

**ΤΕΙ ΚΡΗΤΗΣ**  
**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΧΑΝΙΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ**

**Όνοματεπώνυμο** : Τζώρτζης Δημήτριος  
**Α.Μ.** : 3519  
**Επιβλέπων Καθηγητής** : Πλιάκης Δημήτριος

Χανια 2013

---

**SUPERSONIC FLOW  
AND SHOCK WAVES**

**R. COURANT and K. O. FRIEDRICHS**  
INSTITUTE FOR MATHEMATICS AND MECHANICS  
NEW YORK UNIVERSITY, NEW YORK

---

***Κρουστικά κύματα στο  
πλάσμα***

### **1. Ποιοτικές διαφορές μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών κυμάτων.**

Κάποια χαρακτηριστικά της μη γραμμικής κίνησης των κυμάτων μπορούν να περιγραφτούν με γενικούς όρους. Στη γραμμική κίνηση των κυμάτων όπως όπως για παράδειγμα στη μετάδοση του ήχου, οι διαταραχές πάντα πολλαπλασιάζονται με μια συγκεκριμένη ταχύτητα (σε σχέση με το μέσο) το οποίο ποικίλει εντός του μέσου. Αυτή η "ταχύτητα ήχου" είναι μια τροπική ιδιότητα του μέσου του ίδιου και παραμένει το ίδιο για κάθε νοητή γραμμική κίνηση κύματος στο μέσο. Μια τέτοια ταχύτητα ήχου, επίσης, παίζει ρόλο και στη μη γραμμική κίνηση κύματος. Μικρές διαταραχές ή "κυματίδια" τροποποιούν ελαφρά μια δεδομένη πρωτογενή κίνηση των κυμάτων, πολλαπλασιάζεται με μια συγκεκριμένη ταχύτητα, καλούν ξανά ταχύτητα ήχου, αν και σε αυτή τη περίπτωση η ταχύτητα ήχου δεν εξαρτιέται μόνο στη θέση εντός του μέσου αλλά και αυτήν κατάσταση του μέσου που προκαλείται από την πρωτογενή κίνηση.

Το διακριτικό χαρακτηριστικό των μη γραμμικών κυμάτων, όμως, αφορά διαταραχές ή συνέπειες που δεν είναι απαραίτητα μικρές. Στην γραμμική κίνηση των κυμάτων οποιαδήποτε αρχική ασυνέχεια σε ολόκληρη επιφάνεια διατηρείται ως μια ασυνέχεια και πολλαπλασιάζεται με την ταχύτητα ήχου. Η μη γραμμική κίνηση των κυμάτων συμπεριφέρεται με διαφορετικό τρόπο: Υποθετικές πιέσεις, πυκνότητες και ταχύτητες ροής. Τότε υπάρχουν οι ακόλουθες εναλλακτικές πιθανότητες: είτε η αρχική ασυνέχεια έχει επιλυθεί αμέσως και η διαταραχή ενώ πολλαπλασιάζεται, γίνεται συνεχής, ή η αρχική ασυνέχεια πολλαπλασιάζεται μέσο ενός ή δύο μετώπων κραδασμών, προχωρεί όχι στην ηχητική αλλά στην υπερηχητική ταχύτητα σχετικά με το μέσο πριν από αυτά. Όπως προηγούμενα αναφέρθηκε, τα μέτωπα κραδασμών είναι τα πιο ευδιάκριτα φαινόμενα που συμβαίνουν στον πολλαπλασιασμό των μη γραμμικών κυμάτων ακόμα και χωρίς να προκαλείται από τις αρχικές ασυνέχειες που μπορεί να εμφανιστούν και να πολλαπλασιαστούν. Το βασικό μαθηματικό γεγονός είναι ότι αντίθετα από μερικές διαφορικές εξισώσεις στη γραμμική, η μη γραμμικές εξισώσεις συχνά δεν δέχονται λύσεις που μπορεί να γίνουν συνεχώς παρατεταμένες οπουδήποτε οι ίδιες οι διαφορικές εξισώσεις παραμένουν κανονικές.

Μια άλλη εντυπωσιακή διαφορά μεταξύ των γραμμικών και μη γραμμικών κυμάτων αφορά το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης: η αρχή της υπέρθεσης ισχύει για τα γραμμικά κύματα και όχι για τα μη γραμμικά. Ως συνέπεια, για παράδειγμα, η υπέρβαση πιέσεων της παρεμβολής ήχου κυμάτων είναι απλώς πρόσθετα; σε αντίθεση με αυτό το φαινόμενο, η αλληλεπίδραση και η αντανάκλαση των μη γραμμικών κυμάτων μπορεί να οδηγήσει σε τεράστια αύξηση στην πίεση.

### **A. Γενική Εξίσωση της Ροής. Θερμοδυναμικές Έννοιες.**

#### **2. Το μέσο.**

Εμείς πρωτίστως θα έπρεπε να ενδιαφερθούμε για ένα κινούμενο υγρό, αφού πολλά από τα αποτελέσματα ισχύουν σε άλλα κινούμενα μέσα (π.χ σε μία στερεή πλάκα διαμήκους της κίνησης κύματος). Σε αυτό το τμήμα πρέπει να ορίσουμε τις ιδιότητες του μέσου που θα θεωρηθεί σε όλο το βιβλίο και θα πρέπει να περιγράψουμε συγκεκριμένα, εξειδικευμένα μέσα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος. Επιπλέον, αφού η δυναμική αερίου είναι πλήρως συνυφασμένη με τις θερμοδυναμικές έννοιες, είναι απαραίτητο να εισάγουμε εδώ τη συλλογή βασικών εννοιών της θερμοδυναμικής σε μια κατάλληλη μαθηματική μορφή.\*

Εκτός από τις περιπτώσεις όπου η κίνηση είναι συνεχής, ιξώδες, έχει θερμική αγωγιμότητα και παρέκκλιση του μέσου από της θερμοδυναμική ισορροπία (σε οποιαδήποτε στιγμή και σε οποιοδήποτε σημείο) θα απορριφθεί. Κάποια χρήσιμα σχόλια σχετικά με την απόρριψη αυτών των φαινομένων θα γίνει στα επόμενα κεφάλαια. Ιδίως θα δείξει ότι το ιξώδες και η θερμική αγωγιμότητα παίζουν σημαντικό ρόλο στον σχηματισμό και στην διατήρηση της ασυνέπειας των κραδασμών.

Σε κάθε στιγμή και σε κάθε σημείο του υγρού που υπάρχει μια οριστική κατάσταση (μιας θερμοδυναμικής ισορροπίας) που ορίζεται από :

p: την πίεση,

T: την θερμότητα,

$\tau$  : Το συγκεκριμένο όγκο (π.χ όγκος ανά μονάδα μάζας)

$\rho$ : η πυκνότητα, με  $\rho\tau=1$ ,

S: την ειδική εντροπία,

e: την ειδική (εσωτερική) ενέργεια, και

i: την ειδική ενθαλπία\*, που ορίζεται από το  $i=e + p\tau$

Είναι γνωστό από την θερμοδυναμική ότι για οποιοδήποτε δεδομένο μέσο μόνο δύο από τις παραμέτρους p, T,  $\tau$ , e και S είναι ανεξάρτητες. Στην πραγματικότητα μπορούν όλες να θεωρηθούν ως λειτουργίες του  $\tau$  και της S.

Η εσωτερική ενέργεια που αποκτήθηκε από το μέσο κατά την διάρκεια μιας αλλαγής από μια κατάσταση σε μια άλλη είναι η θερμότητα που συνέβαλε στο μέσον συν η δουλειά που έχει γίνει στο μέσο από την συμπιεστική δράση των δυνάμεων της πίεσης. Για την αλλαγή από μία κατάσταση σε μία άμεση γειτονική αυτό το γεγονός μπορεί να εκφραστεί από την σχέση :

$$(2.01) \quad de = TdS - pd\tau.$$

Σε μια αναστρέψιμη διαδικασία το TdS είναι η θερμότητα που αποκτήθηκε από την αγωγιμότητα ; σε μια μη αναστρέψιμη διαδικασία το TdS είναι μεγαλύτερο από τη θερμοκρασία που αποκτήθηκε. Αν η μη αναστρέψιμη διαδικασία είναι αυτή που μπορεί να περιγραφεί ως καθορισμένη από τη δράση του ιξώδους, τότε η υπέρβαση του TdS πάνω από την θερμότητα που αποκτήθηκε από την αγωγιμότητα μπορεί εύκολα να ερμηνευτεί ως η θερμότητα που παράχθηκε από ιξώδες δυνάμεις.

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε για κάποιο μέσο πως η συγκεκριμένη ενέργεια εξαρτάται από το  $\tau$  και την S. Τότε η πίεση  $p$  και η θερμοκρασία T μπορούν αμέσως να βρεθούν λαμβάνοντας υπόψη τη σημασία της σχετικότητας (2.01)

$$(2.02) \quad p = -e_{\tau}, T = e_S,$$

Οι λειτουργίες δίνοντας p σε όρους των  $\rho$  ή  $\tau$ , και S, συμβαίνουν τόσο συχνά στη θεωρία της ροής του υγρού, με συνέπεια να συμβολίζονται με

$$(2.03) \quad p = f(\rho, S); \quad p = g(\tau, S).$$

Εκτίνοντας ελαφρά την συμβατική ονοματολογία, θα πρέπει να καλέσουμε αυτές τις εξισώσεις ως θερμική εξίσωση της κατάστασης του μέσου.

Με την απόρριψη ιξωδών και την θερμική αγωγιμότητα καταλήγει στην απόθεση ότι ως σωματίδιου του μέσου για κινήσεις, η συγκεκριμένη εντροπία στο κινούμενο σωματίδιο παραμένει σταθερή, π.χ οι αλλαγές στην κατάσταση στο σωματίδιο είναι αδιαβατικοί. Εμείς όμως πρέπει να ενδιαφερόμαστε συχνά για το  $f(\rho, S)$  και το  $g(\tau, S)$  που θεωρούνται ως απλές λειτουργίες της p και της T αντίστοιχα με την ειδική εντροπία που έχει καθοριστεί με το S ; πράγματι σε κάποιες περιπτώσεις αυτές οι λειτουργίες θα είναι γραμμένες σε συντεταγμένη μορφή  $f(\rho)$  και  $g(\tau)$ . Η εξίσωση  $p=f(\rho)=g(\tau)$  λέγεται τότε αδιαβατική εξίσωση.

Ο ισεντροπικός κόσμος θα μπορούσε ίσως να είναι πιο ακριβής εδώ από τον αδιαβατικό. Αν για παράδειγμα η θερμική αγωγιμότητα ήταν απύσχα αλλά η ιξώδες παρούσα, οι αλλαγές θα ήταν αδιαβατικές (η θερμότητα δεν ρέει από ή στο σωματίδιο) και όχι ισεντροπικές (η εντροπία στο σωματίδιο θα αυξανόταν γενικά). Αλλά εμείς διατηρούμε τον κόσμο ισεντροπικό για μια άλλη αντίληψη, δηλαδή την σταθερή εντροπία σ' όλο το μέσο. Είναι μια θεμελιώδης ιδιότητα όλων των πραγματικών μέσων ότι η εντροπία παραμένει σταθερή, η πίεση αυξάνεται με αυξημένη πυκνότητα (ή μείωση συγκεκριμένου όγκου), δηλαδή,

$$(2.04) \quad f_p(\rho, S) > 0; \quad g_\tau(\tau, S) < 0,$$

εκτός από την οριακή περίπτωση  $p=0$ , στο οποίο  $f_p=0$ . Εξαιτίας του (2.04) μπορούμε να ορίσουμε μια θετική ποσότητα  $c$ , με την διάσταση της ταχύτητας, από

$$(2.05) \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho} = f_p(\rho, S), \quad \rho^2 c^2 = -g_\tau(\tau, S).$$

Αυτή η σημαντική ποσότητα  $c$  ονομάζεται ταχύτητα ήχου, μια ονομασία η οποία θα δικαιολογηθεί στο τμήμα 35 Κεφάλαιο II; η ποσότητα  $\rho c$  συνήθως ονομάζεται ακουστική αντίσταση.

\*Σχεδόν παντού στο βιβλίο, υποδεικνύουμε μερική διαφοροποίηση με τους δείκτες.

Για κάθε τιμή του  $S$ , η λειτουργία  $g(\tau, S)$  είναι γενικά κυρτή λήψη. Εμείς όμως υποθέτουμε σε όλο το βιβλίο, εκτός απ' όπου σημειώνεται αντίθεση, ότι

$$(2.06) \quad g_{\tau\tau}(\tau, S) > 0.$$

Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε μαζί με το (2.04),  $f_{pp}(\rho, S) \geq 0$  συνεπάγεται το (2.06).

Φτιάχνουμε και την επιπλέον υπόθεση ότι για ένα συγκεκριμένο σταθερό όγκο, η ταχύτητα αυξάνεται με την εντροπία,

$$(2.07) \quad g_S(\tau, S) > 0.$$

Από τις εξισώσεις (2.02) βλέπουμε ότι αυτή η υπόθεση είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι μία σταθερή εντροπία, η θερμότητα αυξάνεται με την αύξηση της πυκνότητας.

Για τα αέρια στα οποία η πυκνότητα μπορεί να φτάνει το μηδέν, κάνουμε την πρόσθετη υπόθεση

$$(2.08) \quad e \rightarrow 0, \quad \tau p \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0, \quad c \rightarrow 0, \quad \text{as } \rho \rightarrow 0.$$

Η θεωρία μπορεί να μην πραγματοποιηθεί χωρίς επιπλέον υποθέσεις σχετικά με το μέσο.

Υπάρχουν όμως διάφορα μέσα, ιδιαίτερου σωματικού ενδιαφέροντος, τα οποία περιγράφονται στα Τμήματα 3-6 (με περισσότερες λεπτομέρειες απ' ότι είναι απαραίτητο για την επακόλουθη μαθηματική επεξεργασία).

### **3. Ιδανικά αέρια, πολυτροπικά αέρια και μέσα με διαχωριστική ενέργεια.**

Σε σχεδόν όλες τις εφαρμογές της θεωρίας των αερίων το μέσο μπορεί να, με επαρκή ακρίβεια, θεωρηθεί σαν το ιδανικό αέριο, το οποίο είναι ένα μέσο το οποίο πληρή τους νόμους του Boyle και του Gay-Lussac όπως έχει εκφραστεί μέσα από την εξίσωση της κατάστασης.

$$(3.01) \quad p\tau = RT.$$

Εδώ το σταθερό  $R$  μπορεί να ληφθεί για να είναι η παγκόσμια σταθερά των αερίων  $R_0$  που διαιρείται με  $\mu$  το αποτελεσματικό μοριακό βάρος του συγκεκριμένου φυσικού αερίου.

Σε ένα ιδανικό αέριο η εσωτερική ενέργεια είναι μια λειτουργία της θερμοκρασίας μόνη της, βλέπε τμήμα 4. Αν, ειδικότερα, η εσωτερική ενέργεια είναι απλά ανάλογη με την θερμοκρασία  $T$ , το αέριο ονομάζεται πολυτροπικό. Για αυτά τα αέρια μπορούμε να γράφουμε

$$(3.02) \quad e = c_v T,$$

Όπου το σταθερό είναι η ειδική θερμότητα στο σταθερό όγκο. Η παραδοχή ότι ένα αέριο είναι πολυτροπικό γίνεται στις περισσότερες εφαρμογές της θεωρίας, οδηγεί, μαζί με το (3.01) στην θερμιδική εξίσωση της κατάστασης

$$(3.03) \quad p = f(\rho, S) = A\rho^\gamma,$$

στο οποίο ο συντελεστής  $A$  εξαρτάται από την εντροπία,  $S$  και ο αδιαβατικός εκθέτης  $\gamma$  είναι σταθερός μεταξύ 1 και για τα μέσα που συμβαίνουν πιο συχνά. Ο αέρας σε μέτρια θερμοκρασία μπορεί να θεωρηθεί πολυτροπικός με  $\gamma=1.4$ .

Η ισοδυναμία μεταξύ του (3.02) και του (3.03) θα αποδειχθεί στο τμήμα 4. Εδώ εμείς αναφέρουμε ότι το  $C_v$  ισούται με  $R/(\gamma-1)$ , έτσι

$$(3.04) \quad e = \frac{1}{\gamma - 1} p\tau;$$

Και

$$(3.05) \quad A = (\gamma - 1) \exp c_v^{-1}(S - S_0),$$

με ένα κατάλληλο συνεχή  $S_0$ .

Η ταχύτητα ήχου ενός πολυτροπικού αερίου, σύμφωνα με το (2.05) και το (3.03), χαρακτηρίζεται από τις απλές σχέσεις

$$(3.06) \quad c^2 = \gamma A \rho^{\gamma-1} = \gamma p \tau = \gamma R T.$$

Για μελλοντική αναφορά σημειώνουμε για τα πολυτροπικά αέρια :

$$(3.07) \quad e = \frac{A}{\gamma - 1} \tau^{-(\gamma-1)} = \frac{A}{\gamma - 1} \rho^{(\gamma-1)},$$

$$(3.08) \quad R T = A \tau^{-(\gamma-1)} = A \rho^{(\gamma-1)},$$

$$(3.09) \quad p = A \rho^\gamma = A \tau^{-\gamma}.$$

Ακολουθεί αμέσως από το (3.09) ότι ένα πολυτροπικό αέριο ικανοποιεί τις συνθήκες μονοτονίας και κυρτότητας (2.04) και (2.06).

Όσο αφορά την  $p$  και τον  $\tau$ , η ενέργεια δίνεται από το (3.04), και η θερμοκρασία από το (3.01), και την εντροπία από την σχέση

$$(3.10) \quad S - S_0 = c_v \log \{ p \tau^\gamma / (\gamma - 1) \},$$

που ακολουθούν από το (3.05) και το (3.09).

Στα αέρια η πίεση εξαρτάται αισθητά από την συγκεκριμένη εντροπία. Όμως σε κάποιες περιπτώσεις, ειδικά αν το μέσο είναι ένα υγρό, η επιρροή των αλλαγών στην εντροπία είναι ασήμαντες, έτσι ώστε η  $p$  να μπορεί να θεωρηθεί μια λειτουργία της πυκνότητας (ή συγκεκριμένου όγκου) μόνη της. Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση της εντροπίας της κατάστασης παίρνει την μορφή

$$(3.11) \quad p = f(\rho) \quad \text{or} \quad p = g(\tau)$$

Και ως συνέπεια του (2.01) και (2.02)

$$(3.12) \quad e = e^{(1)}(\tau) + e^{(2)}(S).$$

Αντίθετα η διαχωρίσιμη ενέργεια όπως ευκράζεται από το (3.12) συνεπάγεται το (3.11). Ομοίως η κατάσταση ότι η  $T$  εξαρτιέται μόνο από την  $S$  ισούται σε αυτό με την διαχωρίσιμη ενέργεια.

Το πιο σημαντικό μέσο με σχεδόν διαχωρίσιμη ενέργεια είναι το νερό. Για το νερό η θερμοδυναμική εξίσωση της κατάστασης έχει κάποια ομοιότητα με αυτήν του τέλειου αερίου:

$$(3.13) \quad p = A \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - B,$$

όπου το  $\rho_0$  είναι η πυκνότητα στους κελσίους, και  $A, B$ , και  $\gamma$  είναι πρακτικά ανεξάρτητα από την εντροπία. Οι συγκεκριμένες τιμές για το νερό είναι  $\gamma=7$ ,  $B=3.000 \text{ atm.}$ ,  $A=3001 \text{ atm.}$ , περίπου.

### Μαθηματικά σχόλια για τα ιδανικά αέρια

Φαίνεται να αξίζει τον κόπο, αν και δεν είναι ουσιώδες για τις επόμενες ενότητες, να αποδείξουμε γενικά το γεγονός ότι η εσωτερική ενέργεια ενός ιδανικού αερίου είναι μια λειτουργία της θερμοκρασίας μόνη της και να καθορίσουμε τη σχέση μεταξύ αυτής της λειτουργίας και της εντροπικής εξίσωσης της κατάστασης για κάθε ιδανικό αέριο, που λαμβάνουμε, χρησιμοποιώντας την αξία.  $T=pt/R$  από το (3.01) στο (2.02), η μερική διαφορική γραμμική εξίσωση για την  $e$ ,

$$(4.01) \quad Re_s + \tau e_\tau = 0,$$

η γενική λύση αυτού είναι

$$(4.02) \quad e = h(\tau H),$$

το  $h$  είναι μια αυθαίρετη λειτουργία και

$$(4.03) \quad H = \exp(-S/R).$$

η θερμοδική εξίσωση της κατάστασης είναι ως εκ τούτου ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

$$(4.04) \quad p = -e_\tau = -h'(\tau H)H = -h'(\rho^{-1}H)H;$$

εδώ το  $h'$  είναι παράγωγο του  $h$ . Για τα ιδανικά αέρια που προκύπτουν από το (4.04) όπου οι συνθήκες μονοτονίας και κυρτότητας (2.04) και (2.06) είναι αυστηρά ίσες στις συνθήκες όπου τα δεύτερα παράγωγα του  $h$  είναι αρνητικά,

$$(4.05) \quad h''(\tau H) > 0; \quad h'''(\tau H) < 0.$$

Η θερμοκρασία ενός ιδανικού αερίου δίνεται από το

$$(4.06) \quad T = e_s = -\frac{1}{R}h'(\tau H)\tau H.$$

Η εξίσωση (4.06) δείχνει ότι η  $T$  όπως και η  $e$  εξαρτάται από την  $\tau H$ . Για κάθε πραγματικό μέσο, η  $T$  είναι αυστηρά φθίνουσα λειτουργία από αυτή την μεταβλητή. Παρόλα αυτά, είναι δυνατό να λύσουμε το (4.06) για  $\tau H$  όσο αφορά την  $T$ , και ύστερα από το (4.02) να εκφραστεί η  $e$  ως λειτουργία της  $T$ . Με άλλα λόγια, η συγκεκριμένη ενέργεια ενός ιδανικού αερίου εξαρτάται μόνο στην θερμοκρασία.

Σύμφωνα με το (2.05) και (4.04) η ταχύτητα ήχου ενός ιδανικού αερίου δίνεται από τη λειτουργία από τον  $T$  και την  $S$  από το

$$(4.07) \quad c^2(\tau, S) = h''(\tau H)\tau^2 H^2;$$

Συνεπώς η ταχύτητα ήχου, όπως η συγκεκριμένη ενέργεια, εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία. Η σύνδεση της ταχύτητας ήχου με την ενέργεια και τη θερμοκρασία στην περίπτωση ενός ιδανικού αερίου αναδεικνύεται από την

$$(4.08) \quad c^2(T) = \left(1 + R \frac{dT}{de}\right) RT \\ = \gamma(T)RT,$$

εξίσωση

στο οποίο η αδιάστατη ποσότητα  $\gamma(T)$  συστήνονται εδώ ως μία βολική συντομογραφία για

$$1 + R \frac{dT}{de}.$$

Η εξίσωση (4.08) εύκολα προέρχεται από το (4.07) με την

$$e_\tau + RT_\tau = -h''(\tau H)\tau H^2 \quad \text{και} \quad RT = -\tau e_T \quad \text{από το (4.04) και (4.06).}$$

Σημειώνουμε ότι

$$(4.09) \quad \frac{de}{dT} = \frac{R}{\gamma(T) - 1}$$

είναι η «ειδική θερμοότητα σε σταθερό όγκο» βλ. τμήμα 9.

Για ένα πολύ τροπικό αέριο, που είναι ένα ιδανικό αέριο στο οποίο η  $e$  είναι απλά ανάλογη με την  $T$  όπως εκφράστηκε μέσω του (3.02), η λειτουργία  $\gamma(T)$  είναι σταθερή. Στην πραγματικότητα από το (4.08) και το (3.02),

$$(4.10) \quad \gamma = 1 + Rc_v^{-1},$$

ή  $c_v = R/(\gamma - 1)$ , όπως αναφέρθηκε προηγούμενα .

Επειδή το  $C_0$  και  $R$  είναι θετικά,

$$(4.11) \quad \gamma > 1;$$

όπου η στοιχειώδη κινητική θεωρία των αερίων ισχύει είναι γνωστό ότι

$$(4.12) \quad \gamma \leq \frac{5}{3}.$$

Εισάγοντας το(4.02) και το(4.06) στο(3.02), παίρνουμε από το(4.10)

$$(4.13) \quad h'(\tau H) = -(\gamma - 1) (\tau H)^{-1} h(\tau H).$$

Ως εκ τούτου

$$(4.14) \quad h = \left( \tau \frac{H}{H_0} \right)^{-(\gamma - 1)},$$

όπου η παρουσία του σταθερού  $H_0$  αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι η συγκεκριμένη εντροπία ορίζεται μόνο εντός μιας αυθαίρετης σταθεράς.

Από το(4.04) τότε έχουμε

$$(4.15) \quad p = A(S)\tau^{-\gamma},$$

Όπου  $A(S)$  δίνεται από

$$A = A(S) = (\gamma - 1) \left( \frac{H}{H_0} \right)^{-(\gamma - 1)} = (\gamma - 1) \exp(c_v^{-1}(S - S_0)),$$

είναι σύμφωνο με το(4.02)και το (3.05) . Η σχέση(4.15) είναι ίση με την(3.03). Αυτή η μορφή θερμικής εξίσωσης της κατάστασης προέρχεται απο τη βασική υπόθεση(3.02).

### **5 Στερεά που δεν πληρούν τον νόμο του Hooke.**

Σε αντίθεση με τα υγρά, τα στερεά αντιστέκονται στην διάτμηση έτσι ώστε η θερμό δυναμική περιγραφή ενός στερεού( περιλαμβάνουν, όπως κάνουν πολλά συστατικά πολλά συστατικά της καταπόνυσης και της έντασης) είναι πολύ περισσότερο περίπλοκη από ό,τι αυτή του υγρού.

Αλλά αν η προσοχή περιορίζεται στα διαμήκη κύματα που κινούνται κανονικά στην επιστροφή της πλάκας, δεν προκύπτουν διάτμηκές δυνάμεις. ύστερα υπάρχει μια αρκετά καλή αναλογία μεταξύ των ελαστικών στερεών και υγρών. Παραμελώντας τις επιδράσεις των μεταβολών της εντροπίας, η κατάσταση σε διατομή της πλάκας χαρακτηρίζεται από δύο μεταβλητές την  $p$  και την  $\tau$  ανάλογες με την πίεση και τον συγκεκριμένο όγκο ενός υγρού. Αυτό το πλαίσιο  $p$  υποδηλώνει την αρνητική « μηχανική καταπόνηση», για π.χ., η αρνητικότητα της δύναμης που δρα σε κανονική κατεύθυνση στην διατομή της πλάκας διαιρείται δια την αρχική περιοχή της διατομής μιας αβίαστης πλάκας, και

$\tau = \tau_0(1 + \epsilon)$ , όπου το  $\tau_0$  είναι ο συγκεκριμένος όγκος μιας αβίαστης πλάκας και το  $\epsilon$  είναι η ένταση. Η εντροπική εξίσωση της κατάστασης σχεδόν πάντα χρησιμοποιείται για μια ελαστική συμπαγή πλάκα που εκφράζεται από τον νόμο του Hooke, που στην δική μας σημειογραφία είναι

$$(5.01) \quad p = (\tau_0 - \tau) \frac{E}{\tau_0},$$

όπου το  $E$  είναι μέτρο του Young.

Όταν ο νόμος του Hooke ισχύει, η κίνηση κύματος είναι γραμμική· για την ακρίβεια, αλλα για κάποιο λόγο εν αναμονή του κεφαλαίου II, αυτή η κίνηση είναι γραμμική σύμφωνα με την Παγκρατιανή θεωρία και όχι με τη θεωρία του Euler. Ως εκ τούτου, ιδιαίτερη ανησυχία μας



αφορά τα στέρεα στα οποία ο νόμος του Hooke δεν ισχύει, τα οποία είναι, στέρεα με μια πιο γενική θερμοδυναμική εξίσωση της κατάστασης από την(5.01):

$$(5.02) \quad p = g(\tau).$$

Όπως ακριβώς στην περίπτωση ενός υγρού, εμείς θα πρέπει να υποθέσουμε ότι η  $p$  μειώνεται με την αύξηση του  $\tau$ . Θα πρέπει επίσης να υποθέσουμε ότι η  $p$ , ως λειτουργία του  $\tau$ , δεν είναι ποτέ κυρτή από τον  $p$ -αξονα και το οποίο εξαφανίζεται στο  $\tau=\tau_0$ .

Αυτές οι υποθέσεις εκφράζονται επίσημα από

$$(5.03) \quad \begin{aligned} g'(\tau) &< 0 \\ g(\tau_0) &= 0 \\ g''(\tau) &\leq 0 \text{ for } \tau \leq \tau_0 \\ &\geq 0 \text{ for } \tau \geq \tau_0. \end{aligned}$$

Αυτές οι συνθήκες συνεπάγονται ότι, εκτός των όρων των ανώτατων από την δεύτερη σειρά, το στέρεο πληρεί το νόμο του Hooke στη γειτονιά του  $\tau_0$ . Να σημειώσετε επίσης ότι το τελευταίο σημείο της (5.03) έρχεται σε αντίθεση με την (2.06).

Αν και δεν είναι τα ίδια πλαστικά, αυτά τα στερεά στα οποία ο νόμος του Hooke δεν πληρείτε έχουν παίξει κάποιο ρόλο σε κάποιες μελέτες της πλαστικότητας. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε το παράρτημα στο κεφάλαιο III, στο οποίο υπάρχει ένα διάγραμμα μιας τυπικής εξίσωσης της κατάστασης οποία είναι αντίθετη του Hooke.

## **6. Διακριτά μέσα**

Η κίνηση των κυμάτων μπορεί να μελετηθεί σε ένα μέσο αποτελούμενο από μια αλυσίδα των μαζών που συνδέονται το ένα με το άλλο μέσω πηγών που δεν, γενικά, υπακούουν στον νόμο του Hooke. Υπάρχει μια σαφής αναλογία μεταξύ τέτοιων διακριτών μέσων και συνεχών μέσων που είναι το άμεσο αντικείμενο απασχόλησης μας. Αυτή η αναλογία μπορεί να αξιοποιηθεί σε κάθε κατεύθυνση· σε κάποιους υπολογισμούς αποδεικνύεται επωφελής για την προσέγγιση ενός συνεχούς μέσου από ένα διακριτό και αντίστροφα, βλ. το παράδειγμα [58].

## **7. Διάφοροι της εξίσωσης της κίνησης**

Οι ερωτήσεις που θα μελετηθούν σ' αυτό το βιβλίο είναι στενά συνδεδεμένες με το γενικό πλαίσιο των διαφορικών εξισώσεων των στερεών δυναμικών, που διέπουν την κίνηση του μέσου εκτός από τις ασυνέχειες. Αυτό το σύστημα των εξισώσεων εκφράζει:

1. την αρχή της διατήρησης της μάζας,
2. το νόμο του νέου του Newton για την διατήρηση της ορμής,
3. τη συνθήκη όπου οι αλλαγές της κατάστασης είναι αδιαβατικές,
4. την συγκεκριμένη μορφή της εξίσωσης της κατάστασης.

Οι διαφορικές εξισώσεις, μαζί με κατάλληλες αρχικές και οριακές συνθήκες, καθορίζουν ένα ατομικό φαινόμενο.

Στα υπόλοιπα τμήματα, αυτού του κεφαλαίου μια σύντομη έρευνα κλασικών αποτελεσμάτων σχετικά με τις εξισώσεις των υδροδυναμικών δίνεται σε μορφή κατάλληλη για τους σκοπούς μας.

Οι εξισώσεις των στερεών δυναμικών μπορούν να εκφραστούν με δύο διαφορετικές μορφές, αυτή του La grange και του Euler. Οι εξισώσεις της Λαγκρανζιανής μορφής περιγράφει την

κίνηση όσο αφορά την πορεία των επιμέρους άρθρων του φυσικού αερίου, για π.χ., οι συντεταγμένες  $x, y, z$  ενός σωματιδίου ως λειτουργίες του χρόνου  $t$  και των 3 παραμέτρων  $a, b, c$ , οι οποίοι χαρακτηρίζουν το μεμονωμένο σωματίδιο, τα  $a, b, c$ , συχνά διαλέγονται ως συντεταγμένες των σωματιδίων κατά το χρόνο  $t=0$ . Η εκπροσώπηση του Lagrange η διαφοροποίηση σε σχέση με το χρόνο  $t$  θα συμβολίζεται με μια τελεία ( $\dot{\phantom{x}}$ ).

Στις περισσότερες περιπτώσεις, όμως, η εκπροσώπηση του Euler είναι προτιμότερη και από μαθηματική και από φυσική άποψη. η προσοχή στρέφεται στα οριστικά σημεία  $(x, y, z)$  και το τι συμβαίνει σε αυτά τα σημεία κατά τη διάρκεια του χρόνου  $t$ . Η κίνηση τότε περιγράφεται δίνοντας ως λειτουργίες  $x, y, z$  και  $t$  οι συνιστώσες της ταχύτητας  $u, v, w$  του σωματιδίου που συμβαίνει να είναι στο σημείο  $(x, y, z)$  στο χρόνο  $t$ . Στον Euler την εκπροσώπηση η διαφοροποίηση σε σχέση με τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x, y, z, t$  θα συμβολίζονται με δείκτες. Η μετάβαση από την εκπροσώπηση του Euler με αυτή του Lagrange πραγματοποιείται με την επίλυση του συστήματος των των συνθηκών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(x, y, z, t) \\ \dot{y} &= v(x, y, z, t) \\ \dot{z} &= w(x, y, z, t); \end{aligned} \quad (7.01)$$

οι σταθερές ολοκλήρωσης μπορούν να παρθούν ως παράμετροι  $a, b, c$ . Η αντίστροφη μετάβαση γίνεται με την εξάλειψη των  $a, b, c$  από τις εξισώσεις (7.01) και εκείνα που λαμβάνονται με την διαφοροποίηση (7.01).

Σύμφωνα με τον Lagrange οι εξισώσεις για τα στερεά δυναμικά είναι:

$$(7.02) \quad (\rho \Delta) = 0 \quad (\text{Διατήρηση της μάζας})$$

(εδώ το  $\Delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}$  δηλώνει την Ιακωβιανή συνάρτηση  $x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t)$ .)

$$\begin{aligned} \rho \dot{x} + p_x &= 0 \\ \rho \dot{y} + p_y &= 0 \\ \rho \dot{z} + p_z &= 0 \quad (\text{Διατήρηση της ορμής}) \end{aligned} \quad (7.03)$$

(θεωρείτε εδώ ότι καμία άλλη δύναμη πέρα από την κλίση πίεσης δρα. Για να είμαστε σίγουροι, η εξωτερική δύναμη της βαρύτητας θα είναι γενικά παρούσα, αλλά στις περισσότερες εφαρμογές είτε θα είναι παραμελημένη εντελώς ή θα αντιμετωπίζεται ξεχωριστά, βλ. Milne-Thomson[18].

$$(7.04) \quad \dot{S} = 0 \quad (\text{οι αλλαγές της κατάστασης είναι αδιαβητικές})$$

$$(7.05) \quad p = f(\rho, S) \quad (\text{θερμιδική εξίσωση της κατάστασης})$$

Τα παράγωγα τις πίεσης  $p$  στις εξισώσεις (7.05) αναφέρονται στα  $x, y, z, t$  ως ανεξάρτητες μεταβλητές. Μια ρητή έκφραση στις μεταβλητές  $a, b, c, t$  ως  $p_x = p_a a_x + p_b b_x + p_c c_x$ , κ.λπ. θα οδηγήσει σε εμπλεκόμενους μη γραμμικούς όρους, για  $a_x, b_x, \dots$  πρέπει να εκφράζονται από τα παράγωγα των αντίστροφων λειτουργιών  $x(a, b, c, t), \dots$ . Συνήθως, όμως, η εκπροσώπηση του Lagrange είναι πολύ δυσκίνητη. Αυτή η αντίρρηση δεν διαθέτει συμμετρικές κινήσεις ώστε να χαρακτηρίζεται από ένα μόνο χώρο συντεταγμένων, σε τέτοιες περιπτώσεις η εκπροσώπηση του Lagrange είναι, όπως θα δούμε, συχνά επωφελής.

Γι την κίνηση που αφορά περισσότερους από ένα χώρο συντεταγμένων είναι κατά κανόνα προτιμότερο να γράψετε την εξίσωση στην μορφή του Euler. Κάθε μία από τις εξισώσεις του Euler προέρχεται μέσα από την αντίστοιχη εξίσωση του Lagrange μέσω της ταυτότητας

$$(7.06) \quad \dot{F} = F_t + uF_x + vF_y + wF_z,$$

που εφαρμόζεται σε κάθε λειτουργία F που ορίζεται για τα σωματίδια του μέσου. Εμείς επιπλέον σημειώνουμε την ταυτότητα

$$(7.07) \quad \dot{\Delta} = (u_x + v_y + w_z)\Delta,$$

που εύκολα επαληθεύεται .

Στην απουσία των εξωτερικών δυνάμεων οι εξισώσεις του Euler είναι:

$$(7.08.1) \quad \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0$$

or

$$(7.08.2) \quad \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 \quad (\text{Διατήρηση της μάζας}),$$

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{1}{\rho} p_x = 0$$

$$(7.09.1) \quad v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{1}{\rho} p_y = 0$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{1}{\rho} p_z = 0$$

ή από την (7.08.02)

$$(7.09.2) \quad (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + (\rho uv)_y + (\rho wu)_z + p_x = 0$$

$$(\rho v)_t + (\rho vw)_x + (\rho v^2)_y + (\rho wv)_z + p_y = 0$$

$$(\rho w)_t + (\rho uw)_x + (\rho vw)_y + (\rho w^2)_z + p_z = 0 \quad (\text{διατήρηση της ορμής})$$

$$(7.10) \quad p = f(\rho, S) \quad (\text{θερμιδική εξίσωση της κατάστασης})$$

$$(7.11) \quad S_t + uS_x + vS_y + wS_z = 0 \quad (\text{οι αλλαγές της κατάστασης είναι αδιαβατικές})$$

Είναι ικανοποιητικό να σημειωθεί ότι ο αριθμός των εξισώσεων ( 6) και του Lagrange και του Euler είναι ίσες με τις άγνωστες. Εμείς, όμως, μπορεί να αναμένουμε ότι οι κατάλληλες αρχικές και οριακές συνθήκες να οδηγήσουν σε μια μοναδική συμπεριφορά ( για τις περιοχές της συνεχούς κίνησης) χωρίς πόρους για περαιτέρω αρχές της φύσης. Είναι γενικά πιο βολικό να νομίζουμε ότι και τα δύο συστήματα αποτελούνται από πέντε μόνο εξισώσεις σε πέντε άγνωστες, διότι η p μπορεί εύκολα να εξαλειφθεί από τις εξισώσεις της διατήρησης της ορμής μέσω της (2.05), αφού

$$(7.12) \quad c^2(\rho, S) = f_p(\rho, S);$$

$$p_x = c^2 \rho_x + f_S S_x, \quad p_y = c^2 \rho_y + f_S S_y, \quad p_z = c^2 \rho_z + f_S S_z.$$

### 8. Διατήρηση της ενέργειας

Η κατάσταση (7.11) ότι οι αλλαγές της κατάστασης είναι αδιαβατικές μπορεί να προέρχονται από την η υπόθεση ότι το κέρδος της συνολικής ενέργειας του σωματιδίου του φυσικού αερίου οφείλεται αποκλειστικά στο έργο που επιτελέστηκε από τη δύναμη πίεσης (μέσω μιας συμπιεσμένης και επιταχυνόμενης δράσης) με τις εξωτερικές δυνάμεις να απουσιάζουν. Η συνολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας είναι:

$$e_{\text{tot}} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e;$$

Το έργο που επιτελέστηκε από τη δύναμη πίεσης ανα μονάδα όγκου ανα μονάδα χρόνου είναι:  $-[(p\dot{x})_x + (p\dot{y})_y + (p\dot{z})_z]$ . Έτσι η υπόθεση μας οδηγεί στη σχέση

$$(8.01) \quad \rho \dot{e}_{\text{tot}} + (p\dot{x})_x + (p\dot{y})_y + (p\dot{z})_z = 0 \quad (\text{διατήρηση της ενέργειας})$$

Διεξάγοντας τις διαφορές, χρησιμοποιώντας την σχέση (2.01) με μορφή  $de = \tau^2 p d\rho + T dS$ , και τις σχέσεις (7.01) και (7.07), η σχέση (8.01) γίνεται:

$$\rho[\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} + \tau^2 \dot{\rho}\dot{\rho} + T\dot{S}] + p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} + p \Delta^{-1} \dot{\Delta} = 0.$$

Με την (7.02) και την (7.03) αυτή η σχέση μειώνεται σε σχέση με την (7.04),  $\dot{S} = 0$ , που εκφράζει το γεγονός ότι οι αλλαγές της κατάστασης είναι αδιαβατικές.

Στην εκπροσώπηση του Euler ο νόμος της διατήρησης της ενέργειας μπορεί να δοθεί με συνοπτική μορφή, χρησιμοποιώντας την ταχύτητα ροής,  $\mathbf{q} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ , και την συγκεκριμένη ενθαλπία  $i = e + p\tau$ , για την οποία περισσότερα θα ειπωθούν στο τμήμα 9. Η σχέση (8.01) τότε μπορεί με την (7.08) να μειωθεί σε

$$(8.02.1) \quad \rho[\frac{1}{2}q^2]_x + \rho T S_x + \rho u[\frac{1}{2}q^2 + i]_x + \rho v[\frac{1}{2}q^2 + i]_y + \rho w[\frac{1}{2}q^2 + i]_z = 0$$

ή με την (7.08.2)

$$(8.02.2) \quad \{\rho[\frac{1}{2}q^2 + i]\}_x + \{\rho u[\frac{1}{2}q^2 + i]\}_x + \{\rho v[\frac{1}{2}q^2 + i]\}_y + \{\rho w[\frac{1}{2}q^2 + i]\}_z = 0.$$

Τυχαία, ούτε η συνολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας  $e_{\text{τοπ}} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ , ούτε το έργο που επιτελέστηκε ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου,  $(pu)_x + (pv)_y + (pw)_z$ , είναι αμετάβλητη στο πλαίσιο της μετάφρασης, π.χ. αυτές οι εκφράσεις αλλάζουν όταν η κίνηση παρατηρείται από το πλαίσιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα  $(u_0, v_0, w_0)$ . Το αριστερό μέρος της σχέσης (8.02) όταν αναφέρεται σε αυτό το κινούμενο πλαίσιο, όμως, διαφέρει από την αρχική έκφραση μόνο από τα πολλαπλάσια των αριστερών μελών της (7.09), και, έτσι, το σύστημα των εξισώσεων (7.08), (7.09), (8.02) παραμένει αμετάβλητο.

## 9. Ενθαλπία

Όσον αφορά τη συγκεκριμένη ενθαλπία  $i$ , ορίζεται από

$$(9.01) \quad i = e + p\tau,$$

η θεμελιώδης εξίσωση (2.01) παίρνει τη μορφή (9.02)

$$di = \tau dp + T dS.$$

Για αδιαβατικές αλλαγές,  $ds=0$ , έχουμε από την (2.05)

$$(9.03) \quad di = c^2 \tau d\rho.$$

Η υπόθεση μας για αέρια (2.08) οδηγούν στη σχέση

$$(9.04) \quad i \rightarrow 0 \text{ as } \rho \rightarrow 0.$$

Σε ένα ιδανικό αέριο, η  $i$  είναι προφανώς μια λειτουργία της θερμοκρασίας. Από την (4.09), (3.01) και την (9.01) έχουμε

$$(9.05) \quad \frac{di}{dT} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

Αυτή η ποσότητα ονομάζεται «συγκεκριμένη θερμότητα σε σταθερή πίεση». Η σύγκριση των τύπων (9.05) και (4.09) δείχνουν ότι  $\gamma$  είναι η αναλογία των δύο ειδικών θερμοκρασιών. Με την εξειδίκευση ενός πολυτροπικού αερίου παίρνουμε από τις (3.07), (3.08), (3.09), και (9.01)

$$(9.06) \quad i = \frac{\gamma}{\gamma - 1} A(S) \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT \\ = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p\tau = \frac{c^2}{\gamma - 1}.$$

Η καθιέρωση της ειδικής ενθαλπίας αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις στις οποίες η εντροπία  $S$  είναι σταθερή, για παράδειγμα, σε ένα συγκεκριμένο σωματίδιο, ή κατά μήκος ενός εξορθολογισμού σε σταθερή ροή ή καθόλη τη μεσοπρόθεσμη σε ισεντροπική ροή, βλ. τμήμα 14.

Σε άλλα πεδία η χρησιμότητα της ισεντροπικής έννοιας έγκειται το γεγονός ότι  $di=TdS$  είναι η αύξηση της θερμότητας που αποκτήθηκε από το σωματίδιο εάν η πίεση παραμένει σταθερή. Αυτή η σχέση εξηγεί γιατί ο όρος θερμαντική δύναμη χρησιμοποιείται συχνά για την ενθαλπία.

