανά ότι ο FSE υπερτερεί του T – διαχωριζόμενου ισοσταθμιστή κατά πολλά decibel, ακόμα και όταν ο τελευταίος είχε ρυθμιστεί για βέλτιστη δειγματοληψία. Τα αποτελέσματα σε αυτές τις δύο δημοσιεύσεις αποδεικνύουν ξεκάθαρα την ανώτερη απόδοση που επιτυγχάνεται με ένα κλασματικά διαχωριζόμενο ισοσταθμιστή.



ΣΧΗΜΑ 1.2 – 8 Επίδοση T – ισοσταθμιστή και $T/2$ – ισοσταθμιστή ως συνάρτηση της φάσης χρονισμού για 2.400 σύμβολα ανά δευτερόλεπτο και 16 – QAM σε ένα κανάλι με φτωχή καθυστέρηση περιβάλλουσας. [Από τους Gitlin και Weinstein (1981). *Bell System Technical Journal* © 1981 AT & T.]

1.3 ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΣΤΗΣ ΑΝΑΔΡΑΣΤΙΚΗΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Ο **ισοσταθμιστής αναδραστικής απόφασης (Decision – Feedback Equalizer, DFE)**, ο οποίος απεικονίζεται στο Σχ.1.3 – 1, αποτελείται από δύο φίλτρα, ένα φίλτρο πρόσθιας τροφοδότησης και ένα φίλτρο ανάδρασης. Όπως φαίνεται, και τα δύο έχουν απολήξεις διαχωριζόμενες στο διάστημα συμβόλων T . Η είσοδος στο πρόσθια τροφοδοτούμενο τμήμα είναι το σήμα της λαμβανόμενης ακολουθίας $\{v_k\}$. Από αυτή την άποψη, το φίλτρο πρόσθιας τροφοδότησης είναι πανομοιότυπο με το γραμμικό εγκάρσιο ισοσταθμιστή που περιγράφεται στην Παράγραφο 1.2. Το φίλτρο ανάδρασης έχει ως είσοδό του την ακολουθία των αποφάσεων των προγενέστερα ανιχνευμένων συμβόλων. Λειτουργικά, το φίλτρο ανάδρασης χρησιμοποιείται για να απομακρύνει από την παρούσα εκτίμηση αυτό το μέρος της διασυμβολικής παρεμβολής που προκαλείται από προγενέστερα ανιχνευμένα σύμβολα.



ΣΧΗΜΑ 1.3 – 1 Δομή ενός ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης.

1.3.1 Βελτιστοποίηση Συντελεστών

Από την περιγραφή που δόθηκε παραπάνω, έπεται ότι η έξοδος του ισοσταθμιστή μπορεί να εκφραστεί ως

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-K_1}^0 c_j v_{k-j} + \sum_{j=1}^{K_2} c_j \tilde{I}_{k-j} \quad (1.3 - 1)$$

όπου το \hat{I}_k είναι μια εκτίμηση του k – οστού πληροφοριακού συμβόλου, $\{c_j\}$ είναι οι συντελεστές απόληξης του φίλτρου, και $\tilde{I}_{k-1}, \dots, \tilde{I}_{k-K_2}$ είναι τα προγενέστερα ανιχνευμένα σύμβολα. Υποθέτουμε ότι ο εξισωτής έχει $(K_1 + 1)$ απολήξεις στο πρόσθια τροφοδοτούμενο τμήμα του και K_2 στο αναδραστικό τμήμα του. Πρέπει να παρατηρηθεί ότι αυτός ο ισοσταθμιστής είναι μη γραμμικός γιατί το φίλτρο ανάδρασης περιέχει προγενέστερα ανιχνεύσιμα σύμβολα $\{\tilde{I}_k\}$.

Τόσο το κριτήριο παραμόρφωσης κορυφής όσο και το κριτήριο MSE καταλήγουν σε μια βολική μαθηματικά βελτιστοποίηση των συντελεστών του ισοσταθμιστή, όπως μπορεί να συμπεράνει κανείς από τις δημοσιεύσεις των George κ.ά. (1971), Price (1972), Salz (1973), και Proakis (1975). Αφού το κριτήριο MSE είναι πιο διαδεδομένο στην πράξη, εστιάζουμε την προσοχή μας σε αυτό. Βασισμένοι στην υπόθεση ότι τα προγενέστερα ανιχνευμένα σύμβολα στο φίλτρο ανάδρασης είναι σωστά, η ελαχιστοποίηση του MSE

$$J(K_1, K_2) = E \left| I_k - \hat{I}_k \right|^2 \quad (1.3 - 2)$$

οδηγεί στο επόμενο σύνολο γραμμικών εξισώσεων για τους συντελεστές του εμπρόσθια τροφοδοτούμενου φίλτρου:

$$\sum_{j=-K_1}^0 \psi_{lj} c_j = f_{-l}^*, \quad l = -K_1, \dots, -1, 0 \quad (1.3 - 3)$$

όπου

$$\psi_{lj} = \sum_{m=0}^{-l} f_m^* f_{m+l-j} + N_0 \delta_{lj}, \quad l, j = -K_1, \dots, -1, 0 \quad (1.3 - 4)$$

Οι συντελεστές του φίλτρου ανάδρασης του ισοσταθμιστή δίνονται με όρους των συντελεστών του εμπρόσθια τροφοδοτούμενου φίλτρου μέσω της επόμενης έκφρασης:

$$c_k = - \sum_{j=-K_1}^0 c_j f_{k-j}, \quad k = 1, 2, \dots, K_2 \quad (1.3 - 5)$$

Οι τιμές των συντελεστών ανάδρασης έχουν ως αποτέλεσμα πλήρη εξάλειψη της διασυμβολικής παρεμβολής από τα προγενέστερα ανιχνευμένα σύμβολα, υπό τον όρο ότι οι προηγούμενες αποφάσεις είναι σωστές και $K_2 \geq L$.

1.3.2 Χαρακτηριστικές Απόδοσης του DFE

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στην απόδοση που επιτυγχάνεται με την ισοστάθμιση αναδραστικής απόφασης. Η ακριβής αποτίμηση της απόδοσης είναι περίπλοκη μέχρι κάποιο σημείο λόγω των σποραδικών λανθασμένων αποφάσεων που λαμβάνονται από τον ανιχνευτή, οι οποίες στη συνέχεια διαδίδονται στο τμήμα ανάδρασης. Υπό την απουσία σφαλμάτων απόφασης, το ελάχιστο MSE δίνεται ως

$$J_{\min}(K_1) = 1 - \sum_{j=-K_1}^0 c_j f_{-j} \quad (1.3 - 6)$$

Παίρνοντας το όριο όταν ($K_1 \rightarrow \infty$) ενός άπειρου αριθμού από απολήξεις στο εμπρόσθια τροφοδοτούμενο φίλτρο, λαμβάνουμε τη μικρότερη επιτεύξιμη MSE, η οποία συμβολίζεται ως J_{\min} . Με κάποια προσπάθεια η J_{\min} μπορεί να εκφραστεί με όρους των φασματικών χαρακτηριστικών του καναλιού και του προσθετικού θορύβου, όπως δείχθηκε από τον Saltz (1973). Αυτή η περισσότερο επιθυμητή μορφή για το J_{\min} είναι

$$J_{\min} = \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln \left[\frac{N_0}{X(e^{j\omega T}) + N_0} \right] d\omega \right\} \quad (1.3 - 7)$$

Ο αντίστοιχος SNR εξόδου είναι

$$\begin{aligned} \gamma_{\infty} &= \frac{1 - J_{\min}}{J_{\min}} \\ &= -1 + \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln \left[\frac{N_0 + X(e^{j\omega T})}{N_0} \right] d\omega \right\} \end{aligned} \quad (1.3 - 8)$$

Παρατηρούμε ξανά ότι, υπό την απουσία της διασυμβολικής παρεμβολής, $X(e^{j\omega T}) = 1$ και, για αυτό το λόγο, $J_{\min} = N_0 / (1 + N_0)$. Ο αντίστοιχος SNR εξόδου είναι $\gamma_{\infty} = 1/N_0$.

Παράδειγμα 1.3 – 1

Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την τιμή της J_{\min} για τον ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης με την τιμή της J_{\min} που λαμβάνεται με τον γραμμικό MSE ισοσταθμιστή. Για παράδειγμα, ας μελετήσουμε το ισοδύναμο κανάλι διακριτού χρόνου που αποτελείται από δύο απολήξεις f_0 και f_1 . Η ελάχιστη MSE για αυτό το κανάλι είναι

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln \left[\frac{N_0}{1 + N_0 + 2|f_0||f_1| \cos(\omega T + \theta)} \right] d\omega \right\} \\ &= N_0 \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + N_0 + 2|f_0||f_1| \cos \omega) d\omega \right] \\ &= \frac{2N_0}{1 + N_0 + \sqrt{(1 + N_0)^2 - 4|f_0 f_1|^2}} \end{aligned} \quad (1.3 - 9)$$

Παρατηρήστε ότι η J_{\min} μεγιστοποιείται όταν $|f_0| = |f_1| = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Τότε

$$J_{\min} = \frac{2N_0}{1 + N_0 + \sqrt{(1 + N_0)^2 - 1}} \approx 2N_0, \quad N_0 \ll 1 \quad (1.3 - 10)$$

Ο αντίστοιχος SNR εξόδου είναι

$$\gamma_{\infty} \approx \frac{1}{2N_0}, \quad N_0 \ll 1 \quad (1.3 - 11)$$

Επομένως, υπάρχει ένα υποβιβασμός 3 dB στον SNR εξόδου λόγω της παρουσίας της διασυμβολικής παρεμβολής. Συγκριτικά, η απώλεια απόδοσης για το γραμμικό ισοσταθμιστή είναι πολύ σοβαρή. Ο SNR εξόδου του όπως δίνεται από την (1.2 – 53) είναι $\gamma_\infty \approx (2/N_0)^{1/2}$ για $N_0 \ll 1$.

Παράδειγμα 1.3 – 2

Θεωρήστε την εκθετικά αποσβένουσα χαρακτηριστική του καναλιού της μορφής

$$f_k = (1 - a^2)^{1/2} a^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3 - 12)$$

όπου $a < 1$. Ο SNR εξόδου του ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης είναι

$$\begin{aligned} \gamma_\infty &= -1 + \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left[\frac{1 + a^2 + (1 - a^2)/N_0 - 2a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \right] d\omega \right\} \\ &= -1 + \frac{1}{2N_0} \left\{ 1 - a^2 + N_0(1 + a^2) + \sqrt{[1 - a^2 + N_0(1 + a^2)]^2 - 4a^2 N_0^2} \right\} \\ &\approx \frac{(1 - a^2)[1 + N_0(1 + a^2)/(1 - a^2)] - N_0}{N_0} \\ &\approx \frac{1 - a^2}{N_0}, \quad N_0 \ll 1 \end{aligned} \quad (1.3 - 13)$$

Έτσι, η απώλεια σε SNR είναι $10 \log_{10}(1 - a^2)$ dB. Για λόγους σύγκρισης, ο γραμμικός ισοσταθμιστής έχει μια απώλεια της τάξης των $10 \log_{10} \left[\frac{(1 - a^2)}{(1 + a^2)} \right]$ dB.

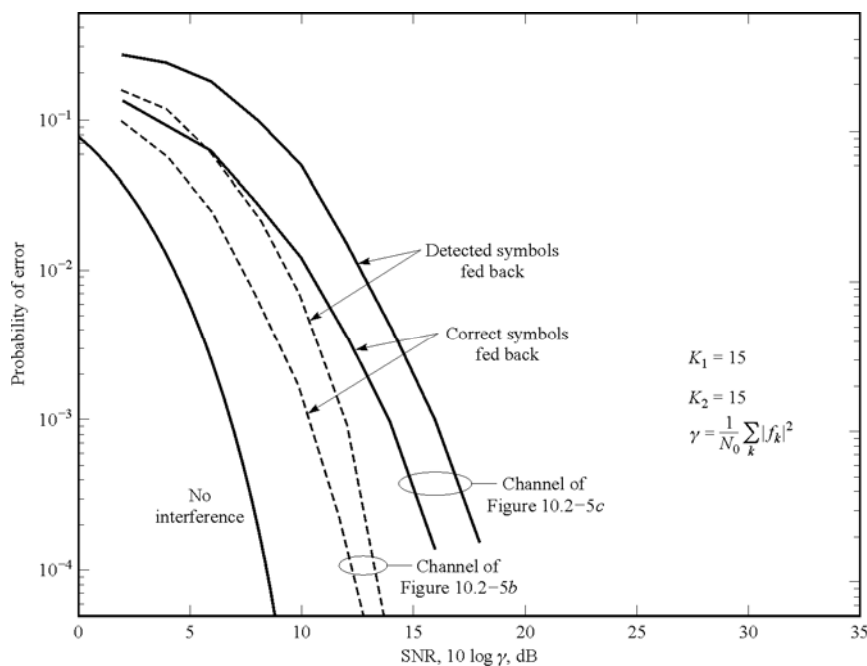
Αυτά τα αποτελέσματα δείχνουν εμφανώς την ανωτερότητα του ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης σε σχέση με το γραμμικό ισοσταθμιστή όταν αμελείται η επίδραση των σφαλμάτων απόφασης. Φαινομενικά ένα αξιοσημείωτο κέρδος στην απόδοση μπορεί να επιτευχθεί συγκριτικά με το γραμμικό ισοσταθμιστή με το συνυπολογισμό του τμήματος αναδραστικής απόφασης, το οποίο εξαλείφει τη διασυμβολική παρεμβολή στα προγενέστερα ανιχνευμένα σύμβολα.

Μια μέθοδος αποτίμησης της επίδρασης των σφαλμάτων απόφασης στην επίδοση του ρυθμού σφαλμάτων του ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης είναι η εξομοίωση Monte Carlo σε ένα ψηφιακό υπολογιστή. Για επεξηγηματικούς σκοπούς, προτείνουμε τα επόμενα αποτελέσματα για σηματοδοσία δυαδικού PAM μέσω των μοντέλων ισοδύναμων καναλιών διακριτού χρόνου που φαίνονται στο στα Σχ.1.2 – 5(b) και (c).

Τα αποτελέσματα της εξομοίωσης απεικονίζονται στο Σχ.1.3 – 2. Πρώτα από όλα, μια σύγκριση αυτών των αποτελεσμάτων με αυτά που παρουσιάστηκαν στο Σχ.1.2 – 4 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο ισοσταθμιστής αναδραστικής απόφασης

αποφέρει μια σημαντική βελτίωση στην απόδοση συγκριτικά με τον γραμμικό ισοσταθμιστή που έχει τον ίδιο αριθμό απολήξεων. Δεύτερον, αυτά τα αποτελέσματα δείχνουν ότι υπάρχει ακόμη μια σημαντική υποβάθμιση στην απόδοση του ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης λόγω της παραμένουσας διασυμβολικής παρεμβολής, ειδικά σε κανάλια με σοβαρή παραμόρφωση όπως αυτό που φαίνεται στο Σχ.1.2 – 5(c). Τέλος, η απώλεια στην επίδοση λόγω των λανθασμένων αποφάσεων που ανατροφοδοτούνται είναι, κατά προσέγγιση, 2 dB για τις απόκριση των υπό μελέτη καναλιών. Πρόσθετα αποτελέσματα στην πιθανότητα σφάλματος μπορούν να βρεθούν στις δημοσιεύσεις των Duttweiler κ.ά. (1974) και Beaulieu (1992).

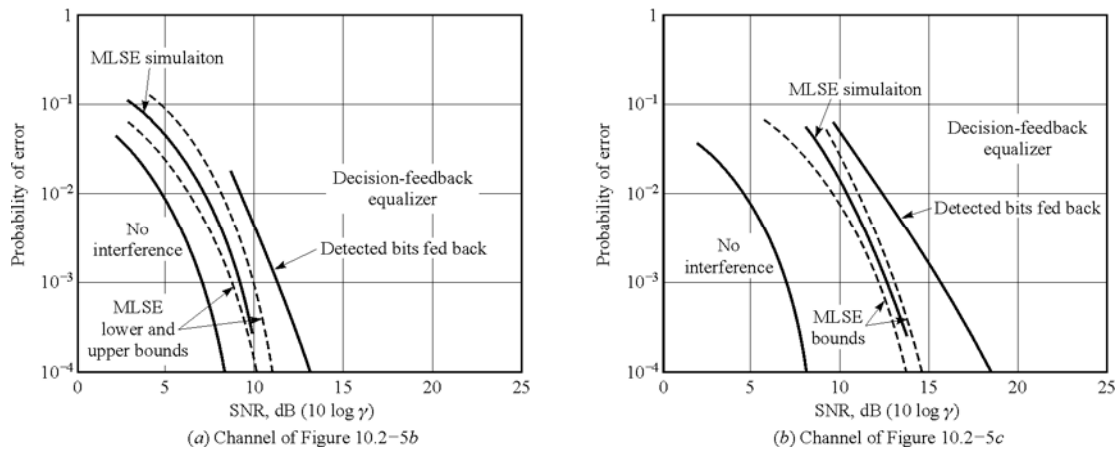
Η δομή του DFE που αναλύθηκε άνωθεν περιέχει ένα T – χωριζόμενο φίλτρο για το κομμάτι πρόσθιας τροφοδότησης. Η ευνοϊκότερη συνθήκη μιας τέτοιας δομής βασίζεται στην υπόθεση ότι το αναλογικό φίλτρο που προηγείται του DFE είναι προσαρμοσμένο στην παλμό απόκρισης του μολυσμένου καναλιού και η έξοδος του δειγματοληπτείται τη βέλτιστη χρονική στιγμή. Στην πράξη, η απόκριση του καναλιού δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, οπότε δεν είναι δυνατόν να σχεδιαστεί ένα ιδανικό προσαρμοσμένο φίλτρο. Λαμβανομένης υπόψη αυτής της δυσκολίας, είναι σύνηθες σε πρακτικές εφαρμογές να χρησιμοποιούμε ένα κλασματικά χωριζόμενο φίλτρο πρόσθιας τροφοδότησης. Βεβαίως, η απόσταση απολήξεων του φίλτρου ανάδρασης παραμένει T . Η χρήση του FSE για το φίλτρο πρόσθιας τροφοδότησης εξαλείφει την ευαισθησία του συστήματος σε ένα σφάλμα χρονισμού.



ΣΧΗΜΑ 1.3 – 2 Απόδοση ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης με και χωρίς σφάλμα διάδοσης.

Σύγκριση Απόδοσης με τον MLSE Κλείνουμε αυτή την υποενότητα στην απόδοση του DFE συγκρίνοντας την απόδοσή του έναντι αυτής του MLSE. Για το κανάλι δύο διαδρομών με $f_0 = f_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, έχουμε δείξει ότι ο MLSE δεν υφίσταται απώλεια SNR ενώ ο ισοσταθμιστής αναδραστικής απόφασης υφίσταται μια απώλεια 3 dB. Σε κανάλια με περισσότερη παραμόρφωση, το πλεονέκτημα σε SNR του MLSE

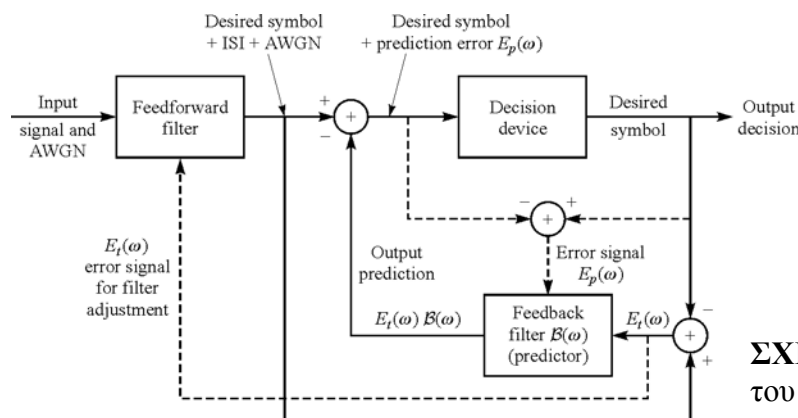
έναντι του ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης είναι ακόμα μεγαλύτερο. Το Σχήμα 1.3 – 3 δείχνει μια σύγκριση της επίδοσης ρυθμού σφαλμάτων αυτών των δύο τεχνικών ισοστάθμισης, η οποία λήφθηκε μέσω εξομοίωσης Monte Carlo, για δυαδική PAM και για τις χαρακτηριστικές καναλιού που φαίνονται στα Σχ.1.2 – 5(b) και (c). Οι καμπύλες του ρυθμού σφαλμάτων για αυτές τις δύο μεθόδους έχουν διαφορετικές κλίσεις. Για αυτό το λόγο η διαφορά στον SNR αυξάνεται καθώς μειώνεται η πιθανότητα σφάλματος. Ως ένα σημείο αναφοράς, στο Σχ.1.3 – 3 φαίνεται επίσης ο ρυθμός σφαλμάτων για το AWGN κανάλι χωρίς διασυμβολική παρεμβολή.



ΣΧΗΜΑ 1.3 – 3 Σύγκριση απόδοσης ανάμεσα στην MLSE ισοστάθμιση και στην ισοστάθμιση αναδραστικής απόφασης για τις χαρακτηριστικές του καναλιού που φαίνονται (a) στο Σχ.1.2 – 5(b) και (b) στο Σχ.1.2 – 5(c).

1.3.3 Προβλέπων Ισοσταθμιστής Αναδραστικής Απόφασης

Οι Belfiore και Park (1979) πρότειναν μια άλλη δομή DFE η οποία είναι ισοδύναμη με αυτή που φαίνεται στο Σχ.1.3 – 1 κάτω υπό τη συνθήκη ότι το φίλτρο πρόσθιας τροφοδότησης έχει έναν άπειρο αριθμό από απολήξεις. Αυτή η δομή αποτελείται από ένα FSE ως ένα φίλτρο πρόσθιας τροφοδότησης και ένα γραμμικό **προβλεπτή (predictor)** ως ένα φίλτρο ανάδρασης, όπως φαίνεται στη σχετική διάταξη των τμημάτων που δίνεται στο Σχ.1.3 – 4. Ας μελετήσουμε εν συντομία τις χαρακτηριστικές απόδοσης αυτού του ισοσταθμιστή.



ΣΧΗΜΑ 1.3 – 4 Διάγραμμα βαθμίδων του προβλέπων DFE

Πρώτα από όλα, ο θόρυβος στην έξοδο του άπειρου μήκους φίλτρου πρόσθιας τροφοδότησης έχει την φασματική πυκνότητα ισχύος

$$\frac{N_0 X(e^{j\omega T})}{|N_0 + X(e^{j\omega T})|^2}, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (1.3 - 14)$$

Η παραμένουσα διασυμβολική παρεμβολή έχει τη φασματική πυκνότητα ισχύος

$$\left| 1 - \frac{X(e^{j\omega T})}{N_0 + X(e^{j\omega T})} \right|^2 = \frac{N_0^2}{|N_0 + X(e^{j\omega T})|^2}, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (1.3 - 15)$$

Το άθροισμα αυτών των δύο φασμάτων αναπαριστά τη φασματική πυκνότητα ισχύος του συνολικού θορύβου και της διασυμβολικής παρεμβολής στην έξοδο του πρόσθιου φίλτρου. Έτσι, προσθέτοντας τις (1.3 - 14) και (1.3 - 15), παίρνουμε

$$E(\omega) = \frac{N_0}{N_0 + X(e^{j\omega T})}, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (1.3 - 16)$$

Όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, αν $X(e^{j\omega T}) = 1$, το κανάλι είναι ιδανικό και, για αυτό το λόγο, δεν είναι δυνατό να μειώσουμε το MSE ακόμα περισσότερο. Από την άλλη μεριά, αν υπάρχει παραμόρφωση καναλιού, η ισχύς στην ακολουθία σφάλματος στην έξοδο του φίλτρου πρόσθιας τροφοδότησης μπορεί να μειωθεί μέσω γραμμικής πρόβλεψης βασιζόμενης στις παρελθούσες τιμές της ακολουθίας σφάλματος.

Αν η $\mathfrak{B}(\omega)$ αναπαριστά την απόκριση συχνότητας του άπειρου μήκους προβλεπτή ανάδρασης, με άλλα λόγια αν

$$\mathfrak{B}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-j\omega n T} \quad (1.3 - 17)$$

τότε το σφάλμα στην έξοδο του προβλεπτή είναι

$$E(\omega) - E(\omega)\mathfrak{B}(\omega) = E(\omega)[1 - \mathfrak{B}(\omega)] \quad (1.3 - 18)$$

Η ελαχιστοποίηση της μέσης τετραγωνικής τιμής αυτού του σφάλματος, με άλλα λόγια του

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |1 - \mathfrak{B}(\omega)|^2 |E(\omega)|^2 d\omega \quad (1.3 - 19)$$

μέσω των συντελεστών του προβλεπτή $\{b_n\}$ αποφέρει το βέλτιστο προβλεπτή στη μορφή

$$\mathfrak{B}(\omega) = 1 - \frac{G(\omega)}{g_0} \quad (1.3 - 20)$$

όπου $G(\omega)$ είναι η λύση στη φασματική παραγοντοποίηση

$$G(\omega)G^*(-\omega) = \frac{1}{|E(\omega)|^2} \quad (1.3 - 21)$$

και

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{-j\omega nT} \quad (1.3 - 22)$$

Η έξοδος του άπειρου μήκους γραμμικού προβλεπτή είναι μια ακολουθία λευκού θορύβου με φασματική πυκνότητα ισχύος $1/g_0^2$ και η αντίστοιχη ελάχιστη MSE δίνεται από την (1.3 – 7). Άρα, η επίδοση MSE του άπειρου μήκους προβλεπτή DFE είναι πανομοιότυπη με του συμβατικού DFE.

Αν και αυτές οι δύο δομές DFE έχουν ως αποτέλεσμα ισοδύναμη απόδοση αν τα μήκη τους είναι άπειρα, ο προβλέπων DFE είναι σχεδόν βέλτιστος αν τα μήκη των δύο φίλτρων είναι πεπερασμένα. Ο λόγος για τις ευνοϊκότερες συνθήκες του συμβατικού DFE είναι σχετικά απλός. Η βελτιστοποίηση των συντελεστών απόληξης του στα φίλτρα πρόσθιας τροφοδότησης και ανάδρασης γίνεται από κοινού. Για αυτό το λόγο, αποφέρει την ελάχιστη MSE. Από την άλλη μεριά, οι βελτιστοποιήσεις στο φίλτρο πρόσθιας τροφοδότησης και στον προβλεπτή ανάδρασης στον προβλέπων DFE γίνονται χωριστά. Για αυτό το λόγο, η MSE του είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο εκείνη του συμβατικού φίλτρου. Παρά από αυτή την σχεδόν υποβέλτιστη συνθήκη του προβλέπων DFE, είναι κατάλληλος ως ένας ισοσταθμιστής για σήματα κωδικοποιημένα με δικτυωτά διαγράμματα, όπου ο συμβατικός DFE δεν είναι τόσο κατάλληλος, όπως περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο.

1.4 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Η ισοστάθμιση καναλιού για ψηφιακές επικοινωνίες αναπτύχθηκε από τον Lucky (1965, 1966), ο οποίος επικεντρώθηκε στους γραμμικούς ισοσταθμιστές οι οποίοι βελτιστοποιούνταν με χρήση του κριτηρίου παραμόρφωσης κορυφής. Το κριτήριο μέσου τετραγωνικού σφάλματος για βελτιστοποίηση των συντελεστών του ισοσταθμιστή υποδείχθηκε από τον Widrow (1966).

Η ισοστάθμιση αναδραστικής απόφασης προτάθηκε και αναλύθηκε από τον Austin (1967). Η ανάλυση της επίδοσης του DFE μπορεί να βρεθεί στις δημοσιεύσεις των Monsen (1971), George κ.ά. (1971), Price (1972), Salz (1973), Duttweiler κ.ά. (1974), και Altekar και Beaulieu (1993).

Η χρήση του αλγόριθμου του Viterbi ως το βέλτιστο εκτιμητή ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας για σύμβολα μολυσμένα από ISI προτάθηκε και αναλύθηκε από τους Forney (1972) και Omura (1971). Η χρήση του για σήματα διαμορφωμένης φέρουσας μελετήθηκε από τους Ungerboeck (1974) και MacKenchnie (1973).

- Austin, M.E. (1967). “Decision – Feedback Equalization for Digital Communication Over Dispersive Channels”, MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA. Tech. Report No. 437, August.
- Altekar, S. A., and Beaulieu, N. C. (1993). “Upper Bounds on the Error Probability of Decision Feedback Equalization”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT – 39, pp. 145 – 156, January.
- Duttweiler, D. L., Mazo, J. E., and Messerschmitt, D. G. (1974). “Error Propagation in Decision – Feedback Equalizers”, *IEEE Trans. Infor. Theory*, vol. IT – 20, pp. 490 – 497, July.
- Forney, G. D., Jr. (1972). “Maximum – Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequences in the Precense of Intersymbol Interference”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT – 18, pp. 363 – 378, May.
- George, D. A., Bowen, R. R., and Storey, J. R. (1971). “An Adaptive Decision – Feedback Equalizer”, *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM – 19, pp.282 – 293, June.
- Lucky, R.W. (1965). “Automatic Equalization for Digital Communications”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44, pp. 547 – 588, April.
- Lucky, R.W. (1966). “Techniques for Adaptive Equalization of Digital Communication”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 255 – 286.
- MacKenchnie, L. R. (1973). “Maximum Likelihood Receivers for Channels Having Memory”, Ph.D. Dissertation, Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame, Notre Dame, IN, January.
- Monsen, P. (1971). “Feedback Equalization for Fading Dispersive Channels”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT – 17, pp. 56 – 64, January.
- Omura, J. (1971). “Optimal Receiver Design for Convolutional Codes and Channels with Memory Via Conrrol Theoretical Concepts”, *Inform. Sci.*, vol. 3, pp. 243 – 266.
- Price, R. (1972). “Nonlinearly Feedback – Equalized PAM vs. Capacity”, *Proc. 1972 IEEE Int. Conf. on Commun.* Philadelphia, PA, pp. 22.12 – 22.17, June.
- Salz, J. (1973). “Optimum Mean – Square Decision Feedback Equalization”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 52, pp. 1341 – 1373, October.
- Ungerboeck, G. (1974). “Adaptive Maximum – Likelihood Receiver for Carrier – Modulated Data – Transmission Systems”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 22, pp. 624 – 636, May.
- Widrow, B. (1966). “Adaptive Filters, I: Fundamentals”, Stanford Electronics Laboratory, Stanford University, Stanford, CA, Tech Report No. 6764 – 6, December.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Στο κεφάλαιο 1, παρουσιάσαμε αμφότερους τους βέλτιστους και τους υποβέλτιστους δέκτες που αντισταθμίζουν την ISI στη μετάδοση ψηφιακής πληροφορίας μέσω περιορισμένου εύρους ζώνης, μη ιδανικών καναλιών. Ο βέλτιστος δέκτης χρησιμοποιεί εκτίμηση ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας για την ανίχνευση της πληροφοριακής ακολουθίας από τα δείγματα του φίλτρου αποδιαμόρφωσης. Οι υποβέλτιστοι δέκτες χρησιμοποιούν είτε ένα γραμμικό ισοσταθμιστή είτε έναν ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης.

Κατά την ανάπτυξη των τριών μεθόδων ισοστάθμισης, υποθέσαμε αναμφιβόλως ότι οι χαρακτηριστικές του καναλιού, είτε η κρουστική απόκριση είτε η απόκριση συχνότητας, είναι γνωστές στο δέκτη. Όμως, στα περισσότερα επικοινωνιακά συστήματα που χρησιμοποιούν ισοσταθμιστές, οι χαρακτηριστικές του καναλιού είναι άγνωστες εκ των προτέρων και, σε πολλές περιπτώσεις, η κρουστική απόκριση του καναλιού είναι χρονικά μεταβαλλόμενη. Σε μια τέτοια περίπτωση, οι ισοσταθμιστές σχεδιάζονται να είναι ρυθμιζόμενοι στην απόκριση του καναλιού και, για χρονικά μεταβαλλόμενα κανάλια, να είναι προσαρμόσιμοι στις χρονικές μεταβολές της απόκρισης του καναλιού.

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τους αλγόριθμους για αυτόματη ρύθμιση των συντελεστών του ισοσταθμιστή για να βελτιστοποιήσουμε ένα συγκεκριμένο δείκτη απόδοσης και να αντισταθμίσουμε προσαρμοστικά τις χρονικές μεταβολές των χαρακτηριστικών του καναλιού. Αναλύουμε επίσης τις χαρακτηριστικές απόδοσης του αλγόριθμου, περιλαμβάνοντας των λόγο σύγκλισής τους και την υπολογιστική τους δυσκολία.

2.1 ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΕΞΙΣΩΤΗΣ

Στην περίπτωση του γραμμικού ισοσταθμιστή, θυμηθείτε ότι μελετήσαμε δύο διαφορετικά κριτήρια για να προσδιορίσουμε τις τιμές των συντελεστών του $\{c_k\}$.

Το ένα κριτήριο βασιζόταν στην ελαχιστοποίηση της παραμόρφωσης κορυφής στην έξοδο του ισοσταθμιστή, η οποία ορίζεται από την (1.2 – 4). Το άλλο κριτήριο βασιζόταν στην ελαχιστοποίηση του σφάλματος μέσου τετραγώνου στην έξοδο του ισοσταθμιστή, η οποία ορίζεται από την (1.2 – 25). Παρακάτω, περιγράφουμε δύο αλγόριθμους για να εκτελέσουμε τη βελτιστοποίηση αυτόματα και προσαρμοστικά.

2.1.1 Ο Αλγόριθμος Μηδενικού Εξαναγκασμού

Στο κριτήριο παραμόρφωσης κορυφής, η παραμόρφωση κορυφής $\mathcal{D}(\mathbf{c})$, η οποία δίνεται από την (1.2 – 22), ελαχιστοποιείται επιλέγοντας τους (κατάλληλους) συντελεστές του ισοσταθμιστή $\{c_k\}$. Γενικά, δεν υπάρχει κάποιος απλός υπολογιστικός αλγόριθμος για να εκτελεστεί αυτή η βελτιστοποίηση, εκτός από την ειδική περίπτωση όπου η παραμόρφωση κορυφής στην είσοδο του ισοσταθμιστή, η οποία ορίζεται ως \mathcal{D}_0 στην (1.2 – 23), είναι μικρότερη από τη μονάδα. Όταν $\mathcal{D}_0 < 1$, η παραμόρφωση $\mathcal{D}(\mathbf{c})$ στην έξοδο του ισοσταθμιστή ελαχιστοποιείται αναγκάζοντας την απόκριση του ισοσταθμιστή $q_n = 0$, για $1 \leq |n| \leq K$, και $q_0 = 1$. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει ένας απλός υπολογιστικός αλγόριθμος, ο οποίος ονομάζεται αλγόριθμος μηδενικού εξαναγκασμού, ο οποίος ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες.

Η λύση μηδενικού εξαναγκασμού επιτυγχάνεται εξαναγκάζοντας τη συσχέτιση ανάμεσα στην ακολουθία σφάλματος $\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ και την επιθυμητή πληροφοριακή ακολουθία $\{I_k\}$ να γίνει μηδέν για μετατοπίσεις στο εύρος $0 \leq |n| \leq K$. Η απόδειξη ότι αυτό οδηγεί στην επιθυμητή λύση είναι αρκετά απλή. Έχουμε

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_k I_{k-j}^*) &= E[(I_k - \hat{I}_k) I_{k-j}^*] \\ &= E(I_k I_{k-j}^*) - E(\hat{I}_k I_{k-j}^*), \quad j = -K, \dots, K \end{aligned} \quad (2.1 - 1)$$

Υποθέτουμε ότι τα πληροφοριακά σύμβολα είναι ασυσχέτιστα, με άλλα λόγια, $E(I_k I_j^*) = \delta_{kj}$, και ότι η πληροφοριακή ακολουθία $\{I_k\}$ είναι ασυσχέτιστη με την ακολουθία προσθετικού θορύβου $\{n_k\}$. Για το \hat{I}_k , χρησιμοποιούμε την έκφραση η οποία δίνεται στην (1.2 – 41). Τότε, αφού πάρουμε τις προσδοκώμενες τιμές στην (2.1 – 1), λαμβάνουμε

$$E(\varepsilon_k I_{k-j}^*) = \delta_{j0} - q_j, \quad j = -K, \dots, K \quad (2.1 - 2)$$

Άρα, οι συνθήκες

$$E(\varepsilon_k I_{k-j}^*) = 0, \quad j = -K, \dots, K \quad (2.1 - 3)$$

εκπληρώνονται όταν $q_0 = 1$ και $q_n = 0$, $1 \leq |n| \leq K$.

Όταν η απόκριση του καναλιού είναι άγνωστη, οι συσχετίσεις που δίνονται από την (2.1 – 1) είναι επίσης άγνωστες. Αυτή η δυσκολία μπορεί να καταστρατηγηθεί εκθέποντας μια γνωστή ακολουθία εκμάθησης $\{I_k\}$ στο δέκτη, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμήσουμε τη συσχέτιση αντικαθιστώντας τους χρονικούς μέσους στους ολικούς μέσους που δίνονται στην (2.1 – 1). Ύστερα από την αρχική δοκιμή, η οποία απαιτεί τη μετάδοση μιας ακολουθίας εκμάθησης κάποιου προκαθορισμένου μήκους που ισούται ή υπερβαίνει το μήκος του ισοσταθμιστή, οι συντελεστές του ισοσταθμιστή που ικανοποιούν την (2.1 – 3) μπορούν να καθοριστούν.

Ένας απλός υπολογιστικός αλγόριθμος για τη ρύθμιση των συντελεστών ισοστάθμισης είναι

$$c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} + \Delta \varepsilon_k I_{k-j}^*, \quad j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2.1 - 4)$$

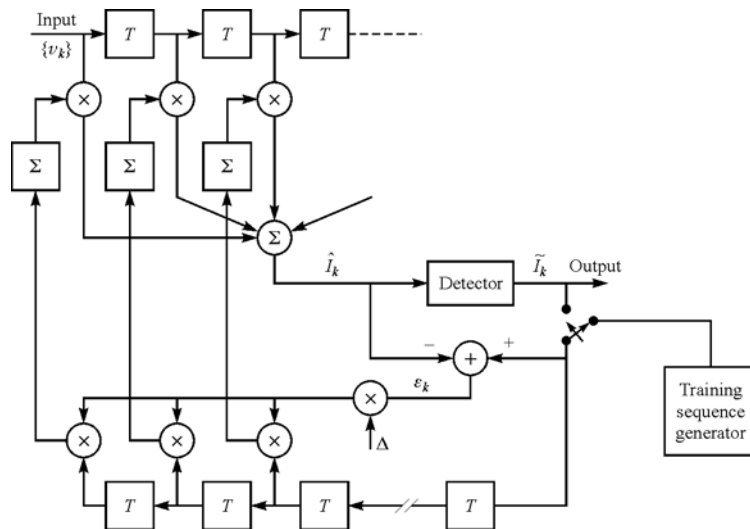
όπου $c_j^{(k)}$ είναι η τιμή του j - οστού συντελεστή σε χρόνο $t = kT$, $\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ είναι το σήμα σφάλματος σε χρόνο $t = kT$, και Δ είναι ένας συντελεστής κλιμάκωσης που ελέγχει το ρυθμό της ρύθμισης, όπως θα εξηγηθεί αργότερα σε αυτή την ενότητα. Αυτός είναι ο **αλγόριθμος μηδενικού εξαναγκασμού (zero – forcing algorithm)**. Ο όρος $\varepsilon_k I_{k-j}^*$ είναι μια εκτίμηση της συσχέτισης (στατιστικός μέσος) $E(\varepsilon_k I_{k-j}^*)$. Η λειτουργία της εύρεσης του μέσου όρου της συσχέτισης επιτυγχάνεται μέσω του αλγόριθμου της αναδρομικής εξίσωσης διαφοράς πρώτης τάξης στην (2.1 – 4), ο οποίος αναπαριστά ένα απλό ολοκληρωτή διακριτού χρόνου.

Ακολουθώντας την περίοδο εκμάθησης, ύστερα από την οποία οι συντελεστές του εξισωτή έχουν συγκλίνει στις βέλτιστες τιμές τους, οι αποφάσεις στην έξοδο του ανιχνευτή είναι γενικά αρκετά αξιόπιστες ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συνεχίσουμε την διαδικασία προσαρμογής των συντελεστών. Αυτό ονομάζεται **μέθοδος κατευθυνόμενης απόφασης (decision – directed mode)** της προσαρμογής. Σε μια τέτοια περίπτωση, η συσχέτισεις στην (2.1 – 4) περιλαμβάνουν το σήμα σφάλματος $\tilde{\varepsilon}_k = \tilde{I}_k - \hat{I}_k$ και την ανιχνευμένη ακολουθία εξόδου \tilde{I}_{k-j} , $j = -K, \dots, K$. Έτσι, στον προσαρμοστικό τρόπο, η (2.1 – 4) γίνεται

$$c_j^{(k+j)} = c_j^{(k)} + \Delta \tilde{\varepsilon}_k \tilde{I}_{k-j}^* \quad (2.1 - 5)$$

Το Σχήμα 2.1 – 1 δείχνει τον ισοσταθμιστή μηδενικού εξαναγκασμού στον τρόπο εκμάθησης και στον προσαρμοστικό τρόπο λειτουργίας.

Οι χαρακτηριστικές του αλγόριθμου μηδενικού εξαναγκασμού είναι παρόμοιες με αυτές του αλγόριθμου LMS, ο οποίος ελαχιστοποιεί το MSE και περιγράφεται λεπτομερώς στην επόμενη ενότητα.



ΣΧΗΜΑ 2.1 – 1 Προσαρμοστικός ισοσταθμιστής μηδενικού εξαναγκασμού.

2.1.2 Ο Αλγόριθμος LMS

Στην ελαχιστοποίηση του MSE, που αναπτύχθηκε στην ενότητα 1.2 – 2, βρήκαμε ότι οι βέλτιστοι συντελεστές του ισοσταθμιστή καθορίζονται από τη λύση του συνόλου των γραμμικών εξισώσεων, που εκφράζεται σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{C} = \xi \quad (2.1 - 6)$$

όπου $\mathbf{\Gamma}$ είναι ο $(2K+1) \times (2K+1)$ πίνακας συμεταβλητότητας των δειγμάτων του σήματος $\{v_k\}$, \mathbf{C} είναι το διάνυσμα στήλη των $(2K+1)$ συντελεστών του ισοσταθμιστή, και ξ είναι ένα $(2K+1)$ – διάστατο διάνυσμα στήλη των συντελεστών του καναλιού που μοντελοποιείται ως φίλτρο. Η λύση για το διάνυσμα των βέλτιστων συντελεστών του ισοσταθμιστή, \mathbf{C}_{opt} , μπορεί να προσδιορισθεί αντιστρέφοντας τον πίνακα συμεταβλητότητας $\mathbf{\Gamma}$, κάτι που μπορεί να γίνει ικανοποιητικά με χρήση του αλγόριθμου Levinson – Dublin.

Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια επαναληπτική διαδικασία που αποφεύγει την απευθείας αντιστροφή πίνακα για να υπολογίσουμε το \mathbf{C}_{opt} . Πιθανώς η απλούστερη επαναληπτική διαδικασία είναι η μέθοδος της απότομης κατάβασης, στην οποία αρχικά ξεκινάμε με αυθαίρετη επιλογή του διανύσματος \mathbf{C} , ας πούμε το \mathbf{C}_0 . Αυτή η αρχική επιλογή των συντελεστών αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο στην τετραγωνική επιφάνεια του MSE στον $(2K+1)$ – διάστατο χώρο των συντελεστών.

Το διάνυσμα κλίσης, έχοντας τις $2K+1$ συνιστώσες κλίσης $\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial c_{0k}}$, $k = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K$, υπολογίζεται στη συνέχεια σε αυτό το σημείο της επιφάνειας του MSE, και κάθε βάρος απόληξης αλλάζει στην αντίθετη κατεύθυνση από αυτή της αντίστοιχης συνιστώσας κλίσης του. Η αλλαγή στο j – οστό βάρος απόληξης είναι ανάλογη με το μέγεθος της j – οστής συνιστώσας κλίσης. Έτσι, διαδοχικές τιμές του διανύσματος των συντελεστών \mathbf{C} λαμβάνονται σύμφωνα με τη σχέση

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k - \Delta \mathbf{G}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1 - 7)$$

όπου το διάνυσμα κλίσης \mathbf{G}_k είναι

$$\mathbf{G}_k = \frac{1}{2} \frac{dJ}{d\mathbf{C}_k} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{C}_k - \xi = -E(\varepsilon_k \mathbf{V}_k^*) \quad (2.1 - 8)$$

Το διάνυσμα \mathbf{C}_k αναπαριστά το σύνολο των συντελεστών στην k – οστή επανάληψη, το $\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ είναι το σήμα σφάλματος στην k – οστή επανάληψη, το \mathbf{V}_k είναι το διάνυσμα των δειγμάτων του λαμβανόμενου σήματος που σχηματίζουν την εκτίμηση \hat{I}_k , με άλλα λόγια $\mathbf{V}_k = [v_{k+K} \dots v_k \dots v_{k-K}]^t$, και Δ είναι ένας θετικός αριθμός ο οποίος επιλέγεται να είναι αρκετά μικρός για να διασφαλιστεί η σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας. Αν φτάνουμε στο ελάχιστο MSE για

κάποιο $k = k_0$, τότε $\mathbf{G}_k = \mathbf{0}$, έτσι ώστε να μη συμβαίνει καμία επιπλέον αλλαγή στα βάρη απόληξης. Γενικά, η $J_{\min}(K)$ δε μπορεί να επιτευχθεί για μια πεπερασμένη τιμή του k_0 με τη μέθοδο της απότομης κατάβασης. Μπορεί, όμως, να προσεγγιστεί όσο κοντά επιθυμούμε για κάποια πεπερασμένη τιμή του k_0 .

Η βασική δυσκολία με τη μέθοδο της απότομης κατάβασης για να προσδιορίσουμε τα βέλτιστα βάρη απόληξης είναι η έλλειψη γνώσης του διανύσματος κλίσης \mathbf{G}_k , που εξαρτάται τόσο από τον πίνακα μεταβλητότητας $\mathbf{\Gamma}$ όσο και από το διάνυσμα ξ των συσχετίσεων. Διαδοχικά, αυτές οι ποσότητες εξαρτώνται από τους συντελεστές $\{f_k\}$ του ισοδύναμου μοντέλου διακριτού χρόνου του καναλιού και από τη μεταβλητότητα της πληροφοριακής ακολουθίας και του προσθετικού θορύβου, όπου γενικά όλα μπορεί να είναι άγνωστα στο δέκτη. Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία, μπορούν να χρησιμοποιηθούν εκτιμήσεις του διανύσματος κλίσης. Δηλαδή, ο αλγόριθμος για τη ρύθμιση των συντελεστών απόληξης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta \hat{\mathbf{G}}_k \quad (2.1 - 9)$$

όπου το $\hat{\mathbf{G}}_k$ συμβολίζει μια εκτίμηση του διανύσματος κλίσης \mathbf{G}_k και το $\hat{\mathbf{C}}_k$ συμβολίζει την εκτίμηση του διανύσματος των συντελεστών.

Από την (2.1- 8) παρατηρούμε ότι το \mathbf{G}_k είναι ο αντίθετος της προσδοκώμενης τιμής του $\varepsilon_k \mathbf{V}_k^*$. Συνεπώς, μια εκτίμηση του \mathbf{G}_k είναι

$$\hat{\mathbf{G}}_k = -\varepsilon_k \mathbf{V}_k^* \quad (2.1 - 10)$$

Αφού $E(\hat{\mathbf{G}}_k) = \mathbf{G}_k$, η εκτίμηση $\hat{\mathbf{G}}_k$ είναι μια δίκαιη εκτίμηση του πραγματικού διανύσματος κλίσης \mathbf{G}_k . Ενσωμάτωση της (2.1 - 10) στην (2.1 - 9) αποφέρει τον αλγόριθμο

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta \varepsilon_k \mathbf{V}_k^* \quad (2.1 - 11)$$

Αυτός είναι ο βασικός **αλγόριθμος ελάχιστου μέσου τετραγώνου (Least Mean Square algorithm, LMS)** για αναδρομική ρύθμιση των συντελεστών απόληξης του ισοσταθμιστή ο οποίος υποδείχτηκε αρχικά από τους Widrow και Hoff (1960). Επεξηγείται στον ισοσταθμιστή που φαίνεται στο Σχ.2.1 - 2.

Ο βασικός αλγόριθμος που δίνεται από την (2.1 - 1) και μερικές από τις πιθανές του παραλλαγές έχουν ενσωματωθεί σε πολλούς εμπορικούς προσαρμοστικούς ισοσταθμιστές που χρησιμοποιούνται σε modem υψηλής ταχύτητας. Τρεις παραλλαγές του βασικού αλγόριθμου λαμβάνονται χρησιμοποιώντας μόνο την πληροφορία προσήμου που περιέχεται στο σήμα σφάλματος ε_k και/ή στις συνιστώσες του \mathbf{V}_k . Για αυτό το λόγο, οι τρεις πιθανές παραλλαγές είναι

$$c_{(k+1)j} = c_{kj} + \Delta \mathbf{csgn}(\varepsilon_k) v_{k-j}^*, \quad j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2.1 - 12)$$

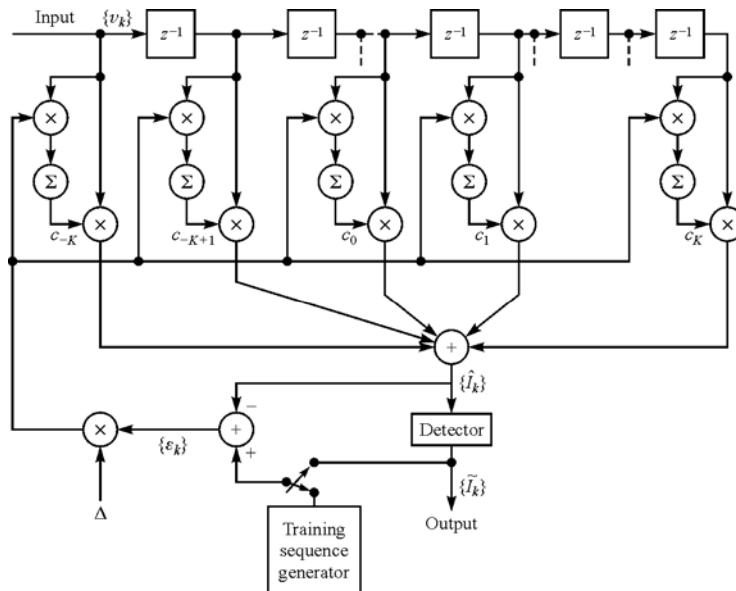
$$c_{(k+1)j} = c_{kj} + \Delta \varepsilon_k \mathbf{csgn}(v_{k-j}^*), \quad j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2.1 - 13)$$

$$c_{(k+1)j} = c_{kj} + \Delta \mathbf{csgn}(\varepsilon_k) \mathbf{csgn}(v_{k-j}^*), \quad j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2.1 - 14)$$

όπου η $\mathbf{csgn}(x)$ ορίζεται ως

$$\mathbf{csgn}(x) = \begin{cases} 1+j & (\mathbf{Re}\{x\} > 0, \mathbf{Im}\{x\} > 0) \\ 1-j & (\mathbf{Re}\{x\} > 0, \mathbf{Im}\{x\} < 0) \\ -1+j & (\mathbf{Re}\{x\} < 0, \mathbf{Im}\{x\} > 0) \\ -1-j & (\mathbf{Re}\{x\} < 0, \mathbf{Im}\{x\} < 0) \end{cases} \quad (2.1 - 15)$$

(Παρατηρήστε ότι στην (2.1 - 15), $j \equiv \sqrt{-1}$, το οποίο είναι διαφορετικό από το δείκτη j στις (2.1 - 12) - (2.1 - 14)). Ξεκάθαρα, ο αλγόριθμος στην (2.1 - 14) είναι ο πιο εύκολα υλοποιήσιμος, αλλά δίνει τον πιο αργό ρυθμό σύγκλισης.



ΣΧΗΜΑ 1.2 – 2 Γραμμικός προσαρμοστικός ισοσταθμιστής βασισμένος στο κριτήριο MSE.

Πολλές άλλες παραλλαγές του LMS αλγόριθμου λαμβάνονται παίρνοντας το μέσο όρο ή φιλτράροντας τα διανύσματα κλίσης ύστερα από αρκετές επαναλήψεις πριν να κάνουμε τις ρυθμίσεις στους συντελεστές του ισοσταθμιστή. Για παράδειγμα, ο μέσος όρος για N βαθμωτά διανύσματα είναι

$$\bar{\mathbf{G}}_{mN} = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_{mN+n} \mathbf{V}_{mN+n}^* \quad (2.1 - 16)$$

και η αντίστοιχη αναδρομική εξίσωση για την ενημέρωση των συντελεστών του ισοσταθμιστή μια φορά κάθε N επαναλήψεις είναι

$$\hat{\mathbf{C}}_{(k+1)N} = \hat{\mathbf{C}}_{kN} - \Delta \bar{\mathbf{G}}_{kN} \quad (2.1 - 17)$$

Κατ' ουσία, η λειτουργία εύρεσης του μέσου όρου που εκτελείται στην (2.1 - 16) μειώνει το θόρυβο στην εκτίμηση του διανύσματος κλίσης, όπως δείχθηκε από τον Gardner (1984).

Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να φιλτράρουμε το θορυβώδη διανύσματα κλίσης με ένα βαθυπερατό φίλτρο και να χρησιμοποιήσουμε την έξοδο του φίλτρου ως μια εκτίμηση του διανύσματος κλίσης. Για παράδειγμα, ένα απλό βαθυπερατό φίλτρο για τις θορυβώδεις κλίσεις αποφέρει ως μια έξοδο

$$\bar{\mathbf{G}}_k = w \bar{\mathbf{G}}_{k-1} + (1-w) \hat{\mathbf{G}}_k, \quad \bar{\mathbf{G}}(0) = \hat{\mathbf{G}}(0) \quad (2.1 - 18)$$

όπου η επιλογή του $0 \leq w < 1$ καθορίζει το εύρος ζώνης του βαθυπερατού φίλτρου. Όταν το w είναι κοντά στη μονάδα, το εύρος ζώνης του φίλτρου είναι μικρό και η ουσιαστική εύρεση του μέσου όρου εκτελείτε πάνω σε πολλά διανύσματα κλίσης. Από την άλλη μεριά, όταν το w είναι μικρό, το βαθυπερατό φίλτρο έχει ένα μεγάλο εύρος ζώνης και, για αυτό το λόγο, παρέχει μικρή ομοιομορφία κατανομής (averaging) στα διανύσματα κλίσης. Με τα φιλτραρισμένα διανύσματα κλίσης που δίνονται από την (2.1 - 18) στη θέση των \mathbf{G}_k , λαμβάνουμε το LMS αλγόριθμο φιλτραρισμένης κλίσης που δίνεται από την

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k - \Delta \bar{\mathbf{G}}_k \quad (2.1 - 19)$$

Στην παραπάνω συζήτηση, έχει υποτεθεί ότι ο δέκτης έχει γνώση της εκπεμπόμενης πληροφοριακής ακολουθίας κατά την μορφοποίηση του σήματος σφάλματος ανάμεσα στα επιθυμητά σύμβολα και την εκτίμησή τους. Τέτοια γνώση μπορεί να γίνει διαθέσιμη κατά τη διάρκεια μιας σύντομης περιόδου εκμάθησης κατά την οποία ένα σήμα με μια γνωστή πληροφοριακή ακολουθία εκπέμπεται στο δέκτη για αρχική ρύθμιση των βαρών απόληξης. Το μήκος αυτής της ακολουθίας πρέπει να είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλο όσο και το μήκος του ισοσταθμιστή ώστε το φάσμα του εκπεμπόμενου σήματος να καλύπτει επαρκώς το εύρος ζώνης του καναλιού που ισοσταθμίζεται.

Στην πράξη, η ακολουθία εκμάθησης συχνά επιλέγεται να είναι μια περιοδική ψευδοτυχαία ακολουθία, όπως μια ακολουθία μέγιστου μήκους ενός καταχωρητή ολίσθησης του οποίου η περίοδος N είναι ίση με το μήκος του ισοσταθμιστή ($N = 2K + 1$). Σε αυτή την περίπτωση, η κλίση γίνεται συνήθως averaged κατά το μήκος της ακολουθίας όπως δείχεται στην (2.1 - 16) και ο ισοσταθμιστής ρυθμίζεται μια φορά ανά περίοδο σύμφωνα με την (2.1 - 17). Ένα πρακτικό πλάνο για συνεχή ρύθμιση των βαρών απόληξης μπορεί να είναι είτε μια μέθοδος λειτουργίας κατευθυνόμενης απόφασης στην οποία οι αποφάσεις στα πληροφοριακά σύμβολα υποθέτουμε ότι είναι σωστές και χρησιμοποιούνται στη θέση του I_k για το σχηματισμό του σήματος σφάλματος ε_k , είτε μια μέθοδος στην οποία μια γνωστή ψευδοτυχαία ακολουθία διερεύνησης εισάγεται στο σήμα που μεταφέρει πληροφορία είτε προσθετικά είτε με διαστρωμάτωση (interleaving) στο χρόνο και τα βάρη απόληξης ρυθμίζονται συγκρίνοντας τα λαμβανόμενα σύμβολα διερεύνησης με τα γνωστά εκπεμπόμενα σύμβολα διερεύνησης. Στον τρόπο λειτουργίας κατευθυνόμενης

απόφασης, το σήμα σφάλματος γίνεται $\tilde{\varepsilon}_k = \tilde{I}_k - \hat{I}_k$, όπου \tilde{I}_k είναι η απόφαση του δέκτη βασισμένη στην εκτίμηση \hat{I}_k . Όσο ο δέκτης λειτουργεί με χαμηλούς ρυθμούς σφαλμάτων, ένα περιστασιακό σφάλμα θα έχει αμελητέα επίδραση στη σύγκλιση του αλγορίθμου.

Αν η απόκριση του καναλιού αλλάξει, αυτή η αλλαγή απεικονίζεται στους συντελεστές $\{f_k\}$ του ισοδύναμου μοντέλου διακριτού χρόνου του καναλιού.

Απεικονίζεται επίσης στο σήμα σφάλματος ε_k , αφού εξαρτάται από τους $\{f_k\}$. Για αυτό το λόγο, οι συντελεστές απόληξης θα αλλάζουν σύμφωνα με την (2.1 – 11) για να απεικονίζουν την αλλαγή στο κανάλι. Μια παρόμοια αλλαγή στα βάρη απόληξης συμβαίνει αν τα στατιστικά δεδομένα του θορύβου ή η πληροφοριακή ακολουθία αλλάξουν. Έτσι, ο ισοσταθμιστής είναι προσαρμοστικός.

2.1.3 Ιδιότητες Σύγκλισης του LMS Αλγόριθμου

Οι ιδιότητες σύγκλισης του LMS αλγορίθμου που δίνονται από την (2.1 – 11) καθορίζονται από τη βηματική παράμετρο Δ . Θα πρέπει τώρα να μελετήσουμε την επιλογή της παραμέτρου Δ για να διασφαλίσουμε στη σύγκλιση του αλγορίθμου απότομης κατάβασης στην (2.1 – 7), ο οποίος περιέχει την ακριβή τιμή της κλίσης.

Από τις (2.1 – 7) και (2.1 – 8), έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{k+1} &= \mathbf{C}_k - \Delta \mathbf{G}_k \\ &= (\mathbf{I} - \Delta \mathbf{\Gamma}) \mathbf{C}_k + \Delta \xi \end{aligned} \quad (2.1 - 20)$$

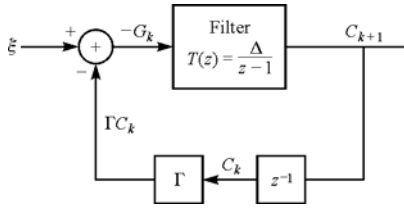
όπου \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος πίνακας, $\mathbf{\Gamma}$ είναι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του λαμβανόμενου σήματος, \mathbf{C}_k είναι το $(2K+1) -$ διάστατο διάνυσμα των κερδών απόληξης του ισοσταθμιστή, και ξ είναι το διάνυσμα των συσχετίσεων το οποίο δίνεται από την (1.2 – 45). Η αναδρομική σχέση στην (2.1 – 20) μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου όπως φαίνεται στο Σχ.2.1 – 3. Δυστυχώς, το σύνολο των $2K+1$ εξισώσεων διαφοράς πρώτης τάξης στην (2.1 – 20) συζευγνύεται μέσω του πίνακα αυτοσυσχέτισης $\mathbf{\Gamma}$. Για να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις και, έτσι, να αποδείξουμε τις ιδιότητες σύγκλισης του αναδρομικού αλγόριθμου, είναι μαθηματικά βολικό να αποζεύξουμε τις συναρτήσεις εκτελώντας ένα γραμμικό μετασχηματισμό. Ο κατάλληλος μετασχηματισμός λαμβάνεται παρατηρώντας ότι ο πίνακας $\mathbf{\Gamma}$ είναι Ερμιτιανός και, για αυτό το λόγο, μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{t*} \quad (2.1 - 21)$$

όπου \mathbf{U} είναι ο κανονικοποιημένος εγκλιτικός (modal) πίνακας του $\mathbf{\Gamma}$ και $\mathbf{\Lambda}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία ίσα με τις ιδιοτιμές του $\mathbf{\Gamma}$.