### **10. Ισεντροπική ροή . Σταθερή ροή. Υποηχητική και υπερηχητική ροή.**

Συχνά μια πιο σημαντική απλουστευτική παραδοχή μπορεί και θα γίνει: Στην αρχή της διαδικασίας η ειδική εντροπία έχει την ίδια αξία καθόλο το μέσο. Αυτό προκύπτει άμεσα από την (7.04), εκτός αν οι ασυνέχειες σε όλη την (7.04) είναι παρούσες όταν σπάσει, σ' αυτή την περίπτωση η ειδική εντροπία παραμένει στην ίδια αξία σε όλο το μέσο καθόλη τη διάρκεια.

Έτσι, αν σκεφτούμε την  $S$  ως μια δεδομένη σταθερή μπορούμε να παραλείψουμε την εξίσωση (7.04), ή αντίστοιχα την (7.11), και να αφήσουμε πέντε εξισώσεις σε πέντε αγνώστους, ή αν η πίεση εξαλειφθεί τέσσερις εξισώσεις σε τέσσερις αγνώστους. Μια τέτοια ροή, στην οποία η εντροπία είναι παντού και πάντα η ίδια, θα ονομαστεί ισεντροπική. Αν και είναι αλήθεια πως η ισεντροπική ροή συμβαίνει συχνά, υπάρχουν πολλά σημαντικά φαινόμενα που περιέχουν μη ισεντροπική ροή.

Έντονου ενδιαφέροντος είναι και ένα άλλο είδος της ροής: Η σταθερή ροή, ορίζεται από την κίνηση στην οποία η ταχύτητα, η πίεση, η πυκνότητα και η ειδική εντροπία της ροής παραμένουν η ίδια στο χρόνο σε κάθε σημείο, π.χ. Εξαρτάται μόνο από το  $x, y, z$  και όχι από το  $t$ . Για μια τέτοια κίνηση οι όροι στις διαφορετικές εξισώσεις του Euler περιέχουν  $u_i, v_i, w_i, \rho_i,$  και  $S_i$  εγκαταλείπουν. Σε μια σταθερή ροή όλα τα σωματίδια που διέρχονται από ένα συγκεκριμένο σημείο έχουν την ίδια ταχύτητα, πυκνότητα, πίεση και εντροπία σ' αυτό το σημείο και ακολουθούν το ίδιο μονοπάτι, τον εξορθολογισμό από το σημείο. Το μέσο είναι έτσι καλυμμένο από εξορθολογισμός που δεν αλλάζουν στο χρόνο.

Μια σταθερή ροή ονομάζεται υποηχητική, ηχητική ή υπερηχητική σε ένα σημείο όπως όταν η ταχύτητα ροής  $q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$  σ' αυτό το σημείο είναι λιγότερο από, ίσο με, ή μεγαλύτερο από την ταχύτητα ήχου  $c$  στο σημείο, βλ. (2.05) και τμήμα 3, ή ως τον αριθμό του Mach

$$(10.01) \quad M = q/c$$

είναι λιγότερο από, ίσο με, μεγαλύτερο από το ένα.

### **11. Ακουστική προσέγγιση**

Το σύστημα των μερικών διαφορικών γραμμικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται συχνά για να περιγράψουν συνηθισμένες ακουστικές διαταραχές ακολουθούνται από την μη γραμμική εξίσωση ρευστής κίνησης του Euler (7.08-11) σαν μια οριακή περίπτωση. Σκεφτείτε μια μικρή ισεντροπική διαταραχή, π.χ. μια ισεντροπική κίνηση του μέσου με  $S=S_0$  και  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ , έτσι ώστε οι όροι της διαδικασίας υψηλότεροι από τους πρώτους σε  $\delta\rho, u, v, w$ , και τα παράγωγά τους μπορεί να παραμεληθούν. Παραμελώντας αυτούς τους υψηλότερους όρους διαδικασίας και εξαλείφοντας την  $p$ , οι εξισώσεις του Euler γίνονται

$$(11.01) \quad \delta\rho_i + \rho_0(u_x + v_y + w_z) = 0$$

$$(11.02) \quad u_i + \tau_0 c_0^2 \delta\rho_x = 0, v_i + \tau_0 c_0^2 \delta\rho_y = 0, w_i + \tau_0 c_0^2 \delta\rho_z = 0,$$

στο οποίο  $c_0^2 = c^2(\rho_0, S_0)$ . Το σύστημα (11.01-02) εύκολα βλέπετε ισοδύναμο με τη μοναδική εξίσωση της δεύτερης διαδικασίας

$$(11.03) \quad \delta\rho_{i,t} = c_0^2(\delta\rho_{xx} + \delta\rho_{yy} + \delta\rho_{zz}),$$

η γνωστή εξίσωση κύματος για τη μικρή διαταραχή  $\delta\rho$ .

### **12. Διανυσματική μορφή των εξισώσεων της ροής.**

Συχνά είναι άνετο να ξαναγράψουμε τις διαφορικές εξισώσεις (7.09) σε διανυσματική μορφή δηλώνοντας το διάνυσμα της ταχύτητας με το  $\vec{q}$ . Έτσι

$$(12.01) \quad \vec{q} + \tau \text{grad } p = \mathbf{0},$$

ή χρησιμοποιώντας την (9.02)

$$(12.02) \quad \vec{q} + \text{grad } i = T \text{ grad } S.$$

Επέκταση, και αναδιάταξη των όρων, έχουμε

$$(12.03) \quad \vec{q}_i + \frac{1}{2} \text{grad } (q^2) - \vec{q} \times \text{curl } \vec{q} + \text{grad } i = T \text{ grad } S$$

εδώ το  $q$  είναι το μέγεθος της ταχύτητας της ροής

$$(12.04) \quad q = |\vec{q}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Το σύμβολο  $X$  αντιπροσωπεύει για τον πολλαπλασιασμό διανύσματος. Φυσικά αν η ροή είναι ισεντροπική, το δεξί μέρος της εξίσωσης (12.02) ή της (12.03), αποσύρεται.

### 13. Διατήρηση της κυκλοφορίας. Αστρόβιλη ροή. Δυνατότητα.

Κάτω υπό διάφορες ευρύς υποθέσεις, οι εξισώσεις της δυναμικής αερίου παραδέχονται σημαντικά « ολοκληρώματα » ή τους νόμους διατήρησης οι οποίοι συνάγονται εύκολα.

Εμείς πρέπει πρώτα α συζητήσουμε για την διατήρηση της κυκλοφορίας. Ας αφήσουμε το  $Q$  να είναι μια αυθαίρετη κλειστή καμπύλη που κινείται με το υγρό. Θεωρούμε την κυκλοφορία  $C$  γύρω από την  $Q$

$$(13.01) \quad C = \oint_{\alpha} u dx + v dy + w dz = \oint_{\alpha} \vec{q} \cdot d\vec{x}$$

ως λειτουργία του  $t$ . Για διάφορους σημαντικούς τύπους της ροής η κυκλοφορία παραμένει σταθερή, π.χ.  $\dot{C} = 0$ , όπως οι κινήσεις της κλειστής καμπύλης. Για να εξασφαλισθούν συνθήκες για τη διατήρηση της κυκλοφορίας υπολογίζουμε το  $\dot{C}$ , το οποίο μπορεί εύκολα να γίνει αν συμβολίσουμε τα  $\mathcal{A}$  έτσι ώστε  $\mathcal{A}$  περιγράφεται για  $0 \leq \sigma \leq 1$ , και  $\vec{x}(0, t) = \vec{x}(1, t)$ . Τότε έχουμε

$$(13.02) \quad \dot{C} = \oint_{\alpha} (\vec{q} \cdot \vec{x}_{\sigma} + \vec{q} \cdot \vec{x}_{\sigma}) d\sigma$$

Με την (12.02) και το  $\vec{x}_{\sigma} = \vec{q}_{\sigma}$ , βρίσκουμε

$$(13.03) \quad \dot{C} = \oint_{\alpha} [TS_{\sigma} - i_{\sigma} + \frac{1}{2}(q^2)_{\sigma}] d\sigma.$$

Και τέλος αν ενσωματώσουμε τους δύο τελευταίους όρους της (13.03),

$$(13.04) \quad \dot{C} = \oint_{\alpha} TS_{\sigma} d\sigma = \oint_{\alpha} T \text{grad } S \vec{dx}$$

Παρόλα αυτά ( με την θεωρία του Stoke) το  $\dot{C}$  εξαφανίζεται για όλες τις καμπύλες  $\mathcal{A}$  όταν το διάνυσμα

$$(13.05) \quad \text{curl } (T \text{grad } S) = \text{grad } T \times \text{grad } S$$

εξαφανίζεται πανομοιότυπα. Συγκεκριμένα αυτό συμβαίνει όταν:

- Η ροή είναι ισεντροπική. Εδώ το  $\text{grad } S$  εξαφανίζεται.
- Η ενέργεια είναι διαχωριστική. Εδώ το  $T$  είναι μια λειτουργία του  $S$  και το  $\text{grad } T$  είναι παράλληλο στο  $\text{grad } S$ .
- Η ροή είναι τόσο συμμετρική, όπου το  $T$  και το  $S$  εξαρτώνται σε ένα μόνο χώρο συντεταγμένων. (Οι πιο σημαντικές πιθανότητες εδώ είναι η μονοδιάστατη ροή, η δύο διαστάσεων ροή με κυλινδρική συμμετρία, και σφαιρική ροή). Εδώ το  $\text{grad } T$  και το  $\text{grad } S$  περιορίζονται να βρίσκονται στην ίδια κατεύθυνση σε κάθε σημείο.

Μια ροή της οποίας η κυκλοφορία γύρω από κάθε καμπύλη είναι (και παραμένει) μηδεν, δηλαδή, μια ροή στην οποία το  $\text{curl } \vec{q}$  εξαφανίζεται πανομοιότυπα στο χώρο και χρόνο, ονομάζεται αστρόβιλη ροή.

Οι αστρόβιλες ροές συμβαίνουν συχνά, επειδή πολλές ροές ξεκινάνε από τις υπόλοιπες και προχωράνε σύμφωνα με τους όρους που αναφέρονται παραπάνω.

Η σχετικά μαθηματική απλότητα μιας αστρόβιλης ροής αξιοποιείται με τη συνειδητοποίηση ότι η εξίσωση

$$(13.06) \quad v_x - w_y = 0, \quad w_x - u_z = 0, \quad u_y - v_z = 0,$$

ή

$$\text{curl } \vec{q} = \mathbf{0},$$

συνεπάγεται η ύπαρξη μιας δυναμικής ταχύτητας, π.χ. μια συνάρτηση  $\varphi(x,y,z,t)$  όπως

$$(13.07) \quad u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad w = \varphi_z,$$

ή

$$\vec{q} = \text{grad } \varphi.$$

Παρομοίως, βλέπουμε από την (13.05) υπάρχει μια δυνατότητα  $\Omega$  για το διανυσματικό πεδίο  $T \text{ grad } S$ ,

$$(13.08) \quad T \text{ grad } S = \text{grad } \Omega,$$

όταν η κυκλοφορία διατηρείται, ιδίως για την αστρόβιλη ροή. Αν η ροή είναι ισεντροπική, το  $\Omega$  μπορεί να παρθεί για μηδέν. Αν η συγκεκριμένη ενέργεια του μέσου είναι διαχωριστική, το  $\Omega$  μπορεί να προσδιοριστεί με την ειδική συνιστώσα εντροπία της ειδικής ενέργειας, cf. (3.12),  $\Omega(x, y, z) = e^{(2)}[S(x, y, z)]$ .

#### 14. Ο Νόμος του Bernoulli.

Στο τμήμα αυτό θα αντλήσουμε τρία στενά συσχετισμένους νόμους διατήρησης οι οποίοι κάποιες φορές ονομάζονται Νόμος του Bernoulli. Η πρώτη μορφή αυτού του νόμου αναφέρεται στη σταθερή ροή, βλέπε τμήμα 10. Οι διαφορικές εξισώσεις (12.02) και η διανυσματική μορφή της δήλωσης (7.04) ότι οι αλλαγές της κατάστασης είναι αδιαβατικές, συνεπάγεται

$$(14.01) \quad S_t + \vec{q} \cdot \text{grad } S = 0.$$

Εμείς αμέσως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι σε κάθε εξορθολογισμό μιας σταθερής ροής έχουμε

$$\frac{d}{dt} (\frac{1}{2}q^2 + i) = \vec{q} \cdot \dot{\vec{q}} + \vec{q} \cdot \text{grad } i = \vec{q} \cdot T \text{ grad } S = 0,$$

από την οποία

$$(14.02) \quad \frac{1}{2}q^2 + i = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + i = \frac{1}{2}\hat{q}^2,$$

Όπου το  $\hat{q}$  είναι σταθερό μήκος ενός εξορθολογισμού. Η σχέση (14.02) είναι ο Νόμος του

Bernoulli για την σταθερή ροή. Η σταθερή του Bernoulli  $\frac{1}{2}\hat{q}^2$  μπορεί, φυσικά, να έχει διαφορετικές τιμές κατά μήκος διαφορετικών εξορθολογισμών. Το ίδιο ισχύει και για την εντροπία  $S$ , που είναι επίσης σταθερή κατά μήκος κάθε εξορθολογισμού, από την (14.01). Οι ρυθμοί μεταβολής της σταθερής και της εντροπίας του Bernoulli σε όλους τους εξορθολογισμούς συνδέονται με την στροβιλότητα της ροής. Για την εξίσωση (12.03) για την σταθερή ροή μπορεί με την (14.02) να γραφτεί στη μορφή

$$(14.03) \quad \text{grad } \frac{1}{2}\hat{q}^2 - T \text{ grad } S = \vec{q} \times \text{curl } \vec{q}.$$

Ένα γρήγορο συμπέρασμα που μπορεί να γραφτεί από αυτήν την εξίσωση είναι ότι σε περίπτωση σταθερής ροής η οποία είναι αστρόβιλη, π.χ.,  $\text{curl } \vec{q} = \mathbf{0}$ , και ισεντροπική, π.χ.

grand  $S = 0$ , η σταθερή  $\frac{1}{2}\hat{q}^2$  του Bernoulli είναι η ίδια σε κάθε εξορθολογισμό σε μια συνδεδεμένη περιοχή. Αυτή είναι η δυνατή μορφή του νόμου του Bernoulli.

Είναι αξιοσημείωτο ότι μια διαφορετική μορφή του νόμου του Bernoulli ισχύει και για αστρόβιλη ροή, ακόμα και αν δεν είναι σταθερή. Χρησιμοποιώντας τις έννοιες του δυναμικού ταχύτητας  $\varphi$  και η δυναμική  $\Omega$  των  $T \text{ grad } S$ , που εισήχθησαν στο τέλος του τμήματος 13, ο νόμος του Bernoulli για την αστρόβιλη ροή εκφράζεται από την εξίσωση

$$(14.04) \quad \varphi_i + \left(\frac{1}{2}q^2 + i\right) - \Omega = \frac{1}{2}\hat{q}^2,$$

στην οποία η ποσότητα  $\hat{q}$ , που μπορεί να εξαρτηθεί από τον χρόνο, είναι η ίδια σε όλο το υγρό. Αυτή η σχέση προκύπτει αμέσως από την μορφή (12.03) από τις εξισώσεις της κίνησης από την (13.07) και (13.08). Στην σημαντική περίπτωση της ισεντροπικής ροής, φυσικά, το  $\Omega$  πέφτει έξω.

Για σταθερή, αστρόβιλη και ισεντροπική ροή, η σχέση (14.04) απλοποιείται στην δυνατή μορφή του νόμου του Bernoulli.

Τυχαία, μια ακόμη διαφορετική παραλλαγή του νόμου του Bernoulli θα παίξει θεμελιώδη ρόλο στην θεωρία των ασυνεχών κραδασμών: βλέπε κεφάλαιο III, τμήμα 55.

Ο νόμος του Bernoulli για σταθερή ροή πολυτροπικών αερίων θεωρείται από την (9.06) και (14.02) η ιδιαίτερα απλή μορφή

$$(14.05) \quad q^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c^2 = \hat{q}^2.$$

εισάγοντας αντί του  $\gamma$  τη σταθερή

$$(14.06) \quad \mu^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

Και μια ταχύτητα  $C_*$  με τις διαστάσεις της ταχύτητας.

$$(14.07) \quad c_* = \mu\hat{q},$$

μπορούμε να γράψουμε τον νόμο του Bernoulli (14.05) στην μορφή

$$(14.08) \quad \mu^2 q^2 + (1 - \mu^2)c^2 = c_*^2.$$

Η ποσότητα  $C_*$ , που παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία της σταθερής ροής των πολυτροπικών αερίων, ονομάζεται οριακή ταχύτητα: η σημασία της θα συζητηθεί στο επόμενο τμήμα.

### **15. Περιορισμένη ταχύτητα και οριακή ταχύτητα.**

Σε αυτό το τμήμα θα εξετάσουμε σταθερή ροή σε ένα αέριο. Οι σχέσεις (9.03) και (9.04) τότε κρατάνε μαζί κάθε εξορθολογισμό: συνεπάγονται ότι η συγκεκριμένη ενθαλπία  $i$  είναι πάντα θετική και μειώνεται σε μηδέν αν η πυκνότητα μειώνεται κατά μήκος ενός εξορθολογισμού.

Τότε είναι φανερό από το νόμο του Bernoulli (14.02) με τη μορφή

$$(15.01) \quad q^2 + 2i(\tau, S) = \hat{q}^2$$

(το οποίο κρατάει μαζί κάθε εξορθολογισμό), ότι η ταχύτητα  $q$  δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή  $\hat{q}$  και προσεγγίζει αυτή την τιμή αν το  $p$  προσεγγίζει το μηδέν.

Τότε

$$(15.02) \quad q \leq \hat{q};$$

και η ισότητα ισχύει μόνο στην οριακή περίπτωση της φυγής πυκνότητας,  $p = 0$ . Η ποσότητα  $\hat{q}$  επομένως μπορεί να καλείται ως όριο ταχύτητας. Ομοίως, (15.01) συνεπάγεται

$$(15.03) \quad i \leq \frac{1}{2}\hat{q}^2;$$

και η ισότητα ισχύει μόνο όπου το αέριο είναι στάσιμο,  $q = 0$ .

Η σημασία της έννοιας μιας οριακής ταχύτητας, εισάγεται για πολυτροπικά αέρια μέσω της σχέσης (14.07), αναγνωρίζεται όταν το ένα γράφεται στην εξίσωση του Bernoulli (14.08) σε μορφή



$$q^2 - c_*^2 = (1 - \mu^2)(q^2 - c^2).$$

είναι φανερό ότι

$$(15.04) \quad \begin{aligned} q > c_* & \text{ according as } q > c \text{ and vice versa,} \\ q < c_* & \text{ according as } q < c \text{ and vice versa.} \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια: ένας υπερηχητικός και υποηχητικός χαρακτήρας μιας ροής, βλέπε τμήμα 10, μπορεί να επιβεβαιωθεί με σύγκριση μιας ροής ταχύτητας  $q$  με την οριακή ταχύτητα  $C_*$ , η οποία παραμένει σταθερή σε όλο τον εξορθολογισμό, ενώ η ταχύτητα ήχου  $c$  γενικά ποικίλει.

Αν σε κάποιο σημείο ενός εξορθολογισμού η ταχύτητα ροής  $q$  και η ταχύτητα ήχου  $c$  συμφωνούν τότε και οι δύο προφανώς συμφωνούν με την οριακή ταχύτητα  $c_*$ , ένα γεγονός το οποίο μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να χαρακτηρίσει την οριακή ταχύτητα.

Η έννοια της οριακής ταχύτητας δεν περιορίζεται σε πολυτροπικά αέρια. Δηλώνουμε ότι για δεδομένες τιμές των  $S$  και  $\hat{q}$  υπάρχει μόνο μια τιμή  $\tau_*$  του  $\tau$  έτσι ώστε στην σχέση (15.01) να συνεπάγεται  $q = c$  για  $\tau = \tau_*$ . Η τιμή

$$(15.05) \quad c_* = c(\tau_*, S) = \sqrt{\hat{q}^2 - 2i(\tau_*, S)}$$

είναι τότε η οριακή ταχύτητα. Επιπλέον, ο ισχυρισμός (15.04) εξακολουθεί να ισχύει για αυτή τη γενικευμένη έννοια της οριακής ταχύτητας. Σαφώς το  $c_*$  εξαρτάται από τα  $\hat{q}$  και  $S$ .

Για να αποδείξουμε αυτές τις καταστάσεις αρκεί να δείξουμε τη διαφορά  $C^2 - q^2$  αυξάνεται μονότονα από την τιμή  $-\hat{q}^2$  σε κάποια θετική τιμή όταν το  $\tau$  μειώνεται από το άπειρο σε μια συγκεκριμένη τιμή στην οποία το  $q = 0$ . Από την (15.05) έχουμε

$$(15.06) \quad c^2 - q^2 = c^2 + 2i - \hat{q}^2;$$

από την (2.05) και την (2.02), έχουμε  $c^2 = p_\rho = -\tau^2 p_\tau = \tau^2 e_{\tau\tau}$  :ως εκ τούτου, από την (9.01),

$$(15.07) \quad i + \frac{1}{2}c^2 = e - \tau e_\tau + \frac{1}{2}\tau^2 e_{\tau\tau}.$$

Με διαφοροποίηση σε σχέση με το  $\tau$  παίρνουμε

$$(15.08) \quad (i + \frac{1}{2}c^2)_\tau = \frac{1}{2}\tau^2 e_{\tau\tau\tau} = -\frac{1}{2}\tau^2 p_{\tau\tau}.$$

Από την ώρα που η  $p_{\tau\tau}$  είναι θετική, σύμφωνα με την βασική υπόθεση (2.06), καταλήγουμε από την (15.08) και την (15.06) ότι  $c^2 - q^2$  αυξάνονται μονότονα με την μείωση του  $\tau$ . Από την ώρα που η ποσότητα είναι αρνητική όταν το  $\tau = \infty$  και επομένως  $C=0$ , και θετική όταν το  $2i(\tau, S) = \hat{q}^2$  και επομένως  $q=0$ , συνεπάγεται ότι υπάρχει μόνο μια τιμή του  $\tau$  για το οποίο  $C=q$ .

Σε έναν εξορθολογισμό στον οποίο η εξίσωση του Bernoulli (15.01) ισχύει, τα σημεία (αν υπάρχουν) στα οποία η  $q$  ισούται με το  $c_*$  διαιρούν τον εξορθολογισμό σε διαστήματα υποηχητικής και υπερηχητικής ροής. Φυσικά, μπορεί να συμβεί ότι  $q < C_*$  και  $q > C_*$  μαζί με όλο τον εξορθολογισμό στην οποία περίπτωση η ροή είναι αντίστοιχα είτε υποηχητική είτε υπερηχητική μαζί με όλο τον εξορθολογισμό.

Είναι αξιοσημείωτο ότι σε αυτή τη περίπτωση ενός πολυτροπικού αερίου η οριακή ταχύτητα  $c_* = \mu\hat{q}$ , βλέπε (14.07), είναι ανεξάρτητη του  $S$ . Αυτό, στην πραγματικότητα, ισχύει για κάθε ιδανικό αέριο. Αν ένα αέριο είναι ιδανικό, το  $c$  είναι μια λειτουργία της θερμοκρασίας, βλέπε (4.08) και το  $i = e + RT$  είναι κατά την (4.09), μια αυξανόμενη λειτουργία της θερμοκρασίας. Παρ' όλα αυτά, το  $c$  είναι μια λειτουργία του  $i$ , και το  $c_*$  είναι μια τιμή του  $c$  που πληροί την εξίσωση

$$c^2 - q^2 = c^2(i) + 2i - \hat{q}^2 = 0,$$

έτσι ώστε το  $c^*$  καθορίζεται από το  $\hat{q}$  μόνο του.

### **B. Διαφορικές Εξισώσεις Για Συγκεκριμένους Τύπους Ροής.**

Οι γενικές διαφορικές εξισώσεις για την ροή σε τρισδιάστατο χώρο, που παρουσιάζονται στο τμήμα 7, παρουσιάζουν μαθηματικές δυσκολίες πέρα από την παρούσα δύναμη της ανάλυσης. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις μεγάλου ενδιαφέροντος οι απλοποιήσεις αυξάνονται, ιδίως, όταν ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών μειώνεται στα δύο. Έτσι, είναι και η περίπτωση για την μη σταθερή μονοδιάστατη ροή, για τη σταθερή ροή σε δύο διαστάσεις, για σταθερή ροή με κυλινδρική συμμετρία, και για μη σταθερή ροή με σφαιρική συμμετρία.

#### **16. Σταθερές ροές.**

Το σταθερό επίπεδο ή η δύο-διαστάσεων ροή περιγράφεται από την άποψη δύο συνιστώσες ταχύτητας  $u$  και  $v$  ως λειτουργίες των δύο συντεταγμένων  $x$  και  $y$  με την απαίτηση ότι η συνιστώσα  $\omega$  εξαφανίζεται και ότι όλες οι ποσότητες που χαρακτηρίζουν την ροή είναι ανεξάρτητες από το  $z$  και το  $t$ . Η πυκνότητα και η πίεση μπορούν τότε να θεωρηθούν λειτουργίες της ροής της ταχύτητας

$$(16.01) \quad q = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Κατά μήκος κάθε εξορθολογισμού μέσω του νόμου του Bernoulli

$$(16.02) \quad q^2 + 2i = \hat{q}^2,$$

βλέπε (14.02) και την αδιαβατική εξίσωση

$$(16.03) \quad p = f(\rho, S),$$

βλέπε (2.03), η οποία ισχύει κατά μήκος κάθε εξορθολογισμού με σταθερό όριο ταχύτητας  $\hat{q}$  και την εντροπία  $S$ , βλέπε τμήματα 14 και 10. Η ταχύτητα ήχου  $c$  εισέρχεται μέσω της σχέσης

$$(16.04) \quad u du + v dv = -c^2 d\rho/\rho,$$

η οποία ισχύει κατά μήκος κάθε εξορθολογισμού, όπως ακολουθείται από τις (16.02), (16.03) και την

$$(16.05) \quad di = c^2 d\rho/\rho,$$

βλέπε (9.03). Αν οι τιμές του  $\hat{q}$  και του  $S$  για κάθε εξορθολογισμό ήταν γνωστές, δύο από τις τέσσερις ποσότητες  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$ ,  $p$  από τις απόψεις των άλλων και παραμένουν μόνο δύο από τις αρχικές διαφορικές εξισώσεις (7.02-05).

Αν η ροή είναι αστρόβιλη, η εξίσωση

$$(16.06) \quad v_x - u_y = 0$$

ισχύει, βλέπε (13.06), και αν είναι, ισηντροπική, το  $S =$  σταθερή, το όριο ταχύτητας  $\hat{q}$  είναι σταθερό πάνω από το πεδίο της ροής, βλέπε το νόμο του Bernoulli, τμήμα 14. Η σχέση (16.04) που ισχύει στη συνέχεια σε ολόκληρο το πεδίο της ροής τώρα χρησιμεύει στην εξάλειψη της πυκνότητας  $\rho$  από τη συνεχή εξίσωση

$$(16.07) \quad (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0,$$

βλέπε (7.08). Το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση

$$(16.08) \quad (c^2 - u^2)u_x - uv(u_y + v_x) + (c^2 - v^2)v_y = 0,$$

στην οποία το  $c^2$  θεωρείται μια λειτουργία της ροής της ταχύτητας  $q$ , και επομένως των  $u$  και  $v$ , από το νόμο του Bernoulli (16.02) και την αδιαβατική εξίσωση (16.03). Σε περίπτωση πολυτροπικού αερίου αυτή η λειτουργία είναι, βλέπε (14.05) και (14.07),

$$(16.09) \quad c^2 = \frac{\gamma - 1}{2} (\hat{q}^2 - q^2) = (1 - \mu^2)^{-1} (c_*^2 - \mu^2 q^2).$$

Η εξίσωση (16.08) και η εξίσωση (16.06) (που εκφράζει τον αστρόβιλο χαρακτήρα της ροής) σχηματίζουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο λειτουργίες  $u$ ,  $v$  και δύο τιμές  $x$ ,  $y$ .

Η εξίσωση (16.06) μπορεί να ικανοποιηθεί με την εισαγωγή ενός δυναμικού ταχύτητας  $\varphi(x, y)$  βλέπε (13.07), έτσι ώστε

$$(16.10) \quad \varphi_x = u, \quad \varphi_y = v.$$

Η εξίσωση (16.08) τότε μειώνεται σε μία μόνο διαφορική εξίσωση μιας δεύτερης τάξης

$$(16.11) \quad (c^2 - u^2)\varphi_{xx} - 2uv\varphi_{xy} + (c^2 - v^2)\varphi_{yy} = 0.$$

Τυχαία, μια τρισδιάστατη σταθερή αστρόβιλη ροή μπορεί επίσης να χαρακτηριστεί με τον ίδιο τρόπο από μια διαφορική εξίσωση μιας δεύτερης τάξης για ένα δυναμικό ταχύτητας.

Η εξίσωση (16.06) μπορεί να τηρηθεί με την εισαγωγή μιας συνάρτησης ροής  $\psi(x,y)$  έτσι ώστε

$$(16.12) \quad \psi_x = -\rho v, \quad \psi_y = \rho u.$$

Η εξίσωση (16.06) τότε γίνεται μια εξίσωση δεύτερης τάξης για το  $\psi$ , στο οποίο το  $\rho$  θεωρείται μια συνάρτηση του  $\psi_x^2 + \psi_y^2$ .

Οι γραμμές  $\psi = \text{σταθερή}$  είναι οι εξορθολογισμοί και η διαφορά των τιμών του  $\psi$  σε δύο εξορθολογισμούς είναι η ροή της μάζας δια μέσου ενός κυλίνδρου της μονάδας ύψους προς την  $z$ -κατεύθυνση πάνω από κάθε καμπύλη που συνδέει οποιαδήποτε δυο σημεία A και B σε αυτούς τους δύο εξορθολογισμούς : αυτό είναι φανερό στη σχέση

$$\psi_B - \psi_A = \int_A^B \rho(u x_n + v y_n) ds$$

όπου το  $s$  αναφέρεται στο μήκος του τόξου  $k'$  ( $x_n, y_n$ ) είναι η μονάδα κανονικού διανύσματος στα σημεία καμπύλης.

Η σταθερή ροή με κυλινδρική συμμετρία μπορεί επίσης να περιγραφεί από δύο συνιστώσες της ταχύτητας  $u$  και  $v$  ως λειτουργίες δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$ . Εδώ το  $x$  είναι τετμημένο μαζί με τον άξονα  $k'$  το  $y$  η απόσταση από αυτό : το  $u$  είναι το αξονικό συστατικό, όπου  $u$  είναι η ακτινική διεύθυνση. Έτσι, κάθε συνητώσα ταχύτητας κείται σε ένα επίπεδο με την περιστροφή γύρω από τον άξονα. Απαιτείται επίσης ότι το  $\rho$  και  $\rho$  εξαρτώνται μόνο στο  $x$  και στο  $y$ . Ο νόμος του Bernoulli (16.02), η αδιαβατική εξίσωση (16.06) και αν επίσης, η ροή είναι ισεντροπική, η σχέση (16.04) ισχύει καθ' όλο το πεδίο ροής.

Η μόνη διαφορά από το πεδίο κείται στην συνεχή εξίσωση που τώρα παίρνει τη μορφή

$$(16.13) \quad (y\rho u)_x + (x\rho v)_y = 0,$$

ή μετά την εξάλειψη του  $\rho$  από την (16.04)

$$(16.14) \quad (c^2 - u^2)u_x - uv(u_y + v_x) + (c^2 - v^2)v_y + c^2 v/y = 0.$$

Φυσικά, αυτή η εξίσωση μπορεί να μειωθεί σε μια εξίσωση δεύτερης τάξης για την δυνατότητα λειτουργίας του  $\varphi$  που ορίζεται μέσω της (16.10)

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη λειτουργία ροής, που θεσπίστηκε από τους Stokes, που τώρα ορίζεται από τις σχέσεις

$$(16.15) \quad \psi_x = -y\rho v, \quad \psi_y = x\rho u,$$

έτσι ώστε να ικανοποιήσει την εξίσωση της συνέχειας (16.13). Η επιφάνεια  $\psi = \text{σταθερή}$ , που παράγεται με την περιστροφή ενός εξορθολογισμού, είναι οι ροές επιφάνειας. Η τιμή  $2\pi\varphi(x, y)$  είναι η ροή ανάμεσα σε ένα δακτύλιο που έχει κοπεί από τον κύκλο με ακτίνα  $y$  και τετμημένη  $x$  από την επιφάνεια ροής.

Για σταθερή περιστροφική ροή ενός πολυτροπικού αερίου του οποίου το όριο ταχύτητας  $\hat{q}$  (αλλά γενικά όχι στην εντροπία  $S$ ) είναι σταθερό σε όλο το πεδίο ροής, μια τροποποιημένη συνάρτηση ροής θεσπίστηκε από τον Crocco [22]. Αυτό ορίζεται από εξισώσεις οι οποίες είναι αποτέλεσμα των εξισώσεων (16.12) ή (16.15) όταν ο συντελεστής  $\rho$  αντικαθίσταται σε αυτούς από την ποσότητα  $c^{2\gamma(\gamma-1)}$ , η οποία σύμφωνα με τον νόμο του Bernoulli εξαρτάται μόνο από την  $q$  και  $\hat{q}$  και είναι ανεξάρτητη από την εντροπία.

### 17. Μη σταθερές ροές.

Η μονοδιάστατη ροή συμβαίνει όταν όλες οι ποσότητες χαρακτηρίσουν την εξαρτημένη ροή, επιπλέον του χρόνου  $t$ , μόνο για τον χώρο συντεταγμένων  $x$ , και όταν οι συνιστώσες  $u$  και  $\omega$  της ταχύτητας σε άλλες κατευθύνσεις εξαφανίζονται. Οι εξισώσεις (7.08 – 11) τότε μειώνονται σε

$$(17.01) \quad \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0,$$

$$(17.02) \quad \rho(u_t + uu_x) + p_x = 0,$$

$$(17.03) \quad S_t + uS_x = 0;$$

Η τελευταία εξίσωση εκφράζει την υπόθεση ότι οι αλλαγές στην κατάσταση κάθε σωματιδίου είναι αδιαβατικές και αναστρέψιμες. Η πίεση  $p$  εδώ είναι μια λειτουργία των  $p$  και  $S$ . Χρησιμοποιώντας

$$(17.04) \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2,$$

βλέπε (7.12), η εξίσωση (17.01) μπορεί εύκολα να αντικατασταθεί από

$$(17.05) \quad p_t + up_x + \rho c^2 u_x = 0,$$

έτσι ώστε οι τρεις εξισώσεις (17.02), (17.05), και η (17.03) συνεπάγονται μόνο από τα παράγωγα των  $u$ ,  $p$ , και  $S$ . Για τα πολυτροπικά αέρια, η εξίσωση (17.03) μπορεί να αντικατασταθεί από

$$(17.06) \quad (p\rho^{-\gamma})_t + u(p\rho^{-\gamma})_x = 0,$$

αφού το  $p\rho^{-\gamma}$  είναι τότε μια λειτουργία της εντροπίας. Αν η ροή είναι ισεντροπική το ένα μπορεί να εκφράσει την  $p$  όσον αφορά το  $\rho$  και αντίστροφα. Οι εξισώσεις (17.02) και (17.01) ή (17.05) τότε εκπροσωπούν δύο εξισώσεις για δύο λειτουργίες των  $x$  και  $t$ .

Η σφαιρική ροή συμβαίνει όταν όλες οι ποσότητες εξαρτώνται μόνο από την απόσταση από το ένα σημείο, επιλέχθηκε ως προέλευση το  $O$ , επιπλέον του χρόνου  $t$ , και αν η ταχύτητα κατευθύνεται μακριά από (η προς) αυτό το σημείο. Δηλώνει την απόσταση από την προέλευση εύκολα με το  $x$  και την συνιστώσα ακτινικής ταχύτητας με το  $u$ , οι εξισώσεις (7.08 – 11) μειώνονται σε

$$(17.07) \quad \rho_t + u\rho_x + \rho u_x + 2\rho u/x = 0,$$

$$(17.08) \quad \rho(u_t + uu_x) + p_x = 0,$$

$$(17.09) \quad S_t + uS_x = 0.$$

Σημειώνουμε ότι η μόνη διαφορά από τις εξισώσεις της μονοδιάστατης ροής είναι ο επιπλέον όρος στην συνεχή εξίσωση (17.07). Οι αλλαγές και οι απλοποιήσεις που συζητήθηκαν στην ένωση με την μονοδιάστατη ροή ισχύουν και στην σφαιρική ροή.

Οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και στην κυλινδρική ροή, μια δύο διαστάσεων ροή στην οποία όλες οι ποσότητες εξαρτώνται μόνο στην απόσταση από τον άξονα και η ταχύτητα κατευθύνεται μακριά από (η προς) τον άξονα. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην εξίσωση (17.07) ο συντελεστής 1 συμβαίνει αντί του συντελεστή 2.

### 18.Οι εξισώσεις των κινήσεων Lagrange για μονοδιάστατη και σφαιρική ροή

Σε μία τρισδιάστατη ροή οι εξισώσεις του Lagrange δεν επιβαρύνονται από λειτουργικά καθοριστικούς παράγοντες, και σε αυτήν την ειδική περίπτωση είναι μερικές φορές προτιμητέοι στις εξισώσεις των Euler.

Η άποψη lagrangian απαιτεί από εμάς να συνδέσουμε έναν αριθμό  $\chi$  με κάθε τμήμα του επιπέδου των σωματιδίων κανονικά στον X-άξονα, έτσι ώστε η μεταβαλλόμενη θέση κάθε τμήματος να δίνεται από μια συνάρτηση  $X(h,t)$ . Οι ποσότητες  $\rho$ ,  $s$  θεωρούνται έπειτα λειτουργίες του  $\chi$  και του  $t$ . Αυτός ο αριθμός  $\chi$  θα μπορούσε να επιλεγεί από πολλές απόψεις; στην πραγματικότητα μια αυθαίρετη λειτουργία είναι στη διάθεσή μας.

Συνήθως, το ένα προσδιορίζει το  $\chi$  με την τετμημένη του μορίου σε κάποιο αρχικό χρόνο, π.χ.  $t = 0$ . Αλλά δεν είναι σε όλα τα προβλήματα μια τέτοια αρχική θέση σε έναν κοινό αρχικό χρόνο που δίνεται για όλα τα μόρια.

Μια άλλη μάλλον φυσική επιλογή του  $\chi$ , βασισμένη στο νόμο της συντήρησης της μάζας, προτείνεται. Χωρίς οποιαδήποτε απώλεια γενικότητας μπορούμε να σκεφτούμε τη ροή όπως λαμβάνει χώρα σε έναν σωλήνα του διαγώνιου τμήματος μονάδων κατά μήκος του X-άξονα. Τώρα συνδέστε την αξία  $h=0$  με οποιοδήποτε καθορισμένο "μηδενικό" τμήμα (που κινείται φυσικά, με το μέσο), και έπειτα για οποιοδήποτε άλλο τμήμα αφήστε το  $\chi$  να είναι ίσο στο μέγεθος με τη μάζα του μέσου στο σωλήνα του διαγώνιου τμήματος μονάδων μεταξύ εκείνου του τμήματος και του μηδενικού τμήματος, το σημείο του  $h$  που λαμβάνεται θετικά ή αρνητικά ανάλογα με το μηδενικό τμήμα είναι προς τα αριστερά ή δεξιά του άλλου τμήματος στην ερώτηση. Είναι φανερό ότι το όπως αυτό ορίζεται είναι διαφορετικό για κάθε τμήμα.

Αναλυτικά η ποσότητα  $\chi$  ικανοποιεί τη σχέση

$$(18.01) \quad h = \int_{x(0,t)}^{x(h,t)} \rho \, dx.$$

Εδώ το  $\rho$  είναι η πυκνότητα στη θέση  $X$  στο χρόνο  $t$ , με άλλα λόγια, η πυκνότητα θεωρείται εδώ από την Eulerian άποψη ως λειτουργία των ανεξάρτητων μεταβλητών  $X$  και  $t$ . Διαφοροποίηση (18.01) όσον αφορά το  $h$  οδηγεί στη σχέση

$$(18.02.1) \quad \rho(h, t) x_h(h, t) = 1$$

Η

$$(18.02.2) \quad x_h(h, t) = \tau(h, t),$$

στην οποία το  $\rho(\chi, \tau)$  και το  $\tau(\chi, \tau)$  είναι αντίστοιχα η πυκνότητα και ο συγκεκριμένος όγκος.

Οι εξισώσεις Lagrange της κίνησης (7.02-.05) για μια μονοδιάστατη ροή λαμβάνουν έπειτα τη μορφή:

$$(18.03) \quad (\rho x_h)_t = 0 \quad (\text{συντήρηση της μάζας})$$

$$(18.04) \quad \begin{aligned} \rho x_{tt} &= -p_x \\ &= -p_h/x_h \end{aligned} \quad (\text{συντήρηση της ορμής})$$

$$(18.05) \quad S_t = 0 \quad (\text{οι αλλαγές της κατάστασης είναι αδιαβατικές})$$

$$(18.06) \quad p = f(\rho, S) = g(\tau, S)$$

(θερμιδική εξίσωση της κατάστασης)

(Έχουμε εγκαταλείψει εδώ το σημείο  $(\cdot)$  υπέρ του υπογεγραμμένου  $\tau$ , ο οποίος δεν θα οδηγήσει στη σύγχυση μεταξύ των Eulerian και Lagrangian εννοιών.)

Οι εξισώσεις lagrange (18.03-.06) μπορούν να απλοποιηθούν αρκετά.

Αρχικά προκύπτει από το(18.02) ότι το (18.03) είναι περιττό και ότι το (18.04) μπορεί να αντικατασταθεί από το

$$(18.07) \quad x_{i i} = -p_h .$$

Σύμφωνα με το (18.05),το  $S$  εξαρτάται μόνο από το  $h$ .Θα συνεπάγεται πλέον πάντα  $S = S(h)$ . Η λειτουργία  $S(h)$  θεωρείται ως δεδομένη μεταξύ των αρχικών όρων του προβλήματος. Με τη βοήθεια του (18,02) και (18,04 - 0,06), μπορούμε να εξαλείψουμε το  $\rho$ ,  $\tau$  και  $p$  και το όλο σύστημα μειώνεται σε μια ενιαία επιμέρους διαφορική εξίσωση της δεύτερης τάξης στο  $x$ :

$$(18.08) \quad x_{i i} = k^2 x_{hh} - g_s S_h ,$$

Στο οποίο έχουμε εισαγάγει την ποσότητα

$$(18.09) \quad k = \rho c = \sqrt{-g_\tau(\tau, S)},$$

η ακουστική σύνθετη αντίσταση του μέσου. Στην ερμηνεία της εξίσωσης (18,08) πρέπει φυσικά να αναφερθεί ότι στο  $k^2$  και  $g_s$  δίνονται οι λειτουργίες του  $\tau=xh$  και του  $S(h)$ .

Εάν η ταχύτητα  $u=x1$  και ο συγκεκριμένος όγκος  $t=xh$  λαμβάνονται ως εξαρτώμενες μεταβλητές η ενιαία δεύτερη εξίσωση διαταγής (18.08) αντικαθίσταται από το πρώτο σύστημα διαταγής για το  $u$  και το  $t$

$$(18.10) \quad \begin{aligned} u_h &= \tau_t \\ u_t &= k^2 \tau_h - g_s S_h(h), \end{aligned}$$

Στο οποίο  $k^2$  και  $g_s$  είναι λειτουργίες του  $\tau$  και του  $S(h)$ .

Εάν η ροή είναι ισεντροπική , δηλ. εάν  $S(h)=S_0$  είναι μια σταθερά, οι εξισώσεις (18,08 και 18.10) απλοποιούνται σε

$$(18.11) \quad x_{t i} = k^2 x_{hh}$$

$$(18.12) \quad \begin{aligned} u_h &= \tau_t \\ u_t &= k^2 \tau_h . \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι εάν  $k^2=-\rho t$  είναι σταθερό, δεδομένου ότι είναι για ένα στερεό που υπακούει το νόμο Hooke ,οι εξισώσεις (18.11) και (18.12) είναι γραμμικές.

Οι διατυπώσεις αυτού του τμήματος μπορούν εύκολα να επεκταθούν στη σφαιρική και κυλινδρική ροή, δείτε την παράγραφο 17. Αφήστε 4πh να δείξει τη μάζα του μέσου μέσα σε μια σφαίρα της ακτίνας Y (h,t) για το κέντρο μιας σφαιρικής ροής. Κατόπιν έχουμε

$$y_{tt} = y^2[k^2(y^2 y_h)_h - g_s S_h],$$

Ανάλογα με το (18.08). Για μια επίπεδη ροή με την κυλινδρική συμμετρία έχουμε στην αντίστοιχη σημείωση

$$y_{tt} = y^2[k^2(y^2 y_h)_h - g_s S_h],$$

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Κίνηση κυμάτων στο ρηχό ύδωρ

#### 19.Θεωρία Ρηχού Ύδατος

Ένα ανάλογο στη μη γραμμική κίνηση κυμάτων των αερίων που ανέκυσαν κατά την κίνηση του νερού, ή οποιοδήποτε άλλου ασυμπίεστου ρευστού, με μια ελεύθερη ανώτερη επιφάνεια εάν το ύψος της ανώτερης επιφάνειας επάνω από την κατώτατη επιφάνεια είναι αρκετά μικρό. Γίνεται λόγος τότε για " το ρηχό ύδωρ ". Ακριβέστερα ο όρος είναι ότι το ύψος της ανώτερης επιφάνειας επάνω από την κατώτατη επιφάνεια είναι μικρό έναντι κάποιου χαρακτηριστικού μήκους της κίνησης όπως η μέγιστη ακτίνα κυρτότητας στην ανώτερη επιφάνεια. Οι διαφορικές εξισώσεις που κυβερνούν την κίνηση τέτοιου ρηχού ύδατος μπορούν στην καλή προσέγγιση να αντικατασταθούν από τις εξισώσεις που είναι απολύτως ισοδύναμες με εκείνους για ένα πολυτροπικό αέριο με τον εκθέτη  $\gamma=2$ . Στην πραγματικότητα όλα τα φαινόμενα της κίνησης κυμάτων που θα συζητήσουμε στα επόμενα κεφάλαια έχουν το ακριβές ανάλογό τους στην κίνηση κυμάτων του ρηχού ύδατος.

Τοποθετούμε ένα σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) στο χώρο γεμάτο από το νερό κατά τέτοιο τρόπο ώστε η κατώτατη επιφάνεια είναι το επίπεδο  $z=0$  και η ανώτερη επιφάνεια δίνεται από μια λειτουργία  $z=Z(x,y,t)$ . Δείχνουμε τα συστατικά της ταχύτητας στο x-,y-, και τις z -κατευθύνσεις από το u ,v ,w αντίστοιχα, το u, v ,w είναι λειτουργίες του x,y,z,t. Στο ύδωρ ο όρος συνοχής

$$(19.01) \quad u_x + v_y + w_z = 0$$

Και ο νόμος του Newton

$$(19.02) \quad \rho \frac{du}{dt} = -p_x, \quad \rho \frac{dv}{dt} = -p_y, \quad \rho \frac{dw}{dt} = -p_z - g\rho$$

παραμένει. Εδώ το  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, το  $\rho$  η πυκνότητα του ύδατος και το  $p$  η υπερβολική πίεση επάνω από την ατμοσφαιρική πίεση έτσι ώστε

$$(19.03) \quad p = 0 \text{ at the top surface, } z = Z.$$

Οι όροι ορίου για την ταχύτητα είναι

$$(19.04) \quad w = 0 \text{ at the bottom, } z = 0,$$

Και

$$(19.05) \quad Z_t + uZ_x + vZ_y = w \text{ at the top, } z = Z.$$

Είναι τώρα δυνατό να αντικατασταθούν αυτές οι εξισώσεις, στην καλή προσέγγιση, από τις εξισώσεις που περιλαμβάνουν μόνο την κορυφαία επιφάνεια της ανύψωσης  $z$  και των ταχυτήτων  $u$  και  $v$  στην κορυφαία επιφάνεια. Προκειμένου να το κάνουμε έτσι ενσωματώνουμε αρχικά την εξίσωση συνοχής (19,01) από  $z=0$  σε  $z=Z$ , λαμβάνοντας

$$W \Big|_{z=0}^{z=Z} + \int_0^Z (u_x + v_y) dz = 0$$

από τα οποία, από τους όρους ορίου (19.04) και (19.05),

$$(19.06) \quad Z_t + \left( \int_0^Z u dz \right)_x + \left( \int_0^Z v dz \right)_y = 0.$$

Έπειτα εισάγουμε τη βασική υπόθεση ότι η παραλλαγή της πίεσης κατά μήκος μιας κάθετης στήλης είναι η ίδια όπως στην υδροστατική

$$(19.07) \quad p = g\rho(Z - z).$$

Από (19.02) και (19.03) αυτή η υπόθεση είναι ισοδύναμη με τον όρο ότι η κάθετη επιτάχυνση του ύδατος,  $dw/dt$ , εξαφανίζεται. Η υπόθεση (19.07) δεν είναι αυθαίρετη, μπορεί να αποδειχθεί σωστή στην πρώτη γραμμή ως συνέπεια της βασικής υπόθεσης της ρηχότητας από μια συστηματική επέκταση των εξισώσεων στις δυνάμεις του ύψους, βλέπε Stoker(27,Παράρτημα)

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση (19.07) υπονοεί ότι η κλίση πίεσης ( $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ) είναι ανεξάρτητη από το  $z$ , από το (19.02) το ίδιο πράγμα ισχύει επίσης για την επιτάχυνση  $\left( \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt} \right)$ . Κατά συνέπεια, η ταχύτητα ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) είναι επίσης ανεξάρτητη από το  $z$  εάν ήταν ποτέ αυτή η περίπτωση κάποια χρονική στιγμή. Εισάγουμε τώρα την υπόθεση, ότι σε κάποιο χρόνο η ταχύτητα ήταν σταθερή πέρα από κάθε κάθετη στήλη. Αυτή η υπόθεση δεν φαίνεται να είναι ένας σοβαρός περιορισμός ,παραδείγματος χάριν, θα ικανοποιούταν εάν το ύδωρ ήταν σε ανάπαυση σε κάποιο χρόνο. Κατά συνέπεια, το  $u$  και  $v$  εξαρτώνται από το  $x$ ,  $y$  και το  $t$  μόνο. Θα αγνοήσουμε την κάθετη ταχύτητα  $w$  από τώρα και στο εξής.



οι εξισώσεις (19,06) και (19,02) θα αναλάβουν τώρα την απλή μορφή

$$(19.08) \quad Z_t + (Zu)_x + (Zv)_y = 0$$

$$(19.09) \quad \rho(u_t + uu_x + vu_y) = -g\rho Z_x,$$

$$\rho(v_t + w_x + vv_y) = -g\rho Z_y.$$

Για να δείξουμε ότι αυτές οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες με εκείνες για τα πολυτροπικά αέρια με  $\gamma=2$  εισάγουμε τη 'πυκνότητα'

$$(19.10) \quad \bar{p} = \rho Z,$$

Η όποια είναι προφανώς η μάζα ανά περιοχή μονάδων, και η 'πίεση'

$$(19.11) \quad \bar{p} = \frac{1}{2}g\rho Z^2 = \int_0^Z p \, dz.$$

Οι εξισώσεις (19.08-.09) μπορούν έπειτα να γραφτούν υπό μορφή εξισώσεων για τα αέρια, βλέπε (7.08), (7.09),

$$(19.12) \quad \bar{p}_t + (\bar{p}u)_x + (\bar{p}v)_y = 0,$$

$$\bar{p}(u_t + uu_x + vu_y) = -\bar{p}_x,$$

(19.13)

$$\bar{p}(v_t + w_x + vv_y) = -\bar{p}_y.$$

Η σχέση

$$(19.14) \quad \bar{p} = \frac{g}{2\rho} \bar{p}^2$$

μεταξύ 'της πίεσης' και 'της πυκνότητας', που προκύπτει από (19.10) και (19.11), αντιστοιχεί προφανώς στη σχέση μεταξύ της πραγματικής πίεσης και της πυκνότητας για ένα πολυτροπικό αέριο με  $\gamma=2$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

---

**Μαθηματική Θεωρία Των Υπερβολικών Εξισώσεων Ροής Για Τις Λειτουργίες Δύο Μεταβλητών**

Στο προηγούμενο μέρος έχουμε δείξει ότι για πολλές συγκεκριμένες περιπτώσεις οι διαφορικές εξισώσεις ροής μειώνουν στα συστήματα των σχεδόν γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων της πρώτης γραμμής για τις λειτουργίες των δύο από των ανεξάρτητων μεταβλητών. Για τέτοια συστήματα μια αρκετά πλήρης μαθηματική θεωρία μπορεί να αναπτυχθεί υπό τον όρο ότι είναι του υπερβολικού τύπου, οπότε σ' αυτή την περίπτωση η έννοια των χαρακτηριστικών διαδραματίζει τον κυρίαρχο ρόλο. Αυτή η θεωρία γίνεται ιδιαίτερα απλή όταν ο αριθμός λειτουργιών και εξισώσεων είναι δύο.

Για να προετοιμάσουμε μια βαθύτερη κατανόηση της επεξεργασίας των συγκεκριμένων προβλημάτων ροής στα ακόλουθα κεφάλαια παρεμβάλλουμε εδώ μια λεπτομερή θεωρία των συστημάτων δύο διαφορικών εξισώσεων. Οι συμπληρωματικές παρατηρήσεις θα προστεθούν για τα συστήματα περισσότερων από δύο διαφορικών εξισώσεων, όπως εμφανίζονται παραδείγματος χάριν στη μη ισεντροπική ροή.

## **20. εξισώσεις ροής που περιλαμβάνουν δύο λειτουργίες δύο μεταβλητών**

Για την κατάλληλη αναφορά απαριθμούμε τους συγκεκριμένους τύπους ροών που κυβερνώνται από ένα σύστημα δύο εξισώσεων για δύο λειτουργίες δύο μεταβλητών.

A) Μονοδιάστατη ισεντροπική ροή

$$(20.01) \quad \begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ \rho(u_t + uu_x) + c^2\rho_x &= 0 \end{aligned}$$

Βλέπε (17.01),(17.02),(17.04)

B) Σφαιρική ισεντροπική ροή

$$(20.02) \quad \begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x + 2\rho u/x &= 0, \\ \rho(u_t + uu_x) + c^2\rho_x &= 0 \end{aligned}$$

Βλέπε (17.04),(17.07),(17.08).

Γ) Μονοδιάστατη ισεντροπική ροή στην lagrangian αντιπροσώπευση

$$(20.03) \quad \begin{aligned} \tau_t &= u_h \\ u_t &= k^2\tau_h, \end{aligned}$$

Βλέπε (18.02). Εδώ το k είναι μια δεδομένη λειτουργία του τ.

Δ) Μονοδιάστατη μη-ισεντροπική ροή στην lagrangian αντιπροσώπευση

$$(20.04) \quad \begin{aligned} \tau_t &= u_h \\ u_t &= k^2\tau_h - g_S S_h, \end{aligned}$$

Βλέπε (18.10). Εδώ η διανομή της εντροπίας  $S=S(h)$  πέρα από τα μόρια υποτίθεται ότι δόθηκε, το  $k^2$  και  $g_S$  είναι δοσμένες λειτουργίες του τ και του S.

E) Σταθερή δισδιάστατη μη περιστροφική ισεντροπική ροή

$$(20.05) \quad \begin{aligned} v_x - u_y &= 0 \\ (c^2 - u^2)u_x - uv(u_y + v_x) + (c^2 - v^2)v_y &= 0, \end{aligned}$$

Βλέπε (16.06) και (16.08), εδώ το  $c^2$  είναι μια δεδομένη λειτουργία του  $u^2 + v^2$ .

Φ) Σταθερή μη περιστροφική ισεντροπική ροή στις διαστάσεις δέντρων με την κυλινδρική συμμετρία

$$(20.06) \quad v_x - u_y = 0$$

$$(c^2 - u^2)u_x - uv(u_y + v_x) + (c^2 - v^2)v_y + c^2v/y = 0,$$

Βλέπε (16.06) και (16.14), πάλι το  $c^2$  είναι μια δεδομένη λειτουργία του  $u^2 + v^2$ .

## 21. Διαφορικές εξισώσεις του δεύτερου τύπου σκοπού

Στη γενική θεωρία δείχνουμε από τα  $u, v$  τις εξαρτώμενες και από τα  $x, y$ , τις ανεξάρτητες μεταβλητές, για να προσδιοριστεί αργότερα με τις μεταβλητές στις συγκεκριμένες διαφορικές εξισώσεις της δυναμικής αερίου που έχουμε απαριθμήσει στο προηγούμενο τμήμα. Κατόπιν η γενική μορφή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων είναι

$$(21.01) \quad \begin{aligned} L_1 &= A_1u_x + B_1u_y + C_1v_x + D_1v_y + E_1 = 0 \\ L_2 &= A_2u_x + B_2u_y + C_2v_x + D_2v_y + E_2 = 0 \end{aligned}$$

Στο οποίο  $A_1, A_2, \dots, E_2$  είναι γνωστές λειτουργίες του  $x, y, u, v$ . Μια για πάντα κάνουμε την υπόθεση ότι όλες οι λειτουργίες που εμφανίζονται θεωρητικά αυτού του κεφαλαίου είναι συνεχείς, και κατέχουν τόσα συνεχή παράγωγα όσα και μπορούν να απαιτηθούν. Χωρίς περιορισμό δεν το υποθέτουμε αυτό πουθενά  $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2=D_1:D_2$ . Εάν  $E_1=E_2=0$  το σύστημα είναι ομοιογενές. Εάν οι συντελεστές  $A, B, C, D, E$  είναι λειτουργίες του  $x$  και του  $y$  μόνο, οι εξισώσεις είναι γραμμικές και συνεπώς πολύ ευκολότερες να χειριστούν.

Σε μια άλλη σημαντική περίπτωση το σύστημα μπορεί να μειωθεί σε μια γραμμική: εάν το σύστημα είναι ομοιογενές,  $E_1=E_2=0$ , και οι συντελεστές  $A_1, \dots, D_2$  είναι λειτουργίες του  $u, v$  μόνο, οι εξισώσεις καλούνται αναγώγιμες. Σε αυτήν την περίπτωση για οποιαδήποτε περιοχή όπου ο Jacobian

$$(21.02) \quad j = u_xv_y - u_yv_x$$

δεν είναι μηδέν, το σύστημα (21.01) μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ισοδύναμο γραμμικό σύστημα με την ανταλλαγή των ρόλων των εξαρτώμενων και ανεξάρτητων μεταβλητών. Εάν το  $j \neq 0$  για μια λύση  $u(x, y), v(x, y)$  του (21.01), μπορούμε να θεωρήσουμε το  $x$  και το  $y$  ως λειτουργίες του  $v$  και του  $u$ . Από το

$$u_x = jy_v, \quad u_y = -jx_v,$$

$$v_x = -jy_u, \quad v_y = jx_u,$$

βλέπουμε τότε ότι το  $x(u, v)$  και το  $y(u, v)$  ικανοποιούν τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

$$(21.03) \quad \begin{aligned} A_1y_v - B_1x_v - C_1y_u + D_1x_u &= 0 \\ A_2y_v - B_2x_v - C_2y_u + D_2x_u &= 0. \end{aligned}$$

Αντίστροφα κάθε λύση εξισώσεων  $x, y$  (21.03) οδηγεί σε μια λύση του (21.01) εάν το Jacobian

$$(21.04) \quad J = x_u y_v - x_v y_u$$

δεν εξαφανίζεται. Ο περιγραφόμενος μετασχηματισμός του  $(x, y)$ - επιπέδου μέσα στο  $(u, v)$ - επίπεδο συχνά καλείται μετατροπή hodograph.

Οι αναγώγιμες εξισώσεις εμφανίζονται στη μονοδιάστατη ροή, βλέπε(20.01) και (20.03), και σε δύο - διαστατική σταθερή ροή, βλέπε (20.05).

Δεδομένου ότι η δυνατότητα αυτής της μείωσης εξαρτάται ουσιαστικά από την υπόθεση  $j=0$ , λύσεις για τις οποίες  $j=0$  δεν μπορούν να ληφθούν από το μετασχηματισμό hodograph. Ακόμα, όπως θα συζητήσουμε και στην παράγραφο 29, αυτές οι λύσεις, αποκαλούμενες εδώ 'απλά κύματα', είναι τα πιο σημαντικά εργαλεία για τις λύσεις των προβλημάτων ροής. Τα απλά κύματα και οι γενικεύσεις τους προφανώς δεν έχουν υπογραμμιστεί αρκετά στις μαθηματικές μελέτες των υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων.

## 22. Χαρακτηριστικές καμπύλες και χαρακτηριστικές εξισώσεις

Το κλειδί για τη γενική θεωρία των συστημάτων των σχεδόν γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής (21.01) είναι να διακρίνει μεταξύ των ελλειπτικών και υπερβολικών εξισώσεων, και για τα τελευταία, που θα είναι ο κύριος στόχος μας, να εισαγάγει την έννοια των χαρακτηριστικών. αυτές οι έννοιες προκύπτουν φυσικά από τις ακόλουθες εκτιμήσεις.

Ένας γραμμικός συνδυασμός  $a f_x + b f_y$  των δύο παραγώγων μιας λειτουργίας  $f(x, y)$  σημαίνει την παραγωγή του  $f$  σε μια κατεύθυνση που δίνεται από  $dx:dy=a:b$ . Εάν το  $x(\sigma), y(\sigma)$  αντιπροσωπεύει μια καμπύλη με το  $x\sigma:y\sigma=a:b$ , τότε  $a f_x + b f_y$  είναι ένα παράγωγο του  $f$  κατά μήκος αυτής της καμπύλης. Εξετάζουμε τις συγκεκριμένες λειτουργίες  $u(x,y), v(x,y)$ . Κατόπιν οι συντελεστές των διαφορικών εξισώσεων (21.01) γίνονται λειτουργίες  $x, y$  μόνο. Σε κάθε μια από τις δύο διαφορικές εξισώσεις οι λειτουργίες  $u$  και  $v$ , γενικά, διαφοροποιούνται σε δύο διαφορετικές κατευθύνσεις. Μιλάμε τώρα για έναν γραμμικό συνδυασμό

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$$

έτσι ώστε στη διαφορική έκφραση  $L$  τα παράγωγα του  $u$  και εκείνα του  $v$  συνδυάζουν στα παράγωγα στην ίδια κατεύθυνση. Μια τέτοια κατεύθυνση που εξαρτάται από το σημείο  $x, y$ , καθώς επίσης και στις τιμές του  $u, v$  σε αυτό το σημείο, καλείται χαρακτηριστική. Υποθέστε ότι η κατεύθυνση δίνεται από την αναλογία  $x\sigma : y\sigma$  όπως από πάνω. Κατόπιν ο όρος, ότι, στο  $L$ , το  $u$  και  $v$  είναι σε αυτήν την κατεύθυνση, είναι απλά

$$(22.01) \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 : \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 : \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 = x\sigma : y\sigma;$$

οι συντελεστές των παραγώγων  $u_x, u_y$  και  $v_x, v_y$  στο  $L$  δίνονται από τα αντίστοιχα μέλη της αναλογίας (22.01). Η έκφραση  $L$  μπορεί να γραφτεί μετά από τον πολλαπλασιασμό με είτε  $x\sigma$  είτε  $y\sigma$  όπως

$$(22.02) (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) u_\sigma + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) v_\sigma + (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) x_\sigma = x_\sigma L$$

ή όπως

$$(22.03) (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) u_\sigma + (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2) v_\sigma + (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) y_\sigma = y_\sigma L.$$

εάν στο σημείο  $x, y$  οι λειτουργίες  $u$  και  $v$  ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις (21.01), λαμβάνουμε τέσσερις ομοιογενείς γραμμικές εξισώσεις για  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ :

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1(A_1y_\sigma - B_1x_\sigma) + \lambda_2(A_2y_\sigma - B_2x_\sigma) = 0 \\
 (22.04) \quad & \lambda_1(C_1y_\sigma - D_1x_\sigma) + \lambda_2(C_2y_\sigma - D_2x_\sigma) = 0 \\
 & \lambda_1(A_1u_\sigma + C_1v_\sigma + E_1x_\sigma) + \lambda_2(A_2u_\sigma + C_2v_\sigma + E_2x_\sigma) = 0 \\
 & \lambda_1(B_1u_\sigma + D_1v_\sigma + E_1y_\sigma) + \lambda_2(B_2u_\sigma + D_2v_\sigma + E_2y_\sigma) = 0.
 \end{aligned}$$

Εάν αυτές οι εξισώσεις είναι ικανοποιημένες όλοι οι καθοριστικοί παράγοντες δύο σειρών στο πίνακα των συντελεστών  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  εξαφανίζονται. Κατά συνέπεια διάφορες χαρακτηριστικές σχέσεις ακολουθούν.

Από τις πρώτες δύο εξισώσεις, ειδικότερα,

$$(22.05) \quad \begin{vmatrix} A_1y_\sigma - B_1x_\sigma & A_2y_\sigma - B_2x_\sigma \\ C_1y_\sigma - D_1x_\sigma & C_2y_\sigma - D_2x_\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

Η

$$(22.06) \quad ay_\sigma^2 - 2bx_\sigma y_\sigma + cx_\sigma^2 = 0.$$

Εδώ

$$(22.07) \quad a = [AC], \quad 2b = [AD] + [BC], \quad c = [BD]$$

με τη σύντμηση

$$[XY] = X_1Y_2 - X_2Y_1.$$

Εάν το  $ac - b^2 > 0$  τότε το (22.06) δεν μπορεί να ικανοποιηθεί από μια (αληθινή) κατεύθυνση. Χαρακτηριστικές κατευθύνσεις δεν υπάρχουν σε αυτήν την υπόθεση. Οι διαφορικές εξισώσεις ονομάζονται τότε ελλειπτικές. Δεν λαμβάνουμε υπόψη την περίπτωση  $ac - b^2 = 0$  στην οποία μια χαρακτηριστική κατεύθυνση υπάρχει μέσω κάθε σημείου. Εάν  $ac - b^2 < 0$  έχουμε δύο διαφορετικές χαρακτηριστικές κατευθύνσεις  $y_\sigma : x_\sigma$  μέσω κάθε σημείου, το σύστημα ονομάζεται υπερβολικό. Για τα προβλήματα ροής που εξετάζονται σε αυτό το βιβλίο οι διαφορικές εξισώσεις είναι κατά κύριο λόγο υπερβολικές. Θα μπορούσαμε από εδώ και πέρα να υποθέσουμε ότι ο υπερβολικός χαρακτήρας\* των εξισώσεων (21.01) και να υποθέσουμε αναλόγως

$$(22.08) \quad ac - b^2 < 0.$$

\*ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΖΟΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΤΟ  $ac - b^2 > 0$ , ΜΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΚΑΠΩΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΤΟ ΑΚΟΛΟΥΘΟ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΔΟΘΕΙ ΑΛΛΑ ΠΑΡΑΛΕΙΠΕΤΑΙ ΕΔΩ.  
ΒΛΕΠΕ COURANT-HILBERT [32, ΣΕΛ. 337-342]

Αυτή η υπόθεση αποκλείει την εξαιρετική περίπτωση ότι και οι τρεις συντελεστές εξαφανίζονται. Επιπλέον, υποθέτουμε για ευκολία

$$(22.09) \quad a = [AC] \neq 0.$$

Ο τελευταίος όρος μπορεί πάντα να ικανοποιηθεί, εάν είναι απαραίτητο με την εισαγωγή των νέων συντεταγμένων αντί του  $x$  και του  $y$ . Συνεπώς,  $x_s \neq 0$  για μια χαρακτηριστική κατεύθυνση  $(x_s, y_s)$  όπως βλέπουμε από το (22.06). Κατά συνέπεια είμαστε ελεύθεροι να εισάγουμε την κλίση

$$(22.10) \quad \zeta = y_s/x_s.$$

Η εξίσωση (22.06) γίνεται μια τετραγωνική εξίσωση για το  $\zeta$

$$(22.11) \quad a\zeta^2 - 2b\zeta + c = 0.$$

Αυτή η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις  $\zeta_+$  και  $\zeta_-$

$$(22.12) \quad \zeta_+ \neq \zeta_-$$

από το 22.08. Ανάλογα, οι δύο διαφορετικές χαρακτηριστικές κατευθύνσεις δίνονται από το  $dy/dx = \zeta_+$  και  $dy/dx = \zeta_-$  στο σημείο  $(x, y)$ . Αφού οι ρίζες  $\zeta_+$  και  $\zeta_-$  του (22.11) είναι, μιλώντας γενικά, λειτουργίες του  $x, y, u, v$  οφείλει να διαπιστωθεί ότι ο υπερβολικός χαρακτήρας του συστήματος (21.01) εξαρτάται από τις μεμονωμένες λειτουργίες  $u(x, y), v(x, y)$  υπό εξέταση.

Μόλις μια σταθερή λύση των εξισώσεων (21.01) παρεμβληθεί, οι εξισώσεις  $dy/dx = \zeta_+(x, y, u, v)$  και  $dy/dx = \zeta_-(x, y, u, v)$  είναι δυο ξεχωριστές συνηθισμένες διαφορικές εξισώσεις της πρώτης τάξης οι οποίες καθορίζουν δύο μονο-παραμετρικές οικογένειες των χαρακτηριστικών καμπυλών ή απλά των χαρακτηριστικών,  $C_+$  και  $C_-$  στο  $(x, y)$  επίπεδο, που ανήκουν στη λύση  $u(x, y), v(x, y)$ .

Αυτές οι δύο οικογένειες μπορούν να αντιπροσωπευτούν σε μορφή  $\beta(x, y) = \text{σταθερά}$  και  $\alpha(x, y) = \text{σταθερά}$ , αντίστοιχα, και διαμορφώνουν ένα καμπυλόγραμμο ισότιμο δίκτυο. Είναι τώρα φυσικό να εισάγουμε νέες παραμέτρους  $\alpha, \beta$  αντί για  $x, y$  με τέτοιο τρόπο ώστε το  $\beta$  να είναι σταθερό κατά μήκος των καμπυλών  $C_+$  και το  $\alpha$  είναι σταθερό κατά μήκος του  $C_-$ . Για να διευκρινίσουμε τέτοιες χαρακτηριστικές παραμέτρους μπορούμε παραδείγματος χάριν, να πάρουμε οποιαδήποτε καμπύλη  $l$  που δίνεται από  $x = x(s), y = y(s)$  που δεν έχει πουθενά μια χαρακτηριστική κατεύθυνση, η οποία είναι

$$(22.13) \quad ay_s^2 - 2bx_s y_s + cx_s^2 \neq 0 \text{ on } \mathcal{I}.$$

Μέσω οποιωνδήποτε δύο σημείων  $s = \beta$  στο  $l$  περνάμε τις καμπύλες  $C_-$  και  $C_+$  μέχρι το σημείο  $(x, y)$  όπου τέμνονται. (Μια τέτοια διατομή υπάρχει εάν το  $|\alpha - \beta|$  είναι αρκετά μικρό αφού οι κατευθύνσεις του  $C_+$  και  $C_-$  είναι διαφορετικές σύμφωνα με το (22.12).) Οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες  $\alpha, \beta$  του σημείου  $(x, y)$  είναι έπειτα χαρακτηριστικές παράμετροι.

Φυσικά, αντί για τις παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$  που εισάγονται έτσι, κάποιος μπορεί να εισαγάγει οποιεσδήποτε μονότονες λειτουργίες  $\alpha' = V(\alpha), \beta' = W(\beta)$  σαν χαρακτηριστικές παραμέτρους. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός αφήνει τις εξισώσεις της σταθεράς χαρακτηριστικών αναλλοίωτες, και τις καμπύλες αμετάβλητες.

Σε μια περιοχή στην οποία οι χαρακτηριστικές παράμετροι εισάγονται έχουμε

$$(22.14) \quad \text{I} \quad \begin{array}{l} y_\alpha = \zeta_+ x_\alpha \quad \text{along } C_+ \\ y_\beta = \zeta_- x_\beta \quad \text{along } C_- . \end{array}$$

Σύμφωνα με τον αρχικό στόχο μας πρέπει τώρα να αποφασίσουμε τους παράγοντες  $\lambda_1, \lambda_2$  προκειμένου να διαμορφώσουμε τη συνδυασμένη σχέση  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = L=0$ , αντ'αυτού, λαμβάνουμε πιο κομψά τη σχέση  $L=0$  με την εξάλειψη  $\lambda_1, \lambda_2$  από τον πρώτο και του τρίτου των εξισώσεων (22.04). Το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{vmatrix} A_1 y_\sigma - B_1 x_\sigma & A_2 y_\sigma - B_2 x_\sigma \\ A_1 u_\sigma + C_1 v_\sigma + E_1 x_\sigma & A_2 u_\sigma + C_2 v_\sigma + E_2 x_\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Γράφοντας  $y_\sigma = \zeta x_\sigma$ , λαμβάνουμε, μετά την ακύρωση του παράγοντα  $x_\sigma$ , την εξίσωση

$$(22.15) \quad T u_\sigma + (a\zeta - S)v_\sigma + (K\zeta - H)x_\sigma = 0 \text{ along } C_+,$$

Στην οποία

$$(22.16) \quad T = [AB], S = [BC], K = [AE], H = [BE].$$

Αυτή η σχέση κρατά εάν προσδιορίζουμε το  $\zeta$  με  $\zeta_+$  και  $\sigma$  με  $\alpha$ , και επιπλέον εάν προσδιορίζουμε το  $\zeta$  με  $\zeta_-$  και  $\sigma$  με  $\beta$ .

Κατά συνέπεια έχουμε φθάσει στις ακόλουθες τέσσερις χαρακτηριστικές εξισώσεις:

$$(22.17) \quad \begin{array}{l} \text{I}_+ \quad y_\alpha - \zeta_+ x_\alpha = 0, \\ \text{I}_- \quad y_\beta - \zeta_- x_\beta = 0, \\ \text{II}_+ \quad T u_\alpha + (a\zeta_+ - S)v_\alpha + (K\zeta_+ - H)x_\alpha = 0, \\ \text{II}_- \quad T u_\beta + (a\zeta_- - S)v_\beta + (K\zeta_- - H)x_\beta = 0, \end{array}$$

Οι οποίες ισχύουν για το κάθε λύση  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  και αναφέρονται στα χαρακτηριστικά του  $C_+$  ή του  $C_-$ .

Ενώ μέχρι τώρα έχουμε προβλέψει μια σταθερή λύση  $u,v$ , οι εξισώσεις (22.17) δεν εξαρτώνται πλέον ρητά από αυτήν την λύση δεδομένου ότι όλοι οι συντελεστές είναι γνωστές λειτουργίες του  $x, y, u, v$ .

Θα παρουσιάσουμε τώρα μια μικρή αλλά αποφασιστική αλλαγή της ερμηνείας: το σύστημα (22.17) μπορεί και θα θεωρηθεί ως σύστημα τεσσάρων μερικών διαφορικών εξισώσεων για τις τέσσερις ποσότητες  $x, y, u, v$  ως λειτουργίες  $\alpha$  και  $\beta$ . Η αντικατάσταση του αρχικού συστήματος (21.01) από αυτό το χαρακτηριστικό σύστημα είναι η βάση της ακόλουθης θεωρίας.

Οι διαφορικές εξισώσεις (22.17) είναι μιας ιδιαίτερα απλής μορφής στο μέτρο που κάθε εξίσωση περιέχει τα παράγωγα όσον αφορά μόνο μια από τις ανεξάρτητες παραμέτρους. Επιπλέον, οι συντελεστές δεν εξαρτώνται από τις ανεξάρτητες παραμέτρους (ένα τέτοιο σύστημα καλείται κανονικό υπερβολικό, βλέπε [ 32, σελ. 324 ].)

Σύμφωνα με την παραγωγή μας, κάθε λύση του αρχικού συστήματος (21.01) ικανοποιεί αυτό το χαρακτηριστικό σύστημα. Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές, όπως εύκολα επαληθεύεται. Κάθε λύση του χαρακτηριστικού συστήματος (22,17) ικανοποιεί το αρχικό σύστημα (21,01) υπό τον όρο ότι το Ιακωβιανό  $\chi_{\alpha\beta} - \chi_{\beta\alpha} = (\zeta_- - \zeta_+) \chi_{\alpha\beta}$  δεν εξαφανίζεται.

Οι δύο ιδιαίτερες περιπτώσεις που αναφέρονται πριν πρέπει να σημειωθούν:

Όταν οι διαφορικές εξισώσεις (21,01) είναι γραμμικές τότε  $\zeta_+$  και  $\zeta_-$  είναι γνωστές λειτουργίες του  $x, y$ . Οι εξισώσεις I στο (22.17) δεν συνδέονται με τις εξισώσεις II και έτσι οι εξισώσεις καθορίζουν δύο οικογένειες των χαρακτηριστικών καμπυλών,  $\gamma_+$  και του  $\gamma_-$ , ανεξάρτητες από τη λύση.

Όταν οι διαφορικές εξισώσεις είναι αναγώγιμες, δηλ. όταν εξαρτάται  $E_1=E_2=0$ , και  $A_1 \dots D_2$  από το  $u, v$  μόνο, η κατάσταση είναι παρόμοια. Κατόπιν το  $\zeta_+$  και  $\zeta_-$  είναι γνωστές λειτουργίες του  $u$  και  $v$  και οι διαφορικές εξισώσεις II είναι ανεξάρτητες από το  $X$  και το  $Y$ . (Το ίδιο πράγμα, τυχαία, παραμένει αληθινό ακόμα κι αν  $E_1$  και  $E_2$  δεν εξαφανίζονται αλλά εξαρτώνται από το  $u$  και  $v$  μόνο.)

Για τις αναγώγιμες εξισώσεις, οι χαρακτηριστικές καμπύλες  $\Gamma$  στο  $(u, v)$ - επίπεδο συμμετρίας, οι εικόνες των χαρακτηριστικών  $C$  στο  $(x, y)$  -επίπεδο συμμετρίας, είναι ανεξάρτητες από την ειδική λύση  $u(x, y), v(x, y)$  που θεωρούνται. Χαρακτηρίζονται από τις διαφορικές εξισώσεις II που μπορούν να γραφτούν:

$$(22.18) \quad \begin{aligned} \Gamma_+ : \quad T \frac{du}{dv} &= S - a\zeta_+, \\ \Gamma_- : \quad T \frac{du}{dv} &= S - a\zeta_-. \end{aligned}$$

Ενώ οι εξισώσεις (22.17) διαμορφώνουν ένα πλήρες σύστημα, μπορεί να αναφερθεί ότι μια άλλη σχέση μπορεί να παραχθεί που είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν αναφέρεται στα χαρακτηριστικά  $\Gamma_+$  και  $\Gamma_-$  στο  $u, v$  -επίπεδο συμμετρίας. Συνδυάζει τις εξισώσεις II ακριβώς όπως (22,06) συνδυάζει τις εξισώσεις I. Με την εξάλειψη  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  από τις τελευταίες δύο εξισώσεις (22,04) του ενός λαμβάνει

$$(22.19) \quad \begin{vmatrix} A_1 u_\sigma + C_1 v_\sigma + E_1 x_\sigma & A_2 u_\sigma + C_2 v_\sigma + E_2 x_\sigma \\ B_1 u_\sigma + D_1 v_\sigma + E_1 y_\sigma & B_2 u_\sigma + D_2 v_\sigma + E_2 y_\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Αυτή η εξίσωση είναι ανάλογη της (22.05). Υποθέτουμε ότι από τους συντελεστές

$$[AB] = T, [AD] + [CB], [CD]$$

το  $u_\sigma^2, u_\sigma v_\sigma$ , και  $v_\sigma^2$  (22,19) δεν είναι όλα μηδέν, ειδικότερα, ότι

$$(22.20) \quad T \neq 0;$$

ο τελευταίος όρος μπορεί πάντα να ικανοποιηθεί, εάν είναι απαραίτητο με την εισαγωγή των νέων λειτουργιών αντί του  $u$  και  $v$ .



Στην περίπτωση της αναγωγιμότητας η εξίσωση (22.19) γίνεται μια απλή τετραγωνική διαφορική εξίσωση για την αναλογία  $u_\sigma$ :  $u_\sigma$ , η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί, αντί της (22.18), για να καθορίσει τις δύο οικογένειες  $\Gamma$  των χαρακτηριστικών.

### **23. Χαρακτηριστικές εξισώσεις για τα συγκεκριμένα προβλήματα**

Για τις εξισώσεις ροής που απαριθμούνται στην παράγραφο 20 οι χαρακτηριστικές εξισώσεις λαμβάνονται εύκολα είτε άμεσα είτε από την αντικατάσταση στους γενικούς τύπους.

Πραγματοποιούμε τη μέθοδο άμεσα στην περίπτωση της μονοδιάστατης ισεντροπικής ροής με τη διαμόρφωση ενός γραμμικού συνδυασμού των δύο εξισώσεων (20.01) και ρωτώντας τότε περιλαμβάνει αυτός ο συνδυασμός τα παράγωγα  $u_\sigma$ ,  $\rho_\sigma$  του  $u$  και  $\rho$  μόνο σε μια κατεύθυνση που δίνεται από το  $(t_\sigma, x_\sigma)$ . εμείς γράφουμε τον συνδυασμό στη μορφή

$$(23.01) \quad u_t + (u + \lambda\rho)u_x + \lambda\rho_t + \left(\lambda u + \frac{c^2}{\rho}\right)\rho_x = 0.$$

Ο όρος για το  $(t_\sigma, x_\sigma)$  είναι έπειτα προφανώς

$$x_\sigma = (u + \lambda\rho)t_\sigma, \quad \lambda x_\sigma = \left(\lambda u + \frac{c^2}{\rho}\right)t_\sigma,$$

Από το οποίο

$$(23.02) \quad \lambda^2 = c^2/\rho^2$$

Ως εκ τούτου υπάρχουν δύο χαρακτηριστικές κατευθύνσεις που δίνονται από

$$(23.03) \quad x_\alpha = (u + c)t_\alpha, \quad x_\beta = (u - c)t_\beta.$$

Από το (23.01)-(03) οι χαρακτηριστικές εξισώσεις του  $u$  και του  $\rho$  γίνονται

$$(23.04) \quad u_\alpha + \frac{c}{\rho}\rho_\alpha = 0, \quad u_\beta - \frac{c}{\rho}\rho_\beta = 0.$$

Όπως θα εξηγηθεί λεπτομερώς στο κεφάλαιο III, οι εξισώσεις (23,03) εκφράζουν το γεγονός ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες στο  $(x,t)$  -επίπεδο αντιπροσωπεύουν τις κινήσεις των πιθανών διαταραχών (αργότερα αποκαλούμενων "ηχητικά κύματα")των οποίων η ταχύτητα,

$$(23.05) \quad \frac{dx}{dt} = u + c \quad \text{or} \quad \frac{dx}{dt} = u - c,$$

διαφέρει από τη ταχύτητα σωματιδίου  $u$  από την ταχύτητα του ήχου  $\pm c$ .

Οι διαφορικές εξισώσεις της τρισδιάστατης σφαιρικής ροής (20,02) διαφέρουν από εκείνους της μονοδιάστατης ροής από έναν όρο  $2\rho u/x$ , ο οποίος δεν περιλαμβάνει τα παράγωγα

του  $u$  και  $\rho$ . Είναι επομένως σαφές ότι οι χαρακτηριστικές εξισώσεις για το  $x$  και το  $t$  είναι οι ίδιες όπως για τη μονοδιάστατη ροή, δηλαδή (23.03) (φυσικά, αυτό το γεγονός δεν υπονοεί ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι οι ίδιες, δεδομένου ότι αυτές οι καμπύλες εξαρτώνται από τη λύση). Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις για το  $u$  και  $\rho$  διαφέρουν από το (23.04). Βρίσκονται αμέσως να είναι

$$(23.06) \quad u_\alpha + \frac{c}{\rho} \rho_\alpha + 2 \frac{cu}{x} t_\alpha = 0, \quad u_\beta - \frac{c}{\rho} \rho_\beta - 2 \frac{cu}{x} t_\beta = 0.$$

Για τη σταθερή διδιάστατη μη περιστροφική ισεντροπική ροή ακολουθούμε κάπως πιά στενά τη διαδικασία της γενικής θεωρίας. Διαμορφώνουμε έναν γραμμικό συνδυασμό των εξισώσεων (20.05)

$$\lambda_2(c^2 - u^2)u_x + (\lambda_1 - \lambda_2 uv)u_y - (\lambda_1 + \lambda_2 uv)v_x + \lambda_2(c^2 - v^2)v_y = 0.$$

Ο όρος ότι αυτός ο συνδυασμός περιλαμβάνει τα παράγωγα  $u_\sigma, v_\sigma$  μόνο σε μια κατεύθυνση, που δίνεται από το  $(x_\sigma, y_\sigma)$ , συνεπάγεται

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2 uv)x_\sigma - \lambda_2(c^2 - u^2)y_\sigma &= 0, \\ \lambda_2(c^2 - v^2)x_\sigma + (\lambda_1 + \lambda_2 uv)y_\sigma &= 0, \\ \lambda_2(c^2 - u^2)u_\sigma - (\lambda_1 + \lambda_2 uv)v_\sigma &= 0, \\ (\lambda_1 - \lambda_2 uv)u_\sigma + \lambda_2(c^2 - v^2)v_\sigma &= 0, \end{aligned}$$

που αντιστοιχεί με το (22.04). Με την εξάλειψη  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  από τις πρώτες δύο εξισώσεις λαμβάνουμε

$$(23.07) \quad (c^2 - v^2)x_\sigma^2 + 2uvx_\sigma y_\sigma + (c^2 - u^2)y_\sigma^2 = 0;$$

από τις τελευταίες δύο εξισώσεις λαμβάνουμε ομοίως

$$(23.08) \quad (c^2 - u^2)u_\sigma^2 - 2uvu_\sigma v_\sigma + (c^2 - v^2)v_\sigma^2 = 0,$$

ενώ από τις πρώτες και τρίτες εξισώσεις έχουμε

$$(23.09) \quad [(c^2 - u^2)u_\sigma - uvv_\sigma]x_\sigma - [uvx_\sigma + (c^2 - u^2)y_\sigma]v_\sigma = 0.$$

Η εξίσωση (23,07) που γράφεται στη μορφή

$$(23.10) \quad (c^2 - v^2) + 2uv\zeta + (c^2 - u^2)\zeta^2 = 0$$

για  $\zeta = y_\sigma/x_\sigma$  έχει δύο πραγματικές ρίζες  $\zeta_+, \zeta_-$  έτσι ώστε

$$(23.11) \quad y_\alpha = \zeta_+ x_\alpha, \quad y_\beta = \zeta_- x_\alpha$$

υπό τον όρο ότι  $(c^2 - u^2)(c^2 - u^2) - c^2 u^2$  είναι αρνητικός ή

$$0 < c^2 < u^2 + v^2 .$$

Αυτός ο όρος, που υπονοεί ότι η ροή είναι υπερηχητική, εξασφαλίζει ότι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (20,05) είναι υπερβολικό. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες που καθορίζονται από (23.011) έπειτα θα κληθούν " γραμμές mach " βλέπε την παράγραφο 31.

Οι εξισώσεις (23.08) καθορίζουν δύο χαρακτηριστικές κατευθύνσεις  $(u,u) -$  επιπέδου ανεξάρτητος της λύσης  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  που θεωρήτε. Ότι τέτοια σταθερά χαρακτηριστικά στο  $(u, u)$  -επίπεδο υπάρχουν είναι σαφές από τη γενική θεωρία δεδομένου ότι το σύστημα (20,05) είναι αναγώγιμο. Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (23,08) με (23,07) βλέπουμε ότι οι δύο ρίζες  $dv/du$  του (23,08) είναι οι  $-\zeta_+$  και  $-\zeta_-$ , ο κατάλληλος συντονισμός προέρχεται από την εξίσωση (23.09), το οποίο παράγει

$$(c^2 - u^2)u_\alpha - [2uv + (c^2 - u^2)\zeta_+]v_\alpha = 0$$

ή, δεδομένου ότι από την (23,07)

$$(c^2 - u^2)(\zeta_+ + \zeta_-) = -2uv,$$

$$(23.12.1) \quad u_\alpha = -\zeta_- v_\alpha .$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$(23.12.2) \quad u_\beta = -\zeta_+ v_\beta .$$

Φυσικά, η εξίσωση (23.08) είναι μια συνέπεια των δύο εξισώσεων (23.12) και ο καθορισμός του  $\zeta_+$  και  $\zeta_-$  ως ρίζες της εξίσωσης (23.10).

Η σημασία των χαρακτηριστικών εξισώσεων που παράγονται έτσι θα συζητηθεί και ερμηνευτεί λεπτομερώς στο κεφάλαιο IV. Εδώ μόνο αναφέρουμε ότι για τη σταθερή τριδιάστατη ροή με την κυλινδρική συμμετρία, που κυβερνάται από την εξίσωση (20.06), οι χαρακτηριστικές εξισώσεις για  $x_\sigma$  και  $y_\sigma$  είναι πάλι εξισώσεις(23.07) , το ίδιο πράγμα όπως για τη δισδιάστατη ροή. Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις για  $u_\sigma$ ,  $v_\sigma$ , είναι, εντούτοις, διαφορετικές. Αντί της εξίσωσης (23,08) εμείς έχουμε

$$(23.13) \quad u_\alpha + \zeta_- v_\alpha + \frac{c^2}{c^2 - u^2} \frac{v}{y} x_\alpha = 0,$$

$$u_\beta + \zeta_+ v_\beta + \frac{c^2}{c^2 - u^2} \frac{v}{y} x_\beta = 0,$$

όπως εύκολα διαπιστώνεται.