Όταν η (2.1 – 21) αντικαθίσταται στην (2.1 – 20), και αν ορίσουμε τα μετασχηματισμένα (ορθογωνιοποιημένα) διανύσματα $\mathbf{C}_k^o = \mathbf{U}^{t*} \mathbf{C}_k$ και $\xi^o = \mathbf{U}^{t*} \xi$, λαμβάνουμε:

$$\mathbf{C}_{k+1}^o = (\mathbf{I} - \Delta \mathbf{\Lambda}) \mathbf{C}_k^o + \Delta \xi^o \quad (2.1 - 22)$$



ΣΧΗΜΑ 2.1 – 3 Αναπαράσταση συστήματος ελέγχου κλειστού βρόχου της αναδρομικής εξίσωσης στην (2.1 – 20).

Αυτό το σύνολο των εξισώσεων διαφοράς πρώτης τάξης είναι τώρα αποζευγμένο. Η σύγκλιση τους καθορίζεται από την ομογενή εξίσωση:

$$\mathbf{C}_{k+1}^o = (\mathbf{I} - \Delta\mathbf{\Lambda})\mathbf{C}_k^o \quad (2.1 - 23)$$

Βλέπουμε ότι η αναδρομική σχέση θα συγκλίνει υπό τον όρο ότι όλοι οι πόλοι θα βρίσκονται μέσα στο μοναδιαίο κύκλο. Με άλλα λόγια,

$$|1 - \Delta\lambda_k| < 1, \quad k = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2.1 - 24)$$

όπου $\{\lambda_k\}$ είναι το σύνολο των $2K+1$ (πιθανώς μη διακριτών) ιδιοτιμών του $\mathbf{\Gamma}$. Αφού ο $\mathbf{\Gamma}$ είναι ένας πίνακας αυτοσυσχέτισης, είναι θετικά ορισμένος και, για αυτό το λόγο, $\lambda_k > 0$ για όλα τα k . Συνεπώς η σύγκλιση της αναδρομικής σχέσης στην (2.1 – 22) διασφαλίζεται αν το Δ ικανοποιεί την ανισότητα

$$0 < \Delta < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (2.1 - 25)$$

όπου λ_{\max} είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του $\mathbf{\Gamma}$.

Αφού η μεγαλύτερη ιδιοτιμή ενός θετικά ορισμένου πίνακα είναι μικρότερη από το άθροισμα όλων των ιδιοτιμών του πίνακα και, επιπλέον, αφού το άθροισμα των ιδιοτιμών ενός πίνακα είναι ίσο με το ίχνος του, έχουμε το ακόλουθο απλό άνω φράγμα στο λ_{\max} :

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &< \sum_{k=-K}^K \lambda_k = \text{tr}\mathbf{\Gamma} = (2k+1)\mathbf{\Gamma}_{kk} \\ &= (2K+1)(x_0 + N_0) \end{aligned} \quad (2.1 - 26)$$

Από τις (2.1 – 23) και (2.1 – 24) παρατηρούμε ότι λαμβάνει χώρα αστραπιαία σύγκλιση όταν το $|1 - \Delta\lambda_k|$ είναι μικρό, με άλλα λόγια όταν οι θέσεις των πόλων είναι μακριά από το μοναδιαίο κύκλο. Αλλά δεν μπορούμε να επιτύχουμε αυτή την επιθυμητή συνθήκη και να ικανοποιείτε ακόμη η (2.1 – 25) αν υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στη μεγαλύτερη και στη μικρότερη ιδιοτιμή του $\mathbf{\Gamma}$. Με άλλα λόγια, ακόμα και αν επιλέξουμε το Δ να είναι κοντά στο άνω φράγμα που δίνεται στην (2.1 – 25), ο ρυθμός σύγκλισης του αναδρομικού MSE αλγόριθμου καθορίζεται από τη μικρότερη ιδιοτιμή λ_{\min} . Συνεπώς, ο λόγος $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ καθορίζει εν τέλει το ρυθμό σύγκλισης. Αν το $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ είναι μικρό, το Δ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να επιτύχουμε ραγδαία σύγκλιση. Ωστόσο, αν ο λόγος $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ είναι μεγάλος, όπως

είναι στην περίπτωση όπου η απόκριση συχνότητας του καναλιού έχει βυθίσματα, ο ρυθμός σύγκλισης του αλγόριθμου θα είναι αργός.

2.1.4 Πλεονάζων MSE Λόγω της Θορυβώδους Εκτίμησης Κλίσης

Ο αναδρομικός αλγόριθμος στην (2.1 – 11) για τη ρύθμιση των συντελεστών του γραμμικού ισοσταθμιστή περιλαμβάνει θορυβώδη εκτίμηση του διανύσματος κλίσης. Ο θόρυβος σε αυτές τις εκτιμήσεις προκαλεί τυχαίες διακυμάνσεις στους συντελεστές γύρω από τις βέλτιστες τιμές τους και, έτσι, οδηγεί σε μια αύξηση του MSE στην έξοδο του ισοσταθμιστή. Δηλαδή, ο τελικός MSE είναι $J_{\min} + J_{\Delta}$, όπου J_{Δ} είναι η διακύμανση του μετρούμενου θορύβου. Ο όρος J_{Δ} λόγω του θορύβου εκτίμησης ονομάστηκε **πλεονάζων σφάλμα μέσω των τετραγώνων (excess means – square error)** από τον Widrow (1966).

Το ολικό MSE στην έξοδο του ισοσταθμιστή για κάθε σύνολο συντελεστών \mathbf{C} μπορεί να εκφραστεί ως

$$J = J_{\min} + (\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\text{opt}})^T \mathbf{\Gamma} (\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\text{opt}}) \quad (2.1 - 27)$$

όπου το \mathbf{C}_{opt} αναπαριστά τους βέλτιστους συντελεστές, οι οποίοι ικανοποιούν την (2.1 – 6). Αυτή η έκφραση για το MSE μπορεί να απλοποιηθεί εκτελώντας το γραμμικό ορθογωνικό μετασχηματισμό που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω για να εγκαθιδρύσουμε σύγκλιση. Το αποτέλεσμα αυτού του μετασχηματισμού εφαρμοσμένο στην (2.1 – 27) είναι

$$J = J_{\min} + \sum_{k=-K}^K \lambda_k E |c_k^o - c_{k\text{opt}}^o|^2 \quad (2.1 - 28)$$

όπου το $\{c_k^o\}$ είναι το σύνολο των μετασχηματισμένων συντελεστών του εξισωτή. Το πλεονάζων MSE είναι η προσδοκώμενη τιμή του δεύτερου όρου στην (2.1 – 28). Με άλλα λόγια,

$$J_{\Delta} = \sum_{k=-K}^K \lambda_k E |c_k^o - c_{k\text{opt}}^o|^2 \quad (2.1 - 29)$$

Έχει δειχθεί από τον Widrow (1970, 1975) ότι το πλεονάζων MSE είναι

$$J_{\Delta} = \Delta^2 J_{\min} \sum_{k=-K}^K \frac{\lambda_k^2}{1 - (1 - \Delta \lambda_k)^2} \quad (2.1 - 30)$$

Η έκφραση στην (2.1 – 30) μπορεί να απλοποιηθεί όταν το Δ επιλέγεται να είναι τέτοιο ώστε $\Delta \lambda_k \ll 1$ για όλα τα k . Τότε

$$J_{\Delta} \approx \frac{1}{2} \Delta J_{\min} \sum_{k=-K}^K \lambda_k$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{1}{2} \Delta J_{\min} \text{tr} \Gamma \\
&\approx \frac{1}{2} \Delta (2K+1) J_{\min} (x_0 + N_0) \quad (2.1 - 31)
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι το $x_0 + N_0$ αναπαριστά την ισχύ του λαμβανόμενου σήματος συν την ισχύ του θορύβου.

Είναι επιθυμητό να έχουμε $J_{\Delta} < J_{\min}$. Δηλαδή, το Δ πρέπει να επιλεγεί τέτοιο ώστε

$$\frac{J_{\Delta}}{J_{\min}} \approx \frac{1}{2} \Delta (2K+1) (x_0 + N_0) < 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\Delta < \frac{2}{(2K+1)(x_0 + N_0)} \quad (2.1 - 32)$$

Για παράδειγμα, αν το Δ επιλεγεί ως

$$\Delta = \frac{0.2}{(2K+1)(x_0 + N_0)} \quad (2.1 - 33)$$

η υποβάθμιση στον SNR εξόδου του ισοσταθμιστή λόγω του πλεονάζων MSE είναι μικρότερη από 1 dB.

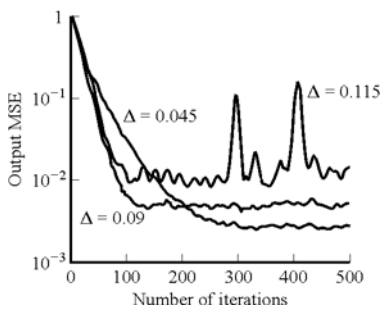
Η ανάλυση που δόθηκε παραπάνω για το πλεονάζων μέσο τετραγωνικό σφάλμα βασίζεται στην υπόθεση ότι η μέση τιμή των συντελεστών του ισοσταθμιστή συγκλίνει στη βέλτιστη τιμή \mathbf{C}_{opt} . Κάτω υπό αυτή τη συνθήκη, το μέγεθος του βήματος Δ πρέπει να ικανοποιεί το όριο στην (2.1 - 32). Από την άλλη μεριά, έχουμε καθορίσει ότι η σύγκλιση του διανύσματος της μέσης τιμής των συντελεστών απαιτεί να είναι $\Delta < 2/\lambda_{\max}$. Εφόσον η επιλογή του Δ κοντά στο άνω φράγμα $2/\lambda_{\max}$ μπορεί να οδηγήσει σε αρχική σύγκλιση του ντετερμινιστικού (γνωστού) αλγόριθμου κλίσης απότομης κατάβασης, μια τόσο μεγάλη τιμή του Δ θα αποφέρει συνήθως αστάθεια του LMS αλγόριθμου βαθμωτής μεταβολής.

Η αρχική σύγκλιση ή μεταβατική συμπεριφορά του LMS αλγόριθμου έχει εξεταστεί από πολλούς ερευνητές. Τα αποτελέσματά τους δείχνουν ξεκάθαρα ότι το μέγεθος του βήματος πρέπει να μειωθεί σε άμεση αναλογία με το μήκος του ισοσταθμιστή όπως ορίζεται στην (2.1 - 32). Για αυτό το λόγο, το άνω φράγμα που δίνεται από την (2.1 - 32) είναι επίσης απαραίτητο για να διασφαλίσουμε την αρχική σύγκλιση του LMS αλγόριθμου. Οι δημοσιεύσεις από τους Gitlin και Weinstein (1979) και Ungerboeck (1972) περιέχουν ανάλυση της μεταβατικής συμπεριφοράς και της ιδιότητες σύγκλισης του LMS αλγόριθμου.

Το επόμενο παράδειγμα βοηθά στο να τονίσει τα σημαντικά σημεία που είδαμε παραπάνω σε σχέση με την αρχική σύγκλιση του LMS αλγόριθμου.

Παράδειγμα 2.1 – 1

Ο αλγόριθμος LMS χρησιμοποιούταν για να ισοσταθμίσουμε προσαρμοστικά ένα επικοινωνιακό κανάλι για το οποίο ο πίνακας αυτοσυσχέτισης $\mathbf{\Gamma}$ έχει μια ιδιοτιμή απλωμένη στο $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 11$. Ο αριθμός των απολήξεων που επιλέχθηκαν για τον ισοσταθμιστή ήταν $2K + 1 = 11$. Το σήμα εισόδου συν την ισχύ του θορύβου $x_0 + N_0$ κανονικοποιόταν στη μονάδα. Για αυτό το λόγο, το άνω φράγμα του Δ το οποίο δίνεται από την (2.1 – 32) είναι 0.18. Το Σχ.2.1 – 4 δείχνει τις χαρακτηριστικές αρχικής σύγκλισης του αλγόριθμου LMS για $\Delta = 0.045$, 0.09, και 0.115, παίρνοντας το μέσο όρο του (εκτιμημένου) MSE σε 200 εξομοιώσεις. Παρατηρούμε ότι επιλέγοντας $\Delta = 0.09$ (το μισό του άνω φράγματος) λαμβάνουμε σχετικά γρήγορη αρχική σύγκλιση. Αν διαιρέσουμε το Δ με ένα συντελεστή 2 για να πάρουμε $\Delta = 0.045$, ο ρυθμός σύγκλισης μειώνεται αλλά μειώνεται επίσης και το πλεονάζων μέσο τετραγωνικό σφάλμα, έτσι ώστε ο αλγόριθμος LMS να εκτελείται καλύτερα στη σταθερή κατάσταση (σε ένα περιβάλλον χρονικά μεταβαλλόμενου σήματος). Τελικά, παρατηρούμε ότι η επιλογή του $\Delta = 0.115$, η οποία είναι ακόμα πιο κάτω από το άνω φράγμα, προκαλεί μεγάλες ανεπιθύμητες διακυμάνσεις στο MSE εξόδου του αλγόριθμου.



ΣΧΗΜΑ 2.1 – 4 Χαρακτηριστικές αρχικής σύγκλισης του αλγόριθμου LMS με διαφορετικά μεγέθη βήματος.

Σε μια ψηφιακή υλοποίηση του αλγόριθμου LMS, η επιλογή της παραμέτρου του μεγέθους του βήματος γίνεται ακόμη πιο κρίσιμη. Σε μια προσπάθεια να μειώσουμε το πλεονάζων μέσο τετραγωνικό σφάλμα, είναι δυνατό να μειώσουμε την παράμετρο του μεγέθους του βήματος μέχρι το σημείο όπου το ολικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα πράγματι αυξάνει. Αυτή η κατάσταση λαμβάνει χώρα όταν οι εκτιμημένες συνιστώσες κλίσης του διανύσματος $\varepsilon_k \mathbf{V}_k^*$ ύστερα από πολλαπλασιασμό με τη μικρού μεγέθους παράμετρο βήματος Δ είναι μικρότερες από το μισό του λιγότερο σημαντικού bit στην αναπαράσταση σταθερού σημείου των συντελεστών του ισοσταθμιστή. Σε μια τέτοια περίπτωση, η προσαρμογή σταματάει. Συνεπώς, είναι σημαντικό για το μέγεθος του βήματος να είναι αρκετά μεγάλο για να φέρει τους συντελεστές του ισοσταθμιστή στην εγγύτητα του \mathbf{C}_{opt} . Αν είναι επιθυμητό να μειώσουμε το μέγεθος του βήματος σημαντικά, είναι απαραίτητο να αυξήσουμε την ακρίβεια προσέγγισης στους συντελεστές του ισοσταθμιστή. Τυπικά, ακρίβεια των 16 bits μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τους συντελεστές, με 10 – 12 περίπου από τα πιο σημαντικά bits να χρησιμοποιούνται για αριθμητικές λειτουργίες στην ισοστάθμιση των δεδομένων. Τα υπόλοιπα λιγότερο σημαντικά bits απαιτούνται για να παρέχουν την απαραίτητη ακρίβεια στην διαδικασία της προσαρμογής. Έτσι, οι κλιμακούμενες εκτιμημένες συνιστώσες κλίσης $\Delta \varepsilon_k \mathbf{V}_k^*$ συνήθως επηρεάζουν μόνο το λιγότερο σημαντικό bit σε κάθε επανάληψη. Κατ' ουσία, η πρόσθετη ακρίβεια επιτρέπει επίσης

να πάρουμε τη μέση τιμή του θορύβου, αφού πολλές σταδιακές αλλαγές στο λιγότερο σημαντικό bit απαιτούνται πριν συμβεί οποιαδήποτε αλλαγή στα ανώτερα περισσότερο σημαντικά bits που χρησιμοποιούνται στις αριθμητικές λειτουργίες για την ισοστάθμιση των δεδομένων. Για μια ανάλυση των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης σε μια ψηφιακή υλοποίηση του αλγόριθμου LMS, ο αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί στις δημοσιεύσεις των Gitlin και Weinstein (1979), Gitlin κ.ά. (1982), και Caraiscos και Liu (1984).

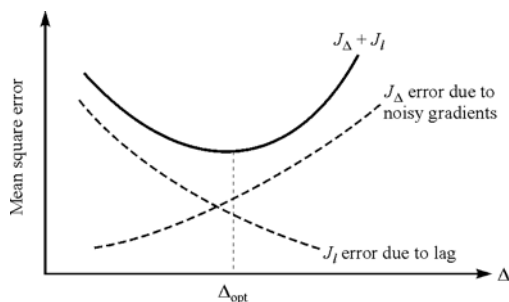
Σαν τελική επισήμανση, πρέπει να σημειώσουμε ότι ο LMS αλγόριθμος είναι κατάλληλος για ευθυγράμμιση των στατιστικών μεγεθών αργά χρονικά μεταβαλλόμενων σημάτων στο δέκτη. Σε μια τέτοια περίπτωση, το ελάχιστο MSE και το διάνυσμα των βέλτιστων συντελεστών θα είναι χρονικά μεταβαλλόμενα. Με άλλα λόγια, η $J_{\min}(n)$ είναι μια συνάρτηση του χρόνου και η $(2K+1)$ – διάστατη επιφάνεια σφάλματος κινείται σε σχέση με το δείκτη του χρόνου n . Ο αλγόριθμος LMS προσπαθεί να ακολουθήσει την κινούμενη ελάχιστη $J_{\min}(n)$ στο $(2K+1)$ – διάστατο χώρο, αλλά πάντα αργοπορεί (επιπορεύεται) λόγω της χρήσης του των (εκτιμημένων) διανυσμάτων κλίσης. Ως συνέπεια, ο LMS αλγόριθμος προκαλεί άλλον ένα τύπο σφάλματος, το οποίο ονομάζεται **σφάλμα καθυστέρησης (lag error)**, και η μέση τετραγωνική τιμή του μειώνεται με μια αύξηση στο μέγεθος του βήματος Δ . Το ολικό σφάλμα MSE μπορεί τώρα να εκφραστεί ως

$$J_{\text{total}} = J_{\min}(n) + J_{\Delta} + J_l$$

όπου το J_l συμβολίζει το μέσω τετραγωνικό σφάλμα λόγω της καθυστέρησης.

Σε κάθε δοθέν πρόβλημα μη στάσιμης προσαρμοστικής ισοστάθμισης, αν σχεδιάσουμε τα σφάλματα J_{Δ} και J_l ως μια συνάρτηση του Δ , περιμένουμε τα σφάλματα αυτά να συμπεριφερθούν όπως φαίνεται στο Σχ.2.1 – 5. Παρατηρούμε ότι το J_{Δ} αυξάνεται με μια αύξηση στο Δ ενώ το J_l μειώνεται με μια αύξηση στο Δ . Το ολικό σφάλμα θα παρουσιάζει ένα ελάχιστο, το οποίο θα καθορίζει τη βέλτιστη επιλογή της παραμέτρου του μεγέθους του βήματος.

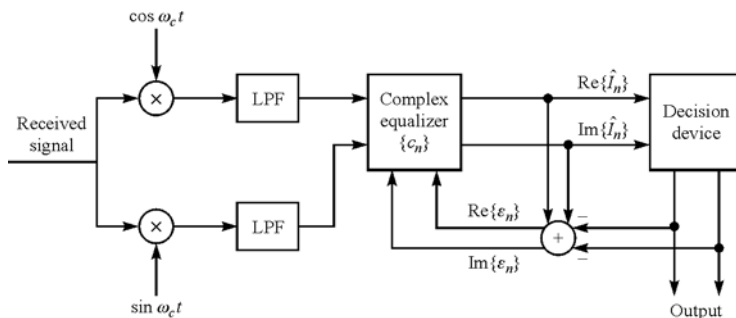
Όταν οι στατιστικές χρονικές μεταβολές του σήματος συμβαίνουν ραγδαία, το σφάλμα καθυστέρησης θα επικρατεί στην απόδοση του προσαρμοστικού ισοσταθμιστή. Σε μια τέτοια περίπτωση, $J_l \gg J_{\min} + J_{\Delta}$, ακόμα και όταν χρησιμοποιείται η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Δ . Όταν αυτή η συνθήκη λαμβάνει χώρα, ο αλγόριθμος LMS είναι ακατάλληλος για την εφαρμογή και πρέπει να βασιστούμε σε περισσότερο περίπλοκους αναδρομικούς αλγόριθμους ελάχιστων τετραγώνων οι οποίοι περιγράφονται στην παράγραφο 2.4 για να πάρουμε γρηγορότερη σύγκλιση και ευθυγράμμιση.



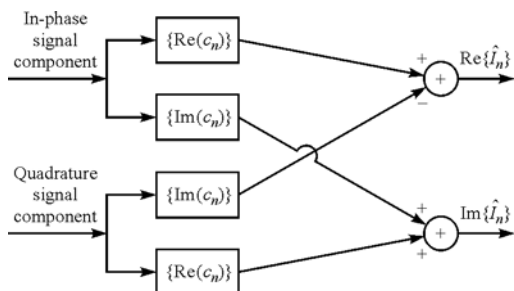
ΣΧΗΜΑ 2.1 – 5 Πλεονάζων μέσω τετραγωνικό σφάλμα J_{Δ} και σφάλμα καθυστέρησης J_l ως συνάρτηση του μεγέθους βήματος.

2.1.5 Γραμμικοί Ισοσταθμιστές Βασικής Ζώνης και Ζώνης Διέλευσης

Η πραγμάτευση των προσαρμοστικών ισοσταθμιστών έγινε όσον αφορά τα ισοδύναμα χαμηλοπερατά σήματα. Ωστόσο, σε μια πρακτική υλοποίηση, ο προσαρμοστικός γραμμικός ισοσταθμιστής που φαίνεται στο Σχ.2.1 – 2 μπορεί να θεωρηθεί είτε ως βασικής ζώνης είτε ως ζωνοπερατός. Για παράδειγμα το Σχ.2.1 – 6 δείχνει την αποδιαμόρφωση ενός QAM (ή πολυφασικού PSK) μετασχηματίζοντας αρχικά το σήμα σε σήμα βασικής ζώνης και ισοσταθμίζοντας το σήμα βασικής ζώνης με έναν ισοσταθμιστή που έχει μιγαδικούς συντελεστές. Κατ' ουσία, ο μιγαδικός ισοσταθμιστής με μιγαδική (συμφασική και ορθογωνική συνιστώσα) είσοδο είναι ισοδύναμος με τέσσερις παράλληλους ισοσταθμιστές με πραγματικούς συντελεστές απόληξης όπως φαίνεται στο Σχ.2.1 – 7.



ΣΧΗΜΑ 2.1 – 6 Αποδιαμόρφωση QAM σήματος.

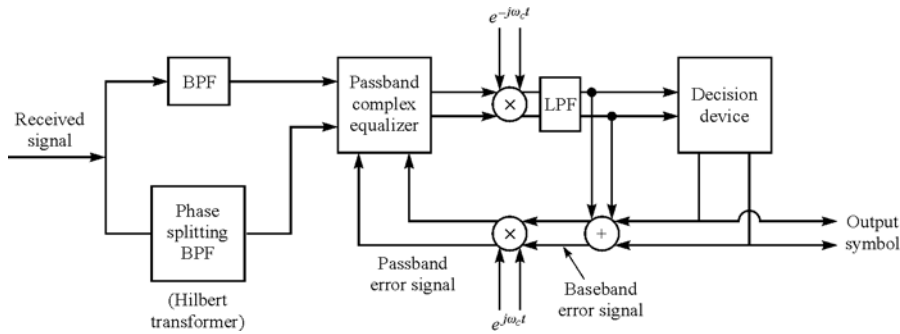


ΣΧΗΜΑ 2.1 – 7 Μιγαδικός ισοσταθμιστής βασικής ζώνης QAM σήματος.

Σαν μια εναλλακτική επιλογή, μπορούμε να ισοσταθμίσουμε το σήμα στη ζώνη διέλευσης. Αυτό επιτυγχάνεται όπως φαίνεται στο Σχ.2.1 – 8 για ένα δισδιάστατο σήμα όπως είναι το QAM και το PSK. Το λαμβανόμενο σήμα φιλτράρεται και, παράλληλα, περνάει μέσω ενός μετασχηματιστή Hilbert, ο οποίος ονομάζεται **φίλτρο διαχωρισμού φάσης (split – phase filter)**. Έτσι, έχουμε τα ισοδύναμα των συμφασικών και ορθογωνικών συνιστωσών στη ζώνη διέλευσης, που τροφοδοτούν ένα μιγαδικό ισοσταθμιστή ζώνης διέλευσης. Μετά την ισοστάθμιση, το σήμα μετατρέπεται σε σήμα βασικής ζώνης και ανιχνεύεται. Το σήμα σφάλματος γεννιάται λόγω του ότι η ρύθμιση των συντελεστών του ισοσταθμιστή διευθετείται στη βασική ζώνη και μετασχηματίζεται στη συχνότητα στην ζώνη διέλευσης όπως φαίνεται στο Σχ.2.1 – 8.

2.2 ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΙ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΣΤΕΣ ΑΝΑΔΡΑΣΤΙΚΗΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Όπως στην περίπτωση του γραμμικού προσαρμοστικού ισοσταθμιστή, οι συντελεστές του φίλτρου πρόσθιας τροφοδότησης και του φίλτρου ανάδρασης σε έναν ισοσταθμιστή αναδρομικής απόφασης μπορούν να ρυθμιστούν αναδρομικά, αντί να



ΣΧΗΜΑ 2.1 – 8 Ισοστάθμιση QAM ή PSK σήματος στη ζώνη διέλευσης.

αντιστρέψουμε έναν πίνακα όπως συνεπάγεται από την (1.3 – 3). Βασιζόμενοι στην ελαχιστοποίηση του MSE στην έξοδο του DFE, ο αλγόριθμος απότομης κατάβασης παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k + \Delta E(\varepsilon_k \mathbf{V}_k^*) \quad (2.2 - 1)$$

όπου \mathbf{C}_k είναι το διάνυσμα των συντελεστών του ισοσταθμιστή στο k – οστό διάστημα σηματοδοσίας, $E(\varepsilon_k \mathbf{V}_k^*)$ είναι η συσχέτιση του σήματος σφάλματος $\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ με το \mathbf{V}_k , και το $\mathbf{V}_k = [v_{k+K_1} \dots v_k I_{k-1} \dots I_{k-K_2}]^t$ αναπαριστά τις τιμές του σήματος στο πρόσθιο και στο αναδραστικό φίλτρο σε χρόνο $t = kT$. Το MSE ελαχιστοποιείται όταν το διάνυσμα συσχέτισης $E(\varepsilon_k \mathbf{V}_k^*) = \mathbf{0}$ καθώς $k \rightarrow \infty$.

Αφού το ακριβές διάνυσμα συσχέτισης είναι άγνωστο σε κάθε χρονική στιγμή, χρησιμοποιούμε ως μια εκτίμηση το διάνυσμα $\varepsilon_k \mathbf{V}_k^*$ και υπολογίζουμε κατά μέσο όρο το θόρυβο στην εκτίμηση μέσω της αναδρομικής εξίσωσης

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta \varepsilon_k \mathbf{V}_k^* \quad (2.2 - 2)$$

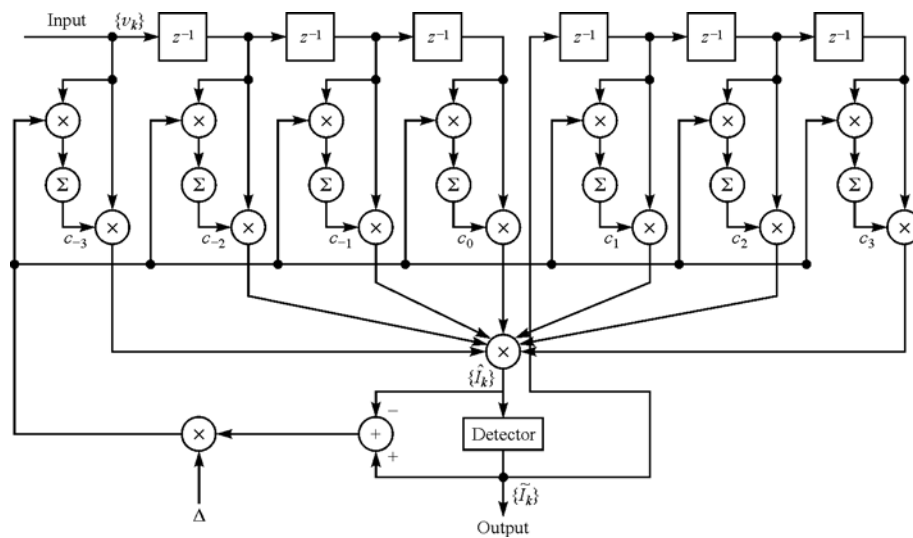
Αυτός είναι ο LMS αλγόριθμος για τον DFE.

Όπως και στην περίπτωση του γραμμικού ισοσταθμιστή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια δοκιμαστική ακολουθία για να ρυθμίσουμε τους αρχικούς συντελεστές του DFE. Σύμφωνα με τη σύγκλιση στους (σχεδόν) βέλτιστους συντελεστές (ελάχιστο MSE), μπορούμε να αλλάξουμε σε ένα τρόπο λειτουργίας απευθείας απόφασης όπου οι αποφάσεις στην έξοδο του ανιχνευτή χρησιμοποιούνται στη μορφοποίηση του σήματος σφάλματος ε_k και τροφοδοτούν το φίλτρο ανάδρασης. Αυτός είναι ο προσαρμοστικός τρόπος του DFE, που φαίνεται στο Σχ.2.2 – 1. Σε αυτή την περίπτωση, η αναδρομική σχέση για τη ρύθμιση των συντελεστών του ισοσταθμιστή είναι

$$\tilde{\mathbf{C}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{C}}_k + \Delta \tilde{\varepsilon}_k \mathbf{V}_k^* \quad (2.2 - 3)$$

όπου $\tilde{\varepsilon}_k = \tilde{I}_k - \hat{I}_k$ και $\mathbf{V}_k = [v_{k+K_1} \dots v_k \tilde{I}_{k-1} \dots \tilde{I}_{k-K_2}]^t$.

Οι χαρακτηριστικές απόδοσης του LMS αλγόριθμου για τον DFE είναι βασικά ίδιες όπως αυτές που αναπτύχθηκαν στις ενότητες 2.1 – 3 και 2.1 – 4 για το γραμμικό προσαρμοστικό ισοσταθμιστή.



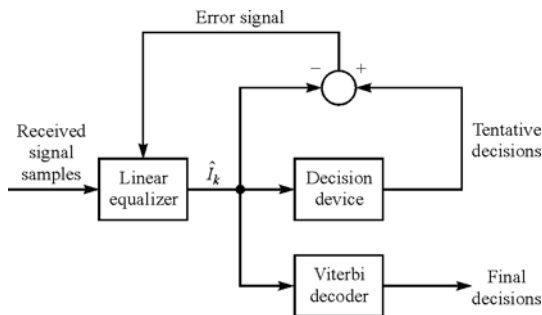
ΣΧΗΜΑ 2.2 – 1 Ισοσταθμιστής αναδραστικής απόφασης.

2.2.1 Προσαρμοστική Ισοστάθμιση Trellis Κωδικοποιημένων Σημάτων

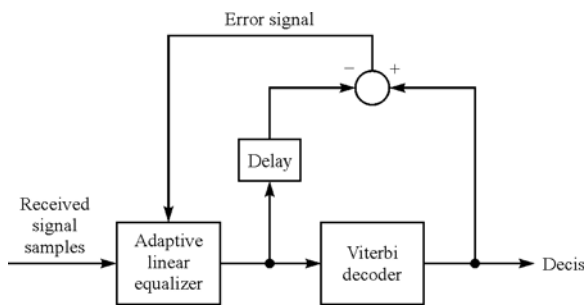
Η αποδοτική σε εύρος ζώνης διαμόρφωση κωδικοποιημένου δικτυωτού διαγράμματος χρησιμοποιείται συχνά στις ψηφιακές επικοινωνίες μέσα από τηλεφωνικά κανάλια για να μειώσει τον απαιτούμενο SNR ανά bit ώστε να επιτύχει ένα συγκεκριμένο ρυθμό σφαλμάτων. Η παραμόρφωση καναλιού του trellis κωδικοποιημένου σήματος μας ωθεί στο να χρησιμοποιήσουμε προσαρμοστική ισοστάθμιση για να περιορίσουμε τη διασυμβολική παρεμβολή. Η έξοδος του ισοσταθμιστή τροφοδοτεί στη συνέχεια τον αποκωδικοποιητή Viterbi, ο οποίος εκτελεί αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης του trellis κωδικοποιημένου σήματος.

Το ερώτημα που προκύπτει όσον αφορά ένα τέτοιο δέκτη είναι πώς προσαρμόζουμε τον ισοσταθμιστή σε έναν τρόπο λειτουργίας εκπομπής δεδομένων; Μια δυνατότητα είναι να έχουμε τον ισοσταθμιστή να παίρνει τις δικές του αποφάσεις στην έξοδό του μεμονωμένα ώστε να γεννά ένα σήμα σφάλματος για να ρυθμίζει τους συντελεστές απόληξης του, όπως φαίνεται στο διάγραμμα βαθμίδων στο Σχ.2.2 – 2. Το πρόβλημα με αυτή την προσέγγιση είναι ότι τέτοιες αποφάσεις είναι γενικά αναξιόπιστες, αφού ο προ – αποκωδικοποίησης SNR των κωδικοποιημένων συμβόλων είναι σχετικά χαμηλός. Ένας υψηλός ρυθμός σφαλμάτων θα μπορούσε να προκαλέσει μια σημαντική υποβάθμιση στη λειτουργία του ισοσταθμιστή, η οποία θα μπορούσε σε τελική ανάλυση να επηρεάσει την αξιοπιστία των αποφάσεων στην έξοδο του αποκωδικοποιητή. Η πιο επιθυμητή εναλλακτική λύση να χρησιμοποιήσουμε αποφάσεις μετά την αποκωδικοποίηση από τον αποκωδικοποιητή Viterbi, οι οποίες είναι πολύ περισσότερο αξιόπιστες, για να προσαρμόζουμε συνεχώς τον ισοσταθμιστή. Αυτή η προσέγγιση είναι σίγουρα προτιμότερη και εφαρμόσιμη όταν ένα γραμμικός ισοσταθμιστής χρησιμοποιείται πριν τον αποκωδικοποιητή Viterbi, οι οποίες είναι πολύ περισσότερο αξιόπιστες, για να προσαρμόζουμε συνεχώς τον ισοσταθμιστή. Αυτή η προσέγγιση είναι σίγουρα προτιμότερη και εφαρμόσιμη όταν ένα γραμμικός ισοσταθμιστής χρησιμοποιείται πριν τον αποκωδικοποιητή Viterbi. Η καθυστέρηση αποκωδικοποίησης που ενυπάρχει στον αποκωδικοποιητή Viterbi μπορεί να ξεπεραστεί εισάγοντας μια ταυτόσημη καθυστέρηση στη ρύθμιση των βαρών απόληξης των συντελεστών του ισοσταθμιστή όπως φαίνεται στο Σχ.2.2 – 3. Το κυριότερο τμήμα που πρέπει να

πληρωθεί για την πρόσθετη καθυστέρηση είναι ότι η παράμετρος μέγεθος βήματος στον αλγόριθμο LMS πρέπει να μειωθεί, όπως περιγράφηκε από τον Long κ.ά. (1987, 1989), ώστε να επιτύχουμε ευστάθεια στον αλγόριθμο.

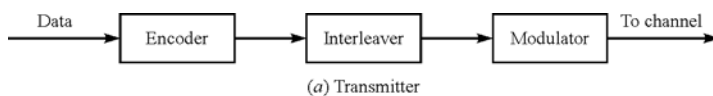


ΣΧΗΜΑ 2.2 – 2 Ρύθμιση του ισοσταθμιστή βασισμένη σε αβέβαιες αποφάσεις.

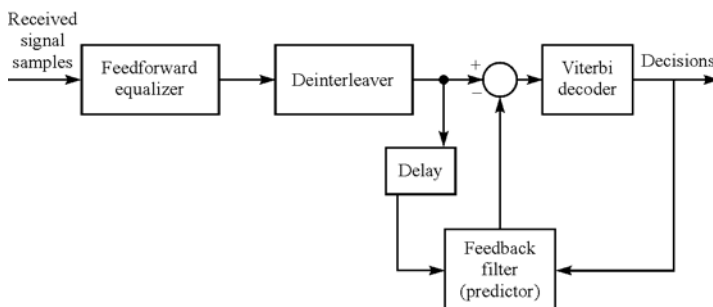


ΣΧΗΜΑ 2.2 – 3 Ρύθμιση του ισοσταθμιστή βασισμένη σε αποφάσεις του αποκωδικοποιητή Viterbi..

Σε κανάλια με ένα ή περισσότερους φασματικούς μηδενισμούς εντός ζώνης, ο γραμμικός ισοσταθμιστής δεν είναι πλέον επαρκής για να αντισταθμίσει τη διασυμβολική παρεμβολή του καναλιού. Στη θέση του, θα προτιμούσαμε να χρησιμοποιήσουμε έναν DFE. Αλλά ο DFE απαιτεί αξιόπιστες αποφάσεις στο φίλτρο ανάδρασής του για να εξουδετερώσει τη διασυμβολική παρεμβολή από προγενέστερα ανιχνευμένα σύμβολα. Οι αβέβαιες αποφάσεις πριν την αποκωδικοποίηση θα ήταν εξαιρετικά αναξιόπιστες και, για αυτό το λόγο, ακατάλληλες. Δυστυχώς, ο συμβατικός DFE δεν μπορεί να συνδεθεί σειριακά με τον αλγόριθμο Viterbi στον οποίο οι αποφάσεις μετά από αποκωδικοποίηση από τον αποκωδικοποιητή ανατροφοδοτούνται στον DFE.



(a) Transmitter



(b) Receiver

ΣΧΗΜΑ 2.2 – 4 Χρησιμοποίηση ενός προβλέπων DFE με διαστρωμάτωση και TCM.

Μια εναλλακτική οδός είναι να χρησιμοποιήσουμε τον προβλέπων DFE ο οποίος περιγράφεται στην Ενότητα 1.3 – 3. Για να εξομαλύνουμε την καθυστέρηση αποκωδικοποίησης καθώς αυτή επηρεάζει το γραμμικό προβλεπτή, εισάγουμε ένα περιοδικό ζεύγος διαστρωμάτωσης/αποδιαστρωμάτωσης το οποίο έχει την ίδια καθυστέρηση με τον αποκωδικοποιητή Viterbi και, έτσι, κάνει δυνατή τη γέννηση του κατάλληλου σήματος σφάλματος για τον προβλεπτή όπως φαίνεται στο διάγραμμα βαθμίδων του Σχ.2.2 – 4. Η νέα άποψη στην οποία ένας προβλέπων DFE μπορεί να συνδυαστεί με αποκωδικοποίηση Viterbi για να εξισώσει σήματα κωδικοποιημένα κατά trellis περιγράφεται και αναλύεται από τον Eyuboglu (1988). Η ίδια ιδέα έχει μεταφερθεί στην ισοστάθμιση των καναλιών διαλείψεων πολλαπλών διαδρομών από τον Zhou κ.ά. (1988, 1990), αλλά η δομή του DFE τροποποιήθηκε για να χρησιμοποιήσει αναδρομικά φίλτρα ελάχιστων τετραγώνων τύπου πλέγματος, τα οποία παρέχουν γρηγορότερη προσαρμογή στις χρονικές μεταβολές που συναντώνται απρόσμενα στο κανάλι.

2.3 ΕΝΑΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΚΤΙΜΗΤΗΣ ΚΑΝΑΛΙΟΥ ΓΙΑ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ML ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Το κριτήριο ανίχνευση ML ακολουθιών που υλοποιήθηκε μέσω του αλγόριθμου Viterbi καθώς ενσωματώθηκε στον υπολογισμό των μετρικών που δίνεται από την (1.1 – 24) και ο πιθανοκρατικός αλγόριθμος ανίχνευσης σύμβολο – με – σύμβολο ο απαιτούν γνώση των συντελεστών του ισοδύναμου καναλιού διακριτού χρόνου $\{f_k\}$.

Για να προσαρμόσουμε ένα κανάλι που είναι άγνωστο ή μεταβάλλεται αργά με το χρόνο, μπορούμε να συμπεριλάβουμε έναν εκτιμητή καναλιού ο οποίος συνδέεται εν παραλλήλω με τον αλγόριθμο ανίχνευσης, όπως φαίνεται στο Σχ.2.3 – 1. Ο εκτιμητής του καναλιού, ο οποίος φαίνεται στο Σχ.2.3 – 2 είναι ταυτόσημος στη δομή με το γραμμικό εγκάρσιο ισοσταθμιστή που συζητήθηκε προηγουμένως στην Ενότητα 2.1. Στην πραγματικότητα, ο εκτιμητής καναλιού είναι ένα αντίγραφο του ισοδύναμου καναλιού διακριτού χρόνου μοντελοποιημένου ως φίλτρο που μοντελοποιεί τη διασυμβολική παρεμβολή. Οι συντελεστές απόληξης που έχουν εκτιμηθεί, οι οποίοι συμβολίζονται με $\{\hat{f}_k\}$, ρυθμίζονται αναδρομικά για να ελαχιστοποιήσουν το MSE ανάμεσα στην πραγματική λαμβανόμενη ακολουθία και την έξοδο του εκτιμητή. Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος απότομης κατάβασης σε έναν τρόπο λειτουργίας κατευθυνόμενης απόφασης είναι

$$\hat{\mathbf{f}}_{k+1} = \hat{\mathbf{f}}_k + \Delta \varepsilon_k \tilde{\mathbf{I}}_k^* \quad (2.3 - 1)$$

όπου $\hat{\mathbf{f}}_k$ είναι το διάνυσμα των συντελεστών κέρδους απόληξης στην k – οστή επανάληψη, Δ είναι το μέγεθος του βήματος, $\varepsilon_k = v_k - \hat{v}_k$ είναι το σήμα σφάλματος, και το $\tilde{\mathbf{I}}_k$ συμβολίζει το διάνυσμα των ανιχνευμένων πληροφοριακών συμβόλων στον εκτιμητή του καναλιού στην k - οστή επανάληψη.

Θα δείξουμε τώρα ότι όταν το MSE ανάμεσα στα v_k και \hat{v}_k ελαχιστοποιείται, η προκύπτουσες τιμές των συντελεστών κέρδους απόληξης του εκτιμητή του καναλιού είναι οι τιμές του μοντέλου διακριτού χρόνου του καναλιού. Για μαθηματική ευπείθεια, υποθέτουμε ότι η ανιχνευμένη πληροφοριακή ακολουθία $\{\tilde{I}_k\}$ είναι σωστή. Με άλλα λόγια, η $\{\tilde{I}_k\}$ είναι ταυτόσημη με την εκπεμπόμενη ακολουθία

$\{I_k\}$. Αυτή είναι μια λογική υπόθεση όταν το σύστημα λειτουργεί σε χαμηλή πιθανότητα σφάλματος. Έτσι, το MSE ανάμεσα στο λαμβανόμενο σήμα v_k και στην εκτίμηση \hat{v}_k είναι:

$$J(\hat{\mathbf{f}}) = E \left(\left| v_k - \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j I_{k-j} \right|^2 \right) \quad (2.3 - 2)$$

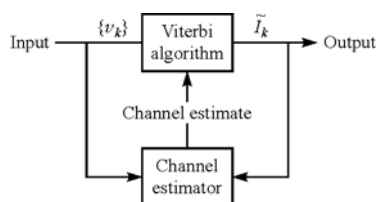
Οι συντελεστές απόληξης $\{\hat{f}_k\}$ που ελαχιστοποιούν το $J(\hat{\mathbf{f}})$ στην (2.3 - 2) ικανοποιούν το σύνολο των N γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j \phi_{kj} = d_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.3 - 3)$$

όπου

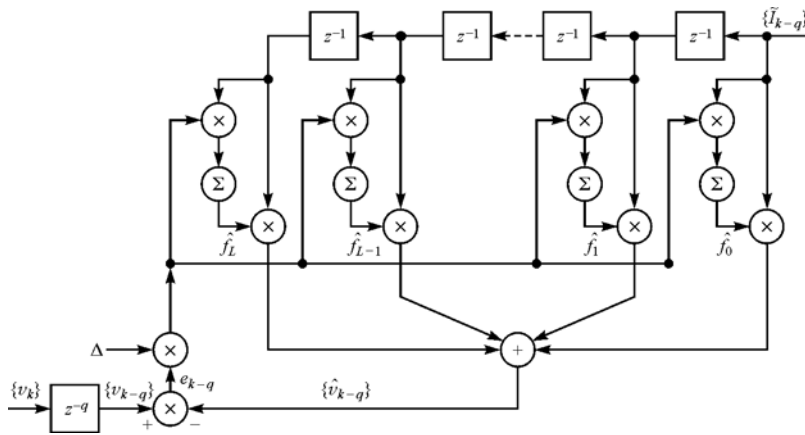
$$\phi_{kj} = E(I_k I_j^*), \quad d_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \phi_j \quad (2.3 - 4)$$

Από τις (2.3 - 3) και (2.3 - 4), συμπεραίνουμε ότι, όσο η πληροφοριακή ακολουθία $\{I_k\}$ είναι ασυσχέτιστη, οι βέλτιστοι συντελεστές είναι ακριβώς ίσοι με τις αντίστοιχες τιμές του ισοδύναμου καναλιού διακριτού χρόνου. Είναι επίσης προφανές ότι όταν ο αριθμός των απολήξεων N στον εκτιμητή του καναλιού είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με $L+1$, οι βέλτιστοι συντελεστές κέρδους απόληξης $\{\hat{f}_k\}$ είναι ίσοι με τις αντίστοιχες τιμές του $\{f_k\}$, ακόμα και όταν η πληροφοριακή ακολουθία είναι συσχετισμένη. Κάτω από τις παραπάνω συνθήκες, το ελάχιστο MSE είναι απλά ίσο με τη μεταβλητότητα του θορύβου N_0 .



ΣΧΗΜΑ 2.3 – 1 Διάγραμμα βαθμίδων της μεθόδου εκτίμησης των χαρακτηριστικών του καναλιού για τον αλγόριθμο Viterbi.

Στην παραπάνω συζήτηση, η ανιχνευμένη πληροφοριακή ακολουθία στην έξοδο του αλγόριθμου Viterbi ή του πιθανοκρατικού σύμβολο – με – σύμβολο αλγόριθμου χρησιμοποιήθηκε για να κάνει ρυθμίσεις στον εκτιμητή του καναλιού. Για αρχική λειτουργία, θα μπορούσαμε να στείλουμε μια σύντομη ακολουθία εκμάθησης για να εκτελέσουμε την αρχική ρύθμιση των συντελεστών απόληξης, όπως συμβαίνει συνήθως στην περίπτωση του γραμμικού εγκάρσιου ισοσταθμιστή. Σε έναν προσαρμοστικό τρόπο λειτουργίας, ο δέκτης απλά χρησιμοποιεί τις δικές του αποφάσεις για να μορφοποιήσει ένα σήμα σφάλματος.



ΣΧΗΜΑ 2.3 – 2 Προσαρμοστικό εγκάρσιο φίλτρο για εκτίμηση της διασποράς του καναλιού.

2.4 ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΓΙΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΗ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΣΗ

Ο αλγόριθμος LMS που περιγράφηκε στις Ενότητες 2.1 και 2.2 για προσαρμοστική ρύθμιση των συντελεστών απόληξης ενός γραμμικού ισοσταθμιστή ή ενός DFE είναι βασικά ένας (στοχαστικός) αλγόριθμος απότομης κατάβασης στον οποίο το πραγματικό διάνυσμα κλίσης προσεγγίζεται από μια εκτίμηση που λαμβάνεται απευθείας από τα δεδομένα.

Το κυριότερο πλεονέκτημα του αλγόριθμου απότομης κατάβασης βρίσκεται στην υπολογιστική του απλότητα. Ωστόσο, το τίμημα που πληρώνουμε για την απλότητα είναι η αργή σύγκλιση, ειδικά όταν οι χαρακτηριστικές του καναλιού έχουν μεγάλη έκταση, με άλλα λόγια όταν $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$. Ιδωμένο με άλλο τρόπο, ο αλγόριθμος κλίσης έχει μόνο μια μοναδική ρυθμιζόμενη παράμετρο για τον έλεγχο του ρυθμού σύγκλισης, δηλαδή, την παράμετρο Δ . Συνεπώς η αργή σύγκλιση είναι λόγω αυτού του θεμελιώδους περιορισμού.

Για να πάρουμε γρηγορότερη σύγκλιση, είναι απαραίτητο να επινοήσουμε περισσότερο περίπλοκους αλγόριθμους οι οποίοι να περιέχουν πρόσθετες παραμέτρους. Συγκεκριμένα, αν ο πίνακας Γ είναι $N \times N$ και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος περιέχει N παραμέτρους – μία για κάθε μια από τις ιδιοτιμές. Η βέλτιστη επιλογή αυτών των παραμέτρων για να επιτύχουμε ραγδαία σύγκλιση είναι ένα θέμα αυτής της ενότητας.

Στην εξαγωγή αλγορίθμων γρηγορότερης σύγκλισης, θα πρέπει να ενστερνιστούμε μια προσέγγιση ελάχιστων τετραγώνων. Έτσι, θα πρέπει να ασχοληθούμε απευθείας με τα λαμβανόμενα δεδομένα για να ελαχιστοποιήσουμε το τετραγωνικό δείκτη απόδοσης, παρόλο που προηγουμένως ελαχιστοποιήσαμε την προσδοκώμενη τιμή του τετραγωνικού σφάλματος. Θέτοντάς το απλά, αυτό σημαίνει ότι ο δείκτης απόδοσης εκφράζεται με όρους ενός χρονικού μέσου αντί για ένα στατιστικό μέσο.

Είναι βολικό να εκφράσουμε τους αναδρομικούς αλγορίθμους ελάχιστων τετραγώνων σε μορφή πίνακα. Για αυτό το λόγο, θα πρέπει να ορίσουμε έναν αριθμό από διανύσματα και πίνακες που χρειάζονται σε αυτό το ανάπτυγμα. Κάνοντας αυτό, θα πρέπει να αλλάξουμε ελαφρά και τους συμβολισμούς. Συγκεκριμένα, η εκτίμηση

του πληροφοριακού συμβόλου σε χρόνο t , όπου t είναι ένας ακέραιος, από έναν γραμμικό ισοσταθμιστή, εκφράζεται τώρα ως

$$\tilde{I}(t) = \sum_{j=-K}^K c_j(t-1)v_{t-j}$$

Αλλάζοντας το δείκτη j στο $c_j(t-1)$ να τρέχει από $j=0$ ως $j=N-1$ και ταυτόχρονα ορίζοντας

$$y(t) = v_{t+K}$$

η εκτίμηση $\tilde{I}(t)$ γίνεται

$$\begin{aligned} \tilde{I}(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} c_j(t-1)y(t-j) \\ &= \mathbf{C}'_N(t-1)\mathbf{Y}_N(t) \end{aligned} \quad (2.4-1)$$

όπου $\mathbf{C}'_N(t-1)$ και $\mathbf{Y}_N(t)$ είναι, αντίστοιχα, τα διανύσματα στήλης των συντελεστών του εξισωτή $c_j(t-1)$, $j=0, 1, \dots, N-1$, και τα σήματα εισόδου $y(t-j)$, $j=0, 1, 2, \dots, N-1$.

Ομοίως, στον ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης, έχουμε συντελεστές απόληξης $c_j(t)$, $j=0, 1, \dots, N-1$, όπου οι πρώτοι K_1+1 είναι οι συντελεστές του πρόσθιου φίλτρου και οι υπόλοιποι $K_2 = N - K_1 - 1$ είναι οι συντελεστές του φίλτρου ανάδρασης. Τα δεδομένα στην εκτίμηση $\hat{I}(t)$ είναι $v_{t+K_1} \dots v_{t+1}, \tilde{I}_{t-1} \dots \tilde{I}_{t-K_2}$, όπου το \tilde{I}_{t-j} , $1 \leq j \leq K_2$, συμβολίζει τις αποφάσεις των προηγούμενα ανιχνευμένων συμβόλων. Σε αυτή την ανάπτυξη, αμελούμε την επίδραση των σφαλμάτων απόφασης στους αλγόριθμους. Για αυτό το λόγο, υποθέτουμε ότι $\tilde{I}_{t-j} = I_{t-j}$, $1 \leq j \leq K_2$. Για σημειογραφική ευκολία, ορίζουμε επίσης

$$y(t-j) = \begin{cases} v_{t+K_1-j} & (0 \leq j \leq K_1) \\ I_{t+K_1-j} & (K_1 < j \leq N-1) \end{cases} \quad (2.4-2)$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_N(t) &= [y(t) \ y(t-1) \ \dots \ y(t-N+1)]^t \\ &= [v_{t+K_1} \ \dots \ v_{t+1} \ v_t \ I_{t-1} \ \dots \ I_{t-K_2}]^t \end{aligned} \quad (2.4-3)$$

2.4.1 Αναδρομικός Αλγόριθμος Ελάχιστων Τετραγώνων (Kalman)

Η αναδρομική εκτίμηση ελάχιστων τετραγώνων (Recursive Least Squares estimation, RLS) του $\hat{I}(t)$ μπορεί να σχηματιστεί ως ακολούθως. Υποθέστε ότι έχουμε παρατηρήσει τα διανύσματα $\mathbf{Y}_N(n)$, $n=0, 1, \dots, t$, και επιθυμούμε να προσδιορίσουμε το διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{C}_N(t)$ του ισοσταθμιστή (γραμμικού ή αναδραστικής απόφασης) που ελαχιστοποιεί το χρονικό σταθμισμένο μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$\mathcal{E}_N^{LS} = \sum_{n=0}^t w^{t-n} |e_N(n, t)|^2 \quad (2.4-4)$$

όπου το σφάλμα ορίζεται ως

$$e_N(n, t) = I(n) - \mathbf{C}_N^t(t) \mathbf{Y}_N(n) \quad (2.4-5)$$

και το w αναπαριστά έναν παράγοντα στάθμισης $0 < w < 1$. Έτσι εισάγουμε εκθετική στάθμιση στα παρελθόντα δεδομένα, η οποία είναι κατάλληλη όταν οι χαρακτηριστικές του καναλιού είναι χρονικά μεταβαλλόμενες. Ελαχιστοποίηση του \mathcal{E}_N^{LS} ως προς το διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{C}_N(t)$ αποφέρει το σύνολο των γραμμικών εξισώσεων

$$\mathbf{R}_N(t) \mathbf{C}_N(t) = \mathbf{D}_N(t) \quad (2.4-6)$$

όπου το $\mathbf{R}_N(t)$ είναι ο πίνακας συσχέτισης του σήματος που ορίζεται ως

$$\mathbf{R}_N(t) = \sum_{n=0}^t w^{t-n} \mathbf{Y}_N^*(n) \mathbf{Y}_N^t(n) \quad (2.4-7)$$

και το $\mathbf{D}_N(t)$ είναι το διάνυσμα αυτοσυσχέτισης

$$\mathbf{D}_N(t) = \sum_{n=0}^t w^{t-n} I(n) \mathbf{Y}_N^*(n) \quad (11-4-8)$$

Η λύση της (2.4-6) είναι

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{R}_N^{-1}(t) \mathbf{D}_N(t) \quad (2.4-9)$$

Ο πίνακας $\mathbf{R}_N(t)$ είναι παρόμοιος με τον στατιστικό πίνακα αυτοσυσχέτισης $\mathbf{\Gamma}_N$, ενώ το διάνυσμα $\mathbf{D}_N(t)$ είναι παρόμοιο με το διάνυσμα αυτοσυσχέτισης $\mathbf{\xi}_N$, που ορίστηκαν προηγουμένως. Δίνουμε έμφαση, όμως, στο ότι ο $\mathbf{R}_N(t)$ δεν είναι ένας πίνακας Toeplitz. Θα πρέπει επίσης να αναφέρουμε ότι, για μικρές τιμές του t , ο

$\mathbf{R}_N(t)$ μπορεί να είναι προβληματικός και, για αυτό το λόγο, είναι σύνηθες να προσθέτουμε αρχικά τον πίνακα $\delta\mathbf{I}_N$ στον $\mathbf{R}_N(t)$, όπου δ είναι μια μικρή θετική σταθερά και \mathbf{I}_N είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Με εκθετική στάθμιση στο παρελθόν, η επίδραση της πρόσθεσης του $\delta\mathbf{I}_N$ απλώνει με το χρόνο.

Τώρα υποθέστε ότι έχουμε τη λύση (2.4 – 9) για χρόνο $t-1$, με άλλα λόγια το $\mathbf{C}_N(t-1)$, και επιθυμούμε να υπολογίσουμε το $\mathbf{C}_N(t)$. Είναι αναποτελεσματικό και, για αυτό το λόγο, ανέφικτο να λύσουμε το σύνολο των N γραμμικών εξισώσεων για κάθε νέα συνιστώσα σήματος που λαμβάνεται. Για να το αποφύγουμε αυτό, προχωράμε ως ακολούθως. Πρώτα, ο $\mathbf{R}_N(t)$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά ως

$$\mathbf{R}_N(t) = w\mathbf{R}_N(t-1) + \mathbf{Y}_N^*(t)\mathbf{Y}_N^t(t) \quad (2.4 - 10)$$

Ονομάζουμε την (2.4 – 10) **εξίσωση χρονικής ενημέρωσης (time – update equation)** για τον $\mathbf{R}_N(t)$.

Αφού χρειάζεται ο αντίστροφος του $\mathbf{R}_N(t)$ στην (2.4 – 9), χρησιμοποιούμε την ταυτότητα αντιστροφής πίνακα

$$\mathbf{R}_N^{-1}(t) = \frac{1}{w} \left[\mathbf{R}_N^{-1}(t-1) - \frac{\mathbf{R}_N^{-1}(t-1)\mathbf{Y}_N^*(t)\mathbf{Y}_N^t(t)\mathbf{R}_N^{-1}(t-1)}{w + \mathbf{Y}_N^t(t)\mathbf{R}_N^{-1}(t-1)\mathbf{Y}_N^*(t)} \right] \quad (2.4 - 11)$$

Έτσι ο $\mathbf{R}_N^{-1}(t)$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά σύμφωνα με το (2.4 – 11).

Για ευκολία, ορίζουμε $\mathbf{P}_N(t) = \mathbf{R}_N^{-1}(t)$. Είναι επίσης βολικό να ορίσουμε ένα N - διάστατο διάνυσμα, το οποίο ονομάζεται **διάνυσμα κέρδους Kalman (Kalman gain vector)**, ως

$$\mathbf{K}_N(t) = \frac{1}{w + \mu_N(t)} \mathbf{P}_N(t-1)\mathbf{Y}_N^*(t) \quad (2.4 - 12)$$

όπου $\mu_N(t)$ είναι μια βαθμωτή ποσότητα που ορίζεται ως

$$\mu_N(t) = \mathbf{Y}_N^t(t)\mathbf{P}_N(t-1)\mathbf{Y}_N^*(t) \quad (2.4 - 13)$$

Με αυτούς τους ορισμούς, η (2.4 – 11) γίνεται

$$\mathbf{P}_N(t) = \frac{1}{w} \left[\mathbf{P}_N(t-1) - \mathbf{K}_N(t)\mathbf{Y}_N^t(t)\mathbf{P}_N(t-1) \right] \quad (2.4 - 14)$$

Υποθέστε ότι πολλαπλασιάζουμε από δεξιά και τα δύο σκέλη της (2.4 – 14) με το $\mathbf{Y}_N^*(t)$. Τότε

$$\mathbf{P}_N(t)\mathbf{Y}_N^*(t) = \frac{1}{w} \left[\mathbf{P}_N(t-1)\mathbf{Y}_N^*(t) - \mathbf{K}_N(t)\mathbf{Y}_N^t(t)\mathbf{P}_N(t-1)\mathbf{Y}_N^*(t) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{w} \{ [w + \mu_N(t)] \mathbf{K}_N(t) - \mathbf{K}_N(t) \mu_N(t) \} \\
&= \mathbf{K}_N(t)
\end{aligned} \tag{2.4-15}$$

Επομένως, το διάνυσμα κέρδους Kalman μπορεί επίσης να οριστεί ως $\mathbf{P}_N(t) \mathbf{Y}_N(t)$.