#### **24. Το πρόβλημα αρχικής αξίας. Περιοχή της εξάρτησης. Σειρά της επιρροής**

Το πρόβλημα αρχικής αξίας είναι το κρίσιμο πρόβλημα στη θεωρία των υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων. Αφήστε μια καμπύλη  $J$  να δοθεί στο  $(x,y)$  - επίπεδο από την άποψη μιας παραμέτρου  $s: x=x(s), y=y(s)$ . (Υποθέτουμε ότι τα παράγωγα  $x_s(s), y_s(s)$  είναι τμηματικά συνεχές κατά μήκος του  $J$  και ότι  $x_s^2 + y_s^2 \neq 0$ .) Κατά μήκος των συνεχών τμημάτων  $J$  τα  $u(s), v(s)$  ορίζονται αυθαίρετα. Έπειτα το πρόβλημα αρχικής αξίας είναι: να καθορίσει, στη γειτονιά του  $j$ , τη λύση  $u(x,y), v(x,y)$  των εξισώσεων (21.01) που παίρνει ορισμένες αρχικές τιμές των  $u(s), v(s)$  στο  $J$ . Εμείς υποθέτουμε ότι η καμπύλη  $J$  με τις ορισμένες τιμές του  $u$  και  $v$  δεν έχει πουθενά μια χαρακτηριστική κατεύθυνση, με άλλα λόγια αυτή

$$ay_s^2 - 2bx_s y_s + bx_s^2 \neq 0$$

κατά μήκος του  $J$ .

Με τη βοήθεια της χαρακτηριστικής μορφής (22.17) των διαφορικών εξισώσεων αυτό το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί τόσο ολοκληρωμένα όσο το αντίστοιχο για τις συνηθισμένες διαφορικές εξισώσεις\*.

Αναφερόμενοι στο επίπεδο των χαρακτηριστικών παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  μπορούμε να θεωρήσουμε το  $J$  ως εικόνα της ειδικής γραμμής  $\Lambda: \alpha + \beta = 0$ .

\* Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΥ ΓΕΓΟΝΟΤΟΣ ΟΦΕΙΛΕΤΑΙ ΣΤΟΝ HANS LEWY[29]

ΟΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ  $\alpha$  ΚΑΙ  $\beta$  ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΤΗΚΑΝ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ 22 ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΜΙΑ ΚΑΜΠΥΛΗ  $J$  ΣΤΗΝ ΟΠΟΙΑ  $\alpha = \beta$ . ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ ΜΟΝΟ ΝΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΗΣΟΥΜΕ ΤΟ  $\beta$  ΑΠΟ ΤΟ  $-\beta$ . ΠΕΡΙΟΡΙΖΟΜΑΣΤΕ ΣΤΗΝ ΑΚΟΛΟΥΘΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΓΕΙΤΟΝΙΑ ΤΟΥ  $J$ .

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ ΜΠΟΡΕΙ ΤΩΡΑ ΝΑ ΔΙΑΤΥΠΩΘΕΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (22.17) ΣΤΟ  $(\alpha, \beta)$  - ΕΠΙΠΕΔΟ. ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΗ  $\Lambda$  ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ  $u, v, X, Y$  ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΩΣ ΣΥΝΕΧΩΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΤΟΥ  $\alpha = -\beta = s$ , ΚΑΙ ΕΠΙΔΙΩΚΟΥΜΕ ΣΕ ΜΙΑ ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΓΕΙΤΟΝΙΑ  $\Lambda$  ΜΙΑ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ I ΚΑΙ II (22.17) ΠΟΥ ΕΠΙΤΥΓΧΑΝΕΙ ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΔΕΔΟΜΕΝΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΤΟ  $\Lambda$ . (ΥΠΟΘΕΤΟΥΜΕ ΟΤΙ ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΗ (22.17) ΚΑΤΕΧΟΥΝ ΔΥΟ ΣΥΝΕΧΗ ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΟΣΟΝ ΑΦΟΡΑ ΤΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥΣ.)

ΓΙΑ ΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΟΥΜΕ ΤΗ ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ I + ΚΑΙ II + ΟΣΟΝ ΑΦΟΡΑ ΤΟ  $\beta$  ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ I - ΚΑΙ II - ΟΣΟΝ ΑΦΟΡΑ ΤΟ  $\alpha$ , ΛΑΜΒΑΝΟΝΤΑΣ ΚΑΤΑ ΣΥΝΕΠΕΙΑ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΕ  $X_{AB}, Y_{AB}, U_{AB}, V_{AB}$ . Ο ΚΑΘΟΡΙΣΤΙΚΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΑΥΤΩΝ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΧΕΙ ΤΗΝ ΑΞΙΑ  $\Delta T(Z_+ - Z_-)^2$ , Η ΟΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΑΠΟ ΤΟ ΜΗΔΕΝ ΚΑΤΑ (22.09), (22.12), (22.20). ΩΣ ΕΚ ΤΟΥΤΟΥ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΛΥΣΟΥΜΕ ΓΙΑ  $X_{AB}, Y_{AB}, U_{AB}, V_{AB}$  ΚΑΙ ΝΑ ΛΑΒΟΥΜΕ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$$(24.01) \quad x_{\alpha\beta} = f_1, \quad y_{\alpha\beta} = f_2, \quad u_{\alpha\beta} = f_3, \quad v_{\alpha\beta} = f_4,$$

ΣΤΟ ΟΠΟΙΟ ΟΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ  $f$  ΕΧΟΥΝ ΤΑ ΣΥΝΕΧΗ ΠΡΩΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΟΣΟΝ ΑΦΟΡΑ ΚΑΘΕ ΜΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ  $X, Y, U, V, X_A, X_B, Y_A, Y_B, U_A, U_B, V_A, V_B$ . ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΡΩΤΟΤΥΠΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (22.17) ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΚΑΘΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΑΥΤΩΝ ΤΩΝ ΔΩΔΕΚΑ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΗ  $\Lambda$ . ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (24.01) ΜΠΟΡΕΙ ΤΩΡΑ ΝΑ ΛΥΘΕΙ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ\* ΣΕ ΜΙΑ ΓΕΙΤΟΝΙΑ ΤΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ  $\Lambda$ . Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ, ΠΟΥ ΟΔΗΓΕΙ ΣΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ  $u, v, X, Y$  ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ  $A, B$ , ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙ ΜΟΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΩΝ  $f$  ΠΕΡΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΤΡΙΓΩΝΟ  $ABP$  ΟΠΩΣ ΥΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ ΣΤΟ ΣΧΗΜΑ 1 (ΣΕΛΙΔΑ 50). ΥΠΟΘΕΤΟΝΤΑΣ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΧΑΡΙΝ, ΟΤΙ ΟΙ

ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ, ΚΑΠΟΙΟΣ ΚΑΘΟΡΙΖΕΙ ΜΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΩΝ  $x^{(n)}$ ,  $y^{(n)}$ ,  $u^{(n)}$ ,  $v^{(n)}$  ΤΟΥ Α ΚΑΙ Β ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ

$$x^{(0)} = 0, \quad x^{(n+1)}(P) = \iint_{\Delta BP} f_1(x^{(n)}, y^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}) d\alpha d\beta$$

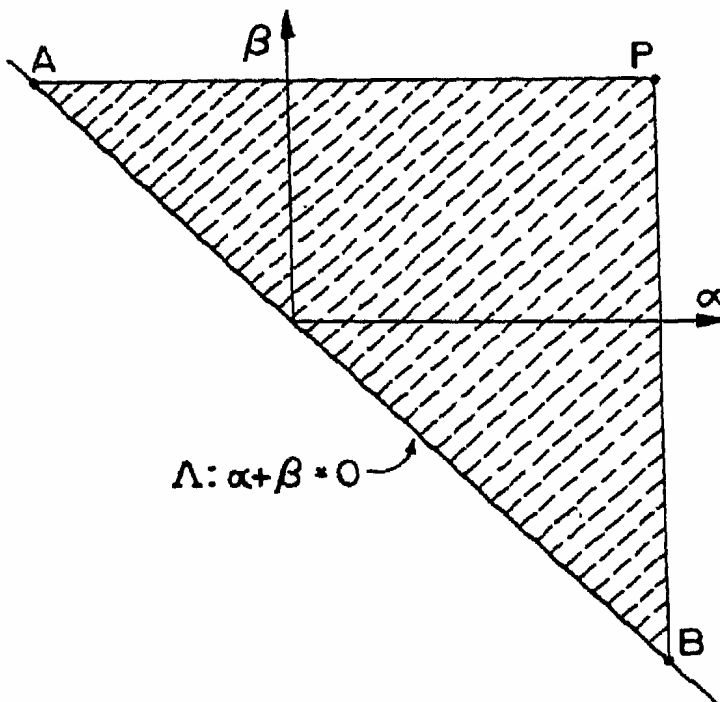
ΚΑΙ ΟΥΤΩ ΚΑΘΕΞΗΣ ΓΙΑ  $y$ ,  $u$  ΚΑΙ  $v$ . ΑΥΤΗ Η ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ ΕΠΕΙΤΑ ΓΙΑ ΝΑ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΣΕ ΜΙΑ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ (24.01). Η ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ (24.01)

\*ΒΛΕΠΕ[32,ΚΕΦΑΛΑΙΟ V,ΤΜΗΜΑ 5]

ΠΑΡΑΓΕΙ ΜΙΑ ΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (22,17). Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (22.17) ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΑΣ (21.01) ΥΠΟ ΤΟΝ ΟΡΟ ΟΤΙ ΤΟ JACOBIAN  $x_A y_B - x_B y_A$  ΔΕΝ ΕΞΑΦΑΝΙΖΕΤΑΙ.

ΓΙΑ ΤΙΣ ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΕΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ, Η ΑΝΑΦΟΡΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΙΝΕΙ ΣΤΗ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΠΟΥ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΑΝΩΤΕΡΩ (ΓΙΑ ΜΙΑ ΕΛΑΦΡΩΣ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΔΕΙΤΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ 32.)

ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΓΙΝΕΤΑΙ ΠΡΟΦΑΝΕΣ ΟΤΙ ΟΙ ΤΙΜΕΣ  $x, y, u, v$  ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ  $P=(a, b)$  ΕΞΑΡΤΩΝΤΑΙ ΜΟΝΟ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΤΟ ΤΜΗΜΑ

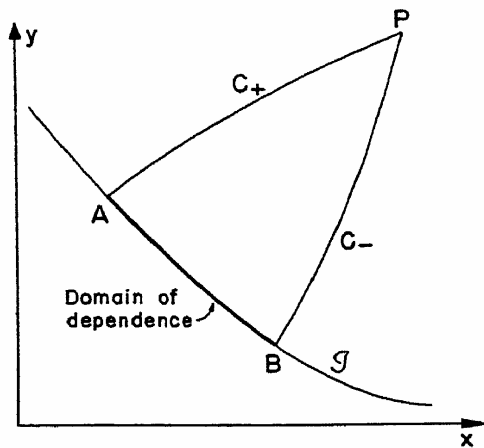


**Εικόνα 1.** Τρίγωνο στο  $(\alpha, \beta)$ -επίπεδο για το οποίο η διαδικασία επανάληψης ισχύει.

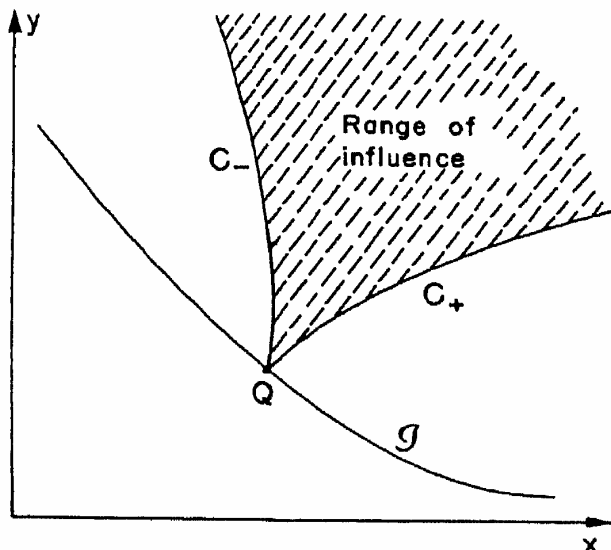
ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ  $A=(-b, b)$  ΚΑΙ  $B=(a, -a)$  ΥΠΟΔΕΙΓΜΕΝΟ ΣΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ. ΥΠΟΘΕΣΤΕ ΟΤΙ ΚΑΠΟΙΟΣ ΕΧΕΙ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ  $ABP$  ΔΥΟ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΙΣ ΙΔΙΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ  $AB$  (ΑΛΛΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΣ ΝΑ ΔΙΑΦΕΡΕΙ ΕΞΩ). ΚΑΤΟΠΙΝ ΟΙ ΔΥΟ ΛΥΣΕΙΣ ΣΥΜΠΗΤΟΥΝ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΟ ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ  $ABP$ .



Q. ΑΥΤΗ Η ΣΕΙΡΑ ΤΗΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ Q ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΟΛΑ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ P ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΟΙ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΤΟ Q. ΕΠΟΜΕΝΩΣ ΕΙΝΑΙ ΑΚΡΙΒΩΣ Η ΓΩΝΙΑΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΔΥΟ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΠΟΥ ΣΥΡΟΝΤΑΙ ΜΕΣΩ ΤΟΥ Q. ΘΑ ΚΑΤΑΛΑΒΟΥΜΕ ΑΡΓΟΤΕΡΑ ΤΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΜΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ, ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Υ, ΕΡΜΗΝΕΥΕΤΑΙ ΩΣ ΧΡΟΝΟ, ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 35, ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΥΠΕΡΧΗΤΙΚΩΝ ΡΟΩΝ ΣΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΤΟ X ΚΑΙ ΤΟ Υ ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΧΩΡΟΥ ΚΑΙ ΤΟ U ΚΑΙ Υ ΣΥΣΤΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ.



**ΕΙΚ.3 ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ**



**ΕΙΚ.4 ΦΑΣΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΠΙ ΤΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ**

ΕΙΝΑΙ Η ΥΠΑΡΞΗ ΤΕΤΟΙΩΝ ΠΕΡΙΟΧΩΝ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΤΗΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΠΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΖΕΙ ΤΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΑΝΤΙΘΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ. ΣΤΑ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΟΙ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΤΟ ΜΕΣΟ ΔΙΑΣΥΝΔΕΟΝΤΑΙ. ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ. ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΟΠΩΣ ΦΑΙΝΟΝΤΑΙ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΠΟΥ ΚΑΘΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΗ ΤΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΑΠΟ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥΣ ΣΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΠΕΡΙΟΧΗ, ΟΣΟ ΜΙΚΡΗ. ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΩΝ, ΑΦ' ΕΤΕΡΟΥ, Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΩΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ. ΩΣ ΕΚ ΤΟΥΤΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΜΕΡΙΔΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΤΟΥ  $(x,y)$  -ΕΠΙΠΕΔΟΥ. ΕΠΟΜΕΝΩΣ Η ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ ΕΙΝΑΙ ΣΥΧΝΑ ΔΥΝΑΤΗ, ΚΑΙ ΑΥΤΗ Η ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΚΑΘΙΣΤΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΥΧΝΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΕΥΚΟΛΗ, ΟΠΩΣ ΘΑ ΔΟΥΜΕ ΣΕ ΠΟΛΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΣΙΩΠΗΡΑ ΣΕ ΤΕΤΟΙΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΟΠΩΣ " ΤΟ ΜΕΣΟ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ  $P$  ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΕΙ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ  $Q$  ", ΕΝΝΟΩΝΤΑΣ ΟΤΙ ΤΟ  $P$  ΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΗ ΣΕΙΡΑ ΤΗΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΟΥ  $Q$ .

ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΑΣ ΚΑΜΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ  $J$  ΔΕΝ ΔΙΑΚΡΙΝΕΤΑΙ. Η ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΠΟΜΕΝΩΣ ΟΔΗΓΕΙ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ  $J$ .

ΕΝΩ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΤΗ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΠΟΥ ΔΗΛΩΝΟΝΤΑΙ ΑΝΩΤΕΡΩ, ΟΙ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ  $u$  ΚΑΙ  $y$  ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ  $J$  ΕΧΟΥΝ ΤΑ ΣΥΝΕΧΗ ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ, ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΥΠΑΡΞΟΥΝ ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΕΧΟΥΝ ΤΙΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΕΣ ΣΤΑ ΠΡΩΤΑ (Η ΥΨΗΛΟΤΕΡΑ) ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΑΥΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ. ΥΠΟΘΕΣΤΕ ΟΤΙ ΕΧΟΥΜΕ ΜΙΑ ΣΥΝΕΧΗΣ ΛΥΣΗ  $u(x,y)$ ,  $y(x,y)$  ΔΙΑΚΕΚΟΜΜΕΝΗ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ. ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΥΠΟΘΕΤΟΥΜΕ ΟΤΙ ΤΟ  $u$  ΚΑΙ  $y$  ΕΧΟΥΝ ΤΑ ΣΥΝΕΧΗ ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ, ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ  $u,y$  ΕΧΟΥΝ ΤΑ ΣΥΝΕΧΗ ΠΡΩΤΑ (ΚΑΙ ΥΨΗΛΟΤΕΡΑ) ΠΑΡΑΓΩΓΑ. ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΑΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΠΡΟΚΥΨΕΙ: ΤΕΤΟΙΕΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΜΟΝΟ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΗ  $J$ . ΒΛΕΠΕ [ 32, ΚΕΦΑΛΑΙΟ V, ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 7 ].

ΜΕΧΡΙ ΤΩΡΑ, ΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΟΥΣΑΝ ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ. ΕΠΙΠΛΕΟΝ, ΟΜΩΣ, Η ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΑ ΧΡΗΣΙΜΗ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ. ΤΕΤΟΙΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΙΤΥΓΧΑΝΟΝΤΑΙ ΣΥΧΝΑ ΜΕ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΑ ΛΙΓΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΑΝ ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΑΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ, ΟΠΩΣ ΘΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΝ ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΕΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ III, ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 83.

## **25. ΔΙΑΔΟΣΗ ΤΩΝ ΑΣΥΝΕΧΕΙΩΝ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ**

Παρεμβάλλουμε τις συμπληρωματικές παρατηρήσεις στο ρόλο των χαρακτηριστικών ως πιθανούς γεωμετρικούς τόπους των ασυνεχειών: εάν σε ένα σημείο  $A$  υπάρχει μια ασυνέχεια σε μερικά παράγωγα των αρχικών στοιχείων όσον αφορά το  $J$ , κατόπιν σύμφωνα με τις δηλώσεις που γίνονται ανωτέρω αυτή η ασυνέχεια διαδίδεται κατά μήκος του ενός ή και τα δύο από τα δύο χαρακτηριστικά μέσω του  $A$ . Επιπλέον, όπως θα δούμε προς το παρόν, τέτοιες ασυνέχειες



διαδίδονται σύμφωνα με έναν καθορισμένο νόμο που υπονοεί ότι δεν μπορούν ποτέ να εξαφανιστούν.

Σε περίπτωση που το μεταβλητό  $y$  προσδιορίζεται με το χρόνο  $\tau$ , αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής. Οποιαδήποτε ασυνέχεια διαδίδει μέσω της μονοδιάστατης  $x$ -περιοχής με ταχύτητες  $dx/dt$  που δίνονται από τις κλίσεις των δύο χαρακτηριστικών μέσω του αντίστοιχου σημείου της ασυνέχειας στο  $(x,y)$ -επίπεδο.

Σε δύο διαστατική σταθερή ροή οι μικρές διαταραχές που προκαλούνται από μια μικρή τραχύτητα του ορίου υποδεικνύονται από τις χαρακτηριστικές καμπύλες, mach γραμμές, που εκδίδουν από το όριο της ροής. Τέτοιες χαρακτηριστικές καμπύλες είναι συχνά πραγματικά ορατές στις ροές κατά μήκος ενός ελαφρώς τραχυμένου τοίχου.

Η διάδοση των ασυνεχειών κατά μήκος των χαρακτηριστικών μπορεί να περιγραφεί από τις ακόλουθες μαθηματικές εκτιμήσεις. Υποθέστε ότι οι χαρακτηριστικές παράμετροι μπορούν να εισαχθούν και να υποθέσουν ότι η ασυνέχεια εμφανίζεται πέρα από τη γραμμή  $a = \text{σταθερά}$ , έτσι ώστε τα (εφαπτόμενα) παράγωγα όσον αφορά  $\beta$  να παραμένουν συνεχή.

Κατόπιν εξετάστε τα τέσσερα άλματα, ή οι εντάσεις ασυνέχειας

$$\begin{aligned} [x_\alpha]_{\alpha-0}^{\alpha+0} &= X(\beta), & [y_\alpha]_{\alpha-0}^{\alpha+0} &= Y(\beta), \\ [u_\alpha]_{\alpha-0}^{\alpha+0} &= U(\beta), & [v_\alpha]_{\alpha-0}^{\alpha+0} &= V(\beta), \end{aligned}$$

στις οποίες το  $x, y, u, v$  υπολογίζονται ως λειτουργίες του  $a$  και  $\beta$ . Μπορούμε τώρα να καθιερώσουμε δύο ομοιογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κατά μήκος του  $a = \text{σταθερά}$  για τις εντάσεις ασυνέχειας.

Εξετάστε την πρώτη εξίσωση I + και II - του (22,17) στο σημείο P1 και P2, ένα σε κάθε πλευρά, και κοντά σε ένα σημείο P, το χαρακτηριστικό  $a = \text{σταθερά}$ . Αφαιρέστε αυτές τις εξισώσεις τη μια από την άλλη και αφήστε έπειτα P1 και P2 να προσεγγίσουν το P. Δεδομένου ότι οι συντελεστές και τα παράγωγα όσον αφορά το  $\beta$  είναι συνεχείς, ολοκληρώνουμε ότι

$$\begin{aligned} (25.01) \quad & Y(\beta) - \zeta_+(\beta) X(\beta) = 0 \\ & U(\beta) + G_+(\beta) V(\beta) + R_+(\beta) X(\beta) = 0, \end{aligned}$$

όπου  $\zeta_+, G_+(\beta) = (a\zeta_+ - S)/T$  και  $R_+ = (K\zeta_+ - H)/T$  είναι γνωστές λειτουργίες του  $\beta$  κατά μήκος  $a = \text{σταθερά}$ , δείτε (22.16). Για να λάβουμε τις πληροφορίες από το I και II -, διαφοροποιούμε αρχικά όσον αφορά το  $a$  και πραγματοποιούμε την προηγούμενη διαδικασία πάλι. Βρίσκουμε έπειτα μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\begin{aligned} (25.02) \quad & Y_\beta - \zeta_- X_\beta + M(X, Y, U, V) = 0, \\ & U_\beta + G_- V_\beta + R_- X_\beta + N(X, Y, U, V) = 0, \end{aligned}$$

Στο οποίο το  $\zeta_-, G_-(\beta) = (a\zeta_- - S)/T$ ,  $R_- = (K\zeta_- - H)/T$  και οι συντελεστές των γραμμικών μορφών  $M$  και  $N$  είναι γνωστές λειτουργίες του  $\beta$  κατά μήκος του  $a = \text{σταθερά}$ .

Οι εξισώσεις (25.01)-(02) καθορίζουν τις εντάσεις ασυνέχειας ως λύσεις των γραμμικών ομοιογενών συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων. Ως εκ τούτου αυτές οι ασυνέχειες καθορίζονται μεμονωμένα και δεν είναι μηδενικές κατά μήκος ολόκληρου του χαρακτηριστικού

εάν είναι γνωστές για να είναι διαφορετικές από μηδέν σε οποιοδήποτε σημείο του χαρακτηριστικού.

Πρέπει να επισημανθεί ότι η συζήτηση της διάδοσης των ασυνεχειών στα πρώτα παράγωγα \*, σύμφωνα με αυτό το τμήμα, δεν ισχύει για τις ίδιες ασυνέχειες των λειτουργιών στο  $u$  και  $v$ . Θα δούμε αργότερα, στο κεφάλαιο III, ότι οι ίδιες οι ασυνέχειες στις λειτουργίες διαδίδονται ως " κλωνισμοί " κατά τρόπο αρκετά διαφορετικό.

## **26. Χαρακτηριστικές γραμμές ως γραμμές χωρισμού μεταξύ των περιοχών των διαφορετικών τύπων**

Μια παρατήρηση βασικής σπουδαιότητας πρέπει να είναι: όποτε η ροή σε δύο παρακείμενες περιοχές περιγράφεται από τις εκφράσεις που είναι αναλυτικά διαφορετικές (ειδικότερα όταν κάποια είναι μια περιοχή της υπολοίπου ή σταθερής κατάστασης ενώ στην άλλη περιοχή η κατάσταση δεν είναι σταθερή), τότε οι δύο περιοχές χωρίζονται αναγκαστικά από ένα χαρακτηριστικό. Γενικά, η μορφή μετάβασης μιας περιοχής σε μια άλλη περιλαμβάνει τις ασυνέχειες μερικών παραγώγων. Κατόπιν η δήλωση είναι μια άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι μόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών μπορούν τα παράγωγα του  $u$  και  $v$  οποιασδήποτε διαταγής να αλλάξουν ασυνεχώς. Αλλά, ακόμα κι αν δεν εμφανιστούν οι ασυνέχειες των παραγώγων, το αποτέλεσμα ακολουθεί εύκολα με έναν εναλλακτικό συλλογισμό, βασισμένο στη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικής αξίας για ένα τρίγωνο που διαμορφώνεται από δύο χαρακτηριστικά και ένα τμήμα της αρχικής γραμμής, βλέπει [ 32, σελ. 297 ].

Εάν το σύστημα (21,01) των διαφορικών εξισώσεων είναι ελλειπτικό, κανένα πραγματικό χαρακτηριστικό δεν υπάρχει, βλέπε [ 32, κεφάλαιο III, παράγραφος 2 ], και συνεπώς οι συνεχείς λύσεις δεν κατέχουν τις ασυνέχειες στα παράγωγά τους. Εάν οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης είναι αναλυτικοί οι λύσεις είναι αναλυτικές λειτουργίες του  $x$  και του  $y$  και επομένως δεν μπορούν να είναι σταθερές σε οποιαδήποτε περιοχή χωρίς την ύπαρξη σταθεράς.

\* ΓΙΑ ΜΙΑ ΠΙΟ ΛΕΠΤΟΜΕΡΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΑΣΥΝΕΧΕΙΩΝ, ΔΕΙΤΕ ΠΑΛΙ [ 32, ΚΕΦΑΛΑΙΟ V ].

---

# ΚΕΦΆΛΑΙΟ ΙΙΙ

---

## Μονοδιάστατη Ροή

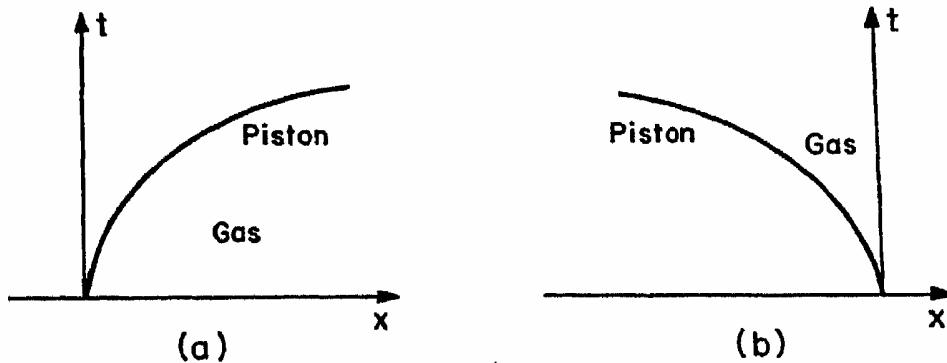
### 33. Προβλήματα της μονοδιάστατης ροής

Η ισεντροπική ροή των συμπίεσιμων ρευστών αναγνωρίζει μια αρκετά εξαντλητική μαθηματική επεξεργασία εάν η κατάσταση του μέσου εξαρτάται μόνο από το χρόνο  $t$  και από μια ενιαία καρτεσιανή συντεταγμένη. Οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης μειώνουν έπειτα στα απλά συστήματα του τύπου που μελετάται στο προηγούμενο κεφάλαιο. Χωρίς απαραίτητως να βασίσουν τις συζητήσεις μας σχετικά με αυτές τις γενικές θεωρίες, γυρίζουμε τώρα σε μια ανάλυση των προβλημάτων ροής που εξαρτώνται μόνο από δύο μεταβλητές. Το πρώτο θέμα είναι η μονοδιάστατη ροή.

Σαν πρότυπο μιας μονοδιάστατης ροής συνήθως θα θεωρούμε τη ροή του αερίου σε έναν μακρύ σωλήνα που επεκτείνεται κατά μήκος του  $x$  - άξονα. Ο σωλήνας μπορεί να είναι άπειρος, ημιάπειρος, ή πεπερασμένος, δηλ., ανοικτός και στις δύο άκρες, από ένα έμβολο ή έναν τοίχο από τη μία πλευρά, ή από τα έμβολα ή τους τοίχους που κλείνουν και στις δύο άκρες. Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, θα υποθέσουμε μια αρχική κατάσταση της ομοιόμορφης ταχύτητας  $u_0$ , της ομοιόμορφης πίεσης  $p_0$ , και της ομοιόμορφης πυκνότητας  $\rho_0$ . Η κίνηση του αερίου προκαλείται έπειτα από τη δράση των εμβόλων στις άκρες.

Είναι κατάλληλο να αντιπροσωπευθούν τα φαινόμενα σε ένα  $(x,t)$  - ισότιμο σύστημα, και να αναφερθεί στην καμπύλη στο  $(x,t)$  - επίπεδο που αντιπροσωπεύει την κίνηση ενός μορίου ως " πορεία ". Αφήστε τη συντεταγμένη του εμβόλου στο αριστερό τέλος του γεμισμένου με αέριο σωλήνα να είναι  $x=0$  γιατί  $t=0$ . Έπειτα η κίνηση του εμβόλου αντιπροσωπεύεται στο  $(x,t)$  - επίπεδο ως καμπύλη  $J$ , η πορεία εμβόλων, που αρχίζει στην προέλευση όπως υποδεικνύεται στο σχήμα 1 για τη συμπιεστική και για επεκτατική δράση του εμβόλου.

Στο μέρος A θα ερευνήσουμε γενικές μεθόδους επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης. Στο μέρος B θα μελετήσουμε τους απλούστερους τύπους συνεχών κινήσεων ενός αερίου, ειδικότερα, τα κύματα αραιώσης που προκαλούνται από τα υποχωρώντας έμβολα. Το μέρος C αφιερώνεται σε μια συζήτηση της ασυνεχούς κίνησης που περιλαμβάνει τα μέτωπα κλονισμού, τα οποία αναπτύσσονται ως αποτέλεσμα της συμπιεστικής δράσης. Με κάποια θυσία λακωνικότητας, μια προσπάθεια γίνεται να φωτίσει την μπροστινή θεωρία κλονισμού από τις διάφορες απόψεις. Στο μέρος D επιδεικνύεται πόσο οι γενικότεροι τύποι κινήσεων προκύπτουν από την αλληλεπίδραση των στοιχειωδών κινήσεων που μελετώνται στα μέρη B και C.



(α) πορεία εμβόλων (συμπιεστική δράση) (β) πορεία εμβόλων (επεκτατική δράση)

Στο μέρος Ε που θα συζητήσουμε τη θεωρία των ασυνεχών διαδικασιών εκτυρσοκρότησης και καύσης, η οποία συσχετίζεται πολύ με τη θεωρία των κλονισμών.

## A. Συνεχής ροή

### 34. Χαρακτηριστικά

Στο παρόν τμήμα ενδιαφερόμαστε για τις χαρακτηριστικές κατευθύνσεις και καμπύλες των διαφορικών εξισώσεων

$$(34.01) \quad \begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ \rho u_t + \rho u u_x + p_x &= 0, \end{aligned}$$

της ισεντροπικής μονοδιάστατης ροής, (17.01-.02), στην οποία  $p=f(\rho)$  είναι μια δεδομένη λειτουργία. Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις που παράγονται στο κεφάλαιο II, παράγραφος 23, βλέπε (23.03-.04), είναι

$$(34.02) \quad \begin{aligned} I_+ : \quad x_\alpha &= (u + c)t_\alpha, \\ I_- : \quad x_\beta &= (u - c)t_\beta, \end{aligned}$$

$$(34.03) \quad \begin{aligned} II_+ : \quad u_\alpha &= -\frac{c}{\rho} \rho_\alpha, \\ II_- : \quad u_\beta &= \frac{c}{\rho} \rho_\beta \end{aligned}$$

Με  $c^2=f'(\rho)$ , βλέπε (2.05).

Με την πίεση  $p$  αντί της πυκνότητας  $\rho$  ως εξαρτώμενη μεταβλητή, οι εξισώσεις II λαμβάνουν τη μορφή

$$(34.04) \quad II_+ : \quad u_\alpha = -\frac{p_\alpha}{\rho c}, \quad II_- : \quad u_\beta = \frac{p_\beta}{\rho c}$$

(στην οποία η σύνθετη αντίσταση  $\rho c$  πρόκειται να θεωρηθεί λειτουργία του  $p$ .)

Οι εξισώσεις (34.03), (34.04) υπονοούν τη σχέση

$$(34.05) \quad (du)^2 + dpd\tau = 0,$$

μεταξύ της ταχύτητας, της πίεσης, και του συγκεκριμένου όγκου και στις δύο χαρακτηριστικές κατευθύνσεις. Αυτή η εξίσωση δεν περιλαμβάνει τους συντελεστές ανάλογα με τη λύση.

Χωρίς αναφορά στους τύπους του κεφαλαίου II, οι χαρακτηριστικές εξισώσεις εύκολα παράγονται άμεσα. Με αυτό τον τρόπο δεν θα κάνουμε την υπόθεση ότι η ροή είναι ισεντροπική. Έπειτα η ροή χαρακτηρίζεται από τρεις διαφορικές εξισώσεις:

$$(34.06) \quad \begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ \rho u_t + \rho u u_x + p_x &= 0, \\ S_t + uS_x &= 0, \end{aligned}$$

Δείτε (17.01-.03), στο οποίο το  $p$  είναι μια δεδομένη λειτουργία  $\rho$  και της συγκεκριμένης εντροπίας  $S$ . Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις που παράγονται υποθέτουν μια ποιό συνοπτική μορφή εάν, αντί  $\rho, p$  θεωρείται ως εξαρτώμενη μεταβλητή. Το  $\rho$  θεωρείται έπειτα ως λειτουργία του  $p$  και του  $S$ , η οποία είναι δυνατή από το (2.04). Η σχέση μεταξύ αυτών των ποσοτήτων, που δίνονται από  $p=f(\rho, S)$  ή

$$dp = c^2 d\rho + f_S dS,$$

επιτρέπει σε μας να αποβάλουμε το  $dp$  από την εξίσωση συνοχής και να αντικαταστήσουμε αυτήν την εξίσωση με το

$$p_t + u p_x + \rho c^2 u_x = 0,$$

δείτε (17.05). Προσθέτοντας και αφαιρώντας από αυτήν την εξίσωση τη δεύτερη εξίσωση (34.06) πολλαπλασιασμένη με το  $c$  βρίσκουμε

$$\begin{aligned} p_t + (u + c)p_x + \rho c\{u_t + (u + c)u_x\} &= 0, \\ p_t + (u - c)p_x - \rho c\{u_t + (u - c)u_x\} &= 0. \end{aligned}$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις μαζί με την εξίσωση  $S_t + uS_x=0$  είναι ισοδύναμες με το αρχικό σύστημα τριών εξισώσεων. Η νέα μορφή των τριών εξισώσεων προτείνει να εισάγουμε στο  $(x,t)$  - επίπεδο τρεις κατευθύνσεις (+), (-), (0) από το

$$(34.07) \quad \begin{aligned} I_+ : \quad dx &= (u + c)dt, & I_- : \quad dx &= (u - c)dt, \\ I_0 : \quad dx &= udt. \end{aligned}$$

Σε σχέση με αυτές τις τρεις κατευθύνσεις οι τρεις εξισώσεις υποθέτουν, αντίστοιχα, τις μορφές

$$(34.08) \quad \begin{aligned} \text{II}_+ : dp &= -\rho c du, & \text{II}_- : dp &= \rho c du, \\ \text{II}_0 : dS &= 0. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι κάθε μια από τις εξισώσεις (34.07-08) περιέχει τη διαφοροποίηση μόνο στην αντίστοιχη κατεύθυνσή της, οι τρεις κατευθύνσεις I είναι χαρακτηριστικές από την άποψη του κεφαλαίου II, παράγραφος 22, και οι εξισώσεις II είναι οι χαρακτηριστικές εξισώσεις. Η τρίτη χαρακτηριστική κατεύθυνση (0) αντιστοιχεί στην ταχύτητα μορίων. Για την ισεντροπική ροή, όταν  $S = \text{σταθερά}$  υποτίθεται εκ των προτέρων, οι χαρακτηριστικές εξισώσεις μειώνουν στο σύστημα δύο ζευγαριών I και II που διατυπώθηκε προηγουμένως.

Τα χαρακτηριστικά C στο  $(x,t)$  - επίπεδο αντιπροσωπεύουν τις πορείες αυτού που θα μπορούσαμε να καλέσουμε υγιή κύματα, για λόγους που θα συζητηθούν στο επόμενο τμήμα. Την ταχύτητα ενός μπροστινού και οπίσθιου υγιούς κύματος, που αντιστοιχεί σε ένα  $C_+$  ή  $C_-$  χαρακτηριστικό, είναι από το (34,02)

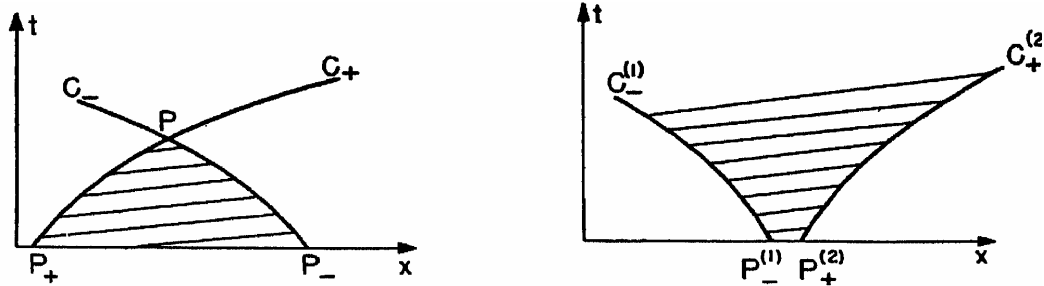
$$(34.09) \quad \frac{dx}{dt} = u + c, \quad \frac{dx}{dt} = u - c,$$

αντίστοιχα.

### **35. Περιοχή της εξάρτησης. Σειρά της επιρροής**

Οι χαρακτηριστικές κατευθύνσεις, εκτός από την αξία τους για τη θεωρητική και αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων, καθορίζουν τους παράγοντες στη συζήτηση της εξάρτησης των λύσεων στα δεδομένα στοιχεία. Περιοριζόμαστε πρώτα στην περίπτωση της ισεντροπικής ροής. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του  $u$  και  $p$  (ή  $\rho$ ) ορίζονται στο χρόνο  $t=0$  ως λειτουργίες του  $x$ . Και υποθέστε ότι, για  $t>0$ , μια λύση υπάρχει που έχει αυτά τα αρχικά στοιχεία. Εξετάστε οποιοδήποτε σημείο P στο  $(x,t)$ -επίπεδο και σύρετε τις δύο χαρακτηριστικές καμπύλες  $C_+$  και το  $C_-$  μέσω του P έως ότου κόβουν τον  $x$ -άξονα σε δύο σημεία  $P_+$  και το  $P_-$ , δείτε το σχήμα 2. (υπενθυμίζουμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες  $C_+$ ,  $C_-$  αντιπροσωπεύουν τις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων  $I_+$  και  $I_-$ , αντίστοιχα, με την αναφορά στη λύση  $u(x,t), p(x,t)$  του προβλήματος ροής.) Κατόπιν το τμήμα  $P_+P_-$  στον  $x$ -άξονα είναι η περιοχή της εξάρτησης του σημείου P, βλέπε την παράγραφο 24. που σημαίνει:

Υποθέστε ότι μια άλλη λύση του προβλήματος ροής υπάρχει (με τα συνεχή παράγωγα του  $u$  και του  $p$  όσον αφορά το  $x$  και  $t$ ) καθορισμένη τουλάχιστον στην τριγωνική περιοχή  $PP_+P_-$ , και έχοντας τις ίδιες αρχικές τιμές στο τμήμα  $P_+P_-$  όπως την πρώτη λύση. Κατόπιν η δεύτερη λύση είναι ίδια με την πρώτη λύση στην περιοχή  $PP_+P_-$ .



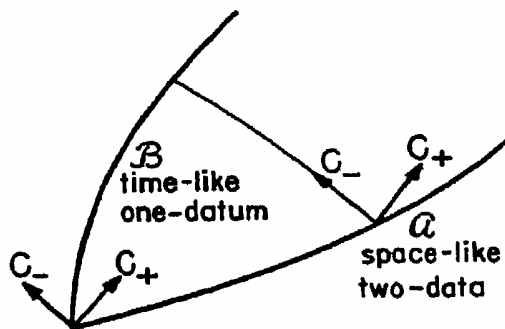
Από αυτή την άποψη, οποιαδήποτε διαταραχή των αρχικών στοιχείων έξω από το τμήμα  $P_+P_-$  δεν επηρεάζει την αξία στο  $P$ . Η διαταραχή των αρχικών στοιχείων έξω από το  $P_+P_-$  είναι με κανένα τρόπο περιορισμένη στις "απειροελάχιστες" διαταραχές. Ο μόνος περιορισμός είναι ότι πρέπει να υπάρξει μια λύση με τα συνεχή παράγωγα  $PP^+P_-$  που έχει που έχει τα διαταραγμένα αρχικά στοιχεία. (Θα δούμε αργότερα, παράγραφος 48, ότι οι διαταραχές είναι δυνατές οι οποίες παραβιάζουν αυτόν τον όρο της συνοχής). Αυτό το γεγονός μπορεί επίσης να ερμηνευθεί ως εξής:

Υποθέστε ότι τα αρχικά στοιχεία τροποποιούνται σε ένα τμήμα  $P^{(1)}P_+^{(2)}$  του  $x$ -άξονα. Έπειτα τα δύο χαρακτηριστικά  $C_-^{(1)}$  και  $C_+^{(2)}$  εκδίδοντας από τα σημεία  $P^{(1)}$  και  $P_+^{(2)}$ , αντίστοιχα, εσωκλείουν μια περιοχή έξω από την οποία η λύση δεν τροποποιείται, βλέπε το σχήμα 3. Αυτή η περιοχή είναι αυτό που ονομάστηκε σειρά της επιρροής του τμήματος  $P^{(1)}P_+^{(2)}$ , δείτε την παράγραφο 24. Ότι η λύση πραγματικά αλλάζει μεταξύ των ορίων  $C_-^{(1)}$  και  $C_+^{(2)}$  αυτής της σειράς είναι ένα στοιχείο που δεν προκύπτει από τη γενική θεωρία αλλά που μπορεί να διαπιστωθεί για τις εξισώσεις εξεταζόμενες εδώ.

Αυτές οι δύο καμπύλες  $C_-^{(1)}$  και  $C_+^{(2)}$  αντιπροσωπεύουν την κίνηση της "κεφαλής" του "κύματος διαταραχής." Η ταχύτητα αυτής της κίνησης είναι  $u-c$  ή  $u+c$  αντίστοιχα. Αυτή η ταχύτητα, σχετικά με τη ταχύτητα αερίου  $u$  σε κάθε σημείο εν λόγω, είναι ίση με  $-+c$ . Έτσι η "κεφαλή" ενός "κύματος διαταραχής" που ταξιδεύει με την υγιή ταχύτητα που σχετίζεται με το αέριο και η υγιής ταχύτητα ονόματος για την ποσότητα  $c$  δικαιολογείται. Είναι για αυτόν τον λόγο το ότι έχουμε ονομάσει ένα  $C$ -χαρακτηριστικό πορεία ενός "υγιούς κύματος".

### 36. Γενικότερα αρχικά στοιχεία

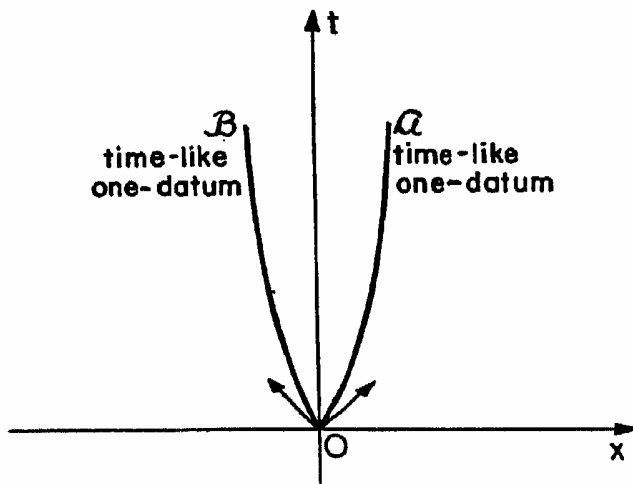
Περιστασιακά (βλ. π.χ. το μέρος Ε αυτού του κεφαλαίου), τα προβλήματα εμφανίζονται σε όποια στοιχεία ορίζεται σε γραμμές άλλες από τον  $x$ -άξονα,  $t=0$ . Θα εξετάσουμε αυτά τα προβλήματα στο παρόν τμήμα αν και το μεγαλύτερο μέρος της συζήτησης σε αυτό το κεφάλαιο δεν εξαρτάται από αυτά.



Εικόνα 4. Space-like και time-like τόξα

Πρίν χαρακτηρίσουμε εκείνα τα προβλήματα που κατέχουν μια μοναδική λύση, πρέπει να εισαγάγουμε τις έννοιες των space-like και time-like κατευθύνσεων. Μια κατεύθυνση  $(dx, dt)$  καλείται space-like εάν και οι δύο χαρακτηριστικές κατευθύνσεις με  $dt > 0$  βρίσκονται στην ίδια πλευρά από αυτό. Μια κατεύθυνση  $(dx, dt)$  με  $dt > 0$  καλείται time-like εάν χωρίζει τις χαρακτηριστικές κατευθύνσεις. Μια space-like κατεύθυνση αντιστοιχεί σε μια υπερηχητική ταχύτητα σχετικά με την κίνηση του αερίου,  $|dx/dt - u| > c$ . Μια time-like κατεύθυνση σε μια υποηχητική ταχύτητα,  $|dx/dt - u| < c$ . Υποθέστε ότι τα συνεχώς διαφορίσιμα στοιχεία ορίζονται σε μια καμπύλη στο  $(x, t)$  - επίπεδο έτσι ώστε αυτή η καμπύλη γίνεται space-like, δηλ. ότι η κατεύθυνσή της γίνεται παντού space-like (σημειώστε ότι εξαρτάται από τα στοιχεία εάν μια καμπύλη είναι ή όχι space-like). Κατόπιν, σύμφωνα με τη θεωρία που εξηγείται στις παραγράφους 24 και 35, μια μοναδική λύση υπάρχει σε μια γειτονιά της καμπύλης και η περιοχή της εξάρτησης κάθε σημείου αποκόβεται της αρχικής καμπύλης από τα δύο χαρακτηριστικά μέσω αυτού του σημείου.

Τώρα εξετάστε δύο τόξα A και B, βλέπε το σχήμα 4, που δίνονται από δύο λειτουργίες  $x(s), t(s)$  με τα συνεχή παράγωγα  $x_s, t_s$ , και  $x^2_s + t^2_s = 0$ , και που εκδίδουν από ένα σημείο O και εσωκλείουν μια γωνιακή περιοχή R. Υποθέστε ότι τα στοιχεία ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο: δύο ποσότητες (το  $u$  και  $p$ ) ορίζονται με έναν συνεχώς διαφορίσιμο τρόπο στο τόξο έτσι ώστε το A γίνεται space-like και έτσι ώστε σε όλα τα σημεία



Εικ.5 Δύο time-like τόξα

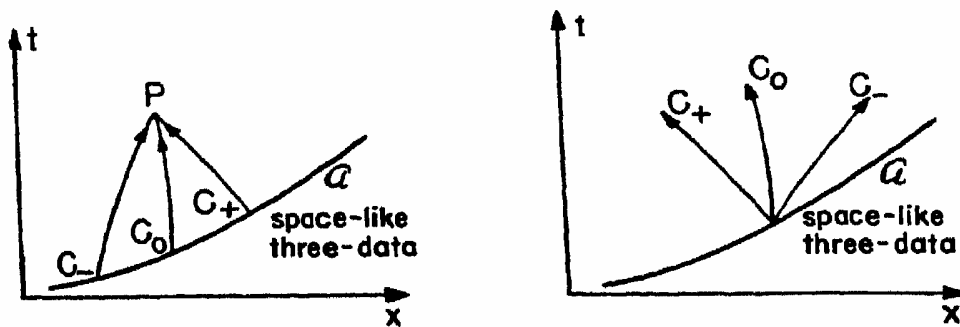


του A και οι δύο χαρακτηριστικές κατευθύνσεις με  $dt > 0$  να δείχνουν το σημείο στο R. Επιπλέον, η κατεύθυνση του τόξου B στο σημείο 0 είναι time-like και μια ποσότητα, όπως το  $u$  ή το  $p$ , ορίζεται πάλι με έναν συνεχώς διαφορίσιμο τρόπο, στο B. Αυτή η ποσότητα πρέπει να πάρει την ίδια αξία σε 0 που έχει δοθεί ήδη στο A. Κατόπιν, στη γειτονιά του A μια μοναδική λύση υπάρχει πάλι, δείτε την παράγραφο 24.

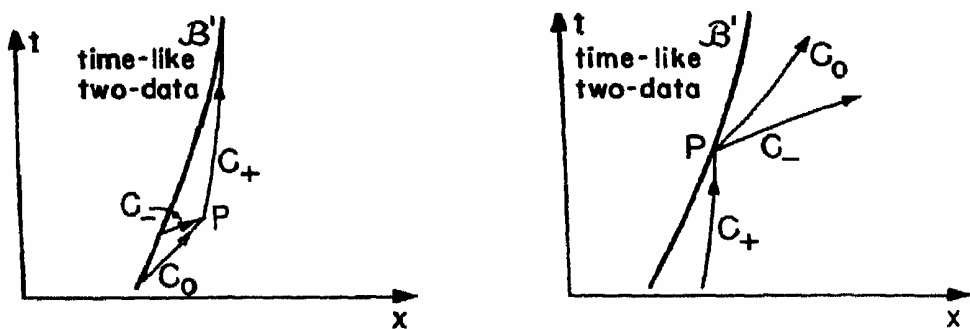
Ένα παράδειγμα των στοιχείων που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο εμφανίζεται στον προσδιορισμό της ροής που προκύπτει όταν ένα έμβολο, αρχίζοντας με την ταχύτητα μηδέν, κινείται μέσα σε ένα αέριο που βρίσκεται αρχικά σε ανάπαυση. Στην πορεία του εμβόλου στο  $(x,t)$  - επίπεδο η ποσότητα  $u$  ορίζεται σαν ίση με την ταχύτητα εμβόλων. Σαφώς η πορεία εμβόλων είναι time-like παντού.

Τέλος, αφήστε κάθε ένα από τα δύο τόξα που εκδίδονται από ένα σημείο 0 να φέρει μια ορισμένη ποσότητα. Παραδείγματος χάριν, αφήστε το A να μεταφέρει την αξία του  $u$ , το B την αξία του  $p$ . Άφησε τις τιμές του  $u$  και του  $p$  στο 0 να είναι τέτοια που και τα δύο τόξα A και B να είναι time-like εκεί. Κατόπιν μια μοναδική λύση υπάρχει πάλι στην εσωκλειόμενη γωνιακή περιοχή σε μια γειτονιά 0, δείτε την παράγραφο 24.

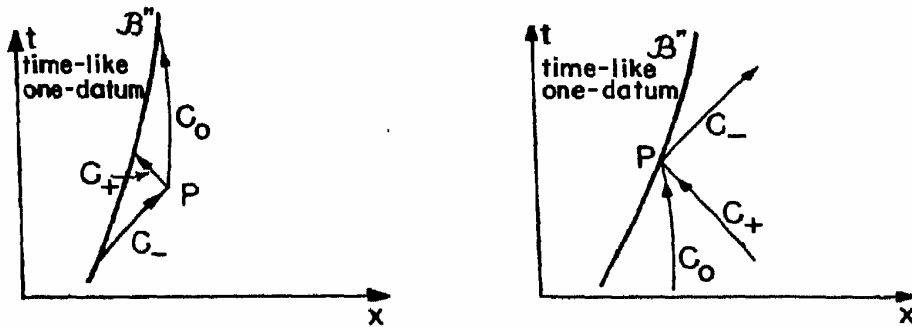
Επίσης στην περίπτωση της μη-ισεντροπικής ροής, όταν περνούν τρία χαρακτηριστικά  $C_-, C_0, C_+$  μέσω κάθε σημείου P, ο αριθμός αρχικών στοιχείων pre-



Εικ.6 Το space-like τόξο με τρία στοιχεία για την μη-ισεντροπική ροή



Εικ.7 Το time-like τόξο με δύο στοιχεία για την μη-ισεντροπική ροή



Εικ.8 Το time-like τόξο με ένα δεδομένο για την μη-ισεντροπική ροή

scribable σε ένα τόξο A ή B εξαρτάται από τον αριθμό χαρακτηριστικών που, όταν από ένα σημείο P προέρχονται πλησίον σε αυτό το τόξο στην κατεύθυνση του μειωμένου t, κόβουν αυτό το τόξο. Τα σχήματα 6 έως 8 επεξηγούν τις διάφορες δυνατότητες.

Η αοριστία μιας λύσης και ο κατάλληλος αριθμός στοιχείων που ορίζονται γίνονται, γενικά, εύκολα προφανή σε μια αριθμητική διαδικασία όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.

### 37. Του Riemann οι αναλλοίωτες.

Παίρνοντας υπόψη την ισεντροπική ροή, οι εξισώσεις II, βλέπε (34.02), για το u και p μπορούν να ενσωματωθούν στη μορφή

$$(37.01) \quad \begin{aligned} u + l(\rho) &= 2r(\beta), \\ u - l(\rho) &= -2s(\alpha), \end{aligned}$$

Στην οποία το  $\gamma(\beta)$  και το  $S(\alpha)$  μπορούν να θεωρηθούν αυθαίρετες λειτουργίες για το  $\alpha$  και το  $\beta$  αντίστοιχα, και στην οποία η ποσότητα  $l(\rho)$  δίνεται από

$$(37.02) \quad l(\rho) = \int_{\rho'}^{\rho} \frac{c}{\rho} d\rho = \int_{\rho'}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho c},$$

τα  $\rho'$  ή  $\rho''$  είναι αυθαίρετες σταθερές. Για τα αέρια μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι  $l=0$  για  $\rho=0$  και ως εκ τούτου  $l>0$  για  $\rho>0$ . Οι ποσότητες  $r$  και  $s$ , που θεσπίστηκαν από τους Earnshaw και Riemann, συχνότερα ονομάζονται του Riemann οι αναλλοίωτες.

Οι εξισώσεις (37.01) εκφράζουν το γεγονός ότι οι εικόνες  $\Gamma_+$  και  $\Gamma_-$  από τα χαρακτηριστικά  $C_+$  και  $C_-$  στο  $(u, p)$  επίπεδο είναι δύο οικογένειες των καμπυλών οι οποίες είναι ανεξάρτητες του διαλύματος υπό εξέταση. Αυτό είναι στην συμφωνία με το γεγονός ότι αυτές οι εξισώσεις είναι αραιώσιμες, βλέπε τμήμα 21.

Για τα πολυτροπικά αέρια έχουμε  $c = \sqrt{A\gamma\rho^{(\gamma-1)/2}}$ , βλέπε (3.06). Ως εκ' τούτου

$$(37.03) \quad l(\rho) = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{A\gamma\rho^{(\gamma-1)/2}},$$

(αφήνοντας το  $\rho' = 0$ ), ή απλώς

$$(37.04) \quad l = \frac{2}{\gamma-1} c.$$

Οι αναλλοίωτες του Riemann, έτσι, δίνονται από

$$(37.05) \quad r = \frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma - 1}, \quad -s = \frac{u}{2} - \frac{c}{\gamma - 1},$$

και συμπεραίνουμε τις ακόλουθες βασικές δηλώσεις

$$(37.06) \quad \frac{dx}{dt} = u + c, \quad \frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma - 1} \text{ is constant along } C_+,$$

$$\frac{dx}{dt} = u - c, \quad \frac{u}{2} - \frac{c}{\gamma - 1} \text{ is constant along } C_-.$$

Είναι ενδιαφέρον ότι στην ειδική περίπτωση  $\gamma=3$  οι χαρακτηριστικές ταχύτητες είναι  $u+c=2r$  για  $C_+$  και  $u-c=2s$  για  $C_-$ : ως εκ τούτου αυτές οι ταχύτητες είναι σταθερό μήκος των χαρακτηριστικών. Με άλλα λόγια, τα χαρακτηριστικά στο  $(x,t)$ -επίπεδο είναι ευθείες γραμμές όταν  $\gamma=3$ .

Τα χαρακτηριστικά  $\Gamma_+$  και  $\Gamma_-$  είναι σταθερές καμπύλες στο  $(u,p)$ -επίπεδο, δηλαδή,

$$(37.07) \quad u + \frac{2\sqrt{A\gamma}}{\gamma - 1} \rho^{(\gamma-1)/2} \text{ is constant for } \Gamma_+,$$

$$u - \frac{2\sqrt{A\gamma}}{\gamma - 1} \rho^{(\gamma-1)/2} \text{ is constant for } \Gamma_-.$$

Αν θεωρήσουμε, αντί των  $u$  και  $p$ ,  $u$  και τον ήχο ταχύτητας  $c$ , ως εφαπτόμενες μεταβλητές, τα χαρακτηριστικά στο  $(u,c)$ -επίπεδο γίνονται ευθείες γραμμές, βλέπε τύπο 9,

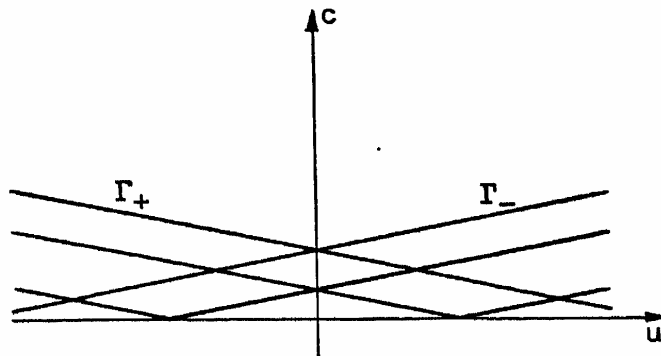
$$(37.08) \quad \frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma - 1} = \text{constant along } \Gamma_+,$$

$$\frac{u}{2} - \frac{c}{\gamma - 1} = \text{constant along } \Gamma_-,$$

με  $C \geq 0$ .

### 38. Ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων της ισεντροπικής ροής.

Πρέπει να διακρίνουμε τρεις τύπους λύσεων (με αναφορά σε μια περιοχή  $R$  στο  $(x,t)$ -επίπεδο). Πρώτα,  $p = \text{σταθερό}$ ,  $u = \text{σταθερό}$  στο  $R$ : ύστερα μιλάμε για μια σταθερή κατάσταση αν και η έκφραση «σταθερή» κατάσταση θα ήταν σωστή. Δεύτερον, είτε το  $\gamma = \text{σταθερό}$  είτε το  $s = \text{σταθερό}$ , στο  $R$ . Η εικόνα στο  $(u,p)$ -επίπεδο της περιοχής  $R$  βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στην καμπύλη  $r = \text{σταθερό}$  ή στο  $s = \text{σταθερό}$ , π.χ. σε ένα χαρακτηριστικό. Σύμφωνα με το τμήμα 29 η ροή στην περιοχή  $R$  είναι ένα απλό κύμα. Τέτοια απλά κύματα θα συζητηθούν στο τμήμα 40. Τέλος, ούτε το  $r$  ούτε το  $s$  είναι σταθερά στο  $R$ . Ακριβέστερα, σε κάθε ζευγάρι τιμών του  $\Gamma$  και του  $s$  που συμβαίνει στο  $R$  αντιστοιχεί μόνο ένα σημείο στο  $R$ . Τότε και μόνο τότε μπορεί το  $s$  και το  $r$  να εισαχθούν ως



παράμετροι αντί των  $u$  και  $p$ . Παρατηρούμε ότι  $dl/dp > 0$  συνεπάγεται ότι  $p$ , και ως εκ τούτου  $c$ , μπορεί να θεωρηθεί λειτουργία του  $l$ . Δεδομένου ότι, (37.01)

$$(38.01) \quad l = r + s, \quad u = r - s,$$

βλέπουμε ότι  $u + c$  και  $u - c$  είναι γνωστές λειτουργίες των  $r$  και  $s$ . Έτσι, οι χαρακτηριστικές εξισώσεις  $I$  με την μορφή

$$(38.02) \quad x_s = (u + c)t_s, \quad x_r = (u - c)t_r,$$

βλέπε (34.02), μπορεί να θεωρηθούν ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων για  $x$  και  $t$  ως λειτουργίες του  $r$  και του  $s$ . Εξαλείφοντας το  $x$ , αποκτούμε μια μερική γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης  $t(r,s)$

$$(38.03) \quad 2ct_{rs} + (u + c)_r t_s - (u - c)_s t_r = 0.$$

Αφού η λειτουργία  $t(r,s)$  βρίσκεται ως λύση σε αυτήν την διαφορική εξίσωση, οι προηγούμενες εξισώσεις αμέσως αποδίδουν την λειτουργία  $x(r, s)$ . Σε περίπτωση πολυτροπικού αερίου,

με  $c = \frac{\gamma - 1}{2} (r + s)$ ,  $u = r - s$ , βλέπε (37.04) και (38.01), η εξίσωση (38.03) γίνεται

$$(38.04) \quad 2\mu^2 t_{rs} + \frac{1}{r + s} (t_r + t_s) = 0$$

με, βλέπε (14.06),

$$\mu^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

Μια ισοδύναμη εξίσωση είχε πρώτα επεξεργαστεί από τον Riemann. Του λόγου του αληθές, αυτό ήταν το πρόβλημα της μονοδιάστατης ροής αερίου που οδήγησε τον Riemann να αναπτύξει την δική του διάσημη θεωρία των γραμμικών υπερβολικών εξισώσεων. Στην ειδική περίπτωση των πολυτροπικών αερίων που θεωρούνται εδώ, μια ρητή λύση για το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι πιθανή μέσω της υπεργεωμετρικής λειτουργίας, βλέπε τμήμα 82.

Για τις ειδικές τιμές

$$(38.05) \quad \gamma = \frac{2N + 1}{2N - 1}, \quad \mu^2 = 1/2N, \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

π.χ. για  $\gamma = -1, 3, 5/3, 7/5, \dots$ ,

εξίσωση (38.04) μπορεί ακόμα να ενσωματωθεί ρητά μέσω των στοιχειώδη λειτουργιών.

Για  $N=0, \gamma = -1$ , βλέπε τμήμα 4, έχουμε  $2\mu^2 = \infty$ , και η εξίσωση (38.04) μειώνεται στην εξίσωση γραμμικού κύματος  $t_{rs} = 0$ , με τη γενική λύση  $t = f(r) + g(s)$  όσον αφορά τις αυθαίρετες λειτουργίες  $f$  και  $g$ .

Για  $\gamma=3$  έχουμε  $2\mu^2=1$ , και η εξίσωση (38.04) μειώνεται σε

$$(r + s)t_{rs} + t_s + t_r = 0$$

Η

$$((r + s)t)_{rs} = 0,$$

που έχει την γενική λύση

$$(38.06) \quad t = \frac{1}{r + s} (f(r) + g(s)),$$

με τις αυθαίρετες λειτουργίες  $f$  και  $g$ .

Η γενική λύση της εξίσωσης (38.04) για τις ειδικές τιμές (38.05) του  $\gamma$  (με  $N \geq 1$ ) είναι όπως εύκολα επαληθεύεται,

$$t = k + \frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}} \frac{f(r)}{(r+s)^N} + \frac{\partial^{N-1}}{\partial s^{N-1}} \frac{g(s)}{(r+s)^N},$$

με τις αυθαίρετες λειτουργίες  $f$  και  $g$  και κάθε σταθερό  $k$ . Με την κατάλληλη επιλογή των  $f(r)$ ,  $g(s)$  και  $k$  οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος μπορούν να ικανοποιηθούν.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η τιμή  $1.4=7/5$  το  $\gamma$  για τον αέρα εμφανίζεται μεταξύ των ειδικών τιμών της (38.05) : η τιμή  $\gamma=11/9=1.2$  μπορεί συχνά να χρησιμοποιηθεί για τα αέρια που παράγονται από την καύση ή από άλλες χημικές διεργασίες.

Όπως θα δούμε στο τμήμα 82 οι προηγούμενες παρατηρήσεις έχουν σημαντικές εφαρμογές στην θεωρία της αλληλεπίδρασης των κυμάτων.

### **39. Παρατηρήσεις στη αντιπροσώπευση του Lagrangian.**

Όχι ιδιαίτερα καινούριες ιδέες συμβαίνουν στην αντιπροσώπευση του Cagrarian, βλέπε

κεφάλαιο I τμήμα 18. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές  $h = \int_{x_0}^x \rho(\xi) d\xi$  και  $t$  είναι συνδεδεμένες με  $t, s$  εξαρτημένες μεταβλητές  $u$  και  $t$  μέσω της σχέσης

$$(39.01) \quad dx = \tau dh + u d\tau,$$

που ακολουθείται από την (18.02.2) και  $Xt = u$ . Εισάγοντας αυτή τη σχέση στις χαρακτηριστικές εξισώσεις (34.02-03) αποκτούμε την χαρακτηριστική μορφή για τις διαφορικές εξισώσεις (18.12) μιας ισεντροπικής ροής στις συντεταγμένες του Lagrangian,

$$(39.02) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & C_+ : h_\alpha = k(\tau)t_\alpha, \quad \Gamma_+ : u_\alpha = k(\tau)\tau_\alpha, \\ & \text{II} \\ & C_- : h_\beta = -k(\tau)t_\beta, \quad \Gamma_- : u_\beta = -k(\tau)\tau_\beta, \end{array}$$

στο οποίο  $k(\tau) = c(\tau)/\tau$  είναι η αντίσταση, βλέπε (18.09). Τα χαρακτηριστικά  $\Gamma_+$  και  $\Gamma_-$  στο  $(u, \tau)$  – επίπεδο μπορούν επίσης να περιγραφτούν ρητά :

$$(39.03) \quad u = \pm \int_0^\tau k(\tau) d\tau = \text{constant}.$$

Για μη-ισεντροπική ροή η αντίσταση  $k$  εξαρτάται από την συγκεκριμένη εντροπία  $S$  και επιπλέον στο συγκεκριμένο όγκο  $\tau$ . Το τρίτο χαρακτηριστικό της εξίσωσης είναι

$$I_0 \quad C_0 : dh = 0,$$

εκφράζοντας ότι η Τρίτη χαρακτηριστική καμπύλη είναι η πορεία των σωματιδίων. Η αντίστοιχη εξίσωση II είναι

$$II_0 \quad \Gamma_0 : dS = 0$$

και μπορεί να ενσωματωθεί σε

$$S = S(h).$$

Έτσι, αν η εντροπία  $S$  είναι γνωστή ως μια λειτουργία του  $h$ , εκ των προτέρων, μόνο δύο εξισώσεις I παραμένουν να λυθούν, βλέπε κεφάλαιο I, τμήμα 18.

## **B. Αραιωμένα και Συμπιεσμένα Κύματα.**

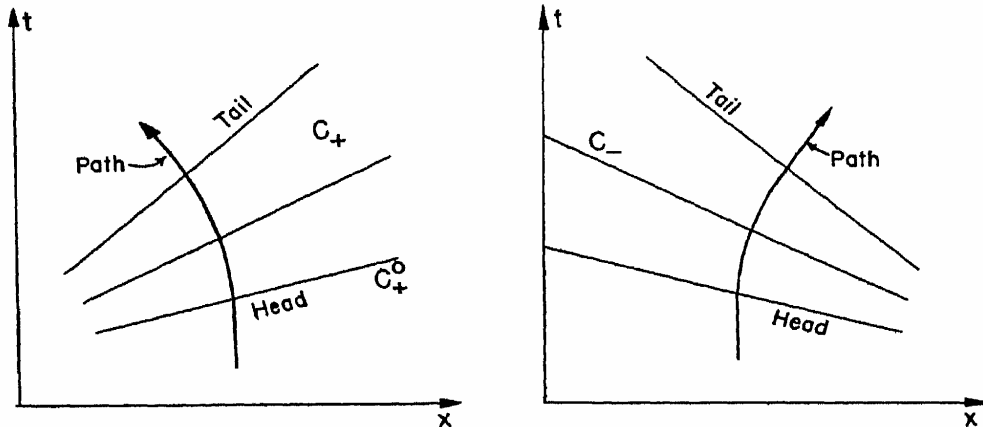
### **40. Απλά κύματα.**

Στο τμήμα 38 τρεις τύποι λύσεων διακρίθηκαν μεταξύ άλλων ισεντροπικών ροών :

1. η σταθερή κατάσταση στην οποία το  $u$  και  $p$  είναι σταθερά,
2. το απλό κύμα στο οποίο το  $r$  και το  $s$  είναι σταθερά και
3. η γενική ροή στην οποία ούτε το  $r$  ούτε το  $s$  είναι σταθερά.

Τα απλά κύματα συχνά χρησιμοποιούνται στην δημιουργία λύσεων στα προβλήματα της μονοδιάστατης ισεντροπικής ροής. Σε αυτό το τμήμα θα συζητήσουμε για τέτοια απλά κύματα

δε γενικούς όρους : στα επόμενα τμήματα θα τα χρησιμοποιήσουμε για την λύση συγκεκριμένων προβλημάτων .



Μια βασική ιδιότητα απλών κυμάτων που προέκυψαν στο τμήμα 29 ήταν : τα χαρακτηριστικά  $C$  ενός είδους είναι ευθείες γραμμές σε ένα  $(x, t)$  - επίπεδο . Με άλλα λόγια , αυτά τα χαρακτηριστικά αντιπροσωπεύουν ένα πολλαπλασιασμό με σταθερή ταχύτητα . Ειδικότερα, αν η αμετάβλητη  $-2s = u - I(\rho)$  είναι σταθερή στην περιοχή κύματος, το  $C_+$  - χαρακτηριστικές γραμμές ,  $r =$  σταθερό , είναι ευθείες. Η ταχύτητα του αντίστοιχου ηχητικού κύματος ,  $u$   $t$   $c$  , είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα σωματιδίου  $u$  : συνεπώς, η πορεία του σωματιδίου εισέρχεται σε κάθε χαρακτηριστικό από τα δεξιά, π.χ. έρχεται από το μέρος με τις μεγαλύτερες τιμές του  $x$ . Αυτό το γεγονός υποδεικνύεται καλώντας τέτοια κύματα στραμμένα προς τα εμπρός. Αν , από την άλλη μεριά, το  $2r = u + I(\rho)$  είναι σταθερό στην περιοχή της ροής , τα  $C_-$  - χαρακτηριστικά είναι ευθεία , και τα απλά κύματα ονομάζονται στραμμένα προς τα πίσω .

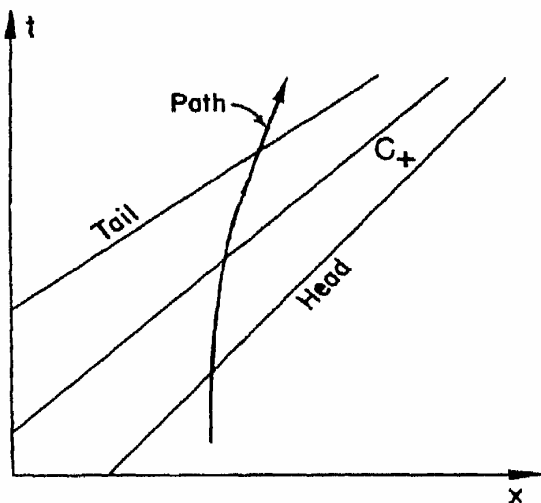


FIG. 12. Forward-facing

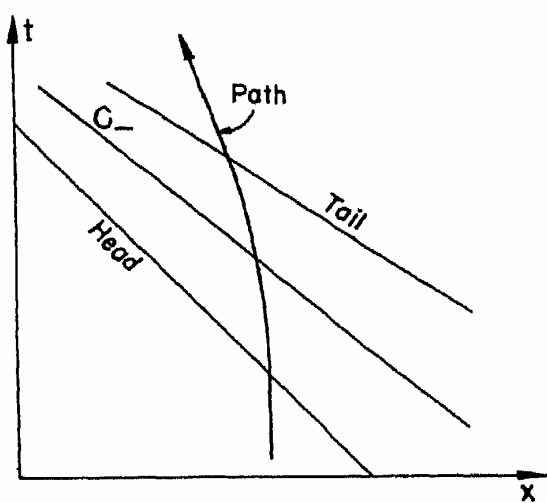


FIG. 13. Backward-facing

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα στο τμήμα 29 η ροή δίπλα σε μια σταθερή κατάσταση είναι απλό κύμα. Σαφώς , η μετάβαση από τη ζώνη μιας σταθερής ροής σε αυτή ενός απλού κύματος λαμβάνει χώρα σε ένα χαρακτηριστικό. Υποθέτοντας το απλό κύμα να είναι στραμμένο προς τα μπροστά. Η μετάβαση ανάμεσα σε μια περιοχή κύματος και σε μια περιοχή σταθερότητας λαμβάνει χώρα σε ένα χαρακτηριστικό,  $C_+^0$  , ονομάζεται επικεφαλής του κύματος αν το αέριο εισέρχεται σε όλο το κύμα , η ουρά του κύματος αν το αέριο φεύγει απ'

όλο το κύμα. Ας αφήσουμε το  $u_0$  και το  $p_0$  να είναι η ταχύτητα και η πυκνότητα σε μια περιοχή σταθερής ροής, τότε σε όλη τη περιοχή του απλού κύματος

$$(40.01) \quad u - l = u_0 - l_0, \quad l_0 = l(\rho_0).$$

Ειδικότερα, εάν η αρχική χαρακτηριστική τερματίζει μια κατάσταση ηρεμίας

$$(40.02) \quad u - l = -l_0.$$

Από το  $dl/d\rho > 0$  και  $dp/d\rho > 0$  βλέπουμε ότι η πυκνότητα και η πίεση αλλάζουν με την ίδια έννοια όπως η ταχύτητα ενός αερίου κατά μήκος ενός στραμμένου προς τα μπροστά απλού κύματος ( και με την αντίθετη έννοια κατά μήκος ενός στραμμένου προς τα πίσω απλού κύματος).

Ένα απλό κύμα ονομάζεται επεκταμένο ή αραιωμένο κύμα αν η πίεση και η πυκνότητα ενός σωματιδίου αερίου μειώνονται διασχίζοντας το : αν η πίεση και η πυκνότητα αυξάνονται, τότε το κύμα ονομάζεται συμπιεσμένο ή συμπυκνωμένο κύμα.

Η ταχύτητα διάδοσης  $dx/dt$  των «ηχητικών κυμάτων» εκπροσωπούνται από τα ευθύ χαρακτηριστικά  $C_+$  είναι, σύμφωνα με την (34.09) και την (40.01) δίνεται από,

$$(40.03) \quad \frac{dx}{dt} = c(\rho) + l(\rho) - l_0 + u_0.$$

Ο ρυθμός μεταβολής αυτής της ταχύτητας σε σχέση με την ταχύτητα αερίου

$$u = l(\rho) - l_0 + u_0 \text{ είναι}$$

$$(40.04) \quad \frac{dc + dl}{dl} = \frac{\rho dc + c d\rho}{c d\rho} = \frac{d(\rho c)}{c d\rho} = -\frac{\gamma g_{rr}}{2g_r} > 0,$$

από την (2.04), (2.05) και τη βασική υπόθεση (2.06). Ως εκ τούτου, για ένα στραμμένο προς τα μπροστά κύμα,

$$(40.05.1) \quad \frac{d(u + c)}{du} > 0.$$

Παρομοίως, για ένα στραμμένο προς τα πίσω απλό κύμα, στο οποίο  $u + l = l_0$ , έχουμε, από την (40.04),

$$(40.05.2) \quad \frac{d(u - c)}{du} > 0.$$

Με άλλα λόγια, αν η ταχύτητα αερίου  $u$  αυξάνεται κατά μήκος μιας ζώνης απλού κύματος, η ταχύτητα διάδοσης των ηχητικών κυμάτων,  $u + c$  ή  $u - c$ , επίσης αυξάνεται.

Για τα πολυτροπικά αέρια βρίσκουμε, βλέπε (37.04),  $l(\rho) = \frac{2c(\rho)}{\gamma - 1}$ . Παρ' όλα αυτά για την βασική σχέση ενός στραμμένου προς τα μπροστά απλού κύματος, βλέπε (40.01) είναι

$$(40.06) \quad u - \frac{2}{\gamma - 1} c = u_0 - \frac{2}{\gamma - 1} c_0;$$

ή, ιδίως, αν η αρχική κατάσταση (0) είναι μια κατάσταση αδράνειας,

$$(40.07) \quad u - \frac{2}{\gamma - 1} c = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0,$$

όπου το  $C_0$  είναι ο ήχος ταχύτητας ενός απόλυτου αερίου. Με την συντομογραφία, βλέπε (14.06)

$$(40.08) \quad \mu^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad 1 - \mu^2 = \frac{2}{\gamma + 1},$$

η σχέση (40.06) μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$$(40.09) \quad \mu^2(u - u_0) = (1 - \mu^2)(c - c_0).$$

Τυχαιά αυτή η τελευταία εξίσωση είναι απλά η εξίσωση ενός μόνο χαρακτηριστικού  $\Gamma$  στο  $(u, c)$  – επίπεδο το οποίο ανήκει στο απλό κύμα σύμφωνα με την γενική θεωρία του κεφαλαίου II, τμήμα 29. Τυχαιίει να είναι επίσης ευθεία, βλέπε τύπο 13 στο τμήμα 37.

Οι ποσότητες  $p, \rho$  και  $c$  σε ένα στραμμένο προς τα μπροστά απλό κύμα μπορούν εύκολα να εκφραστούν όσον αφορά την ταχύτητα  $u$  χρησιμοποιώντας την (40.06) και

$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma, c/c_0 = (\rho/\rho_0)^{(\gamma-1)/2}$ , βλέπε (3.03), (3.06). Τότε

$$\begin{aligned} p &= p_0 \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u-u_0}{c_0} \right]^{2\gamma/(\gamma-1)}, \\ \rho &= \rho_0 \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u-u_0}{c_0} \right]^{2/(\gamma-1)}, \\ c &= c_0 + \frac{\gamma-1}{2} (u-u_0), \end{aligned} \quad (40.10)$$

$$u+c = u_0+c_0 + \frac{\gamma+1}{2} (u-u_0).$$

Για αργότερους σκοπούς σημειώνουμε ότι οι όροι της πρώτης και της δεύτερης σειράς στις επεκτάσεις των  $p-p_0, \tau-\tau_0$ , και  $\rho-\rho_0$  των αρμοδιοτήτων του  $u-u_0$ ,

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho_0 c_0 (u-u_0) + \frac{\gamma+1}{4} \rho_0 (u-u_0)^2 + \dots, \\ (40.11) \quad \tau &= \tau_0 - \tau_0 c_0^{-1} (u-u_0) + \frac{\gamma+1}{4} \tau_0 c_0^{-2} (u-u_0)^2 + \dots, \\ \rho &= \rho_0 + \rho_0 c_0^{-1} (u-u_0) + \frac{3-\gamma}{4} \rho_0 c_0^{-2} (u-u_0)^2 + \dots, \end{aligned}$$

στο οποίο το  $\gamma p_0 = \rho_0 c_0^2$  έχει χρησιμοποιηθεί. Είναι χρήσιμα στην επεξεργασία του αδύναμου ή μέτριου ισχυρού απλού κύματος, δηλαδή, σε εκείνα που λαμβάνουν χώρα σχετικά μικρές αλλαγές, βλέπε τμήμα 74.

#### **41. Παραμόρφωση μιας μορφής κυμάτων σε ένα απλό κύμα.**

Για να απεικονίσουμε την ροή αερίου σε ένα απλό κύμα μπορούμε να περιγράψουμε πως η μορφή κύματος ή η διανομή των ποσοτήτων  $u, c, p, \rho$  ως λειτουργίες του  $x$  αλλάζει με τον χρόνο  $t$ . Υποθέτουμε ότι το απλό κύμα είναι στραμμένο προς τα μπροστά και η διανομή των  $u$  και  $c$  στον χρόνο  $t=0$  δίνεται από δύο λειτουργίες  $u=F(x), c=G(x)$  ικανοποιώντας την σχέση  $u-1 = \text{σταθερό}$ , βλέπε (40.01), στην οποία το 1 είναι μια δεδομένη λειτουργία του  $c$ . Το ηχητικό κύμα προς τα εμπρός που εξέρχεται από το σημείο  $x=\xi$  στον χρόνο  $t=0$  διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα  $u+c$  και μεταφέρει με σταθερές τιμές του  $u$  και  $c$ . Η πορεία του επομένως αντιπροσωπεύεται από

$$(41.01) \quad x = \xi + (u+c)t, \quad u = F(\xi), \quad c = G(\xi).$$

Το γεγονός ότι το  $u$  και το  $c$  είναι σταθερά σε αυτή τη πορεία εκφράζεται από τις σχέσεις

$$(41.02) \quad u = F(x - (u+c)t), \quad c = G(x - (u+c)t).$$

Αυτές οι εξισώσεις δεν αντιπροσωπεύουν τα  $u$  και  $c$  ως λειτουργίες του  $x$  και του  $t$ : για να ληφθούν τέτοιες αντιπροσωπεύσεις θα πρέπει να λυθούν το  $u$  και το  $c$ . Παρ' όλα αυτά, αυτές οι εξισώσεις είναι αρκετά διαφωτιστικές όταν έρχονται σε αντίθεση με τη σχέση

$$(41.03) \quad u = F(x - c_0 t), \quad c = c_0 = \text{σταθερό}$$

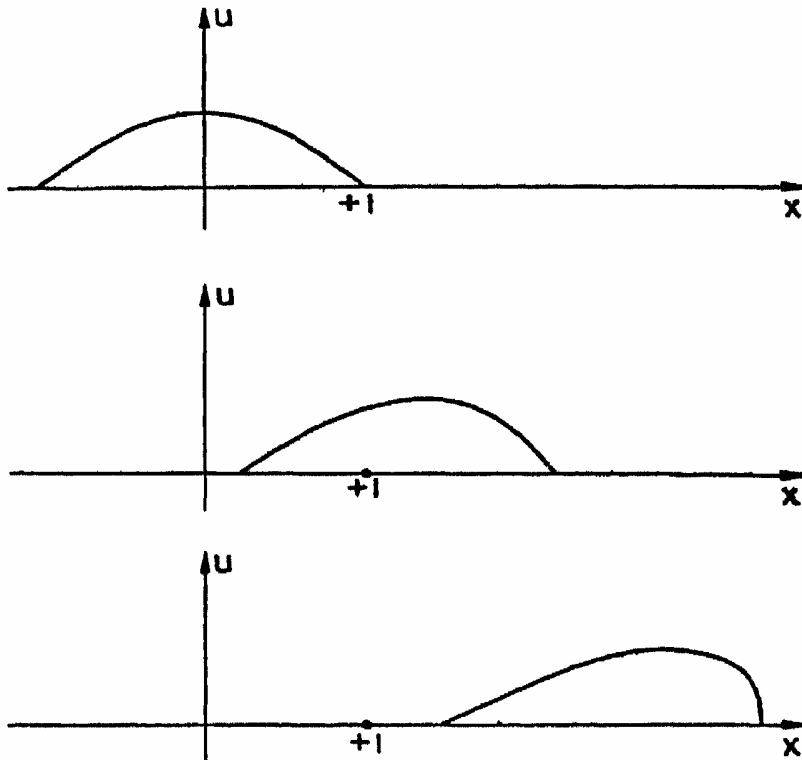


η οποία εκφράζει τη διάδοση μιας αρχικής μορφής κύματος  $u = F(x)$  στην γραμμική κίνηση κύματος. Ενώ σε ένα γραμμικό κύμα η μορφή κύματος κινείται χωρίς να αλλάζει, σε ένα μη γραμμικό απλό κύμα γίνεται παραμορφωμένη. Για τις τιμές των  $u$  και  $c$  που μεταδίδονται από τον ήχο κυμάτων που εξέρχονται από διαφορετικά σημεία  $x = \xi$  με ταχύτητες  $u + c$  τα οποία είναι, γενικά, διαφορετικά.

Για να περιγράψουμε αυτήν την μεταμόρφωση διερευνούμε πως η κλίση του προφίλ ταχύτητας, μετρήθηκε με το παράγωγό του  $u_x(x, t)$ , διαφέρει στον χρόνο. Από (41.01) έχουμε

$$(41.04) \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} \bigg/ \frac{\partial x}{\partial \xi} = F'(\xi) / \{1 + (F'(\xi) + G'(\xi))t\}.$$

Αν ένα κύμα είναι αραιωμένο κύμα, έχουμε  $F'(\xi) > 0$  και ως εκ τούτου  $F'(\xi) + G'(\xi) > 0$  από την (40.05.1) : συνεπώς, ο παρονομαστής στο δεξί μέλος της (41.04) αυξάνεται με το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι κατά τη διάρκεια του χρόνου το προφίλ ταχύτητας σε ένα απλό αραιωμένο κύμα ισιώνει έξω. Σε ένα συμπιεσμένο κύμα, από την άλλη μεριά, το προφίλ ταχύτητας σταδιακό κάνει μια κλίση. Στην πραγματικότητα, ο παρονομαστής στην (41.04) είναι πιθανό σε ένα συμπιεσμένο κύμα να φτάσει το μηδέν η σπουδαιότητα αυτής της πιθανότητας θα συζητηθεί στα τμήματα 48 και 50.



Η ισοπέδωση και η κλίση ενός προφίλ ταχύτητας απεικονίζεται στον τύπο 14.

#### **42. Διαδρομές σωματιδίων και διασταυρώσεις - χαρακτηριστικά με ένα απλό κύμα.**

Τα ευθεία χαρακτηριστικά προς τα εμπρός - αντιμετωπίζουν ένα απλό κύμα που μπορεί να περιγραφεί από τον τύπο

$$(42.01) \quad x = \xi + (u + c)t$$

στον οποίο  $\xi = \xi(\beta)$ ,  $u = u(\beta)$ ,  $c = c(\beta)$ , είναι δοσμένες συναρτήσεις ικανοποιώντας την σχέση  $u + 1 = \text{σταθερό}$ , το 1 είναι δοσμένη συνάρτηση του  $c$ , βλέπε (40.01) και το άρθρο 41.

Κάθε διαδρομή μπορεί τότε να περιγραφεί παραμετρικά δίνοντας  $t$  ως συνάρτηση του  $\beta$  μέσω του (42.01). Για τις διαδρομές των σωματιδίων η συνάρτηση  $x(\beta)$  είναι για να ικανοποιήσει την κατάσταση  $dx/dt = u$  ή  $x_\beta = ut_\beta$ , από την οποία, μέσω της (42.01), η κατάσταση

$$(42.02) \quad ct_\beta + (u_\beta + c_\beta)t = -\xi_\beta$$

αποτελέσματα, μια γραμμική διαφορική εξίσωση για  $t = t(\beta)$ .

Για τις διασταυρώσεις - χαρακτηριστικά, στην προκειμένη περίπτωση, η C. - χαρακτηριστικά, που βρίσκουμε, με παρόμοιο τρόπο, από την  $dx/dt = u - c$ ,

$$(42.03) \quad 2ct_\beta + (u_\beta + c_\beta)t = -\xi_\beta.$$

Για πολυτροπικά αέρια, ειδικότερα, έχουμε

$$(42.04) \quad c = \mu^2(u + c) + (1 - \mu^2)c_0,$$

δείτε (40.09), με την  $\mu^2 = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$  και αν υποθεθεί ότι  $u_0 = 0$ . Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις έχουν επομένως ρητή λύση,

$$(42.05) \quad t = -c^{-\mu-2} \left\{ \int c^{\mu-2-1} \xi_\beta d\beta + \text{constant} \right\}$$

για τις διαδρομές των σωματιδίων και

$$(42.06) \quad t = \frac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}\mu-2} \left\{ \int c^{\frac{1}{2}\mu-2-1} \xi_\beta d\beta + \text{constant} \right\}$$

για τη διασυννοριακή C. - χαρακτηριστικά. Σχήματα 19 και 20 απεικονίζουν μία συγκεκριμένη υπόθεση.

Αυτοί οι τύποι εύκολα μπορούν να προσαρμοστούν με την περίπτωση ενός απλού κύματος που παράγεται από τη δράση ενός εμβόλου σε ένα σωλήνα του αερίου το οποίο, κατά τη στιγμή  $t = 0$ , είναι σε κατάσταση ηρεμίας, και έχει σταθερή πίεση και την ταχύτητα του ήχου. Ας υποθέσουμε ότι αρχικά το έμβολο βρίσκεται στο σημείο  $x = 0$ , και ότι το αέριο βρίσκεται στα δεξιά του,  $x > 0$ , και έχει ταχύτητα ήχου  $c_0$ . Αν η κίνηση του εμβόλου δίνεται από

$$(42.07) \quad x = X(t),$$

το αποτέλεσμα είναι ότι το απλό κύμα μπορεί να περιγραφεί από

$$(42.08) \quad x = X(\beta) + (u + c)(t - \beta),$$

αντί του (42.01). Εδώ  $u = X(\beta)$  ενώ η  $c$  μπορεί να εκφραστεί από την άποψη της  $u$ , λόγω του  $u + 1 = 1_0 = \text{σταθερό}$ , ειδικότερα, για πολυτροπικά αέρια, με (42,04). Πάλι τα μονοπάτια των σωματιδίων και οι διασταυρώσεις - χαρακτηριστικά μπορεί να περιγραφούν από  $t$  δίνοντας ως συνάρτηση του  $\beta$ . Προσαρμόζοντας τον τύπο (42.05), ή rederiving τον ανάλογο τύπο από την (42.08), λαμβάνει κανείς την ιδιαίτερη απλή αναπαράσταση των πολυτροπικών αερίων

$$(42.09) \quad t = \beta + t_0(c/c_0)^{-\mu-2}$$

για τις διαδρομές των σωματιδίων, στις οποίες το σωματίδιο θεωρητικά διασχίζει την κεφαλή,  $x_0 = c_0 t$ , από τη ζώνη κύματος.