Τώρα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα αναστροφής πίνακα για να εξάγουμε μια εξίσωση για να λάβουμε το $\mathbf{C}_N(t)$ από το $\mathbf{C}_N(t-1)$. Αφού

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{P}_N(t) \mathbf{D}_N(t)$$

και

$$\mathbf{D}_N(t) = w \mathbf{D}_N(t-1) + I(t) \mathbf{Y}_N^*(t) \tag{2.4-16}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_N(t) &= \frac{1}{w} [\mathbf{P}_N(t-1) - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1)] [w \mathbf{D}_N(t-1) + I(t) \mathbf{Y}_N^*(t)] \\
&= \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{D}_N(t-1) + \frac{1}{w} I(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \\
&\quad - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \\
&\quad - \frac{1}{w} I(t) \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \\
&= \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{K}_N(t) [I(t) - \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{C}_N(t-1)]
\end{aligned} \tag{2.4-17}$$

Παρατηρήστε ότι $\mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{C}_N(t-1)$ είναι η έξοδος του ισοσταθμιστή σε χρόνο t . Με άλλα λόγια

$$\hat{I}(t) = \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{C}_N(t-1) \tag{2.4-18}$$

και

$$e_N(t, t-1) = I(t) - \hat{I}(t) \equiv e_N(t) \tag{2.4-19}$$

είναι το σφάλμα ανάμεσα στο επιθυμητό σύμβολο και στην εκτίμηση. Για αυτό το λόγο, το $\mathbf{C}_N(t)$ είναι ενημερωμένο αναδρομικά σύμφωνα με τη σχέση

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{K}_N(t) e_N(t) \tag{2.4-20}$$

Το παραμένον MSE που προκύπτει από αυτή τη βελτιστοποίηση είναι

$$\mathcal{E}_N^{LS} \min = \sum_{n=0}^t w^{t-n} |I(n)|^2 - \mathbf{C}_N^t(t) \mathbf{D}_N^*(t) \quad (2.4-21)$$

Για να συνοψίσουμε, υποθέστε ότι έχουμε τα $\mathbf{C}_N(t-1)$ και $\mathbf{P}_N(t-1)$. Όταν μια νέα συνιστώσα σήματος λαμβάνεται, έχουμε το $\mathbf{Y}_N(t)$. Τότε ο αναδρομικός υπολογισμός για τη χρονική ενημέρωση των $\mathbf{C}_N(t)$ και $\mathbf{P}_N(t)$ προχωρεί ως ακολούθως:

- υπολογισμός εξόδου:

$$\hat{I}(t) = \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{C}_N(t-1)$$

- υπολογισμός σφάλματος:

$$e_N(t) = I(t) - \hat{I}(t)$$

- υπολογισμός διανύσματος κέρδους Kalman:

$$\mathbf{K}_N(t) = \frac{\mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^t(t)}{w + \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t)}$$

- ενημερώνουμε τον αντίστροφο του πίνακα συσχέτισης:

$$\mathbf{P}_N(t) = \frac{1}{w} [\mathbf{P}_N(t-1) - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1)]$$

- ενημερώνουμε τους συντελεστές:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_N(t) &= \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{K}_N(t) e_N(t) \\ &= \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{P}_N(t) \mathbf{Y}_N^*(t) e_N(t) \end{aligned} \quad (2.4-22)$$

Ο αλγόριθμος που περιγράφηκε στην (2.4-22) ονομάζεται **απευθείας μορφής RLS (RLS direct form)** ή **αλγόριθμος Kalman (Kalman algorithm)**. Είναι κατάλληλος όταν ο ισοσταθμιστής έχει εγκάρσια (απευθείας μορφής) δομή.

Παρατηρήστε ότι οι συντελεστές του ισοσταθμιστή αλλάζουν με το χρόνο κατά μια ποσότητα ίση με το σφάλμα $e_N(t)$ πολλαπλασιασμένο με το διάνυσμα κέρδους Kalman $\mathbf{K}_N(t)$. Αφού το $\mathbf{K}_N(t)$ είναι N -διάστατο, κάθε συντελεστής απόληξης κατ' ουσία ελέγχεται από ένα από τα στοιχεία του $\mathbf{K}_N(t)$. Συνεπώς λαμβάνεται ραγδαία σύγκλιση. Σε αντίθεση, ο αλγόριθμος απότομης κατάβασης, εκφρασμένος με τον παρόν συμβολισμό, είναι

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{C}_N(t-1) + \Delta \mathbf{Y}_N^*(t) e_N(t) \quad (2.4-23)$$

και η μόνη μεταβλητή παράμετρος είναι το μέγεθος βήματος Δ .

Το Σχ.2.4 – 1 δείχνει τον αρχικό ρυθμό σύγκλισης αυτών των δύο αλγόριθμων για ένα κανάλι με σταθερές παραμέτρους $f_0 = 0,26$, $f_1 = 0,93$, $f_2 = 0,26$, και ένα γραμμικό ισοσταθμιστή με 11 απολήξεις. Ο λόγος ιδιοτιμών για αυτό το κανάλι είναι $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 11$. Όλοι οι συντελεστές του ισοσταθμιστή αρχικοποιήθηκαν στο μηδέν. Ο αλγόριθμος απότομης κατάβασης υλοποιήθηκε με $\Delta = 0,020$. Η ανωτερότητα του αλγόριθμου Kalman είναι ξεκάθαρα ορατή. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην ευθυγράμμιση ενός χρονικού μεταβαλλόμενου καναλιού. Για παράδειγμα, οι χρονικές μεταβολές στις χαρακτηριστικές ενός (ιονοσφαιρικού) ραδιοκαναλιού υψηλής συχνότητας (HF) είναι εξαιρετικά ραγδαίες για να εξισωθούν από τον αλγόριθμο κλίσης, αλλά ο αλγόριθμος Kalman προσαρμόζεται αρκετά γρήγορα για να ανιχνεύσει τέτοιες μεταβολές.

Παρά την ανώτερη απόδοση ανίχνευσής του, ο αλγόριθμος Kalman που περιγράφηκε παραπάνω έχει δύο μειονεκτήματα. Ένα είναι η πολυπλοκότητά του. Το δεύτερο είναι η ευαισθησία του σε θόρυβο στρογγυλοποίησης που συσσωρεύεται λόγω των αναδρομικών υπολογισμών. Το τελευταίο μπορεί να προκαλέσει αστάθειες στον αλγόριθμο.

Ο αριθμός των υπολογισμών ή μαθηματικών πράξεων (πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις, και αφαιρέσεις) στον υπολογισμό των μεταβλητών στην (2.4 – 22) είναι ανάλογος του N^2 . Οι περισσότερες από αυτές τις πράξεις περιλαμβάνονται στην ενημέρωση του $\mathbf{P}_N(t)$. Αυτό το μέρος του υπολογισμού είναι επίσης ευάλωτο στο θόρυβο στρογγυλοποίησης. Για να διορθωθεί αυτό το πρόβλημα, έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι που αποφεύγουν τον υπολογισμό του $\mathbf{P}_N(t)$ σύμφωνα με την (2.4 – 14). Η βάση αυτών των αλγόριθμων βρίσκεται στην αποσύνθεση του $\mathbf{P}_N(t)$ στη μορφή

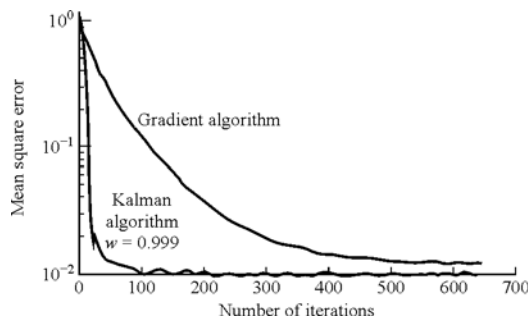
$$\mathbf{P}_N(t) = \mathbf{S}_N(t) \mathbf{\Lambda}_N(t) \mathbf{S}_N^t(t) \quad (2.4 - 24)$$

όπου ο $\mathbf{S}_N(t)$ είναι ο κάτω τριγωνικός πίνακας του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι μονάδες, και ο $\mathbf{\Lambda}_N(t)$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Μια τέτοια αποσύνθεση ονομάζεται **παραγοντοποίηση τετραγωνικής ρίζας (square root factorization)** (βλ. Bierman, 1977). Σε έναν αλγόριθμο τετραγωνικής ρίζας, ο $\mathbf{P}_N(t)$ δεν ενημερώνεται όπως στην (2.4 – 14) ούτε υπολογίζεται. Αντί αυτού, η χρονική ενημέρωση εκτελείται στους $\mathbf{S}_N(t)$ και $\mathbf{\Lambda}_N(t)$.

Οι αλγόριθμοι τετραγωνικής ρίζας χρησιμοποιούνται συχνά σε εφαρμογές συστημάτων ελέγχου στις οποίες περιλαμβάνεται φιλτράρισμα Kalman. Στις ψηφιακές επικοινωνίες, αλγόριθμος Kalman τετραγωνικής ρίζας έχει υλοποιηθεί σε ένα PSK modem με ισοσταθμιστή αναδραστικής απόφασης σχεδιασμένο να εκπέμπει σε υψηλή ταχύτητα πάνω από HF ραδιοκανάλια με ονομαστικό εύρος ζώνης 3 kHz. Αυτός ο αλγόριθμος περιγράφεται στη δημοσίευση του Hsu (1982). Έχει μια υπολογιστική πολυπλοκότητα $1,5N^2 + 6,5N$ (μυγαδικοί πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις ανά σύμβολο εξόδου). Είναι επίσης αριθμητικά ευσταθής και επιδεικνύει καλές αριθμητικές ιδιότητες. Για μια λεπτομερή συζήτηση των αλγόριθμων τετραγωνικής ρίζας σε διαδοχική εκτίμηση, ο αναγνώστης προτρέπεται στο βιβλίο από τον Bierman (1977).

Είναι επίσης δυνατό να πάρουμε RLS αλγόριθμους με υπολογιστικές πολυπλοκότητες που αυξάνουν γραμμικά με τον αριθμό N των συντελεστών του

εξισωτή. Τέτοιοι αλγόριθμοι καλούνται γενικά **γρήγοροι RLS αλγόριθμοι (fast RLS algorithms)** και έχουν περιγραφεί στις δημοσιεύσεις από τους Carayannis *et al.* (1983), Cioffi και Kailath (1984), και Slock και Kailath (1988).



ΣΧΗΜΑ 2.4 – 1 Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης για τους αλγόριθμους Kalman και κλίσης.

2.4.2 Γραμμική Πρόβλεψη και το Φίλτρο Πλέγματος

Σε αυτή την ενότητα, θα αποδείξουμε τη σχέση ανάμεσα στη γραμμική πρόβλεψη και ένα φίλτρο πλέγματος.

Το πρόβλημα της γραμμικής πρόβλεψης μπορεί να καθορισθεί ως ακολούθως: δοθέντος ενός συνόλου δεδομένων $y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-p)$, πρόβλεψε τη τιμή του επόμενου σημείου δεδομένων $y(t)$. Ο προβλεπτής τάξης p είναι

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=1}^p a_{pk} y(t-k) \quad (2.4-25)$$

Ελαχιστοποίηση του MSE, η οποία ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= E[y(t) - \hat{y}(t)]^2 \\ &= E\left[y(t) - \sum_{k=1}^p a_{pk} y(t-k)\right]^2 \end{aligned} \quad (2.4-26)$$

ως προς τους συντελεστές του προβλεπτή $\{a_{pk}\}$ αποφέρει το σύνολο των γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{k=1}^p a_{pk} \phi(k-l) = \phi(l), \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (2.4-27)$$

όπου

$$\phi(l) = E[y(t)y(t+l)]$$

Αυτές ονομάζονται **κανονικές εξισώσεις (normal equations)** ή **εξισώσεις Yule – Walker (Yule – Walker equations)**.

Ο πίνακας Φ με στοιχεία $\phi(k-l)$ είναι ένας πίνακας Toeplitz, και, για αυτό το λόγο, ο αλγόριθμος Levinson – Durbin παρέχει ικανά μέσα για επίλυση των γραμμικών εξισώσεων αναδρομικά, αρχίζοντας με έναν προβλεπτή πρώτης τάξης και

προχωρώντας αναδρομικά στη λύση των συντελεστών για τον προβλεπτή τάξης p . Οι αναδρομικές σχέσεις για τον αλγόριθμος Levinson – Dublin είναι

$$a_{11} = \frac{\phi(1)}{\phi(0)}, \quad \mathcal{E}_0 = \phi(0)$$

$$a_{mm} = \frac{\phi(m) - \mathbf{A}_m^t \Phi_{m-1}^r}{\mathcal{E}_{m-1}} \quad (2.4 - 28)$$

$$a_{mk} = a_{m-1 k} - a_{mm} a_{m-1 m-k}$$

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m-1} (1 - a_{mm}^2)$$

για $m = 1, 2, \dots, p$, όπου τα διανύσματα \mathbf{A}_{m-1} και Φ_{m-1}^r ορίζονται ως

$$\mathbf{A}_{m-1} = [a_{m-1 1} \quad a_{m-1 2} \quad \dots \quad a_{m-1 m-1}]^t$$

$$\Phi_{m-1}^r = [\phi(m-1) \quad \phi(m-2) \quad \dots \quad \phi(1)]^t$$

Το φίλτρο γραμμικής πρόβλεψης τάξης m μπορεί να θεωρηθεί ως ένα εγκάρσιο φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς

$$A_m(z) = 1 - \sum_{k=1}^m a_m z^{-k} \quad (2.4 - 29)$$

Η είσοδος του είναι τα δεδομένα $\{y(t)\}$ και η έξοδος του είναι το σφάλμα $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$. Το φίλτρο πρόβλεψης μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί στη μορφή ενός πλέγματος, όπως θα δείξουμε τώρα.

Το αρχικό μας θέμα είναι η χρήση του αλγόριθμου Levinson – Dublin για τους συντελεστές του προβλεπτή a_{mk} στην (2.4 – 29). Αυτή η αντικατάσταση αποφέρει

$$A_m(z) = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{m-1 k} - a_{mm} a_{m-1 m-k}) z^{-k} - a_{mm} z^{-m}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1 k} z^{-k} - a_{mm} z^{-m} \left(1 - \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1 k} z^k \right)$$

$$= A_{m-1}(z) - a_{mm} z^{-m} A_{m-1}(z^{-1}) \quad (2.4 - 30)$$

Έτσι έχουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του προβλεπτή τάξης m με όρους της συνάρτησης μεταφοράς του προβλεπτή τάξης $(m-1)$.

Τώρα υποθέστε ότι ορίζουμε ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $G_m(z)$ ως

$$G_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) \quad (2.4 - 31)$$

Τότε η (2.4 – 30) μπορεί να εκφραστεί ως

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) - a_{mm}z^{-1}G_{m-1}(z) \quad (2.4 - 32)$$

Παρατηρήστε ότι η $G_{m-1}(z)$ αναπαριστά ένα εγκάρσιο φίλτρο με συντελεστές απόληξης $(-a_{m-1\ m-1}, -a_{m-1\ m-2}, \dots, -a_{m-1\ 1}, 1)$, ενώ οι συντελεστές του $A_{m-1}(z)$ είναι ακριβώς οι ίδιοι εκτός του ότι είναι δοσμένοι με ανάποδη σειρά.

Πιο βαθιά γνώση στη σχέση ανάμεσα στις $A_m(z)$ και $G_m(z)$ μπορεί να εξαχθεί υπολογίζοντας την έξοδο αυτών των δύο φίλτρων σε μια ακολουθία εισόδου $y(t)$. Χρησιμοποιώντας σχέσεις του μετασχηματισμού z , έχουμε

$$A_m(z)Y(z) = A_{m-1}(z)Y(z) - a_{mm}z^{-1}G_{m-1}(z)Y(z) \quad (2.4 - 33)$$

Ορίζουμε τις εξόδους των φίλτρων ως

$$\begin{aligned} F_m(z) &= A_m(z)Y(z) \\ B_m(z) &= G_m(z)Y(z) \end{aligned} \quad (2.4 - 34)$$

Τότε η (2.4 – 33) γίνεται

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) - a_{mm}z^{-1}B_{m-1}(z) \quad (2.4 - 35)$$

Στο πεδίο του χρόνου, η σχέση στην (2.4 – 35) γίνεται

$$f_m(t) = f_{m-1}(t) - a_{mm}b_{m-1}(t-1), \quad m \geq 1 \quad (2.4 - 36)$$

όπου

$$f_m(t) = y(t) - \sum_{k=1}^{m-1} a_{mk}y(t-k) \quad (2.4 - 37)$$

$$b_m(t) = y(t-m) - \sum_{k=1}^{m-1} a_{mk}y(t-m+k) \quad (2.4 - 38)$$

Πιο λεπτομερώς, η $f_m(t)$ στην (2.4 – 37) αναπαριστά το σφάλμα ενός πρόσθιου προβλεπτή m – οστής τάξης, ενώ το $b_m(t)$ αναπαριστά το σφάλμα ενός οπίσθιου προβλεπτή m σ– οστής τάξης.

Η σχέση στην (2.4 – 36) είναι η μία από τις δύο που καθορίζουν ένα φίλτρο πλέγματος. Η δεύτερη σχέση λαμβάνεται από την $G_m(z)$ ως ακολούθως:

$$G_m(z) = z^{-m}A_m(z^{-1})$$

$$\begin{aligned}
&= z^{-m} \left[A_{m-1}(z^{-1}) - a_{mm} z^m A_{m-1}(z) \right] \\
&= z^{-1} G_{m-1}(z) - a_{mm} A_{m-1}(z) \quad (2.4 - 39)
\end{aligned}$$

Τώρα, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο σκέλη της (2.4 - 39) με τη $Y(z)$ και εκφράσουμε το αποτέλεσμα ως προς τις $F_m(z)$ και $B_m(z)$ χρησιμοποιώντας τους ορισμούς στην (2.4 - 34), παίρνουμε

$$B_m(z) = z^{-1} B_{m-1}(z) - a_{mm} F_{m-1}(z) \quad (2.4 - 40)$$

Μετασχηματίζοντας την (2.4 - 40) στο πεδίο του χρόνου, λαμβάνουμε τη δεύτερη σχέση που αντιστοιχεί στο φίλτρο πλέγματος, δηλαδή

$$b_m(t) = b_{m-1}(t-1) - a_{mm} f_{m-1}(t), \quad m \geq 1 \quad (2.4 - 41)$$

Η αρχική συνθήκη είναι

$$f_0(t) = b_0(t) = y(t) \quad (2.4 - 42)$$

Το φίλτρο πλέγματος που περιγράφεται από τις αναδρομικές σχέσεις στην (2.4 - 36) και (2.4 - 41) φαίνεται στο Σχ.2.4 - 2. Κάθε στάδιο χαρακτηρίζεται από το δικό του πολλαπλασιαστικό παράγοντα a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, m$, ο οποίος ορίζεται στον αλγόριθμο Levinson - Durbin. Τα εμπρόσθια και οπίσθια σφάλματα $f_m(t)$ και $b_m(t)$ συνήθως ονομάζονται **παραμένοντα (residuals)**. Η μέση τετραγωνική τιμή των παραμενόντων αυτών σφαλμάτων είναι

$$\mathcal{E}_m = E[f_m^2(t)] = E[b_m^2(t)] \quad (2.4 - 43)$$

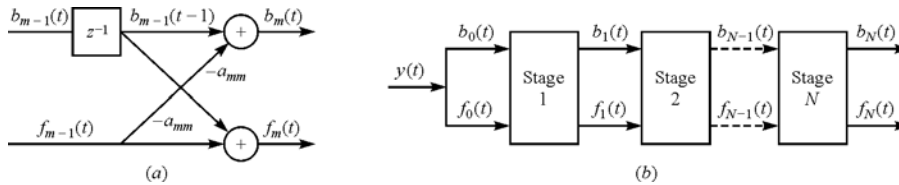
Η \mathcal{E}_m δίνεται αναδρομικά, όπως φαίνεται στον αλγόριθμο Levinson - Durbin, από την

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_{m-1} (1 - a_{mm}^2) \\
&= \mathcal{E}_0 \prod_{i=1}^m (1 - a_{ii}^2) \quad (2.4 - 44)
\end{aligned}$$

όπου $\mathcal{E}_0 = \phi(0)$.

Τα παραμένοντα σφάλματα $\{f_m(t)\}$ και $\{b_m(t)\}$ ικανοποιούν έναν αριθμό από ενδιαφέροντες ιδιότητες, όπως περιγράφηκε από τον Makhoul (1978). Οι πιο σημαντικές από αυτές είναι οι ιδιότητες ορθογωνικότητας

$$\begin{aligned}
E[b_m(t) b_n(t)] &= \mathcal{E}_m \delta_{mn} \\
E[f_m(t+m) f_n(t+n)] &= \mathcal{E}_m \delta_{mn} \quad (2.4 - 45)
\end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 2.4 – 2 Φίλτρο πλέγματος.

Επιπλέον, η συσχέτιση μεταξύ των $f_m(t)$ και $b_n(t)$ είναι

$$E[f_m(t)b_n(t)] = \begin{cases} a_{mm}\mathcal{E}_m & (m \geq n) \\ 0 & (m < n) \end{cases} \quad m, n \geq 0 \quad (2.4 - 46)$$

Ως συνέπεια των ιδιοτήτων ορθογωνικότητας των παραμένων σφαλμάτων, οι διαφορετικοί τομείς του πλέγματος παρουσιάζουν μια μορφή ανεξαρτησίας που μας επιτρέπει να προσθέσουμε ή να διαγράψουμε ένα ή περισσότερα από τα τελευταία στάδια χωρίς να επηρεάσουμε τις παραμέτρους των υπόλοιπων σταδίων. Αφού το μέσο τετραγωνικό παραμένων σφάλμα \mathcal{E}_m μειώνεται εκθετικά με τον αριθμό των τμημάτων, το \mathcal{E}_m μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας δείκτης απόδοσης στον καθορισμό του πού πρέπει να τερματίσει το πλέγμα.

Από την παραπάνω συζήτηση, παρατηρούμε ότι ένα γραμμικό φίλτρο πρόβλεψης μπορεί να υλοποιηθεί είτε ως ένα γραμμικό εγκάρσιο φίλτρο είτε ως ένα φίλτρο πλέγματος. Το φίλτρο πλέγματος είναι αναδρομικής τάξης, και, ως συνέπεια, ο αριθμός των τομέων που περιέχει μπορεί εύκολα να αυξηθεί ή να μειωθεί χωρίς να επηρεαστούν οι παράμετροι των υπόλοιπων τομέων. Αντίθετα, οι συντελεστές ενός εγκάρσιου φίλτρου που λαμβάνονται με βάση το κριτήριο RLS είναι αλληλοεξαρτώμενοι. Αυτό σημαίνει πως μια αύξηση ή μια μείωση στο μέγεθος του φίλτρου προκαλεί αλλαγή όλων των συντελεστών. Συνεπώς, ο αλγόριθμος Kalman που περιγράφηκε στην Ενότητα 2.4 – 1 είναι αναδρομικός στο χρόνο αλλά όχι στην τάξη.

Βασισμένοι στην βελτιστοποίηση ελάχιστων τετραγώνων, έχουν αναπτυχθεί RLS αλγόριθμοι πλέγματος των οποίων η υπολογιστική πολυπλοκότητα αυξάνει γραμμικά με το πλήθος N των συντελεστών του φίλτρου (στάδια του πλέγματος). Για αυτό το λόγο, η δομή του ισοσταθμιστή πλέγματος είναι υπολογιστικά ανταγωνιστική με τους γρήγορους RLS αλγόριθμους απευθείας μορφής για ισοσταθμιστές. Οι RLS αλγόριθμοι πλέγματος περιγράφονται στις δημοσιεύσεις των Morf κ.ά. (1973), Satorius και Alexander (1979), Satorius και Pack (1981), Ling και Proakis (1981), και Ling κ.ά. (1986).

Οι RLS αλγόριθμοι πλέγματος έχουν το ξεχωριστό χαρακτηριστικό να είναι αριθμητικά εύρωστοι στο σφάλμα στρογγυλοποίησης που ενυπάρχει στις ψηφιακές υλοποιήσεις του αλγόριθμου. Μια πραγματέυση των αριθμητικών ιδιοτήτων τους μπορεί να βρεθεί στις δημοσιεύσεις του Ling κ.ά. (1984, 1986).

2.5 ΑΥΤΟΑΝΑΚΤΟΜΕΝΗ (ΤΥΦΛΗ) ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΣΗ

Στους συμβατικούς ισοσταθμιστές μηδενικού εξαναγκασμού ή ελάχιστου MSE, υποθέσαμε ότι εκπέμπεται στο δέκτη μια γνωστή ακολουθία εκμάθησης για την αρχική ρύθμιση των συντελεστών του ισοσταθμιστή. Ωστόσο, είναι κάποιες

εφαρμογές, όπως τα επικοινωνιακά δίκτυα πολλαπλών σημείων, όπου είναι επιθυμητό για το δέκτη να συγχρονίζεται με το λαμβανόμενο σήμα και να ρυθμίζει τον ισοσταθμιστή χωρίς να έχει διαθέσιμη μια γνωστή δοκιμαστική ακολουθία. Οι τεχνικές ισοστάθμισης που βασίζονται στην αρχική ρύθμιση των συντελεστών χωρίς το πλεονέκτημα μιας ακολουθίας εκμάθησης ονομάζονται **αυτοανακτώμενες (self – recovering)** ή **τυφλές (blind)**.

Ξεκινώντας με τη δημοσίευση του Sato (1975), τρεις διαφορετικές κλάσεις προσαρμοστικών τυφλών αλγόριθμων ισοστάθμισης έχουν αναπτυχθεί τις τελευταίες δύο δεκαετίες. Μια κατηγορία βασίζεται στην **υπεραπότομη κατάβαση (steepest descent)** για την προσαρμογή του ισοσταθμιστή. Μια δεύτερη κατηγορία αλγόριθμων βασίζεται στη χρήση δεύτερης και πάνω τάξης (συνήθως, τέταρτης τάξης) στατιστικών του λαμβανόμενου σήματος για να εκτιμήσει τα χαρακτηριστικά του καναλιού και να σχεδιάσει τον ισοσταθμιστή. Πιο πρόσφατα, έχει ερευνηθεί μια τρίτη κατηγορία αλγόριθμων τυφλής ισοστάθμισης βασισμένων στο κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας. Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε εν συντομία αυτές τις προσεγγίσεις και δίνουμε αρκετές συγγενείς αναφορές στη βιβλιογραφία.

2.5.1 Τυφλή Εξίσωση Βασισμένη Στο Κριτήριο Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε το ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου του καναλιού που περιγράφηκε στην Ενότητα 1.1.2. Ανακαλέστε ότι η έξοδος αυτού του μοντέλου του καναλιού με ISI είναι

$$v_n = \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} + n_n \quad (2.5-1)$$

όπου $\{f_k\}$ είναι οι συντελεστές του ισοδύναμου καναλιού διακριτού χρόνου, το $\{I_n\}$ αναπαριστά την πληροφοριακή ακολουθία, και η $\{n_n\}$ είναι μια ακολουθία λευκού Γκαουσιανού θορύβου.

Για ένα μπλοκ N λαμβανόμενων σημείων δεδομένων, η (από κοινού) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του διανύσματος των λαμβανόμενων δεδομένων $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^t$ βασισμένη στη γνώση του διανύσματος κρουστικής απόκρισης $\mathbf{f} = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_L]^t$ και του διανύσματος των δεδομένων $\mathbf{I} = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_N]^t$ είναι

$$p(\mathbf{v} | \mathbf{f}, \mathbf{I}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N \left| v_n - \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} \right|^2 \right) \quad (2.5-2)$$

Οι από κοινού εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας των \mathbf{f} και \mathbf{I} είναι οι τιμές αυτών των διανυσμάτων που μεγιστοποιούν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(\mathbf{v} | \mathbf{f}, \mathbf{I})$ ή, ισοδύναμα, οι τιμές των \mathbf{f} και \mathbf{I} που ελαχιστοποιούν τον εκθετικό όρο. Για αυτό το λόγο, η ML λύση είναι απλά το ελάχιστο των \mathbf{f} και \mathbf{I} από τη μετρική

$$\begin{aligned}
DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}) &= \sum_{n=1}^N \left| v_n - \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} \right|^2 \\
&= \|\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|^2
\end{aligned} \tag{2.5-3}$$

όπου ο πίνακας \mathbf{A} ονομάζεται **πίνακας δεδομένων (data matrix)** και ορίζεται ως

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_2 & I_1 & 0 & \dots & 0 \\ I_3 & I_2 & I_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_N & I_{N-1} & I_{N-2} & \dots & I_{N-L} \end{bmatrix} \tag{2.5-4}$$

Κάνουμε αρκετές παρατηρήσεις. Πρώτα από όλα, παρατηρούμε πως όταν το διάνυσμα των δεδομένων \mathbf{I} (ή ο πίνακας δεδομένων \mathbf{A}) είναι γνωστό, όπως στην περίπτωση που είναι διαθέσιμη στο δέκτη μια δοκιμαστική ακολουθία, η ML εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης του καναλιού που λαμβάνεται ελαχιστοποιώντας την (2.5-3) για το \mathbf{f} είναι

$$\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}) = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{v} \tag{2.5-5}$$

Από την άλλη μεριά, όταν η κρουστική απόκριση του καναλιού \mathbf{f} είναι γνωστή, ο βέλτιστος ML ανιχνευτής για την ακολουθία δεδομένων \mathbf{I} εκτελεί μια αναζήτηση trellis (ή αναζήτηση δένδρου) χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Viterbi για το κανάλι με ISI.

Όταν ούτε το \mathbf{I} ούτε το \mathbf{f} είναι γνωστά, η ελαχιστοποίηση του δείκτη απόδοσης $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ μπορεί να εκτελεστεί από κοινού πάνω στα \mathbf{I} και \mathbf{f} . Εναλλακτικά, το \mathbf{f} μπορεί να εκτιμηθεί από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(\mathbf{v}|\mathbf{f})$, η οποία μπορεί να ληφθεί παίρνοντας το μέσο όρο της $p(\mathbf{v}, \mathbf{f}|\mathbf{I})$ για όλες τις δυνατές ακολουθίες δεδομένων. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{v}|\mathbf{f}) &= \sum_m p(\mathbf{v}, \mathbf{I}^{(m)}|\mathbf{f}) \\
&= \sum_m p(\mathbf{v}|\mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f})
\end{aligned} \tag{2.5-6}$$

όπου $P(\mathbf{I}^{(m)})$ είναι η πιθανότητα της ακολουθίας $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{(m)}$, για $m = 1, 2, \dots, M^N$ και M είναι το μέγεθος του του σήματος (constellation size).

Εκτίμηση του Καναλιού Βασισμένη στο Μέσο Όρο των Ακολουθιών Δεδομένων Όπως δείχθηκε στην παραπάνω συζήτηση, όταν είναι άγνωστα και το

\mathbf{I} και το \mathbf{f} , μια προσέγγιση είναι να εκτιμήσουμε την κρουστική απόκριση \mathbf{f} αφού πάρουμε το μέσο όρο της πυκνότητας πιθανότητας $p(\mathbf{v}, \mathbf{I} | \mathbf{f})$ για όλες τις δυνατές ακολουθίες δεδομένων. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} p(\mathbf{v} | \mathbf{f}) &= \sum_m p(\mathbf{v} | \mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}) P(\mathbf{I}^{(m)}) \\ &= \sum_m \left[\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)}\mathbf{f}\|^2}{2\sigma^2}\right) \right] P(\mathbf{I}^{(m)}) \end{aligned} \quad (2.5 - 7)$$

Τότε, η εκτίμηση του \mathbf{f} που μεγιστοποιεί το $p(\mathbf{v} | \mathbf{f})$ είναι η λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\mathbf{v} | \mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} &= \sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) \\ (\mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f} - \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{v}) \exp\left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)}\mathbf{f}\|^2}{2\sigma^2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5 - 8)$$

Για αυτό το λόγο, η εκτίμηση του \mathbf{f} μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \left[\sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{A}^{(m)} g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f}) \right]^{-1} \\ &\quad \times \sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f}) \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.5 - 9)$$

όπου η συνάρτηση $g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f})$ ορίζεται ως

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)}\mathbf{f}\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.5 - 10)$$

Η προκύπτουσα λύση για το βέλτιστο \mathbf{f} συμβολίζεται \mathbf{f}_{ML} .

Η εξίσωση (2.5 - 9) είναι μια μη γραμμική ισοστάθμιση για την εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης του καναλιού, δοθέντος του διανύσματος του λαμβανόμενου σήματος \mathbf{v} . Είναι γενικά δύσκολο να λάβουμε τη βέλτιστη λύση λύνοντας την (2.5 - 9) απευθείας. Από την άλλη μεριά, είναι σχετικά απλό να καταστρώσουμε μια αριθμητική μέθοδο που να δίνει τη λύση για το \mathbf{f}_{ML} αναδρομικά. Συγκεκριμένα, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \left[\sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f}^{(k)}) \right]^{-1} \times \sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f}^{(k)}) \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{v} \quad (2.5 - 11)$$

Μόλις ληφθεί το \mathbf{f}_{ML} από τη λύση της (2.5 – 9) ή της (2.5 – 11), μπορούμε απλά να χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση στην ελαχιστοποίηση της μετρικής $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML})$, που δίνεται από την (2.5 – 3), για όλες τις δυνατές ακολουθίες δεδομένων. Έτσι, \mathbf{I}_{ML} είναι η ακολουθία \mathbf{I} που ελαχιστοποιεί την $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML})$. Με άλλα λόγια,

$$\min_{\mathbf{I}} DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML}) = \min_{\mathbf{I}} \|\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{f}_{ML}\|^2 \quad (2.5 - 12)$$

Γνωρίζουμε ότι ο αλγόριθμος Viterbi είναι ο υπολογιστικά αποδοτικός αλγόριθμος για να εκτελέσουμε την ελαχιστοποίηση στην $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML})$ για το \mathbf{I} .

Αυτός ο αλγόριθμος έχει δύο σοβαρά μειονεκτήματα. Πρώτον, η αναδρομική σχέση για το \mathbf{f}_{ML} που δίνεται στην (2.5 – 11) είναι εντατική υπολογιστικά. Δεύτερον, και, ίσως, πιο σημαντικό, η εκτίμηση \mathbf{f}_{ML} δεν είναι τόσο καλή όσο η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας $\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I})$ που λαμβάνεται όταν η ακολουθία \mathbf{I} είναι γνωστή. Συνεπώς, η απόδοση του ρυθμού σφαλμάτων του τυφλού ισοσταθμιστή (ο αλγόριθμος Viterbi) που βασίζεται στην εκτίμηση \mathbf{f}_{ML} είναι φτωχότερη από αυτή που βασίζεται στην $\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I})$. Στη συνέχεια, μελετάμε το από κοινού κανάλι και την εκτίμηση δεδομένων.

Από Κοινού Εκτίμηση Καναλιού και Δεδομένων Εδώ, μελετάμε την από κοινού βελτιστοποίηση του δείκτη απόδοσης $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ που δίνεται από την (2.5 – 3). Αφού τα στοιχεία του διανύσματος κρουστικής απόκρισης \mathbf{f} είναι συνεχή και τα στοιχεία του διανύσματος δεδομένων \mathbf{I} είναι διακριτά, μια προσέγγιση είναι να καθορίσουμε την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας του \mathbf{f} για κάθε δυνατή ακολουθία δεδομένων και, έπειτα, να επιλέξουμε την ακολουθία δεδομένων που ελαχιστοποιεί το $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ για κάθε αντίστοιχη εκτίμηση του καναλιού. Έτσι, η εκτίμηση του καναλιού που αντιστοιχεί στη m - οστή ακολουθία δεδομένων $\mathbf{I}^{(m)}$ είναι

$$\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)}) = \left(\mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{A}^{(m)} \right)^{-1} \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{v} \quad (2.5 - 13)$$

Για τη m - οστή ακολουθία δεδομένων, η μετρική $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ γίνεται

$$DM(\mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)})) = \left\| \mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)}) \right\|^2 \quad (2.5 - 14)$$

Τότε, από το σύνολο των M^N δυνατών ακολουθιών, επιλέγουμε την ακολουθία δεδομένων που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους στην (2.5 – 14). Με άλλα λόγια, προσδιορίζουμε

$$\min_{\mathbf{I}^{(m)}} DM\left(\mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}_{ML}\left(\mathbf{I}^{(m)}\right)\right) \quad (2.5 - 15)$$

Η προσέγγιση που περιγράφηκε παραπάνω είναι μια εξαντλητική υπολογιστικά μέθοδος αναζήτησης με μια υπολογιστική δυσκολία που μεγαλώνει εκθετικά με το μήκος του μπλοκ δεδομένων. Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $N = L$, και, έτσι, θα είχαμε μια εκτίμηση καναλιού για κάθε μία από τις M^L εναπομείναντες ακολουθίες. Από εκεί και μετά, μπορούμε να συνεχίσουμε να διατηρούμε μια ξεχωριστή εκτίμηση καναλιού για κάθε εναπομείναντα διαδρομή της αναζήτησης του αλγόριθμου Viterbi μέσω του trellis.

Μια παρόμοια προσέγγιση έχει προταθεί από τον Seshadri (1991). Στην ουσία, ο αλγόριθμος του Seshadri είναι ένα είδος του γενικευμένου αλγόριθμου Viterbi (Generalized Viterbi Algorithm) που διατηρεί τις $K \geq 1$ καλύτερες εκτιμήσεις της εκπεμπόμενης ακολουθίας δεδομένων σε κάθε κατάσταση του trellis και τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του καναλιού. Στον GVA του Seshadri, η αναζήτηση είναι ταυτόσημη με του συμβατικού VA από την αρχή μέχρι το L στάδιο του trellis, με άλλα λόγια μέχρι το σημείο όπου η λαμβανόμενη ακολουθία (v_1, v_2, \dots, v_L) έχει επεξεργαστεί. Για αυτό το λόγο, εκτελείται μια εξαντλητική αναζήτηση μέχρι το στάδιο L . Σχετιζόμενοι με κάθε ακολουθία δεδομένων $\mathbf{I}^{(m)}$, είναι η αντίστοιχη εκτίμηση του καναλιού $\mathbf{f}_{ML}\left(\mathbf{I}^{(m)}\right)$. Από αυτό το στάδιο, η αναζήτηση τροποποιείται, να διατηρεί τις $K \geq 1$ παραμένουσες ακολουθίες και τις σχετιζόμενες εκτιμήσεις του καναλιού ανά στάδιο αντί για μόνο μια ακολουθία ανά στάδιο. Έτσι, ο GVA χρησιμοποιείται για την επεξεργασία της λαμβανόμενης ακολουθίας $\{v_n, n \geq L+1\}$. Η εκτίμηση του καναλιού ενημερώνεται αναδρομικά σε κάθε στάδιο χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο LMS για επιπλέον μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Τα αποτελέσματα της εξομοίωσης που δίνονται στη δημοσίευση από τον Seshadri (1991) δείχνουν ότι αυτός ο GVA τυφλός αλγόριθμος ισοστάθμισης λειτουργεί αρκετά καλά σε μέτριους σηματοθορυβικούς λόγους με $K = 4$. Για αυτό το λόγο, υπάρχει μια μικρή αύξηση στην υπολογιστική πολυπλοκότητα του GVA εν συγκρίσει με το συμβατικό VA. Όμως, υπάρχουν πρόσθετοι υπολογισμοί που εμπλέκονται με την εκτίμηση και την ενημέρωση των εκτιμήσεων του καναλιού $\mathbf{f}\left(\mathbf{I}^{(m)}\right)$ που σχετίζονται με κάθε μια από τις εκτιμήσεις των παραμενόντων δεδομένων.

Ένας εναλλακτικός αλγόριθμος από κοινού εκτίμησης που αποφεύγει τον υπολογισμό των ελάχιστων τετραγώνων για την εκτίμηση του καναλιού έχει επινοηθεί από τον Ζέρβα κ.ά. (1991). Σε αυτόν τον αλγόριθμο, η σειρά για να εκτελεστεί η από κοινού ελαχιστοποίηση του δείκτη απόδοσης $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ είναι ανεστραμμένη. Δηλαδή, μια κρουστική απόκριση του καναλιού, ας πούμε η $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ επιλέγεται και έπειτα χρησιμοποιείται ο συμβατικός VA για να βρούμε τη βέλτιστη ακολουθία για αυτή την κρουστική απόκριση του καναλιού. Ύστερα, μπορούμε να

τροποποιήσουμε με κάποιο τρόπο την $\mathbf{f}^{(1)}$ στην $\mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{f}^{(1)} + \Delta\mathbf{f}^{(1)}$ και να επαναλάβουμε τη βελτιστοποίηση για όλες τις ακολουθίες δεδομένων $\{\mathbf{I}^{(m)}\}$.

Βασισμένοι σε αυτή τη γενική προσέγγιση, ο Ζέρβας ανέπτυξε ένα νέο ML αλγόριθμο τυφλής ισοστάθμισης, ο οποίος ονομάζεται **αλγόριθμος κβαντισμένου καναλιού (quantized – channel algorithm)**. Ο αλγόριθμος λειτουργεί σε ένα πλέγμα στο χώρο του καναλιού, το οποίο γίνεται καλύτερο και καλύτερο χρησιμοποιώντας το ML κριτήριο για να περιορίσει το εκτιμημένο κανάλι στη γειτονιά του αυθεντικού άγνωστου καναλιού. Αυτός ο αλγόριθμος οδηγεί σε μια αποδοτική παράλληλη υλοποίηση, και οι αποθηκευτικές του απαιτήσεις είναι μόνο αυτές του VA.

2.5.2 Στοχαστικός Αλγόριθμος Κλίσης

Μια άλλη κατηγορία αλγορίθμων τυφλής ισοστάθμισης είναι τα στοχαστικά επαναληπτικά σχήματα κλίσης ισοστάθμισης που εφαρμόζουν μια μη γραμμικότητα χωρίς μνήμη στην έξοδο ενός γραμμικού FIR φίλτρου ισοστάθμισης για να γεννήσουν την “επιθυμητή απόκριση” σε κάθε επανάληψη.

Ας αρχίσουμε με μια αρχική εικασία των συντελεστών του βέλτιστου ισοσταθμιστή, που συμβολίζονται με $\{c_n\}$. Τότε, η συνέλιξη της απόκρισης του καναλιού με την απόκριση του ισοσταθμιστή μπορεί να εκφραστεί ως

$$\{c_n\} \star \{f_n\} = \{\delta_n\} + \{e_n\} \quad (2.5 - 16)$$

όπου $\{\delta_n\}$ είναι η ακολουθία μοναδιαίου δείγματος και το $\{e_n\}$ συμβολίζει την ακολουθία σφάλματος που προκύπτει από την αρχική μας εικασία των συντελεστών του ισοσταθμιστή. Αν πάρουμε τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης του ισοσταθμιστή με τη λαμβανόμενη ακολουθία $\{v_n\}$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \{\hat{I}_n\} &= \{v_n\} \star \{c_n\} \\ &= \{I_n\} \star \{f_n\} \star \{c_n\} + \{n_n\} \star \{c_n\} \\ &= \{I_n\} \star (\{\delta_n\} + \{e_n\}) + \{n_n\} \star \{c_n\} \\ &= \{I_n\} + \{I_n\} \star \{e_n\} + \{n_n\} \star \{c_n\} \end{aligned} \quad (2.5 - 17)$$

Ο όρος $\{I_n\}$ στην (2.5 – 17) αναπαριστά την επιθυμητή ακολουθία δεδομένων, ο όρος $\{I_n\} \star \{e_n\}$ αναπαριστά την παραμένουσα ISI, και ο όρος $\{n_n\} \star \{c_n\}$ αναπαριστά το προσθετικό θόρυβο. Το πρόβλημά μας είναι να χρησιμοποιήσουμε την αποσυγκερασμένη (deconvolved) ακολουθία $\{\hat{I}_n\}$ για να βρούμε την καλύτερη εκτίμηση μιας επιθυμητής απόκρισης, που συμβολίζεται γενικά με $\{d_n\}$. Στην περίπτωση προσαρμοστικής ισοστάθμισης που χρησιμοποιεί μια ακολουθία εκμάθησης, $\{d_n\} = \{I_n\}$. Σε ένα τρόπο λειτουργίας τυφλής ισοστάθμισης, θα πρέπει να γεννήσουμε μια επιθυμητή απόκριση από την $\{\hat{I}_n\}$.

Το κριτήριο μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσουμε την “καλύτερη” εκτίμηση του $\{I_n\}$ από την παρατηρούμενη έξοδο του ισοσταθμιστή $\{\hat{I}_n\}$. Αφού η εκπεμπόμενη ακολουθία $\{I_n\}$ έχει μια μη γκαουσιανή pdf, η εκτίμηση του MSE είναι ένας μη γραμμικός μετασχηματισμός του $\{\hat{I}_n\}$. Γενικά, η “καλύτερη” εκτίμηση $\{d_n\}$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} d_n &= g(\hat{I}_n) \quad (\text{χωρίς μνήμη}) \\ d_n &= g(\hat{I}_n, \hat{I}_{n-1}, \dots, \hat{I}_{n-m}) \quad (\text{μνήμη } m \text{ - οστής τάξης}) \end{aligned} \quad (2.5 - 18)$$

όπου $g(\cdot)$ είναι μια μη γραμμική συνάρτηση. Η ακολουθία $\{d_n\}$ χρησιμοποιείται τότε για να γεννήσει ένα σήμα σφάλματος, το οποίο ανατροφοδοτείται στο φίλτρο προσαρμοστικής ισοστάθμισης, όπως φαίνεται στο Σχ.2.5 – 1.

Ένα ευρέως γνωστό κλασσικό πρόβλημα εκτίμησης είναι το ακόλουθο. Αν η έξοδος του ισοσταθμιστή \hat{I}_n εκφράζεται ως

$$\hat{I}_n = I_n + \tilde{n}_n \quad (2.5 - 19)$$

όπου ο \tilde{n}_n υποθέτουμε ότι είναι γκαουσιανός μηδενικής μέσης τιμής (το κεντρικό οριακό θεώρημα μπορεί να επικαλεστεί εδώ για την παραμένουσα ISI και τον προσθετικό θόρυβο), τα $\{I_n\}$ και $\{\tilde{n}_n\}$ είναι στατιστικά ανεξάρτητα, και οι $\{I_n\}$ είναι στατιστικά ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, τότε η MSE εκτίμηση των $\{I_n\}$ είναι

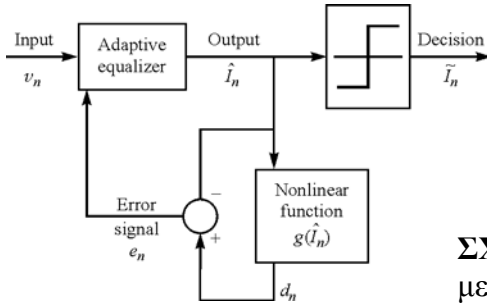
$$d_n = E(I_n | \tilde{I}_n) \quad (2.5 - 20)$$

η οποία είναι μια μη γραμμική συνάρτηση της εξόδου του ισοσταθμιστή όταν οι $\{I_n\}$ δεν είναι Γκαουσιανές.

Ο Πίνακας 2.5 – 1 δείχνει τη γενική μορφή των υπάρχων αλγόριθμων τυφλής ισοστάθμισης που βασίζονται στην LMS προσαρμογή. Παρατηρούμε ότι η βασική διαφορά ανάμεσα σε αυτούς τους αλγόριθμους έγκειται στην επιλογή της μη γραμμικότητας χωρίς μνήμη. Ο πιο συχνά χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος στην πράξη είναι ο αλγόριθμος του Godard, ο οποίος μερικές φορές αναφέρεται ως **αλγόριθμος σταθερού μέτρου (Constant – Modulus Algorithm, CMA)**.

Είναι φανερό από τον Πίνακα 2.5 – 1 ότι η ακολουθία εξόδου $\{d_n\}$ η οποία λαμβάνεται παίρνοντας μια μη γραμμική συνάρτηση της εξόδου του ισοσταθμιστή, παίζει το ρόλο της επιθυμητής απόκρισης ή της ακολουθίας εκμάθησης. Είναι επίσης φανερό ότι αυτοί οι αλγόριθμοι είναι απλοί στην υλοποίηση, αφού είναι βασικά αλγόριθμοι LMS τύπου. Έτσι, περιμένουμε τα χαρακτηριστικά σύγκλισης αυτών των αλγόριθμων να εξαρτώνται από τον πίνακα αυτοσυσχέτισης των λαμβανόμενων δεδομένων $\{v_n\}$.

Ως προς τη σύγκλιση, οι προσαρμοστικοί αλγόριθμοι LMS τύπου συγκλίνουν στο μέσο όταν



ΣΧΗΜΑ 2.5 – 1 Προσαρμοστική τυφλή ισοστάθμιση με αλγόριθμους στοχαστικής κλίσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.5 – 1 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΛΙΣΗΣ ΓΙΑ ΤΥΦΛΗ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΣΗ

Equalizer tap coefficients	$\{c_n, 0 \leq n \leq N - 1\}$
Received signal sequence	$\{v_n\}$
Equalizer output sequence	$\{\hat{I}_n\} = \{v_n\} \star \{c_n\}$
Equalizer error sequence	$\{e_n\} = g(\hat{I}_n) - \hat{I}_n$
Tap coefficient update equation	$\mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{c}_n + \Delta \mathbf{v}_n^* e_n$

Algorithm	Nonlinearity: $g(\hat{I}_n)$
Godard	$\frac{\hat{I}_n}{ \hat{I}_n } (\hat{I}_n + R_2 \hat{I}_n - \hat{I}_n ^3), R_2 = \frac{E\{ \hat{I}_n ^4\}}{E\{ \hat{I}_n ^2\}}$
Sato	$\zeta \text{csgn}(\hat{I}_n), \zeta = \frac{E\{[\text{Re}(\hat{I}_n)]^2\}}{E\{ \hat{I}_n \}}$
Benveniste–Goursat	$\hat{I}_n + k_1(\hat{I}_n - \bar{I}_n) + k_2[\hat{I}_n - \bar{I}_n] [\zeta \text{csgn}(\hat{I}_n) - \bar{I}_n], k_1 \text{ and } k_2 \text{ are positive constants}$
Stop-and-Go	$\hat{I}_n + \frac{1}{2}A(\hat{I}_n - \bar{I}_n) + \frac{1}{2}B(\hat{I}_n - \bar{I}_n)^*$ (A, B) = (2, 0), (1, 1), (1, -1), or (0, 0), depending on the signs of decision-directed error $\hat{I}_n - \bar{I}_n$ and the error $\zeta \text{csgn}(\hat{I}_n) - \bar{I}_n$

$$E[v_n g^*(\hat{I}_n)] = E[v_n \hat{I}_n^*] \quad (2.5 - 21)$$

και, υπό την έννοια του μέσου τετραγώνου, όταν (π δείκτης H δηλώνει συζυγή αναστροφή)

$$E[C_n^H v_n g^*(\hat{I}_n)] = E[C_n^H v_n \hat{I}_n^*] \quad (2.5 - 22)$$

$$E[\hat{I}_n g^*(\hat{I}_n)] = E[|\hat{I}_n|^2]$$

Επομένως, απαιτείται η έξοδος του ισοσταθμιστή $\{\hat{I}_n\}$ να ικανοποιεί την (2.5 – 22). Παρατηρήστε ότι η (2.5 – 22) δηλώνει ότι η αυτοσυσχέτιση της $\{\hat{I}_n\}$ (το δεξί σκέλος) ισούται με τη διασυσχέτιση ανέμεσα στη \hat{I}_n και σε ένα μη γραμμικό

μετασχηματισμό του \hat{I}_n (αριστερό σκέλος). Οι διαδικασίες που ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα ονομάστηκαν Busggang (1952) από τον Bellini (1986). Περιληπτικά, οι αλγόριθμοι που δίνονται στον Πίνακα 2.5 – 1 συγκλίνουν όταν η ακολουθία εξόδου του ισοσταθμιστή \hat{I}_n ικανοποιεί την ιδιότητα Busggang.

Ο βασικός περιορισμός των στοχαστικών αλγόριθμων κλίσης είναι η σχετικά αργή τους σύγκλιση. Κάποια βελτίωση στο ρυθμό σύγκλισης μπορεί να επιτευχθεί τροποποιώντας τους αλγόριθμους προσαρμογής από τύπου LMS σε τύπου RLS.

Αλγόριθμος Godard Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ο αλγόριθμος τυφλής ισοστάθμισης Godard είναι ένας αλγόριθμος υπεραπότομης κατάβασης ο οποίος χρησιμοποιείται ευρέως στην πράξη όταν δεν είναι διαθέσιμη μια ακολουθία εκμάθησης. Ας περιγράψουμε τον αλγόριθμο με μεγαλύτερη λεπτομέρεια.

Ο Godard μελέτησε το πρόβλημα της συνδυασμένης ισοστάθμισης και ανάκτησης και ιχνηλάτησης φέρουσας. Η ιχνηλάτηση της φάσης της φέρουσας εκτελείται στη βασική ζώνη, μετά τον ισοσταθμιστή, όπως φαίνεται στο Σχ.2.5 – 2. Βασισμένοι σε αυτή τη δομή, μπορούμε να εκφράσουμε την έξοδο του ισοσταθμιστή ως

$$\hat{I}_k = \sum_{n=-K}^K c_n v_{k-n} \quad (2.5 - 23)$$

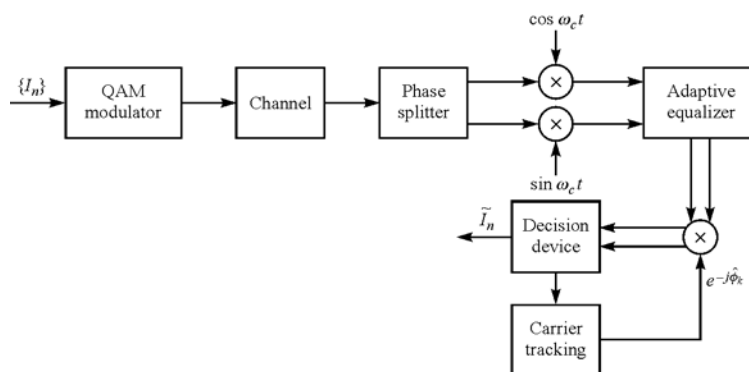
Και την είσοδο στη συσκευή απόφασης ως $\hat{I}_k \exp(-j\hat{\phi}_k)$, όπου $\hat{\phi}_k$ είναι η εκτίμηση της φάσης της φέρουσας στο k -οστό διάστημα σηματοδοσίας.

Αν το επιθυμητό σύμβολο ήταν γνωστό, θα μπορούσαμε να μορφοποιήσουμε το σήμα σφάλματος

$$\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k e^{-j\hat{\phi}_k} \quad (2.5 - 24)$$

και να ελαχιστοποιήσουμε το MSE ως προς τα $\hat{\phi}_k$ και $\{c_n\}$. Με άλλα λόγια,

$$\min_{\hat{\phi}_k, \mathbf{C}} E \left(\left| I_k - \hat{I}_k e^{-j\hat{\phi}_k} \right|^2 \right) \quad (2.5 - 25)$$



ΣΧΗΜΑ 2.5 – 2 Σχήμα του Godard για συνδυασμένη προσαρμοστική (τυφλή) ισοστάθμιση και ιχνηλάτηση φέρουσας φάσης.

Αυτό το κριτήριο μας οδηγεί στη χρήση του LMS αλγόριθμου για αναδρομική εκτίμηση των \mathbf{C} και ϕ_k . Ο LMS αλγόριθμος ο οποίος βασίζεται στη γνώση της εκπεμπόμενης ακολουθίας είναι

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta_c \left(I_k - \hat{I}_k e^{-j\hat{\phi}_k} \right) \mathbf{V}_k^* e^{j\hat{\phi}_k} \quad (2.5 - 26)$$

$$\hat{\phi}_{k+1} = \hat{\phi}_k + \Delta_\phi \operatorname{Im} \left(I_k \hat{I}_k^* e^{j\hat{\phi}_k} \right) \quad (2.5 - 27)$$

όπου Δ_f και Δ_c τα μεγέθη βήματος για τις δύο αναδρομικές εξισώσεις. Παρατηρήστε ότι οι δύο αυτές αναδρομικές εξισώσεις είναι συζευγμένες. Δυστυχώς, γενικά, αυτές οι εξισώσεις δε συγκλίνουν, όταν η επιθυμητή ακολουθία συμβόλων $\{I_k\}$ είναι άγνωστη.

Η προσέγγιση η οποία προτάθηκε από τον Godard είναι η χρήση ενός κριτηρίου το οποίο εξαρτάται από την ποσότητα της διασυμβολικής παρεμβολής στην έξοδο του ισοσταθμιστή αλλά είναι ανεξάρτητο από το QAM διάγραμμα και τη φάση της φέρουσας. Για παράδειγμα, μια συνάρτηση κόστους που είναι ανεξάρτητη της φάσης της φέρουσας και έχει την ιδιότητα ότι το ελάχιστό της οδηγεί σε μικρό MSE

$$G^{(p)} = E \left(\left| \hat{I}_k \right|^p - \left| I_k \right|^p \right)^2 \quad (2.5 - 28)$$

όπου p θετικός πραγματικός ακέραιος. Ελαχιστοποίηση του $G^{(p)}$ ως προς τους συντελεστές του ισοσταθμιστή αποφέρει ισοστάθμιση μόνο του πλάτους του σήματος. Βασισμένος σε αυτή την παρατήρηση, ο Godard επέλεξε μια πιο γενική συνάρτηση κόστους, η οποία ονομάζεται **διασπορά τάξης p (dispersion of order p)**, που ορίζεται ως

$$D^{(p)} = E \left(\left| \hat{I}_k \right|^p - R_p \right)^2 \quad (2.5 - 29)$$

όπου R_p είναι μια θετική πραγματική σταθερά. Όπως και στην περίπτωση του $G^{(p)}$, παρατηρούμε ότι η $D^{(p)}$ είναι ανεξάρτητη της φέρουσας φάσης.

Ελαχιστοποίηση του $D^{(p)}$ ως προς τους συντελεστές του ισοσταθμιστή μπορεί να εκτελεστεί αναδρομικά σύμφωνα με τον αλγόριθμο υπεραπότομης κατάβασης

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k - \Delta_p \frac{dD^{(p)}}{d\mathbf{C}_k} \quad (2.5 - 30)$$

όπου Δ_p είναι το μέγεθος του βήματος. Διαφορίζοντας την $D^{(p)}$ και βγάζοντας τον τελεστή της προσδοκίας, λαμβάνουμε τον ακόλουθο LMS τύπου αλγόριθμο για τη ρύθμιση των συντελεστών του ισοσταθμιστή:

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta_p \mathbf{V}_k^* \hat{I}_k |\hat{I}_k|^{p-2} \left(R_p - |\hat{I}_k|^p \right) \quad (2.5 - 31)$$

όπου Δ_p είναι το μέγεθος του βήματος, και η βέλτιστη επιλογή του R_p είναι

$$R_p = \frac{E(|I_k|^{2p})}{E(|I_k|^p)} \quad (2.5 - 32)$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, η αναδρομική σχέση στην (2.5 - 31) για το $\hat{\mathbf{C}}_k$ δεν απαιτεί γνώση της φάσης της φέρουσας. Η ιχνηλάτηση της φάσης της φέρουσας μπορεί να εκτελεστεί σε ένα τρόπο κατευθυνόμενης απόφασης σύμφωνα με την (2.5 - 27).

Μεγάλης σημασίας είναι η περίπτωση όπου $p=2$, η οποία μας οδηγεί στο σχετικά απλό αλγόριθμο

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta_p \mathbf{V}_k^* \hat{I}_k \left(R_2 - |\hat{I}_k|^2 \right) \\ \hat{\phi}_{k+1} &= \hat{\phi}_k + \Delta_\phi \operatorname{Im} \left(\tilde{I}_k \hat{I}_k^* e^{j\hat{\phi}_k} \right) \end{aligned} \quad (2.5 - 33)$$

όπου \tilde{I}_k είναι η απόφαση εξόδου η οποία βασίζεται στην \hat{I}_k , και

$$R_2 = \frac{E(|I_k|^4)}{E(|I_k|^2)} \quad (2.5 - 34)$$

Η σύγκλιση του αλγόριθμου που δίνεται στην (2.5 - 33) δείχθηκε πρώτη φορά στη δημοσίευση του Godard (1980). Αρχικά, οι συντελεστές του ισοσταθμιστή ρυθμίζονται στο μηδέν εκτός από την κεντρική απόληξη (αναφορά), η οποία ρυθμίζεται σύμφωνα με τη συνθήκη

$$|c_0|^2 > \frac{E|I_k|^4}{2|x_0|^2 \left[E(|I_k|)^2 \right]^2} \quad (2.5 - 35)$$

η οποία είναι ικανή, αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση του αλγόριθμου. Τα αποτελέσματα της εξομοίωσης που εκτέλεσε ο Godard σε τηλεφωνικά κανάλια με τυπικά χαρακτηριστικά απόκρισης συχνότητας και ρυθμούς μετάδοσης 7.200 - 12.000 bits/s δείχνουν ότι ο αλγόριθμος στην (2.5 - 31) αποδίδει καλά και οδηγεί σε σύγκλιση σε 5.000 - 20.000 επαναλήψεις, ανάλογα με το διάγραμμα του σήματος. Αρχικά, το διάγραμμα οφθαλμού ήταν κλειστό πριν την ισοστάθμιση. Το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται για σύγκλιση είναι περίπου μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερο από το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτείται για ισοστάθμιση του καναλιού με μια γνωστή ακολουθία εκμάθησης. Δεν υπάρχουν εμφανείς δυσκολίες

χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο εκτίμησης φάσης σε τρόπο απόφασης που δίνεται στην (2 – 5 – 33) από το ξεκίνημα της διαδικασίας ρύθμισης του ισοσταθμιστή.

2.5.3 Αλγόριθμοι Τυφλής Ισοστάθμισης Βασισμένοι σε Δεύτερης Τάξης και Υψηλότερης Τάξης Στατιστικά

Είναι γνωστό ότι τα στατιστικά δεύτερης τάξης (αυτοσυσχέτιση) της λαμβανόμενης ακολουθίας παρέχουν πληροφορία για το μέτρο της χαρακτηριστικής του καναλιού, αλλά όχι για τη φάση. Όμως, αυτή η δήλωση δεν είναι σωστή αν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του λαμβανόμενου σήματος είναι περιοδική, όπως στην περίπτωση ενός ψηφιακά διαμορφωμένου σήματος. Σε μια τέτοια περίπτωση, είναι εφικτό να λάβουμε ένα μέτρο του πλάτους και της φάσης του καναλιού από το λαμβανόμενο σήμα. Αυτή η ιδιότητα κυκλοστασιμότητας των λαμβανόμενων σημάτων μορφοποιεί τη βάση για έναν αλγόριθμο εκτίμησης καναλιού ο οποίος επινοήθηκε από τον Tong κ.ά. (1993).