Μια παρόμοια, αλλά όχι και τόσο απλή έκφραση θα μπορούσε να προκύψει για τη διασταύρωση - χαρακτηριστικά..

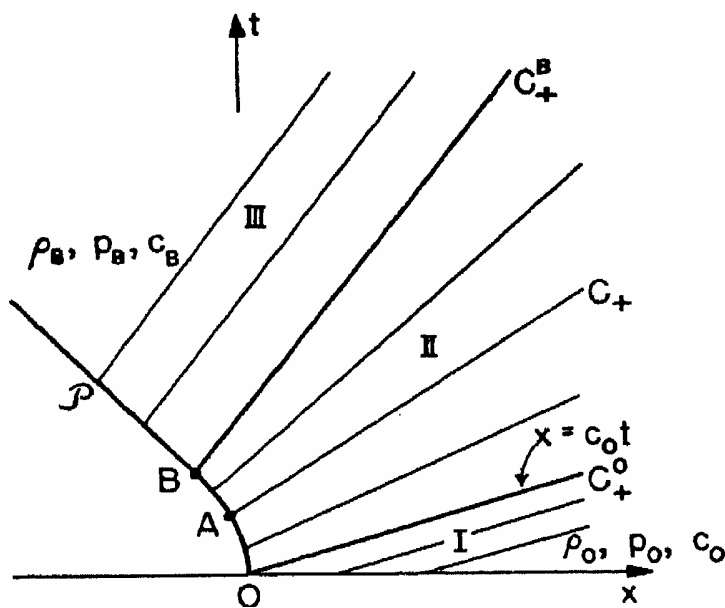
### **43. Τα αραιωμένα κύματα.**

Στο τμήμα αυτό και στα επόμενα κεφάλαια το κύριο θέμα θα είναι η κίνηση που προκαλείται από ένα έμβολο που κινείται σε ένα αέριο το οποίο είναι αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας.

Δεν έχει σημασία αν το έμβολο υποχωρεί ή προωθείται μέσα στο αέριο, δεν είναι όλα τα μέρη του αερίου που επηρεάζονται ακαριαία. Ένα «κύμα» είναι έσοδο από το έμβολο στο φυσικό αέριο και μόνο τα σωματίδια που έχουν επιτευχθεί από το μέτωπο του κύματος διαταράσσονται από την αρχική τους κατάσταση ανάπαυσης. Αν αυτό το κύμα αντιπροσωπεύει μία κίνηση που συνεχίζεται, όπως είναι πάντα η περίπτωση, εάν το έμβολο υποχωρεί από το αέριο, το μέτωπο κύματος εξελίσσεται με τον ήχο  $C_0$  ταχύτητας του αερίου ήσυχο. Αν το έμβολο κινείται στο φυσικό αέριο, η κατάσταση μπορεί να γίνει πιο περίπλοκη με την εμφάνιση ενός υπερηχητικού ασυνεχούς ωστικού κύματος, όπως θα δούμε, είναι πάντα ένα απλό κύμα, βλέπε σχήμα 15.

Διακρίνουμε μεταξύ εκτεταμένης και συμπιεστικής κίνησης και εξετάζουμε πρώτα την επεκτατική δράση ενός εμβόλου υποχωρώντας, υποθέτοντας ότι το μέσο είναι ένα αέριο αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας με σταθερή πυκνότητα  $\rho_0$  και ταχύτητα ήχου  $c_0$ . Περαιτέρω, υποτίθεται ότι το έμβολο, αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας, έχει αποσυρθεί με αυξανόμενη ταχύτητα έως ότου τελικά η σταθερά ταχύτητα  $u_B > 0$  επιτυγχάνεται. Στη συνέχεια, η «διαδρομή»  $P$  στο  $(x, t)$  - αεροπλάνο, το οποίο παριστά την κίνηση του εμβόλου, κάμπτεται προς τα πίσω από την προέλευση  $O$  σε ένα σημείο  $B$ , όπου η  $u_B$  κλίση σε σχέση με το  $t$  - άξονα επιτυγχάνεται και στη συνέχεια συνεχίζεται ως ευθεία γραμμή προς την ίδια κατεύθυνση, όπως δείχνεται στα σχήματα 15, 16, 17.

Η διαταραχή στο αέριο που προκύπτει από την κίνηση του εμβόλου μεταδίδεται στο αδιατάρακτο αέριο με ήχο ταχύτητας  $c_0$ , που αντιστοιχεί στη  $(\rho_0, P_0)$  κατάσταση, του μη διαταραγμένου αερίου. Αυτό απορρέει από το θεμελιώδες γεγονός ότι ο τομέας της εξάρτησης της  $x > x_0 t$  ζώνης είναι το θετικό μέρος  $x > 0$  του  $x$  - άξονα, έτσι ώστε η αρχική κατάσταση ηρεμίας εκεί προϋποθέτει διαρκή κατάσταση ηρεμίας ως τη μόνη λύση των διαφορικών εξισώσεων, βλέπε παράγραφο 28. (Ο τομέας της εξάρτησης για ένα σημείο αυτής της περιοχής λαμβάνεται με χάραξη του  $C_+$  χαρακτηριστικού και  $C_-$  μέσα από αυτό μέχρι το σημείο τομής τους με το  $x$  - Άξονα). Η ροή που προκύπτει από την κίνηση του εμβόλου περιορίζεται συνεπώς στην περιοχή  $x \leq x_0 t$ . Δεδομένου ότι η περιοχή είναι γειτονική περιοχή της σταθερότητας, η ροή είναι ένα απλό κύμα, βλέπε τμήμα 40. Προφανώς, πρόκειται για μια προς τα εμπρός - αντιμετώπιση απλού κύματος από τότε που το αέριο εισέρχεται



ΣΧ. 15. Απλή περιοχή κύματος (II) που συνδέει δύο περιοχές (I) και (III) της σταθερής περιοχής ( $-u_B < l_0$ ).

αυτή η περιοχή από τα δεξιά. Στην περιοχή αυτή των κυμάτων, ως εκ τούτου  $u - l = l_0$  είναι σταθερή, βλέπε (40,02). Δεδομένου ότι κατά μήκος της διαδρομής του εμβόλου  $x = X(t)$ , η ταχύτητα αερίου συμφωνεί με την ταχύτητα του εμβόλου  $\dot{x} = \dot{X}(t) = u_p(t)$ , το  $p$  πυκνότητας, και ως εκ τούτου η πίεση  $p$  και ο ήχος ταχύτητας  $c$  είναι εκτιμημένα από την  $l = l_0 + u_p t$ , δεδομένου ότι  $dl / dp > 0$  και  $dp/dp > 0$ . Η κλίση  $u + c$  από τα ευθεία χαρακτηριστικά εκδίδονται από τη διαδρομή του εμβόλου ομοίως εκτιμημένα: ως εκ τούτου, το απλό κύμα είναι εκτιμημένο ως σύνολο. Δεδομένου ότι το έμβολο θεωρήθηκε να αποσυρθεί και η ταχύτητα  $u_p$  μειώνεται, σύμφωνα με τη δήλωση που κάναμε στο σημείο 40 η πυκνότητα και η πίεση μειώνονται επίσης στο κύμα. Έτσι, το κύμα είναι ένα κύμα αραιώσης. Επίσης, όπως φαίνεται στο τμήμα 40, το  $dx / dt = u + c$  ταχύτητα του μπροστινού ήχου αλλάζει κύματα με την ίδια έννοια όπως η  $u$  ταχύτητα του αερίου και, κατά συνέπεια, δεδομένου ότι η ταχύτητα  $u$  και ως εκ τούτου η  $u + c$  μειώνεται, οι χαρακτηριστικές ευθείες εκδίδονται από την καμπύλη εξωτερικού εμβόλου.

#### **44. Ταχύτητα διαφυγής. Πλήρεις και ημιτελείς κύματα αραιώσης.**

Η παραπάνω κατασκευή είναι να τροποποιηθεί εάν η τελική ταχύτητα εμβόλου  $-u_B$  υπερβαίνει ένα ορισμένο όριο. Ο λόγος είναι ότι ο νόμος της αραιώσης εκφράζεται από  $u = l - l_0$  ώστε να γίνεται χωρίς νόημα, τόσο σύντομα όσο  $|u_B| < l_0$ , όσο  $l \geq 0$  βλέπε τμήμα 37. Η  $l_0$  ποσότητα για 'αυτό ονομάζεται η ταχύτητα διαφυγής του αερίου σε κατάσταση ηρεμίας αρχικά. Για αέρια πολυτροπικά έχουμε από (37.04)

$$(44.01) \quad l_0 = \frac{2}{\gamma - 1} c_0.$$

Αν η  $-u_p$  φθάσει την ταχύτητα διαφυγής η αραιώση αραιώνει το φυσικό αέριο κάτω από την πυκνότητα μηδέν: η πίεση και η ταχύτητα του ήχου, μειώνονται επίσης στο μηδέν. Εάν ένα κύμα αραιώσης εκτείνεται σε αυτό το στάδιο αυτό ονομάζεται πλήρες κύμα αραιώσης όπως τελειώνει σε κενό.

Για την ουρά του κύματος διαστολής υπάρχουν δύο πιθανά αποτελέσματα, ανάλογα με το αν ή όχι η τελική ταχύτητα  $-u_B$  του εμβόλου είναι κάτω από τη  $l_0$  ταχύτητα διαφυγής.

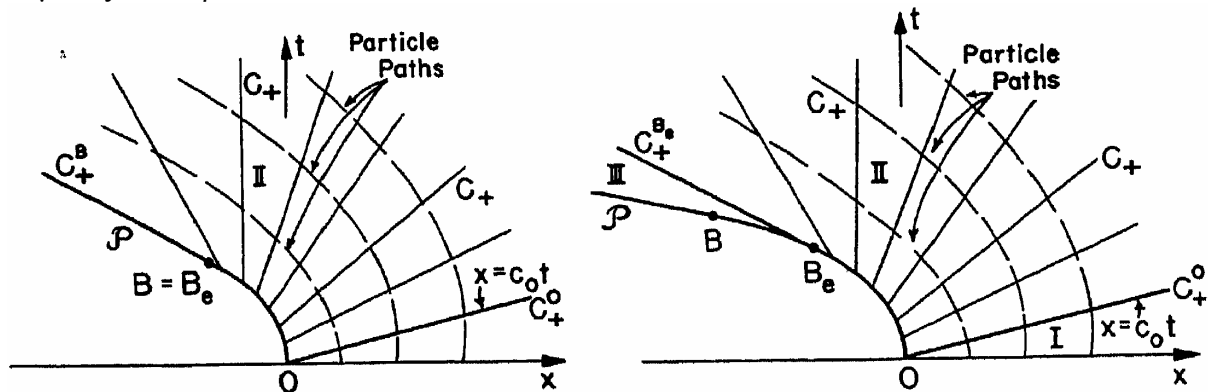
Αν  $-u_B < l_0$ , η παρουσίαση κατασκευής του απλού κύματος δίνει την ευθεία χαρακτηριστικά  $C_+$  μέσα από κάθε σημείο A στο μονοπάτι του εμβόλου από το O στο B. Το κύμα αραιώσης, που καλύπτει την περιοχή (II), είναι ελλιπής και τελειώνει στα χαρακτηριστικά  $C_+^B$  σε χαμηλότερο σημείο B με  $u = u_B$ . Ακολουθείται από μια περιοχή (III) σταθερή κατάσταση,  $u_B, \rho_B, p_B, c_B$  μεταξύ της ουράς του ημιτελούς κύματος αραιώσης και του εμβόλου κατά την οποία τα  $C_+$  χαρακτηριστικά είναι όλα παράλληλα (όπως είναι στην περιοχή (I) της σταθερή κατάσταση μπροστά από το απλό κύμα).

Αν  $-u_B = l_0$  το χαρακτηριστικό  $C_+^B$  μέσω του σημείου  $B = B_0$  εφάπτεται στην καμπύλη του εμβόλου, για το σημείο B η καμπύλη του εμβόλου έχει την  $f'(t) = u_B$  κλίση, ενώ εκείνη της

χαρακτηριστικής  $C_+^B$  είναι από  $\frac{dx}{dt} = u_B + c_B = u_B = -l_0$  όσο  $c_B = 0$ . Με άλλα λόγια, το κύμα είναι σχεδόν ολοκληρωμένο στο έμβολο.

Αν  $-u_B > l_0$  η ολοκλήρωση του κύματος έχει ήδη επιτευχθεί πριν το έμβολο φτάσει τη τελική ταχύτητα. Υπάρχει ένα σημείο B, σχετικά με την L καμπύλη εμβόλου μεταξύ O και B για την οποία η χαρακτηριστική  $C_+^{B_e}$  είναι εφαπτομένη στην καμπύλη εμβόλου και φέρει την τιμή μηδέν για την πυκνότητα, την πίεση και την ταχύτητα ήχου. Στην περίπτωση αυτή η αραιώση ολοκληρώνεται με τη  $C_+^{B_e}$  γραμμή και πέρα από αυτό έχουμε μια περιοχή (III') της

σπηλαίωσης, που ισοδυναμεί με ένα κενό μεταξύ του εμβόλου και υποχωρώντας την ουρά του κύματος στο αέριο.



ΣΧ. 16. Κύμα αραιώση μόλις τελειώνει σε μια ζώνη σπηλαίωσης. ( $-u_B = I_0$ )

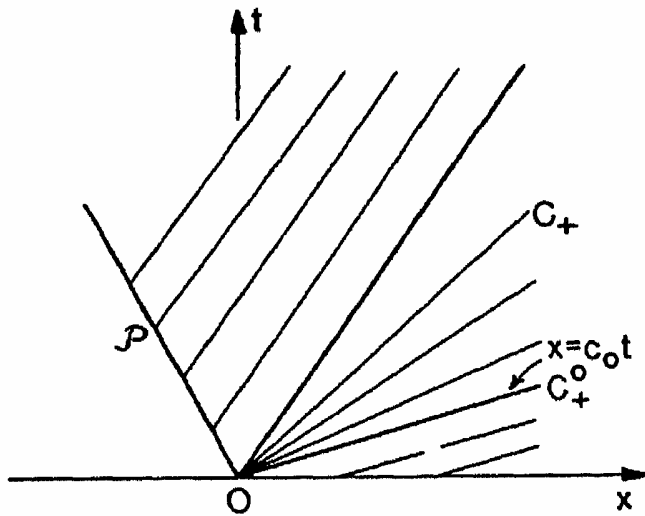
ΣΧ. 17. Κύμα αραιώση που λήγει σε μια ζώνη (III) σπηλαίωσης. ( $-u_B > I_0$ )

Φυσικά μιλώντας, η  $I_0$  ταχύτητα διαφυγής είναι η ταχύτητα πέραν της οποίας ένα έμβολο δεν μπορεί να υποχωρήσει χωρίς να διαχωρίζεται από το αραιωμένο - του φυσικού αερίου. Αν η ταχύτητα του εμβόλου  $I_0$  υπερβαίνει, τότε, όπως αφορά η κίνηση του αερίου είναι υπό εξέταση, δεν έχει σημασία ποια είναι η πραγματική αξία του. Θα μπορούσαμε κάλλιστα να θεωρήσουμε τη  $-u_B$  ως άπειρο ή να φανταστούμε το έμβολο, σαν έναν τοίχο που ξαφνικά αφαιρείται, επιτρέποντας να διαφύγει το αέριο σε ένα κενό, μια ερμηνεία στην οποία παραπέμπει το όνομα «διαφυγή ταχύτητας».

Περίληψη. Μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα μας ποιοτικά ως εξής. Ένα έμβολο υποχωρεί από ένα αέριο σε κατάσταση ηρεμίας με την ταχύτητα που ποτέ δεν προκαλεί μείωση ενός κύματος αραιώσης των σωματιδίων που κινούνται προς την κατεύθυνση του εμβόλου. Στην κεφαλή του κύματος, το οποίο κινείται μέσα στο αέριο σε ταχύτητα ήχου, η ταχύτητα του αερίου είναι μηδέν. Μέσα από το κύμα το αέριο επιταχύνεται. Αν η ταχύτητα του εμβόλου  $-u_B$  είναι κάτω από τη  $I_0$  ταχύτητα διαφυγής, το αέριο διαστέλλεται μέχρι να έχει φτάσει τη  $-u_B$  ταχύτητα του εμβόλου και στη συνέχεια συνεχίζει με σταθερή ταχύτητα, την πυκνότητα και την πίεση. Εάν, ωστόσο, η ταχύτητα του εμβόλου υπερβαίνει την ταχύτητα διαφυγής, η επέκταση είναι πλήρης και το κύμα καταλήγει στη ζώνη της σπηλαίωσης μεταξύ της ουράς του κύματος και του εμβόλου. Σε κάθε περίπτωση το κύμα κινείται στο ήσυχο αέριο, ενώ τα σωματίδια κινούνται στην αύξηση της ταχύτητας αερίου από την κεφαλή κύματος προς την ουρά, δηλαδή, από τις ζώνες των υψηλότερων πιέσεων και στην πυκνότητα των ζωνών των χαμηλότερων πιέσεων και στην πυκνότητα.

#### **45. Επίκεντρα αραιωμένα κύματα.**

Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι η περίπτωση κατά την οποία η επιτάχυνση του εμβόλου από το υπόλοιπο σε μια σταθερή τελική ταχύτητα  $u_B$  λαμβάνει χώρα σε ένα απείρως μικρό χρονικό διάστημα, δηλαδή, ακαριαία. Τότε η οικογένεια των χαρακτηριστικών  $C_+$  αποτελούν το απλό κύμα για να εκφυλιστεί σε ένα μολύβι γραμμών μέσω της προέλευσης  $O: x = 0, t = 0$ , βλέπε σχήμα 18.



Με άλλα λόγια, το απλό κύμα έχει εκφυλιστεί σε ένα κεντραρισμένο κύμα. Είναι σαφές ότι ένα τέτοιο απλό επίκεντρο κύμα είναι ένα αραιωμένο κύμα. Για,  $u$  μειώνεται κατά τη διέλευση των κυμάτων αν είναι στραμμένο προς τα εμπρός και αυξάνεται εάν είναι στραμμένο προς τα πίσω : και στις δύο περιπτώσεις,  $\rho$  και  $\rho$  μειώνεται όλο το κύμα, όπως δείχνεται στο τμήμα 40, και, ως εκ τούτου, είναι ένα αραιωμένο κύμα.

Στο κέντρο  $O$  οι ποσότητες  $u$ ,  $\rho$  ως συναρτήσεις του  $x$  και  $t$  είναι ασυνεχής, αλλά αυτή η ασυνέχεια αμέσως εξομαλύνεται στην επόμενη κίνηση. Εδώ έχουμε το πρώτο και το τυπικό παράδειγμα μιας αρχικής ασυνέχεια η οποία επιλύεται αμέσως σε συνεχή ροή.

#### 46. Ρητές φόρμουλες για επίκεντρα αραιωμένα κύματα .

Ένα επίκεντρο απλό κύμα μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$(46.01) \quad x = (u + c)t$$

στο οποίο

$$(46.02) \quad u = l - l_0$$

μπορεί να θεωρηθεί δεδομένη λειτουργία του  $c$ . Αντιστρόφως μπορούμε να εκφράσουμε  $u$  και  $c$  από την άποψη του  $u + c$  και επομένως από την άποψη του  $x / t$ . Για ένα πολυτροπικό αέριο που έχουμε από (42.04) τις σχέσεις

$$(46.03) \quad c = \mu^2 \frac{x}{t} + (1 - \mu^2)c_0,$$

$$u = (1 - \mu^2) \left( \frac{x}{t} - c_0 \right),$$

δίνοντας τις κατανομές των  $u$  και  $c$  σε ένα ρητά επίκεντρο απλό κύμα. Συγκρίνοντας την (46.01) με την (42.01) βλέπουμε ότι οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (42.02) και (42.03) για τις διαδρομές των σωματιδίων και ο σταυρός - χαρακτηριστικά-τικ να γίνουν ομοιογενές. Οι λύσεις (42.05) και (42.06) για πολυτροπικά αέρια απλώς μειώνονται, βλέπε (42.09),

$$(46.04) \quad t = t_0 \left( \frac{c}{c_0} \right)^{-\mu^{-2}},$$

και

$$(46.05) \quad t = t_0 \left( \frac{c}{c_0} \right)^{-\frac{1}{2}\mu^{-2}},$$

αντίστοιχα, όπου  $t_0$  είναι ο χρόνος κατά τον οποίο η διαδρομή των σωματιδίων ή ο σταυρός - χαρακτηριστικό αρχίζει στη γραμμή  $x = c_0 t$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (42.04) με τη μορφή

$$u + c = (1 - \mu^{-2})c_0 + \mu^{-2}c$$

και εκφράζοντας το  $c$  στην

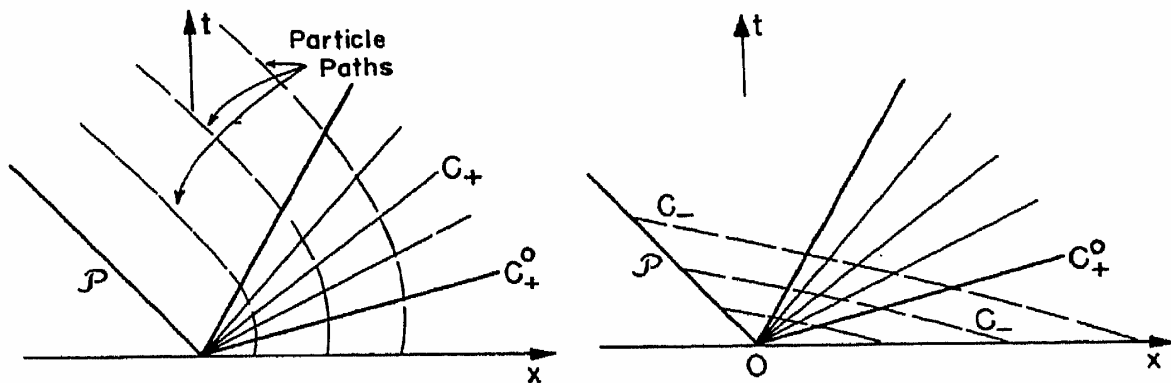
άποψη του  $t$  από την (46.04) και (46.05) θα λάβουν από (46.01)

$$(46.06) \quad x = -(\mu^{-2} - 1)c_0 t + \mu^{-2}c_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-\mu^2},$$

για τις διαδρομές των σωματιδίων, και

$$(46.07) \quad x = -(\mu^{-2} - 1)c_0 t + \mu^{-2}c_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-2\mu^2}$$

για το σταυρό - χαρακτηριστικά. Αυτοί οι τύποι ισχύουν στη ζώνη αραίωσης.



Σε περίπτωση πλήρους αραίωσης τελειώνει με μηδενική πυκνότητα,  $-U_B \geq l_0$ , τύπου (46.07) ισχύει για αυθαίρετα μεγάλες τιμές του  $t$ , και έχουμε, για τα μεγάλα  $t$ , την ασυμπτωτική αναπαράσταση

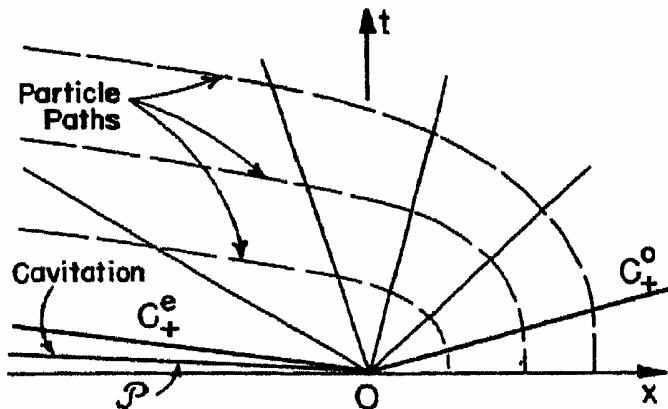
$$x \sim -(\mu^{-2} - 1)c_0 t$$

για τις διαδρομές των σωματιδίων. Όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, το αέριο παραμένει στη ζώνη (II) της αραίωσης, και το  $(x, t)$  - διάγραμμα σωματιδίων αποκτά ασυμπτωτικά την κατεύθυνση της χαρακτηριστικής  $C_+^c$  κατά την οποία η ταχύτητα διαφυγής  $l_0$  επιτυγχάνεται, βλ. σχήμα 21.

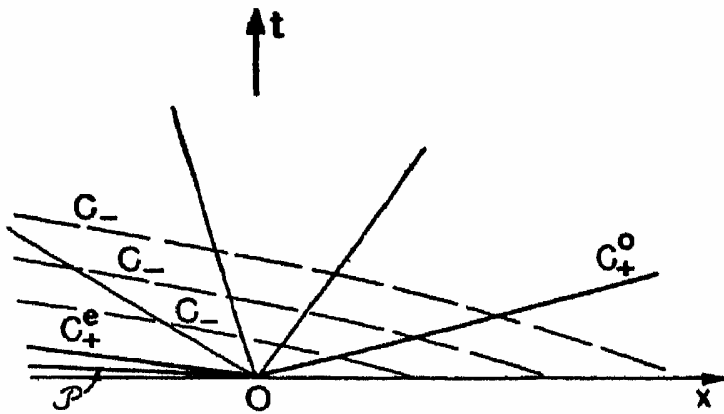
Για  $-u_B < l_0$ , το κύμα αραίωσης τερματίζει στο χαρακτηριστικό  $C_+$  της οποίας η ταχύτητα έχει την αξία  $u = u_B$  και όλες οι διαδρομές των σωματιδίων αναδύονται από την περιοχή (II) παράλληλα προς την τελική κατεύθυνση της διαδρομής εμβόλου P και παραμένουν παράλληλες στην περιοχή (III).

Η διασταυρώσεις- χαρακτηριστικά  $C_-$  μετά την έξοδο από την ελλiptή περιοχή αραίωσης συνεχίζουν ως ευθείες γραμμές που ικανοποιούν τη γραμμή του εμβόλου P:  $x = u_B t$ . Για  $-u_B \geq l_0 = (\mu^{-2} - 1)c_0$  τα χαρακτηριστικά  $C_-$  παραμένουν μέσα στη "πλήρη περιοχή αραίωσης", και, δεδομένου ότι  $x \sim -(\mu^{-2} - 1)c_0 t$ , γίνεται προσέγγιση των διαδρομών των σωματιδίων ασυμπτωτικά, βλέπε σχήματα 21 και 22.

Προφανώς, αυτές οι σκέψεις μπορούν να γενικευθούν σε μη πολυτροπικές εξισώσεις.



ΣΧ. 21. Διαδρομές σωματιδίων σε ένα κεντρικό κύμα αραιώσης που τελειώνει σε σπηλαίωση.



ΣΧ. 22. Διασταύρωση - χαρακτηριστικά,  $C_-$  σε ένα κεντρικό κύμα αραιώσης που τελειώνει σε σπηλαίωση.

**47. Παρατήρηση σε απλά κύματα στις Lagrangian συντεταγμένες.**

Θα μπορούσαμε κάλλιστα να αναπτύξουμε τη θεωρία των απλών κυμάτων σε Lagrange's συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (39.02) που αναπτύσσονται στο Μέρος III - Α. Τα  $C_+$  χαρακτηριστικά δίνονται από

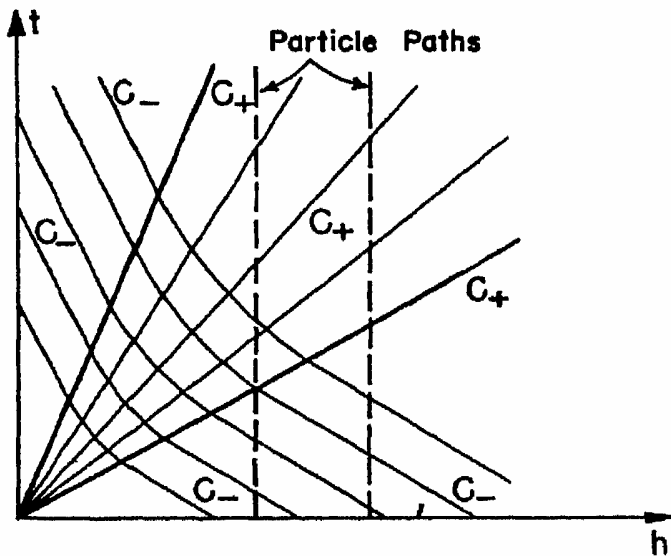
$$(47.01) \quad \frac{dh}{dt} = \rho c = k,$$

Και τα  $C_-$  χαρακτηριστικά από

$$(47.02) \quad \frac{dh}{dt} = -\rho c = -k.$$

Για τα μπροστινά - αντιμέτωπα απλά κύματα οι γραμμές  $C_+$  στην  $(h, t)$  -είναι κατ'ευθείαν από τότε που το πλάνο  $k$  είναι σταθερό για καθένα από αυτά. Για ένα απλό επίκεντρο κύμα, ειδικότερα το  $h/t = k$  είναι κατά συνέπεια σταθερό. Με άλλα λόγια, η σύνθετη αντίσταση είναι πάντα απλή  $k = h/t$ , δεν έχει σημασία





(ΣΧ. 23. Χαρακτηριστικά σε Lagrangian συντεταγμένες για ένα επίκεντρο απλό κύμα.)  
 ποια είναι η αδιαβατική εξίσωση της κατάστασης. Κατά συνέπεια, οι  $C$  καμπύλες ικανοποιούν  
 την εξίσωση  $DH / dt = -h / t$ , η οποία μπορεί να ενσωματωθεί αμέσως σε  
 (47.03)  $ht = \text{constant}$ .

Έτσι, για ισεντροπική ροή οποιουδήποτε υγρού, η διασταύρωση - χαρακτηριστικά στο επίκεντρο κύμα αραίωσης είναι ισόπλευρες υπερβολές στην Lagrangian συντεταγμένες.

#### **48. Κύματα συμπίεσης.**

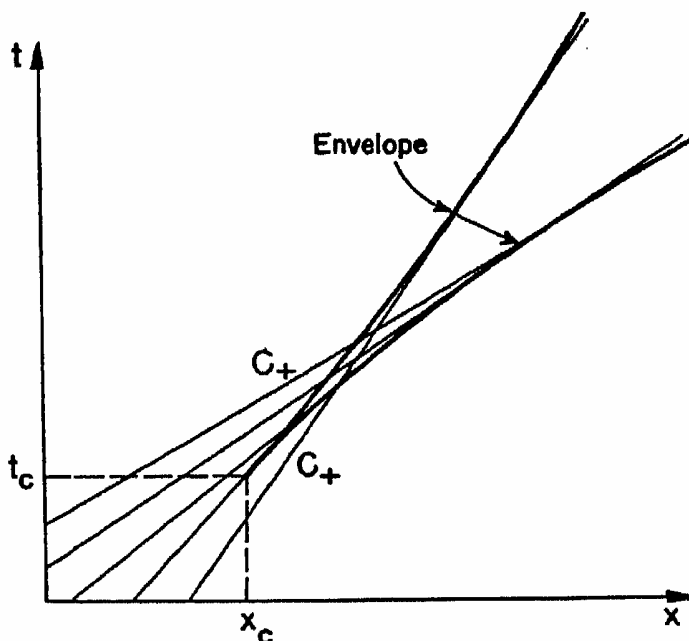
Εάν ένα έμβολο δεν έχει αποσυρθεί, αλλά κινείται μέσα στο αέριο - γεμάτο σωλήνα, ή εάν ένα έμβολο υποχωρώντας επιβραδυνθεί ή διακοπεί, τότε ένα απλό κύμα συμπίεσης ή συμπύκνωσης προέρχεται στο έμβολο. Οι ποιοτικές καταστάσεις και τύποι που σχετίζονται με τα κύματα αραίωσης επίσης εισχωρούν σε κύματα συμπίεσης, εκτός από το ότι η πυκνότητα, η πίεση και η ταχύτητα ήχου στην αύξηση του εμβόλου και ότι η προς τα εμπρός - χαρακτηριστικά  $C_+$  δεν αποκλίνουν πλέον από την καμπύλη του εμβόλου. Εξαιτίας αυτού, το απλό κύμα δεν υπάρχει επ'αόριστον, για όλους τους χρόνους  $t$ . Για τα ευθεία χαρακτηριστικά  $C_+$  καθένα μεταφέρει την ιδιαίτερη αξία της  $u$ , μπορεί να συνεχιστεί επ'αόριστον μέσα στη ροή, θα συγκλείνεται και από ένα φάκελο στον οποίο οι τιμές των  $u$  θα έρχονται σε σύγκρουση.

Κατά τον πρώτο χρόνο,  $t = t_c$ , ένας τέτοιος φάκελος εμφανίζεται, και αποτελεί το σημείο καμπής σε κάποιο  $x = x_c$  σημείο, βλέπε τμήμα 49. Τα δύο σκέλη της συνεδρίασης φακέλου στο κατώφλι περικλείουν μια γωνιακή περιοχή που καλύπτεται τρεις φορές από το  $C_+$  - χαρακτηριστικά. Έτσι, μια μοναδική συνέχιση της ροής μέσω ενός απλού κύματος πέραν του χρόνου  $t_c$  στο σημείο  $x_c$  είναι μαθηματικά αδύνατη. Θα μπορούσαμε επίσης να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο αυτό, προφανώς, πρώτοι παρατήρησαν οι Stokes [40] το 1848, με τον ακόλουθο τρόπο. Η επίδραση της κίνησης του εμβόλου διαδίδεται μέσα στο αέριο μέσω των ηχητικών κυμάτων που ταξιδεύουν με ταχύτητα  $c$  ήχου σε σχέση με το φυσικό αέριο. Για μεγαλύτερη ταχύτητα εμβόλου αντίστοιχα υπάρχει μεγαλύτερη ταχύτητα  $c$  ήχου: ως εκ τούτου αργότερα οι επιρροές της διαδρομής της κίνησης του εμβόλου επιταχύνονται και έχουν την τάση να ξεπερνούν αυτά που έχουν σταλθεί νωρίτερα. Η μορφή κύματος, που περιγράφεται από την ταχύτητα ως τη συνάρτηση του  $x$ , βλ. παράγραφο 41, γίνεται πιο απότομη και τείνει να γίνει

κάθετη σε κάποιο σημείο. Ο χαρακτήρας της προκύπτουσας ασυνέχειας είναι παρόμοιος με το σπάσιμο των κυμάτων νερού που γίνεται απότομο και πιο απότομο καθώς τα πιο αργά εξελισσόμενα μέρη ξεπερνιούνται από τα ταχύτερα, βλ. [27].

Μια ιδιαίτερα άμεση απεικόνιση της ασυγκράτητης ανάπτυξης των ασυνεχειών παρέχεται από ένα έμβολο που κινείται σε ένα αέριο σε κατάσταση ηρεμίας με ταχύτητα που υπερβαίνει τελικά την ταχύτητα ήχου  $C_0$ . Αν η ροή αερίου παραμείνει συνεχής το αέριο θα είναι σε ανάπαυση στη ζώνη των σημείων,  $x \geq c_0 t$ , που δεν μπορεί να επιτευχθεί από την αρχική θέση ενός εμβόλου με ταχύτητα μεγαλύτερη από εκείνη του ήχου, πρέπει να εισέλθει τελικά τη ζώνη αυτή. Κατά συνέπεια, η πρόταση δεν μπορεί να παραμείνει συνεχής.

Έχουμε τώρα να δούμε ότι δεν είναι η απλή ροή κύματος που υπάρχει και προσφέρει μια μοναδική συνέχιση πέραν του χρόνου  $t = t_c$ . Από το θεώρημα μας ότι κάθε συνεχής ροή δίπλα σε μια σταθερή κατάσταση είναι ένα απλό κύμα, βλέπε κεφάλαιο II, τμήμα 29, προκύπτει ότι δεν υπάρχει εναλλακτική λύση, παντού συνεχής λύσεις του προβλήματος της ροής. Το γεγονός αυτό ήταν γνωστό να τονιστεί λόγω κάποιου επιχειρήματος γι' αυτό στη βιβλιογραφία, βλ. [39]. Είναι επομένως αδύνατο ότι σε κάθε περίπτωση η ροή θα μπορούσε να παραμείνει συνεχής, ισεντροπική, και διέπεται αποκλειστικά από τις δυνάμεις πίεσης. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι αυτή η κατανομή είναι μια εύλογη υπόθεση σχετικά με το μηχανισμό που διέπει τα αποτελέσματα της ροής ως ένα καθαρά μαθηματικό αποτέλεσμα. Ποια εναλλακτική υπόθεση θα εγκριθεί και θα φανεί στο μέρος Γ του παρόντος κεφαλαίου, στην οποία συζητούνται «ασυνέχειες σοκ»



(ΣΧ. 24. Ο σχηματισμός του περιβλήματος των ευθύγραμμων χαρακτηριστικά ενός απλού κύματος συμπίεσης.)

Η πιθανή εμφάνιση ενός φακέλου σε ένα διάλυμα του προβλήματος ροής αποδίδει ένα εντυπωσιακό φωτισμό του θεωρήματος που αναφέρεται στο σημείο 28 σχετικά με τη μοναδική ύπαρξη του διαλύματος των διαφορικών εξισώσεων (21,01), πράγμα που προϋποθέτει τιμές που

δίνονται σε μια γραμμή  $t = T_c = \text{σταθερά}$ . Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές αυτές λαμβάνονται, όπως ακριβώς οι αξίες μιας λύσης η οποία σχηματίζει ένα φάκελο που ξεκίνα με μια ακμή σε ένα σημείο  $x = x_c, t = t_c$ . Το γεγονός ότι δεν υπάρχει μοναδική λύση η οποία αναλαμβάνει τα αρχικά δεδομένα φαίνεται εκ πρώτης όψεως να είναι μια αντίφαση με το θεώρημα που μόλις ανέφερα. Η επίλυση αυτού του παραδόξου έγκειται στο γεγονός ότι το θεώρημα που απαιτεί αρχικές τιμές με συνέχεια παραγώγων σε σχέση με  $x$ . Οι τιμές για  $t = t_c$ , είναι συνεχής στο  $x = x_c$ , έχει άπειρα παράγωγα που υπάρχει ως προς το  $x$ , όπως φαίνεται από τη συζήτηση στο κεφάλαιο 41.

### **50. Η κρούση ως μία αμετάτρεπτη διαδικασία.**

Όπως έχουμε δει, οι πρωταρχικές ασυνέχειες μερικές φορές ξεπερνώντας, όπως στην περίπτωση των κυμάτων κεντρικής αραιώσης, ενώ σε άλλες κινήσεις ου ξεκινούν ως τέλεια συνεχόμενα κύματα, δε μπορούν να διατηρηθούν χωρίς κάποια ασυνέχεια. Το γεγονός ότι κάθε επιπρόσθια επιτάχυνση ή προς τα πίσω επιβράδυνση του εμβόλου, όσο αργή και να είναι, οδηγεί εν τέλει σε ασυνέχεια στην ταχύτητα, πίεση, πυκνότητα, στην ειδική εντροπία και στη θερμοκρασία.

Γι αυτό το λόγο, για μια μαθηματική περιγραφή των κινήσεων που προκαλούνται από προηγμένα έμβολα, όπως και για πολλές άλλες κινήσεις, πρέπει να εγκαταλείψουμε, ή καλύτερα να συμπληρώσουμε τις φυσικές υποθέσεις που έχουν επιστρατευθεί ως τώρα (όπως έχουμε ήδη υποδείξει στο κεφάλαιο 48).

Μια πιθανότητα αυτοπροτείνεται αμέσως. Πιθανόν να προσπαθήσουμε να πετύχουμε την απαραίτητη γενίκευση από τις διαφορικές εξισώσεις της κίνησης απευθείας. Στο κεφάλαιο 2, στην τομή 24, είδαμε, ότι αυτές οι διαφορικές εξισώσεις επιτρέπουν ασυνέπειες των πρώτων και υψηλότερων παραγώγων του  $\kappa$  και του  $p$  στα χαρακτηριστικά στον  $(\chi, \epsilon)$  άξονα. Τέτοιες "ηχητικές ασυνέπειες" προκύπτουν από μια φτυστή επέκταση των διαφορικών εξισώσεων · για παράδειγμα προκύπτουν σε αρχικά προβλήματα τιμής με το πέρασμα στο όριο από αρχικές τιμές με συνεχόμενους παραγώγους σε αρχικές τιμές με τοπικές ασυνέχειες των παραγώγων. Στην περίπτωση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ο ίδιος τύπος περιορισμού της διαδικασίας οδηγεί σε μια "ηχητική διάδοση" ακόμα και σε ασυνέχειες των ανεξάρτητων ιδίων λειτουργιών, δες [ 32 σελίδες 360-361]. Για τις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, όμως, καμία τέτοια ηχητική μετάδοση από ασυνέχειες του  $p$  και του  $u$  είναι εξαγόμενη με ένα πέρασμα σε ένα όριο από συνεχόμενες λύσεις.

Για αυτό το λόγο, για να φτάσουμε σε μια επαρκή θεωρία πρέπει να απορρίψουμε ως υπεραπλουστευμένη την αρχική μας περιγραφή της φυσικής κατάστασης και πρέπει να αναζητήσουμε μια κοντινότερη προσέγγιση της πραγματικής κατάστασης με το να υπολογίσουμε και φυσικούς παράγοντες που απορρίφθηκαν στις αρχικές διαφορικές εξισώσεις. Έχουμε υποθέσει έως τώρα ότι οι πιέσεις στο αέριο οφείλονται σε παρεκκλίσεις στην πίεση  $p=p(p,S)$  και σε καμία περίπτωση στην τριβή και ότι η εντροπία ενός μορίου παραμένει αμετάβλητη. Αυτές οι υποθέσεις δικαιολογούνται μονάχα, εάν οι κλίσεις της ταχύτητας και της θερμοκρασίας είναι χαμηλές. Αλλιώς μια μαθηματική περιγραφή της φυσικής κατάστασης πρέπει να λάβει υπόψη την επίδραση των αμετάτρεπτων θερμοδυναμικών διαδικασιών, που προκαλούνται στην τριβή και στην μεταβίβαση θερμότητας, πάντα παρόντες όπου η ταχύτητα και η θερμοκρασία δεν είναι συνεχείς. Μια τέτοια θεωρία θα συμπεριλάμβανε κάθε ανυπέβλητες μαθηματικές περιπλοκές, εάν δεν ήταν ένα τυχερό γεγονός: Πραγματικά φαινόμενα δείχνουν ότι αμετάτρεπτες διαδικασίες συμβαίνουν στα αέρια μόνο σε στενές ζώνες όπου οι κλίσεις της ταχύτητας και θερμοκρασίας γίνονται πολύ υψηλές, ενώ εξωτερικά από αυτές τις ζώνες μετάβασης η ροή υπακούει σε καθιερωμένους νόμους για αδιάβατες μετατρεπόμενες διαδικασίες δηλαδή στις διαφορικές εξισώσεις όπως συζητήθηκε προηγουμένως. Έτσι τα εμπειρικά γεγονότα προτείνουν μια ακόμη μαθηματική ιδεολογία, που

θα είναι η βάση της ανάλυσής μας. Οι μετατρέπόμενες διαδικασίες θα περιγραφούν από ξαφνικά άλματα σε ασυνέχειες που συμβαίνουν σε συγκεκριμένες οξείες χαρακτηριστικές επιφάνειες στο υγρό. Τέτοιες ασυνέχειες, με ατελείωτες κλίσεις σε μερικές από τις ποσότητες, αντικαθιστούν στη μαθηματική ιδεολογία τις στενές ζώνες της αξιοσημείωτης αμεταβλητότητας.

Στην πραγματικότητα οι αξιοσημείωτες αλλαγές της ταχύτητας και της θερμοκρασίας συμβαίνουν σε τέτοιες επιφάνειες· έτσι η υπόθεση των οξειών ασυνεχειών είναι όντως μια ιδεολογία που συμφωνεί με τα γεγονότα καλύτερα απ' όσο θα ελπίσαμε.

Φυσικά θα απαιτήσουμε ότι οι τρεις νόμοι της διατήρησης της μάζας της κεκτημένης ταχύτητας και της ενέργειας ισχύουν για αυτή την αμετάτρεπτη διαδικασία. Εκτός από την ασυνέχεια της επιφάνειας η μόνη ενεργή πίεση είναι, σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, εξαιτίας της πίεσης, και το μόνο κέρδος ή χάσιμο ενέργειας οφείλεται στην εργασία που γίνεται από αυτές τις πιέσεις στην πίεση. Για αυτό το λόγο σε αυτές τις περιοχές οι βασικές διαφορικές εξισώσεις είναι έγκυρες. Για συνεχόμενες διαδικασίες, όπως θυμόμαστε και από το τμήμα 8, η σταθερότητα από την ειδική εντροπία για κάθε μόριο αέρα, δηλαδή η μετατρεψιμότητα προκύπτει από το νόμο της διατήρησης της ενέργειας. Για ασυνεχείς διαδικασίες που υπόκεινται στον ίδιο νόμο στον ίδιο νόμο διατήρησης αυτή δεν είναι πλέον. Η θερμοδυναμική κατάσταση που εκφράζει τον αμετάτρεπτο χαρακτήρα της διαδικασίας είναι ότι η εντροπία δεν μειώνεται στην ασυνεχή διαδικασία, και αυτή η κατάσταση της εντροπίας πρέπει να προστεθεί στους νόμους διατήρησης. Δεν είναι με καμία περίπτωση προφανή, αλλά μπορεί να υποθέσουμε με ασφάλεια ότι μια ροή που συμπεριλαμβάνει μια τέτοια μη συνεχόμενη διαδικασία μπορεί να οριστεί από τους τρεις νόμους διατήρησης και τη κατάσταση της εντροπίας. Οι αρχικές διαφορικές εξισώσεις, έγκυρες στην περιοχή της συνεχόμενης ροής, μαζί με τις καταστάσεις που εκφράζουν τους νόμους διατήρησης και την κατάσταση της εντροπίας σε μια μη συνεχόμενη επιφάνεια, επαρκούν να ορίσουν τη ροή χωρίς να περιγράψουν με λεπτομέρεια την αμετάτρεπτη διαδικασία σε μια μη συνεχόμενη επιφάνεια.

Για να διευκρινίσουμε την κατάσταση, θα συζητήσουμε στο τμήμα 63, μια λογική περιγραφή από τον εσωτερικό μηχανισμό αυτής της κολλητικότητας, λαμβάνοντας υπόψη την πεπερασμένη επέκταση στις ζώνες από τέτοιες διαδικασίες. Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα προχωρήσουμε αυστηρά από τις μαθηματικές υποθέσεις, για τις οποίες οι προηγούμενες εναντιώσεις λειτουργούν ως κίνητρο.

### **51. Ιστορικές παρατηρήσεις στη μη γραμμική ροή.**

Μερικά ιστορικά γεγονότα μπορούν να καταχωρηθούν εδώ. Ο Poisson (1808) [36] προσδιόρισε ότι ήταν ως αποτέλεσμα μια απλή λύση κύματος της διαφορικής εξίσωσης της ροής σε ένα ισοθερμικό αέριο:

$$U = F [ x - ( U + C ) t ],$$

Με το F να είναι μια αυθαίρετη λειτουργία, δες κεφάλαιο 41. Ο Challis (1848) [41] παρατήρησε ότι μια τέτοια εξίσωση δε μπορεί πάντα να λυθεί μεμονωμένα για την ταχύτητα U. Για να αποκτήσει μια μοναδική λύση ο Stokes (1848) [40] πρότεινε να υποθέσουμε ότι μια ασυνέχεια στη ταχύτητα ξεκινά στον χρόνο όταν γίνεται ατελείωτη. Χρησιμοποιώντας τους νόμους της διατήρησης της μάζας και της κεκτημένης ταχύτητας, μετά μείωσε δύο ασυνεχείς καταστάσεις για ένα ισοθερμικό αέριο. Ο Stokes ισχυρίστηκε ότι οι ασυνέχειες δε θα συμβούν ποτέ φυσικά, γιατί κάθε τάση για ασυνέχεια, θα πρέπει επίσης να συμπεριλάβουν κάποια φαινόμενα αντανάκλασης.

Ο Eurnshaw (1858) [37] ανέπτυξε την άλλη λύση κύματος για τη ροή των αερίων που ικανοποιούν κάθε σχέση  $p=p(p)$ . Δικαιολόγησε ότι εφόσον η τοπική ταχύτητα της διάδοσης

αυξάνεται σε ένα κύμα συμπίεσης, όπως ένα κύμα θα ' κερδίζει ' συνεχώς μπροστά και τελικά μια 'τρύπα' ή μια ασυνέχεια θα σχηματιστεί, δες κεφάλαιο 41.

Ανεξάρτητα, ο Riemann (1860) [38] ανέπτυξε την θεωρία του απλού κύματος και τη γενική λύση του προβλήματος της ροής χρησιμοποιώντας "τις μη παραλλαγές του Riemann", δες κεφάλαιο 37. Ανακάλυψε ξανά και επεξεργάστηκε τη θεωρία σοκ, αλλά έκανε σιωπηλά τη λανθασμένη υπόθεση ότι η μετάβαση από ένα σοκ είναι αδιάβατη και αναστρέψιμη.

Ο Rankine (1869) [42] έδειξε ότι καμία σταθερή αδιαβατική διαδικασία στην οποία οι μόνες πιέσεις είναι οι πιέσεις στην πίεση μπορούν να αντιπροσωπεύσουν μια συνεχόμενη αλλαγή σε μια μικρή πεπερασμένη περιοχή από μια συνεχή κατάσταση σε μια άλλη. Αντί αυτού πρότεινε ότι σε μία περιοχή μια αδιαβατική διαδικασία συμβαίνει να υπόκειται στην υπόθεση ότι η θερμότητα μπορεί να μεταδοθεί από ένα μόριο σε άλλο. αλλά καμία θερμότητα δεν λαμβάνεται απ' έξω.

Η υπόθεση του Rankine συμφωνεί με την αρχή της διατήρησης της ενέργειας. Αλλά ο Rayleigh (39) και ο Hugoniot (1887) [43] ήταν οι πρώτοι που υπέδειξαν καθαρά ότι μια αδιαβατική μετατρέπόμενη μετάδοση στο σοκ θα παραβιάσει την αρχή της διατήρησης ενέργειας. Στην πραγματικότητα, ο Hugoniot ότι με την απουσία της κολλητικότητας και της μεταβίβασης ενέργειας (έξω από το σοκ) η διατήρηση της ενέργειας συνεπάγεται με διατήρηση της εντροπίας σε μια συνεχόμενη ροή και επίσης συνεπάγεται μια αλλαγή της εντροπίας σε ένα σοκ. Από τη διατήρηση της ενέργειας επίσης μείωσε την Τρίτη υπόθεση του σοκ στη συνηθισμένη του μορφή, δες [54.10], που είναι προτιμότερη στη μορφή του Rankine, αν και στην περίπτωση του τέλει αερίου, οι τρεις υποθέσεις του σοκ του Rankine είναι ίσες με αυτές του Hugoniot.

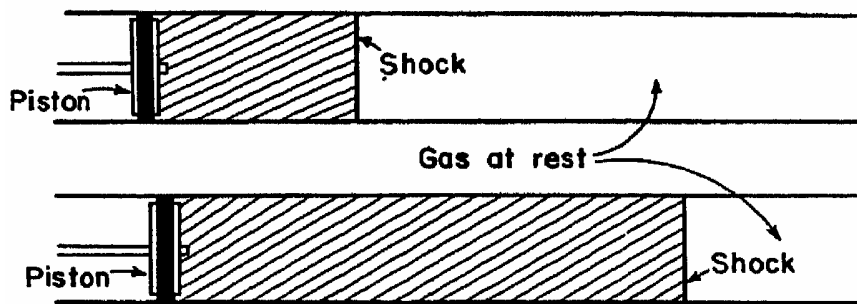
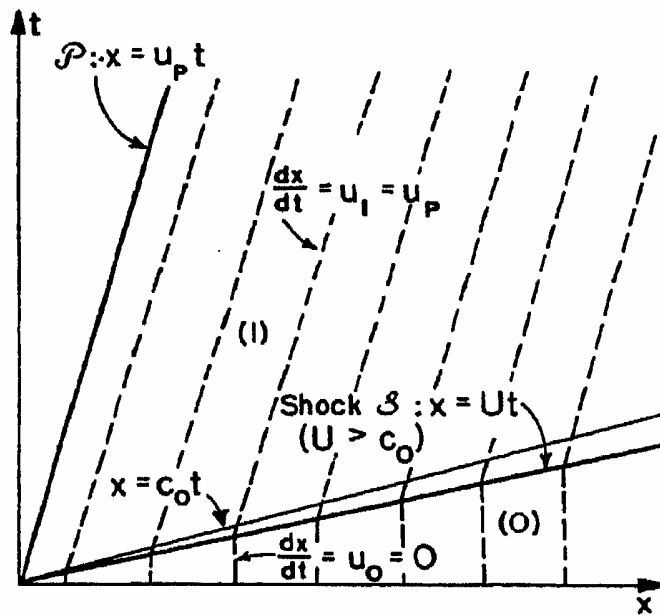
Ο Rayleigh (1910) [39] υπέδειξε ότι η εντροπία πρέπει να αυξηθεί όταν περνά ένα σοκ μπροστά και αυτό για το λόγο ότι ένα σοκ αραίωσης δε μπορεί να γίνει στο τέλει αέριο.

## **52. Ασυνεχείς επιφάνειες.**

Διακρίνουμε δύο τύπους ασυνεχών επιφανειών, τις επιφάνειες σε επαφή και σε προστινά σοκ. Οι επιφάνειες με επαφή είναι επιφάνειες που χωρίζουν δυο μέρη από το μέσο χωρίς καμία ροή αερίου στην επιφάνεια. τα προστινά σοκ είναι ασυνεχείς επιφάνειες που διασταυρώνονται με το αέριο. Η πλευρά του προστινού σοκ με την οποία το αέριο μπαίνει θα ονομαστεί η προστινή πλευρά του σοκ ή η προστά πλευρά και η άλλη η πίσω. Όπως θα δούμε στο τμήμα 65, το προστινό σοκ πάντα κινείται με υπερηχητική ταχύτητα όπως παρατηρείται από την πίσω πλευρά. Η ζώνη της ροής πίσω από το σοκ, προστά, συχνά καλείται κύμα σοκ. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη μονοδιάστατη κίνηση. Για αυτό το λόγο τα προστινά σοκ και οι επιφάνειες σε επαφή υποθέτουμε ότι είναι επίπεδα κάθετα στο  $x$  άξονα που παρουσιάζονται στο  $x$  με σημεία ή στο  $(x,t)$  επίπεδο με γραμμές, για αυτό ονομάζονται γραμμές σοκ ή γραμμές επαφής ξεχωριστά.

## **53. Βασικό μοντέλο της ασυνεχούς κίνησης. Το κύμα κρούσης σε σωλήνα.**

Ας περιγράψουμε αρχικά την απλούστερη περίπτωση μιας κίνησης που περιλαμβάνει ένα προστινό σοκ. Το κεντρικό κύμα διαστολής που προήλθε από ένα έμβολο που υποχωρεί με συνεχή ταχύτητα μελετήθηκε με το βασικό τύπο της κίνησης. Έτσι βασική και τυπική είναι η κίνηση που προκαλείται από ένα έμβολο που ξεκινά από το σταμάτημα και ξαφνικά κινούμενο με συνεχή ταχύτητα  $U$  στο κενό αέρα.



Ανεξάρτητα το πόσο μικρό είναι το  $U_p$ , η κίνηση που προεκύπτει δε μπορεί να είναι συνεχής, γιατί μια συνεχής κίνηση θα ανεπαγόταν ένα απλό κύμα που κοιτάζει μπροστά, ένα κεντρικό απλό κύμα για να πετύχει μια ασυνεχή αλλαγή της ταχύτητας στην αρχή. Όμως η ταχύτητα του αερίου διαμέσου ενός κεντρικού απλού κύματος. Έτσι καμιά προσαρμογή στο θετικό έμβολο ταχύτητας είναι δυνατή με συνεχής κίνηση.

Τι συμβαίνει; Η απάντηση είναι: Ξαφνικά ένα μπροστινό σοκ εμφανίζεται και απομακρύνεται από το έμβολο συνεχώς και όπως θα αποδείξουμε με μια υπερηχητική ταχύτητα  $U$ , μοναδικά προσδιορισμένη από τη πυκνότητα και ταχύτητα του ήχου στο κενό αέρα και από την ταχύτητα του συμβόλου  $U_p$ . Μπροστά από  $U_p$ . Στο  $(x, \epsilon)$  επίπεδο αυτή η πολύ απλή κίνηση παρουσιάζεται από την εικόνα 30. Σε μια σειρά από τιμές που μειώνονται του  $U_p$  η γραμμή του σοκ φτάνει το χαρακτηριστικό  $x = c_0 t$  και το άλμα της ταχύτητας, η πίεση και η πυκνότητα διαμέσου του σοκ φτάνει το μηδέν. Το σοκ γίνεται αδύναμο και φτάνει μια "ηχητική διαταραχή".

Πριν αποδείξουμε ορθά αυτή τη ποιοτική περιγραφή, πρέπει να συζητήσουμε την ασυνέχεια ή τους όρους άλματος διαμέσου του σοκ.

#### 54. Όροι άλματος.

Οι όροι άλματος θα προέλθουν από "την θερμοκρατική εξίσωση της κατάστασης", δεξ κεφάλαιο 2 και τους ακόλουθους βασικούς νόμους της φυσικής:

- 1) Διατήρηση της μάζας.

- 2) Διατήρηση της κεκτημένης ταχύτητας .
- 3) Διατήρηση της ενέργειας.
- 4) Αύξηση ή διατήρηση της εντροπίας .

Εάν η υπόθεση της συνεχούς ταχύτητας , πυκνότητας και πίεσης γίνονται οι πρώτοι δύο νόμοι θα οδηγήσουν στις εξισώσεις του Euler (ή του Lagrange) για την ισοτροπική ροή ,δες κεφάλαιο 7. Η εφαρμογή αυτών των αρχών σε ασυνεχείς κινήσεις οδηγεί στις πρώτες δύο καταστάσεις άλματος για τα σοκ. Ο νόμος της ενέργειας (3) φροντίζει από ένα πιο ευαίσθητο σημείο. Το αρχικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων δες (7.08-11) ενισχύθηκε από τη θερμοδυναμική εξίσωση της κατάστασης που υποθέσαμε συνεχή εντροπία στη διατήρηση με το υποτιθέμενο αδιαβατικό αναστρέψιμο χαρακτήρα των διαδικασιών μας και σε συμφωνία με το νόμο της διατήρησης ενέργειας .Σε ένα μπροστινό σοκ , όμως, ο τρίτος νόμος της διατήρησης , όπως θα δείξουμε τώρα ,συνεπάγεται αλλαγές στην εντροπία και οδηγεί στο τρίτο “ θερμοδυναμικό ” όρο άλματος ,που σχηματίστηκε από τον Rankine και Hugoniot που αντικαθιστά την υπόθεση των αδιαβατικών αλλαγών που γίνονται για συνεχείς κινήσεις .

θα πηγάσουμε τώρα την ασυνεχή κατάσταση εφαρμόζοντας τις τρεις γενικές αρχές στην στήλη του αερίου σε ένα σωλήνα. Το πλαίσιο καλύπτει στο χρόνο  $t$  το διάστημα  $(t) < x < 1 a(t)$  , όπου  $(t)$  και  $a1 (t)$  δηλώνουν της θέσεις των κινουμένων μορίων που σχηματίζουν τα τέλη της στήλης και η ροή πρέπει να είναι συνεχής στα τέλη της στήλης . Με το  $e$  δηλώνουμε την εσωτερική ενέργεια του αερίου ανα μονάδα μάζας , έτσι ώστε η τελική ενέργεια ανα μονάδα να είναι  $e + \frac{1}{2} u^2$  . Τότε για τη στήλη , οι 4 βασικές αρχές εκφράζονται από τις σχέσεις.

$$(54.01) \quad \frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \rho dx = 0 \quad (\text{Διατήρηση της μάζας})$$

$$(54.02) \quad \frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \rho u dx = p(a_0,t) - p(a_1,t) \quad (\text{Διατήρηση της ορμής})$$

$$(54.03) \quad \frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \rho \left\{ \frac{1}{2} u^2 + e \right\} dx = p(a_0,t)u(a_0,t) - p(a_1,t)u(a_1,t) \quad (\text{Διατήρηση της ενέργειας})$$

$$(54.04) \quad \frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \rho S dx \geq 0 \quad (\text{Αύξηση ή Διατήρηση της εντροπίας})$$

Η σχέση (54.01) δε χρειάζεται σχόλια. Η σχέση (54.02) εκφράζει την υπόθεση όπου οι μόνες πιέσεις που ενεργούν είναι πιέσεις στην πίεση και όπου τελικά ο ρυθμός της αλλαγής της κεκτημένης ταχύτητας της στήλης ισοδυναμεί με την τελική πίεση που προκύπτει στη στήλη από την πίεση στα 2 άκρα. Η σχέση (54.03) εκφράζει την υπόθεση ότι το κέρδος ενέργειας οφείλεται μόνο στην δράση από τις πιέσεις στην πίεση, με άλλα λόγια ότι ο ρυθμός από την αύξηση της ενέργειας που περιέχει η στήλη είναι ίση με την «εισαγωγή ενεργειών», δηλαδή η εργασία που έγινε στην μονάδα χρόνου από την πίεση ενάντια στο χρόνο έρχεται στην επιφάνεια της στήλης ( που οι ταχύτητές της είναι  $= U (, t)$  και  $a_1=U (a_1, t)$ ). Η σχέση (54.04) δηλώνει ότι η στήλη κερδίζει ή διατηρεί την εντροπία της.

Όσο υποθέτουμε ότι το  $u, p, \rho$  και  $S$  είναι συνεχή και διαφορικά σε όλη τη στήλη, μπορούμε εύκολα να εξάγουμε από τις τρεις πρώτες από αυτές τις εξισώσεις δηλ. τις διαφορικές εξισώσεις της κίνησης ,δες κεφάλαιο 7 και 8, ότι η διατήρηση της εντροπίας είναι επακόλουθο.

Στην παρούσα ανάλυση, όμως υποθέτουμε ότι στη κινούμενη στήλη υπάρχει ένα σημείο ασυνέχειας όπου το ισάξιο  $x = \xi(t)$  κινείται με ταχύτητα  $\dot{\xi}(t) = U(t)$  και θα εξάγουμε από αυτές τις εξισώσεις (54.01 – 04) σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων και στις δύο πλευρές του σημείου.

Όλοι μας οι ακέραιοι έχουν τον ίδιο τύπο.

$$J = \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \Psi(x, t) dx,$$

με το ακέραιο  $\psi$  να είναι ασυνεχές όπου  $\chi = \xi$ . Η διαφοροποίηση οδηγεί σε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J &= \frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{\xi(t)} \Psi(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{\xi(t)}^{a_1(t)} \Psi(x, t) dx \\ (54.05) \quad &= \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \Psi_i(x, t) dx + \Psi_0 \dot{\xi}(t) - \Psi(a_0, t) u(a_0, t) \\ &\quad + \Psi(a_1, t) u(a_1, t) - \Psi_1 \dot{\xi}(t). \end{aligned}$$

Οι ποσότητες  $\Psi_0$  και  $\Psi_1$  είναι τα όρια του  $\Psi(\chi, t)$  όπου το  $\chi$  φτάνει το  $\xi$  από τις πλευρές του  $\chi < \xi$  και  $\chi > \xi$  σχετικά. Αυτή η φόρμουλα δεν έχει καμία σχέση με το πόσο κοντή είναι η στήλη, εφόσον περιέχει το  $\chi = \xi$  σε ένα εσωτερικό σημείο. Τώρα παρουσιάζουμε τη διαδικασία περιορισμού, αφήνοντας το μήκος της στήλης να φτάσει μηδέν.

Αφού ο πρώτος ακέραιος στη δεξιά πλευρά από το (54.05) μετά τείνει στο μηδέν, ο  $\Psi(a_1, t) \rightarrow \Psi_1$  και  $\Psi(t) \rightarrow \Psi_0$  διατηρούμε

$$(54.06) \quad \lim_{a_1 - a_0 \rightarrow 0} \frac{d}{dt} J = \Psi_1 v_1 - \Psi_0 v_0,$$

όπου

$$(54.07) \quad v_i = u_i - U, \quad i = 0, 1,$$

είναι η ροή της ταχύτητας σχετικά με την ασυνεχή επιφάνεια. Έτσι θα πηγάσουμε από τις 4 πρώτες εξισώσεις τις επακόλουθες καταστάσεις άλματος

(Διατήρηση της μάζας)

$$(54.08.1) \quad \rho_1 v_1 - \rho_0 v_0 = 0$$

ή

$$(54.08.2) \quad \rho_0 v_0 = \rho_1 v_1 = m;$$

Όπου  $m$  είναι η μάζα ροής της επιφάνειας.

(Διατήρηση της ορμής)

$$(54.09.1) \quad (\rho_1 u_1) v_1 - (\rho_0 u_0) v_0 = p_0 - p_1;$$

Με (54.07) και (54.08) η σχέση ισοδυναμεί με

$$(54.09.2) \quad m u_0 + p_0 = m u_1 + p_1$$

ή

$$(54.09.3) \quad \rho_0 v_0^2 + p_0 = \rho_1 v_1^2 + p_1 = P,$$

που περιλαμβάνει μόνο τις σχετικές ταχύτητες  $u$ . Η ποσότητα  $P$  που ορίζεται με τη σχέση (54.09.3)

περιστασιακά ονομάζεται τελική ροή κεκτημένης ταχύτητας.

(Διατήρηση ενέργειας)

$$(54.10.1) \quad \rho_1 \left( \frac{1}{2} u_1^2 + e_1 \right) v_1 - \rho_0 \left( \frac{1}{2} u_0^2 + e_0 \right) v_0 = p_0 u_0 - p_1 u_1$$



ή

$$(54.10.2) \quad m(\frac{1}{2}u_0^2 + e_0) + u_0 p_0 = m(\frac{1}{2}u_1^2 + e_1) + u_1 p_1 .$$

Με τις (54.07 – 090) η σχέση ισοδυναμεί με

$$(54.10.3) \quad m(\frac{1}{2}v_0^2 + e_0 + p_0 \tau_0) = m(\frac{1}{2}v_1^2 + e_1 + p_1 \tau_1) .$$

(Αύξηση της εντροπίας)

$$(54.11.1) \quad \rho_1 S_1 v_1 - \rho_0 S_0 v_0 \geq 0$$

Ή από το (54.08)

$$(54.11.2) \quad m S_0 \leq m S_1 .$$

Όλες αυτές οι σχέσεις ισχύουν και για τα μπροστινά σοκ και για τις επιφάνειες επαφής. Οι δύο τύποι των ασυνεχών επιφανειών διακρίνονται με τη δήλωση ότι το αέριο ρέει δια μέσου μιας επιφάνειας επαφής με  $m=0$ .

Θα θεωρήσουμε τις ασυνέχειες του σοκ στο κεφάλαιο 55 και θα αναβάλλουμε τη συζήτηση των επιφανειών επαφής στο κεφάλαιο 56.

### 55.Κρούσεις

Για τις κρούσεις (με  $m \neq 0$ ) η σχέση (54.10.3) μειώνεται σε

$$(55.01) \quad \frac{1}{2}v_0^2 + e_0 + p_0 \tau_0 = \frac{1}{2}v_1^2 + e_1 + p_1 \tau_1 = \frac{1}{2}q^2$$

Όπου το  $q$  είναι το όριο ταχύτητας που εισάγεται στα κεφάλαια 14 και 15. Εάν θυμηθούμε ότι ο ορισμός της εντροπίας είναι  $i=e + p\tau$  από το κεφάλαιο 9 μπορούμε να γράψουμε τον τύπο (55.01) στη μορφή

$$(55.02) \quad \frac{1}{2}v_0^2 + i_0 = \frac{1}{2}v_1^2 + i_1 = \frac{1}{2}q^2 .$$

Έτσι καταλαβαίνουμε ότι η Τρίτη υπόθεση σοκ έχει ακριβώς τη μορφή του νόμου Bernoulli. Διαφέρει όμως από τους τρεις τύπους, όπως θεωρείται προηγουμένως στο κεφάλαιο 14, αφού η λειτουργία που αντιπροσωπεύει την εντροπία στην εξάρτησή της με το  $p$  είναι τώρα συνεχής διαμέσου του σοκ, αφού οι τιμές  $i_1$  και  $i_0$  αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές  $S_1$  και  $S_0$  της εντροπίας, όπως θα δούμε. Με άλλα λόγια η αλλαγή στην εντροπία  $i_1 - i_0$  δια μέσου ενός σοκ δεν είναι ίση με  $\tau_1 - \tau_0$ , αλλά ίση με  $\tau_1 - \tau_0 + \frac{p_1 - p_0}{\rho}$ .

Κάθε μια από τις υποθέσεις σοκ(54.08-10) έχει μια μορφή στην οποία οι σχετικές ταχύτητες  $u=u-U$  συμπεριλαμβάνονται και όχι οι ταχύτητες  $u$  και  $U$  ξεχωριστά. Είναι έτσι σαφές ότι οι υποθέσεις σοκ είναι αμετάβλητες υπο τη μετάφραση με συνεχή ταχύτητα σε συμφωνία με την αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου.

Από τις εξισώσεις (54.09.2) και (54.08.2) παρατηρούμε

$$(55.03) \quad (\tau_0 + \tau_1)(p_1 - p_0) = m(\tau_0 + \tau_1)(v_0 - v_1) = v_0^2 - v_1^2 .$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση για να εξαλείψουμε το  $U_0$  και  $U_1$  από το (55.02)βρίσκουμε

$$(55.04) \quad (p_1 - p_0) \frac{\tau_0 + \tau_1}{2} = i_1 - i_0 ,$$

Και αντικαθιστώντας το  $i$  με  $e + p\tau$ ,

$$(55.05) \quad (\tau_0 - \tau_1) \frac{p_1 + p_0}{2} = e_1 - e_0 .$$

Η δεύτερη από αυτές τις δύο σημαντικές σχέσεις σοκ μπορεί να σημαίνει ότι η αύξηση στην εσωτερική ενέργεια δια μέσου ενός σοκ μπροστινού οφείλεται στην εργασία που γίνεται από το μέσο πίεσης στη παρουσία της συμπίεσης. Η πρώτη σχέση δείχνει ότι η αύξηση της εντροπίας οφείλεται στην εργασία που γίνεται από τη διαφορά πίεσης στο μέσο όγκο.

Οι σχέσεις (55.04) και (55.05) είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτες αφού αναφέρονται μόνο σε θερμοδυναμικές ποσότητες. Πρώτα συζητήθηκαν από τον Hugoniot· η σχέση (55.05) είναι επομένως ονομαζόμενη ως η σχέση του Hugoniot.

### **56. Ασυνέχειες επαφής.**

Οι υποθέσεις ασυνέχειας (54.08-10) «απαιτούν» μια μηδαμινή ή υποτιμημένη λύση. Εάν η ροή  $m$  δια μέσου της επιφάνειας είναι μηδέν, δηλαδή κανένα αέριο διαπερνά, τότε έχουμε  $U_0=U_1=0$ . Αφού  $U_0=U_1=U$  και από τη σχέση (54.09) συμπεραίνουμε ότι  $p_0=p_1$ , ενώ η σχέση (54.10.1) αυτόματα ικανοποιείται. Όμως η σχέση (55.01) δε μπορεί πλέον να εξαχθεί από τη (54.10.3). Μια τέτοια επιφάνεια επαφής κινείται με το αέριο και χωρίζει δύο ζώνες διαφορετικής πυκνότητας (και θερμοκρασίας)· αλλά η πίεση και η ροή ταχύτητας είναι ίδιες και στις δύο πλευρές. Μια ασυνέχεια επαφής πιθανόν να χωρίσει όχι μόνο μέρη του ίδιου αερίου αλλά και οι δύο διαφορετικών αερίων.

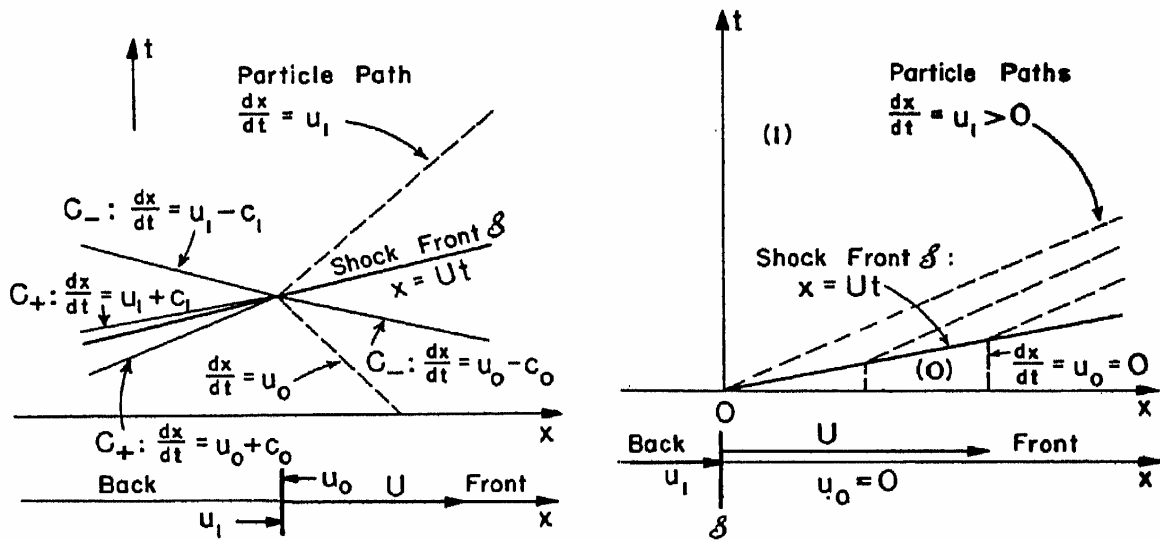
Είναι προφανές ότι στη πραγματικότητα μια τέτοια επιφάνεια επαφής δε μπορεί να διατηρηθεί για ένα εκτιμητό μήκος χρόνου· η μεταβίβαση θερμότητας αντίμεσα στα μόνιμα διπλανά μόρια σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας θα κάνει σύντομα την υπόθεσή μας από ιδεατή, μη πραγματική. Ενώ τα μόρια του αερίου που διαπερνούν ένα μπροστινό σοκ εκτίθεται στη μεταβίβαση θερμότητας για πολύ λίγο, αυτά που υπομένουν κοντά σε κάθε πλευρά από μια επιφάνεια επαφής εκτίθεται συνεχώς σε μεταβίβαση θερμότητας. Έτσι είναι προφανές ότι το στρώμα επαφής θα υποχωρήσει τελικά.

Η ροή ταχύτητας είναι συνεχής δια μέσου των επιφανειών επαφής σε μια μονοδιάστατη ροή. Όμως σε ροές με παραπάνω από μία διάσταση όπως θα δούμε στο κεφάλαιο N, τμήμα 118, το περιφερειακό μέρος της ροής ταχύτητας μπορεί να «υποφέρει» μια ασυνέχεια δια μέσου μιας επιφάνειας επαφής, ενώ το κανονικό μέρος σχετικά με την επιφάνεια είναι πάντα μηδέν, όπως στην περίπτωση που συζητείται.

### **57. Περιγραφή των κρούσεων.**

Θυμόμαστε τους ακόλουθους ορισμούς που δίνονται στο κεφάλαιο 52. Η πλευρά του μπροστινού σοκ μέσο του οποίου το αέριο εισέρχεται στο μπροστινό σοκ ονομαζόταν η μπροστινή πλευρά ή πίσω πλευρά. Με άλλα λόγια, τα μόρια διασχίζουν το μπροστινό σοκ από μπροστά προς την πίσω πλευρά. Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του ισάξιου συστήματος. Συνήθως πρέπει να δηλώνουμε τη μπροστινή πλευρά του μπροστινού σοκ με το σήμα (0) και την πίσω πλευρά με (1). Λέμε επίσης ότι το μπροστινό σοκ αντικρίζει τη μπροστινή πλευρά ή ότι κατευθύνεται στη μπροστινή πλευρά.

Πρέπει να κατανοηθεί πλήρως ότι η κατεύθυνση με την οποία κινείται το μπροστινό σοκ, που δίνεται με το σημείο του  $U$ , δεν έχει καμία σχέση με την κατεύθυνση που αντικρίζει, δηλαδή με τη διαφορά της μπροστινής και πίσω πλευράς του σοκ που εξαρτάται μόνο στη σχετική ταχύτητα  $U$ . Όπου το μπροστά αυξάνει, είναι σταθερό ή μειώνεται εξαρτάται μόνο από την απόλυτη ταχύτητα.



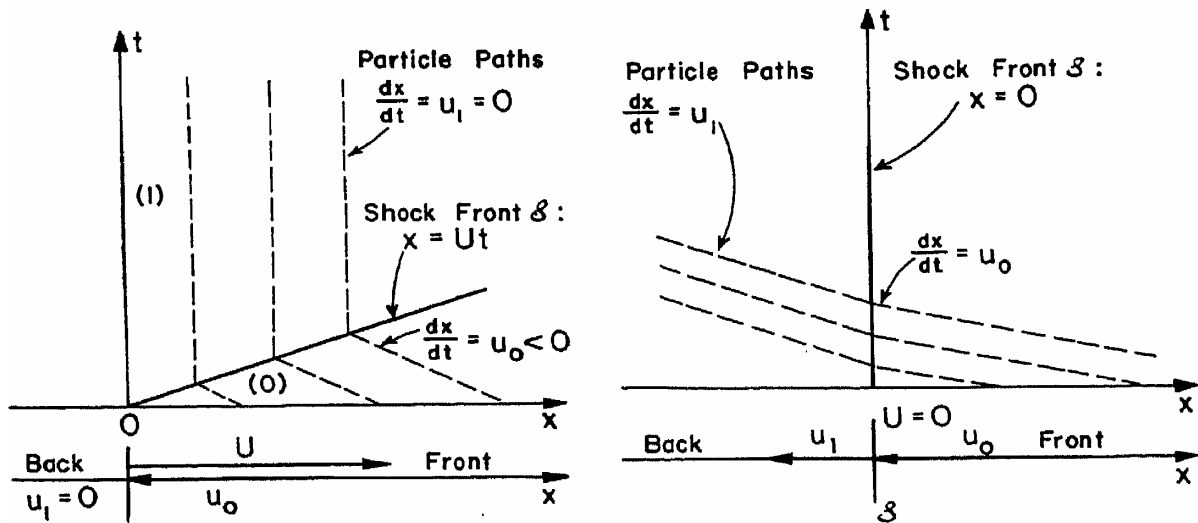
Η πίεση , η πυκνότητα , η θερμοκρασία και η εντροπία είναι , όπως θα δούμε στα κεφάλαια 65 και 67, πάντα μεγαλύτερα από το μπροστινό σοκ απ' ότι μπροστά απ' αυτό και ο βαθμός αυτής της αύξησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διάφορους τρόπους για να μετρήσουμε την ένταση του σοκ,δες κεφάλαιο 71.

Θα δούμε περαιτέρω , στα κεφάλαια 65 και 66, ότι η ταχύτητα του αερίου σε σχέση με το μπροστινό σοκ,  $|u - U|$ , είναι πάντα μικρότερο το σοκ από πίσω , παρά από μπροστά. Μια επίπτωση από αυτό το γεγονός είναι η ταχύτητα στην αριστερή πλευρά του μπροστινού σοκ είναι πάντα μεγαλύτερη από τη δεξιά πλευρά , ανεξάρτητα από το ποια πλευρά είναι η μπροστά και ποια η πίσω

$$(57.01) \quad u_{\text{left}} > u_{\text{right}} \text{ OR } v_{\text{left}} > v_{\text{right}} .$$

Τώρα θα συζητήσουμε τρεις διαφορετικές ερμηνείες από ένα μπροστινό σοκ και όλες από αυτές ίσες με τη θεωρία της σχετικότητας του Γαλιλαίου.

Πρώτα , υποθέτουμε ότι η ταχύτητα στη μπροστινή πλευρά είναι μηδέν. Μετά το μπροστινό σοκ μπαίνει σε μια ζώνη (0) συστήματος με ταχύτητα U όταν παρατηρείται από την μπροστά πλευρά και θα είναι υπερηχητική , ενώ η ταχύτητα  $U - u_1 = -u_1$  του μπροστινού σοκ που παρατηρείται από τη ζώνη υψηλής πίεσης στη πίσω πλευρά είναι υποηχητική. Το μπροστινό σοκ κινείται γρήγορα στη ζώνη ησυχίας , περικλείονατι όλο και περισσότερο από το αέριο που αφού εξαλειφθεί ακολουθεί σε μια ταχύτητα μικρότερη από αυτή του μπροστινού σοκ. Την ίδια στιγμή η πυκνότητα και η πίεση ξαφνικά αυξάνονται. Έχουμε ήδη εξηγήσει ότι ένα τέτοιο κύμα σοκ που αυξάνεται, δημιουργείται όταν το έμβολο μετακινείται σε κενό αέρα.



Δεύτερον υποθέτουμε ότι η ταχύτητα  $U_1$  στη πίσω πλευρά είναι μηδέν. Μετά το μπροστινό σοκ μπορεί να ερμηνευτεί ως μειωμένο, με την ταχύτητα  $U$  να αφήνει πίσω μια ζώνη υψηλής πίεσης από ήσυχη. Τέτοια κύματα σοκ που μειώνονται, μπορούν να συναντηθούν ως κύματα σοκ που αντανακλούνται από τοίχο, δεξ κεφάλαιο 70.

Τελικά υποθέτουμε ότι η ταχύτητα του μπροστινού σοκ είναι μηδέν, με άλλα λόγια, ότι το μπροστινό σοκ είναι ακίνητο (Κάθε μπροστινό σοκ είναι ακίνητο εάν παρατηρηθεί από ένα συνεργαζόμενο σύστημα που κινείται με την στιγμιαία ταχύτητα  $U$  του μπροστινού σοκ). Ένα τέτοιο ακίνητο μπροστινό σοκ περιγράφεται απλά από ένα σταθερό σημείο  $x = \xi$  στο σωλήνα όπου μέσα ρέει με υπερηχητική ταχύτητα και πίσω όπου μειώνεται (σε υποηχητική ταχύτητα), ενώ η πίεση και η πυκνότητα αυξάνονται. Οι ασυνεχείς υποθέσεις που ισχύουν για τα ακίνητα σοκ ( $U=0$ ) μπορούν να βρεθούν αμέσως αντικαθιστώντας το  $U_1=U_1$  στη σχέση (54.08-10)

$$(57.02) \quad \rho_0 u_0 = \rho_1 u_1 = m,$$

$$(57.03) \quad \rho_0 u_0^2 + p_0 = \rho_1 u_1^2 + p_1 = P,$$

$$(57.04) \quad \frac{1}{2} \rho_0 u_0^2 + i_0 = \frac{1}{2} \rho_1 u_1^2 + i_1 = \frac{1}{2} \dot{q}^2.$$

### 58. Μοντέλα της κίνησης σοκ.

Τα σοκ στις διαφορετικές πλευρές τους μπορούν να εικονοποιηθούν σε αναλογία με την κίνηση των μορίων όπως ένα ρεύμα από γρήγορα αυτοκίνητα σε ένα κύριο δρόμο. Ένα σοκ μπορεί να παραχθεί ως ακολούθως. υποθέτουμε μία σταθερή ροή κίνησης με υψηλή ταχύτητα. Σε μια τέτοια ροή υπάρχει ένας «ήχος ταχύτητας» δηλαδή μια ταχύτητα στην οποία μικρές ενοχλήσεις στην κίνηση θα απλωθούν. εάν η ταχύτητα των αυτοκινήτων που ταξιδεύουν ξεπεράσει τον ήχο ταχύτητας, τότε ένα σοκ συμβαίνει όταν η ταχύτητα μειώνεται ξαφνικά, για παράδειγμα όταν ένας οδηγός δει μια πινακίδα επιβράδυνσης. Ο οδηγός κάθε αυτοκινήτου που ακολουθεί θα δει ξαφνικά το μπροστινό αυτοκίνητο να μειώνει την ταχύτητα. Δε μπορεί να μεταδώσει ένα προειδοποιητικό σήμα στον πίσω οδηγό, γιατί και αυτός μειώνει την ταχύτητα. Το σοκ που προκύπτει είναι στραμμένο προς τα πίσω. Η αύξηση της πυκνότητας είναι προφανής· αύξηση στην πίεση παρουσιάζεται αμέσως στο μοντέλο μας, εάν φανταστούμε την σειρά των αυτοκινήτων να διαχωρίζεται από πηδήματα με ένα μη γραμμικό νόμο απώθησης. Μια αύξηση στη θερμοκρασία μπορεί πιθανόν να ερμηνευτεί με μέσα από τέτοια μοντέλα, εάν η ενέργεια από μικρούς «ερεθισμούς» μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτική θερμότητα.

Ένα κύμα σοκ που μειώνεται αυστηρά μπορεί να θεωρηθεί ως μία ακραία περίπτωση. Ας υποθέσουμε, όπως πριν, μια μακριά στήλη από αυτοκίνητα που έχουν τοποθετηθεί με ίση απόσταση και ταξιδεύουν με υπερηχητική ταχύτητα όπου χτυπά ένα απρόβλεπτο εμπόδιο που ξαφνικά φέρνει το πρώτο όχημα σε πλήρη ακινητοποίηση. Το δεύτερο όχημα θα πλησιάσει το πρώτο και θα σταματήσει. Το τρίτο θα ακινητοποιηθεί ξαφνικά από το δεύτερο και τα λοιπά. Το σημείο που χωρίζει τα σταματημένα αυτοκίνητα από αυτά που κινούνται προφανώς αντιπροσωπεύει ένα μειούμενο μπροστινό σοκ.

Ένα σοκ που στρέφεται προς τα εμπρός και εισβάλλει σε μια ζώνη σταματήματος / καθυστέρησης χτυπά μια σειρά από αυτοκίνητα που έχουν παρκάρει με μεγάλη απόσταση μεταξύ τους και τα θέτει σε κίνηση.

Μοντέλα μονοδιάστατης κίνησης κύματος από μέσα ατομικών μυρίων που συνδέονται με το μη γραμμικό νόμο της απόθησης δεν είναι μόνο προτεινόμενα, αλλά μπορούν ακόμα να χρησιμοποιηθούν ως προσεγγίσεις σε πραγματικές καταστάσεις και έτσι ως μια βάση για αριθμητικό υπολογισμό, σελ. (58), σε περίπτωση όπου μόνο οι 2 πρώτες υποθέσεις σοκ πρέπει να θεωρηθούν, δες κεφάλαιο 61.

### 59. Συζήτηση των μηχανικών σοκ καταστάσεων

Μόνο η Τρίτη υπόθεση εισάγει ακριβώς τη θερμοδυναμική φύση της ουσίας που αντιπροσωπεύεται από την ενέργεια  $e$  ή την ενθαλπία  $i$  w, μια γνωστή λειτουργία του  $\rho$  και  $p$ . Για αυτό το λόγο τα συμπεράσματα που εξάγονται από τις «μηχανικές υποθέσεις», οι πρώτες δύο υποθέσεις σοκ (54.08-09)

$$\begin{aligned} \rho_0 v_0 &= \rho_1 v_1 = m \\ \rho_0 v_0^2 + p_0 &= \rho_1 v_1^2 + p_1 = P, \end{aligned}$$

Είναι έγκυρες για κάθε μέσω ανεξάρτητα από την εξίσωση της κατάστασης. Αυτό αληθεύει για τις σχέσεις.

$$(59.01) \quad m(v_1 - v_0) = p_0 - p_1$$

$$(59.02) \quad m^2 = -\frac{p_0 - p_1}{v_0 - v_1}$$

$$(59.03) \quad v_1 v_0 = \frac{p_0 - p_1}{\rho_0 - \rho_1}$$

Η σχέση (59.01) ακολουθεί απευθείας τη (54.09). Η σχέση (59.02) βγαίνει από την σχέση (59.01) αντικαθιστώντας το  $U_1 = m v_1$  και  $U_0 = m v_0$  · η σχέση (59.03) βγαίνει από την (59.01) αντικαθιστώντας  $m v_1 = \rho_1 U_1$  και  $m v_0 = \rho_0 U_0$ .

Οι ταχύτητες  $U_0, U_1$  και η μάζα ροής  $m$  προφανώς έχουν το ίδιο σήμα. Η σχέση (59.01) μετά δείχνει ότι η πίεση  $p$  αλλάζει υπό την αίσθηση απέναντι σε αυτό όπου η σχετική ταχύτητα  $|U|$  αλλάζει. Η σχέση (59.02) δείχνει ότι η πυκνότητα αλλάζει με την ίδια αίσθηση όπως η πίεση. Προβλέποντας το γεγονός ότι το σοκ είναι συμπιεστικό δηλ.  $p_1 > p_0$  (μια γενική απόδειξη θα δοθεί στο κεφάλαιο 65 για πολυτροπικά αέρια, το γεγονός αποδεικνύεται από ακριβείς φόρμουλες όπως δείξαμε στο κεφάλαιο 67), βλέπουμε ότι η πίεση αυξάνεται και η σχετική ταχύτητα  $|U|$  μειώνει ενώ το αέριο διασχίζει το μπροστινό σοκ.

Μια διαφορετική συμμετρική για τη μηχανική υπόθεση σοκ είναι η

$$(59.04) \quad \tau_0(p_1 - p_0) = v_0(v_0 - v_1),$$

$$\tau_1(p_0 - p_1) = v_1(v_1 - v_0),$$

από την οποία οι ισοδύναμες σχέσεις

$$(59.05) \quad (\tau_0 - \tau_1)(p_1 - p_0) = (v_0 - v_1)^2,$$

$$(59.06) \quad (\tau_0 + \tau_1)(p_1 - p_0) = v_0^2 - v_1^2,$$

ακολουθούν.

Όλες οι υποθέσεις (59.03-06) καθαρά χωρίζουν τις θερμοδυναμικές ποσότητες από τις ταχύτητες.