Είναι επίσης εφικτό να εκτιμήσουμε την απόκριση του καναλιού από το λαμβανόμενο σήμα χρησιμοποιώντας υψηλότερης τάξης στατιστικές μεθόδους. Συγκεκριμένα, η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού, διακριτού χρόνου, χρονικά αμετάβλητου καναλιού μπορεί σαφώς να εξαχθεί από τα cumulants του λαμβανόμενου σήματος, αρκεί η είσοδος του καναλιού να μην είναι γκαουσιανή. Περιγράφουμε την ακόλουθη απλή μέθοδο για εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης του καναλιού από τέταρτης τάξης cumulants της λαμβανόμενης ακολουθίας. Το τέταρτης cumulant ορίζεται ως

$$\begin{aligned} c(v_k, v_{k+m}, v_{k+n}, v_{k+l}) &\equiv c_r(m, n, l) \\ &= E(v_k v_{k+m} v_{k+n} v_{k+l}) \\ &\quad - E(v_k v_{k+m}) E(v_{k+n} v_{k+l}) \\ &\quad - E(v_k v_{k+n}) E(v_{k+m} v_{k+l}) \\ &\quad - E(v_k v_{k+l}) E(v_{k+m} v_{k+n}) \end{aligned} \quad (2.5 - 36)$$

(Το τέταρτης τάξης cumulant μιας γκαουσιανής διαδικασίας είναι μηδέν). Συνεπώς, έπεται ότι

$$c_r(m, n, l) = c(I_k, I_{k+m}, I_{k+n}, I_{k+l}) \sum_{k=0}^{\infty} f_k f_{k+m} f_{k+n} f_{k+l} \quad (2.5 - 37)$$

Για μια στατιστικά ανεξάρτητη και ομοιόμορφα κατανομημένη ακολουθία εισόδου $\{I_n\}$ στο κανάλι $c(I_k, I_{k+m}, I_{k+n}, I_{k+l}) = k$, μια σταθερά, η οποία ονομάζεται **κύρτωση (kurtosis)**. Τότε, αν το μήκος της απόκρισης του καναλιού είναι $L+1$, μπορούμε να θέσουμε $m = n = l = -L$, ώστε

$$c_r(-L, -L, -L) = k f_L f_0^3 \quad (2.5 - 38)$$

Ομοίως, αν θέσουμε $m = 0$, $n = L$, και $l = p$, παίρνουμε

$$c_r(0, L, p) = k f_L f_0^2 f_p \quad (2.5 - 39)$$

Αν συνδυάσουμε τις Εξ. (2.5 – 38) και (2.5 – 39), παίρνουμε την κρουστική απόκριση του καναλιού με έναν παράγοντα κλιμάκωσης, ως

$$f_p = f_0 \frac{c_r(0, L, p)}{c_r(-L, -L, -L)}, \quad p = 1, 2, \dots, L \quad (2.5 - 40)$$

Τα cumulants $c_r(m, n, l)$ εκτιμούνται από τους μέσους των δειγμάτων της λαμβανόμενης ακολουθίας $\{v_n\}$.

Άλλη προσέγγιση που βασίζεται σε στατιστικά ανώτερης τάξης δίνεται από τους Hatzinakos και Nikias (1991). Αυτοί εισάγανε την πρώτη προσαρμοστική τυφλή μέθοδο ισοστάθμισης βασισμένη σε πολυφάσματα που ονομάζεται **tricepstrum αλγόριθμος ισοστάθμισης (Trisepstrum Equalization Algorithm, TEA)**. Αυτή η μέθοδος εκτιμά την χαρακτηριστική απόκριση του καναλιού χρησιμοποιώντας το μιγαδικό cepstrum των cumulants τέταρτης τάξης (tricepstrum) δειγμάτων της λαμβανόμενης ακολουθίας $\{v_n\}$. Ο TEA εξαρτάται μόνο από τα cumulants τέταρτης τάξης του $\{v_n\}$, και είναι ικανός να ανακατασκευάσει ξεχωριστά τις χαρακτηριστικές ελάχιστης φάσης και μέγιστης φάσης του καναλιού. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι συντελεστές του ισοσταθμιστή καναλιού από τις μετρήσεις των χαρακτηριστικών του καναλιού. Η βασική προσέγγιση που χρησιμοποιείται στον TEA είναι να υπολογίζουμε το tricepstrum της λαμβανόμενης ακολουθίας $\{v_n\}$, το οποίο είναι ο αντίστροφος (τρισεδιάστατος) μετασχηματισμός Fourier του λογαρίθμου του tricepstrum της $\{v_n\}$ (το tricepstrum είναι ο τρισεδιάστατος διακριτός μετασχηματισμός Fourier της τέταρτης τάξης ακολουθίας cumulant $c_r(m, n, l)$). Οι συντελεστές του ισοσταθμιστή υπολογίζονται στη συνέχεια από τους συντελεστές του cepstral.

Χωρίζοντας την εκτίμηση του καναλιού από την ισοστάθμισή του, είναι εφικτό να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε είδος ισοσταθμιστή για την ISI (γραμμικό, αναδραστικής απόφασης, ή ανίχνευσης ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας). Το κύριο μειονέκτημα αυτής της τάξης των αλγόριθμων είναι η μεγάλη ποσότητα δεδομένων και η έμφυτη υπολογιστική πολυπλοκότητα η οποία περιλαμβάνεται στην εκτίμηση των ανώτερης τάξης στιγμών (cumulants) του λαμβανόμενου σήματος.

Συνπερασματικά, παρείχαμε μια γενική ματιά τριών κατηγοριών αλγόριθμων τυφλής ισοστάθμισης οι οποίοι βρίσκουν εφαρμογές στις ψηφιακές επικοινωνίες. Από τις τρεις οικογένειες αλγόριθμων που περιγράφηκαν, αυτές που βασίζονται στο κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας για από κοινού εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης του καναλιού και της ακολουθίας των δεδομένων είναι βέλτιστες και απαιτούν σχετικά λίγα δείγματα του λαμβανόμενου σήματος για να εκτελέσουν την εκτίμηση του καναλιού. Όμως, η υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγόριθμων είναι μεγάλη όταν η ISI περιλαμβάνει πολλά σύμβολα. Σε κάποια κανάλια, όπως τα κινητά ραδιοκανάλια, όπου το μήκος της ISI είναι σχετικά μικρό, αυτοί οι αλγόριθμοι είναι εύκολο να υλοποιηθούν. Από την άλλη, στα τηλεφωνικά κανάλια, όπου η ISI περιλαμβάνει πολλά κανάλια αλλά δεν είναι συνήθως σφοδρή, χρησιμοποιούνται γενικά οι αλγόριθμοι τύπου LMS (στοχαστικής κλίσης).

2.6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Η προσαρμοστική ισοστάθμιση για ψηφιακές επικοινωνίες αναπτύχθηκε από τον Lucky (1965, 1966). Ο αλγόριθμός του βασιζόταν στο κριτήριο παραμόρφωσης κορυφής και οδήγησε στον αλγόριθμο μηδενικού εξαναγκασμού. Η δουλειά του Lucky ήταν επαναστατική, και οδήγησε σε ραγδαία ανάπτυξη modem υψηλής ταχύτητας μέσα σε πέντε χρόνια από τη δημοσίευση της δουλειάς του. Παράλληλα, επινοήθηκε ο LMS αλγόριθμος από τον Widrow (1966), και η χρήση του για προσαρμοστική ισοστάθμιση μιγαδικών σημάτων (συμφασικές και ορθογωνικές συνιστώσες) περιγράφηκε και αναλύθηκε σε ένα διδακτική δημοσίευση από τους Proakis και Miller (1969).

Μια διδακτική μελέτη των αλγόριθμων προσαρμοστικής ισοστάθμισης η οποία αναπτύχθηκαν την περίοδο 1965 – 1975 δίνεται από τον Proakis (1975). Μια πιο πρόσφατη διδακτική μελέτη των αλγόριθμων προσαρμοστικής ισοστάθμισης δίνεται από τον Qureshi (1985). Η επανάσταση στις τεχνικές προσαρμοστικής ισοστάθμισης που ξεκίνησε από την εργασία του Lucky συνδυασμένη με την ανάπτυξη της διαμόρφωσης κωδικοποιημένου trellis, η οποία είχε προταθεί από τους Ungerboeck και Csajka (1976), οδήγησε στην ανάπτυξη εμπορικά διαθέσιμων modem υψηλής ταχύτητας με ικανότητα ταχυτήτων 9.600 – 28.800 bits/s σε τηλεφωνικά κανάλια.

Η χρήση πιο ραγδαία συγκλίνουσων αλγόριθμων για προσαρμοστική ισοστάθμιση προτάθηκε από τον Godard (1974). Η γέννηση του RLS (Kalman) αλγόριθμου, ο οποίος περιγράφηκε στην ενότητα 2.4.1, ακολουθεί σε βασικές γραμμές την προσέγγιση του Picinbono (1978). Οι RLS αλγόριθμοι πλέγματος για γενικές εφαρμογές εκτίμησης σήματος μελετήθηκαν από πολλούς ερευνητές, συμπεριλαμβανομένων των Machoul (1978), Satorius και Pack (1981), Satorius και Alexander (1979), και Ling και Proakis (1982, 1984a – c, 1985). Ο γρήγορος RLS Kalman αλγόριθμος για προσαρμοστική ισοστάθμιση περιγράφηκε αρχικά από τους Falconer και Ljung (1978). Οι παραπάνω αναφορές είναι απλώς μερικές από τις σημαντικές δημοσιεύσεις πάνω στους RLS αλγόριθμους για προσαρμοστική ισοστάθμιση και άλλες εφαρμογές.

Η πρωτότυπη δουλειά του Sato (1975) πάνω στην τυφλή ισοστάθμιση εστίαζε στα PAM (μονοδιάστατα) σήματα. Στη συνέχεια γενικεύτηκε για δισδιάστατα και πολυδιάστατα σήματα στους αλγόριθμους που επινοήθηκαν από τον Godard (1980), Benveniste και Goorsat (1984), Sato (1986), Foschini (1985), Picchi και Prati (1987), και Shalvi και Weinstein (1990). Οι μέθοδοι τυφλής ισοστάθμισης οι οποίοι βασίζονται στη χρήση στιγμών δεύτερης και ανώτερης τάξης του λαμβανόμενου σήματος προτάθηκαν από τους Hatzinakos και Nikias (1991) και Tong κ.ά. (1994). Η χρήση του κριτηρίου μέγιστης πιθανοφάνειας για από κοινού εκτίμηση καναλιού και ανίχνευση δεδομένων μελετήθηκε στις δημοσιεύσεις των Seshadri (1994), Ghosh και Weber (1991), Zervas κ.ά. (1991), και Raheli κ.ά. (1995). Τέλος, οι χαρακτηριστικές σύγκλισης των αλγόριθμων στοχαστικής κλίσης για τυφλή ισοστάθμιση μελετήθηκαν από τους Ding (1990), Ding κ.ά. (1989), και Johnson (1991).

Benveniste, A. and Goorsat, M. (1984). “Blind Equalizers”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 32, pp. 871 – 883, August.

Ding, Z. (1990). “Application Aspects of Blind Adaptive Equalizers in QAM Data Communications”, Ph.D. Thesis, Department of Electrical Engineering, Cornell University.

- Ding, Z., Kennedy, R. A., Anderson, B. D. O., and Johnson, C.R. (1989). "Existence and Avoidance of Converge of Godard Blind Equalizers in Data Communication Systems", *Proc. 23d Conf. on Inform. Sci. Systems*, Baltimore, Md.
- Falconer, D.D. and Ljung, L. (1978). "Application of Fast Kalman Estimation to Adaptive Equalization", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 26, pp. 1439 – 1446, October.
- Foschini, G. J. (1985). "Equalizing Without Altering or Detecting Data", *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 64, pp. 1885 – 1911, October
- Godard, D. N. (1974). "Channel Equalization using a Kalman Filter for Fast Data Transmission", *IBM J. Res. Dev.*, vol. 18, pp. 267 – 273, May.
- Godard, D. N. (1980). "Self – Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two – Dimensional Data Communications Systems", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 28, pp. 1867 – 1875, November.
- Ghosh, M. and Weber, C. L. (1991). "Maximum Likelihood Blind Equalization", *Proc. 1991 SPIE Conf.*, San Diego, Calif., July.
- Hatzinakos, D. and Nikias, C. L. (1991). "Blind Equalization Using a Tricestrum – Based Algorithm", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 39, pp. 669 – 682, May.
- Johnson, C. R. (1991). "Admissibility in Blind Adaptive Channel Equalization ", *IEEE Control Syst. Mag.*, pp. 3 – 15, January.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1982). "Generalized Least Squares Lattice and Its Applications to DFE", *Proc. 1982, IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech, Signal Processing*, Paris, France, May.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1984a). "Numerical Accuracy and Stability: Two Problems of Adaptive Estimation Algorithms Caused by Round – off Error", *Proc. Int. Conf. on Acoustic, Speech, Signal Processing*, pp. 30.3.1 – 30.3.4, San Diego, Calif., March.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1984b). "Nonstationary Learning Characteristics of Least Squares Adaptive Estimation Algorithms", *Proc. Int. Conf. on Acoustic, Speech, Signal Processing*, pp. 3.7.1 – 3.7.4, San Diego, Calif., March.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1984c). "A Generalized Multichannel Least Squares Lattice Algorithm with Sequential Processing Stages", *IEEE Trans. Acoustic, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP – 32, pp. 381 – 389, April.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1985). "Adaptive Lattice Decision – Feedback Equalizers: Their Performance and Application to Time – Variant Multipath Channels", *IEEE Trans. Commun*, vol. COM – 33, pp. 348 – 356, April.
- Lucky, R.W. (1965). "Automatic Equalization for Digital Communications", *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44, pp. 547 – 588, April.
- Lucky, R.W. (1966). "Techniques for Adaptive Equalization of Digital Communication", *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 255 – 286.
- Machoul, J. (1978). "A Class of All – Zero Lattice Digital Filters: Properties and Applications", *IEEE Trans., Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP – 26, pp. 304 – 314, August.
- Picchi, G. and Prati, G. (1987). "Blind Equalization and Carrier Recovery Using a Stop – and – Go Decision Directed Algorithm", *IEEE Trans. Commun*, vol. COM – 35, pp. 877 – 887, September.
- Picinbono, B. (1978). "Adaptive Signal Processing for Detection and Communication", in *Communication Systems nad Random Process Theory*, J. K. Skwirzynski (ed.), Sijthoff & Nordhoff, Alpen aan den Rijn, The Netherlands.

- Proakis, J. G. and Miller, J. H. (1969). “Adaptive Receiver for Digital Signaling through Channels with Intersymbol Interference”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT – 15, p.p. 484 – 497, July.
- Proakis, J. G. (1975). “Advances in Equalization for Intersymbol Interference”, in *Advances in Communication Systems*, vol. 4, A. J. Vitervi (ed.), Academic, New York.
- Qureshi, S. U. H. (1985). “Adaptive Equalization”, *Proc. IEEE*, vol. 53, p.p. 1349 – 1387, September.
- Raheli, R., Polydoros, A., and Tzou, C. K. (1995). “The Principle of Per – Survivor Processing: A General Approach to Approximate and Adaptive MLSE”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 43.
- Sato, Y. (1975). “A Method of Self – Recovering Equalization for Multi – level Amplitude Modulation Systems”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 23, pp. 679 – 682, June.
- Sato, Y. *et al.* (1986). “Blind Suppression of Time Dependency and its Extension to Multi – Dimensional Equalization”, *Proc. ICC’86*, pp. 46.4.1 – 46.4.5.
- Satorius, E. H. and Alexander, J. D. (1981). “Channel Equalization Using Adaptive Lattice Algorithms”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 27, pp. 899 – 905, June.
- Satorius, E. H. and Pack, S. T. (1979). “Applications of Least Squares Lattice Algorithms to Adaptive Equalization”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 42, pp. 1.000 – 1.011, March.
- Seshadri, N. (1994). “Joint Data and Channel Estimation Using Fast Blind Trellis Search Techniques”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 29, pp. 136 – 142, February.
- Shalvi, O. and Weinstein, E. (1990). “New Criteria for Blind Equalization of Nonminimum Phase Systems Channels”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT – 36, pp. 312 – 321, March.
- Tong, L., Xu, G., and Kailath, T. (1994). “Blind Identification and Equalization Based on Second Order Statistics”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT – 40, pp. 340 – 349, March.
- Ungerboeck, G. and Csajka (1976). “On Improving Data – Link Performance by Increasing the Channel Alphabet and Introducing Sequence Coding”, *1976 Int. Conf. Inform. Theory*, Ronneby, Sweden, June.
- Widrow, B. (1966). “Adaptive Filters, I: Fundamentals”, Stanford Electronics Laboratory, Stanford University, Stanford, CA, Tech Report No. 6764 – 6, December.
- Zervas, E., Proakis, J. G., and Eyuboglu, V. (1991). “A Quantized Channel Approach to Blind Equalization”, *Proc. ICC’91*, Chicago, 11, June.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΑΝΑΛΙΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΦΕΡΟΥΣΩΝ

Σε κάποιες εφαρμογές, είναι επιθυμητό να εκπέμψουμε το ίδιο σήμα πληροφορίας σε πολλά κανάλια. Αυτός ο τρόπος μετάδοσης χρησιμοποιείται κυρίως σε περιπτώσεις όπου υπάρχει μεγάλη πιθανότητα ένα ή περισσότερα κανάλια να είναι αναξιόπιστα από χρόνο σε χρόνο. Για παράδειγμα, ραδιοκανάλια όπως το ιονοσφαιρικό κανάλι διασκόρπισης και το τροποσφαιρικό κανάλι διασκόρπισης υποφέρουν από διαλείψεις του σήματος λόγω των πολλαπλών διαδρομών, που τα καθιστούν αναξιόπιστα για σύντομες χρονικές περιόδους. Ως ένα άλλο παράδειγμα, η **σηματοδοσία πολλαπλών καναλιών (multichannel signaling)** χρησιμοποιείται στα συστήματα στρατιωτικών επικοινωνιών, ως ένα μέσο υπερνίκησης της κακόβουλης παρεμβολής στο μεταδιδόμενο σήμα. Εκπέμποντας την ίδια πληροφορία σε πολλά κανάλια, παρέχουμε diversity του σήματος, την οποία μπορεί να εκμεταλλευθεί ο δέκτης για να ανακτήσει την πληροφορία.

Μια άλλη μορφή επικοινωνιών πολλαπλών καναλιών είναι η **εκπομπή πολλαπλών φέρουσων (multicarrier transmission)**, όπου η ζώνη συχνοτήτων του καναλιού υποδιαιρείται σε ένα πλήθος υποκαναλιών, και η πληροφορία εκπέμπεται σε καθένα από τα υποκανάλια. Παρακάτω θα δοθεί μια λογική εξήγηση για την υποδιαίρεση της ζώνης συχνοτήτων ενός καναλιού σε ένα πλήθος καναλιών στενής ζώνης.

Εμείς θα ασχοληθούμε τόσο με την εκπομπή σημάτων πολλαπλών καναλιών όσο και με την εκπομπή πολλαπλών φέρουσων. Ξεκινάμε με μια πραγμάτευση της εκπομπής πολλαπλών καναλιών.

3.1 ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΑΝΑΛΙΩΝ ΣΕ AWGN ΚΑΝΑΛΙΑ

Σε αυτή την ενότητα, περιορίζουμε την προσοχή μας στην σηματοδοσία πολλαπλών καναλιών σε σταθερά κανάλια που διαφέρουν μόνο στην εξασθένηση και στην ολίσθηση φάσης. Το συγκεκριμένο μοντέλο για το σύστημα ψηφιακής σηματοδοσίας πολλαπλών καναλιών μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως. Οι κυματομορφές του σήματος, γενικά, εκφράζονται ως

$$s_m^{(n)}(t) = \text{Re} \left[s_{lm}^{(n)}(t) e^{j2\pi f_c t} \right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = 1, 2, \dots, L, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3.1-1)$$

όπου L είναι το πλήθος των καναλιών και M είναι το πλήθος των κυματομορφών. Οι κυματομορφές υποθέτουμε ότι έχουν ίση ενέργεια και ότι είναι εκ των προτέρων

ισοπίθανες. Οι κυματομορφές $s_{lm}^{(n)}(t)$ οι οποίες εκπέμπονται στα L κανάλια, κλιμακώνονται από τους συντελεστές $\{a_n\}$, ολισθαίνουν στη φάση κατά $\{\phi_n\}$, και μολύνονται από προσθετικό θόρυβο. Τα ισοδύναμα χαμηλοπερατά σήματα τα οποία λαμβάνονται από τα L κανάλια μπορούν να εκφραστούν ως

$$r_l^{(n)}(t) = a_n e^{-j\phi_n} s_{lm}^{(n)}(t) + z_n(t) \quad (3.1 - 2)$$

όπου $\{s_{lm}^{(n)}(t)\}$ είναι οι ισοδύναμες χαμηλοπερατές εκπεμπόμενες κυματομορφές, και οι $\{z_n(t)\}$ αναπαριστούν τις διαδικασίες προσθετικού θορύβου στα L κανάλια. Υποθέτουμε ότι οι $\{z_n(t)\}$ είναι αμοιβαία στατιστικά ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες διαδικασίες γκαουσιανού θορύβου.

Θεωρούμε δύο τύπους επεξεργασίας στο δέκτη, τη σύμφωνη ανίχνευση και τη μη σύμφωνη ανίχνευση. Στη σύμφωνη ανίχνευση, ο δέκτης εκτιμάει τις παραμέτρους του καναλιού $\{a_n\}$ και $\{\phi_n\}$, και χρησιμοποιεί τις εκτιμήσεις στον υπολογισμό των μεταβλητών απόφασης. Ας ορίσουμε το $g_n = a_n e^{-j\phi_n}$, και έστω \hat{g}_n η εκτίμηση του g_n . Ο δέκτης πολλαπλών καναλιών συσχετίζει καθένα από τα L λαμβανόμενα σήματα με ένα αντίγραφο των αντίστοιχων εκπεμπόμενων σημάτων, πολλαπλασιάζει κάθε μια από τις εξόδους του συσχετιστή με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις $\{\hat{g}_n^*\}$, και προσθέτει τα προκύπτων σήματα. Έτσι, οι μεταβλητές απόφασης για τη σύμφωνη ανίχνευση είναι οι μετρικές συσχέτισης

$$CM_m = \sum_{n=1}^L \operatorname{Re} \left[\hat{g}_n^* \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{lm}^{(n)*}(t) dt \right], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3.1 - 3)$$

Στη μη σύμφωνη ανίχνευση, δε γίνεται καμία προσπάθεια για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του καναλιού. Ο αποδιαμορφωτής μπορεί να βασίζεται τις αποφάσεις του είτε στο άθροισμα των περιβάλλουσων (ανίχνευση περιβάλλουσας), είτε στο άθροισμα των τετραγωνικών περιβάλλουσων (ανίχνευση τετραγωνικού νόμου) των εξόδων των προσαρμοσμένων φίλτρων. Γενικά, η απόδοση η οποία λαμβάνεται με ανίχνευση περιβάλλουσας λίγο διαφέρει από την απόδοση που λαμβάνεται με ανίχνευση τετραγωνικού νόμου στο AWGN. Όμως, η ανίχνευση τετραγωνικού νόμου της σηματοδοσίας πολλαπλών καναλιών σε AWGN κανάλια, είναι αισθητά πιο εύκολο να αναλυθεί από ότι η ανίχνευση περιβάλλουσας. Για αυτό, θα περιορίσουμε την προσοχή μας στην ανίχνευση τετραγωνικού νόμου των λαμβανόμενων σημάτων από τα L κανάλια, η οποία παράγει τις μεταβλητές απόφασης

$$CM_m = \sum_{n=1}^L \left| \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{lm}^{(n)*}(t) dt \right|^2, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3.1 - 4)$$

Ας θεωρήσουμε αρχικά δυαδική σηματοδοσία, και ας υποθέσουμε ότι $s_{l1}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots, L$ είναι οι L εκπεμπόμενες κυματομορφές. Τότε, διαπράττεται ένα σφάλμα αν $CM_2 > CM_1$, ή, ισοδύναμα, αν η διαφορά $D = CM_1 - CM_2 < 0$. Για μη σύμφωνη ανίχνευση, αυτή η διαφορά μπορεί να εκφραστεί ως

$$D = \sum_{n=1}^L (|X_n|^2 - |Y_n|^2) \quad (3.1 - 5)$$

όπου οι μεταβλητές $\{X_n\}$ και $\{Y_n\}$ ορίζονται ως

$$\begin{aligned} X_n &= \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{l1}^{(n)*}(t) dt, \quad n=1, 2, \dots, L \\ Y_n &= \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{l2}^{(n)*}(t) dt, \quad n=1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (3.1 - 6)$$

Οι $\{X_n\}$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές. Η ίδια δήλωση ισχύει και για τις μεταβλητές $\{Y_n\}$. Όμως, για κάθε n , οι $\{X_n\}$ και $\{Y_n\}$ μπορεί να είναι συσχετισμένες. Για σύμφωνη ανίχνευση, η διαφορά $D = CM_1 - CM_2$ μπορεί να εκφρασθεί ως

$$D = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^L (X_n Y_n^* + X_n^* Y_n) \quad (3.1 - 7)$$

όπου, εξ' ορισμού,

$$\begin{aligned} Y_n &= \hat{g}_n, \quad n=1, 2, \dots, L \\ X_n &= \int_0^T r_l^{(n)}(t) [s_{l1}^{(n)*}(t) - s_{l2}^{(n)*}(t)] dt \end{aligned} \quad (3.1 - 8)$$

Αν οι εκτιμήσεις $\{\hat{g}_n\}$ λαμβάνονται από την παρατήρηση του σήματος σε ένα ή περισσότερα διαστήματα σηματοδοσίας, τα στατιστικά χαρακτηριστικά τους περιγράφονται από τη γκαουσιανή κατανομή. Τότε οι $\{Y_n\}$ χαρακτηρίζονται ως αμοιβαία ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές. Η ίδια δήλωση ισχύει και για τις μεταβλητές $\{X_n\}$. Όπως και στη μη σύμφωνη ανίχνευση, επιτρέπεται η συσχέτιση ανάμεσα στις X_n και Y_n , αλλά όχι ανάμεσα στις X_m και Y_n για $m \neq n$.

3.1.1 Δυαδικά Σήματα

Στα συστήματα επικοινωνίας πολλαπλών καναλιών που χρησιμοποιούν δυαδική σηματοδοσία για εκπομπή πληροφορίας στο AWGN κανάλι, η μεταβλητή απόφασης στον ανιχνευτή μπορεί να εκφραστεί ως μια ειδική περίπτωση της γενικής τετραγωνικής μορφής

$$D = \sum_{n=1}^L (A|X_n|^2 + B|Y_n|^2 + 2CX_n Y_n^* + C^* X_n^* Y_n) \quad (3.1 - 9)$$

με μιγαδικές γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές. Οι A , B , και C είναι σταθερές. Οι X_k και Y_k είναι ένα ζεύγος συσχετισμένων μιγαδικών γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών. Για τα κανάλια που μας ενδιαφέρουν, τα L ζεύγη $\{X_k, Y_k\}$ είναι αμοιβαία στατιστικά ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανομημένα.

Η πιθανότητα σφάλματος είναι η πιθανότητα για $D < 0$. Δηλαδή, $P_b = P(D < 0)$. Η διαδικασία εύρεσης της $P(D < 0)$ είναι εξαιρετικά περίπλοκη και χρονοβόρα, ενώ και η σχέση που προκύπτει είναι μακροσκελής και μάλλον δύσχρηστη. Όμως, ένας αριθμός ειδικών περιπτώσεων έχουν ιδιαίτερη σημασία. Μερικές από αυτές τις περιπτώσεις θα εξετάσουμε εδώ.

Αν τα δυαδικά σήματα είναι αντιποδικά, και οι εκτιμήσεις του $\{g_n\}$ είναι τέλειες, όπως στη σύμφωνη PSK, η πιθανότητα σφάλματος παίρνει την απλή μορφή

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right) \quad (3.1 - 10)$$

όπου

$$\begin{aligned} \gamma_b &= \frac{\mathcal{E}}{N_0} \sum_{n=1}^L |g_n|^2 \\ &= \frac{\mathcal{E}}{N_0} \sum_{n=1}^L a_n^2 \end{aligned} \quad (3.1 - 11)$$

είναι ο SNR ανά bit. Αν τα κανάλια είναι όλα πανομοιότυπα, τότε $a_n = a$ για κάθε n και, για αυτό το λόγο,

$$\gamma_b = \frac{L\mathcal{E}}{N_0} a^2 \quad (3.1 - 12)$$

Παρατηρούμε ότι $L\mathcal{E}$ είναι η συνολική ενέργεια του εκπεμπόμενου σήματος για τα L σήματα. Η ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος είναι ότι ο δέκτης συνδυάζει την ενέργεια από τα L κανάλια με ένα βέλτιστο τρόπο. Δηλαδή, δεν υπάρχει απώλεια στην απόδοση διαιρώντας τη συνολική ενέργεια του εκπεμπόμενου σήματος στα L κανάλια. Η ίδια απόδοση λαμβάνεται και στην περίπτωση όπου μια κυματομορφή η οποία έχει ενέργεια $L\mathcal{E}$ εκπέμπεται σε ένα κανάλι. Αυτό ισχύει μόνον αν οι εκτιμήσεις $\hat{g}_n = g_n$, για κάθε n . Αν οι εκτιμήσεις δεν είναι τέλειες, λαμβάνει χώρα μια απώλεια στην απόδοση, ο βαθμός της οποίας εξαρτάται από την ποιότητα των εκτιμήσεων.

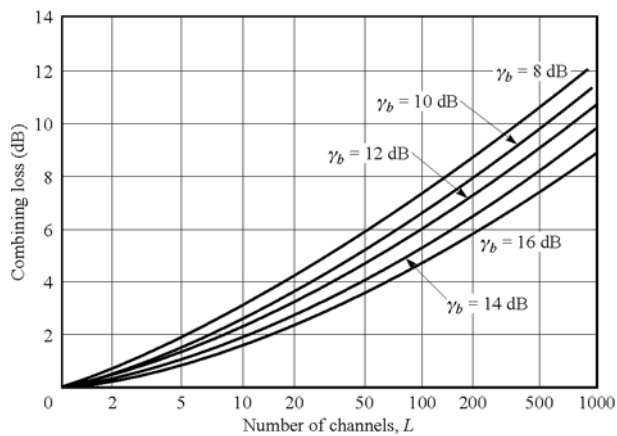
Οι τέλειες εκτιμήσεις για το $\{g_n\}$ αποτελούν μια ακραία περίπτωση. Στο άλλο άκρο, έχουμε τη δυαδική DPSK σηματοδοσία. Στην DPSK, οι εκτιμήσεις $\{\hat{g}_n\}$ είναι απλά τα (κανονικοποιημένα) δείγματα του σήματος συν το θόρυβο στις εξόδους των προσαρμοσμένων φίλτρων στο προηγούμενο διάστημα σηματοδοσίας. Αυτή είναι η χειρότερη εκτίμηση που μπορεί να θεωρήσει κάποιος για το $\{g_n\}$. Για τη δυαδική DPSK, η πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_b = \frac{1}{2^{2L-1}} e^{-\gamma_b} \sum_{n=1}^{L-1} c_n \gamma_b^n \quad (3.1 - 13)$$

όπου, εξ' ορισμού,

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{L-1-n} \binom{2L-1}{k} \quad (3.1 - 14)$$

και γ_b είναι ο SNR ανά bit ο οποίος ορίστηκε στην (3.1 – 11), και, για πανομοιότυπα κανάλια, στην (3.1 – 12). Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να συγκριθεί με την πιθανότητα σφάλματος ενός καναλιού ($L=1$). Για να απλοποιήσουμε τη σύγκριση, υποθέτουμε ότι τα L κανάλια έχουν πανομοιότυπους συντελεστές εξασθένησης. Έτσι, για την ίδια τιμή του γ_b , η απόδοση του συστήματος πολλαπλών καναλιών είναι χειρότερη από αυτή του συστήματος ενός καναλιού. Δηλαδή, ο διαχωρισμός της συνολικής εκπεμπόμενης ενέργειας σε L κανάλια αποφέρει μια απώλεια στην απόδοση, ο βαθμός της οποίας εξαρτάται από το L .



ΣΧΗΜΑ 3.1 – 1 Συνδυασμένη απώλεια της μη σύμφωνης ανίχνευσης σε συνδυασμό με δυαδικά σήματα πολλαπλών καναλιών.

Μια απώλεια στην απόδοση λαμβάνει χώρα επίσης στην ανίχνευση τετραγωνικού νόμου ορθογώνιων σημάτων που εκπέμπονται σε L κανάλια. Για δυαδική ορθογώνια σηματοδοσία, η έκφραση για την πιθανότητα σφάλματος είναι πανομοιότυπη στη μορφή με αυτή της δυαδικής DPSK που δίνεται στην (3.1 – 13), εκτός του ότι ο γ_b

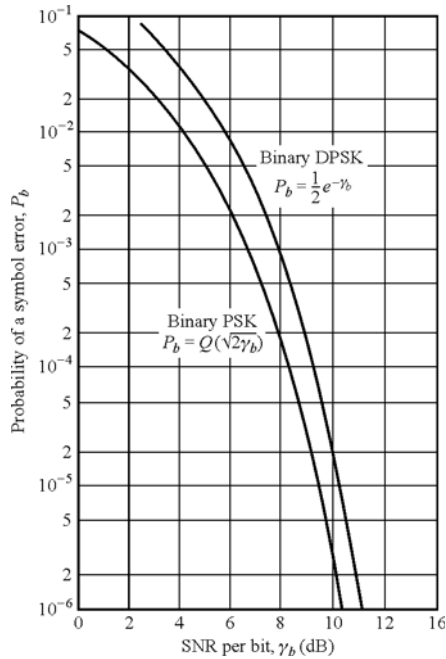
αντικαθίσταται από τον $\frac{1}{2} \gamma_b$. Δηλαδή, η δυαδική ορθογώνια σηματοδοσία με μη

σύμφωνη ανίχνευση είναι 3 dB χειρότερη από τη δυαδική DPSK. Παρόλα αυτά, η απώλεια στην απόδοση λόγω του μη σύμφωνου συνδυασμού των σημάτων που λαμβάνονται στα L κανάλια είναι πανομοιότυπη με αυτή του δυαδικού DPSK.

Το Σχήμα 3.1 – 1 δείχνει την απώλεια που προκύπτει από το μη σύμφωνο (τετραγωνικού νόμου) συνδυασμό των L σημάτων ως συνάρτηση του L . Η πιθανότητα σφάλματος δε φαίνεται, αλλά μπορεί εύκολα να εξαχθεί από την καμπύλη της έκφρασης

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b} \quad (3.1 - 15)$$

η οποία είναι η πιθανότητα σφάλματος του δυαδικού DPSK και στη συνέχεια, υποβαθμίζοντας τον απαιτούμενο SNR ανά bit, γ_b , από τη μη σύμφωνη συνδυασμένη απώλεια που αντιστοιχεί στην τιμή του L .



ΣΧΗΜΑ 2 Πιθανότητα σφάλματος για δυαδική PSK και για DPSK.

3.1.2 M – αδικά Ορθογώνια Σήματα

Τώρα, ας θεωρήσουμε M – αδική ορθογώνια σηματοδότηση με ανίχνευση τετραγωνικού νόμου και συνδυασμό των σημάτων στα L κανάλια. Οι μεταβλητές απόφασης δίνονται από την (3.1 – 4). Υποθέτουμε ότι τα σήματα $s_{l1}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots, L$, εκπέμπονται στα L AWGN κανάλια. Τότε, οι μεταβλητές απόφασης εκφράζονται ως

$$U_1 = \sum_{n=1}^L |2\mathcal{E}a_n + N_{n1}|^2 \quad (3.1 - 16)$$

$$U_m = \sum_{n=1}^L |N_{nm}|^2, \quad m = 2, 3, \dots, M$$

όπου οι $\{N_{nm}\}$ είναι μιγαδικές γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής με διακύμανση $\sigma^2 = \frac{1}{2} E(|N_{nm}|^2) = 2\mathcal{E}N_0$. Για αυτό το λόγο, η U_1 περιγράφεται στατιστικά ως μια μη κεντρική χ^2 – τετράγωνη τυχαία μεταβλητή με $2L$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη κεντρικότητας

$$s^2 = \sum_{n=1}^L (2\mathcal{E}a_n)^2 = 4\mathcal{E}^2 \sum_{n=1}^L a_n^2 \quad (3.1 - 17)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση που μας δίνει τη μη κεντρική χ^2 - τετράγωνη pdf με n βαθμούς ελευθερίας, λαμβάνουμε την pdf της U_1 ως

$$p(u_1) = \frac{1}{4\mathcal{E}N_0} \left(\frac{u_1}{s^2}\right)^{(L-1)/2} \exp\left(-\frac{s^2+u_1}{4\mathcal{E}N_0}\right) I_{L-1}\left(\frac{s\sqrt{u_1}}{2\mathcal{E}N_0}\right), \quad u_1 \geq 0 \quad (3.1-18)$$

Από την άλλη μεριά, οι $\{U_m\}$, $m = 2, 3, \dots, M$ είναι στατιστικά ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες χ^2 - τετράγωνες τυχαίες μεταβλητές, όπου η κάθε μια έχει $2L$ βαθμούς ελευθερίας. Χρησιμοποιώντας τη σχέση που μας δίνει τη χ^2 - τετράγωνη (ή γάμμα) pdf με n βαθμούς ελευθερίας, λαμβάνουμε την pdf της U_m ως

$$p(u_m) = \frac{1}{(4\mathcal{E}N_0)^L (L-1)!} u_m^{L-1} e^{-u_m/4\mathcal{E}N_0}, \quad u_m \geq 0, m = 2, 3, \dots, M \quad (3.1-19)$$

Η πιθανότητα ενός σφάλματος συμβόλου είναι

$$\begin{aligned} P_M &= 1 - P_c \\ &= 1 - P(U_2 < U_1, U_3 < U_1, \dots, U_M < U_1) \\ &= 1 - \int_0^\infty [P(U_2 < u_1 | U_1 = u_1)]^{M-1} p(u_1) du_1 \end{aligned} \quad (3.1-20)$$

Αλλά

$$P(U_2 < u_1 | U_1 = u_1) = 1 - \exp\left(-\frac{u_1}{4\mathcal{E}N_0}\right) \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{u_1}{4\mathcal{E}N_0}\right)^k \quad (3.1-21)$$

Για αυτό το λόγο,

$$\begin{aligned} P_M &= 1 - \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{u_1}{4\mathcal{E}N_0}\right) \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{u_1}{4\mathcal{E}N_0}\right)^k\right]^{M-1} p(u_1) du_1 \\ &= 1 - \int_0^\infty \left[1 - e^{-v} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{v^k}{k!}\right]^{M-1} \left(\frac{v}{\gamma}\right)^{(L-1)/2} e^{-(\gamma+v)} I_{L-1}(2\sqrt{\gamma v}) dv \end{aligned} \quad (3.1-22)$$

όπου

$$\gamma = \mathcal{E} \sum_{n=1}^L a_n^2 / N_0 \quad (3.1-23)$$

Το ολοκλήρωμα στην (3.1-23) μπορεί να αποτιμηθεί αριθμητικά. Είναι επίσης εφικτό να αναπτύξουμε τον όρο $(1-x)^{M-1}$ στην (3.1-23) και να εκτελέσουμε την

ολοκλήρωση όρο με όρο. Αυτή η προσέγγιση αποφέρει μια έκφραση της P_M με πεπερασμένα αθροίσματα.

Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε το φράγμα ένωσης

$$P_M < (M-1)P_2(L) \quad (3.1-24)$$

όπου $P_2(L)$ είναι η πιθανότητα σφάλματος στην επιλογή ανάμεσα στην U_1 και σε οποιαδήποτε άλλη από τις $M-1$ μεταβλητές απόφασης $\{U_m\}$, $m=2, 3, \dots, M$. Από την προηγούμενη συζήτησή μας στην απόδοση της δυαδικής ορθογώνιας σηματοδοσίας, έχουμε

$$P_2(L) = \frac{1}{2^{2L-1}} e^{-k\gamma_b/2} \sum_{n=0}^{L-1} c_n \left(\frac{1}{2} k\gamma_b \right)^n \quad (3.1-25)$$

όπου η c_n δίνεται από την (3.1-14). Για σχετικά μικρές τιμές του M , το φράγμα ένωσης στην (3.1-25) είναι ικανοποιητικά σφιχτό για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές.

3.2 ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΦΕΡΟΥΣΩΝ

Γνωρίζουμε ότι τα κανάλια που μοντελοποιούνται ως μη ιδανικά γραμμικά φίλτρα εισάγουν ISI, η οποία υποβαθμίζει την απόδοση εν συγκρίσει με το ιδανικό κανάλι. Ο βαθμός της υποβάθμισης της απόδοσης εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας. Επιπλέον, η πολυπλοκότητα του δέκτη αυξάνει καθώς αυξάνει το μήκος της ISI.

Δοθείσας της χαρακτηριστικής ενός συγκεκριμένου καναλιού, ο σχεδιαστής του συστήματος επικοινωνίας πρέπει να αποφασίσει πώς να χρησιμοποιήσει αποδοτικά το διαθέσιμο εύρος ζώνης του καναλιού ώστε να μεταδώσει την πληροφορία αξιόπιστα υπακούοντας ταυτόχρονα στους περιορισμούς που αφορούν την ισχύ του πομπού και την πολυπλοκότητα του δέκτη. Για ένα κανάλι μοντελοποιημένο ως μη ιδανικό γραμμικό φίλτρο, μια επιλογή είναι να χρησιμοποιήσει ένα σύστημα μίας φέρουσας στο οποίο η πληροφοριακή ακολουθία να εκπέμπεται σειριακά με ένα καθορισμένο ρυθμό R σύμβολα/δευτερόλεπτο. Σε ένα τέτοιο κανάλι, η χρονική διασπορά είναι γενικά πολύ μεγαλύτερη από το ρυθμό συμβόλου και, για αυτό το λόγο, προκύπτει ISI από τα μη ιδανικά χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας του καναλιού. Απαιτείται λοιπόν ένας εξισωτής για να αντισταθμίσει την παραμόρφωση του καναλιού.

Μια εναλλακτική προσέγγιση στη σχεδίαση ενός αποδοτικού ως προς το εύρος ζώνης συστήματος επικοινωνίας υπό την παρουσία της παραμόρφωσης του καναλιού είναι να υποδιαιρέσουμε το διαθέσιμο εύρος ζώνης του καναλιού σε ένα πλήθος υποκαναλιών, έτσι ώστε κάθε υποκανάλι να είναι σχεδόν ιδανικό. Για να επεξεργαστούμε την όλη ιδέα, ας υποθέσουμε ότι $C(f)$ είναι η απόκριση συχνότητας ενός μη ιδανικού, περιορισμένης ζώνης καναλιού με ένα εύρος ζώνης W , και ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος του προσθετικού γκαουσιανού θορύβου είναι $\Phi_m(f)$. Τότε, διαιρούμε το εύρος ζώνης W σε $N = W/\Delta f$ υποζώνες εύρους Δf , όπου το Δf επιλέγεται να είναι αρκετά μικρό ώστε ο λόγος $|C(f)|^2/\Phi_m(f)$ να

είναι προσεγγιστικά σταθερός σε κάθε υποζώνη. Επιπλέον, πρέπει να επιλέξουμε η ισχύς του εκπεμπόμενου σήματος να κατανέμεται στη συχνότητα ως $P(f)$, υπακούοντας στον περιορισμό

$$\int_W P(f) df \leq P_{av} \quad (3.2 - 1)$$

όπου P_{av} είναι η διαθέσιμη μέση ισχύς του πομπού. Ας αποτιμήσουμε τη χωρητικότητα ενός μη ιδανικού καναλιού με προσθετικό γκαουσιανό θόρυβο.

3.2.1 Χωρητικότητα ενός Καναλιού Μοντελοποιημένου ως Μη Ιδανικό Γραμμικό Φίλτρο

Υπενθυμίζουμε ότι η χωρητικότητα ενός ιδανικού, περιορισμένης ζώνης, AWGN καναλιού είναι

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P_{av}}{WN_0} \right) \quad (3.2 - 2)$$

όπου C είναι η χωρητικότητα σε bit/s, W είναι το εύρος ζώνης του καναλιού, και P_{av} είναι η μέση εκπεμπόμενη ισχύς. Σε ένα σύστημα πολλαπλών φέρουσων, στο οποίο το Δf είναι αρκετά μικρό, το υποκανάλι έχει χωρητικότητα

$$C_i = \Delta f \log_2 \left[1 + \frac{\Delta f P(f_i) |C(f_i)|^2}{\Delta f \Phi_{nn}(f_i)} \right] \quad (3.2 - 3)$$

Επομένως, η συνολική χωρητικότητα του καναλιού είναι

$$C = \sum_{i=1}^N C_i = \Delta f \sum_{i=1}^N \log_2 \left[1 + \frac{P(f_i) |C(f_i)|^2}{\Phi_{nn}(f_i)} \right] \quad (3.2 - 4)$$

Στο όριο καθώς $\Delta f \rightarrow 0$, λαμβάνουμε τη χωρητικότητα του ολικού καναλιού σε bit/s ως

$$C = \int_W \log_2 \left[1 + \frac{P(f) |C(f)|^2}{\Phi_{nn}(f)} \right] df \quad (3.2 - 5)$$

Κάτω υπό τον περιορισμό για την $P(f)$ που δίνεται στην (3.2 - 1), η επιλογή της $P(f)$ που μεγιστοποιεί τη C μπορεί να προσδιορισθεί μεγιστοποιώντας το ολοκλήρωμα

$$\int_W \left\{ \log_2 \left[1 + \frac{P(f)|C(f)|^2}{\Phi_{nn}(f)} \right] + \lambda P(f) \right\} df \quad (3.2-6)$$

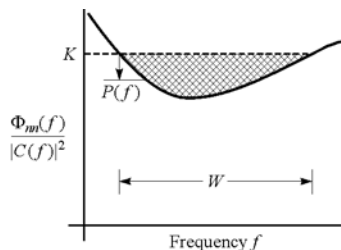
όπου λ είναι ένας πολλαπλασιαστής Lagrange, ο οποίος επιλέχτηκε να ικανοποιεί τον περιορισμό. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση των μεταβολών για να εκτελέσουμε τη μεγιστοποίηση, βρίσκουμε ότι η βέλτιστη κατανομή της ισχύος του εκπεμπόμενου σήματος είναι η λύση στην εξίσωση

$$\frac{1}{|C(f)|^2 P(f) + \Phi_{nn}(f)} + \lambda = 0 \quad (3.2-7)$$

Άρα, η έκφραση $P(f) + \Phi_{nn}(f)/|C(f)|^2$ πρέπει να είναι μια σταθερά, της οποίας η τιμή να ρυθμίζεται για να ικανοποιεί τον περιορισμό στη μέση ισχύ της (3.2-1). Δηλαδή,

$$P(f) = \begin{cases} K - \Phi_{nn}(f)/|C(f)|^2 & (f \in W) \\ 0 & (f \notin W) \end{cases} \quad (3.2-8)$$

Αυτή η έκφραση για τη χωρητικότητα ενός καναλιού μοντελοποιημένου ως μη ιδανικό γραμμικό φίλτρο με προσθετικό γκαουσιανό θόρυβο δόθηκε από τον Shannon (1949). Η βασική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος είναι ότι η ισχύς του σήματος πρέπει να είναι μεγάλη όταν ο SNR του καναλιού $|C(f)|^2/\Phi_{nn}(f)$ είναι μεγάλος, και μικρή όταν ο SNR του καναλιού είναι μικρός. Αυτό το αποτέλεσμα για την ισχύ της εκπεμπόμενης ισχύος φαίνεται στο Σχ.3. Παρατηρούμε ότι αν ο λόγος $\Phi_{nn}(f)/|C(f)|^2$ θεωρηθεί ως ο πάτος ενός μπολ μοναδιαίου βάθους, και χύσουμε μια ποσότητα νερού ίση με P_{av} στο μπολ, το νερό θα κατανείμει τον εαυτό του μέσα στο μπολ έτσι ώστε να επιτύχει τη χωρητικότητα. Αυτό ονομάζεται **ερμηνεία γεμίσματος νερού (water – filling interpretation)** της βέλτιστης κατανομής ισχύος ως συνάρτησης της συχνότητας.



ΣΧΗΜΑ 3.2 – 1 Βέλτιστο φάσμα χυσίματος νερού.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η χωρητικότητα του καναλιού είναι η μικρότερη όταν ο SNR του καναλιού $|C(f)|^2/\Phi_{nn}(f)$ είναι μια σταθερά για όλες τις $f \in W$. Σε αυτή την περίπτωση, η $P(f)$ είναι μια σταθερά για όλα τα $f \in W$. Ισοδύναμα, αν η απόκριση συχνότητας του καναλιού είναι ιδανική, δηλαδή αν

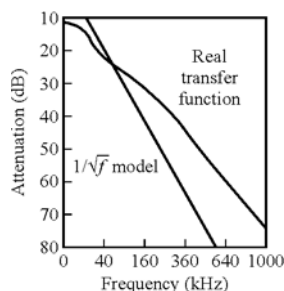
$C(f) \approx 1$ για $f \in W$, τότε η χειρότερη κατανομή ισχύος γκαουσιανού θορύβου, υπό το πρίσμα της μεγιστοποίησης της χωρητικότητας, είναι ο λευκός γκαουσιανός θόρυβος.

Η παραπάνω ανάπτυξη υποθέτει ότι η διαμόρφωση πολλαπλών φέρουσων η οποία διαιρεί το διαθέσιμο εύρος ζώνης του καναλιού σε υποζώνες σχετικά στενού εύρους $\Delta f \approx W/N$ παρέχει μια λύση η οποία θα μπορούσε να αποφέρει ρυθμούς μετάδοσης κοντά στη χωρητικότητα. Το σήμα σε κάθε υποζώνη μπορεί να είναι ανεξάρτητα κωδικοποιημένο και διαμορφωμένο με ένα σύγχρονο ρυθμό συμβόλου $1/\Delta f$, με τη βέλτιστη εκχώρηση ισχύος $P(f)$. Αν το Δf είναι αρκετά μικρό, τότε η $C(f)$ είναι ουσιαστικά σταθερή σε κάθε υποζώνη, και επομένως δεν απαιτείται εξίσωση αφού η ISI είναι αμελητέα.

Η διαμόρφωση πολλαπλών φέρουσων έχει χρησιμοποιηθεί σε modem τόσο για ραδιοκανάλια όσο και για τηλεφωνικά κανάλια. Έχει επίσης προταθεί για μελλοντικές εφαρμογές ψηφιακής εκπομπής ήχου.

Μια ιδιαίτερα ταιριαστή εφαρμογή της διαμόρφωσης πολλαπλών φέρουσων είναι στη ψηφιακή μετάδοση μέσω συνδρομητικών βρόχων χάλκινων καλωδίων. Οι τυπικές χαρακτηριστικές εξασθένησης του καναλιού για τέτοιες συνδρομητικές γραμμές φαίνονται στο σχήμα 3.2 – 2. Παρατηρούμε ότι η εξασθένηση αυξάνει ραγδαία ως συνάρτηση της συχνότητας. Αυτό το χαρακτηριστικό κάνει εξαιρετικά δύσκολη την επίτευξη υψηλού ρυθμού μετάδοσης με ένα διαμορφωμένο φέρον και έναν εξισωτή στο δέκτη. Η ποινή της ISI στην απόδοση είναι πολύ μεγάλη. Από την άλλη μεριά, η διαμόρφωση πολλαπλών φέρουσων με βέλτιστη κατανομή ισχύος παρέχει τη δυνατότητα για ένα υψηλότερο ρυθμό μετάδοσης.

Ο κύριος θόρυβος στη μετάδοση μέσω συνδρομητικών γραμμών είναι η παρεμβολή διαφωνίας από σήματα που μεταφέρονται σε άλλες τηλεφωνικές γραμμές που βρίσκονται στο ίδιο καλώδιο. Η κατανομή ισχύος αυτού του είδους θορύβου είναι επίσης εξαρτώμενη από τη συχνότητα, κάτι το οποίο μπορεί να ληφθεί υπόψη στην εκχώρηση της διαθέσιμης εκπεμπόμενης ισχύος.



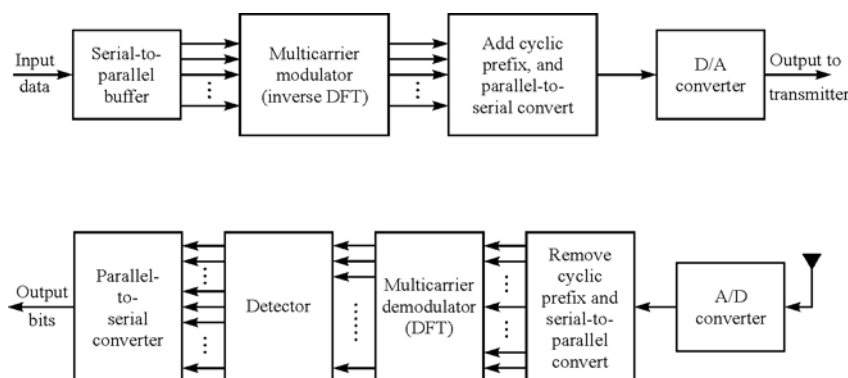
ΣΧΗΜΑ 3.2 – 2 Χαρακτηριστική εξασθένησης ενός 24 gauge 12 kft PIC βρόχου.

Μια διαδικασία σχεδίασης για ένα QAM σύστημα πολλαπλών φέρουσων για ένα κανάλι μοντελοποιημένο ως ένα μη ιδανικό γραμμικό φίλτρο δίνεται από τον Kalet (1989). Σε αυτή τη διαδικασία, ο συνολικός ρυθμός bit μεγιστοποιείται, μέσω της σχεδίασης μιας βέλτιστης διανομής ισχύος στις υποφέρουσες και μιας βέλτιστης επιλογής του πλήθους των bit ανά σύμβολο (μεγέθη των διαγραμμάτων των QAM σημάτων) για κάθε υποφέρουσα, κάτω υπό τον περιορισμό της μέσης ισχύος και υπό τον περιορισμό ότι οι πιθανότητες σφάλματος συμβόλου για όλες τις υποφέρουσες είναι ίσες.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε μια υλοποίηση ενός QAM διαμορφωτή και αποδιαμορφωτή πολλαπλών φέρουσων η οποία βασίζεται στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) για τη δημιουργία των πολλαπλών φέρουσων.

3.2.2 Ένα Σύστημα Πολλαπλών Φέρουσων Βασισμένο στον FFT

Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε ένα σύστημα επικοινωνίας πολλαπλών φέρουσων το οποίο χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (FFT) για να συνθέσει το σήμα στον πομπό και να αποδιαμορφώσει το λαμβανόμενο σήμα στο δέκτη. Ο FFT είναι απλά το αποδοτικό υπολογιστικό εργαλείο για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT).



ΣΧΗΜΑ 3.2 – 3 Σύστημα επικοινωνίας πολλαπλών φερόντων.

Το Σχ.3.2 – 3 δείχνει ένα διάγραμμα βαθμίδων ενός συστήματος επικοινωνίας με πολλαπλές φέρουσες. Ένας buffer σειριακού – σε – παράλληλο χωρίζει την πληροφοριακή ακολουθία σε πλαίσια των N_f bit. Τα N_f bit σε κάθε πλαίσιο οργανώνονται σε \tilde{N} ομάδες, όπου στην i – οστή ομάδα εκχωρούνται \tilde{n}_i bit, και

$$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{n}_i = N_f \quad (3.2 - 9)$$

Κάθε ομάδα μπορεί να κωδικοποιηθεί ξεχωριστά, έτσι ώστε το πλήθος των bit εξόδου από τον αποκωδικοποιητή για την i – οστή ομάδα να είναι $n_i \geq \tilde{n}_i$.

Βολεύει να δούμε τη διαμόρφωση πολλαπλών φέρουσων να αποτελείται από \tilde{N} ανεξάρτητα QAM κανάλια, όπου το καθένα λειτουργεί με ρυθμό συμβόλου $1/T$, αλλά έχει διαφορετικό QAM διάγραμμα (μέγεθος). Για παράδειγμα, στο QAM διάγραμμα του i – οστού καναλιού θα υπάρχουν $M_i = 2^{n_i}$ σημεία. Συμβολίζουμε τα μιγαδικά σημεία του σήματος που αντιστοιχούν στα σύμβολα πληροφορίας στα υποκανάλια με $X_k, k = 0, 1, \dots, \tilde{N}-1$. Για να διαμορφώσουμε τις \tilde{N} υποφέρουσες με τα πληροφοριακά σύμβολα $\{X_k\}$, χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο DFT (IDFT). Όμως, αν υπολογίσουμε τον IDFT \tilde{N} σημείων του $\{X_k\}$, θα λάβουμε μια μιγαδική χρονική σειρά, η οποία δεν είναι ισοδύναμη με τις \tilde{N} QAM διαμορφωμένες υποφέρουσες. Αντί αυτού, δημιουργούμε $N = 2\tilde{N}$ σύμβολα πληροφορίας ορίζοντας

$$X_{N-k} = X_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, \tilde{N}-1 \quad (3.2 - 10)$$

και $X'_0 = \text{Re}(X_0)$, $X_{\tilde{N}} = \text{Im}(X_0)$. Έτσι, το σύμβολο X_0 χωρίζεται σε δύο τμήματα, και τα δύο πραγματικά. Έπειτα, ο IDFT N σημείων αποφέρει την πραγματική ακολουθία

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.2 - 11)$$

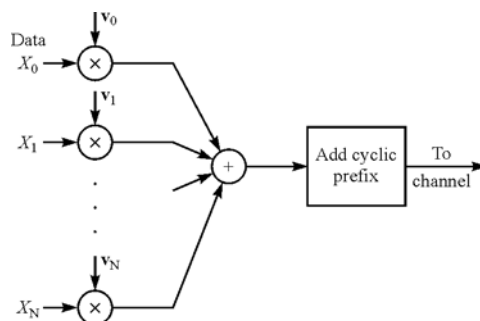
όπου ο $1/\sqrt{N}$ είναι απλά ένας συντελεστής κλιμάκωσης.

Η ακολουθία $\{x_n, 0 \leq n \leq N-1\}$ αντιστοιχεί στα δείγματα του αθροίσματος $x(t)$ των \tilde{N} σημάτων υποφέρουσας, που εκφράζεται ως

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kt/T}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.2 - 12)$$

όπου T είναι η διάρκεια του συμβόλου. Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες των υποφέρουσων είναι $f_k = k/T$, $k = 0, 1, \dots, N$. Επιπλέον, η ακολουθία διακριτού χρόνου $\{x_n\}$ στην (3.2 - 11) αναπαριστά τα δείγματα του $x(t)$ που λαμβάνονται στις χρονικές στιγμές $t = nT/N$, όπου $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Ο υπολογισμός του IDFT των δεδομένων $\{X_k\}$ όπως δίνονται στην (3.2 - 10), μπορεί να ειπωθεί ως πολλαπλασιασμός κάθε σημείου δεδομένων X_k με ένα αντίστοιχο διάνυσμα



ΣΧΗΜΑ 3.2 - 4 Σύνθεση σήματος για διαμόρφωση πολλαπλών φέρουσων (Multi - Carrier Modulation, MCM) βασισμένη στον IDFT.

$$\mathbf{v}_k = [v_{k0} \quad v_{k1} \quad \dots \quad v_{k(N-1)}] \quad (3.2 - 13)$$

όπου

$$v_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j(2\pi/N)/kn} \quad (3.2 - 14)$$

όπως φαίνεται και στο Σχ.3.2 - 3. Σε κάθε περίπτωση, ο υπολογισμός του DFT εκτελείται αποδοτικά με τη χρήση του FFT αλγόριθμου.

Στην πράξη, τα δείγματα του σήματος $\{x_n\}$ περνάνε μέσα από έναν D/A μετατροπέα, του οποίου η έξοδος, ιδανικά, θα ήταν η κυματομορφή $x(t)$. Η έξοδος του καναλιού είναι η κυματομορφή

$$r(t) = x(t) * h(t) + n(t) \quad (3.2 - 15)$$

όπου $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του καναλιού και $*$ είναι ο τελεστής της συνέλιξης. Επιλέγοντας το εύρος ζώνης Δf κάθε υποκαναλιού να είναι πολύ μικρό, η διάρκεια του συμβόλου $T = 1/\Delta f$ είναι μεγάλη εν συγκρίσει με τη χρονική διασπορά του καναλιού. Για να γίνουμε συγκεκριμένοι, ας υποθέσουμε ότι η χρονική διασπορά του καναλιού έχει μήκος $\nu + 1$ δειγμάτων του σήματος, όπου $\nu \ll N$. Ένας τρόπος να αποφύγουμε την επίδραση της ISI είναι να εισάγουμε μια χρονική ζώνη προστασίας διάρκειας $\nu T/N$ ανάμεσα στις εκπομπές διαδοχικών μπλοκ.

Μια εναλλακτική μέθοδος για να αποφύγουμε την ISI είναι να προσαρτήσουμε ένα κυκλικό πρόθεμα σε κάθε μπλοκ των N δειγμάτων σήματος $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$. Αυτά τα νέα δείγματα προσαρτώνται στην αρχή κάθε μπλοκ. Παρατηρούμε ότι η πρόσθεση του κυκλικού προθέματος στο μπλοκ των δεδομένων αυξάνει το μήκος του μπλοκ στα $N + \nu$ δείγματα, τα οποία έχουν δείκτες $n = -\nu, -\nu + 1, \dots, N - 1$, όπου τα πρώτα ν δείγματα αποτελούν το κυκλικό πρόθεμα. Στη συνέχεια, αν η $\{h_n, 0 \leq n \leq \nu\}$ συμβολίζει τη δειγματοληπτημένη κρουστική απόκριση του καναλιού, η συνέλιξή της με την $\{x_n, -\nu \leq n \leq N - 1\}$ παράγει τη λαμβανόμενη ακολουθία $\{r_n\}$. Ενδιαφερόμαστε για τα δείγματα της $\{r_n\}$ για $0 \leq n \leq N - 1$, από τα οποία ανακτούμε την εκπεμπόμενη ακολουθία χρησιμοποιώντας τον DFT N σημείων για την αποδιαμόρφωση. Έτσι, τα πρώτα ν δείγματα του $\{r_n\}$ αποβάλλονται.

Αν εξετάσουμε το όλο θέμα στο πεδίο της συχνότητας, όταν η κρουστική απόκριση του καναλιού είναι $\{h_n, 0 \leq n \leq \nu\}$, η απόκριση συχνότητάς του στις συχνότητες των υποφέρουσων $f_k = k/N$ είναι

$$H_k \equiv H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{\nu} h_n e^{-j2\pi nk/N} \quad (3.2 - 16)$$

Λόγω του κυκλικού προθέματος, διαδοχικά μπλοκ (πλαίσια) της εκπεμπόμενης πληροφοριακής ακολουθίας δεν παρεμβάλλονται και, για αυτό το λόγο, η αποδιαμορφωμένη ακολουθία μπορεί να εκφραστεί ως

$$\hat{X}_k = H_k X_k + n_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.2 - 17)$$

όπου $\{\hat{X}_k\}$ είναι η έξοδος του DFT N σημείων αποδιαμορφωτή, και n_k είναι ο προσθετικός θόρυβος που μολύνει το σήμα. Παρατηρούμε ότι επιλέγοντας $N \gg \nu$, η απώλεια στον ρυθμό λόγω του κυκλικού προθέματος μπορεί να καταστεί αμελητέα.

Όπως φαίνεται στο Σχ.3.2 - 3, η πληροφορία αποδιαμορφώνεται υπολογίζοντας τον DFT του λαμβανόμενου σήματος αφού έχει περάσει πρώτα από έναν A/D

μετατροπέα. Ο υπολογισμός του DFT μπορεί να θεωρηθεί ως ένας πολλαπλασιασμός των δειγμάτων του λαμβανόμενου σήματος $\{r_n\}$ από τον A/D μετατροπέα με το \mathbf{v}_n^* , όπου το \mathbf{v}_n ορίζεται στην (3.2 – 12). Όπως και στην περίπτωση του διαμορφωτή, ο υπολογισμός του DFT στον αποδιαμορφωτή εκτελείται αποδοτικά με χρήση του αλγόριθμου FFT.

Είναι εύκολο να εκτιμήσουμε και να αντισταθμίσουμε τους παράγοντες του καναλιού $\{H_k\}$ προτού περάσουμε τα δεδομένα στον ανιχνευτή και στον αποκωδικοποιητή. Ένα σήμα εκμάθησης το οποίο αποτελείται είτε από μια γνωστή διαμορφωμένη ακολουθία σε κάθε μια από τις υποφέρουσες είτε από αδιαμόρφωτες υποφέρουσες μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετρήσουμε το $\{H_k\}$ στο δέκτη. Αν οι παράμετροι του καναλιού μεταβάλλονται αργά με το χρόνο, είναι επίσης δυνατό να ιχνηλατήσουμε τις χρονικές μεταβολές χρησιμοποιώντας τις αποφάσεις στην έξοδο του ανιχνευτή ή του αποκωδικοποιητή, με έναν τρόπο λειτουργίας αποφάσεων (decision – directed mode). Έτσι, το σύστημα πολλαπλών φέρουσων μπορεί να καταστεί προσαρμοστικό.

Ο τύπος QAM διαμόρφωσης πολλαπλών φέρουσων που περιγράφηκε παραπάνω, έχει υλοποιηθεί σε ένα πλήθος εφαρμογών, συμπεριλαμβάνοντας τη μετάδοση σε υψηλή ταχύτητα μέσω τηλεφωνικών γραμμών, όπως είναι οι ψηφιακές συνδρομητικές γραμμές.

Είναι δυνατές και άλλες μορφές υλοποίησης εκτός από τον DFT. Για παράδειγμα, μια τράπεζα ψηφιακών φίλτρων η οποία βασικά εκτελεί τον DFT μπορεί να αντικαταστήσει την υλοποίηση που βασίζεται στον FFT όταν το πλήθος των υποφέρουσων είναι μικρό ($N \leq 32$). Για μεγάλο πλήθος υποφέρουσων ($N > 32$), τα συστήματα που βασίζονται στον FFT είναι υπολογιστικά πιο αποδοτικά.

Ένας περιορισμός των διαμορφωτών και αποδιαμορφωτών τύπου DFT προκύπτει από τους σχετικά μεγάλους πλευρικούς λοβούς στη συχνότητα οι οποίοι είναι έμφυτοι στις τράπεζες φίλτρων τύπου DFT. Ο πρώτος πλευρικός λοβός είναι μόνο 13 dB κάτω από το μέγιστο στην επιθυμητή υποφέρουσα. Συνεπώς, οι υλοποιήσεις που βασίζονται στον DFT είναι ευπαθής στη διακαναλική παρεμβολή (Inter – Channel Interference, ICI), εκτός και αν χρησιμοποιείται ένα πλήρες κυκλικό πρόθεμα. Αν η ICI είναι ένα πρόβλημα, λόγω των ανωμαλιών του καναλιού, μπορεί να καταφύγει κάποιος σε άλλους τύπους τραπεζών ψηφιακών φίλτρων τα οποία έχουν πολύ μικρότερους πλευρικούς λοβούς. Συγκεκριμένα, η κατηγορία των τραπεζών ψηφιακών φίλτρων πολλαπλών ρυθμών (multirate) τα οποία έχουν, μαζί τα φίλτρα που στηρίζονται στα κυματοπακέτα (wavelets), την ιδιότητα της τέλει ανακατασκευής, αποτελούν μια ελκυστική εναλλακτική λύση.

3.3 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η εκπομπή πολλαπλών καναλιών χρησιμοποιείται συχνά σε χρονικά μεταβαλλόμενα κανάλια για να υπερβούμε την επίδραση των διαλείψεων του σήματος. Σχετικές με τη μελέτη που κάναμε πάνω στις ψηφιακές επικοινωνίες πολλαπλών καναλιών είναι οι δημοσιεύσεις του Price (1962a,b).

Υπάρχει πληθώρα κειμένων για τα ψηφιακά συστήματα πολλαπλών φερόντων στη βιβλιογραφία. Τέτοια συστήματα υλοποιήθηκαν και χρησιμοποιούνται για πάνω από 30 χρόνια. Ένα από τα πρώτα συστήματα, το οποίο περιγράφεται από τον Doeltz κ.ά. (1957), και ονομάζεται Kineplex, χρησιμοποιήθηκε για ψηφιακή εκπομπή στην HF μάλιστα. Άλλη πρόωμη εργασία στη σχεδίαση συστημάτων πολλαπλών φερόντων

βρίσκουμε στις δημοσιεύσεις των Chang (1966) και Saltzberg (1967). Η χρήση του DFT για διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση των συστημάτων πολλαπλών φερόντων προτάθηκε από τους Weinstein και Elbert (1971).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια παρουσιάζει η χρήση της ψηφιακής εκπομπής πολλαπλών φερόντων για δεδομένα, τηλεομοιοτυπία, και video σε μια ποικιλία καναλιών, που περιλαμβάνει το στενής ζώνης (4 KHz) επιλεγόμενο τηλεφωνικό δίκτυο, την τηλεφωνική ομάδα των 48 KHz, τις ψηφιακές συνδρομητικές γραμμές, κυψελοειδή ραδιοσυστήματα, και εκπομπή ήχου. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε πολλές δημοσιεύσεις από τη βιβλιογραφία. Ως παραδείγματα αναφέρουμε τις δημοσιεύσεις τον Hirosaki (1981), Hirosaki κ.ά. (1986), Chow κ.ά. (1991), και η ανασκόπηση του Bingham (1990). Η δημοσίευση του Kalet (1989) δίνει μια σχεδιαστική διαδικασία για βετλιστοποίηση του ρυθμού σε ένα QAM σύστημα πολλαπλών φερόντων με περιορισμό στην ισχύ του εκπομπού και στα χαρακτηριστικά του καναλιού. Τέλος, αναφέρουμε το βιβλίο του Vaidyanathan (1993), και τις δημοσιεύσεις των Tzanes κ.ά. (1994) και Rizos κ.ά. (1994) για τη μελέτη των τραπεζών φίλτρων πολλαπλού ρυθμού, και το βιβλίο του Starr κ.ά. (1999) για τις εφαρμογές της διαμόρφωσης πολλαπλών φερόντων για ψηφιακή μετάδοση σε ψηφιακές συνδρομητικές γραμμές.

- Bingham, J. A. C. (1990). “Multicarrier Modulation for Data Transmission: An Idea Whose Time Has Come”, *IEEE Commun. Mag.*, vol. 28, pp.5 – 14, May.
- Chang, R. W. (1966). “Synthesis of Band – Limited Orthogonal Signals for Multichannel Data Transmission”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 1775 – 1796, December.
- Chow, J. S., Tu, J. C., and Cioffi, J. M. (1991). “A Discrete Multitone transceiver System for HDSL Applications”, *IEEE J. Selected Areas on Commun.*, vol. SAC – 9, p.p. 895 – 908, August.
- Doeltz, M. L., Heald, E. T., and Martin, D. L. (1957). “Binary Data Trnasmission Techniques for Linear Systems”, *Proc. IRE*, vol. 45, pp. 656 – 661, May.
- Hirosaki, B. (1981). “An Orthogonality Multiplexed QAM System Using the Discrete Fourier Transform”, *IEEE Trans. Commun.* vol. COM – 29, pp. 982 – 989, July.
- Hirosaki, B., Hasegawa, S., and Sabato, A. (1986). “Advanced Group – Band Modem Using Orthogonality Multiplexed QAM Techniques”, *IEEE trans. Commun.*, vol. COM – 34, pp. 587 – 592, June.
- Kalet, I. (1989). “The Multitone Channel”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 37, pp.119 – 124, February.
- Price, R. (1962a). “Error Probabilities for Adaptive Multichannel Reception of Binary Signals”, MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA, Tech. Report No. 258, July.
- Price, R. (1962b). “Error Probabilities for Adaptive Multichannel Reception of Binary Signals”, *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT – 8, pp. 305 – 316, September.
- Rizos, A.D, Proakis, J. G., and Nguyen, T.Q. (1994). “Comparison of DFT and Cosine Modulated Filter Banks in Multicarrier Modulation”, *Proc. Globecom'94*, p.p. 687 – 691, San Francisco, CA, November.
- Saltzberg, B. R. (1967) “Performance of an Efficient Parallel Data Transmission System”, *IEEE Trans. Commun.* vol. COM – 15, pp. 805 – 811, December.
- Starr, T., Cioffi, J. M., and Silverman, P. J. (1999). *Digital Subscriber Line Technology*, Prentice – Hall, Upper Sadle River, NJ.

- Tzannes, M. A., Tzannes, M. C., Proakis, J. G., and Heller, P. N. (1994). “DMT Systems, DWMT Systems and Digital Filter Banks”, *Proc. Int. Conf. Commun.*, pp. 31 – 315, New Orleans, LA, May 1 – 5.
- Vaidyanathan, P. P. (1993). *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice – Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Weinstein, S. B. and Elbert, P . M. (1971). “Data Transmission by Frequency – Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform”, *IEEE Trans. Commun.* vol. COM – 19, pp. 628 – 634, October.

ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΕΥΡΥΜΕΝΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

Τα **σήματα διευρυμένου φάσματος (spread spectrum signals)** που χρησιμοποιούνται για την μετάδοση ψηφιακής πληροφορίας διακρίνονται για το χαρακτηριστικό ότι το φάσμα τους W είναι αρκετά πιο μεγάλο από τον πληροφοριακό ρυθμό R σε bits/s. Έτσι, ο **συντελεστής διεύρυνσης φάσματος (spreading factor)** $B_e = W/R$ για ένα σήμα διευρυμένου φάσματος είναι πολύ μεγαλύτερος από την μονάδα. Ο μεγάλος ενυπάρχων πλεονασμός στα σήματα διευρυμένου φάσματος απαιτείται για να ξεπεράσει τα ισχυρά επίπεδα παρεμβολής που συναντώνται στην μετάδοση ψηφιακής πληροφορίας πάνω σε κάποια ραδιοκανάλια, και πάνω σε κάποια δορυφορικά κανάλια. Εφόσον οι κωδικοποιημένες κυματομορφές χαρακτηρίζονται επίσης από ένα συντελεστή διεύρυνσης φάσματος μεγαλύτερο από την μονάδα, και εφόσον η κωδικοποίηση είναι μια αποδοτική μέθοδος για να εισαχθεί η πλεονεξία, συμπεραίνουμε ότι η κωδικοποίηση είναι ένα σημαντικό στοιχείο στο σχεδιασμό σημάτων διευρυμένου φάσματος.

Ένα σημαντικό στοιχείο που λαμβάνεται υπόψιν στον σχεδιασμό των σημάτων διευρυμένου φάσματος είναι η ψευδοτυχειότητα, που κάνει τα σήματα να δείχνουν παρεμφορη με τον τυχαίο θόρυβο και δυσκολεύει την αποδιαμόρφωση από μη επιθυμητούς δέκτες. Το στοιχείο αυτό είναι στενά συνδεδεμένο με την εφαρμογή και τον σκοπό τέτοιων σημάτων.

Για να είμαστε συγκεκριμένοι, τα σήματα διευρυμένου φάσματος χρησιμοποιούνται για

- την αντιμετώπιση ή την καταστολή των επιβλαβών επιδράσεων της παρεμβολής λόγω των κακόβουλων παρεμβολών, της παρεμβολής που γεννάται από άλλους χρήστες στο κανάλι, και της αυτοπαρεμβολής που γεννάται λόγω διάδοσης από πολλαπλά μονοπάτια.
- να κρυφτεί ένα σήμα μεταδίδοντάς το σε χαμηλή ισχύ, και έτσι να γίνει δύσκολο για ένα ανεπιθύμητο ακροατή να το ανιχνεύσει παρουσία θορύβου.
- να επιτευχθεί ασφαλής μετάδοση του μηνύματος, παρουσία πολλών ακροατών.

Σε άλλες εφαρμογές πέραν των επικοινωνιών, τα σήματα διευρυμένου φάσματος χρησιμοποιούνται για να επιτευχθεί ακριβής εμβέλεια (χρονική καθυστέρηση) και ταχύτητας μετρήσεις στα ραντάρ και την ναυσιπλοία. Για λόγους απλότητας, θα οριοθετήσουμε την συζήτησή μας σε εφαρμογές ψηφιακών επικοινωνιών.

Στην αντιμετώπιση της **επιτηδευμένης παρεμβολής (jamming)**, είναι σημαντικό για τους επικοινωνούντες ο παρεμβολέας να μην έχει εκ των προτέρων γνώση των χαρακτηριστικών του σήματος, εκτός του συνολικού εύρους ζώνης του καναλιού και του τύπου της διαμόρφωσης (PSK, FSK, κτλ.) που χρησιμοποιείται. Εάν η ψηφιακή πληροφορία κωδικοποιείται, ένας εξελιγμένος παρεμβολέας μπορεί να μιμηθεί εύκολα το μεταδιδόμενο σήμα που μεταδίδεται από τον πομπό και να μπερδέψει έτσι τον δέκτη. Για να εξαλειφθεί αυτή η πιθανότητα, ο πομπός εισάγει ένα στοιχείο μη προβλεψιμότητας ή τυχειότητας (ψευδοτυχειότητας) σε κάθε μία από τις μεταδιδόμενες κωδικοποιημένες κυματομορφές, που είναι γνωστό στον προοριζόμενο δέκτη και όχι στον παρεμβολέα. Σαν επακόλουθο, ο παρεμβολέας πρέπει να συνθέσει και να μεταδώσει ένα παρεμβαλλόμενο σήμα χωρίς γνώση του ψευδοτυχειού στοιχείου.

Στα συστήματα επικοινωνιών πολλαπλής προσπέλασης, γεννάται παρεμβολή από τους άλλους χρήστες, στην οποία ένας αριθμός από χρήστες μοιράζονται ένα κοινό εύρος καναλιού. Σε οποιαδήποτε δοθείσα χρονική στιγμή, ένα υποσύνολο αυτών των χρηστών μπορεί να μεταδώσει πληροφορία ταυτόχρονα πάνω στο κοινό κανάλι στους αντίστοιχους δέκτες. Υποθέτοντας ότι όλοι οι χρήστες κατέχουν τον ίδιο κώδικα για κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση των αντίστοιχων πληροφοριακών ακολουθιών τους, τα μεταδιδόμενα σήματα σε αυτό το κοινό φάσμα μπορούν να διακριθούν το ένα από το άλλο υπερθέτοντας μία ψευδοτυχαία ακολουθία, που καλείται κώδικας, σε κάθε μεταδιδόμενο σήμα. Έτσι, ένας συγκεκριμένος χρήστης μπορεί να ανακτήσει την προοριζόμενη σε αυτόν πληροφορία που μεταδόθηκε, γνωρίζοντας το ψευδοτυχαίο στοιχείο, για παράδειγμα το κλειδί, που χρησιμοποιήθηκε από τον αντίστοιχο εκπομπό. Αυτός ο τύπος της τεχνικής επικοινωνιών, που επιτρέπει πολλαπλούς χρήστες ταυτόχρονα να χρησιμοποιήσουν ένα κοινό κανάλι για μετάδοση πληροφορίας, καλείται **πολλαπλή προσπέλαση με επιλογή κώδικα (Code Division Multiple Access, CDMA)**. Η CDMA τεχνική θα μελετηθεί στις παραγράφους 4.2 και 4.3.

Οι ευδιαχωριζόμενες συνιστώσες πολλαπλών μονοπατιών που απορρέουν από την διασπαρμένη χρονικά μετάδοση μέσα από ένα κανάλι, μπορούν να θεωρηθούν σαν μία μορφή αυτοπαρεμβολής. Αυτό το είδος της παρεμβολής μπορεί να κατασταλεί με την εισαγωγή μίας ψευδοτυχαίας ακολουθίας στο μεταδιδόμενο σήμα, όπως θα περιγραφεί παρακάτω.

Ένα μήνυμα μπορεί να κρυφτεί μέσα στο θόρυβο διευρύνοντας το φάσμα με την κωδικοποίηση και μεταδίδοντάς το σε χαμηλή μέση ισχύ. Εξαιτίας του χαμηλού μέσου επιπέδου ισχύος, το μεταδιδόμενο σήμα θεωρείται κεκαλυμμένο. Έχει χαμηλή πιθανότητα να αναχαιτιστεί (ανιχνευτεί) από ένα τυχαίο ακροατή και έτσι καλείται σήμα **χαμηλής πιθανότητας αναχαιτίσης (Low Probability of Intercept, LPI)**.

Τελικά, η ασφάλεια απορρήτου ενός μηνύματος μπορεί να επιτευχθεί υπερθέτοντας μία ψευδοτυχαία ακολουθία στο μεταδιδόμενο σήμα. Το μήνυμα μπορεί να αποδιαμορφωθεί από τους προοριζόμενους χρήστες, οι οποίοι ξέρουν την ψευδοτυχαία ακολουθία ή το κλειδί που χρησιμοποιείται από τον πομπό, αλλά όχι από άλλους δέκτες οι οποίοι δεν έχουν γνώση του κλειδιού.

Στις ακόλουθες παραγράφους, θα περιγράψουμε έναν αριθμό από διαφορετικού είδους σήματα διευρυμένου φάσματος, τα χαρακτηριστικά τους, και την εφαρμογή τους. Η έμφαση θα δοθεί στην χρήση σημάτων διευρυμένου φάσματος για την καταστολή της κακόβουλα ηθελημένης παρεμβολής (antijam ή AJ σήματα), για την CDMA, και για τα LPI. Πριν συζητήσουμε το πρόβλημα σχεδιασμού του σήματος, θα συζητήσουμε περιεκτικά τα είδη των χαρακτηριστικών καναλιού που υποθέτονται για εφαρμογές που αναφέρθηκαν παραπάνω.

4.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΝΟΣ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΔΙΕΥΡΥΜΕΝΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

Το μπλοκ διάγραμμα που φαίνεται στο σχήμα 4.1 – 1 δείχνει τα βασικά στοιχεία ενός ψηφιακού συστήματος επικοινωνιών διευρυμένου φάσματος με μία δυαδική ακολουθία πληροφορίας στην είσοδό του στο τέλος της μετάδοσης, και στην έξοδό του στο τέλος της λήψης. Ο κωδικοποιητής και ο αποκωδικοποιητής καναλιού και ο διαμορφωτής και αποδιαμορφωτής είναι βασικά στοιχεία του συστήματος. Πρόσθετα με αυτά τα στοιχεία, έχουμε δύο γεννήτριες ταυτόσημης ψευδοτυχαίας ακολουθίας, η μία που συνδέεται με τον διαμορφωτή στο άκρο της μετάδοσης, και η δεύτερη που συνδέεται με τον αποδιαμορφωτή στο τέρμα της μετάδοσης. Οι γεννήτριες παράγουν μια ψευδοτυχαία ή δυαδικής τιμής ακολουθία ψευδοθορύβου (PN) που εφαρμόζεται στο μεταδιδόμενο σήμα στον διαμορφωτή και στον αποδιαμορφωτή και αφαιρείται από το λαμβανόμενο σήμα στον αποδιαμορφωτή.

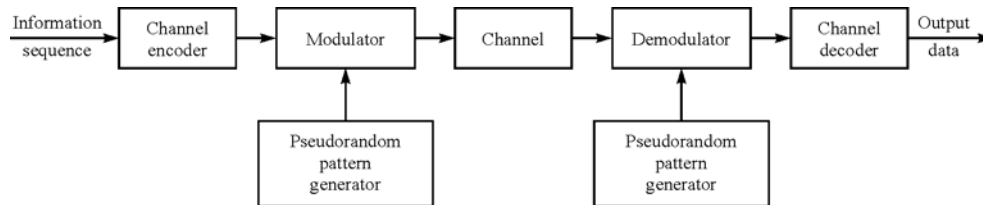
Ο συγχρονισμός της ψευδοτυχαίας ακολουθίας που γεννάται στον δέκτη, με την ψευδοτυχαία ακολουθία που περιέχεται στο εισερχόμενο λαμβανόμενο σήμα, απαιτείται για να αποδιαμορφωθεί το λαμβανόμενο σήμα. Αρχικά, πριν την μετάδοση της πληροφορίας, ο συγχρονισμός μπορεί να επιτευχθεί μεταδίδοντας μια σταθερή ψευδοτυχαία ακολουθία από bits που ο δέκτης θα αναγνωρίσει με την παρουσία παρεμβολής με μεγάλη πιθανότητα. Μετά τον συγχρονισμό των γεννητριών, μπορεί να αρχίσει η μετάδοση της πληροφορίας.

Η παρεμβολή εισάγεται στο πληροφοριακό σήμα μέσα στο κανάλι. Τα χαρακτηριστικά της παρεμβολής εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό στην προέλευσή της. Μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σαν ευρείας ζώνης ή στενής ζώνης, σχετικά με το εύρος ζώνης του πληροφοριακού σήματος, και είτε συνεχής, είτε παλμική (διακριτή) στο πεδίο του χρόνου. Για παράδειγμα, ένα σήμα παρεμβολής μπορεί να αποτελείται από ένα ή περισσότερα ημίτονα στο φάσμα που χρησιμοποιείται για την μετάδοση της πληροφορίας. Οι συχνότητες των ημιτόνων μπορούν να παραμείνουν σταθερές, ή να αλλάξουν με τον χρόνο σύμφωνα με κάποιο κανόνα. Σαν δεύτερο παράδειγμα, η παρεμβολή που γεννάται στην CDMA από άλλους χρήστες του καναλιού μπορεί να είναι είτε ευρείας ζώνης είτε στενής ζώνης, εξαρτώμενη από το είδος του σήματος διευρυμένου φάσματος που εφαρμόζεται για να επιτευχθεί η πολλαπλή πρόσβαση. Εάν είναι ευρείας ζώνης, μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ισοδύναμος λευκός προσθετικός γκαουσιανός θόρυβος. Θα αναλύσουμε αυτά τα είδη της παρεμβολής και κάποια άλλα στις ακόλουθες παραγράφους.

Η επεξεργασία των σημάτων διευρυμένου φάσματος θα εστιαστεί στην απόδοση του ψηφιακού συστήματος επικοινωνίας με την παρουσία παρεμβολής ευρείας αλλά και στενής ζώνης. Θεωρούνται δύο είδη διαμόρφωσης: PSK και FSK. Η PSK είναι κατάλληλη σε εφαρμογές όπου η συμφωνία φάσης μεταξύ του μεταδιδόμενου σήματος και του λαμβανόμενου σήματος μπορεί να διατηρηθεί πάνω σε ένα χρονικό διάστημα σχετικά μεγάλο σε σύγκριση με το αντίστροφο κλάσμα του εύρους ζώνης του σήματος. Από την άλλη, η FSK διαμόρφωση είναι κατάλληλη σε εφαρμογές που δεν μπορεί να επιτευχθεί συμφωνία φάσης λόγω των μεταβαλλόμενων με τον χρόνο επιδράσεων στο κανάλι επικοινωνίας. Αυτό μπορεί να γίνεται για παράδειγμα στην περίπτωση ζεύξης μεταξύ δύο αεροσκαφών υψηλής ταχύτητας, ή μεταξύ ενός αεροσκάφους υψηλής ταχύτητας και ενός τερματικού εδάφους.

Η PN ακολουθία που γεννάται στον διαμορφωτή χρησιμοποιείται μαζί με την PSK διαμόρφωση για να μεταβάλλει την φάση του PSK σήματος ψευδοτυχαία όπως περιγράφεται στην παράγραφο 4.2. Το διαμορφωμένο σήμα καλείται **άμεσης ακολουθίας (Direct Sequence, DS)** ή ένα **ψευδοθορυβικό (Pseudo – Noise) σήμα**

διευρυμένου φάσματος. Όταν χρησιμοποιείται σε σχέση με δυαδική ή M – αδική ($M > 2$) FSK, η ψευδοτυχαία ακολουθία επιλέγει την συχνότητα του μεταδιδόμενου σήματος ψευδοτυχαία. Το σήμα αυτό καλείται σήμα διευρυμένου φάσματος με **άλματα συχνότητας (Frequency Hopping, FH)**. Αν και ένας αριθμός από άλλα είδη από σήματα διευρυμένου φάσματος θα περιγραφεί εν συντομία, η έμφαση θα δοθεί σε PN και σε FH σήματα.



ΣΧΗΜΑ 4.1 – 1 Μοντέλο ψηφιακού συστήματος επικοινωνίας διευρυμένου φάσματος.

4.2 ΑΜΕΣΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΕΥΡΥΜΕΝΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

Στο μοντέλο που φαίνεται στο σχήμα 4.1 – 1, θεωρούμε ότι ο πληροφοριακός ρυθμός στην είσοδο του κωδικοποιητή είναι R bits/s και το διαθέσιμο φάσμα καναλιού είναι W Hz. Η διαμόρφωση θεωρείται δυαδική PSK. Για να αξιοποιηθεί το συνολικό διαθέσιμο εύρος ζώνης καναλιού, η φάση του φέροντος μεταβάλλεται ψευδοτυχαία σύμφωνα με την ακολουθία από την PN γεννήτρια σε ένα ρυθμό W φορές/δευτερόλεπτο. Το αντίστροφο του W που συμβολίζεται με T_c , δείχνει την διάρκεια ενός τετραγωνικού παλμού, που καλείται **chip (τεμάχιο)**, ενώ το T_c καλείται **διάστημα chip (chip interval)**. Ο παλμός είναι το βασικό στοιχείο σε ένα DS σήμα διευρυμένου φάσματος.

Εάν θεωρήσουμε $T_b = 1/R$ την διάρκεια ενός τετραγωνικού παλμού που αντιστοιχεί στον χρόνο μετάδοσης ενός πληροφοριακού bit, ο συντελεστής διεύρυνσης φάσματος W/R μπορεί να εκφραστεί σαν

$$B_e = \frac{W}{R} = \frac{T_b}{T_c} \quad (4.2 - 1)$$

Σε πρακτικά συστήματα, η αναλογία T_b/T_c είναι ένας ακέραιος,

$$L_c = \frac{T_b}{T_c} \quad (4.2 - 2)$$

που δείχνει τον αριθμό των chip ανά bit πληροφορίας. Έτσι, L_c είναι ο αριθμός των ολισθήσεων φάσης που συμβαίνουν στο μεταδιδόμενο σήμα κατά την διάρκεια του bit $T_b = 1/R$. Το σχήμα 4.2 – 1(a) δείχνει τις σχέσεις μεταξύ του PN σήματος και του πληροφοριακού σήματος.

Ας θεωρήσουμε ότι ο κωδικοποιητής παίρνει k bits πληροφορίας σε μια χρονική περίοδο και παράγει ένα δυαδικό γραμμικό μπλοκ κώδικα (n, k) . Η διαθέσιμη χρονική διάρκεια για την μετάδοση των n στοιχείων του κώδικα είναι kT_b s. Ο

αριθμός των chip που βρίσκονται σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι kL_c . Έτσι, μπορούμε να επιλέξουμε το μήκος του block του κώδικα ως $n = kL_c$. Εάν ο κωδικοποιητής δημιουργήσει ένα δυαδικό συνελκτικό κώδικα ρυθμού k/n , ο αριθμός των chip στο χρονικό διάστημα kT_b είναι και αυτός $n = kL_c$. Συνεπώς, η ακόλουθη συζήτηση έχει εφαρμογή τόσο στους μπλοκ κώδικες όσο και στους συνελκτικούς.

Μία μέθοδος για την τοποθέτηση της ψευδοθορυβικής ακολουθίας στο μεταδιδόμενο σήμα, είναι να μεταβάλλουμε απευθείας τα κωδικοποιημένα bits με την πράξη modulo - 2 πρόσθεση με την ψευδοθορυβική ακολουθία.* Έτσι, κάθε κωδικοποιημένο bit μεταβάλλεται με την πρόσθεση του με ένα bit από την PN ακολουθία. Εάν το b_i αναπαριστά το i -οστό bit της PN ακολουθίας και c_i είναι το αντίστοιχο bit από τον κωδικοποιητή, το modulo-2 άθροισμα είναι

$$a_i = b_i \oplus c_i \quad (4.2 - 3)$$

Έτσι, $a_i = 1$ εάν είτε $b_i = 1$ και $c_i = 0$, ή $b_i = 0$ και $c_i = 1$. Επίσης, $a_i = 0$ εάν είτε $b_i = 1$ και $c_i = 1$, είτε $b_i = 0$ και $c_i = 0$. Μπορούμε να πούμε ότι $a_i = 0$ όταν $b_i = c_i$ και $a_i = 1$ όταν $b_i \neq c_i$. Η ακολουθία $\{a_i\}$ οδηγείται σε ένα δυαδικό PSK σήμα της μορφής $s(t) = \pm \text{Re} \left[g(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$ σύμφωνα με τον κανόνα

$$g_i(t) = \begin{cases} g(t - iT_c) & (a_i = 0) \\ -g(t - iT_c) & (a_i = 1) \end{cases} \quad (4.2 - 4)$$

όπου η $g(t)$ αναπαριστά ένα παλμό διάρκειας T_c s και αυθαίρετου σχήματος.

Η modulo - 2 πρόσθεση της κωδικοποιημένης ακολουθίας $\{c_i\}$ και η ακολουθία $\{b_i\}$ από την ψευδοθορυβική γεννήτρια μπορεί να αναπαρασταθεί επίσης σαν πολλαπλασιασμός δύο κυματομορφών. Για να εξηγήσουμε αυτό το σημείο, ας θεωρήσουμε ότι τα στοιχεία της κωδικοποιημένης ακολουθίας οδηγούνται σε ένα δυαδικό PSK σήμα σύμφωνα με την σχέση

$$c_i(t) = (2c_i - 1)g(t - iT_c) \quad (4.2 - 5)$$

Όμοια, ορίζουμε μια κυματομορφή $p_i(t)$ ως

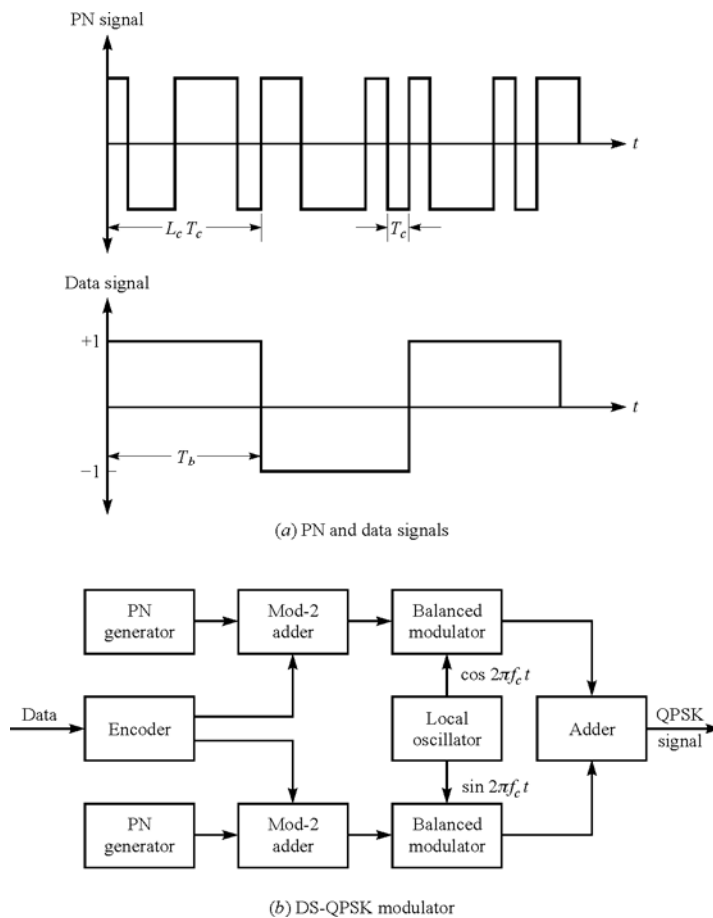
$$p_i(t) = (2b_i - 1)p(t - iT_c) \quad (4.2 - 6)$$

* Όταν ζητείται PSK τεσσάρων καταστάσεων, μία PN ακολουθία προστίθεται στην πληροφοριακή ακολουθία που φέρεται στη συμμασική συνιστώσα και μία δεύτερη PN ακολουθία προστίθεται στην πληροφοριακή ακολουθία που φέρεται quadrature συνιστώσα. Σε πολλά PN συστήματα διευρυμένου φάσματος, η ίδια δυαδική ακολουθία πληροφορίας προστίθεται στις δύο PN συνιστώσες για να μορφοποιηθούν οι δύο quadrature συνιστώσες. Έτσι, ένα δημιουργείται ένα PSK τεσσάρων φάσεων με ένα δυαδικό πληροφοριακό ρεύμα.

όπου $p(t)$ είναι ένας τετραγωνικός παλμός διάρκειας T_c . Τότε το ισοδύναμο χαμηλοπερατό μεταδιδόμενο σήμα που αντιστοιχεί στο i -στό κωδικοποιημένο bit είναι

$$g_i(t) = p_i(t)c_i(t) = (2b_i - 1)(2c_i - 1)g(t - iT_c) \quad (4.2 - 7)$$

Το σήμα αυτό είναι ταυτόσημο με αυτό που δίνεται από την (4.2 - 4) το οποίο λαμβάνεται από την ακολουθία $\{a_i\}$. Συνεπώς, η modulo - 2 πρόσθεση των κωδικοποιημένων bits με την ψευδοθορυβική ακολουθία που τελικά καταλήγει σε δυαδικό PSK, είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό ενός δυαδικού PSK που γεννάται από τα κωδικοποιημένα bits με μία ακολουθία από μοναδιαίου πλάτους τετραγωνικούς παλμούς, κάθε έναν διάρκειας T_c , και με πολικότητα που καθορίζεται από την PN ακολουθία σύμφωνα με την (4.2 - 6). Αν και είναι πιο εύκολο να πραγματοποιηθεί modulo - 2 πρόσθεση που ακολουθείται από PSK διαμόρφωση αντί για πολλαπλασιασμό κυματομορφής, είναι καταλληλότερο για λόγους αποδιαμόρφωσης, να θεωρήσουμε το μεταδιδόμενο σήμα στην πολλαπλασιαστική μορφή που δίνεται από την (4.2 - 7). Ένα λειτουργικό μπλοκ διάγραμμα ενός τεσσάρων φάσεων PSK DS διαμορφωτή διευρυμένου φάσματος δείχνεται στο σχήμα 4.2 - 1(b).



ΣΧΗΜΑ 4.2 - 1 PN σήμα και σήμα δεδομένων (a) και QPSK διαμορφωτής (b) για DS σύστημα διευρυμένου φάσματος.

Το λαμβανόμενο ισοδύναμο χαμηλοπερατό σήμα για το i -οστό κωδικοποιημένο στοιχείο είναι[†]

$$\begin{aligned} r_i(t) &= p_i(t)c_i(t) + z(t), \quad iT_c \leq t \leq (i+1)T_c \\ &= (2b-1)(2c-1)g(t-iT) + z(t) \end{aligned} \quad (4.2-8)$$

όπου η $z(t)$ αναπαριστά την παρεμβολή ή το σήμα ηθελημένης παρεμβολής που αλλοιώνει το σήμα που φέρει την πληροφορία. Η παρεμβολή θεωρείται ότι είναι σταθερή τυχαία διαδικασία με μηδενική μέση τιμή.

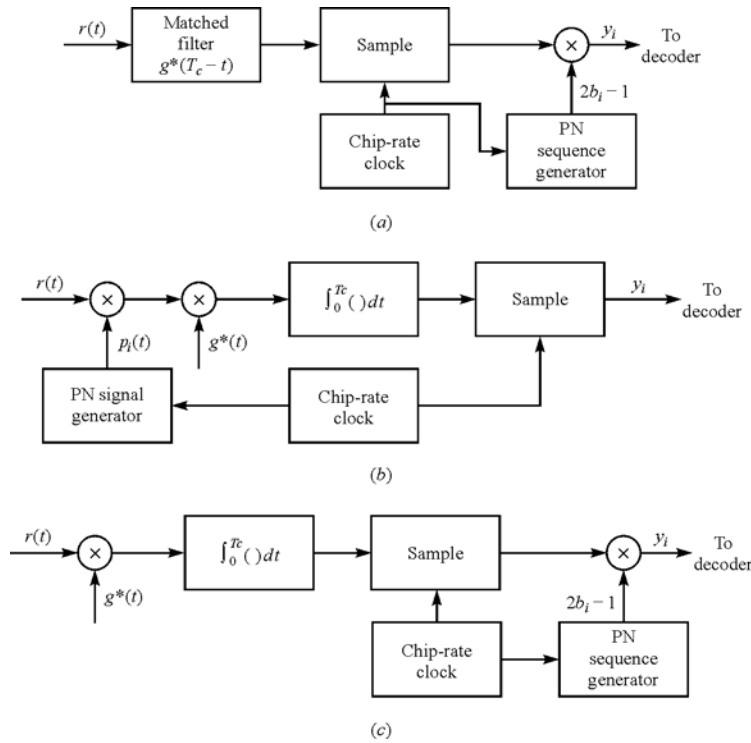
Εάν η $z(t)$ είναι μία συνάρτηση δείγματος από μία γκαουσιανή διαδικασία μιγαδικής τιμής, ο βέλτιστος αποδιαμορφωτής μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε σαν ένα φίλτρο προσαρμοσμένο στην κυματομορφή $g(t)$ ή σαν ένας αποσυσχετιστής, όπως φαίνεται από το μπλοκ διάγραμμα στο σχήμα 4.2-2. Στην πραγματοποίηση με προσαρμοστικό φίλτρο, η δειγματοληπτημένη έξοδος από το προσαρμοστικό φίλτρο πολλαπλασιάζεται με $2b_i-1$, που λαμβάνεται από την PN γεννήτρια στον αποδιαμορφωτή όταν αυτή είναι κατάλληλα συγχρονισμένη. Αφού $(2b-1) = 1$ όταν $b_i = 0$ και $b_i = 1$, η επίδραση της PN ακολουθίας στα λαμβανόμενα κωδικοποιημένα bits αφαιρείται.

Στο σχήμα 4.2-2, παρατηρούμε ότι η διασυσχέτιση μπορεί να πραγματοποιηθεί με έναν από τους δύο τρόπους. Ο πρώτος, που φαίνεται στο σχήμα 4.2-2(b), περιλαμβάνει προπολλαπλασιασμό της $r_i(t)$ με την κυματομορφή $p_i(t)$ που γεννιέται από την έξοδο της PN γεννήτριας και μετά διασυσχετίζοντας τη με την $g^*(t)$ και δειγματοληπτώντας την έξοδο σε κάθε διάστημα chip. Η δεύτερη μέθοδος, που φαίνεται στο σχήμα 4.2-2(c), περιλαμβάνει διασυσχέτιση με την $g^*(t)$ πρώτα, δειγματοληψία της εξόδου του συσχετιστή, και μετά, πολλαπλασιασμό της εξόδου με $2b_i-1$, που λαμβάνεται από την PN γεννήτρια.

Εάν η $z(t)$ δεν είναι μια γκαουσιανή τυχαία διαδικασία, οι μέθοδοι αποδιαμόρφωσης που φαίνονται στο σχήμα 4.2-2 δεν είναι πλέον βέλτιστοι. Ωστόσο, μπορούμε ακόμα να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε από αυτές τις τρεις διατάξεις αποδιαμόρφωσης για να αποδιαμορφώσουμε το λαμβανόμενο σήμα. Μία πιθανή προσέγγιση είναι όταν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της παρεμβολής $z(t)$ είναι εκ των προτέρων άγνωστα. Μία εναλλακτική μέθοδος, που θα περιγραφεί αργότερα, χρησιμοποιεί ένα προσαρμοστικό φίλτρο πριν το προσαρμοσμένο φίλτρο ή τον συσχετιστή για να καταστείλουμε την παρεμβολή στενής ζώνης. Το σκεπτικό για την δεύτερη μέθοδο περιγράφεται επίσης αργότερα.

Στην παράγραφο 4.2-1, εξάγουμε την απόδοση του ρυθμού σφαλμάτων του DS συστήματος διευρυμένου φάσματος παρουσία παρεμβολής ευρείας και στενής ζώνης. Οι εξαγωγές αυτές βασίζονται στην παραδοχή ότι ο αποδιαμορφωτής είναι ένας από τις τρεις ισοδύναμες διατάξεις αποδιαμόρφωσης που φαίνονται στο σχήμα 4.2-2.

[†] Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι η εξασθένηση καναλιού $\alpha = 1$ και η ολίσθηση φάσης του καναλιού είναι μηδέν. Εφόσον θεωρούμε σύμφωνη ανίχνευση PSK, οποιαδήποτε αυθαίρετη ολίσθηση φάσης εξισοποποιείται στην αποδιαμόρφωση.



ΣΧΗΜΑ 4.2 – 2 Πιθανές δομές αποδιαμορφωτή για PN σήματα διευρυμένου φάσματος.

4.2.1 Απόδοση του Ρυθμού Σφαλμάτων του Αποκωδικοποιητή

Ας δηλώσουμε την ακβάντιστη έξοδο του αποδιαμορφωτή με y_j , $1 \leq j \leq n$. Πρώτα θεωρούμε ένα γραμμικό δυαδικό μπλοκ κώδικα (n, k) και, χωρίς απώλεια της γενικότητας, θεωρούμε ότι μεταδίδεται η κωδική λέξη που αποτελείται όλη από μηδενικά.

Ο αποκωδικοποιητής που χρησιμοποιεί αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης υπολογίζει τις μετρικές συσχέτισης

$$CM_i = \sum_{j=1}^n (2c_{ij} - 1) y_j, \quad i = 1, 2, \dots, 2^k \quad (4.2 - 9)$$

όπου το c_{ij} δηλώνει το j -οστό bit στην i -οστή κωδική λέξη. Η μετρική συσχέτισης που αντιστοιχεί στην μηδενική κωδική λέξη είναι

$$\begin{aligned} CM_1 &= 2n\mathcal{E}_c + \sum_{j=1}^n (2c_{1j} - 1)(2b_j - 1)v_j \\ &= 2n\mathcal{E}_c - \sum_{j=1}^n (2b_j - 1)v_j \end{aligned} \quad (4.2 - 10)$$

όπου το $v_j, 1 \leq j \leq n$, είναι ο όρος του προσθετικού θορύβου που αλλοιώνει το j -οστό κωδικοποιημένο bit, και \mathcal{E}_c είναι η ενέργεια του chip. Ορίζεται ως

$$v_j = \text{Re} \left\{ \int_0^{T_c} g^*(t) z[t + (j-1)T_c] dt \right\}, \quad j=1,2,\dots,n \quad (4.2-11)$$

Παρόμοια, η μετρική συσχέτισης που αντιστοιχεί στην κωδική λέξη C_m έχοντας βάρος w_m είναι

$$CM_m = 2E_c n \left(1 - \frac{2w_m}{n} \right) + \sum_{j=1}^n (2c_{mj} - 1)(2b_j - 1)v_j \quad (4.2-12)$$

Θα καθορίσουμε την πιθανότητα να ισχύει $CM_m > CM_1$. Η διαφορά μεταξύ CM_1 και CM_m είναι

$$\begin{aligned} D &= CM_1 - CM_m \\ &= 4E_c w_m - 2 \sum_{j=1}^n c_{mj} (2b_j - 1)v_j \end{aligned} \quad (4.2-13)$$

Εφόσον η κωδική λέξη C_m έχει βάρος w_m , υπάρχουν w_m μη μηδενικές συνιστώσες που περιέχονται στην (4.2-13). Θα δεχθούμε ότι η ελάχιστη απόσταση του κώδικα είναι επαρκώς μεγάλη για να εφαρμόσουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα για την άθροιση των συνιστωσών θορύβου. Η παραδοχή αυτή ισχύει για PN σήματα διευρυμένου φάσματος που έχουν διεύρυνση εύρους ζώνης της τάξης του 20 ή και παραπάνω.[‡] Συνεπώς, η άθροιση των συνιστωσών θορύβου μοντελοποιείται σαν μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή. Εφόσον $E(2b_j - 1) = 0$ και $E(v_j) = 0$, η μέση τιμή του δεύτερου όρου στην (4.2-13) είναι επίσης μηδέν.

Η διασπορά είναι

$$\sigma_m^2 = 4 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{mi} c_{mj} E[(2b_j - 1)(2b_i - 1)] E(v_i v_j) \quad (4.2-14)$$

Η ακολουθία των δυαδικών ψηφίων από την PN γεννήτρια θεωρείται ότι είναι ασυσχέτιστη. Έτσι,

$$E[(2b_j - 1)(2b_i - 1)] = \delta_{ij} \quad (4.2-15)$$

και

$$\sigma_m^2 = 4w_m E(v^2) \quad (4.2-16)$$

όπου $E(v^2)$ είναι η δεύτερη στιγμή οποιουδήποτε στοιχείου από το σύνολο $\{v_j\}$. Αυτή η στιγμή υπολογίζεται εύκολα για να αποδώσει

[‡] Τυπικά, ο συντελεστής διεύρυνσης φάσματος σε ένα σήμα διευρυμένου φάσματος είναι της τάξης του 100 και παραπάνω.

$$\begin{aligned}
E(v^2) &= \int_0^{T_c} \int_0^{T_c} g^*(t) g(\tau) \phi_{zz}(\tau-t) dt d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \Phi_{zz}(f) df
\end{aligned} \tag{4.2-17}$$

όπου $\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2} E[z^*(t)z(t+\tau)]$ είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και $\Phi_{zz}(f)$ είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος της παρεμβολής $z(t)$.

Παρατηρούμε ότι όταν η παρεμβολή είναι φασματικά ομοιόμορφη μέσα στο εύρος ζώνης που καταλαμβάνει το μεταδιδόμενο σήμα,[§] για παράδειγμα

$$\Phi_{zz}(f) = J_0, \quad |f| \leq \frac{1}{2}W \tag{4.2-18}$$

η δεύτερη στιγμή στην (4.2-17) είναι $E(v^2) = 2\mathcal{E}_c J_0$, και έτσι, η διασπορά του όρου της παρεμβολής στην (4.2-16) γίνεται

$$\sigma_m^2 = 8\mathcal{E}_c J_0 w_m \tag{4.2-19}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η πιθανότητα $D < 0$ είναι

$$P_2(m) = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{J_0} w_m}\right) \tag{4.2-20}$$

Αλλά η ενέργεια ανά κωδικοποιημένο bit \mathcal{E}_c μπορεί να εκφραστεί από πλευράς ενέργειας ανά bit πληροφορίας \mathcal{E}_b ως

$$\mathcal{E}_c = \frac{k}{n} \mathcal{E}_b = R_c \mathcal{E}_b \tag{4.2-21}$$

Με την αντικατάσταση αυτή, η (4.2-20) γίνεται

$$\begin{aligned}
P_2(m) &= Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{J_0} R_c w_m}\right) \\
&= Q\left(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}\right)
\end{aligned} \tag{4.2-22}$$

όπου $\gamma_b = \mathcal{E}_b/J_0$ είναι ο σηματοθορυβικός λόγος ανά bit πληροφορίας. Τελικά, η πιθανότητα σφάλματος της κωδικής λέξης μπορεί να οριοθετηθεί ως προς την μέγιστη τιμή της από το φράγμα ένωσης

[§] Εάν το εύρος ζώνης του ζωνοπερατού καναλιού είναι W , αυτό του ισοδύναμου χαμηλοπερατού καναλιού είναι $\frac{1}{2}W$.

$$P_m \leq \sum_{m=2}^M Q\left(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}\right) \quad (4.2 - 23)$$

όπου $M = 2^k$. Ας σημειώσουμε ότι η έκφραση αυτή είναι ταυτόσημη με την πιθανότητα λάθους κωδικής λέξης για αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης ενός γραμμικού δυαδικού block κώδικα σε ένα AWGN κανάλι.

Αν και θεωρήσαμε ένα δυαδικό μπλοκ κώδικα στα παραπάνω δοθέντα, η διαδικασία είναι παρόμοια για ένα (n, k) συνελκτικό κώδικα. Το αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο άνω όριο στην ισοδύναμη πιθανότητα λανθασμένου bit.

$$P_b \leq \frac{1}{k} \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d Q\left(\sqrt{2\gamma_b R_c d}\right) \quad (4.2 - 24)$$

Το σύνολο των συντελεστών $\{\beta_d\}$ λαμβάνεται από το ανάπτυγμα της παραγωγίσις της συνάρτησης μεταφοράς $T(D, N)$.

Κατόπιν, θεωρούμε μια στενής ζώνης παρεμβολή με κέντρο το φέρον (στο d.c. με επίκεντρο το ισοδύναμο χαμηλοπερατό σήμα). Μπορούμε να σταθεροποιήσουμε την συνολική μέση ισχύ παρεμβολής στην τιμή $J_{av} = J_0 W$, όπου J_0 είναι η τιμή της φασματικής πυκνότητας ισχύος ενός ισοδύναμου σήματος παρεμβολής ευρείας ζώνης. Η παρεμβολή στενής ζώνης χαρακτηρίζεται από την φασματική πυκνότητα ισχύος

$$\Phi_{zz}(f) = \begin{cases} \frac{J_{av}}{W_1} = \frac{J_0 W}{W_1} & \left(|f| \leq \frac{1}{2} W_1\right) \\ 0 & \left(|f| > \frac{1}{2} W_1\right) \end{cases} \quad (4.2 - 25)$$

όπου $W \gg W_1$.

Η αντικατάσταση της (4.2 - 25) για την $\Phi_{zz}(f)$ στην (4.2 - 17) οδηγεί στην

$$E(v^2) = \frac{J_{av}}{W_1} \int_{-W_1/2}^{W_1/2} |G(f)|^2 df \quad (4.2 - 26)$$

Η τιμή της $E(v^2)$ εξαρτάται από τα φασματικά χαρακτηριστικά του παλμού $g(t)$.

Στο παρακάτω παράδειγμα, θεωρούμε δύο ειδικές περιπτώσεις.

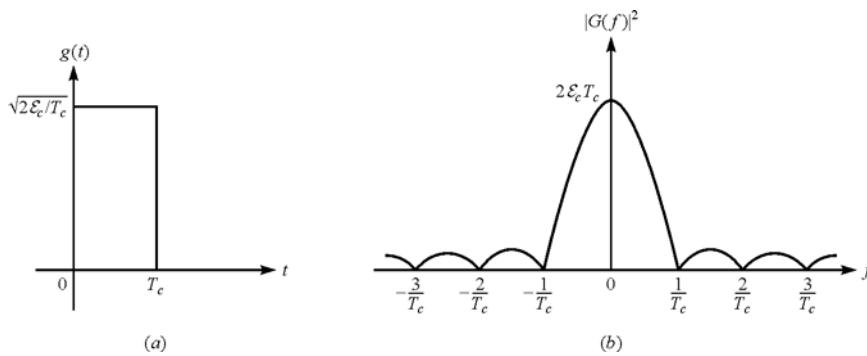
Παράδειγμα 4.2 - 1

Ας θεωρήσουμε ότι $g(t)$ είναι ένας τετραγωνικός παλμός όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2 - 3(a) και $|G(f)|^2$ είναι η αντίστοιχη φασματική πυκνότητα ενέργειας που φαίνεται στο σχήμα 4.2 - 3(b). Για την παρεμβολή στενής ζώνης που δίνεται από την (4.2 - 26), η διασπορά της συνολικής παρεμβολής είναι

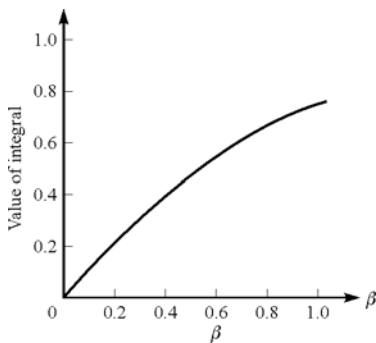
$$\sigma_m^2 = 4w_m E(v^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8\mathcal{E}_c w_m T_c J_{av}}{W_1} \int_{-W_1/2}^{W_1/2} \left(\frac{\sin \pi f T_c}{\pi f T_c} \right)^2 df \\
&= \frac{8\mathcal{E}_c w_m J_{av}}{W_1} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx \quad (4.2 - 27)
\end{aligned}$$

όπου $\beta = W_1 T_c$. Το σχήμα 4.2 - 4 δείχνει την τιμή του ολοκληρώματος για $0 \leq \beta \leq 1$. Παρατηρούμε ότι η τιμή του ολοκληρώματος οριοθετείται ως προς το μέγιστο από την τιμή $W_1 T_c$. Έτσι, $\sigma_m^2 \leq 8\mathcal{E}_c w_m T_c J_{av}$.



ΣΧΗΜΑ 4.2 - 3 Ορθογώνιος παλμός και η φασματική πυκνότητα ενέργειάς τους.



ΣΧΗΜΑ 4.2 - 4 Γράφημα της τιμής του ολοκληρώματος στην (4.2 - 27).

Οριακά, καθώς το W_1 τείνει στο μηδέν, η παρεμβολή γίνεται μία κρούση στο φέρον. Στην περίπτωση αυτή η παρεμβολή είναι ένας αγνός τόνος και καλείται συνήθως ένα σήμα παρεμβολής **συνεχούς κύματος (Continuous Wave, CW)**. Η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι

$$\Phi_{zz}(f) = J_{av} \delta(f) \quad (4.2 - 28)$$

και η αντίστοιχη διασπορά για την μεταβλητή απόφασης $D = CM_1 - CM_M$ είναι

$$\begin{aligned}
\sigma_m^2 &= 4w_m J_{av} |G(0)|^2 \\
&= 8w_m \mathcal{E}_c T_c J_{av} \quad (4.2 - 29)
\end{aligned}$$

Η πιθανότητα μιας εσφαλμένης κωδικής λέξης για CW παρεμβολή είναι άνω φραγμένη

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{J_{av}T_c} w_m} \right) \quad (4.2 - 30)$$

Αλλά $\mathcal{E}_c = R_c \mathcal{E}_b$. Επιπλέον, $T_c \approx 1/W$ και $J_{av}/W = J_0$. Άρα, η (4.2 – 30) μπορεί να εκφραστεί σαν

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{J_0} R_c w_m} \right) \quad (4.2 - 31)$$

που είναι το αποτέλεσμα που λήφθηκε προηγουμένως για την παρεμβολή ευρείας ζώνης. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι ένας CW παρεμβολέας έχει την ίδια επίδραση στην απόδοση με έναν παρεμβολέα ευρείας ζώνης. Η ισοδυναμία συζητάται παρακάτω πιο αναλυτικά.

Παράδειγμα 4.2 – 2

Ας ορίσουμε την απόδοση του DS συστήματος διευρυμένου φάσματος παρουσία ενός CW παρεμβολέα μέσης ισχύος J_{av} όταν ο μεταδιδόμενος παλμός σήματος $g(t)$ είναι ο μισός κύκλος ενός ημιτόνου όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2 – 5 για παράδειγμα

$$g(t) = \sqrt{\frac{4\mathcal{E}_c}{T_c}} \sin \frac{\pi t}{T_c}, \quad 0 \leq t \leq T_c \quad (4.2 - 32)$$

Η διασπορά της παρεμβολής αυτού του παλμού είναι

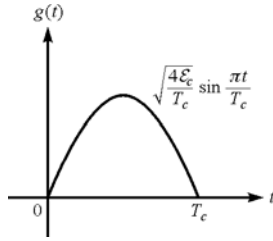
$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= 4w_m J_{av} |G(0)|^2 \\ &= \frac{64}{\pi^2} \mathcal{E}_c T_c J_{av} w_m \end{aligned} \quad (4.2 - 33)$$

Έτσι, το άνω όριο στην πιθανότητα λάθους κωδικής λέξης είναι

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{\pi^2 \mathcal{E}_b}{4J_{av}T_c} R_c w_m} \right) \quad (4.2 - 34)$$

Παρατηρούμε ότι η απόδοση που λαμβάνεται με αυτόν τον παλμό είναι κατά 0,9 dB καλύτερη από αυτήν που παρέχεται με ένα τετραγωνικό παλμό. Ας θυμηθούμε ότι αυτό το σχήμα παλμού όταν χρησιμοποιείται σε QPSK έχει αποτέλεσμα ένα MSK σήμα. Η MSK διαμόρφωση χρησιμοποιείται συχνά σε DS συστήματα διευρυμένου φάσματος.

Το Κέρδος Επεξεργασίας και το Όριο Παρεμβολής Μία ενδιαφέρουσα ερμηνεία των χαρακτηριστικών απόδοσης για το DS σύστημα διευρυμένου φάσματος



ΣΧΗΜΑ 4.2 – 5 Ημιτονοειδής παλμός.

παρέχεται εκφράζοντας την ενέργεια σήματος ανά bit \mathcal{E}_b από πλευράς μέσης ισχύος. Δηλαδή, $\mathcal{E}_b = P_{av} T_b$, όπου P_{av} είναι η μέση ισχύς σήματος και T_b είναι η διάρκεια του bit. Ας θεωρήσουμε την απόδοση που λαμβάνεται παρουσία CW παρεμβολής για τον τετραγωνικό παλμό που πραγματεύεται το παράδειγμα 4.2 – 1. Με την αντικατάσταση των \mathcal{E}_b και J_0 στην (4.2 – 31) παίρνουμε

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2P_{av} T_b}{J_{av} T_c} R_c w_m} \right) = \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2P_{av}}{J_{av}} L_c R_c w_m} \right) \quad (4.2 - 35)$$

όπου L_c είναι ο αριθμός των chip ανά bit πληροφορίας και P_{av}/J_{av} είναι ο λόγος ισχύος σήματος προς παρεμβολή.

Ένα ταυτόσημο αποτέλεσμα λαμβάνεται με παρεμβολή ευρείας ζώνης, για την οποία η απόδοση δίνεται από την (4.2 – 23). Για την ενέργεια σήματος ανά bit έχουμε

$$\mathcal{E}_b = P_{av} T_b = \frac{P_{av}}{R} \quad (4.2 - 36)$$

όπου R είναι ο ρυθμός πληροφορίας σε bits/s. Η φασματική πυκνότητα ισχύος για το σήμα παρεμβολής μπορεί να εκφραστεί ως

$$J_0 = \frac{J_{av}}{W} \quad (4.2 - 37)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση στην (4.2 – 36) και στην (4.2 – 37) ο λόγος \mathcal{E}_b/J_0 μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{\mathcal{E}_b}{J_0} = \frac{P_{av}/R}{J_{av}/W} = \frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \quad (4.2 - 38)$$

Ο λόγος J_{av}/P_{av} είναι ο λόγος ισχύος παρεμβολής προς ισχύ σήματος, που είναι συνήθως μεγαλύτερος της μονάδας. Ο λόγος $W/R = T_b/T_c = B_e = L_c$, είναι απλά ο συντελεστής διεύρυνσης του φάσματος ή ισοδύναμα, ο αριθμός των chip ανά πληροφοριακό bit. Ο λόγος αυτός καλείται συνήθως **κέρδος επεξεργασίας (Processing Gain, PG)** ενός DS συστήματος διευρυμένου φάσματος. Εκφράζει το πλεονέκτημα που κερδίζεται έναντι του παρεμβολέα, το οποίο παρέχεται διευρύνοντας το εύρος ζώνης του μεταδιδόμενου σήματος. Εάν ερμηνεύσουμε το \mathcal{E}_b/J_0 σαν τον σηματοθορυβικό λόγο που απαιτείται για να επιτευχθεί μια επιθυμητή απόδοση ρυθμού λαθών και W/R ως το διαθέσιμο συντελεστή διεύρυνσης

φάσματος, ο λόγος J_{av}/P_{av} καλείται το όριο παρεμβολής για το DS σύστημα διευρυμένου φάσματος. Με άλλα λόγια, το όριο παρεμβολής είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να λάβει ο λόγος αυτός και να ικανοποιεί ακόμα την επιθυμητή πιθανότητα λάθους.

Η απόδοση ενός αποκωδικοποιητή ήπιας απόφασης για ένα γραμμικό (n, k) δυαδικό κώδικα, που εκφράζεται από πλευράς κέρδους επεξεργασίας και ορίου παρεμβολής, είναι

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c w_m \right) \leq (M-1) Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c d_{\min} \right) \quad (4.2 - 39)$$

Πρόσθετα με το κέρδος επεξεργασίας W/R και J_{av}/P_{av} , παρατηρούμε ότι η απόδοση εξαρτάται από ένα τρίτο παράγοντα, δηλαδή το γινόμενο $R_c w_m$. Ο συντελεστής αυτός είναι το κέρδος κωδικοποίησης. Το κάτω όριο σε αυτόν τον συντελεστή είναι το γινόμενο $R_c d_{\min}$. Συνεπώς, το όριο παρεμβολής που λαμβάνεται από το DS σύστημα διευρυμένου φάσματος εξαρτάται από το κέρδος επεξεργασίας και το κέρδος κωδικοποίησης.

Μη Κωδικοποιημένα DS Σήματα Διευρυμένου Φάσματος Τα αποτελέσματα που δόθηκαν παραπάνω για DS συστήματα διευρυμένου φάσματος, που παράχθηκαν διαμέσου ενός (n, k) κώδικα μπορούν να ειδικευτούν με ένα συνηθισμένο είδος κώδικα, δηλαδή, ένα δυαδικό επαναληπτικό κώδικα. Για την περίπτωση αυτή, $k=1$ και το βάρος της μη μηδενικής κωδικής λέξης είναι $w=n$. Έτσι, $R_c w=1$, και τελικά η απόδοση του δυαδικού συστήματος σηματοδοσίας μειώνεται σε

$$\begin{aligned} P_2 &= Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{J_0}} \right) \\ &= Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) \end{aligned} \quad (4.2 - 40)$$

Ας σημειωθεί ότι ο επαναληπτικός κώδικας δεν δίνει καθόλου κέρδος κωδικοποίησης, και έχει σαν αποτέλεσμα ένα κέρδος επεξεργασίας W/R .

Παράδειγμα 4.2 – 3

Ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να επιτύχουμε μία απόδοση ρυθμού λαθών 10^{-6} ή λιγότερο με ένα μη κωδικοποιημένο DS σύστημα διευρυμένου φάσματος. Ο διαθέσιμος συντελεστής διεύρυνσης φάσματος είναι $W/R=1000$. Ας καθορίσουμε το όριο παρεμβολής.

Ο λόγος \mathcal{E}_b/J_0 που απαιτείται για να επιτευχθεί μία πιθανότητα λανθασμένου bit της τάξης του 10^{-6} με μη κωδικοποιημένο δυαδικό PSK είναι 10,5 dB. Το κέρδος επεξεργασίας είναι $10 \log_{10} 1000 = 30$ dB. Έτσι ο μέγιστη ισχύς παρεμβολής προς σήμα που μπορεί να ανεχθεί το σύστημα δηλαδή το όριο παρεμβολής είναι

$$10 \log_{10} \frac{J_{av}}{P_{av}} = 30 - 10.5 = 19,5 \text{ dB}$$

Εφόσον αυτό είναι το όριο παρεμβολής που επιτυγχάνεται με ένα μη κωδικοποιημένο DS σύστημα διευρυμένου φάσματος, μπορεί να αυξηθεί κωδικοποιώντας την ακολουθία της πληροφορίας.

Υπάρχει άλλος ένας τρόπος για να παρατηρήσουμε την διαδικασία διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης για το μη κωδικοποιημένο (επαναληπτικού κώδικα) DS σύστημα διευρυμένου φάσματος. Για παράδειγμα, στον διαμορφωτή, η κυματομορφή σήματος που παράγεται από τον επαναληπτικό κώδικα με τετραγωνικούς παλμούς, είναι ταυτόσημη με ένα μοναδιαίο τετραγωνικό παλμό $s(t)$ διάρκειας T_b ή το αρνητικό του, εξαρτώμενο βέβαια από το αν η πληροφορία είναι 1 ή 0 αντίστοιχα. Αυτό μπορεί να φανεί από την (4.2 – 7), όπου τα κωδικοποιημένα chips $\{c_i\}$ μέσα σε ένα bit πληροφορίας είναι είτε όλα μηδενικά είτε όλα άσσοι. Η ψευδοθορυβική ακολουθία πολλαπλασιάζει είτε το $s(t)$, είτε το $-s(t)$. Έτσι, όταν το bit πληροφορίας είναι 1 τα L_c PN chips που παράγονται από την PN γεννήτρια μεταδίδονται με την ίδια πολικότητα. Από την άλλη πλευρά, όταν το bit πληροφορίας είναι μηδέν, τα L_c PN chips όταν πολλαπλασιάζοντας με το $-s(t)$ αντιστρέφουν την πολικότητά τους.

Ο αποδιαμορφωτής για τον επαναληπτικό κώδικα που υλοποιείται σαν αποσυσχετιστής, φαίνεται στο σχήμα 4.2 – 6. Παρατηρούμε ότι το διάστημα ολοκλήρωσης στον ολοκληρωτή είναι η διάρκεια του bit T_b . Έτσι, ο αποκωδικοποιητής για τον επαναληπτικό κώδικα αφαιρείται και η χρήση του υπάγεται στον αποδιαμορφωτή.

Τώρα ας αποτιμήσουμε ποιοτικά την επίδραση της διαδικασίας αποδιαμόρφωσης στην παρεμβολή $z(t)$. Ο πολλαπλασιασμός της $z(t)$ με την έξοδο της PN γεννήτριας, που εκφράζεται από την σχέση

$$w(t) = \sum_i (2b_i - 1)p(t - iT_c)$$

οδηγεί

$$v(t) = w(t)z(t)$$

Οι κυματομορφές $w(t)$ και $z(t)$ είναι στατιστικά ανεξάρτητες διαδικασίες, κάθε μία με μηδενική μέση τιμή και συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης $\phi_{ww}(\tau)$ και $\phi_{zz}(\tau)$, αντίστοιχα. Το γινόμενο $v(t)$ είναι επίσης μια τυχαία διαδικασία με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ίση με το γινόμενο της $\phi_{ww}(\tau)$ με την $\phi_{zz}(\tau)$. Έτσι, η φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας $v(t)$ είναι ισοδύναμη με την συνέλιξη της φασματικής πυκνότητας ισχύος της $w(t)$ με την φασματική πυκνότητα ισχύος της $z(t)$.

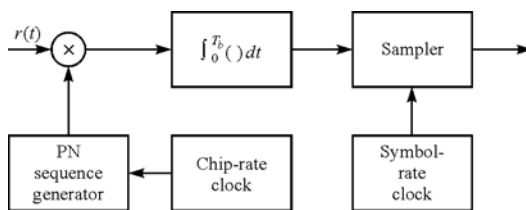
Ο σκοπός της συνέλιξης των δύο φασμάτων είναι να διευρυνθεί η ισχύς στο εύρος ζώνης. Εφόσον το εύρος ζώνης της $w(t)$ καταλαμβάνει το διαθέσιμο εύρος ζώνης του καναλιού W , το αποτέλεσμα της συνέλιξης των δύο φασμάτων είναι το άπλωμα της

φασματικής πυκνότητας ισχύος της $z(t)$ πάνω στην ζώνη συχνοτήτων εύρους W . Εάν η $z(t)$ είναι μια διαδικασία στενής ζώνης, δηλαδή αν για παράδειγμα η φασματική πυκνότητα ισχύος της έχει εύρος αρκετά μικρότερο από W , η φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας $v(t)$ θα καταλάβει ένα εύρος ζώνης ισοδύναμο με τουλάχιστον W .

Ο ολοκληρωτής που χρησιμοποιείται στην διασυσχέτιση (σχήμα 4.2 – 6) έχει ένα εύρος ζώνης περίπου ισοδύναμο με $1/T_b$. Εφόσον $1/T_b \ll W$, μόνο ένα τμήμα της συνολικής ισχύος παρεμβολής θα εμφανίζεται στην έξοδο του συσχετιστή. Το κλάσμα αυτό είναι περίπου ίσο με τον λόγο των φασμάτων $1/T_b$ με W . Δηλαδή

$$\frac{1/T_b}{W} = \frac{1}{WT_b} = \frac{T_c}{T_b} = \frac{1}{L_c}$$

Με άλλα λόγια, ο πολλαπλασιασμός της παρεμβολής με το σήμα από την PN γεννήτρια διευρύνει την παρεμβολή στο εύρος ζώνης του σήματος W , και η ολοκλήρωση στενής ζώνης που ακολουθεί τον πολλαπλασιασμό βλέπει μόνο το κλάσμα $1/L_c$ της συνολικής παρεμβολής. Έτσι, η απόδοση του μη κωδικοποιημένου DS συστήματος διευρυμένου φάσματος εμπλουτίζεται από το κέρδος επεξεργασίας L_c .



ΣΧΗΜΑ 4.2 – 6 Αποδιαμορφωτής συσχετίσης για έναν επαναληπτικό κώδικα.

Γραμμικός Κώδικας Συνδεδεμένος με Δυαδικό Κώδικα Επανάληψης Όπως φαίνεται παραπάνω, ένας δυαδικός κώδικας επανάληψης παρέχει ένα περιθώριο απέναντι στην παρεμβολή, είτε ηθελημένη είτε όχι, αλλά οδηγεί σε μηδενικό κέρδος κωδικοποίησης. Για να λάβουμε βελτίωση στην απόδοση, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα γραμμικό (n_1, k) μπλοκ ή συνελκτικό κώδικα, όπου $n_1 \ll n = kL_c$. Η μία δυνατότητα είναι να επιλέξουμε $n_1 < n$ και να επαναλάβουμε κάθε bit κώδικα n_2 φορές έτσι ώστε $n = n_1 n_2$. Έτσι, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γραμμικό (n_1, k) κώδικα ενώνοντας τον (n_1, k) κώδικα με ένα δυαδικό $(n_2, 1)$ κώδικα επανάληψης. Αυτή η διαδικασία μπορεί να ληφθεί σαν μία συνηθισμένη μορφή συνένωσης κώδικα όπου ο εξωτερικός κώδικας είναι ο (n_1, k) κώδικας και ο εσωτερικός κώδικας είναι ο επαναληπτικός.

Εφόσον ο επαναληπτικός κώδικας οδηγεί σε μηδενικό κέρδος κωδικοποίησης, το κέρδος κωδικοποίησης που λαμβάνεται από τον συνδυασμένο κώδικα πρέπει να μειώνεται σε αυτό που λαμβάνεται από τον (n_1, k) εξωτερικό κώδικα. Αποδεικνύεται ότι όντως ισχύει. Το κέρδος κωδικοποίησης του συνολικού συνδυασμένου κώδικα είναι

$$R_c w_m = \frac{k}{n} w_m, \quad m = 2, 3, \dots, 2^k$$

Αλλά τα βάρη $\{w_m\}$ για τον συνδυασμένο κώδικα μπορούν να εκφραστούν ως

$$w_m = n_2 w_m^0$$

όπου $\{w_m^0\}$ είναι τα βάρη του εξωτερικού κώδικα. Επομένως, το κέρδος κωδικοποίησης του συνδυασμένου κώδικα είναι

$$R_c w_m = \frac{k}{n_1 n_2} n_2 w_m^0 = \frac{k}{n_1} w_m^0 = R_c^0 w_m^0 \quad (4.2 - 41)$$

που είναι μόνο το κέρδος κωδικοποίησης που λαμβάνεται από τον εξωτερικό κώδικα.

Κέρδος κωδικοποίησης μπορεί να ληφθεί επίσης εάν ο (n_1, k) εξωτερικός κώδικας αποκωδικοποιείται χρησιμοποιώντας αυστηρές αποφάσεις. Η πιθανότητα ενός λανθασμένου bit που λαμβάνεται με τον $(n_2, 1)$ επαναληπτικό κώδικα (βασισμένη σε αυστηρή απόφαση) είναι

$$\begin{aligned} p &= Q\left(\sqrt{\frac{2n_2 \mathcal{E}_c}{J_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{J_0} R_c^0}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}} R_c^0}\right) \end{aligned} \quad (4.2 - 42)$$

Η πιθανότητα λανθασμένης κωδικής λέξης τότε για ένα γραμμικό (n_1, k) μπλοκ κώδικα έχει άνω φράγμα που δίνεται από την σχέση

$$P_M \leq \sum_{m=t+1}^{n_1} \binom{n_1}{m} p^m (1-p)^{n_1-m} \quad (4.2 - 43)$$

όπου $t = \left\lfloor \frac{1}{2}(d_{\min} - 1) \right\rfloor$, ή από την σχέση

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M [4p(1-p)]^{w_m^0/2} \quad (4.2 - 44)$$

όπου το δεύτερο είναι το φράγμα Chernoff. Για ένα (n_1, k) δυαδικό συνελκτικό κώδικα, το άνω φράγμα στην πιθανότητα σφάλματος bit είναι

$$P_b \leq \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d P_2(d) \quad (4.2 - 45)$$

όπου

$$P_2(d) = \sum_{k=(d+1)/2}^d \binom{d}{k} p^k (1-p)^{d-k}$$

για d περιττό, και

$$P_2(d) = \sum_{k=d/2+1}^d \binom{d}{k} p^k (1-p)^{d-k} + \frac{1}{2} \binom{d}{\frac{1}{2}d} p^{d/2} (1-p)^{d/2}$$

για d άρτιο, ενώ p είναι η πιθανότητα σφάλματος bit για το δυαδικό συμμετρικό κανάλι.

Συνενωτική Κωδικοποίηση για DS Συστήματα Διευρυμένου Φάσματος

Είναι φανερό από την παραπάνω συζήτηση ότι η βελτίωση της απόδοσης μπορεί να επιτευχθεί αντικαθιστώντας τον επαναληπτικό κώδικα από ένα πιο ισχυρό κώδικα που θα οδηγήσει σε ένα κέρδος κωδικοποίησης πρόσθετα με το κέρδος επεξεργασίας. Το ζητούμενο βασικά σε ένα DS σύστημα διευρυμένου φάσματος είναι να κατασκευαστεί ένας χαμηλού ρυθμού μακρύς κώδικας που να έχει μία μεγάλη ελάχιστη απόσταση. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας συνένωση κώδικα. Όταν χρησιμοποιούμε δυαδικό PSK σε συνδυασμό με DS διεύρυνση φάσματος, τα στοιχεία ενός συνενωτικού κώδικα πρέπει να εκφραστούν σε δυαδική μορφή.

Η καλύτερη απόδοση λαμβάνεται όταν χρησιμοποιείται αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης τόσο στον εξωτερικό κώδικα όσο και στον εσωτερικό. Ωστόσο, μία εναλλακτική περίπτωση, που συνήθως οδηγεί σε μειωμένη πολυπλοκότητα στον αποκωδικοποιητή, είναι να εφαρμοστεί ήπιας απόφασης αποκωδικοποίηση στον εσωτερικό κώδικα και αυστηρής απόφασης αποκωδικοποίηση στον εξωτερικό κώδικα. Οι εκφράσεις για την απόδοση του ρυθμού σφαλμάτων αυτών των σχημάτων αποκωδικοποίησης εξαρτώνται εν μέρει από το είδος των κωδικών (μπλοκ ή συνελκτικός), που επιλέγονται για τους εσωτερικούς και τους εξωτερικούς κώδικες. Για παράδειγμα, η συνένωση δύο μπλοκ κωδικών μπορεί να ληφθεί σαν ένας συνολικός μεγάλου μήκους μπλοκ κώδικας (n, k) που έχει απόδοση η οποία δίνεται από την σχέση (4.2 – 39). Μπορεί επίσης εύκολα να παραχθεί η απόδοση άλλων συνδυασμών κωδικών. Για λόγους συντομίας δεν θα μελετήσουμε τέτοιους συνδυασμούς κωδικών.

4.2.2 Κάποιες Εφαρμογές των DS Σημάτων Διευρυμένου Φάσματος

Σε αυτήν την υποπαράγραφο, θα μελετήσουμε εν συντομία την χρήση του κωδικοποιημένου DS σήματος διευρυμένου φάσματος για τρεις συγκεκριμένες εφαρμογές. Η μία σχετίζεται με την παροχή ανοσίας απέναντι σε μία ηθελημένη παρεμβολή. Στη δεύτερη, ένα σήμα επικοινωνίας κρύβεται στον θόρυβο μεταδιδόμενο σε πολύ χαμηλή ισχύ. Η τρίτη εφαρμογή σχετίζεται με την ταυτόχρονη μετάδοση ενός μεγάλου αριθμού σημάτων στο ίδιο κανάλι, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στα CDMA συστήματα.

Εφαρμογή Αντιμετώπισης Κακόβουλης Παρεμβολής (antijamming) Στην παράγραφο 4.2.1, εξαγάγαμε την απόδοση του ρυθμού λαθών για ένα DS σήμα διευρυμένου φάσματος, παρουσία είτε ενός σήματος ηθελημένης παρεμβολής στενής ζώνης, είτε ενός σήματος ηθελημένης παρεμβολής ευρείας ζώνης. Σαν παραδείγματα για να δείξουμε την απόδοση ενός συστήματος ψηφιακών επικοινωνιών παρουσία σήματος παρεμβολής, θα επιλέξουμε τρεις κώδικες. Ο ένας είναι ο Golay (24,12) που χαρακτηρίζεται από την κατανομή βαρών που δίνεται παρακάτω:

**WEIGHT DISTRIBUTION OF GOLAY
(23, 12) AND EXTENDED GOLAY (24, 12)
CODES**

Weight	Number of code words	
	(23, 12) code	(24, 12) code
0	1	1
7	253	0
8	506	759
11	1288	0
12	1288	2576
15	506	0
16	253	759
23	1	0
24	0	1

και έχει μία ελάχιστη απόσταση $d_{\min} = 8$. Ο δεύτερος κώδικας είναι ένας εκκαθαριστικός Golay (24,11) που λαμβάνεται επιλέγοντας 2048 κωδικές λέξεις σταθερού βάρους 12. Φυσικά αυτός ο εκκαθαριστικός κώδικας είναι μη γραμμικός. Αυτοί οι δύο κώδικες θα χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με έναν επαναληπτικό κώδικα. Ο τρίτος κώδικας είναι ένας μέγιστου μήκους κώδικας καταχωρητή ολίσθησης.

Η απόδοση ρυθμού σφαλμάτων του Golay (24,12) με αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης είναι

$$P_M \leq \left[759Q\left(\sqrt{\frac{8W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) + 2576Q\left(\sqrt{\frac{12W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) + 759Q\left(\sqrt{\frac{16W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{24W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) \right] \quad (4.2 - 46)$$

όπου W/R είναι το κέρδος επεξεργασίας και J_{av}/P_{av} είναι το όριο παρεμβολής. Εφόσον $n = n_1 n_2 = 12W/R$ και $n_1 = 24$, κάθε κωδικοποιημένο bit είναι κατ' ουσίαν επαναλαμβανόμενο $n_2 = W/2R$ φορές. Για παράδειγμα, εάν $W/R = 100$ (κέρδος επεξεργασίας περίπου 20 dB), το μήκος του μπλοκ του επαναληπτικού κώδικα είναι $n_2 = 50$.

Εάν χρησιμοποιείται αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης, η πιθανότητα σφάλματος για ένα κωδικοποιημένο bit είναι

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) \quad (4.2 - 47)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα ενός σφάλματος κωδικής λέξης έχει άνω φράγμα που δίνεται από την σχέση

$$P_M \leq \sum_{m=4}^{24} \binom{24}{m} p^m (1-p)^{24-m} \quad (4.2 - 48)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το φράγμα Chernoff για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης, το οποίο είναι

$$P_M \leq 759[4p(1-p)]^4 + 2576[4p(1-p)]^6 + 759[4p(1-p)]^8 + [4p(1-p)]^{12} \quad (4.2 - 49)$$

Το σχήμα 4.2 – 7 δείχνει την απόδοση του Golay (24,12) σαν συνάρτηση του ορίου θορύβου J_{av}/P_{av} με το κέρδος επεξεργασίας σαν παράμετρο. Το φράγμα Chernoff χρησιμοποιήθηκε για να υπολογίσει την πιθανότητα σφάλματος για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης. Η πιθανότητα σφάλματος για αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης εξαρτάται από τον όρο

$$759Q\left(\sqrt{\frac{8W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right)$$

και αυτή για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης από τον όρο $759[4p(1-p)]^4$. Έτσι, το κέρδος κωδικοποίησης για αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης** είναι το πολύ $10\log 4 = 6$ dB. Παρατηρούμε ότι οι δύο καμπύλες που αντιστοιχούν σε $W/R=1000$ (30 dB) είναι ίδιες στο σχήμα με αυτές για $W/R=100$ (20 dB), εκτός του ότι η δεύτερη ολισθαίνει 10 dB δεξιά σε σχέση με την προηγούμενη. Η ολίσθηση αυτή είναι απλά, η διαφορά στο κέρδος επεξεργασίας μεταξύ των δύο αυτών DS σημάτων διευρυμένου φάσματος.

Η απόδοση ρυθμού σφαλμάτων του εκκαθαριστικού Golay (24,11) έχει άνω φράγμα που δίνεται από την σχέση

$$P_M \leq 2047Q\left(\sqrt{\frac{11W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) \quad (4.2 - 50)$$

για αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης, και ††

$$P_M \leq 2047[4p(1-p)]^6 \quad (4.2 - 51)$$

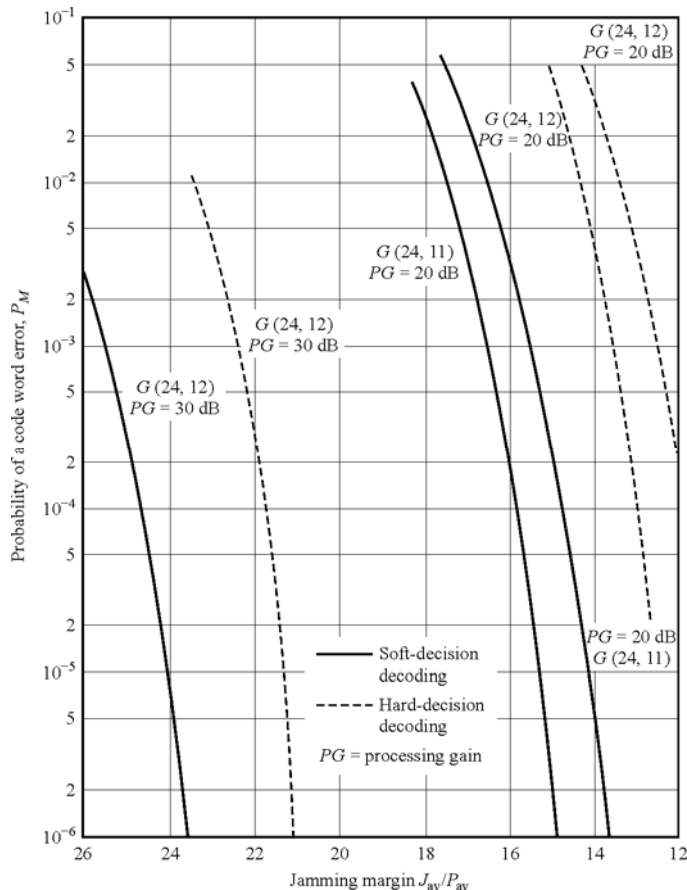
** Το κέρδος κωδικοποίησης είναι λιγότερο από 6 dB λόγω του συντελεστή πολλαπλασιασμού 759, που αυξάνει την πιθανότητα σφάλματος σχετικά με την απόδοση του δυαδικού μη κωδικοποιημένου συστήματος.

†† Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ότι το φράγμα ένωσης δεν είναι πολύ αυστηρό για μεγάλα σύνολα σημάτων.

για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης, όπου το p δίνεται

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{11W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) \quad (4.2 - 52)$$

Τα χαρακτηριστικά απόδοσης αυτού του κώδικα φαίνονται επίσης στο σχήμα 4.2 – 7 για $W/R = 100$. Παρατηρούμε ότι ο εκκαθαριστικός Golay (24,11) κώδικας αποδίδει περίπου 1 dB καλύτερα απ’ότι ο Golay (24,12) κώδικας.



ΣΧΗΜΑ 4.2 – 7 Απόδοση κωδικών Golay που χρησιμοποιούνται στα DS σήματα διευρυμένου φάσματος.

Αντί να χρησιμοποιήσουμε ένα μπλοκ κώδικα σε συνένωση με ένα χαμηλού ρυθμού ($1/n_2$) επαναληπτικό κώδικα, ας θεωρήσουμε την χρήση ενός μοναδικού χαμηλού ρυθμού κώδικα. Ένα ιδιαίτερος κατάλληλο σύνολο από χαμηλού ρυθμού κώδικες, είναι το σύνολο των μέγιστου μήκους κωδικών καταχωρητή ολίσθησης. Υπενθυμίζουμε ότι για το σύνολο αυτών των κωδικών,

$$(n, k) = (2^m - 1, m) \quad (4.2 - 53)$$

$$d_{\min} = 2^m - 1$$

Όλες οι κωδικές λέξεις εκτός της λέξης που αποτελείται μόνο από μηδενικά έχουν ένα ταυτόσημο βάρος της τάξης $2^m - 1$. Γι'αυτό το λόγω, ο ρυθμός σφαλμάτων για αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης έχει άνω φράγμα που δίνεται από την σχέση ^{‡‡}

$$\begin{aligned} P_M &\leq (M-1) Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c d_{\min}\right) \\ &\leq 2^m Q\left(\sqrt{\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}}} \frac{m2^{m-1}}{2^m - 1}\right) \\ &\leq 2^m \exp\left(-\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \frac{m2^{m-1}}{2^m - 1}\right) \end{aligned} \quad (4.2 - 54)$$

Για μέτριες τιμές του m , $R_c d_{\min} \approx \frac{1}{2} m$ και έτσι, η (4.2 - 54) μπορεί να εκφραστεί ως

$$P_M \leq 2^m Q\left(\sqrt{\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}}} m\right) \leq 2^m \exp\left(-\frac{mW/R}{2J_{av}P_{av}}\right) \quad (4.2 - 55)$$

Έτσι, το κέρδος κωδικοποίησης είναι το πολύ $10 \log \frac{1}{2} m$.

Για παράδειγμα, εάν επιλέξουμε $m=10$ τότε $n=2^{10}-1=1023$. Εφόσον $n=kW/R$, τότε έχουμε $W/R \approx 102$. Έτσι, έχουμε ένα κέρδος επεξεργασίας περίπου 20 dB και ένα κέρδος κωδικοποίησης περίπου 7 dB. Η απόδοση αυτή είναι συγκρίσιμη με αυτή που λαμβάνουμε από τον εκκαθαριστικό Golay (24,11) κώδικα. Υψηλότερα κέρδη κωδικοποίησης μπορούν να ληφθούν με μεγαλύτερες τιμές του m .

Εάν χρησιμοποιηθεί αυστηρής απόφασης αποκωδικοποίηση για τους μέγιστου μήκους κωδικές καταχωρητή ολίσθησης, ο ρυθμός σφαλμάτων έχει άνω φράγμα το φράγμα Chernoff που δίνεται από την σχέση

$$P_M \leq (M-1) [4p(1-p)]^{d_{\min}/2} = (2^m - 1) [4p(1-p)]^{2^{m-2}} \quad (4.2 - 56)$$

όπου το p δίνεται από

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} \frac{m}{2^m - 1}\right) \quad (4.2 - 57)$$

Για $m=10$, ο ρυθμός σφαλμάτων κωδικής λέξης P_M είναι συγκρίσιμος με αυτόν που παρέχεται από τον εκκαθαριστικό Golay (24,11) κώδικα για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης.

^{‡‡} Οι $M=2^m$ κυματομορφές που παράγονται από έναν μέγιστου μήκους κώδικα καταχωρητή ολίσθησης φτιάχνουν ένα απλό σύνολο. Η ακριβής έκφραση για την πιθανότητα σφάλματος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μεγάλες τιμές του M , όπου το φράγμα ένωσης γίνεται λιγότερο αυστηρό.

Τα αποτελέσματα που δόθηκαν παραπάνω δείχνουν την απόδοση που μπορεί να ληφθεί με ένα μόνο επίπεδο κωδικοποίησης. Μεγαλύτερα κέρδη κωδικοποίησης μπορούν να επιτευχθούν με συνενωτικούς κώδικες.

Μετάδοση Σήματος Χαμηλής Ανιχνευσιμότητας Σε αυτή την εφαρμογή, το σήμα μεταδίδεται ηθελημένα σε πολύ χαμηλή ισχύ σχετικά με τον θόρυβο καναλιού αλλά και τον θερμικό θόρυβο που παράγεται στο μπροστινό άκρο του δέκτη. Εάν το DS σήμα διευρυμένου φάσματος καταλαμβάνει ένα εύρος ζώνης W και η φασματική πυκνότητα του προσθετικού θορύβου είναι N_0 W/Hz, η μέση ισχύς θορύβου στο εύρος ζώνης W είναι $N_{av} = WN_0$.

Η μέση λαμβανόμενη ισχύς σήματος στον επιθυμητό δέκτη είναι P_{av} . Εάν επιθυμούμε να κρύψουμε την παρουσία του σήματος από δέκτες που είναι σε κοντινή απόσταση με τον επιθυμητό δέκτη, το σήμα μεταδίδεται σε χαμηλό επίπεδο ισχύος τέτοιο ώστε $P_{av}/N_{av} \ll 1$. Ο επιθυμητός δέκτης μπορεί να ανακτήσει το σήμα που φέρει την πληροφορία με την βοήθεια του κέρδους κωδικοποίησης και του κέρδους επεξεργασίας. Ωστόσο, κάθε άλλος δέκτης που δεν έχει εκ των προτέρων γνώση της PN ακολουθίας δεν μπορεί να εκμεταλλευτεί τα κέρδη κωδικοποίησης και επεξεργασίας. Έτσι, είναι δύσκολο να ανιχνευτεί το σήμα που φέρει την πληροφορία. Λέμε ότι το σήμα έχει χαμηλή πιθανότητα να εμποδισθεί, και έτσι το καλούμε σήμα **χαμηλής πιθανότητας αναχαίτισης (Low Probability of Intercept, LPI)**.

Τα αποτελέσματα της πιθανότητας σφάλματος που δίνονται στην παράγραφο 4.2.1 εφαρμόζονται επίσης στην αποδιαμόρφωση και αποκωδικοποίηση των LPI σημάτων στον επιθυμητό δέκτη.

Πολλαπλή Προσπέλαση με Επιλογή Κώδικα Η ενδυνάμωση της απόδοσης που επιτυγχάνεται από ένα DS σήμα διευρυμένου φάσματος μέσω του κέρδους επεξεργασίας και του κέρδους κωδικοποίησης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καταστήσει δυνατό πολλά DS σήματα διευρυμένου φάσματος να καταλαμβάνουν το ίδιο εύρος ζώνης καναλιού, αρκεί το κάθε σήμα να έχει την δική του ξεχωριστή PN ακολουθία. Έτσι, είναι πιθανόν να έχουμε αρκετούς χρήστες που μεταδίδουν μηνύματα ταυτόχρονα πάνω στο ίδιο εύρος ζώνης καναλιού. Αυτό το είδος ψηφιακής επικοινωνίας στο οποίο κάθε χρήστης (ζεύγος πομπού-δέκτη) έχει ένα ξεχωριστό PN κώδικα για μετάδοση πάνω σε ένα κοινό εύρος ζώνης καναλιού καλείται είτε **πολλαπλή προσπέλαση με επιλογή κώδικα (Code Division Multiple Access, CDMA)** είτε **πολλαπλή προσπέλαση διευρυμένου φάσματος (Spread Spectrum MA, SSMA)**.

Στην αποδιαμόρφωση κάθε PN σήματος, τα σήματα από τους άλλους ταυτόχρονους χρήστες του καναλιού εμφανίζονται σαν μία προσθετική παρεμβολή. Το επίπεδο της παρεμβολής ποικίλει, εξαρτώμενο από τον αριθμό των χρηστών σε οποιαδήποτε δοθείσα στιγμή. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της CDMA είναι ότι μπορεί να εξυπηρετηθεί ένας μεγάλος αριθμός χρηστών εάν κάθε ένας μεταδίδει μηνύματα για μία σύντομη διάρκεια του χρόνου. Σε ένα τέτοιο σύστημα πολλαπλής πρόσβασης, είναι σχετικά εύκολο είτε να προστεθούν νέοι χρήστες, ή να μειωθεί ο αριθμός των χρηστών, χωρίς να επηρεαστεί σε μεγάλο βαθμό το σύστημα.

Ας προσδιορίσουμε τον αριθμό των ταυτόχρονων σημάτων που μπορούν να υποστηριχθούν σε ένα CDMA σύστημα.^{§§} Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι όλα

^{§§} Σε αυτήν την παράγραφο η παρεμβολή από άλλους χρήστες λαμβάνεται σαν τυχαία μεταβλητή. Αυτή είναι η υπόθεση εάν δεν υπάρχει συνεργασία από άλλους χρήστες.

τα σήματα είναι ίσης μέσης ισχύος. Συνεπώς, εάν υπάρχουν N_u ταυτόχρονοι χρήστες, ο επιθυμητός λόγος ισχύος σήματος προς θόρυβο παρεμβολής σε ένα δοθέντα δέκτη είναι

$$\frac{P_{av}}{J_{av}} = \frac{P_{av}}{(N_u - 1)P_{av}} = \frac{1}{N_u - 1} \quad (4.2 - 58)$$

Γι' αυτό το λόγο, η απόδοση για αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης στον δοθέντα δέκτη έχει άνω φράγμα

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{N_u - 1}} R_c w_m \right) \leq (M - 1) Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{N_u - 1}} R_c d_{\min} \right) \quad (4.2 - 59)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε θεωρήσει ότι η παρεμβολή από άλλους χρήστες είναι γκαουσιανή.

Σαν παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι το επιθυμητό επίπεδο απόδοσης (πιθανότητα σφάλματος 10^{-6}) επιτυγχάνεται όταν

$$\frac{W/R}{N_u - 1} R_c d_{\min} = 20$$

Τότε ο μέγιστος αριθμός χρηστών που μπορούν να υποστηριχθούν στο CDMA σύστημα είναι

$$N_u = \frac{W/R}{20} R_c d_{\min} = 20$$

Εάν $W/R = 100$ και $R_c d_{\min} = 4$, όπως λαμβάνεται με τον Golay κώδικα, ο μέγιστος αριθμός είναι $N_u = 21$. Εάν $W/R = 1000$ και $R_c d_{\min} = 4$ ο αριθμός αυτός γίνεται $N_u = 201$.

Στον καθορισμό του μέγιστου αριθμού των ταυτόχρονων χρηστών στο κανάλι, έχουμε θεωρήσει αναμφίβολα ότι οι ψευδοθρομβικές ακολουθίες κώδικα είναι ορθογωνικές μεταξύ τους και ότι η παρεμβολή από άλλους χρήστες προστίθεται σε μία βάση ισχύος μόνο. Ωστόσο, η ορθογωνικότητα μεταξύ ενός αριθμού PN ακολουθιών κώδικα δεν επιτυγχάνεται εύκολα, ειδικά εάν ο αριθμός τους είναι μεγάλος. Στην πραγματικότητα, η επιλογή ενός καλού συνόλου PN ακολουθιών για ένα CDMA σύστημα είναι ένα σημαντικό πρόβλημα που έχει λάβει αξιοσημείωτη προσοχή στην τεχνική βιβλιογραφία. Θα συζητήσουμε εν συντομία το πρόβλημα αυτό στην παράγραφο 4.2.3.

4.2.3 Επίδραση της Παλμικής Παρεμβολής στα DS Συστήματα Διευρυμένου Φάσματος

Μέχρι στιγμής, έχουμε μελετήσει την επίδραση της συνεχούς παρεμβολής ή της κακόβουλα ηθελημένης παρεμβολής σε ένα DS σύστημα διευρυμένου φάσματος. Παρατηρήσαμε ότι το κέρδος επεξεργασίας και το κέρδος κωδικοποίησης παρέχουν τα φόντα για να ξεπεραστούν οι επιζήμιες επιδράσεις αυτού του είδους της

παρεμβολής. Ωστόσο, υπάρχει υπάρχει μια απειλή κακόβουλης παρεμβολής που έχει δραματική επίδραση στην απόδοση του DS συστήματος διευρυμένου φάσματος. Αυτό το σήμα παρεμβολής αποτελείται από παλμούς θορύβου ομοιόμορφους φασματικά που καλύπτουν το συνολικό εύρος ζώνης του σήματος W . Αυτό καλείται συνήθως παλμική παρεμβολή ή κακόβουλη παρεμβολή μερικού χρόνου.

Ας θεωρήσουμε ότι ο παρεμβολέας έχει μέση ισχύ J_{av} στο εύρος ζώνης του σήματος W . Γι'αυτό το λόγω $J_0 = J_{av}/W$. Αντί της συνεχούς μετάδοσης, ο παρεμβολέας μεταδίδει παλμούς σε ισχύ J_{av}/α για $\alpha\%$ του χρόνου (για παράδειγμα η πιθανότητα ο παρεμβολέας να μεταδίδει σε μία δοθείσα στιγμή είναι α). Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι ένας παλμός παρεμβολής καλύπτει ένα ολόκληρο αριθμό διαστημάτων σηματοδοσίας, και έτσι επηρεάζει ένα ολόκληρο αριθμό από bits. Όταν ο παρεμβολέας δεν μεταδίδει, τα μεταδιδόμενα bits θεωρούνται ότι λαμβάνονται χωρίς σφάλματα, και όταν ο παρεμβολέας μεταδίδει, η πιθανότητα σφάλματος για ένα μη κωδικοποιημένο DS σύστημα διευρυμένου φάσματος είναι $Q(\sqrt{2\alpha\mathcal{E}_b/J_0})$. Λόγω αυτού, η μέση πιθανότητα ενός σφάλματος bit είναι

$$P_2(\alpha) = \alpha Q(\sqrt{2\alpha\mathcal{E}_b/J_0}) = \alpha Q\left(\sqrt{\frac{2\alpha W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) \quad (4.2 - 61)$$

Ο παρεμβολέας επιλέγει τον κύκλο καθήκοντος α ώστε να μεγιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος. Παραγωγίζοντας την (4.2 - 61) σε σχέση με το α , βρίσκουμε ότι η χειρότερη περίπτωση παλμικής παρεμβολής συμβαίνει όταν

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{0.71}{\mathcal{E}_b/J_0} & (\mathcal{E}_b/J_0 \geq 0.71) \\ 1 & (\mathcal{E}_b/J_0 < 0.71) \end{cases} \quad (4.2 - 62)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_2 = \begin{cases} \frac{0.083}{\mathcal{E}_b/J_0} = \frac{0.083 J_{av}/P_{av}}{W/R} & (\mathcal{E}_b/J_0 > 0.71) \\ Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) & (\mathcal{E}_b/J_0 < 0.71) \end{cases} \quad (4.2 - 63)$$

Η απόδοση ρυθμού σφαλμάτων που δίνεται από την (4.2 - 61) για $\alpha = 1, 0, 0, 1$, και $0, 01$ μαζί με την απόδοση χειρότερης περίπτωσης που βασίζεται στο α^* φαίνεται στο σχήμα 4.2 - 8.

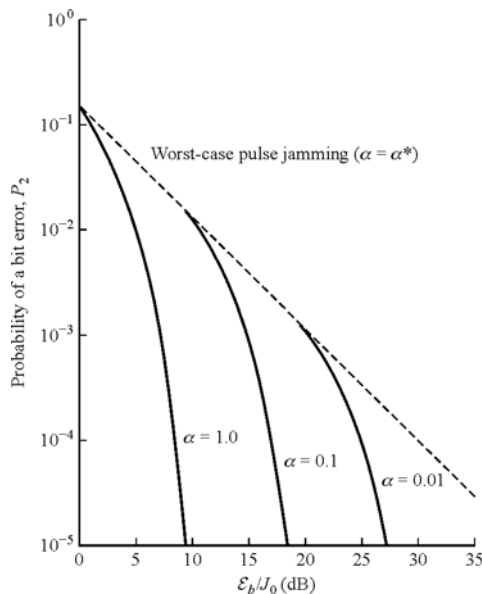
Συγκρίνοντας τον ρυθμό σφαλμάτων για συνεχή κακόβουλη παρεμβολή γκαουσιανού θορύβου με τον αντίστοιχο για παλμική, παρατηρούμε μια μεγάλη διαφορά στην απόδοση, που είναι περίπου 40 dB σε ένα ρυθμό σφαλμάτων 10^{-6} .

Θα πρέπει να επισημάνουμε το γεγονός ότι η παραπάνω ανάλυση εφαρμόζεται όταν η διάρκεια του παλμού του παρεμβολέα είναι ίση ή μεγαλύτερη αυτής της διάρκειας ενός bit. Πρόσθετα, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι πρακτικές μελέτες ίσως εμποδίσουν τον παρεμβολέα από το να επιτύχει υψηλή κορυφή ισχύος (μικρές τιμές

του α). Ωστόσο, η πιθανότητα σφάλματος που δίνεται από την (4.2 – 63) λειτουργεί σαν ένα άνω φράγμα στην απόδοση του μη κωδικοποιημένου δυαδικού PSK στην χειρότερη περίπτωση παλμικής παρεμβολής. Ξεκάθαρα, η απόδοση του DS συστήματος διευρυμένου φάσματος παρουσία τέτοιου είδους παρεμβολής είναι εξαιρετικά φτωχή.

Εάν προσθέσουμε απλά κωδικοποίηση στο DS σύστημα διευρυμένου φάσματος, η βελτίωση σε σχέση με το μη κωδικοποιημένο σύστημα είναι το κέρδος κωδικοποίησης. Έτσι, ο λόγος E_b/J_0 μειώνεται από το κέρδος κωδικοποίησης, το οποίο στις περισσότερες περιπτώσεις έχει όριο κάτω των 10 dB. Ο λόγος για την φτωχή απόδοση είναι ότι η διάρκεια παλμού του σήματος παρεμβολής μπορεί να επιλεγεί ώστε να επηρεάσει πολλά συνεχόμενα κωδικοποιημένα bits όταν το σήμα παρεμβολής λειτουργεί. Συνεπώς, η πιθανότητα σφάλματος κωδικής λέξης είναι υψηλή λόγω των χαρακτηριστικών ριπής του παρεμβολέα.

Για να βελτιώσουμε την απόδοση, θα πρέπει να αναδιατάξουμε τα κωδικοποιημένα bits πριν την μετάδοση στο κανάλι. Ο σκοπός της αναδιάταξης (interleaving) είναι να κάνει τα κωδικοποιημένα bits που βάλλονται από τον παρεμβολέα στατιστικά ανεξάρτητα.

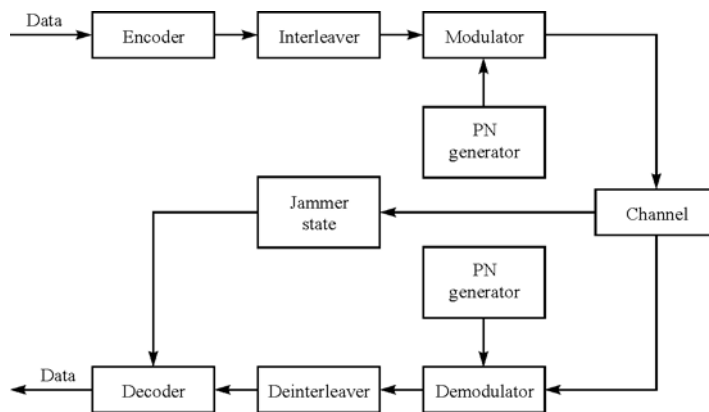


ΣΧΗΜΑ 4.2 – 8 Απόδοση DS δυαδικού PSK με παλμική παρεμβολή.

Το μπλοκ διάγραμμα του ψηφιακού συστήματος επικοινωνιών που περιλαμβάνει τις διαδικασίες αναδιάταξης/αποαναδιάταξης φαίνεται στο σχήμα 4.2 – 9. Φαίνεται επίσης η πιθανότητα ο δέκτης να γνωρίζει την κατάσταση του παρεμβολέα, για παράδειγμα, ότι ξέρει πότε ο παρεμβολέας είναι σε λειτουργία ή όχι. Η γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα (καλείται και **παράπλευρη πληροφορία, side information**) είναι κάποιες φορές διαθέσιμη από μετρήσεις καναλιού του επιπέδου ισχύος θορύβου σε γειτονικές ζώνες συχνοτήτων. Στην μελέτη μας θεωρήσαμε ακραίες περιπτώσεις, δηλαδή, καμία γνώση της κατάστασης παρεμβολέα ή πλήρη γνώση αυτής. Σε κάθε περίπτωση, η τυχαία μεταβλητή ζ που αναπαριστά την κατάσταση του παρεμβολέα χαρακτηρίζεται από τις πιθανότητες

$$P(\zeta = 1) = \alpha, \quad P(\zeta = 0) = 1 - \alpha$$

Όταν ο παρεμβολέας είναι ανοιχτός, το κανάλι μοντελοποιείται σαν ένας λευκός προσθετικός γκαουσιανός θόρυβος με φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0 = J_0/\alpha = J_{av}/\alpha W$, και όταν ο παρεμβολέας είναι κλειστός, δεν υπάρχει καθόλου θόρυβος στο κανάλι. Η γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα σημαίνει ότι ο αποκωδικοποιητής γνωρίζει πότε $\zeta = 0$ και πότε $\zeta = 1$, και χρησιμοποιεί την πληροφορία αυτή στον υπολογισμό των μετρικών συσχέτισης. Για παράδειγμα, ο αποκωδικοποιητής μπορεί να ζυγίσει την έξοδο του αποδιαμορφωτή για κάθε κωδικοποιημένο bit από το αντίστροφο κλάσμα του επιπέδου ισχύος θορύβου στο διάστημα αυτό. Εναλλακτικά, ο αποκωδικοποιητής μπορεί να δώσει μηδενικό βάρος (διαγραφή) σε ένα bit που έχει υποστεί παρεμβολή.

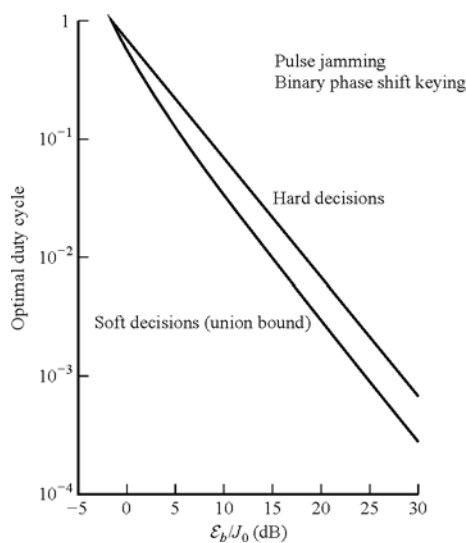


ΣΧΗΜΑ 4.2 – 9 Μπλοκ διάγραμμα AJ συστήματος επικοινωνίας

Πρώτα, ας μελετήσουμε την επίδραση της παρεμβολής χωρίς γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα. Το ζεύγος interleaver/deinterleaver θεωρείται ότι οδηγεί σε στατιστικά ανεξάρτητα χτυπήματα στα κωδικοποιημένα bits, από τον παρεμβολέα. Σαν παράδειγμα της απόδοσης που επιτυγχάνεται με την κωδικοποίηση, παραθέτουμε τα αποτελέσματα απόδοσης από την εργασία των Martin και McAdam (1980). Εκεί υπολογίζεται η απόδοση των δυαδικών συνελκτικών κωδικών για την χειρίστη περίπτωση παλμικής παρεμβολής. Μελετώνται τόσο η περίπτωση ήπιας απόφασης αποκωδικοποίηση Viterbi όσο και η αυστηρής απόφασης αποκωδικοποίηση Viterbi. Οι ήπιες αποφάσεις λαμβάνονται κβαντίζοντας την έξοδο του αποδιαμορφωτή σε οκτώ επίπεδα. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιείται ένας σταθερός κβαντιστής για τον οποίο το όριο απόστασης βελτιστοποιείται για το επίπεδο θορύβου του παλμού παρεμβολής. Ο κβαντιστής παίζει τον σημαντικό ρόλο να οριοθετεί το μέγεθος της εξόδου του αποδιαμορφωτή όταν ο παλμικός παρεμβολέας είναι σε λειτουργία. Η πράξη οριοθέτησης εξασφαλίζει ότι οποιοδήποτε χτύπημα σε ένα κωδικοποιημένο bit δεν επηρεάζει πολύ τις αντίστοιχες μετρικές μονοπατιού.

Ο βέλτιστος κύκλος καθήκοντος για τον παλμικό παρεμβολέα στο κωδικοποιημένο σύστημα είναι γενικά αντιστρόφως ανάλογος του SNR, αλλά η τιμή του είναι διαφορετική από αυτή που δίνεται από την (4.2 – 62) για το μη κωδικοποιημένο σύστημα. Το σχήμα 4.2 – 10 δείχνει γραφικά τον βέλτιστο κύκλο καθήκοντος του παρεμβολέα τόσο για ήπιας όσο και για αυστηρής απόφασης αποκωδικοποίηση των ρυθμού 1/2 συνελκτικών κωδικών. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα ρυθμού σφαλμάτων για αυτήν την χειρίστη περίπτωση παλμικής παρεμβολής φαίνονται στα σχήματα 4.2 – 11 και 4.2 – 12 για κώδικες ρυθμού 1/2 με μήκη $3 \leq K \leq 9$. Για παράδειγμα, ας σημειώσουμε ότι για $P_2 = 10^{-6}$, ο $K = 7$

συνελικτικός κώδικας με αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης απαιτεί $\mathcal{E}_b/J_0 = 7,6$ dB, ενώ για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης απαιτεί $\mathcal{E}_b/J_0 = 11,7$ dB. Αυτή η διαφορά των 4,1 dB στο SNR είναι σχετικά μεγάλη. Με συνεχόμενο γκαουσιανό θόρυβο, τα αντίστοιχα SNR για ένα ρυθμό σφαλμάτων 10^{-6} είναι 5 dB για ήπιας απόφασης αποκωδικοποίηση και 7 dB για αυστηρής απόφασης αποκωδικοποίηση. Γι'αυτο το λόγω, η χειρότερη περίπτωση παλμικής παρεμβολής μειώνει την απόδοση κατά 2,6 dB για ήπιας απόφασης αποκωδικοποίηση και 4,7 dB για αυστηρής απόφασης αποκωδικοποίηση. Αυτά τα επίπεδα υποβιβασμού αυξάνονται καθώς μειώνεται το επίπεδο του συνελικτικού κώδικα. Το σημαντικό σημείο, ωστόσο, είναι ότι η απώλεια σε SNR λόγω της παρεμβολής έχει μειωθεί από 40 dB για το μη κωδικοποιημένο σύστημα σε λιγότερο από 5 dB για το κωδικοποιημένο σύστημα βασισμένο σε ένα συνελικτικό κώδικα $K = 7$, ρυθμού $1/2$.



ΣΧΗΜΑ 4.2 – 10 Βέλτιστος κύκλος εργασίας για παλμικό κακόβουλο παρεμβολέα.

Μία απλούστερη μέθοδος για να υπολογίσουμε την απόδοση ενός κωδικοποιημένου AJ συστήματος επικοινωνίας είναι να χρησιμοποιήσουμε την παράμετρο αποκοπής ρυθμού R_0 όπως αυτή προτείνεται από τους Omura και Levitt (1982). Για παράδειγμα, με δυαδικής κωδικοποίησης διαμόρφωση, ο ρυθμός αποκοπής μπορεί να εκφραστεί σαν

$$R_0 = 1 - \log(1 + D_\alpha) \quad (4.2 - 64)$$

όπου ο συντελεστής D_α , εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά θορύβου καναλιού και την επεξεργασία αποκωδικοποίησης. Ας θυμηθούμε ότι για δυαδικό PSK σε AWGN κανάλι και αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης,

$$D_\alpha = e^{-\mathcal{E}_c/N_0} \quad (4.2 - 65)$$

όπου \mathcal{E}_c είναι η ενέργεια ανά κωδικοποιημένο bit. Για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης ισχύει

$$D_\alpha = \sqrt{4p(1-p)} \quad (4.2 - 66)$$

όπου p είναι η πιθανότητα σφάλματος ενός κωδικοποιημένου bit. Εδώ έχουμε $N_0 \equiv J_0$.

Για κωδικοποιημένο δυαδικό PSK, με παλμική παρεμβολή, οι Omura και Levitt (1982) έδειξαν ότι

$$D_\alpha = \alpha e^{-\alpha \mathcal{E}_c / N_0} \quad \text{για αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης με} \\ \text{γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα} \quad (4.2 - 67)$$

$$D_\alpha = \min_{\lambda \geq 0} \left\{ \left[\alpha \exp(\lambda^2 \mathcal{E}_c N_0 / \alpha) + 1 - \alpha \right] \exp(-2\lambda \mathcal{E}_c) \right\} \\ \text{για αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης χωρίς} \\ \text{γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα} \quad (4.2 - 68)$$

$$D_\alpha = \alpha \sqrt{4p(1-p)} \quad \text{για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης με} \\ \text{γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα} \quad (4.2 - 69)$$

$$D_\alpha = \sqrt{4\alpha p(1-\alpha p)} \quad \text{για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης χωρίς} \\ \text{γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα} \quad (4.2 - 70)$$

όπου η πιθανότητα σφάλματος για αυστηρής απόφασης αποκωδικοποίηση δυαδικού PSK είναι

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2\alpha \mathcal{E}_c}{N_0}}\right)$$

Οι γραφικές για το R_0 σαν συνάρτηση του \mathcal{E}_c / N_0 , δείχνουν ότι φαίνονται στο σχήμα 4.2 – 13 για τις παραπάνω περιπτώσεις. Ας σημειώσουμε ότι αυτές οι γραφικές αναπαριστούν τον ρυθμό αποκοπής για την τιμή της χειρότερης περίπτωσης $\alpha = \alpha^*$ που μεγιστοποιεί το D_α (ελαχιστοποιεί το R_0) για κάθε τιμή του \mathcal{E}_c / N_0 . Επιπλέον, ας σημειώσουμε ότι με αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης και καθόλου γνώση του παρεμβολέα, $R_0 = 0$. Η κατάσταση αυτή συμβαίνει επειδή η έξοδος του αποδιαμορφωτή δεν έχει κβαντιστεί.

Οι γραφικές στο σχήμα 4.2 – 13 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποτιμήσουμε την απόδοση των κωδικοποιημένων συστημάτων. Για να εξηγήσουμε την απόδοση, ας θεωρήσουμε ότι επιθυμούμε να καθορίσουμε τον SNR που απαιτείται για να επιτύχουμε μία πιθανότητα σφάλματος 10^{-6} με κωδικοποιημένο δυαδικό PSK στην παλμική παρεμβολή χειρότερης περίπτωσης. Για να είμαστε συγκεκριμένοι, θεωρούμε ότι έχουμε ένα συνελκτικό κώδικα $K = 7$, ρυθμού $1/2$. Ξεκινούμε με την απόδοση του κώδικα αυτού, με αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης σε ένα AWGN κανάλι. Με $P_2 = 10^{-6}$, ο SNR που απαιτείται βρίσκεται ότι είναι

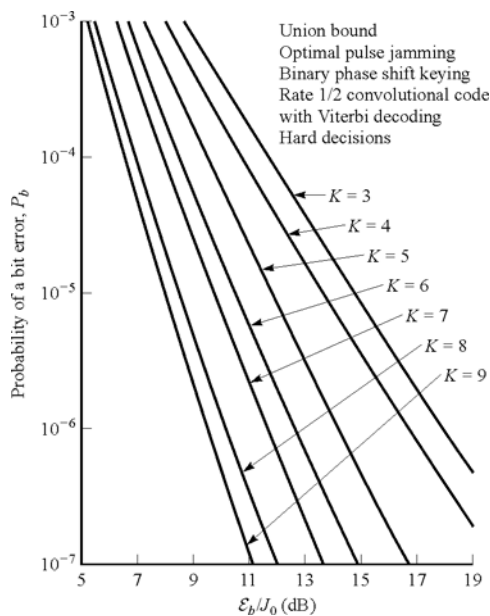
$$\mathcal{E}_b / N_0 = 5 \text{ dB}$$

Εφόσον ο ρυθμός του κώδικα είναι $1/2$, έχουμε

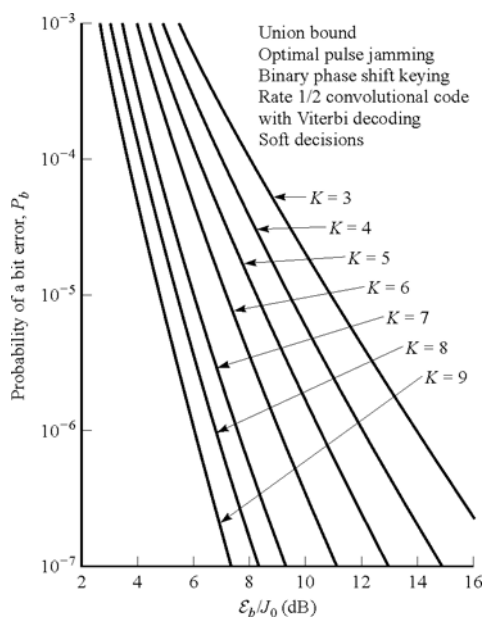
$$\mathcal{E}_c/N_0 = 2 \text{ dB}$$

Τώρα, πάμε στις γραφικές του σχήματος 4.2 – 13 και βρίσκουμε ότι για το AWGN κανάλι (σύστημα αναφοράς) με $\mathcal{E}_c/N_0 = 2 \text{ dB}$, η αντίστοιχη τιμή του ρυθμού αποκοπής είναι

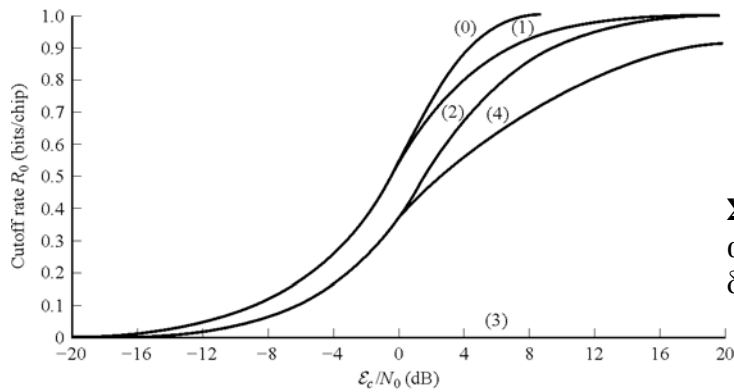
$$R_0 = 0,74 \text{ bits /symbol}$$



ΣΧΗΜΑ 4.2 – 11 Κύκλος εργασίας συνελκτικών κωδικών ρυθμού $1/2$ με αποκωδικοποίηση Viterbi αυστηρής απόφασης για δυαδική PSK με βέλτιστο παλμικό κακόβουλο παρεμβολέα.



ΣΧΗΜΑ 4.2 – 12 Κύκλος εργασίας συνελκτικών κωδικών ρυθμού $1/2$ με αποκωδικοποίηση Viterbi ήπιας απόφασης για δυαδική PSK με βέλτιστο παλμικό κακόβουλο παρεμβολέα.



ΣΧΗΜΑ 4.2 – 13 Ρυθμός αποκοπής για κωδικοποιημένη DS δυαδική PSK.

- Key
- (0) Soft-decision decoding in AWGN ($\alpha = 1$)
 - (1) Soft-decision with jammer state information
 - (2) Hard-decision with jammer state information
 - (3) Soft-decision with no jammer state information
 - (4) Hard-decision with no jammer state information

Εάν έχουμε άλλο κανάλι με διαφορετικά χαρακτηριστικά θορύβου (ένα χειρίστης περίπτωσης παλμικό κανάλι θορύβου) αλλά με την ίδια τιμή του ρυθμού αποκοπής R_0 , τότε το άνω φράγμα στην πιθανότητα εσφαλμένου bit είναι η ίδια, όπως για παράδειγμα 10^{-6} στην περίπτωση αυτή. Συνεπώς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ρυθμό αυτό για να καθορίσουμε το SNR που απαιτείται για την χειρίστη περίπτωση παλμικής παρεμβολής. Από τις γραφικές στο σχήμα 4.2 – 13, βρίσκουμε ότι

$$\frac{E_c}{J_0} = \begin{cases} 10 \text{ dB} & \text{για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης} \\ & \text{χωρίς γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα} \\ 5 \text{ dB} & \text{για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης} \\ & \text{με γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα} \\ 3 \text{ dB} & \text{για αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης} \\ & \text{με γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα} \end{cases}$$

Επομένως, οι αντίστοιχες τιμές του E_b/J_0 για τον συνελκτικό κώδικα $K = 7$, ρυθμού $1/2$ είναι 13, 8 και 6 dB αντίστοιχα.

Η γενική αυτή προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγει γραφικές ρυθμού σφαλμάτων για κωδικοποιημένα δυαδικά σήματα σε ένα κανάλι με χειρίστης περίπτωσης παλμική παρεμβολή, χρησιμοποιώντας αντίστοιχες γραφικές ρυθμού σφαλμάτων για το AWGN κανάλι. Η προσέγγιση που περιγράφουμε παραπάνω γενικεύεται εύκολα για M -αδικά κωδικοποιημένα σήματα όπως δεικνύεται από τους Omura και Levitt (1982).

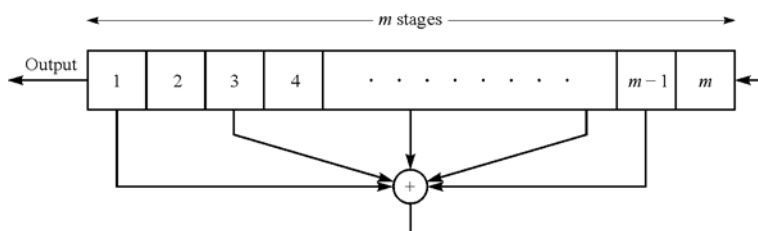
Συγκρίνοντας τον ρυθμό αποκοπής για κωδικοποιημένη DS δυαδική PSK διαμόρφωση που φαίνεται στο σχήμα 4.2 – 13, παρατηρούμε ότι για ρυθμούς κάτω του 0,7, δεν υπάρχει μειονέκτημα στο SNR με αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης και πληροφορία κατάστασης παρεμβολέα συγκριτικά με την απόδοση στο AWGN κανάλι $\alpha = 1$. Από την άλλη πλευρά, για $R_0 = 0,7$, υπάρχει μια διαφορά 6 dB στην απόδοση μεταξύ του SNR σε ένα AWGN κανάλι και σε αυτό που απαιτείται για αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης με μηδενική γνώση κατάστασης παρεμβολέα. Σε ρυθμούς μικρότερους του 0,4, δεν υπάρχει καμία κύρωση στο SNR με

αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης εάν η κατάσταση παρεμβολέα είναι άγνωστη. Ωστόσο, υπάρχει μια αναμενόμενη απώλεια 2 dB σε αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης συγκρινόμενη με την αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης στο AWGN κανάλι.

4.2.4 Δημιουργία PN ακολουθιών

Η δημιουργία των PN ακολουθιών για εφαρμογές διευρυμένου φάσματος είναι ένα θέμα που έχει λάβει αξιοσημείωτη προσοχή στην τεχνική βιβλιογραφία. Θα συζητήσουμε εν συντομία την παραγωγή κάποιων PN ακολουθιών, και θα παρουσιάσουμε έναν αριθμό σημαντικών ιδιοτήτων των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και διασυσχέτισης αυτών των ακολουθιών. Για μία πιο αναλυτική προσέγγιση του ζητήματος, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να καταφύγει στο βιβλίο του Golomb (1967).

Οι πιο ευρέως γνωστές δυαδικές ακολουθίες ψευδοθορύβου είναι οι μέγιστου μήκους ακολουθίες καταχωρητή ολίσθησης που συζητώνται στην παράγραφο 4.2.2 χρησιμοποιούμενες σαν κώδικες χαμηλού ρυθμού. Μία μέγιστου μήκους ακολουθία καταχωρητή ολίσθησης, ή m - ακολουθία για λόγους συντομίας, έχει μήκος $n = 2^m - 1$ bits και παράγεται από ένα m - επιπέδου καταχωρητή ολίσθησης με γραμμική ανάδραση όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2 - 14. Η ακολουθία είναι περιοδική με περίοδο n . Κάθε περίοδος της ακολουθίας περιέχει 2^{m-1} άσσους και $2^{m-1} - 1$ μηδενικά.



ΣΧΗΜΑ 4.2 – 14 Γενικός καταχωρητής ολίσθησης m σταδίων με γραμμική ανάδραση.

Στις εφαρμογές DS συστημάτων διευρυμένου φάσματος η δυαδική ακολουθία με στοιχεία $\{0,1\}$ οδηγείται σε μία αντίστοιχη ακολουθία θετικών και αρνητικών παλμών σύμφωνα με την σχέση

$$p_i(t) = (2b_i - 1)p(t - iT)$$

όπου $p_i(t)$ είναι ο παλμός που αντιστοιχεί στο στοιχείο b_i στην ακολουθία με στοιχεία $\{0,1\}$. Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι η δυαδική ακολουθία με στοιχεία $\{0,1\}$ οδηγείται σε μία αντίστοιχη δυαδική ακολουθία με στοιχεία $\{-1,1\}$. Θα ονομάσουμε την ισοδύναμη ακολουθία με στοιχεία $\{-1,1\}$ μία **διπολική ακολουθία (bipolar sequence)**, μιας και οδηγεί σε παλμούς θετικού και αρνητικού πλάτους.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της περιοδικής ακολουθίας ψευδοθορύβου είναι η περιοδική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της, που συνήθως ορίζεται σε σχέση με την διπολική ακολουθία ως

$$\phi(j) = \sum_{i=1}^n (2b_i - 1)(2b_{i+j} - 1), \quad 0 \leq j \leq n-1 \quad (4.2 - 71)$$

όπου n είναι η περίοδος. Ξεκάθαρα, $\phi(j+rn) = \phi(j)$ για κάθε ακέραια τιμή r .

Ιδανικά, μία ψευδοτυχαία ακολουθία πρέπει να έχει μία συνάρτηση αυτοσυσχέτισης με την ιδιότητα $\phi(0) = n$ και $\phi(j) = 1$ για $1 \leq j \leq n-1$. Στην περίπτωση των m ακολουθιών, η περιοδική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι

$$\phi(j) = \begin{cases} n & (j = 0) \\ -1 & (1 \leq j \leq n-1) \end{cases} \quad (4.2 - 72)$$

Για μεγάλες τιμές του n , όπως στις μεγάλου μήκους ακολουθίες, το μέγεθος των τιμών που είναι κάτω από την κορυφή σχετικά με το μέγεθος της τιμής κορυφής είναι μικρό, και από πρακτικής πλευράς μηδαμινό. Γι' αυτό, οι m ακολουθίες είναι σχεδόν ιδανικές όταν ιδωθούν από πλευράς των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισής τους.

Στις εφαρμογές καταστολής κακόβουλων παρεμβολών των PN σημάτων διευρυμένου φάσματος, η περίοδος της ακολουθίας πρέπει να είναι μεγάλη ώστε να αποτρέψει τον παρεμβολέα από το να μάθει τις συνδέσεις ανάδρασης της PN γεννήτριας. Ωστόσο, αυτή η προϋπόθεση είναι μη πρακτική στις περισσότερες περιπτώσεις επειδή ο παρεμβολέας μπορεί να προσδιορίσει τις συνδέσεις ανάδρασης παρατηρώντας μόνο $2m$ chips από την PN ακολουθία. Αυτό το τρωτό σημείο της PN οφείλεται στην γραμμική ιδιότητα της γεννήτριας. Για να μειωθεί η ευπάθεια στον παρεμβολέα, οι ακολουθίες εξόδου από τα διάφορα στάδια του καταχωρητή ολίσθησης ή οι εξόδοι από τις διάφορες διακριτές m ακολουθίες συνδυάζονται με μη γραμμικό τρόπο για να παράγουν μία μη γραμμική ακολουθία που είναι αρκετά πιο δύσκολη για τον παρεμβολέα να μάθει. Επιπλέον μείωση στην ευπάθεια λαμβάνεται αλλάζοντας συχνά τις συνδέσεις ανάδρασης και/ή τους αριθμούς των σταδίων στον καταχωρητή ολίσθησης σύμφωνα με κάποιο προκαθορισμένο πλάνο που γίνεται μεταξύ του εκπομπού και του επιθυμητού δέκτη.

Σε κάποιες εφαρμογές, οι ιδιότητες διασυσχέτισης των PN ακολουθιών είναι τόσο σημαντικές όσο και οι ιδιότητες αυτοσυσχέτισης. Για παράδειγμα, στην CDMA, σε κάθε χρήστη ανατίθεται μία μία συγκεκριμένη PN ακολουθία. Ιδανικά, οι PN ακολουθίες μεταξύ των χρηστών θα πρέπει να είναι από κοινού ορθογωνικές έτσι ώστε το επίπεδο της παρεμβολής που υπόκειται κάθε χρήστης από μεταδόσεις από άλλους χρήστες να προστίθεται σε μια βάση ισχύος. Ωστόσο, οι PN ακολουθίες που χρησιμοποιούνται στην πράξη παρουσιάζουν κάποια συσχέτιση.

Για να είμαστε ακριβείς, θα μελετήσουμε την τάξη των m ακολουθιών. Είναι γνωστό (Sarwate και Pursley, 1980) ότι η περιοδική συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ οποιωνδήποτε ζευγών m ακολουθιών της ίδιας περιόδου έχουν σχετικά μεγάλες τιμές κορυφής. Ο πίνακας 4.2 - 1 τοποθετεί την τιμή κορυφής ϕ_{\max} για την περιοδική διασυσχέτιση μεταξύ των ζευγών των m ακολουθιών για $3 \leq m \leq 12$. Ο πίνακας δείχνει επίσης τον αριθμό των m ακολουθιών μήκους $n = 2^m - 1$ για $3 \leq m \leq 12$. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, ο αριθμός των m ακολουθιών μήκους n αυξάνεται γρήγορα με την τιμή του m . Παρατηρούμε επίσης ότι, για τις

περισσότερες ακολουθίες, η τιμή κορυφής ϕ_{\max} της συνάρτησης διασυσχέτισης είναι ένα μεγάλο ποσοστό της τιμής κορυφής της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

Τέτοιες υψηλές τιμές για την διασυσχέτιση είναι ανεπιθύμητες στην CDMA.

Αν και είναι εφικτό να επιλέξουμε ένα μικρό υποσύνολο m ακολουθιών που έχουν σχετικά μικρότερες τιμές κορυφής διασυσχέτισης, ο αριθμός των ακολουθιών στο σύνολο είναι συνήθως πολύ μικρός για CDMA εφαρμογές.

Οι PN ακολουθίες με καλύτερες ιδιότητες περιοδικής διασυσχέτισης απ'ότι οι m ακολουθίες δόθηκαν από τους Gold (1967,1968) και Kasami (1966). Εξάγονται από τις m ακολουθίες όπως περιγράφεται παρακάτω. Οι Gold και Kasami απέδειξαν ότι συγκεκριμένα ζεύγη m ακολουθιών μήκους n παρουσιάζουν μία συνάρτηση διασυσχέτισης με τρεις τιμές $\{-1, -t(m), t(m)-2\}$ όπου

$$t(m) = \begin{cases} 2^{(m+1)/2} + 1 & (\text{περιττό } m) \\ 2^{(m+2)/2} + 1 & (\text{άρτιο } m) \end{cases} \quad (4.2 - 73)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2 – 1 ΚΟΡΥΦΑΙΑ ΤΙΜΗ ΔΙΑΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΤΩΝ m ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ GOLD

m	$n = 2^m - 1$	Αριθμός ακολουθιών	Κορυφαία τιμή διασυσχέτισης	$\phi_{\max} / \phi(0)$	$t(m)$	$t(m)/\phi(0)$
3	7	2	5	0.71	5	0.71
4	15	2	9	0.60	9	0.60
5	31	6	11	0.35	9	0.29
6	63	6	23	0.36	17	0.27
7	127	18	41	0.32	17	0.13
8	255	16	95	0.37	33	0.13
9	511	48	113	0.22	33	0.06
10	1023	60	383	0.37	65	0.06
11	2047	176	287	0.14	65	0.03
12	4095	144	1407	0.34	129	0.03

Για παράδειγμα, εάν $m=10$ τότε $t(10) = 2^6 + 1 = 65$ και οι τρεις πιθανές τιμές της περιοδικής συνάρτησης διασυσχέτισης είναι $\{-1, -65, -63\}$. Γι'αυτό το λόγω η μέγιστη διασυσχέτιση για το ζεύγος των m ακολουθιών είναι 65, ενώ η κορυφή για το σύνολο των 60 πιθανών ακολουθιών που γεννώνται από έναν καταχωρητή ολίσθησης 10 επιπέδων με διαφορετικές συνδέσεις ανάδρασης είναι $\phi_{\max} = 383$ (περίπου εξαπλάσια διαφορά σε τιμές κορυφής). Δύο m ακολουθίες μήκους n με περιοδική συνάρτηση διασυσχέτισης που παίρνει τις πιθανές τιμές $\{-1, -t(m), t(m)-2\}$ καλούνται **προτιμώμενες ακολουθίες (preferred sequences)**.

Από ένα ζεύγος προτιμώμενων ακολουθιών, ας πούμε $\mathbf{a} = [a_1 a_2 \dots a_n]$ και $\mathbf{b} = [b_1 b_2 \dots b_n]$, κατασκευάζουμε ένα σύνολο ακολουθιών μήκους n λαμβάνοντας το modulo - 2 άθροισμα του \mathbf{a} με τις n κυκλικά ολισθημένες εκδόσεις του \mathbf{b} ή και αντίστροφα. Έτσι, λαμβάνουμε n νέες περιοδικές ακολουθίες*** με περίοδο

*** Μία ισοδύναμη μέθοδος για την παραγωγή των n νέων ακολουθιών είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα καταχωρητή ολίσθησης μήκους $2m$ με συνδέσεις ανάδρασης που καθορίζονται από το πολυώνυμο

$n = 2^m - 1$. Μπορούμε επίσης να συμπεριλάβουμε τις πρωτότυπες ακολουθίες **a** και **b**, έτσι, να έχουμε ένα σύνολο $n+2$ ακολουθιών. Οι $n+2$ ακολουθίες που φτιάχνονται με αυτόν τον τρόπο καλούνται **ακολουθίες Gold (Gold sequences)**.

Παράδειγμα 4.2 – 4

Ας μελετήσουμε την παραγωγή των ακολουθιών Gold μήκους $n = 31 = 2^5 - 1$. Όπως φαίνεται παραπάνω για $m = 5$, η κορυφή διασυσχέτισης είναι

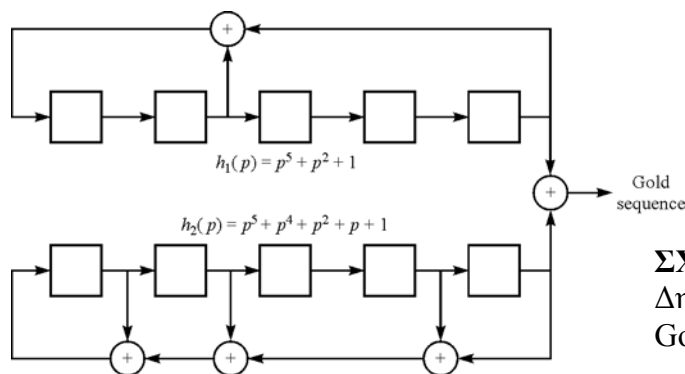
$$t(5) = 2^3 + 1 = 9$$

Δύο προτιμώμενες ακολουθίες, που μπορούν να ληφθούν από τους Peterson και Weldon (1972), περιγράφονται από τα πολυώνυμα

$$g_1(p) = p^5 + p^2 + 1$$

$$g_2(p) = p^5 + p^4 + p^2 + p + 1$$

Οι καταχωρητές ολίσθησης για την παραγωγή των δύο m ακολουθιών και των αντίστοιχων ακολουθιών Gold φαίνονται στο σχήμα 4.2 – 15. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχουν 33 διαφορετικές ακολουθίες, που αντιστοιχούν στις 33 σχετικές φάσεις των δύο m ακολουθιών. Από αυτές, οι 31 ακολουθίες είναι μη μέγιστου μήκους.



ΣΧΗΜΑ 4.2 – 15
Δημιουργία ακολουθιών Gold μήκους 31.

Με εξαίρεση τις ακολουθίες **a** και **b**, το σύνολο των ακολουθιών Gold δεν αποτελείται από μέγιστου μήκους ακολουθίες καταχωρητή ολίσθησης μήκους n . Γι' αυτό τον λόγο, οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης τους δεν είναι δίτιμες. Ο Gold (1968) έδειξε ότι η συνάρτηση διασυσχέτισης για οποιοδήποτε ζεύγος ακολουθιών από το σύνολο $n+2$ ακολουθιών Gold λαμβάνει τρεις πιθανές τιμές $\{-1, -t(m), t(m)-2\}$, όπου η $t(m)$ δίνεται από την (4.2 – 73). Παρόμοια, η off – peak συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για μία ακολουθία Gold λαμβάνει τιμές από το σύνολο $\{-1, -t(m), t(m)-2\}$. Έτσι, οι τιμές off – peak της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης έχουν άνω φράγμα που δίνεται από την $t(m)$.

$h(p) = g_1(p)g_2(p)$ όπου $g_1(p)$ και $g_2(p)$ είναι τα πολυώνυμα που καθορίζουν τις συνδέσεις ανάδρασης

Οι τιμές της off – peak συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και της τιμής κορυφής της συνάρτησης διασυσχέτισης π.χ. $t(m)$, για τις Gold ακολουθίες φαίνονται στον πίνακα 4.2 – 1. Επίσης φαίνονται οι κανονικοποιημένες τιμές από την $\phi(0)$.

Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την τιμή κορυφής της διασυσχέτισης των ακολουθιών Gold με ένα γνωστό κάτω φράγμα στην διασυσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους δυαδικών ακολουθιών περιόδου n σε ένα σύνολο M ακολουθιών. Ένα κάτω φράγμα που αναπτύχθηκε από τους Welch (1974) για την τιμή ϕ_{\max} είναι

$$\phi_{\max} \geq n \sqrt{\frac{M-1}{Mn-1}} \quad (4.2 - 74)$$

το οποίο, για μεγάλες τιμές του n και του M , προσεγγίζεται ορθά από την τιμή \sqrt{n} . Για ακολουθίες Gold, $n = 2^m - 1$ και έτσι, το κάτω φράγμα είναι $\phi_{\max} \approx 2^{m/2}$. Το φράγμα είναι χαμηλότερο κατά $\sqrt{2}$ για περιττά m και κατά 2 για άρτια m σχετικά με την $\phi_{\max} = t(m)$ για ακολουθίες Gold.

Μια διαδικασία παρόμοια με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή ακολουθιών Gold θα παράγει ένα μικρότερο σύνολο από $M = 2^{m/2}$ δυαδικές ακολουθίες περιόδου $n = 2^m - 1$, όπου το m είναι άρτιο. Σε αυτήν την διαδικασία, ξεκινάμε με μία m ακολουθία \mathbf{a} και μορφοποιούμε μια δυαδική ακολουθία \mathbf{b} λαμβάνοντας κάθε $2^{m/2} + 1$ bit του \mathbf{a} . Έτσι, η ακολουθία \mathbf{b} μορφοποιείται αποδεκατίζοντας την \mathbf{a} με $2^{m/2} + 1$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το συνακόλουθο \mathbf{b} είναι περιοδικό με περίοδο $2^{m/2} - 1$. Για παράδειγμα, εάν $m = 10$ η περίοδος του \mathbf{a} είναι $n = 1023$ και η περίοδος του \mathbf{b} είναι 31. Έτσι, εάν παρατηρήσουμε 1023 bits της ακολουθίας \mathbf{b} , θα δούμε 33 επαναλήψεις της ακολουθίας των 31 bit. Τώρα, παίρνοντας $2^m - 1$ bits από τις ακολουθίες \mathbf{a} και \mathbf{b} , μορφοποιούμε ένα νέο σύνολο ακολουθιών προσθέτοντας (με modulo – 2 πράξη), τα bits από την \mathbf{a} και τα bits από την \mathbf{b} και όλες τις $2^{m/2} - 2$ κυκλικές ολισθήσεις των bits από την \mathbf{b} . Περιλαμβάνοντας την \mathbf{a} στο σύνολο, λαμβάνουμε ένα σύνολο $2^{m/2}$ δυαδικών ακολουθιών μήκους $n = 2^m - 1$. Αυτές καλούνται ακολουθίες Kasami. Οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και διασυσχέτισης των ακολουθιών αυτών παίρνουν τιμές από το σύνολο $\{-1, -(2^{m/2} + 1), 2^{m/2} - 1\}$. Γι'αυτό τον λόγο η μέγιστη τιμή διασυσχέτισης για οποιοδήποτε ζεύγος ακολουθιών από το σύνολο είναι

$$\phi_{\max} = 2^{m/2} + 1 \quad (4.2 - 75)$$

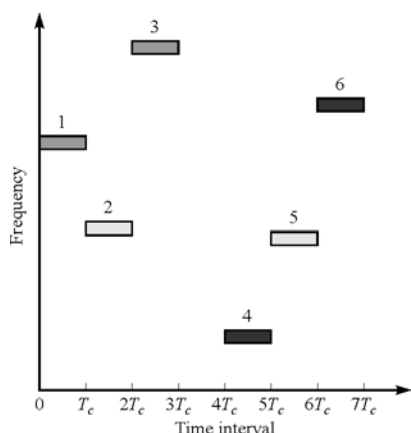
Η τιμή του ϕ_{\max} ικανοποιεί το κάτω φράγμα Welch για ένα σύνολο $2^{m/2}$ ακολουθιών μήκους $n = 2^m - 1$. Έτσι, οι ακολουθίες Kasami είναι βέλτιστες.

Εκτός από τις πολύ γνωστές Gold και Kasami ακολουθίες, υπάρχουν άλλες δυαδικές ακολουθίες κατάλληλες για CDMA εφαρμογές. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην εργασία των Scholtz (1979), Olsen (1977), και, Sarwate και Pursley (1980).

Τελικά, επιθυμούμε να σημειώσουμε ότι, παρόλο που συζητήσαμε την περιοδική συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ ζευγών περιοδικών συναρτήσεων, πολλά πρακτικά CDMA συστήματα μπορούν να χρησιμοποιήσουν διάρκειες πληροφοριακών bit που περιλαμβάνουν μόνο τμήματα της περιοδικής ακολουθίας. Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι η μερικής περιόδου διασυσχέτιση μεταξύ δύο ακολουθιών που είναι σημαντική. Ένας αριθμός εργασιών πραγματεύονται το πρόβλημα αυτό, περιλαμβάνοντας αυτές των Lindholm (1970), Wainberg και Wolf (1970), Fredricsson (1975), Bekir (1978), και Purdsley (1979).

4.3 ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΕΥΡΥΜΕΝΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΛΜΑΤΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Σε ένα σύστημα επικοινωνίας διευρυμένου φάσματος με **άλματα συχνότητας (frequency-hopped)** το διαθέσιμο φάσμα καναλιού υποδιαιρείται σε ένα μεγάλο αριθμό γειτονικών θυρίδων συχνότητας. Σε κάθε διάστημα σηματοδοσίας, το μεταδιδόμενο σήμα καταλαμβάνει μία ή περισσότερες από τις διαθέσιμες θυρίδες συχνότητας. Η επιλογή των θυρίδων συχνότητας σε κάθε διάστημα σηματοδοσίας γίνεται ψευδοτυχαία σύμφωνα με την έξοδο από την PN γεννήτρια. Το σχήμα 4.3 – 1 δείχνει ένα συγκεκριμένο υπόδειγμα αλμάτων συχνότητας σε επίπεδο χρόνου-συχνότητας.



ΣΧΗΜΑ 4.3 – 1 Παράδειγμα προτύπου αλμάτων συχνότητας.

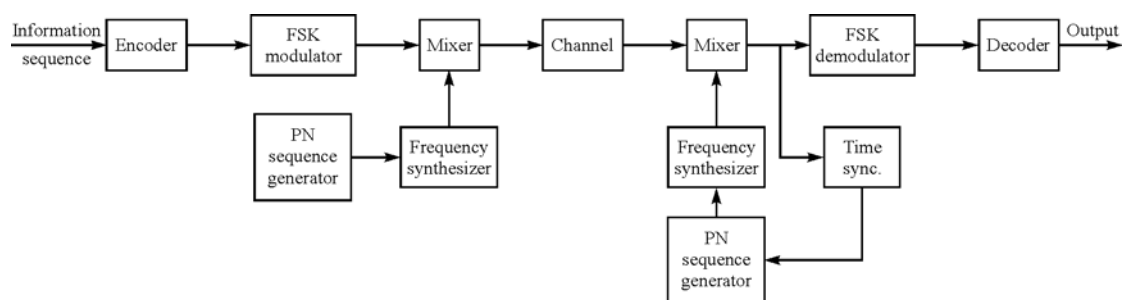
Ένα μπλοκ διάγραμμα του πομπού και του δέκτη για ένα σύστημα επικοινωνίας διευρυμένου φάσματος με άλματα συχνότητας φαίνεται στο σχήμα 4.3 – 2. Η διαμόρφωση είναι συνήθως είτε δυαδική είτε M – αδική FSK. Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιείται δυαδική FSK, ο διαμορφωτής επιλέγει μία από τις δύο συχνότητες που αντιστοιχούν με την μετάδοση είτε ενός 1, είτε ενός 0. Το συνακόλουθο FSK σήμα μετατοπίζεται στην συχνότητα από ένα ποσό που καθορίζεται από την ακολουθία εξόδου από την PN γεννήτρια, η οποία διαδοχικά, χρησιμοποιείται για να επιλέξει μία συχνότητα η οποία συντίθεται από τον συνθετητή συχνότητων. Η συχνότητα αυτή μειγνύεται με την έξοδο του διαμορφωτή και το συνακόλουθο σήμα μεταδίδεται στο κανάλι. Για παράδειγμα, m bits από την PN γεννήτρια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καθοριστούν $2^m - 1$ πιθανές μετατροπές συχνότητας.

Στον δέκτη, έχουμε μία πανομοιότυπη PN γεννήτρια, που συγχρονίζεται με το λαμβανόμενο σήμα, η οποία χρησιμοποιείται για να ελέγξει την έξοδο του συνθετητή συχνότητων. Έτσι, ο ψευδοτυχαίος μετασχηματισμός συχνότητας που εισάγεται στον πομπό αφαιρείται στον δέκτη μινγνύοντας την έξοδο του συνθετητή με το λαμβανόμενο σήμα. Το επακόλουθο σήμα αποδιαμορφώνεται διαμέσου ενός αποδιαμορφωτή FSK. Ένα σήμα για την διατήρηση του συγχρονισμού της PN

γεννήτριας με το μετατοπισμένο στη συχνότητα λαμβανόμενο σήμα εξάγεται συνήθως από το λαμβανόμενο σήμα.

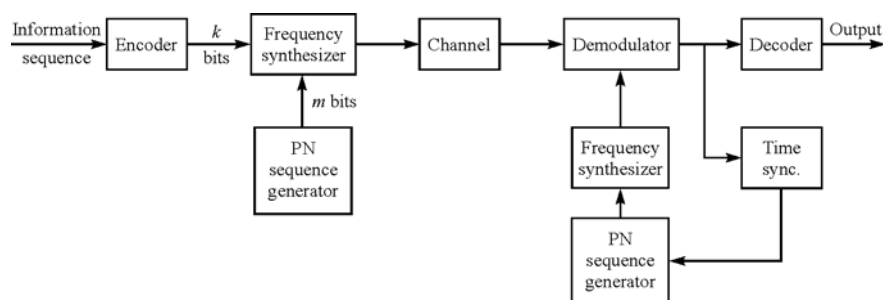
Αν και η PSK διαμόρφωση έχει καλύτερη απόδοση από την FSK σε ένα AWGN κανάλι, είναι δύσκολο να παραμείνει η συμφωνία φάσης στην σύνθεση των συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο αλμάτων, και επίσης, στην μετάδοση του σήματος στο κανάλι, καθώς το σήμα πηδάει από την μίας συχνότητα στην άλλη πάνω σε ένα ευρύ φάσμα. Συνεπώς, η FSK διαμόρφωση με ασύμφωνη φάραση χρησιμοποιείται συνήθως με τα FH σήματα διευρυνμένου φάσματος.

Στο σύστημα με άλματα συχνότητας που φαίνεται στο σχήμα 4.3 – 2 η συχνότητα φέροντος πηδάει ψευδοτυχαία σε κάθε διάστημα σηματοδοσίας. Οι M τόνοι που φέρουν την πληροφορία είναι γειτονικοί και διαχωρίζονται στην συχνότητα κατά $1/T_c$, όπου T_c είναι το διάστημα σηματοδοσίας. Το είδος αυτό των αλμάτων συχνότητας καλείται και **μπλοκ άλματα (block hopping)**.



ΣΧΗΜΑ 4.3 – 2 Μπλοκ διάγραμμα ενός FH συστήματος διεύρυνσης φάσματος.

Άλλο ένα είδος αλμάτων συχνότητας που είναι λιγότερο ευαίσθητο σε κάποιες στρατηγικές ηθελημένης παρεμβολής είναι τα ανεξάρτητα άλματα τόνων. Σε αυτό το σχήμα, οι M πιθανοί τόνοι από τον διαμορφωτή είναι προσδιορισμένες ευρέως διάσπαρτες θυρίδες συχνοτήτων. Μία μέθοδος για την επίτευξη αυτού φαίνεται στο σχήμα 4.3 – 3. Εδώ, τα m bits από την PN γεννήτρια και τα k bits πληροφορίας χρησιμοποιούνται για να καθορίσουμε τις θυρίδες συχνότητας για το μεταδιδόμενο σήμα.



ΣΧΗΜΑ 4.3 – 3 Μπλοκ διάγραμμα ενός FH συστήματος διεύρυνσης φάσματος ανεξάρτητου τόνου.

Ο ρυθμός αλμάτων συχνότητας επιλέγεται συνήθως να είναι είτε ίσος με τον ρυθμό συμβόλων (είτε κωδικοποιημένων είτε όχι), είτε μεγαλύτερος. Αν υπάρχουν πολλαπλά άλματα ανά σύμβολο, έχουμε ένα σήμα ταχέων αλμάτων. Από την άλλη εάν τα άλματα συμβαίνουν με ρυθμό ίσο με τον ρυθμό συμβόλων, έχουμε ένα σήμα αργών αλμάτων. Τα ταχείας συχνότητας άλματα περιλαμβάνονται σε AJ εφαρμογές,

όταν είναι απαραίτητο να εμποδίσουμε έναν είδος παρεμβολέα, που λέγεται **ημέτερος παρεμβολέας (follower jammer)** από το να έχει επαρκή χρόνο να εμποδίσει την συχνότητα και να την επαναμεταδώσει μαζί με γειτονικές συχνότητες ώστε να δημιουργήσει συνιστώσες παρεμβολής σήματος. Ωστόσο, υπάρχει ένα μειονέκτημα στην υποδιαίρεση ενός συστήματος σε διαφορετικά στοιχεία που εκτελούν άλματα συχνότητας, επειδή η ενέργεια από αυτά τα ξεχωριστά στοιχεία συνδυάζεται ασύμφωνα. Συνεπώς, ο αποδιαμορφωτής προκαλεί ένα μειονέκτημα με την μορφή της ασύμφωνης απώλειας συνδυασμού όπως περιγράφεται στην παράγραφο 3.1.

Τα FH σήματα διευρυμένου φάσματος χρησιμοποιούνται πρώτα σε συστήματα ψηφιακών επικοινωνιών που απαιτούν AJ προστασία και στην CDMA, όπου πολλοί χρήστες μοιράζονται ένα κοινό εύρος ζώνης. Στις περισσότερες των περιπτώσεων, ένα FH σήμα προτιμάται έναντι ενός DS σήματος διευρυμένου φάσματος λόγω των αυστηρών απαιτήσεων συγχρονισμού που υπάρχουν στα DS συστήματα διευρυμένου φάσματος. Ειδικότερα σε ένα DS σύστημα, ο χρονισμός και ο συγχρονισμός πρέπει να γίνουν μέσα σε ένα κλάσμα του διαστήματος chip $T_c \approx 1/W$. Από την άλλη πλευρά, σε ένα FH σύστημα, το διάστημα του chip είναι ο χρόνος που χρησιμοποιείται κατά την μετάδοση ενός σήματος σε μία συγκεκριμένη θυρίδα συχνότητας εύρους ζώνης $B \ll W$. Αλλά αυτό το διάστημα είναι περίπου $1/B$, που είναι αρκετά μεγαλύτερο από $1/W$. Έτσι, οι απαιτήσεις χρονισμού σε ένα FH σύστημα δεν είναι τόσο αυστηρές όσο σε ένα PN σύστημα.

Στις παραγράφους 4.3.2 και 4.3.3, θα εστιάσουμε στις AJ και CDMA εφαρμογές των FH σημάτων διευρυμένου φάσματος. Πρώτα, θα ορίσουμε την απόδοση ρυθμού σφαλμάτων ενός μη κωδικοποιημένου και ενός κωδικοποιημένου FH σήματος, παρουσία AWGN παρεμβολής ευρείας ζώνης. Μετά θα μελετήσουμε ένα πιο σοβαρό είδος παρεμβολής που υπάρχει στα AJ και στις CDMA εφαρμογές, που καλείται **παρεμβολή μερικής ζώνης (partial – band jamming)**. Θα καθοριστούν τα πλεονεκτήματα που λαμβάνονται από την κωδικοποίηση γι' αυτό το είδος της παρεμβολής. Ολοκληρώνουμε την συζήτηση στην παράγραφο 4.3.3 με ένα παράδειγμα ενός FH CDMA συστήματος που σχεδιάστηκε για χρήση κινητών χρηστών με έναν δορυφόρο να εξυπηρετεί σαν το κανάλι.

4.3.1 Απόδοση των FH Σημάτων Διευρυμένου Φάσματος σε AWGN Κανάλι

Ας μελετήσουμε την απόδοση ενός FH σήματος διευρυμένου φάσματος παρουσία παρεμβολής ευρείας ζώνης που χαρακτηρίζεται στατιστικά σαν AWGN με φασματική πυκνότητα ισχύος J_0 . Για δυαδική ορθογωνική FSK με ασύμφωνη φάραση και χαμηλής συχνότητας άλματα (1 άλμα/bit), η πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_2 = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b/2} \quad (4.3 - 1)$$

όπου $\gamma_b = E_b/J_0$. Από την άλλη μεριά, εάν το διάστημα του bit υποδιαιρείται σε L υποδιαστήματα και η FH δυαδική FSK μεταδίδεται σε κάθε υποδιάστημα, έχουμε ένα γρήγορο FH σήμα. Με συνδυασμό νόμου τετραγώνου των σημάτων εξόδου από τα αντίστοιχα προσαρμοσμένα φίλτρα για τα L υποδιαστήματα, η απόδοση ρυθμού σφαλμάτων του FH σήματος, που λαμβάνεται από αποτελέσματα στην παράγραφο 3.1 είναι

$$P_2(L) = \frac{1}{2^{2L-1}} e^{-\gamma_b/2} \sum_{i=0}^{L-1} K_i \left(\frac{1}{2} \gamma_b \right)^i \quad (4.3-2)$$

όπου ο SNR ανά bit είναι $\gamma_b = \mathcal{E}_b/J_0 = L\gamma_c$, γ_c είναι ο SNR ανά chip στο L σύμβολο chip, και

$$K_i = \frac{1}{i!} \sum_{r=0}^{L-1-i} \binom{2L-1}{r} \quad (4.3-3)$$

Θυμόμαστε ότι, για ένα δοθέν SNR ανά bit γ_b , ο ρυθμός σφαλμάτων που λαμβάνεται από την (4.3-2) είναι μεγαλύτερος από αυτόν που λαμβάνεται από την (13-3-1). Η διαφορά σε SNR για έναν δοθέντα ρυθμό σφαλμάτων και ένα δοθέν L λέγεται **ασύμφωνη συνδυαστική απώλεια (non-coherent combining loss)**, που περιγράφηκε και επεξηγήθηκε στην παράγραφο 3.1.

Η κωδικοποίηση βελτιώνει την απόδοση του FH συστήματος διευρυμένου φάσματος κατά ένα ποσό που καλούμε κέρδος κωδικοποίησης, το οποίο εξαρτάται από από τις παραμέτρους του κώδικα. Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε ένα γραμμικό δυαδικό (n, k) μπλοκ κώδικα και δυαδική FSK διαμόρφωση με ένα άλμα ανά κωδικοποιημένο bit για την μετάδοση των bit. Με αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης του με τετραγωνικό νόμο αποδιαμορφωμένο FSK σήμα, η πιθανότητα σφάλματος κωδικής λέξης είναι άνω φραγμένη

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M P_2(m) \quad (4.3-4)$$

όπου $P_2(m)$ είναι η πιθανότητα σφάλματος στο να επιλεγθεί η m -οστή κωδική λέξη και η μηδενική κωδική λέξη όταν μεταδίδεται το δεύτερο. Η έκφραση για την $P_2(m)$ έχει την ίδια μορφή με τις (4.3-2) και (4.3-3), με το L να αντικαθίσταται με w_m και το γ_b με $\gamma_b R_c w_m$, όπου w_m είναι το βάρος της m -οστής κωδικής λέξης και R_c είναι ο ρυθμός κώδικα. Το γινόμενο $R_c w_m$, το οποίο δεν είναι μικρότερο από το $R_c d_{\min}$, αναπαριστά το κέρδος κωδικοποίησης. Έτσι, έχουμε την απόδοση ενός μπλοκ κωδικοποιημένου FH συστήματος με χαμηλής συχνότητας άλματα στην παρεμβολή ευρείας ζώνης. Η πιθανότητα σφάλματος για συστήματα με υψηλής συχνότητας άλματα, με n_2 άλματα ανά κωδικοποιημένο bit λαμβάνεται επανερμηνεύοντας την δυαδικού ενδεχομένου πιθανότητα $P_2(m)$ στην (4.3-4). Τα n_2 άλματα ανά κωδικοποιημένο bit μπορούν να ερμηνευτούν σαν ένας επαναληπτικός κώδικας, ο οποίος, όταν συνδυαστεί με έναν σημαντικό (n_1, k) δυαδικό γραμμικό κώδικα που έχει κατανομή βάρους $\{w_m\}$, οδηγεί σε ένα $(n_1 n_2, k)$ δυαδικό γραμμικό κώδικα με κατανομή βάρους $\{n_2 w_m\}$. Έτσι, η $P_2(m)$ έχει την μορφή που δίνεται στην (4.3-2), με το L να έχει αντικατασταθεί από το $n_2 w_m$ και το γ_b από το $\gamma_b R_c n_2 w_m$, όπου $R_c = k/n_1 n_2$. Ας σημειώσουμε ότι $\gamma_b R_c n_2 w_m = \gamma_b w_m k/n_1$, το οποίο είναι ακριβώς το κέρδος κωδικοποίησης που

λαμβάνεται από τον (n_1, k) κώδικα. Συνεπώς, η χρήση του επαναληπτικού κώδικα θα οδηγήσει σε αύξηση του μη σύμφωνου συνδυαστικού κέρδους.

Με αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης και αργά άλματα συχνότητας, η πιθανότητα σφάλματος ενός κωδικοποιημένου bit στην έξοδο του αποδιαμορφωτή για μη σύμφωνη φώραση είναι

$$p = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b R_c / 2} \quad (4.3 - 5)$$

Η πιθανότητα σφάλματος κωδικής λέξης έχει άνω φράγμα, με χρήση του φράγματος Chernoff, το οποίο δίνεται από την σχέση

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M [4p(1-p)]^{w_m/2} \quad (4.3 - 6)$$

Ωστόσο, εάν χρησιμοποιηθεί γρήγορο FH με n_2 άλματα ανά κωδικοποιημένο bit, και οι τετραγωνικού νόμου ανιχνευόμενες έξοδοι από τα αντίστοιχα προσαρμοσμένα φίλτρα για τα n_2 άλματα προστίθενται όπως στην αποκωδικοποίηση με ήπια απόφαση για να μορφοποιήσουν τις δύο μεταβλητές απόφασης για τα κωδικοποιημένα bits, η πιθανότητα σφάλματος bit p , δίνεται επίσης από την (4.3 - 2), με το L να αντικαθίσταται από το n_2 και το γ_b από το $\gamma_b R_c n_2$, όπου R_c είναι ο ρυθμός του μη τετριμένου (n_1, k) κώδικα. Συνεπώς, η απόδοση του γρήγορου FH συστήματος στην παρεμβολή ευρείας ζώνης είναι μειωμένη συγκριτικά με το αργό FH σύστημα κατά ένα ποσό ισοδύναμο με την ασύμφωνη συνδυαστική απώλεια των σημάτων που λαμβάνονται από τα n_2 άλματα.

Παρατηρήσαμε ότι για αποκωδικοποίηση τόσο αυστηρής όσο και ήπιας απόφασης, η χρήση του επαναληπτικού κώδικα σε ένα γρήγορο FH σύστημα οδηγεί σε μηδενικό κέρδος κωδικοποίησης. Το μόνο κέρδος κωδικοποίησης που λαμβάνεται προέρχεται από τον μπλοκ κώδικα. Έτσι, ο επαναληπτικός κώδικας είναι μη αποδοτικός με ένα γρήγορο FH σύστημα με ασύμφωνο συδυασμό. Μία πιο αποτελεσματική μέθοδος κωδικοποίησης είναι αυτή κατά την οποία εφαρμόζεται είτε ένας χαμηλού ρυθμού δυαδικός κώδικας, είτε ένας συνενωτικός κώδικας. Επιπρόσθετες βελτιώσεις στην απόδοση μπορούν να ληφθούν με την χρήση μη δυαδικών κωδικών σε συνδυασμό με M -αδικό FSK. Φράγματα στην πιθανότητα σφάλματος για την περίπτωση αυτή μπορούν να ληφθούν από τα αποτελέσματα που δίδονται στην παράγραφο 3.1.

Αν και υπολογίσαμε την απόδοση γραμμικών μπλοκ κωδικών μόνο στην παραπάνω συζήτηση, είναι σχετικά εύκολο να εξάγουμε αντίστοιχα αποτελέσματα απόδοσης για τους δυαδικούς συνελκτικούς κώδικες. Αφήνουμε σαν άσκηση για τον αναγνώστη την εξαγωγή της πιθανότητας σφάλματος bit για ήπιας απόφασης αποκωδικοποίηση Viterbi, και αυστηρής απόφασης αποκωδικοποίηση Viterbi των FH σημάτων που φθείρονται από παρεμβολή ευρείας ζώνης.

Τελικά, παρατηρούμε ότι η \mathcal{E}_b , δηλαδή η ενέργεια ανά bit, μπορεί να εκφραστεί σαν $\mathcal{E}_b = P_{av}/R$, όπου R είναι ο ρυθμός πληροφορίας σε bits ανά δευτερόλεπτο και $J_0 = J_{av}/W$. Άρα, το γ_b μπορεί να εκφραστεί σαν

$$\gamma_b = \frac{\mathcal{E}_b}{J_0} = \frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \quad (4.3 - 7)$$

Στην έκφραση αυτή, αναγνωρίζουμε το W/R σαν το κέρδος επεξεργασίας και το J_{av}/P_{av} σαν το περιθώριο θορύβου για το FH σήμα διευρυμένου φάσματος.

4.3.2 Απόδοση των FH Σημάτων Διευρυμένου Φάσματος σε Παρεμβολή Μερικής Ζώνης

Η παρεμβολή μερικής ζώνης που μελετάται σε αυτή την υποπαράγραφο, μοντελοποιείται σαν μία μηδενικής μέσης τιμής γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με σταθερή φασματική πυκνότητα ισχύος πάνω σε ένα τμήμα α του συνολικού εύρους ζώνης W και μηδέν αλλού. Στην περιοχή ή στις περιοχές όπου η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι μη μηδενική, η τιμή του είναι $\Phi_{zz}(f) = J_0/\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Το μοντέλο αυτό της παρεμβολής μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα σήμα παρεμβολής ή στην παρεμβολή από άλλους χρήστες σε ένα FH CDMA σύστημα.

Ας υποθέσουμε ότι η μερικής ζώνης παρεμβολή που προέρχεται από έναν παρεμβολέα ο οποίος μπορεί να επιλέξει την τιμή α για να βελτιστοποιήσει την επίδραση στο σύστημα επικοινωνίας. Σε ένα μη κωδικοποιημένο με άλματα που συμβαίνουν με ψευδοτυχαίο τρόπο αργό FH σύστημα με δυαδική FSK διαμόρφωση και μη σύμφωνη φάραση, το λαμβανόμενο σήμα θα δεχθεί παρεμβολή με πιθανότητα α και δεν θα δεχθεί παρεμβολή με πιθανότητα $1-\alpha$. Όταν δέχεται παρεμβολές, η πιθανότητα σφάλματος είναι $\frac{1}{2} \exp(-\mathcal{E}_b \alpha / 2J_0)$, και όταν δεν δέχεται παρεμβολές, η αποδιαμόρφωση είναι χωρίς σφάλματα. Συνεπώς, η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_2(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha \exp\left(-\frac{\alpha \mathcal{E}_b}{2J_0}\right) \quad (4.3 - 8)$$

όπου ο λόγος \mathcal{E}_b / J_0 μπορεί να εκφραστεί σαν $(W/R)/(J_{av}/P_{av})$.

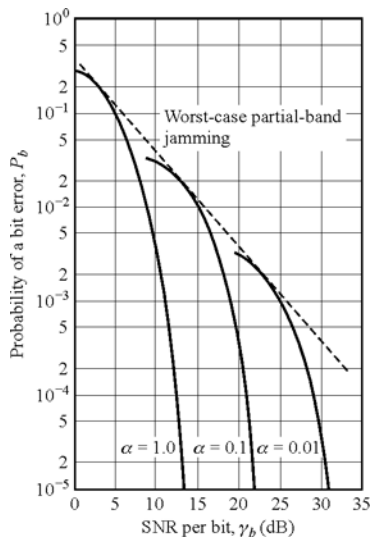
Το σχήμα 4.3 - 4 δείχνει τον ρυθμό σφαλμάτων σαν συνάρτηση του λόγου \mathcal{E}_b / J_0 για διάφορες τιμές του α . Η βέλτιστη στρατηγική του παρεμβολέα είναι να επιλέξει την τιμή του α που μεγιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος. Παραγωγίζοντας την $P_2(\alpha)$ και λύνοντας για το ακρότατο με τον περιορισμό ότι $0 \leq \alpha \leq 1$, βρίσκουμε ότι

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{E}_b / 2J_0} = 2 \frac{J_{av}/P_{av}}{W/R} & (\mathcal{E}_b / J_0 \geq 2) \\ 1 & (\mathcal{E}_b / J_0 < 2) \end{cases} \quad (4.3 - 9)$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα σφάλματος για τον χειρότερης περίπτωσης παρεμβολέα μερικής ζώνης είναι

$$P_2 = \frac{e^{-1}}{\mathcal{E}_b/J_0} = \left[e \left(\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \right) \right]^{-1} \quad (4.3 - 10)$$

Ενώ η πιθανότητα σφάλματος μειώνεται εκθετικά για πλήρους ζώνης παρεμβολή, βρίσκουμε τώρα ότι η πιθανότητα σφάλματος μειώνεται μόνο αντιστρόφως του \mathcal{E}_b/J_0 για την χειρότερης περίπτωσης παρεμβολή μερικής ζώνης. Το αποτέλεσμα αυτό είναι παρόμοιο με τον ρυθμό σφαλμάτων του δυαδικού FSK σε ένα κανάλι με διαλείψεις τύπου Rayleigh και στο μη κωδικοποιημένο DS σύστημα διευρυμένου φάσματος που φθείρεται από την χειρότερης περίπτωσης παλμική παρεμβολή (βλέπε παράγραφο 4.2.3).



ΣΧΗΜΑ 4.3 – 4 Απόδοση δυαδικού FSK με παρεμβολή μερικής ζώνης.

Όπως θα δείξουμε παρακάτω, η πολλαπλή λήψη σήματος που παρέχεται διαμέσου κωδικοποίησης παρέχει μία αξιοσημείωτη βελτίωση στην απόδοση σχετικά με τα μη κωδικοποιημένα σήματα. Η ίδια αυτή προσέγγιση στο σχεδιασμό σημάτων είναι επίσης αποδοτική για σηματοδοσία πάνω σε ένα κανάλι με διαλείψεις.

Για να δείξουμε τα πλεονεκτήματα της πολλαπλής λήψης σε ένα FH σήμα διευρυμένου φάσματος με παρεμβολή μερικής ζώνης, υποθέτουμε ότι το ίδιο σύμβολο πληροφορίας μεταδίδεται μέσω δυαδικού FSK πάνω σε L ανεξάρτητα άλματα συχνότητας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί υποδιαιρώντας το διάστημα σηματοδοσίας σε L υποδιαστήματα, όπως περιγράφηκε προηγουμένως για γρήγορο FH. Αφού αφαιρείται το πλαίσιο αλμάτων, το σήμα αποδιαμορφώνεται περνώντας μέσω ενός ζεύγους προσαρμοσμένων φίλτρων των οποίων οι έξοδοι ανιχνεύονται με βάση τον νόμο του τετραγώνου και δειγματοληπτούνται στο τέλος κάθε υποδιαστήματος. Τα σήματα αυτά που αντιστοιχούν στα L άλματα συχνότητας ζυγίζονται και αθροίζονται ώστε να μορφοποιηθούν οι δύο μεταβλητές απόφασης (μετρικές), οι οποίες δηλώνονται σαν U_1 και U_2 .

Όταν η μεταβλητή απόφασης U_1 περιέχει τις συνιστώσες σήματος, οι U_1 και U_2 μπορούν να εκφραστούν σαν

$$U_1 = \sum_{k=1}^L \beta_k |2\mathcal{E}_c + N_{1k}|^2$$

$$U_2 = \sum_{k=1}^L \beta_k |N_{2k}|^2$$
(4.3 – 11)

όπου το $\{\beta_k\}$ αναπαριστά τους συντελεστές βαρύτητας, \mathcal{E}_c είναι η ενέργεια του σήματος ανά chip στο L σύμβολο chip, και $\{N_{jk}\}$ παριστά τον προσθετικό γκαουσιανό θόρυβο στην έξοδο των προσαρμοσμένων φίλτρων.

Οι συντελεστές οι οποίοι επιλέγονται βέλτιστα για να εμποδίσουν τον παρεμβολέα να φέρει στον κόρο τον συνδυαστή, επιλέγονται έτσι ώστε οι εκπεμπόμενες συχνότητες να κρύβονται επιτυχώς σε ένα ή περισσότερα άλματα. Ιδανικά, το β_k επιλέγεται να είναι ίσο με το αντίστροφο κλάσμα της διασποράς των αντίστοιχων όρων θορύβου $\{N_k\}$. Έτσι, η διασπορά θορύβου για κάθε chip κανονικοποιείται στην μονάδα με αυτό το ζύγισμα, όπως ανάλογα συμβαίνει και με το αντίστοιχο σήμα. Αυτό σημαίνει ότι όταν οι συχνότητες σήματος σε ένα συγκεκριμένο άλμα δέχονται παρεμβολή, το αντίστοιχο βάρος είναι πολύ μικρό. Απουσία παρεμβολής σε ένα δοθέν άλμα, το βάρος είναι σχετικά μεγάλο. Στην πράξη, για θορυβική παρεμβολή τμηματικού εύρους, το ζύγισμα μπορεί να επιτευχθεί με χρήση ενός AGC που έχει κέρδος ρυθμισμένο με βάση τις μετρήσεις ισχύος θορύβου που λαμβάνονται από ζώνες συχνοτήτων γειτονικές στους μεταδιδόμενους τόνους. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να έχουμε παράπλευρη πληροφορία (γνώση της κατάστασης του παρεμβολέα) στον αποκωδικοποιητή.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ευρυζωνικό γκαουσιανό θόρυβο με φασματική πυκνότητα ισχύος N_0 και παρεμβολή μερικής ζώνης, πάνω σε αW της ζώνης συχνότητας, η οποία είναι επίσης γκαουσιανή με φασματική πυκνότητα ισχύος J_0/α . Παρουσία παρεμβολής μερικής ζώνης, οι δεύτερες στιγμές των όρων θορύβου N_{1k} και N_{2k} είναι

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{2} E(|N_{1k}|^2) = \frac{1}{2} E(|N_{2k}|^2) = 2\mathcal{E}_c \left(N_0 + \frac{J_0}{\alpha} \right)$$
(4.3 – 12)

Σε αυτή την περίπτωση, επιλέγουμε $\beta_k = 1/\sigma_k^2 = [2\mathcal{E}_c(N_0 + J_0/\alpha)]^{-1}$. Απουσία παρεμβολής μερικής ζώνης, $\sigma_k^2 = 2\mathcal{E}_c N_0$ και, έτσι, $\beta_k = (2\mathcal{E}_c N_0)^{-1}$. Ας σημειώσουμε ότι το β_k είναι τυχαία μεταβλητή.

Ένα λάθος λαμβάνει χώρα στην αποδιαμόρφωση εάν $U_2 > U_1$. Αν και είναι εφικτό να ορίσουμε την ακριβή πιθανότητα σφάλματος, θα καταφύγουμε στο φράγμα Chernoff, το οποίο οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα που είναι πίο εύκολο να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί. Ειδικότερα τα άνω φράγματα Chernoff στην πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_2 = P(U_2 - U_1 > 0) \leq E \left\{ \exp[\nu(U_2 - U_1)] \right\}$$

$$= E \left\{ \exp \left[-\nu \sum_{k=1}^L \beta_k \left(|2\mathcal{E}_c + N_{1k}|^2 - |N_{2k}|^2 \right) \right] \right\} \quad (4.3 - 13)$$

όπου ν είναι μια μεταβλητή που βελτιστοποιείται ώστε να οδηγήσει στο όσο το δυνατόν πιο αυστηρό φράγμα.

Η διαδικασία εύρεσης του μέσου όρου στην (4.3 - 13) πραγματοποιείται με γνώμονα τις στατιστικές των συνιστωσών θορύβου και τις στατιστικές των βαρυτικών συντελεστών $\{\beta_k\}$, οι οποίες είναι τυχαίες σαν επακόλουθο της στατιστικής φύσης της παρεμβολής. Κρατώντας το $\{\beta_k\}$ σταθερό και εφαρμόζοντας την διαδικασία εύρεσης του μέσου όρου πάνω στις στατιστικές θορύβου πρώτα, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} P_2(\boldsymbol{\beta}) &= E \left[\exp \left(-\nu \sum_{k=1}^L \beta_k |2\mathcal{E}_c + N_{1k}|^2 + \nu \sum_{k=1}^L \beta_k |N_{2k}|^2 \right) \right] \\ &= \prod_{k=1}^L E \left[\exp \left(-\nu \beta_k |2\mathcal{E}_c + N_{1k}|^2 \right) \right] E \left[\exp \left(\nu \beta_k |N_{2k}|^2 \right) \right] \\ &= \prod_{k=1}^L \frac{1}{1-4\nu^2} \exp \left(\frac{-4\mathcal{E}_c^2 \beta_k \nu}{1+2\nu} \right) \end{aligned} \quad (4.3 - 14)$$

Εφόσον οι FSK τόνοι παρεμβάλλονται με πιθανότητα α , ισχύει ακόλουθα ότι $\beta_k = [2\mathcal{E}(N_0 + J_0/\alpha)]^{-1}$ με πιθανότητα α και $(2\mathcal{E}_c N_0)^{-1}$ με πιθανότητα $1-\alpha$. Έτσι, το φράγμα Chernoff είναι

$$\begin{aligned} P_2 &\leq \prod_{k=1}^L \left\{ \frac{\alpha}{1-4\nu^2} \exp \left[\frac{-2\mathcal{E}_c \nu}{(N_0 + J_0/\alpha)(1+2\nu)} \right] + \frac{1-\alpha}{1-4\nu^2} \exp \left[\frac{-2\mathcal{E}_c \nu}{N_0(1+2\nu)} \right] \right\} \\ &= \left\{ \frac{\alpha}{1-4\nu^2} \exp \left[\frac{-2\mathcal{E}_c \nu}{(N_0 + J_0/\alpha)(1+2\nu)} \right] + \frac{1-\alpha}{1-4\nu^2} \exp \left[\frac{-2\mathcal{E}_c \nu}{N_0(1+2\nu)} \right] \right\}^L \end{aligned} \quad (4.3 - 15)$$

Το επόμενο βήμα είναι να βελτιστοποιήσουμε το φράγμα στην (4.3 - 15) με γνώμονα την μεταβλητή ν . Στην παρούσα μορφή του, ωστόσο, το φράγμα είναι δύσκολο να διαχειρίσιμο. Μία σημαντική απλοποίηση μπορεί να συμβεί εάν θεωρήσουμε ότι $J_0/\alpha \gg N_0$, που κάνει τον δεύτερο όρο στην (4.3 - 15) αμελητέο σε σχέση με τον πρώτο. Εναλλακτικά, θεωρούμε ότι $N_0 = 0$, ώστε το φράγμα στην P_2 να μειώνεται σε

$$P_2 \leq \left\{ \frac{\alpha}{1-4\nu^2} \exp \left[\frac{-2\alpha \nu \mathcal{E}_c}{J_0(1+2\nu)} \right] \right\}^L \quad (4.3 - 16)$$

Η ελάχιστη τιμή του φράγματος αυτού αναφορικά με το ν και η μέγιστη αναφορικά με το α (χειρότερη περίπτωση παρεμβολής μερικής ζώνης) φαίνεται να συμβαίνει

εύκολα όταν $\alpha = 3J_0/\mathcal{E}_c \leq 1$ και $\nu = \frac{1}{4}$. Για τις τιμές αυτές των παραμέτρων, η (4.3 – 16) μειώνεται σε

$$P_2 \leq P_2(L) = \left(\frac{4}{e\gamma_c}\right)^L = \left(\frac{1.47}{\gamma_c}\right)^L, \quad \gamma_c = \frac{\mathcal{E}_c}{J_0} = \frac{\mathcal{E}_b}{LJ_0} \geq 3 \quad (4.3 - 17)$$

όπου γ_c είναι το SNR ανά chip στο L σύμβολο chip. Ισοδύναμα,

$$P_2 \leq \left[\frac{1.47(J_{av}/P_{av})}{W/R}\right]^L, \quad \frac{W/R}{L(J_{av}/P_{av})} \geq 3 \quad (4.3 - 18)$$

Το αποτέλεσμα στην (4.3 – 17) εξάχθηκε πρώτα από τους Viterbi και Jacobs (1975).

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα σφάλματος για την χειρότερη περίπτωση παρεμβολής μερικής ζώνης μειώνεται εκθετικά με αύξηση του SNR ανά chip γ_c . Το αποτέλεσμα αυτό είναι παρόμοιο με τα χαρακτηριστικά απόδοσης των τεχνικών πολλαπλής λήψης για κανάλια με διαλείψεις τύπου Rayleigh. Μπορούμε να εκφράσουμε την δεξιά πλευρά της (4.3 – 17) στην μορφή

$$P_2(L) = \exp[-\gamma_b h(\gamma_c)] \quad (4.3 - 19)$$

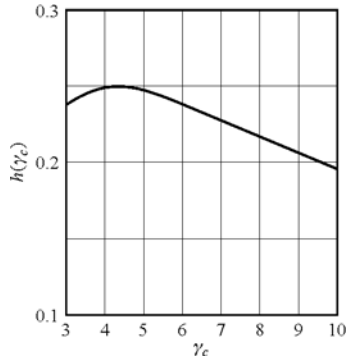
όπου η συνάρτηση $h(\gamma_c)$ ορίζεται ως

$$h(\gamma_c) = -\frac{1}{\gamma_c} \left[\ln\left(\frac{4}{\gamma_c}\right) - 1 \right] \quad (4.3 - 20)$$

Η γραφική παράσταση της $h(\gamma_c)$ δίνεται στο σχήμα 4.3 – 5. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή $\frac{1}{4}$ για $\gamma_c = 4$. Συνεπώς, υπάρχει ένα βέλτιστο SNR ανά chip της τάξης των $10 \log \gamma_c = 6$ dB. Στο βέλτιστο SNR, ο ρυθμός σφαλμάτων είναι άνω φραγμένος από

$$P_2 \leq P_2(L_{opt}) = e^{-\gamma_b/4} \quad (4.3 - 21)$$

Όταν συγκρίνουμε το φράγμα πιθανότητας σφάλματος της (4.3 – 21) με την πιθανότητα σφάλματος για δυαδικό FSK σε φασματικά ομοιόμορφο θόρυβο, που δίνεται από την (4.3 – 1), βλέπουμε ότι η συνδυαστική επίδραση της χειρότερης περίπτωσης παρεμβολής μερικής ζώνης και η ασύμφωνη συνδυαστική απώλεια στον συνδυασμό νόμου τετραγώνου των L chip είναι 3 dB. Δίνουμε έμφαση, ωστόσο, στο ότι για ένα δοθέν \mathcal{E}_b/J_0 , η απώλεια είναι μεγαλύτερη όταν η τάξη της πολλαπλής λήψης δεν είναι επιλεγμένη βέλτιστα.



ΣΧΗΜΑ 4.3 – 5 Γράφημα της συνάρτησης $h(\gamma_c)$.

Η κωδικοποίηση παρέχει βελτίωση στην απόδοση ενός FH συστήματος που βάλλεται από παρεμβολή μερικής ζώνης. Συγκεκριμένα, εάν χρησιμοποιείται ένας μπλοκ ορθογωνικός κώδικας, με $M = 2^k$ κωδικές λέξεις και τάξη πολλαπλής λήψης L ανά κωδική λέξη, η πιθανότητα σφάλματος κωδικής λέξης έχει άνω φράγμα που δίνεται από την σχέση

$$P_M \leq (2^k - 1)P_2(L) = (2^k - 1) \left(\frac{1.47}{\gamma_c} \right)^L = (2^k - 1) \left(\frac{1.47}{k\gamma_b/L} \right)^L \quad (4.3 - 22)$$

και η ισοδύναμη πιθανότητα σφάλματος bit έχει άνω φράγμα

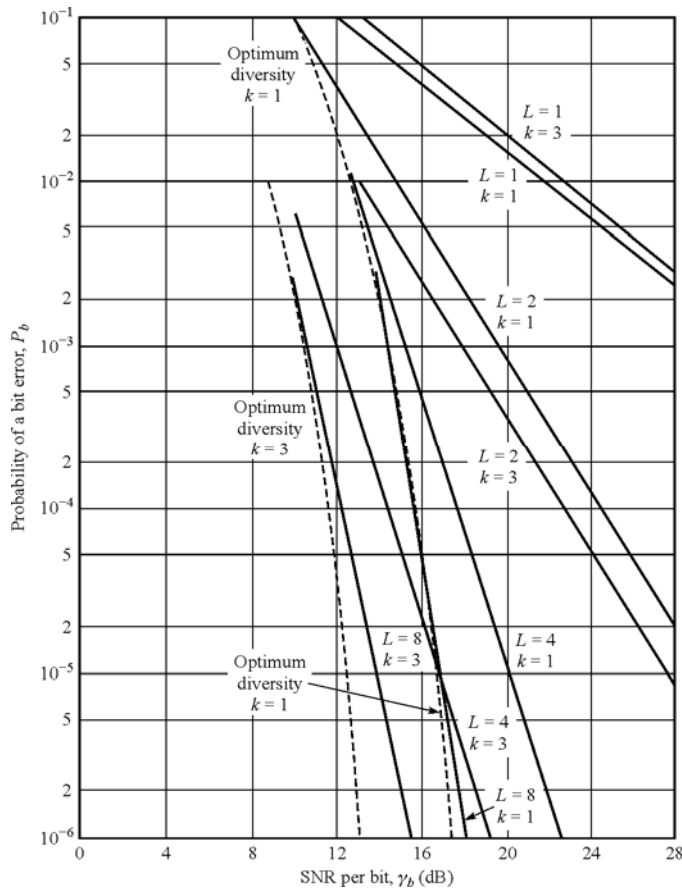
$$P_b \leq 2^{k-1} \left(\frac{1.47}{k\gamma_b/L} \right)^L \quad (4.3 - 23)$$

Το σχήμα 4.3 – 6 δείχνει την πιθανότητα σφάλματος bit για $L = 1, 2, 4, 8$, και $k = 1, 3$. Με βέλτιστη επιλογή πολλαπλής λήψης, το άνω φράγμα μπορεί να εκφραστεί ως

$$P_b \leq 2^{k-1} \exp\left(-\frac{1}{4}k\gamma_b\right) = \frac{1}{2} \exp\left[-k\left(\frac{1}{4}\gamma_b - \ln 2\right)\right] \quad (4.3 - 24)$$

Έτσι, έχουμε βελτίωση στην απόδοση κατά ένα ποσό ίσο με $10 \log[k(1 - 2,77/\gamma_b)]$. Για παράδειγμα, εάν $\gamma_b = 10$ και $k = 3$ (οκταδική διαμόρφωση) τότε το κέρδος είναι 3,4 dB, ενώ εάν $k = 5$ τότε είναι 5,6 dB.

Επιπρόσθετα κέρδη μπορούν να ληφθούν εφαρμόζοντας συνενωτικούς κώδικες σε συνδυασμό με αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης. Στο παρακάτω παράδειγμα, εφαρμόζουμε ένα διπλό – k συνελικτικό κώδικα σαν εξωτερικό κώδικα και ένα Hadamard κώδικα σαν εσωτερικό κώδικα στο κανάλι με παρεμβολής μερικής ζώνης.



ΣΧΗΜΑ 4.3 – 6 Απόδοση δυαδικής και οκταδικής FSK με diversity τάξης L για ένα κανάλι χειρότερης περίπτωσης παρεμβολής μερικής ζώνης.

Παράδειγμα 4.3 – 1

Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε έναν Hadamard $H(n, k)$ κώδικα σταθερού βάρους με οδήγηση on – off (On – Off Keying, OOK) διαμόρφωση για κάθε κωδικοποιημένο bit. Η ελάχιστη απόσταση του κώδικα είναι $d_{\min} = \frac{1}{2}n$, και έτσι η ενεργός τάξη της πολλαπλής λήψης που λαμβάνεται με OOK διαμόρφωση είναι $\frac{1}{2}d_{\min} = \frac{1}{4}n$. Υπάρχουν $\frac{1}{2}n$ FH τόνοι που μεταδίδονται ανά κωδική λέξη. Έτσι,

$$\gamma_c = \frac{k}{\frac{1}{2}n} \gamma_b = 2R_c \gamma_b \quad (4.3 - 25)$$

όταν αυτός ο κώδικας χρησιμοποιείται μόνος του. Η απόδοση ρυθμού σφαλμάτων για αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης αυτών των κωδικών για το κανάλι που υπόκειται σε παρεμβολή μερικής ζώνης είναι άνω φραγμένη

$$P_b \leq 2^{k-1} P_2 \left(\frac{1}{2} d_{\min} \right) = 2^{k-1} \left(\frac{1.47}{2R_c \gamma_b} \right)^{n/4} \quad (4.3 - 26)$$

Εάν τώρα χρησιμοποιηθεί σαν εσωτερικός κώδικας ένας Hadamard (n, k) κώδικας, και σαν εξωτερικός ένας διπλού k συνελκτικός κώδικας ρυθμού $1/2$ η απόδοση σφάλματος bit παρουσία της χειρότερης περίπτωσης παρεμβολής μερικής ζώνης είναι

$$P_b \leq \frac{2^k - 1}{2^k - 1} \sum_{m=4}^{\infty} \beta_m P_2 \left(\frac{1}{2} m d_{\min} \right) = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \sum_{m=4}^{\infty} \beta_m P_2 \left(\frac{1}{2} m n \right) \quad (4.3 - 27)$$

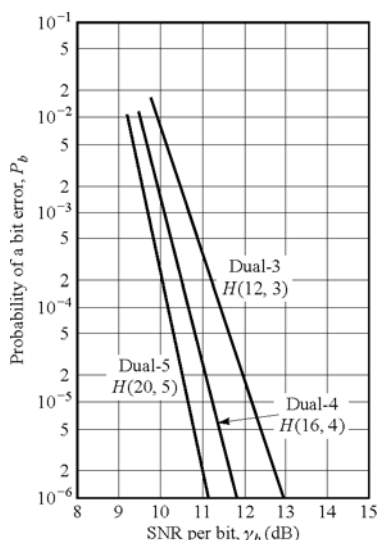
όπου η $P_2(L)$ δίνεται από την (4.3 - 17) με

$$\gamma_c = \frac{k}{n} \gamma_b = R_c \gamma_b \quad (4.3 - 28)$$

Το σχήμα 4.3 - 7 δείχνει την απόδοση των διπλών - k κωδικών για $k = 5, 4$ και 3 σε συνένωση με τους Hadamard $H(20, 5), H(16, 4), H(12, 3)$ κώδικες αντίστοιχα

Στην παραπάνω συζήτηση, εστίασαμε στην αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης. Από την άλλη πλευρά, η απόδοση που επετεύχθη με αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης είναι σημαντικά πιο φτωχή (αρκετά decibels) από αυτή που επιτυγχάνεται με αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης. Σε ένα σχήμα συνενωτικής κωδικοποίησης, ωστόσο, μία μίξη που περιλαμβάνει αποκωδικοποίηση ήπιας απόφασης για τον εσωτερικό κώδικα, και αποκωδικοποίηση αυστηρής απόφασης για τον εξωτερικό κώδικα αποτελεί ένα λογικό συμβιβασμό μεταξύ πολυπλοκότητας αποκωδικοποίησης και απόδοσης.

Τέλος, θα θέλαμε να τονίσουμε ότι άλλη μία σοβαρή απειλή σε ένα FH σύστημα διευρυμένου φάσματος είναι η παρεμβολή μερικής ζώνης πολλαπλών τόνων. Αυτό το είδος παρεμβολής έχει παρόμοιες επιδράσεις με την μερικής ζώνης φασματικά ομοιόμορφου θορύβου παρεμβολή. Η πολλαπλή λήψη που λαμβάνεται μέσω της κωδικοποίησης είναι ένας αποδοτικός τρόπος βελτίωσης απόδοσης ενός FH συστήματος. Μία πρόσθετη βελτίωση λαμβάνεται με ορθό ζύγισμα στην έξοδο του αποδιαμορφωτή ώστε να καταστείουμε τις επιδράσεις του παρεμβολέα.



ΣΧΗΜΑ 4.3 - 7 Απόδοση διπλών - k κωδικών σε αλληλουχία με κώδικες Hadamard για ένα κανάλι χειρότερης περίπτωσης μερικής παρεμβολής.

4.3.3 Ένα CDMA Σύστημα Βασισμένο σε FH Σήματα Διευρυμένου Φάσματος

Στην παράγραφο 4.2.2, θεωρήσαμε ένα CDMA σύστημα βασισμένο σε χρήση DS σημάτων διευρυμένου φάσματος. Όπως δείξαμε προηγουμένως, είναι πιθανό επίσης να έχουμε ένα CDMA σύστημα βασισμένο σε FH σήματα διευρυμένου φάσματος. Κάθε ζεύγος πομπού-δέκτη σε ένα τέτοιο σύστημα έχει το δικό του ψευδοτυχαίο μοτίβο αλμάτων συχνότητας. Ξέχωρα από αυτήν την ιδιότητα διαχωρισμού, οι πομποί και οι δέκτες όλων των χρηστών μπορούν να είναι ταυτόσημοι, υπό την έννοια ότι έχουν ταυτόσημους κωδικοποιητές, αποκωδικοποιητές, διαμορφωτές, και αποδιαμορφωτές.

Τα CDMA συστήματα βασισμένα σε FH σήματα διευρυμένου φάσματος είναι ιδιαίτερα ελκυστικά σε κινητούς χρήστες (γη, αέρας, θάλασσα), επειδή οι απαιτήσεις χρονισμού δεν είναι τόσο αυστηρές όπως σε ένα PN σήμα διευρυμένου φάσματος. Πρόσθετα, έχουν αναπτυχθεί τεχνικές σύνθεσης συχνότητας και σχετικού hardware, που καθιστούν ικανά τα άλματα συχνότητας πάνω σε φάσματα που είναι αρκετά μεγαλύτερα από αυτά που είναι τώρα εφικτά με DS συστήματα διευρυμένου φάσματος. Συνεπώς, με FH είναι εφικτά μεγαλύτερα κέρδη επεξεργασίας. Η χωρητικότητα της CDMA με FH είναι επίσης σχετικά μεγάλη. Ο Viterbi (1978) έδειξε ότι με διπλούς k κώδικες και M - αδική FSK διαμόρφωση, είναι εφικτό να εξυπηρετηθούν έως και $\frac{3}{8}W/R$ χρήστες ταυτόχρονα που μεταδίδουν με πληροφοριακό ρυθμό R bits/s πάνω σε ένα κανάλι με εύρος ζώνης W .

Ένα από τα πιο πρόσφατα CDMA συστήματα βασισμένο σε κωδικοποιημένο FH σήμα διευρυμένου φάσματος, φτιάχτηκε για να παρέχει τακτικές δορυφορικές επικοινωνίες πολλαπλής πρόσβασης για μικρά κινητά τερματικά (γη, θάλασσα, αέρας), από τα οποία το καθένα μετέδιδε μηνύματα σχετικά μικρού μήκους, περιοδικά στο κανάλι. Το σύστημα ονομάστηκε **Tactical Transmission System (TATS)** και περιγράφεται σε μία εργασία από τους Drouilhet και Bernstein (1969).

Στο σύστημα TATS χρησιμοποιείται ένας οκταδικός Reed – Solomon (7,2) κώδικας. Έτσι, χρησιμοποιούνται δύο πληροφοριακά σύμβολα 3 bit από την είσοδο στον κωδικοποιητή για να παράγουν μία κωδική λέξη επτά συμβόλων. Κάθε κωδικοποιημένο σύμβολο 3 bit μεταδίδεται διαμέσου της οκταδικής FSK διαμόρφωσης. Οι οκτώ πιθανές συχνότητες είναι τοποθετημένες κατά $1/T_c$ Hz μακριά, όπου T_c είναι η διάρκεια χρόνου (chip) μετάδοσης μίας συχνότητας. Πρόσθετα με τα επτά σύμβολα σε μία κωδική λέξη, περιλαμβάνεται ένα όγδοο σύμβολο. Το σύμβολο αυτό και η αντίστοιχη συχνότητα του είναι σταθερά και μεταδίδονται στην αρχή κάθε κωδικής λέξης με σκοπό να παρέχουν συγχρονισμό χρόνου και συχνότητας στον δέκτη. Συνεπώς, κάθε κωδική λέξη μεταδίδεται σε $8T_c$ s^{†††}.

Το TATS σχεδιάστηκε για να μεταδίδει σε πληροφοριακούς ρυθμούς των 75 και 2400 bits/s. Έτσι, $T_c = 10$ ms και $312,5$ μs αντίστοιχα. Κάθε τόνος συχνότητας που αντιστοιχεί σε ένα κωδικό σύμβολο εκτελεί άλματα συχνότητας. Έτσι, ο ρυθμός αλμάτων είναι 100 hops/s σε ρυθμό 75 bits/s και 3200 hops/s στα 2400 bits/s.

^{†††} Εφόσον περιλαμβάνονται κινητοί χρήστες, υπάρχει μία Doppler ολίσθηση συχνότητας που σχετίζεται με την μετάδοση. Αυτή η ολίσθηση συχνότητας πρέπει να ανιχνευτεί και να εξισοποπιστεί κατά την αποδιαμόρφωση του σήματος. Το σύμβολο sync χρησιμοποιείται γι' αυτόν τον σκοπό.

Υπάρχουν $M = 2^6 = 64$ κωδικές λέξεις στον Reed-Solomon κώδικα (7,2) και η ελάχιστη απόσταση του κώδικα είναι $d_{\min} = 6$. Αυτό σημαίνει ότι ο κώδικας παρέχει μία ενεργό τάξη πολλαπλής λήψης ίση με 6.

Στο δέκτη, το λαμβανόμενο σήμα επαναφέρεται στην συχνότητά του και κατόπιν αποδιαμορφώνεται περνώντας μέσα από μία παράλληλη τράπεζα 8 προσαρμοσμένων φίλτρων, όπου κάθε φίλτρο είναι συντονισμένο σε μία από τις οκτώ πιθανές συχνότητες. Κάθε έξοδος του φίλτρου υπόκειται σε φώραση περιβάλλουσας, κβαντίζεται σε 4 bits (ένα από τα 16 επίπεδα), και τροφοδοτείται στον αποκωδικοποιητή. Ο αποκωδικοποιητής παίρνει τις 56 εξόδους των φίλτρων που αντιστοιχούν στην λήψη κάθε κωδικής λέξης των επτά συμβόλων και μορφοποιεί 64 μεταβλητές απόφασης -που αντιστοιχούν στις 64 πιθανές κωδικές λέξεις στον (7,2) κώδικα- συνδυάζοντας γραμμικά τις κατάλληλες ανιχνευμένες ως προς την περιβάλλουσα εξόδους. Μία απόφαση λαμβάνεται για την κωδική λέξη που έχει την μεγαλύτερη μεταβλητή απόφασης.

Οριοθετώντας τις εξόδους των προσαρμοσμένων φίλτρων σε 16 επίπεδα, η παρεμβολή από άλλους χρήστες του καναλιού έχει σαν αποτέλεσμα μία μικρή απώλεια στην απόδοση (0,75 dB με ισχυρή παρεμβολή πάνω σε ένα chip και 1,5 dB με ισχυρή παρεμβολή σε δύο chip από τα επτά). Το AGC που χρησιμοποιείται στο TATS έχει διάρκεια χρόνου μεγαλύτερη από την διάρκεια του chip T_c , και έτσι δεν γίνεται καμία προσπάθεια να επιτευχθεί βέλτιστο ζύγισμα των εξόδων του αποδιαμορφωτή όπως περιγράφεται στην παράγραφο 4.3.2.

Η εξαγωγή της πιθανότητας σφάλματος για το σήμα TATS σε AWGN κανάλι και χειρότερης περίπτωσης παρεμβολή μερικής ζώνης αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

4.4 ΑΛΛΑ ΕΙΔΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΕΥΡΥΜΕΝΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

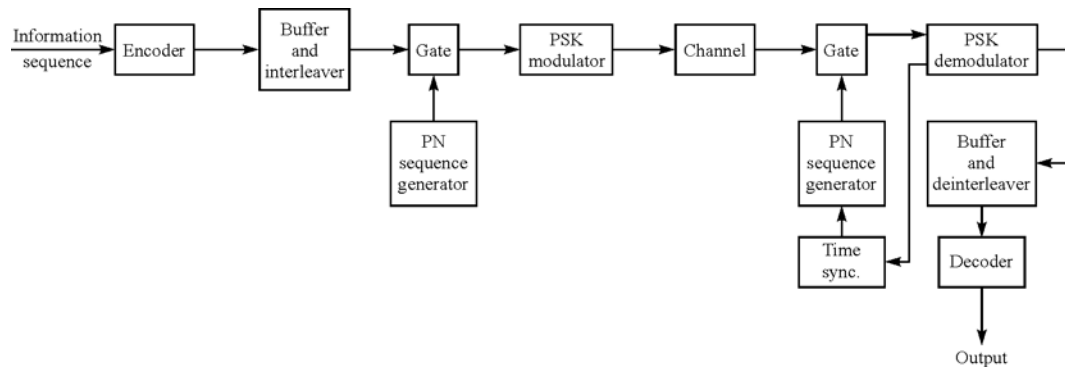
Τα DS και τα FH είναι οι πιο κοινές μορφές σημάτων διευρυμένου φάσματος που χρησιμοποιούνται στην πράξη. Ωστόσο, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες μέθοδοι για να εισαχθεί η ψευδοτυχασιότητα σε ένα σήμα διευρυμένου φάσματος. Μία μέθοδος, που είναι ανάλογη στο FH είναι τα **άλματα χρόνου (time hopping, TH)**. Στο TH, ένα διάστημα χρόνου, το οποίο επιλέγεται να είναι αρκετά μεγαλύτερο από το ανάστροφο κλάσμα του πληροφοριακού ρυθμού, υποδιαιρείται σε ένα μεγάλο αριθμό χρονοθυρίδων. Τα κωδικοποιημένα πληροφοριακά σύμβολα μεταδίδονται σε μία ψευδοτυχαία επιλεγμένη χρονοθυρίδα σαν ένα μπλοκ μίας ή και περισσότερων κωδικών λέξεων. Η PSK διαμόρφωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μεταδώσει τα κωδικοποιημένα bits.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα διάστημα χρόνου T υποδιαιρείται σε 1000 χρονοθυρίδες μήκους $T/1000$ η κάθε μία. Με ρυθμό πληροφοριακών bit R bits/s, ο αριθμός των bits προς μετάδοση στον χρόνο T είναι RT . Η κωδικοποίηση αυξάνει τον αριθμό αυτό σε RT/R_c bits, όπου R_c είναι ο ρυθμός κωδικοποίησης. Συνεπώς, σε ένα χρονικό διάστημα των $T/1000$ s, πρέπει να μεταδώσουμε RT/R_c bits. Εάν χρησιμοποιηθεί δυαδικό PSK σαν μέθοδος διαμόρφωσης, ο ρυθμός bit είναι $1000R/R_c$ και το εύρος ζώνης που απαιτείται είναι περίπου $W = 1000R/R_c$.

Στο σχήμα 4.4 – 1 φαίνεται ένα μπλοκ διάγραμμα ενός πομπού και ενός δέκτη για ένα TH σύστημα διευρυμένου φάσματος. Λόγω των χαρακτηριστικών ριπή του μεταδιδόμενου σήματος, και όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4 – 1 πρέπει να προβλεφθεί

αποθήκευση στον απομονωτή. Ένας απομονωτής μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον δέκτη για να παρέχει στον χρήστη ένα ενιαίο πληροφοριακό ρεύμα.

Όπως η παρεμβολή μερικής ζώνης μειώνει την απόδοση ενός μη κωδικοποιημένου FH συστήματος διευρυμένου φάσματος, η παλμική παρεμβολή έχει παρόμοιες επιδράσεις στο TH σύστημα διευρυμένου φάσματος. Η κωδικοποίηση και η αναδιάταξη είναι αποτελεσματικές μέθοδοι στην αντιμετώπιση αυτού του ίδιου της παρεμβολής, όπως έχουμε ήδη δείξει για τα FH και τα DS συστήματα. Ίσως το κύριο μειονέκτημα ενός TH συστήματος είναι οι αυστηρές απαιτήσεις χρονισμού συγκριτικά όχι μόνο με τα FH, αλλά και με τα DS.



ΣΧΗΜΑ 4.4 – 1 Μπλοκ διάγραμμα συστήματος διεύρυνσης φάσματος με άλματα συχνότητας (TH).

Άλλα είδη σημάτων διευρυμένου φάσματος μπορούν να ληφθούν με τον συνδυασμό DS, FH και TH. Για παράδειγμα, μπορούμε να έχουμε ένα υβρίδιο DS/FH, που σημαίνει ότι μία PN ακολουθία χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με FH. Το σήμα, που μεταδίδεται σε ένα άλμα αποτελείται από ένα DS σήμα διευρυμένου φάσματος, το οποίο αποδιαμορφώνεται σύμφωνα. Ωστόσο, τα λαμβανόμενα σήματα από διαφορετικά άλματα συνδυάζονται ασύμφωνα (συνδυασμός περιβάλλουσας ή νόμου τετραγώνου). Εφόσον η σύμφωνη φάραση πραγματοποιείται μέσα σε ένα άλμα, υπάρχει ένα πλεονέκτημα που λαμβάνεται σχετικά με ένα αγνό FH σύστημα. Ωστόσο, το τίμημα που πληρώνεται για το κέρδος στην απόδοση είναι η αύξηση της πολυπλοκότητας, το μεγαλύτερο κόστος, και πιο αυστηρές απαιτήσεις χρονισμού.

Άλλο ένα πιθανό υβρίδιο σήματος διευρυμένου φάσματος είναι το DS/TH. Αυτό δεν φαίνεται να είναι τόσο πρακτικό όπως το DS/FH, πρωτίστως λόγω της αύξησης στην πολυπλοκότητα συστήματος και στις πιο αυστηρές απαιτήσεις χρονισμού.

4.5 ΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΕΥΡΥΜΕΝΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

Ο συγχρονισμός χρόνου στον δέκτη του λαμβανόμενου σήματος διευρυμένου φάσματος μπορεί να διαχωριστεί σε δύο φάσεις. Υπάρχει μία αρχική ανάκτηση φάσης και ένας ακριβής συγχρονισμός φάσης αφού το σήμα έχει αποκτηθεί αρχικά.

Ανάκτηση (acquisition) Σε ένα σύστημα διευρυμένου φάσματος άμεσης ακολουθίας, ο PN κώδικας πρέπει να συγχρονιστεί μέσα σε ένα κλάσμα του διαστήματος chip $T_c \approx 1/W$. Το πρόβλημα του αρχικού συγχρονισμού μπορεί να ληφθεί ως ένα πρόβλημα στο οποίο προσπαθούμε να συγχρονίσουμε το ρολόι σου δέκτη με το ρολόι του πομπού. Συνήθως, στα συστήματα διευρυμένου φάσματος χρησιμοποιούνται εξαιρετικά ακριβή και σταθερά ρολόγια. Συνεπώς, τα ακριβή

ρολόγια έχουν σαν αποτέλεσμα την μείωση της αβεβαιότητας χρόνου μεταξύ του δέκτη και του πομπού. Ωστόσο, υπάρχει πάντα μία αρχική αβεβαιότητα χρόνου λόγω της αβεβαιότητας της απόστασης μεταξύ του πομπού και του δέκτη. Αυτό είναι ένα πρόβλημα ειδικά όταν λαμβάνει χώρα επικοινωνία μεταξύ δύο χρηστών. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, η συνήθης διαδικασία για επίτευξη αρχικού συγχρονισμού είναι να στείλει ο πομπός μία γνωστή ψευδοτυχαία ακολουθία πληροφορίας στον δέκτη. Ο δέκτης είναι διαρκώς σε διαδικασία αναζήτησης, ψάχνοντας για την ακολουθία αυτή ώστε να μπορέσει να συγχρονιστεί.

Ας θεωρήσουμε ότι η αρχική αβεβαιότητα χρόνου είναι T_u και η διάρκεια του chip είναι T_c . Εάν λάβει χώρα αρχικός συγχρονισμός παρουσία προσθετικού θορύβου και άλλης παρεμβολής, είναι απαραίτητο να παραμείνει για $T_d = NT_c$ ώστε να ελέγχουμε τον συγχρονισμό σε κάθε χρονική στιγμή. Εάν ψάξουμε πάνω στο διάστημα αβεβαιότητας χρόνου με βήμα $\frac{1}{2}T_c$ τότε ο χρόνος που απαιτείται για να επιτευχθεί αρχικός συγχρονισμός είναι

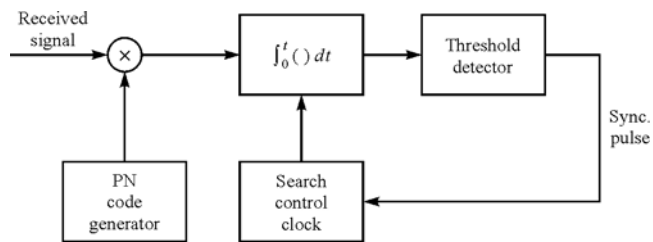
$$T_{init\ sync} = \frac{T_u}{\frac{1}{2}T_c} NT_c = 2NT_u \quad (4.5 - 1)$$

Ξεκάθαρα, η ακολουθία συγχρονισμού που μεταδίδεται στον δέκτη πρέπει να έχει τουλάχιστον ίδιο μήκος με $2NT_c$ ώστε ο δέκτης να έχει αρκετό χρόνο να πραγματοποιήσει την απαραίτητη αναζήτηση με σειριακό τρόπο.

Κατ'αρχήν, το προσαρμοσμένο φιλτράρισμα ή η διασυσχέτιση είναι βέλτιστες μέθοδοι για την επίτευξη αρχικού συγχρονισμού. Ένα φίλτρο προσαρμοσμένο στην γνωστή κυματομορφή δεδομένων που παράγεται από την γνωστή ψευδοτυχαία ακολουθία αναζητά διαρκώς υπέρβαση της προκαθορισμένης τιμής κατωφλίου. Όταν αυτό συμβεί, εφαρμόζεται ο αρχικός συγχρονισμός και ο αποδιαμορφωτής μπαίνει σε λειτουργία «λήψης δεδομένων».

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν **συσχετιστή ολίσθησης (sliding correlator)**, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5 - 1. Ο συσχετιστής κάνει κύκλους μέσα στην χρονική περίοδο αβεβαιότητας, συνήθως σε διακριτά χρονικά διαστήματα $\frac{1}{2}T_c$, και συσχετίζει το λαμβανόμενο σήμα με την γνωστή ακολουθία συγχρονισμού.

Η διασυσχέτιση πραγματοποιείται πάνω στο διάστημα NT_c (N chips) και η έξοδος του συσχετιστή συγκρίνεται με μία τιμή κατωφλίου για να καθοριστεί εάν είναι παρούσα η γνωστή ακολουθία σήματος. Εάν δεν υπερβεί η τιμή κατωφλίου, η γνωστή ακολουθία αναφοράς προχωράει κατά $\frac{1}{2}T_c$ s και η διαδικασία συσχέτισης επαναλαμβάνεται. Οι λειτουργίες αυτές πραγματοποιούνται εως ότου ανιχνευτεί σήμα ή εως ότου η αναζήτηση έχει γίνει πάνω στο διάστημα αβεβαιότητας T_u . Στην δεύτερη περίπτωση, η διαδικασία αναζήτησης επαναλαμβάνεται.



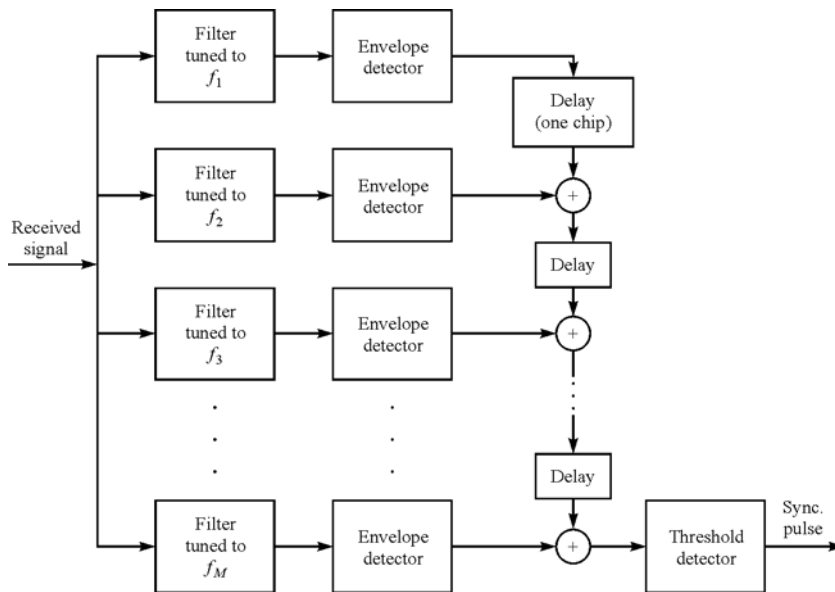
ΣΧΗΜΑ 4.5 – 1 Ένας συσχετιστής ολίσθησης για ανάκτηση DS σήματος.

Μία παρόμοια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για FH σήματα. Στην περίπτωση αυτή, το πρόβλημα είναι να συγχρονίσουμε τον PN κώδικα που ελέγχει το μοτίβο αλμάτων συχνότητας. Για να πετύχουμε τον αρχικό συγχρονισμό, εκπέμπεται ένα γνωστό FH σήμα προς τον δέκτη. Το αρχικό σύστημα ανάκτησης στον δέκτη, ψάχνει για αυτή την γνωστή FH ακολουθία σήματος. Για παράδειγμα, μπορεί να εφαρμοστεί μία τράπεζα προσαρμοσμένων φίλτρων τα οποία είναι συντονισμένα στις μεταδιδόμενες συχνότητες. Οι έξοδοι τους πρέπει να είναι κατάλληλα καθυστερημένες, ανιχνευόμενες ως προς την περιβάουσα ή σύμφωνα με τον νόμο του τετραγώνου, ζυγισμένες (εάν είναι απαραίτητο), και προστιθέμενες (ασύμφωνη ολοκλήρωση), για να παράγουν την έξοδο του σήματος η οποία συγκρίνεται με μία τιμή κατωφλίου. Η παρουσία σήματος δηλώνεται όταν ξεπερνιέται αυτή η τάση κατωφλίου. Ένα μπλοκ διάγραμμα που δείχνει το σχήμα ανάκτησης σήματος φαίνεται στο σχήμα 4.5 – 2. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα μοναδικό ζεύγος φωρατή περιβάουσας προσαρμοσμένων φίλτρων, του οποίου προηγείται μία γεννήτρια μοτίβου FH, και ακολουθείται από έναν ολοκληρωτή μετά την ανίχνευση και έναν ανιχνευτή τιμής κατωφλίου. Αυτή η διάταξη, που φαίνεται στο σχήμα 4.5 – 3, βασίζεται σε σειριακή αναζήτηση και είναι παρόμοια με τον συσχετιστή ολίσθησης των DS σημάτων διευρυμένου φάσματος.

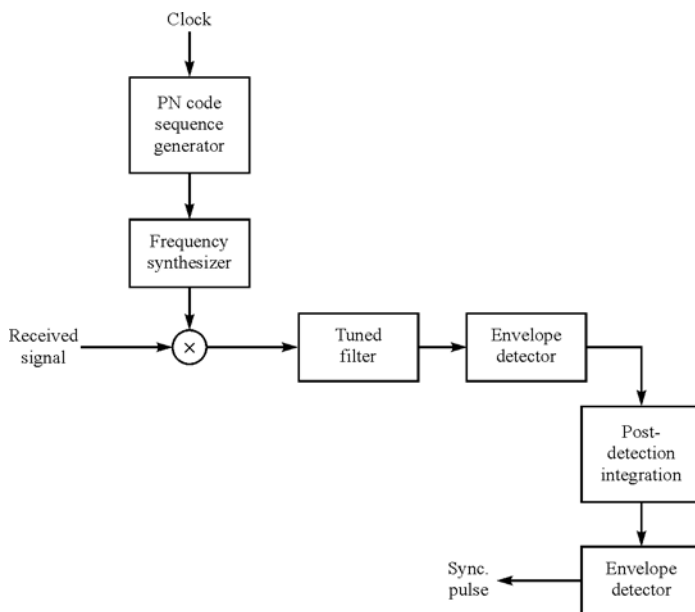
Ο συσχετιστής ολίσθησης για τα DS σήματα ή το ισοδύναμό του που φαίνονται στο σχήμα 4.5 – 3 για FH σήματα πραγματοποιεί βασικά μία σειριακή αναζήτηση που γενικά απαιτεί χρόνο. Εναλλακτικά, μπορούμε να εισάγουμε κάποιο βαθμό παραλληλισμού έχοντας δύο ή και περισσότερους συσχετιστές που λειτουργούν παράλληλα και αναζητούν πάνω σε μη επικαλυπτόμενες χρονοθυρίδες. Σε τέτοια περίπτωση, μειώνεται ο χρόνος αναζήτησης με αντίτιμο την πολυπλοκότητα και το κόστος κατασκευής. Το σχήμα 4.5 – 2 αναπαριστά μία τέτοια παράλληλη πραγματοποίηση για τα FH σήματα.

Κατά την διάρκεια της λειτουργίας αναζήτησης, μπορεί να υπάρξουν κατά λάθος συναγερμοί που συμβαίνουν στον σχεδιασμένο ρυθμό κατά λάθος συναγερμών του συστήματος. Για να χειριστούμε τους τυχαίους κατα λάθος συναγερμούς, είναι απαραίτητο να έχουμε μία πρόσθετη μέθοδο ή κύκλωμα που ελέγχει για να επιβεβαιώσει ότι το λαμβανόμενο σήμα στην έξοδο του συσχετιστή παραμένει πάνω από το επίπεδο της τιμής κατωφλίου. Με τέτοια στατηγική ανίχνευσης, ένας μεγάλος παλμός θορύβου που πραγματοποιεί έναν κατα λάθος συναγερμό θα προκαλέσει μόνο μία προσωρινή υπέρβαση της τιμής κατωφλίου. Από την άλλη μεριά, όταν ένα σήμα είναι παρόν, ο συσχετιστής ή η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου θα παραμείνει πάνω από την τιμή κατωφλίου κατά την διάρκεια του μεταδιδόμενου σήματος. Έτσι, εάν αποτύχει η επαλήθευση, η αναζήτηση επαναλαμβάνεται.

Άλλη μία αρχική στρατηγική αναζήτησης, που καλείται **ακολουθιακή αναζήτηση (serial search)**, μελετήθηκε από τον Ward (1965,1977). Σε αυτή την μέθοδο, ο χρόνος παραμονής σε κάθε καθυστέρηση κατά την διάρκεια της αναζήτησης είναι μεταβλητός και αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση ενός συσχετιστή με μεταβλητή περίοδο ολοκλήρωσης του οποίου η έξοδος συγκρίνεται με δύο τιμές κατωφλίου. Έτσι, υπάρχουν τρεις πιθανές αποφάσεις:



ΣΧΗΜΑ 4.5 – 2 Σύστημα ανάκτησης για ένα FH σήμα.



ΣΧΗΜΑ 4.5 – 3 Εναλλακτικό σύστημα για ανάκτηση ενός FH σήματος.

1 εάν η άνω τιμή κατωφλίου ξεπεραστεί από την έξοδο του συσχετιστή, δηλώνεται ότι επετεύχθη ο αρχικός συγχρονισμός

2 εάν η έξοδος του συσχετιστή πέσει κάτω από την κατώτερη τιμή κατωφλίου, το σήμα δηλώνεται απών σε αυτήν την καθυστέρηση και η διαδικασία αναζήτησης επαναλαμβάνεται σε διαφορετική καθυστέρηση

3 εάν η έξοδος του συσχετιστή πέσει μεταξύ των δύο τιμών κατωφλίου, ο χρόνος ολοκλήρωσης αυξάνεται κατά ένα chip και η έξοδος επανασυγκρίνεται.

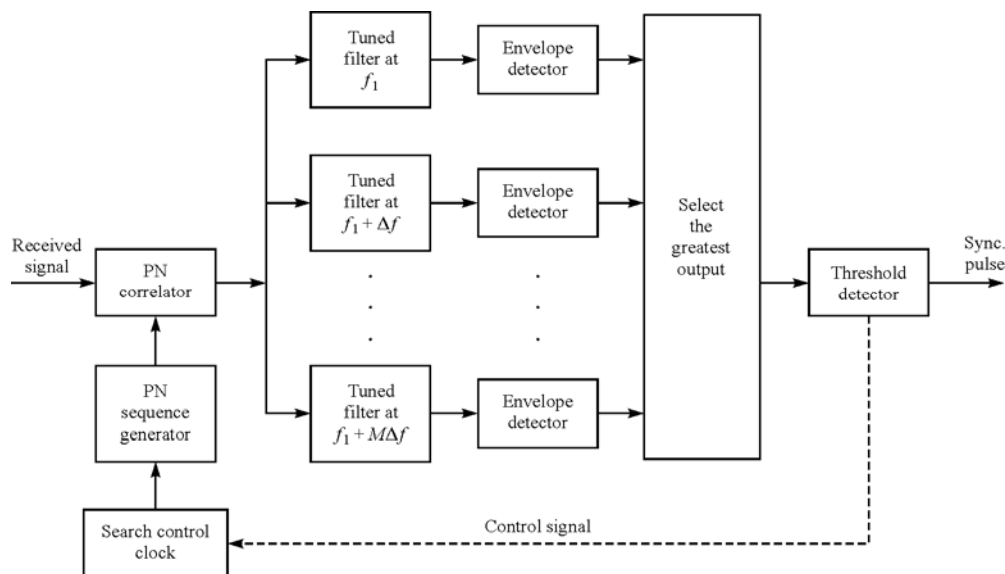
Γι' αυτό το λόγο τα βήματα 1, 2, και 3 επαναλαμβάνονται για κάθε διάστημα chip μέχρι η έξοδος του συσχετιστή είτε να υπερβαίνει την άνω τιμή κατωφλίου, ή να πέφτει κάτω της τιμής κατωφλίου.

Η μέθοδος ακολουθιακής αναζήτησης ανήκει στην τάξη των μεθόδων ακολουθιακής εκτίμησης που προτείνονται από τον Wald (1947), τα οποία είναι γνωστό ότι οδηγούν σε μία πιο αποτελεσματική αναζήτηση από την σκοπιά ότι ελαχιστοποιείται ο μέσος χρόνος αναζήτησης. Έτσι, ο χρόνος αναζήτησης για ακολουθιακή αναζήτηση είναι μικρότερος από αυτόν για τον σταθερού χρόνου παραμονής ολοκληρωτή.

Στην παραπάνω συζήτηση, μελετήσαμε μόνο την αβεβαιότητα χρόνου στην κατεύθυνση του αρχικού συγχρονισμού. Ωστόσο, άλλη μια σκοπιά του αρχικού συγχρονισμού είναι η αβεβαιότητα συχνότητας. Εάν ο πομπός και/ή ο δέκτης είναι κινητοί, η σχετική ταχύτητα μεταξύ τους έχει σαν αποτέλεσμα μία Doppler ολίσθηση συχνότητας στο λαμβανόμενο σήμα σχετικά με το μεταδιδόμενο σήμα. Εφόσον ο δέκτης συνήθως δεν γνωρίζει εκ των προτέρων την σχετική ταχύτητα, η ολίσθηση συχνότητας είναι άγνωστη και πρέπει να καθοριστεί διαμέσου μίας μεθόδου αναζήτησης συχνότητας. Μια τέτοια αναζήτηση επιτυγχάνεται συνήθως παράλληλα πάνω σε κατάλληλα κβαντισμένο διάστημα αβεβαιότητας συχνότητας και σειριακά πάνω στο διάστημα χρονικής αβεβαιότητας. Ένα μπλοκ διάγραμμα αυτού του σχήματος φαίνεται στο σχήμα 4.5 – 4. Για FH σήματα μπορούν να σχεδιαστούν κατάλληλες μέθοδοι αναζήτησης Doppler συχνότητας.

Ακριβής συγχρονισμός (tracking) Όταν το σήμα αποκτάται, η αρχική διαδικασία αναζήτησης σταματάει και αρχίζει να πραγματοποιείται ο ακριβής συγχρονισμός. Ο ακριβής συγχρονισμός διατηρεί την γεννήτρια PN κώδικα στον δέκτη σε συγχρονισμό με το εισερχόμενο σήμα. Ο ακριβής συγχρονισμός περιλαμβάνει τόσο τον ακριβή συγχρονισμό chip όσο και τον ακριβή συγχρονισμό φάσης φέροντος, για σύμφωνη διαμόρφωση.

Ο συχνά χρησιμοποιούμενος βρόχος ακριβούς συγχρονισμού για ένα DS σύστημα διευρυμένου φάσματος, είναι ο βρόχος κλειδωμένης καθυστέρησης (DLL), που φαίνεται στο σχήμα 4.5 – 5. Σε αυτόν τον βρόχο ακριβούς ανίχνευσης, το λαμβανόμενο σήμα εφαρμόζεται σε δύο πολλαπλασιαστές, όπου πολλαπλασιάζεται με δύο εξόδους από την τοπική PN γεννήτρια κώδικα, που είναι σχετικά



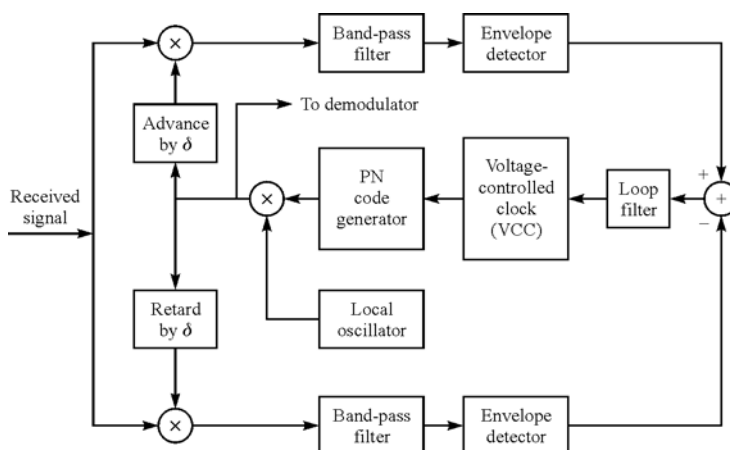
ΣΧΗΜΑ 4.5 – 4 Αρχική αναζήτηση για ολίσθηση συχνότητας Doppler σε ένα DS σύστημα.

καθυστερημένες μεταξύ τους κατά ένα ποσό $2\delta \leq T_c$. Έτσι, το γινόμενο σημάτων είναι οι διασυσχετίσεις μεταξύ του λαμβανόμενου σήματος και της PN ακολουθίας στις δύο τιμές της καθυστέρησης. Τα γινόμενα αυτά φιλτράρονται, ανιχνεύονται ως προς την περιβάλλουσα ή με βάση τον τετραγωνικό νόμο, και μετά αφαιρούνται. Αυτό το σήμα διαφοράς εφαρμόζεται στο φίλτρο βρόχου που οδηγεί το ρολόι ελεγχόμενο από τάση (VCC). Το VCC εξυπηρετεί σαν το ρολόι για την PN γεννήτρια.

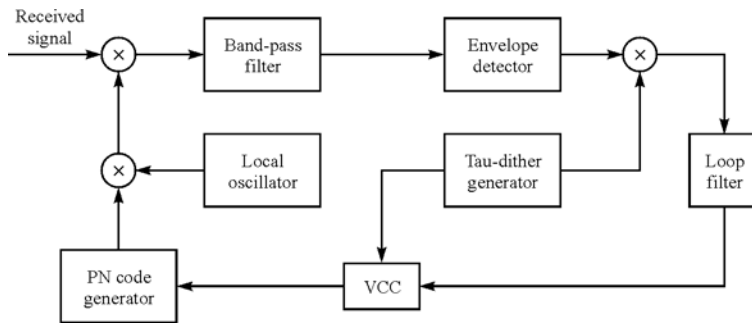
Εάν ο συγχρονισμός δεν είναι ακριβής, η φιλτραρισμένη έξοδος από έναν συσχετιστή θα ξεπεράσει την άλλη και το VCC θα εξελιχθεί ή θα καθυστερήσει με τον κατάλληλο τρόπο. Στο σημείο ισορροπίας, οι δύο φιλτραρισμένες έξοδοι του συσχετιστή θα εκτοπιστούν ισοδύναμα από την τιμή κορυφής, και η έξοδος της PN γεννήτριας κώδικα θα συγχρονιστεί ακριβώς στο λαμβανόμενο σήμα που οδηγείται στον αποδιαμορφωτή. Παρατηρούμε ότι αυτή η πραγματοποίηση του DLL για την ανίχνευση ενός DS σήματος είναι ισοδύναμη με την πύλη 'προπορείας-επιπορείας' ακριβούς συγχρονισμού.

Μία εναλλακτική μέθοδος για ακριβή συγχρονισμό ενός DS σήματος είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν βρόχο "tau-dither" (TDL), που φαίνεται από το μπλοκ διάγραμμα στο σχήμα 4.5 – 6. Ο TDL περιλαμβάνει ένα μοναδικό «βραχίονα» αντί για τους δύο «βραχίονες» που φαίνονται στο σχήμα 4.5 – 5. Παρέχοντας μία κατάλληλη κυματομορφή εισόδου είναι εφικτό να γίνει αυτή η πραγματοποίηση «ενός βραχίονα» ισοδύναμη με την πραγματοποίηση «δύο βραχίωνων». Σε αυτή την περίπτωση, η διασυσχέτιση δειγματοληπτείται ανελλιπώς σε δύο τιμές καθυστέρησης, προχωρώντας το ρολόι του κώδικα μπροστά ή πίσω κατά ένα ποσό δ . Η περιβάλλουσα της διασυσχέτισης που δειγματοληπτείται στα $\pm\delta$ έχει διαμόρφωση πλάτους της οποίας η φάση σχετικά με τον tau-dither διαμορφωτή καθορίζει το ίχνος του λανθασμένου ακριβούς συγχρονισμού.

Ένα βασικό πλεονέκτημα του TDL είναι η λιγότερο δαπανηρή υλοποίηση που οφείλεται στην εξάλειψη του ενός από τους δύο βραχίονες που περιλαμβάνονται στο συμβατικό DLL. Ένα δεύτερο και λιγότερο φανερό πλεονέκτημα είναι ότι το TDL δεν έχει προβλήματα μείωσης της απόδοσης (κάτι που υπάρχει στα DLL) όταν το κέρδος πλάτους στους δύο βραχίονες δεν είναι κατάλληλα εξισορροπημένο.

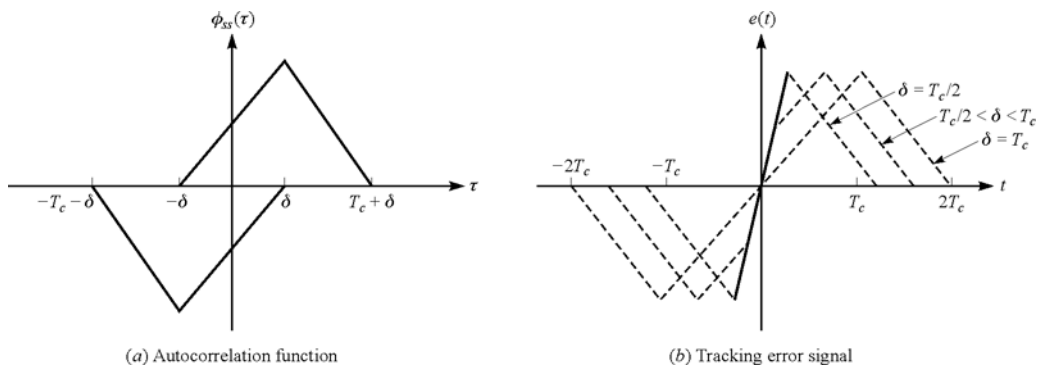


ΣΧΗΜΑ 4.5 – 5 Βρόχος κλειδωμένης καθυστέρησης (DLL) για ιχνηλάτηση PN κώδικα.

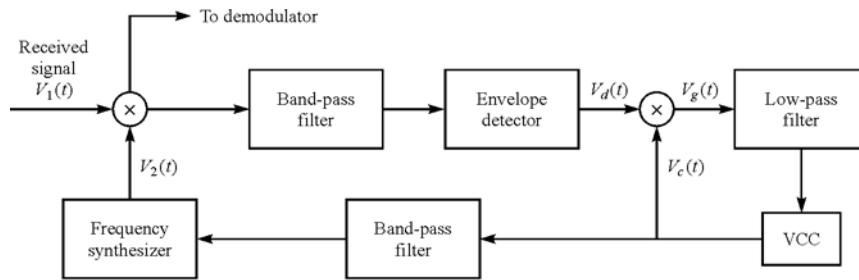


ΣΧΗΜΑ 4.5 – 6 TDL.

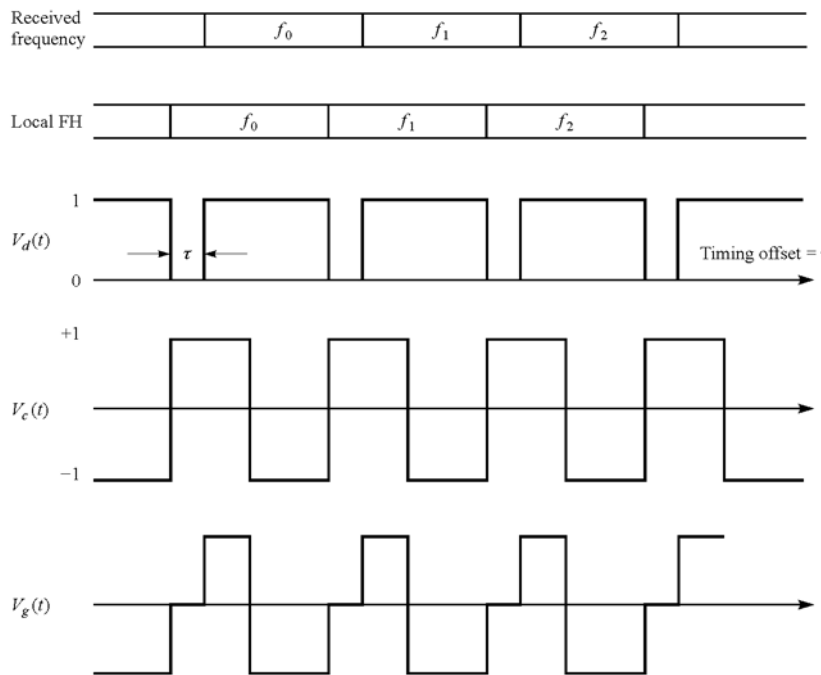
Το DLL (και το ισοδύναμο του, το TDL) παράγουν ένα σήμα σφάλματος δειγματοληπτώντας την συνάρτηση συσχέτισης σήματος στα $\pm\delta$ πάνω από την κορυφή όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5 – 7(a). Αυτό παράγει ένα εσφαλμένο σήμα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5 – 7(b). Η ανάλυση της απόδοσης του DLL είναι παρόμοια με αυτή για τον βρόχο κλειδωμένης φάσης (PLL). Εάν δεν υπήρχαν οι φωρατές περιβάλλουσας στους δύο βραχίονες του DLL, ο βρόχος θα θύμιζε έναν βρόχο Costas. Γενικά, η διασπορά της εσφαλμένης εκτίμησης χρόνου στο DLL είναι αντιστρόφως ανάλογη με τον βρόχο SNR, που εξαρτάται από το SNR εισόδου στον βρόχο καθώς και από το εύρος ζώνης του βρόχου. Η απόδοσή του μειώνεται κατά κάποιον τρόπο όπως στο PLL από τις μη γραμμικότητες που βρίσκονται στους φωρατές περιβάλλουσας, αλλά αυτή η μείωση είναι σχετικά μικρή. Μία τυπική τεχνική ανίχνευσης για FH σήματα διευρυμένου φάσματος φαίνεται στο σχήμα 4.5 – 8(a). Η μέθοδος αυτή βασίζεται επίσης στην προϋπόθεση ότι, αν και έχει επιτευχθεί αρχική ανάκτηση, υπάρχει ένα μικρό σφάλμα χρονισμού μεταξύ του λαμβανόμενου σήματος και του ρολογιού του δέκτη. Το ζωνοπερατό φίλτράρισμα συντονίζεται σε μία ενδιάμεση συχνότητα και το εύρος ζώνης του είναι της τάξης του $1/T_c$, όπου T_c είναι η διάρκεια του chip. Η έξοδός του περνάει από φωρατή περιβάλλουσας και κατόπιν πολλαπλασιάζεται από το σήμα ρολογιού για να παράγει ένα σήμα τριών επιπέδων, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5 – 8(b), που οδηγεί το φίλτρο βρόχου. Να.



ΣΧΗΜΑ 4.5 – 7 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και σήμα σφάλματος ιχνηλάτησης για DLL.



(a) Tracking loop for FH signals



(b) Wavefront for tracking an FH signal

ΣΧΗΜΑ 4.5 – 8 Μέθοδος ιχνηλάτησης για FH σήματα.

σημειωθεί ότι όταν οι μεταβάσεις του chip από την τοπικά παραγόμενη ημιτονοειδή κυματομορφή δεν συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή με τις μεταβάσεις στο εισερχόμενο σήμα, η έξοδος του φίλτρου βρόχου θα είναι είτε αρνητική είτε θετική, εξαρτώμενη από το αν το VCC προηγείται ή υπολείπεται σχετικά με τον χρονισμό του σήματος εισόδου. Αυτό το σήμα σφάλματος από το φίλτρο βρόχου θα παρέχει το σήμα ελέγχου για ρύθμιση του VCC σήματος χρονισμού ώστε να οδηγήσει το συντεθειμένο από συχνότητα παλμικό ημίτονο σε κατάλληλο συγχρονισμό με το λαμβανόμενο σήμα

4.6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Η εισαγωγική επεξεργασία των σημάτων διευρυμένου φάσματος καθώς και η απόδοση που δώσαμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι αναγκαία συνοπτική. Πιο λεπτομερείς και ειδικευμένες αναλύσεις τεχνικών ανάκτησης σήματος, μέθοδοι ακριβούς ανίχνευσης κωδικών, και υβριδικά συστήματα διευρυμένου φάσματος, μπορούν να βρεθούν στο πολύ μεγάλο πεδίο που υπάρχει αυτή τη στιγμή για το θέμα αυτό στην τεχνική βιβλιογραφία.

Ιστορικά, η πρώτη εφαρμογή επικοινωνιών διευρυμένου φάσματος έγινε για την ανάπτυξη ασφαλών συστημάτων ψηφιακών επικοινωνιών (AJ) για στρατιωτική χρήση. Στην ουσία, πριν το 1970, η πιο πολύ δουλειά που έγινε για τον σχεδιασμό και την ανάπτυξη τέτοιων συστημάτων ήταν απόρρητη. Από τότε, αναστράφηκαν τα πράγματα. Η ανοιχτή βιβλιογραφία περιέχει τώρα αναρίθμητες δημοσιεύσεις πάνω όλα τα πεδία της ανάλυσης και του σχεδιασμού των σημάτων διευρυμένου φάσματος. Επιπλέον, είδαμε πρόσφατα δημοσιεύσεις που έχουν να κάνουν με την εφαρμογή των τεχνικών σηματοδοσίας διευρυμένου φάσματος στις εμπορικές επικοινωνίες όπως οι ενδομηματικές ραδιοεπικοινωνίες (βλεπε Pahlavan, 1985) και οι κινητές επικοινωνίες (βλέπε Yue, 1983).

Μία ιστορική πλευρά της ανάπτυξης των συστημάτων επικοινωνίας διευρυμένου φάσματος που καλύπτει την περίοδο 1920 – 1960 δίνεται σε μία εργασία από τον Scholtz (1982). Διδακτικές μελέτες που εστιάζουν στις βασικές αρχές βρίσκονται στις εργασίες του Scholtz (1977) και του Pickholtz (1982). Οι εργασίες αυτές περιέχουν επίσης ένα μεγάλο αριθμό από αναφορές σε προηγούμενη εργασία. Πρόσθετα, υπάρχουν δύο εργασίες από τον Viterbi (1979, 1985) που παρέχουν μία βασική επανάληψη των χαρακτηριστικών απόδοσης των DS και FH τεχνικών σηματοδοσίας.

Παρεκτικές πραγματεύσεις πάνω σε διάφορα πεδία ανάλυσης και σχεδιασμού σημάτων και συστημάτων διευρυμένου φάσματος, συμπεριλαμβανομένων και των τεχνικών συγχρονισμού είναι τώρα διαθέσιμες στα κείμενα του Simon (1985), Ziemer και Peterson (1985), και Holmes (1982). Πρόσθετα με αυτά τα κείμενα, υπάρχουν αρκετά ειδικά θέματα του περιοδικού *IEEE Transactions on Communications* αφιερωμένα σε επικοινωνίες διευρυμένου φάσματος (Αύγουστος 1977 και Μάιος 1982) και του περιοδικού *IEEE Transactions on Selected Areas in Communications* (Σεπτέμβρης 1985, Μάιος 1989, Μάιος 1990, και Ιούνιος 1993). Τα περιοδικά αυτά περιέχουν μία συλλογή εργασιών αφιερωμένων σε πληθώρα θεμάτων, περιλαμβάνοντας τις τεχνικές πολλαπλής πρόσβασης τις τεχνικές συγχρονισμού, και τις αναλύσεις απόδοσης με διάφορους τύπους παρεμβολής. Ένας αριθμός από σημαντικές εργασίες που έχουν δημοσιευθεί σε IEEE περιοδικά έχουν επανατυπωθεί επίσης από την IEEE Press σε μορφή βιβλίου (Dixon, 1976; Cook 1983). Τέλος, προτείνουμε το βιβλίο του Golomb (1967) σαν μία βασική αναφορά σε ακολουθίες καταχωρητή ολίσθησης για τον αναγνώστη που επιθυμεί να εμβαθύνει σε αυτόν τον τομέα.

Cook, C. E., Ellersick, F. W., Milstien, L. B., and Schilling, D. L. (1983). *Spread Spectrum Communications*, IEEE Press, New York.

Dixon, R. C. (1976). *Spread Spectrum Techniques*, IEEE Press, New York.

Golomb, S. W. (1967). *Shift Register Sequences*, Holden – Day, San Francisco, CA.

Holmes, J. K. (1982). *Coherent Spread Spectrum Systems*, Wiley – Interscience, New York.

Pahlavan, K. (1985). “Wireless Communications for Office Information Networks”, *IEEE Commun. Mag.*, vol. 23, pp. 18 – 27, June.

Pickholtz, R. L., Schilling, D. L., and Milstein, L. B. (1982). “Theory of Spread Spectrum Communications – a Tutorial”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 30, pp. 855 – 884, May.

Scholtz, R.A. (1977). “The Spread Spectrum Concept”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 25, pp. 748 – 755, August.

Scholtz, R.A. (1982). “The Origins of Spread Spectrum”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM – 30, pp. 822 – 854, May.

- Simon, M. K., Omura, J. K., Scholtz, R. A., and Levitt, B.K. (1985). *Spread Spectrum Communications vol. I, II, III*, Computer Science Press, Rockville, MD.
- Viterbi, A. J. (1979). "Spread Spectrum Communication – Myth and Realities", *IEEE Commun. Mag.*, vol. 17, pp. 11 – 18, May.
- Viterbi, A. J. (1985). "When Not to Spread Spectrum – A Sequel", *IEEE Commun. Mag.*, vol. 23, pp. 12 – 17, April.
- Yue, O. (1983). "Spread Spectrum Mobile Radio 1977 - 1982", *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, vol. VT – 32, pp. 98 – 105, February.
- Ziemer, R. E., Peterson, R. L., and Borth, D.E. (1995). *Introduction to Spread Spectrum Communications*, Prentice – Hall, Upper Saddle River, NJ.