### **60. Ηχητικά κύματα ως όρια αδύναμων σοκ.**

Ας αναλογιστούμε την αδυναμία των σοκ για μια σταθερή κατάσταση (ο) τέτοια ώστε η δύναμη του σοκ που μετριέται με τη σχέση  $p_1 - p_0$  τείνει στο μηδέν. Εάν προβλέψουμε το αποτέλεσμα που επρόκειτο να αποδειχθεί στο κεφάλαιο 65, ότι δια μέσου ενός μπροστινού σοκ, η αλλαγή της εντροπίας είναι μόνο τρίτης τάξεως στο  $p_1 - p_0$ , τότε η εξίσωση (59.03) υποχωρεί για  $p_1 \rightarrow p_0$  η σχέση  $U_0 U_1 \rightarrow P_p =$ . Εφόσον η σχέση (59.01) συνεπάγεται ότι  $U_1 \rightarrow U_0$  βλέπουμε ότι στο όριο η ροή της ταχύτητας είναι σχετική με το μπροστινό σοκ, είναι η ηχητική ταχύτητα. Εφόσον έχουμε αναγνωρίσει το γεγονός αυτό, στο τέλος του κεφαλαίου 34, όπως στην υπόθεση για την διάδοση ηχητικών κυμάτων, δεδομένου των χαρακτηριστικών στο  $(x,t)$  επίπεδο, έχουμε δείξει: Ένα ηχητικό κύμα μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα συνεχώς αδύναμο σοκ.

### **61. Υποθέσεις όπου οι μηχανικές υποθέσεις σοκ είναι επαρκείς για να ορίσουν το σοκ.**

Συγκεκριμένες επιπλέον παρατηρήσεις πρέπει να γίνουν σχετικά με τον ρόλο των δύο πρώτων υποθέσεων σοκ, των μηχανικών υποθέσεων σε αντίθεση με τη θερμοδυναμική υπόθεση. Υπάρχουν περιπτώσεις μεγάλης πρακτικής σημασίας όπου οι πρώτες δύο υποθέσεις μόνο είναι επαρκείς για να ορίσουν τη διαδικασία του σοκ, κυρίως στη ροή των υγρών στην οποία η πίεση εξαρτάται από την πυκνότητα μόνο και όχι αξιοσημείωτα από την εντροπία.

Το νερό, για παράδειγμα, είναι περίπου σαν ένα υγρό, αφού στην σχέση πίεσης - πυκνότητας,  $p=A-B$ , οι συντελεστές A και B είναι περίπου ανεξάρτητα της εντροπίας, δες κεφάλαιο 3. Το ίδιο ισχύει και για τον καθορισμό των σοκ, ή καλύτερα τρύπες σε ρηχό νερό όπου χαρακτηρίζονται από τη σχέση  $p=A$ , δες (19.14). Η Τρίτη σχέση σοκ παραμένει φυσικά έγκυρη σε όλες τις περιπτώσεις, αλλά μπορεί να θεωρηθεί απλά σαν ένα μέσο που ορίζει τη ισορροπία ενέργειας, αφού το πρόβλημα έχει λυθεί.

Η εσωτερική ενέργεια τέτοιων υγρών, χωρίζεται σε δύο μέρη,  $e = (p) + (S)$ , ένα εξαρτώμενο μόνο από την πυκνότητα, το άλλο μόνο από την εντροπία, δες κεφάλαιο 3. Η Τρίτη υπόθεση σοκ μπορεί τότε να γραφτεί στη μορφή

$$[e_1^{(2)} - e_0^{(2)}] = -[\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_0^2 + e_1^{(1)} - e_0^{(1)} + p_1\tau_1 - p_0\tau_0].$$

Αφού η δεξιόπλευρη σειρά έχει ήδη οριστεί πάνω από τις δύο πρώτες υποθέσεις σοκ, ο καθένας μπορεί να υπολογίσει την αύξηση του που μπορεί να ερμηνευτεί ως ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα (ή σε ενέργεια ταραχής σε ρηχό νερό). Οι παρατηρήσεις αυτές εφαρμόζονται γενικά σε αδύναμο σοκ, δηλαδή σε σοκ για τα οποία η υπερβολική αναλογία πίεσης είναι μικρή. Για τέτοια αδύναμο σοκ, όπως θα δούμε, η αύξηση της εντροπίας είναι πολύ μικρή, στην πραγματικότητα της τρίτης τάξεως σε, και μπορεί επομένως να απορριφθεί ασφαλώς, δες κεφάλαιο 72.

### **62. Υποθέσεις σοκ στην παράσταση του Lagrangian.**

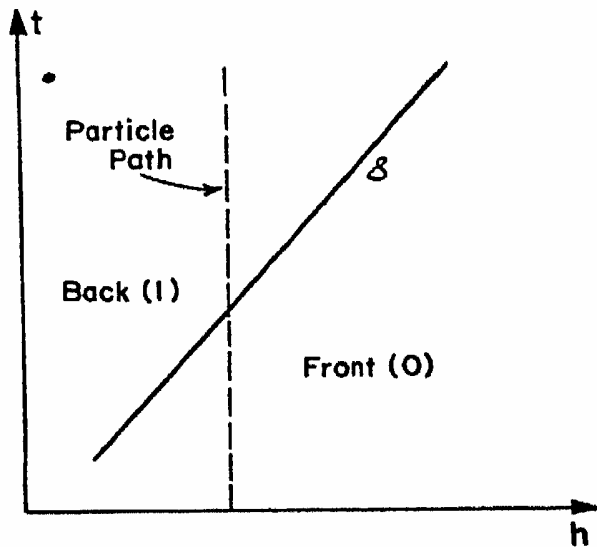
Μερικές παρατηρήσεις που αφορούν τη μορφή του Lagrangian για τις σχέσεις σοκ θα είναι χρήσιμες αργότερα. Εάν το  $x(t)$  είναι ισάξιο ενός κινούμενου μορίου, το  $(t)$  αναφέρεται σε ένα

συγκεκριμένο «μηδενικό» - μόριο , δεξ κεφάλαιο 18, τότε κάθε μόριο είναι σταθερό (ανεξάρτητα τον χρόνο) από το ισάξιο Lagrangian  $h =$  .

Με το  $h$  και  $t$  ως ανεξάρτητα , το  $u$  και το  $r =$  ως εξαρτημένες μεταβλητές , οι διαφορικές εξισώσεις είναι , δεξ (18.09-10)

$$\tau_t = u_h, \quad u_t = k^2 \tau_h, \quad \text{with } k = \tau^{-1} c = \rho c$$

Και το  $X_n = \Gamma, x_t = U$ . τώρα ας θεωρήσουμε ένα μπροστινό σοκ  $S$  να κινείται σχετικά με το αέριο , καλύπτοντας στο χρόνο  $t$  ένα μόριο με το ισάξιο Lagrangian  $h = h(t)$ .



Εικ.35

Τότε αν  $x(h,t)$  είναι η θέση του μορίου με τα ισάξια  $h$  και  $t$ , η θέση του μπροστινού σοκ δίνεται με

$$\xi = x(h(t), t),$$

και έτσι η ταχύτητα του σοκ είναι

$$U = \tau \dot{h} + u.$$

Με το σύμβολο  $[f]$  για  $f|_0$  αμέσως παρατηρούμε την κινηματική υπόθεση σοκ

$$(62.01) \quad \dot{h}[\tau] + [u] = 0,$$

όπου αντικαθιστά την αυτόματη ικανοποιητική υπόθεση της διατήρησης της μάζας.

Παρατηρούμε ότι  $-h$  είναι η μάζα που περνά το μπροστινό σοκ σε μονάδα χρόνου από τη μπροστινή πλευρά στην πίσω πλευρά (το τμήμα διασταύρωσης υποτίθεται ότι έχει μονάδα περιοχής). Συνεπώς η διατήρηση της κερτημένης ταχύτητας εκφράζεται από τη σχέση

$$(62.02) \quad [p] - \dot{h}[u] = 0,$$

όπου από την (62.01) σε μια μορφή που δεν αλλάζει υπό μεταφραστική κίνηση ,είναι η

$$(62.03) \quad [p] + \dot{h}^2[\tau] = 0,$$

Ενώ από το  $u = u - U = -th$  η διατήρηση της ενέργειας εκφράζεται από

$$(62.04) \quad [\frac{1}{2}(u - U)^2 + \dot{h}] = 0$$

ή

$$(62.05) \quad \frac{1}{2}\dot{h}^2[\tau^2] + [\dot{h}] = 0.$$

**63. Οι σχέσεις σοκ που πηγάζουν από τις διαφορικές εξισώσεις για κολλώδη υγρά και για υγρά μεταβίβασης θερμότητας.**

Φαίνεται κατάλληλο να συμπληρώσουμε τις εισαγωγικές παρατηρήσεις του κεφαλαίου 50 με μια σύντομη και κάπως πιο λεπτή ανάλυση του πως οι υποθέσεις σοκ μπορούν να διατηρηθούν αφήνοντας τους συντελεστές  $\mu$  της κολλητικότητας και  $\lambda$  της μεταβίβασης θερμότητας να φτάνουν το μηδέν. ( Η σημείωση  $\mu$  και  $\lambda$  για αυτούς τους δύο συντελεστές περιορίζεται μόνο σε αυτό το τμήμα· ο παράγοντας  $\mu$  που χρησιμοποιήθηκε εδώ είναι 4/3 φορές που συνήθως εισάγεται.). Οι διαφορικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν αυτούς τους παράγοντες και γενικεύονται τις εξισώσεις, είναι

$$(63.01) \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad (\text{Διατήρηση μάζας})$$

$$(63.02) \quad (\rho u)_t + (\rho u^2 + p - \mu u_x)_x = 0$$

(Διατήρηση της ορμής με κολλητική συντριβή)

$$(63.03) \quad [\rho(\frac{1}{2}u^2 + e)]_t + [\rho u(\frac{1}{2}u^2 + e) - \mu u u_x - \lambda T_x]_x = 0$$

(Διατήρηση ενέργειας)

$$(63.04) \quad \rho T S_t + \rho u T S_x = \mu u_x^2 + (\lambda T_x)_x \quad (\text{Ισορροπία θερμότητας}).$$

Η εξίσωση της ισορροπίας θερμότητας (63.04) μπορεί να προέρθει από τον συνδυασμό των τριών νόμων διατήρησης. Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (63.04) είναι η θερμότητα που αποκτιέται από μια μονάδα όγκου σε μια μονάδα χρόνου. Ο δεύτερος όρος στη δεξιά πλευρά μετρά τη συνεισφορά που οφείλεται στη κολλητική εντριβή, που είναι απαραίτητα θετική σε συμφωνία με το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής.

Αντιρρήσεις έχουν εγερθεί στη χρήση των εννοιών της κολλητικότητας και της μεταβίβασης θερμότητας στην περιγραφή του εσωτερικού μηχανισμού μιας διαδικασίας σοκ, αφού οι αλλαγές όλων των ποσοτήτων στη στενή ζώνη σοκ είναι τόσο μεγάλη, έτσι αυτές οι έννοιες δεν έχουν σημασία. Αντί αυτού έχει προταθεί να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση του Boltzman για την κινητική θεωρία των αερίων. Όμως, εάν οι έννοιες της κολλητικότητας και μεταβίβασης ενέργειας μπορούν ή όχι να περιγραφούν τουλάχιστον για τα αδύναμα σοκ, δε φαίνεται να έχει αποφανθεί. Σε κάθε περίπτωση ο καθένας περιμένει ότι η χρήση των εννοιών αυτών οδηγεί σε μια εικόνα της κατάστασης που είναι ποιοτικά σωστή.

Χρησιμοποιώντας την κολλητικότητα και τη μεταβίβαση θερμότητας πρέπει να δείξουμε ότι κάτω από αρχικές και περιορισμένες υποθέσεις που συμφωνούν με τη φυσική κατάσταση του συστήματος (63.01-03) κατακτά μια μοναδική και συνεχή λύση όπου, όσο το  $\lambda \rightarrow 0$  και το  $\mu \rightarrow 0$ , συγκλίνει σε μια λύση των διαφορετικών εξισώσεων της μη κολλητικής και μη μεταβίβασης θερμότητας ροής, εκτός από τις διακεκριμένες γραμμές το  $(x-t)$  – επίπεδο. Στη γειτνίαση των γραμμών αυτών η σύγκλιση είναι τότε ανομοιόμορφη και η οριακή λύση γίνεται ασυνεχής. Πρέπει να δείξουμε, επίσης, ότι οι υποθέσεις για τις ασυνέχειες επαφής ισχύουν για αυτές τις γραμμές. Μια απόδειξη αυτών των γεγονότων θα υποστηρίξει την ιδέα ότι η προηγούμενη θεωρία είναι μια επαρκής προσέγγιση της φυσικής καταστάσεως, μια τέτοια θεωρία δεν έχει ακόμα διατυπωθεί.

Παρόλα αυτά είναι πιθανό να αναλύσουμε τη διάβαση αυτή σε ένα όριο σε τμήματα απλοποιώντας το πρόβλημα. Υποθέτουμε ότι η δήλωση που αφορά τη σύγκλιση, και σε αυτή την υπόθεση εισάγουμε τις υποθέσεις σοκ.

Θεωρούμε μια ξαφνική μετάβαση στη γειτνίαση του σημείου  $x=0$  στο χρόνο  $t=0$  με κανένα περιορισμό γενίκευσης μπορούμε να αναφέρουμε την διαδικασία σε ένα κινούμενο ισάξιο



σύστημα έτσι ώστε αυτό το σημείο να είναι σε σταμάτημα στο χρόνο  $t=0$ . Για απλότητα, υποθέτουμε επίσης ότι στη γειτνίαση του  $x=0$ ,  $t=0$ η διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, έτσι ώστε μπορούμε να θέσουμε  $ut=pt=st=0$  με  $t=0$  και τη  $x=0$  και να γράψουμε  $u$  αντί  $u$ .

Οι 4 νόμοι (63.01-04) τότε μειώνονται σε

$$(63.05) \quad (\rho v)_x = 0,$$

$$(63.06) \quad (\rho v^2 + p - \mu v_x)_x = 0,$$

$$(63.07) \quad [\rho v(\frac{1}{2}v^2 + i) - \mu v v_x - \lambda T_x]_x = 0,$$

$$(63.08) \quad \rho v T S_x = \mu v_x^2 + (\lambda T_x)_x.$$

Οι 3 νόμοι διατήρησης (63.05-07) μπορούν προφανώς να ολοκληρωθούν. Τότε εκφράζουν τη σταθερότητα της μάζας, κεκτημένης ταχύτητας και ενέργειας στη διαδικασία ροής. Αυτή η πιθανότητα οδηγεί στις υποθέσεις σοκ στον ακόλουθο τρόπο. Ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις (63.05-07) ανάμεσα στο  $-\epsilon$  και  $\epsilon$ , όπου το  $\epsilon$  είναι αυθαίρετα μικρό, με το αποτέλεσμα

$$(63.09) \quad [\rho v]_{-\epsilon}^{\epsilon} = 0,$$

$$(63.10) \quad [\rho v^2 + p - \mu v_x]_{-\epsilon}^{\epsilon} = 0,$$

$$(63.11) \quad [\rho v(\frac{1}{2}v^2 + i) - \mu v v_x - \lambda T_x]_{-\epsilon}^{\epsilon} = 0,$$

Στην οποία εξίσωση το  $\epsilon$  δηλώνει τη διαφορά  $f(\epsilon) - f(-\epsilon)$ . Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$  και  $\mu$  με όριο  $\lambda \rightarrow 0$  και  $\mu \rightarrow 0$  θεωρούμε μια ακολουθία ροής, που υποτίθεται ότι συγκλίνουν σε ένα όριο ροής, εκτός προφανώς του σημείου  $x=0$ . Οι σχέσεις (63.09-11), που δεν περιλαμβάνουν ποσότητες στο σημείο  $x=0$ , παραμένουν έγκυρες στο όριο.

Έτσι πετυχαίνουμε για το όριο ροής

$$(63.12) \quad [\rho v]_{-\epsilon}^{\epsilon} = 0,$$

$$(63.13) \quad [\rho v^2 + p]_{-\epsilon}^{\epsilon} = 0,$$

$$(63.14) \quad [\rho v(\frac{1}{2}v^2 + i)]_{-\epsilon}^{\epsilon} = 0.$$

Όταν τώρα αφήσουμε το  $\epsilon$  να φτάσει 0, πετυχαίνουμε την ίδια υπόθεση σοκ που βρήκαμε προηγουμένως.

Με τον ίδιο τρόπο η τέταρτη υπόθεση σοκ της αυξανόμενης εντροπίας είναι ακολουθία της διαδικασίας περιορισμού. Θέτοντας το  $\rho u = m =$  συνεχές σε συμφωνία με (63.05) και ολοκληρώνοντας την εξίσωση (63.08) ανάμεσα στο  $-\epsilon$  και στο  $\epsilon$  βρίσκουμε

$$(63.15) \quad m[S]_{-\epsilon}^{\epsilon} = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mu \frac{v_x^2}{T} dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \lambda \frac{T_x^2}{T^2} dx + \left[ \frac{\lambda T_x}{T} \right]_{-\epsilon}^{\epsilon}.$$

Για μια σταθερή τιμή του  $\epsilon$ , ο τελευταίος όρος στη δεξιά πλευρά τείνει στο 0, αφού  $\mu \rightarrow 0$  και  $\lambda \rightarrow 0$ , αυτό δεν ισχύει απαραίτητα για τους 2 άλλους όρους. Έτσι, αυτοί οι όροι είναι ακέραιοι σε ένα διάστημα μέσα στο οποίο το  $\epsilon$  γίνονται πολύ μεγάλα στη διαδικασία περιορισμού. Για αυτό το λόγο οι θετικές συνεισφορές στη δεξιά πλευρά τελικά υπερिशύουν και έτσι έχουμε στο όριο

$$[S]_{-\epsilon}^{\epsilon} \geq 0,$$

Που είναι η τέταρτη υπόθεση σοκ. (έχουμε ήδη δει ότι το σημείο εξίσωσης έχει αποκλειστεί για μια πραγματική ασυνέχεια). Είναι αξιοσημείωτο ότι αυτή η τελευταία υπόθεση σοκ, που είναι

ανεξάρτητη από τους τρεις νόμους διατήρησης για τα σοκ, καταλήγει στο όριο από την εξίσωση ισορροπίας θερμότητας, που εξαρτάται από τους τρεις νόμους διατήρησης για συνεχή ροή. Πρέπει να τονιστεί ξανά ότι η κατά προσέγγιση περιγραφή της ροής στα υγρά με σχεδόν καμία κολλητικότητα και μεταφορά θερμότητας από μια ιδεατή ροή που περιλαμβάνει μπροστινά σοκ, αλλά καμία κολλητικότητα και μεταβίβαση θερμότητας, είναι απαραίτητα ανεπαρκής στη περιοχή κοντά στο μπροστινό σοκ, όπου οι συντελεστές του  $\mu$  και  $\rho$  και  $T$  γίνονται μεγάλοι. Μια κοντινή ανάλυση της ξαφνικής μετάβασης για πολύ μικρές, αλλά όχι για αυτές που εξαφανίζεται τιμές του  $\lambda$  και  $\mu$  είναι επομένως επιθυμητές. Είναι εξαιρετικά επιθυμητό να ορίσουμε το πλάτος της ζώνης του σοκ από μια τέτοια ανάλυση.

Ας σκεφτούμε τις ποσότητες  $\mu$ ,  $\rho$  και  $T$  και στις δύο πλευρές της ζώνης σοκ  $-\varepsilon \leq \chi \leq \varepsilon$  όπως γνωρίζουμε και ίσα με αυτά που συμβαίνουν στην περίπτωση ορίου ενός μπροστινού σοκ. Τότε οι λύσεις  $(p, T, \rho)$  των τριών εξισώσεων (63.05-07) θα βρεθούν όπου υποθέτουμε ότι βρίσκονται οι καθορισμένες οριακές τιμές. Το πλάτος  $2\varepsilon$  της ζώνης σοκ θα οριστεί από την υπόθεση ότι τέτοιες λύσεις υφίστανται για όπου οι συντελεστές  $\mu$  και  $\rho$  εξαφανίζονται και στα δύο άκρα,  $\chi = \pm\varepsilon$ .

Δεν είναι σίγουρο εάν τέτοιες λύσεις υφίστανται. Αντί αυτού μια διαφορετική διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί, η οποία έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς σε άλλους τομείς και συγκεκριμένα στη θεωρία του οριακού επιπέδου του Prandtl για κολλητικά υγρά ροή, δες [19]. Οι οριακές υποθέσεις θέτονται στο  $\chi = -\infty$  και  $\chi = \infty$  αντί για  $\chi = -\varepsilon$  και  $\chi = \varepsilon$ . Η ζώνη σοκ είναι τότε κάπως αυθαίρετα ορισμένη σαν ένα διάστημα πάνω από το οποίο αξιοσημείωτες αλλαγές του  $\rho, P$  και  $\mu$  συμβαίνουν.

Αυτό το πρόβλημα οριακής τιμής για το άπειρο διάστημα έχει συζητηθεί από διάφορους συγγραφείς, δες [4, 17 και 45] οι οποίοι υπέθεσαν συνεχείς συντελεστές το  $\mu$  και το  $\lambda$ , και με το L.H. Thomas [46] να υπολογίζει για τη διαφοροποίηση του  $\mu$  και του  $\lambda$  με τη θερμοκρασία. Σαν αποτέλεσμα αυτής της θεωρίας, η ζώνη σοκ έχει βρεθεί να τύπου στενή που το πλάτος της συγκρίνεται με το ελεύθερο κομμάτι του μέσου των μορίων αερίου. Αυτό δηλώνει ότι για μια τέτοια εξέταση τέτοιων ζωνών μετάβασης η θεωρία που δηλώνει το αέριο ως συνεχές δεν είναι αρκετή και ότι μια σχετική θεωρία θα πρέπει να υποχωρήσει στις έννοιες της κινητικής θεωρίας των αερίων.

#### **64. Η σχέση Hugoniot. Ορισμός της μετάβασης σοκ.**

Για τις ακόλουθες σχέσεις θα αποδειχθεί χρήσιμο να εισάγουμε το  $\tau$  και  $\rho$  αντί του  $\tau_a$  και  $S$  ως ανεξάρτητες μεταβλητές και να σκεφτούμε την ενέργεια σαν μια λειτουργία  $e(\tau, \rho)$  του  $\tau$  και  $\rho$ . το ότι αυτό είναι πιθανό προέρχεται από την υπόθεση  $g_s > 0$ , δες (2.07) για τη λειτουργία  $p = g(\tau, S)$ . Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Hugoniot με το κέντρο  $(\tau_0, \rho_0)$ ,

$$(64.01) \quad H(\tau, \rho) = e(\tau, \rho) - e(\tau_0, \rho_0) + (\tau - \tau_0) \frac{\rho + \rho_0}{2},$$

Μπορούμε να γράψουμε την σχέση του Hugoniot (55.05) πιο απλά με την μορφή,

$$(64.02) \quad H(\tau, \rho) = 0.$$

Χαρακτηρίζει όλα τα ζεύγη των τιμών  $(\tau, \rho)$  για την κατάσταση σε κάθε πλευρά του μπροστινού σοκ που είναι συμβατά με τις τρεις σχέσεις σοκ (54.08-10) όταν οι τιμές  $(\tau_0, \rho_0)$  δίνονται στην άλλη πλευρά. Το γράφημα της σχέσης Hugoniot στο  $(\tau, \rho)$  επίπεδο καλείται η καμπύλη του Hugoniot, δες εικόνα 36.

Για πολυτροπικά αέρια με

$$(64.03) \quad e = \frac{1}{\gamma - 1} p\tau = \frac{1 - \mu^2}{2\mu^2} p\tau,$$



- 1) Κατά μήκος της καμπύλης Hugoniot η πίεση  $p$  διαφέρει από το 0 στο άπειρο. Οι τιμές του  $T$  μπορεί να ποικίλουν ανάμεσα σε πεπερασμένα όρια,  $T_{\min}$  και  $T_{\max}$ .

Αυτή είναι για παράδειγμα η περίπτωση των πολυτροπικών αερίων για τα οποία το  $\tau$  ποικίλει κατά μήκος της καμπύλης Hugoniot ανάμεσα στο  $T_{\min} =$  και  $T_{\max} =$ , όπως είδαμε από (64.04).

- 2) Κατά μήκος της καμπύλης Hugoniot  $dp/dt < 0$ .

- 3) Κάθε ακτίνα δια μέσου του κέντρου ( $\tau$ ) τέμνει την καμπύλη Hugoniot σε ένα ακριβώς σημείο, δεδομένου ότι η ακτίνα αυτή τέμνει το  $T$  άξονα σε ένα σημείο  $T = T_{\max}$ .

Η Τρίτη υπόθεση 3) ικανοποιείται γενικά, όπως θα δειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Όλες οι τρεις υποθέσεις είναι αμέσως επιβεβαιωμένες για τα πολυτροπικά αέρια από την έκφραση (64.04).

Εάν η κατάσταση (0) και δίνονται, οι υποθέσεις 1) και 2) ασφαρίζουν ότι υπάρχει μία και μόνο τιμή που ικανοποιεί το  $H(\tau) = 0$ . Οι τιμές  $U_0 = mT_0$  και  $U_1 = mT_1$ , βρίσκονται τότε από την (59.02). Το σημάδι του  $m$  εξαρτάται από το εάν το μπροστινό σοκ αντικρίζει το αριστερό  $m > 0$  ή το δεξί  $m < 0$ . Η ταχύτητα του σοκ δίνεται από  $U = u_0 - u_0$ . Έτσι το θεώρημα (B) αποδεικνύεται.

Για τα θεωρήματα (A) και (Γ) μια επιπλέον υπόθεση πρέπει να επιβληθεί, δηλαδή

$$(64.05) \quad p_0 < \rho_0^2 v_0^2 (\tau_{\max} - \tau_0) \quad \text{για το (A)}$$

$$(64.06) \quad (u_1 - u_0)^2 < p_0 (\tau_{\max} - \tau_0) \quad \text{για το (Γ)}.$$

Αυτές οι υποθέσεις επηρεάζουν, όμως, μόνο την περίπτωση όπου η κατάσταση (0) βρίσκεται πίσω από το μπροστινό σοκ.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα (A) σημειώνουμε ότι η ποσότητα  $\tau - \tau_0$  που δίνεται από τα δεδομένα, ισοδυναμεί με την αναλογία  $(\tau - \tau_0) / (\tau - \tau_0)$  από την (59.02). Για αυτό το λόγο για να βρούμε το  $\tau$  και, πρέπει μόνο να διατέμνουμε την καμπύλη Hugoniot με την ακτίνα δια μέσου ( $\tau$ ) της κλίσης  $\tau$ . Με την υπόθεση 3) και από την (64.05) υπάρχει μόνο μια τέτοια διατομή. Η τιμή του βρίσκεται από  $\tau = mT_1$ .

Για να αποδείξουμε το θεώρημα (C) χρησιμοποιούμε τη σχέση (59.05) για την οποία τα δεδομένα δίνουν το δεξί μέλος ( $\tau$ ). Για αυτό το λόγο, για να ορίσουμε το  $\tau$  πρέπει μόνο να διατέμνουμε την υπερβολή  $(\tau - \tau_0) / (\tau - \tau_0) = -(\tau - \tau_0)^2$  με την καμπύλη Hugoniot. Αφού η κλίση της υπερβολής είναι θετική, ακολουθεί τη δεύτερη υπόθεση 2) και τη σχέση (64.06) και ότι υπάρχουν δύο τομές που αντιστοιχούν στις δύο πιθανότητες ότι η κατάσταση (0) είναι μπροστά ή πίσω από το μπροστινό σοκ. Η ροή  $m$  βρίσκεται από τη σχέση (59.02) θετική εάν το μπροστινό σοκ αντικρίζει προς τα δεξιά και αρνητική, αν αντικρίζει στα δεξιά. Η ταχύτητα του σοκ βρίσκεται τότε από

$$U = u_0 - \tau_0 m = u_1 - \tau_1 m.$$

### **65. Βασικά χαρακτηριστικά της μετάβασης σοκ.**

Στο παρόν κεφάλαιο θα μιλήσουμε για τα τέσσερα βασικά χαρακτηριστικά – αρχές των καταστάσεων του αερίου και στις δύο πλευρές ενός μπροστινού σοκ. Με τον όρο δύναμη σοκ εννοούμε καθεμιά από τις διαφορές  $\rho_1 - \rho_0$ ,  $p_1 - p_0$ , ή  $|u_1 - u_0|$ .

I. Η αύξηση της εντροπίας δια μέσου ενός μπροστινού σοκ είναι τρίτης τάξεως όσον αφορά τη δύναμη του σοκ.

II. Η αύξηση της πίεσης, πυκνότητας και θερμοκρασίας δια μέσου ενός μπροστινού σοκ διαφέρει από αντίστροφες αδιαβατικές αλλαγές αυτών των ποσοτήτων ως επί το πλείστον σε όρους της τρίτης τάξεως της δύναμης σοκ. Εδώ υποθέτουμε ότι η αρχική κατάσταση και μια ποσότητα στην τελική κατάσταση είναι ίδιες και για τις δύο διαδικασίες.

III. Τα σοκ είναι συμπιεστικά. Δηλαδή : πυκνότητα και πίεση αυξάνουν δια μέσου ενός μπροστινού σοκ.

IV. Η ροή ταχύτητας σχετικά με το μπροστινό σοκ είναι υπερηχητική στη μπροστινή πλευρά και υποηχητική στη πίσω πλευρά.

Για πολυτροπικά αέρια αυτά τα χαρακτηριστικά πηγάζουν εύκολα από τις ακριβές φόρμουλες μετάβασης που θα συζητήσουμε στο κεφάλαιο 67. Είναι αξιοσημείωτο ότι, για γενικά ιδεατά αέρια, αυτά τα χαρακτηριστικά εξαρτώνται ουσιαστικά μόνο από τις βασικές υποθέσεις (2.04 – 07) που έγιναν σχετικά με τη λειτουργία  $p = g(\tau, S)$ , δηλαδή

$$(65.01) \quad g_\tau < 0, \quad g_\tau = -\rho^2 c^2,$$

$$(65.02) \quad g_{\tau\tau} > 0,$$

$$(65.03) \quad g_S > 0.$$

Πριν αποδείξουμε αυτές τις πραγματικότητες στη γενικότητα τους, αναφέρουμε ότι το πρώτο μέρος της αρχής IV «βγαίνει» κατευθείαν από την III αρχή εάν αντί του (65.02) η κάπως πιο ισχυρή υπόθεση  $p / \rho > 0$  χρησιμοποιηθεί. Έτσι αφού  $\rho_1 > \rho_0$  και  $p_1 > p_0$  η εξίσωση (59.03) αποφέρει τη σχέση

$$\begin{aligned} v_0 v_1 &= \frac{p(\rho_1, S_1) - p(\rho_0, S_0)}{\rho_1 - \rho_0} > \frac{p(\rho_1, S_0) - p(\rho_0, S_0)}{\rho_1 - \rho_0} \\ &= p_\rho(\bar{\rho}, S_0) > p_\rho(\rho_0, S_0) = c^2(\rho_0, S_0) = c_0^2, \end{aligned}$$

Στην οποία το  $\bar{\rho}$  είναι μια επιλεγμένη τιμή μέσου, ανάμεσα στο  $\rho_0$  και  $\rho_1$ . Για αυτό το λόγο

$$(65.04) \quad v_0 v_1 > c_0^2.$$

Αφού  $v_0 > c_0$ , η δήλωση III, οδηγεί σε  $v_1 > c_0$ . Από την (65.04) καταλήγουμε στην επιθυμητή σχέση  $v_1 > c_0$ . Μπορεί να υπογραμμιστεί ότι αυτό το επιχείρημα δεν έχει χρησιμοποιηθεί για τη Τρίτη θερμοδυναμική σχέση σοκ.

Τώρα προχωρούμε για να αποδείξουμε τις τέσσερις αρχές μας στη γενικότητά τους.

Με έναν κάπως απλό τρόπο, πρώτα ισχυριζόμαστε το γεγονός ότι η διαφορά ανάμεσα σε μια μετάβαση σοκ και σε μια αδιάβατη αλλαγή. Είναι μόνο της τρίτης τάξεως της δύναμης σοκ και για αυτό το λόγο γίνεται αξιοσημείωτη μόνο για «δυνατά» σοκ. Θα αποδείξουμε :

I) Η αύξηση της εντροπίας δια μέσου ενός σοκ είναι τρίτης τάξεως στη διαφορά της συγκεκριμένης έντασης, ή, ό,τι είναι ισάξιο, στη διαφορά της πίεσης.

Επιπλέον : II. Υποθέτουμε ότι θεωρούμε ένα σοκ και μια αντίστροφη αδιαβατική αλλαγή της ίδιας αρχικής κατάστασης σε καταστάσεις με την ίδια συγκεκριμένη ένταση. Τότε η πίεση αυξάνει κατά μήκος του μπροστινού σοκ και συμφωνεί με την αύξηση της πίεσης στην αδιαβατική αλλαγή μέχρι τους όρους της δεύτερης τάξεως στη διαφορά της συγκεκριμένης έντασης. Το ίδιο είναι τότε αληθές για την αύξηση της θερμοκρασίας, που είναι μια λειτουργία του  $\rho$  και  $\tau$ . Επίσης ίδιες δηλώσεις μπορούν να εξαχθούν εάν αντί της διαφοράς  $\rho_1 - \rho_0$ , οι διαφορές  $\rho_1 - \rho_0$  εισάγονται ως δύναμη σοκ.

Για να αποδείξουμε αυτούς τους δύο ισχυρισμούς, μελετούμε τη λειτουργία του Hugoniot

$$(65.05) \quad H(\tau, p) = e(\tau, p) - e(\tau_0, p_0) + \frac{1}{2}(\tau - \tau_0)(p + p_0),$$

δες (64.01) και τη καμπύλη Hugoniot  $H(\tau, p) = 0$  στο  $(\tau, p)$  επίπεδο με «κέντρο»  $(\tau_0, p_0)$ .

Χαρακτηρίζει την μονοπαραμετρική οικογένεια των καταστάσεων  $(\tau, p)$  που μπορούν να προσεγγισθούν από το  $(\tau_0, p_0)$  από ένα σοκ. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη μπορεί να αναπαρασταθεί στη

μορφή  $p=G(\tau)$  και ότι  $G(\tau) \rightarrow \infty$  για  $\tau \rightarrow \tau_{\min}$ , δες υποθέσεις 1) και 2) στο κεφάλαιο 64. Κατά μήκος της καμπύλης Hugoniot έχουμε  $dH=0$ , για αυτό το λόγο από (2.01).

$$(65.06) \quad 2TdS - (p - p_0)d\tau + (\tau - \tau_0)dp = 0;$$

συνεπώς  $TdS=0$  ή

$$(65.07) \quad dS = 0 \quad \text{at } (\tau_0, p_0).$$

Διαφοροποιώντας την (65.06) άλλη μια φορά κατά μήκος της καμπύλης Hugoniot και θεωρώντας το  $\tau$  σαν την ανεξάρτητη μεταβλητή βρίσκουμε

$$2d(TdS) + (\tau - \tau_0)d^2p = 0,$$

για αυτό το λόγο στο κέντρο

$$d(TdS) = dTdS + Td^2S = 0,$$

επομένως επίσης

$$(65.08) \quad d^2S = 0 \quad \text{at } (\tau_0, p_0).$$

Οι σχέσεις (65.07) και (65.08) δείχνουν ότι η αλλαγή της εντροπίας είναι τουλάχιστον της τρίτης τάξεως.

Διαφοροποιώντας ακόμα μία φορά και μετά θέτοντας  $p=p_0$ ,  $T=\tau_0$  έχουμε

$$2d^2(TdS) + d\tau d^2p = 0 \quad \text{at } (\tau_0, p_0)$$

ή εξαιτίας της (65.06-07)

$$2Td^3S + d\tau d^3p = 0 \quad \text{at } (\tau_0, p_0).$$

Επειδή  $g_{\tau\tau} > 0$ , δες (65.02) η σχέση αποφέρει

$$(65.09) \quad d^3S > 0 \quad \text{when } d\tau < 0 \quad \text{at } (\tau_0, p_0).$$

Επομένως η αύξηση της εντροπίας είναι ακριβώς της τρίτης τάξεως.

Έτσι αποδείχθηκε η πρώτη δήλωση I).

Ο ισχυρισμός σχετικά με την πίεση είναι μια άμεση επίπτωση. Η εντροπία  $S$  είναι μια λειτουργία του  $T$  κατά μήκος της καμπύλης Hugoniot · έτσι έχουμε

$$p = G(\tau) = g(\tau, S(\tau)).$$

Επομένως, από (65.07-08)

$$G(\tau_0) = g(\tau_0, S_0), \quad G'(\tau_0) = g_\tau(\tau_0, S_0), \quad G''(\tau_0) = g_{\tau\tau}(\tau_0, S_0),$$

ή μιλώντας γεωμετρικά : η καμπύλη Hugoniot  $p=G(\tau)$  και η αδιαβατική καμπύλη  $p=g(\tau, S_0)$  δια μέσου του κέντρου έχουν μια επαφή δεύτερης τάξεως. Αυτό επαληθεύει την δεύτερή μας δήλωση .

Από τις (65.07-09) ακολουθεί ότι η λειτουργία  $S(\tau)$  είναι μονοτονική στο κέντρο . Τώρα θα αποδείξουμε ότι αυτό αληθεύει στο γενικό : III. Κατά μήκος όλης της καμπύλης Hugoniot η εντροπία αυξάνει με μειωμένη συγκεκριμένη ένταση.

Για τις αποδείξεις αυτής της δήλωσης χρησιμοποιούμε μια κομψή αιτιολόγηση του H.Weyl [48].

Ξαναγράφουμε τις υποθέσεις (65.01-03) σε όρους της λειτουργίας  $S=S(\tau, p)$ . Η ταυτότητα  $S=S(\tau, y(\tau, S))$  συνεπάγεται ότι  $S_{pg_s}=1$ : για αυτό το λόγο από τη σχέση (65.03)

$$(65.10) \quad S_p > 0.$$

Επιπλέον  $0=S_\tau + S_p g_r$ , συνεπάγεται ότι από (65.01)

$$(65.11) \quad S_\tau > 0.$$

Επίσης η υπόθεση καμπύλης (65.02)  $g_{\tau\tau} < 0$  οδηγεί σε

$$(65.12) \quad S_{\tau\tau} S_p^2 - 2S_{\tau p} S_p S_\tau + S_{pp} S_\tau^2 < 0,$$

όπως καταλήγουμε διαφοροποιώντας τη ταυτότητα  $S_{pg_r} + S_r = 0$  ακόμα μια φορά με αναφορά στο  $\tau$ .

Τώρα, για να αποδείξουμε τον μονοτονικό χαρακτήρα του  $S$  κατά μήκος της καμπύλης Hugoniot  $H(\tau, \rho)=0$ , φτάνει να δείξουμε  $dS \neq 0$  κατά μήκος της καμπύλης εκτός του κέντρου  $(0)$ ,  $(\tau_0, \rho_0)$ . Εάν το  $S$  ήταν στατικό κατά μήκος της καμπύλης Hugoniot σε ένα σημείο  $(1)(\tau_1, \rho_1)$ , αυτό σημαίνει, ότι εάν το  $ds$  και  $dH$  εξαφανιστούν εκεί ταυτόχρονα, η ευθεία χορδή  $(0-1)$  θα ήταν από την (65.06) εφαπτόμενη στην καμπύλη Hugoniot στο σημείο  $(1)$ . Τέτοια επαφή είναι απίθανη, όμως, όπως δείξαμε από το ακόλουθο επιχείρημα. Σε μια ακτίνα  $R$  στο  $(\tau, \rho)$  επίπεδο, που αναπαριστάται σε όρους του παραμέτρου  $s$  από

$$p = p_0 + as, \quad \tau = \tau_0 + bs,$$

με

$$a = p_1 - p_0, \quad b = \tau_1 - \tau_0,$$

έχουμε  $dp = uds$  και  $dt = bds$  επομένως από (65.06)  $dH = Tds$ .

Επομένως, εάν θεωρήσουμε και το  $S$  και το  $H$  σαν λειτουργίες του  $S$  κατά μήκος του  $R$ , τότε το  $S(s)$  και το  $H(s)$  είναι ταυτόχρονα στατικά εάν ένα από αυτά είναι κάπου στατικό.

Η ακτίνα  $R$  δεν μπορεί να συμπίπτει με την καμπύλη Hugoniot, αφού διαφορετικά μια αντιλογία στη καμπύλη στο κέντρο  $(0)$  θα υψωνόταν. Για αυτό το λόγο το γεγονός ότι το  $H(s)$  εξαφανίζεται στο κέντρο  $(0)$  και στο τελικό σημείο  $(1)$  της χορδής συνεπάγεται ότι το  $H(s)$  έχει τουλάχιστον ένα μεγαλύτερο ανάμεσα. Στο σημείο του μεγαλύτερου  $S(s)$  είναι ομοίως στατικό. Αυτή η στατική τιμή του  $S$  είναι ένα μέγιστο· για αυτό, στο σημείο αυτό

$$S_s = S_\tau b + S_p a = 0$$

ή  $S_\tau/S_p = -a/b$  και για αυτό το λόγο  $S_{ss}$  είναι εκτός από ένα θετικό παράγοντα, ίσο με τη ποσότητα

$$S_{\tau\tau}S_p^2 - 2S_{\tau p}S_pS_\tau + S_{pp}S_\tau^2,$$

που είναι αρνητικό από (65.12). Για αυτό το λόγο το  $S$  και έτσι το  $H$  έχει μόνο ένα μοναδικό στατικό σημείο στο  $R$  που τοποθετείται ανάμεσα στο  $(0)$  και  $(1)$ .

Από το γεγονός ότι το  $S$  έχει μόνο ένα μέγιστο ανάμεσα στο  $(0)$  και  $(1)$  συμπεραίνουμε τις

$$(65.13.1) \quad \frac{dS}{ds} > 0 \quad \text{at } (0)$$

$$(65.13.2) \quad \frac{dS}{ds} < 0 \quad \text{at } (1).$$

ανισότητες

Η δεύτερη ανισότητα αποκλείει την πιθανότητα ότι το  $S$  θα μπορούσε να είναι στατικό κατά μήκος της καμπύλης Hugoniot στο σημείο  $(1)$  γιατί, όπως είδαμε, η ακτίνα  $R$  θα ήταν εφαπτομένη στη καμπύλη Hugoniot σε ένα τέτοιο σημείο. Η σχέση  $dH = 0$  σε αυτό το σημείο θα συνεπαγόταν επομένως ότι  $= 0$  σε αντιλογία με το (65.13.2).

Έτσι έχουμε αποδείξει ότι η εντροπία αυξάνει κατά μήκος της καμπύλης Hugoniot με μειωμένη συγκεκριμένη ένταση.

Αφού η εντροπία αυξάνει δια μέσου ενός σοκ από την υπόθεση (54.11), τώρα ακολουθεί ότι το ίδιο είναι αληθές για την πυκνότητα και εξαιτίας του (65.01) και (65.03) το ίδιο και για την πίεση. Έτσι η δήλωση III επαληθεύεται.

Η δεύτερη δήλωση είναι μια άμεση επίπτωση των ανισοτήτων (65.13). Επειδή

$S_\tau/S_p = -g_\tau = \rho^2 c^2$ ,  $d\tau/ds = \tau_1 - \tau_0$ ,  $dp/ds = p_1 - p_0$ , και (65.10), οι ανισότητες (65.13) παίρνουν τη μορφή

$$(p_1 - p_0) + \rho_0^2 c_0^2 (\tau_1 - \tau_0) > 0,$$

$$(p_1 - p_0) + \rho_1^2 c_1^2 (\tau_1 - \tau_0) < 0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι τότε οι δύο δηλώσεις μπορούν να συνδυαστούν με

$$\rho_0^2 c_0^2 < \frac{p_1 - p_0}{\tau_0 - \tau_1} < \rho_1^2 c_1^2 .$$

Από (59.02) και (54.08) αυτή η σχέση είναι ίση με (65.14) .

Έτσι η 4<sup>η</sup> δήλωση επίσης αποδείχθηκε.

### **66. Κρίσιμη ταχύτητα και η σχέση του Prandtl για τα πολυτροπικά αέρια .**

Στα ακόλουθα κεφάλαια θα ερευνήσουμε τους ειδικούς τύπους των σχέσεων σοκ για τα πολυτροπικά αέρια. Η θερμοδυναμική υπόθεση σοκ είναι τότε εξαιρετικά απλή. Η εντροπία ενός πολυτροπικού αερίου είναι

$$i = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{1 - \mu^2}{2\mu^2} c^2 ,$$

με

$$\mu^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} ,$$

δες (9.06), (14.06) . για αυτό το λόγο η υπόθεση (55.02) γίνεται

$$(66.01) \quad \mu^2 v_0^2 + (1 - \mu^2) c_0^2 = \mu^2 v_1^2 + (1 - \mu^2) c_1^2 = c_*^2 .$$

Η σχέση αυτή συμφωνεί απόλυτα με το νόμο του Bernoulli στη μορφή (14.08) και το  $c$  είναι η κρίσιμη ταχύτητα που συζητήθηκε στο κεφάλαιο 15. Χάρη σε αυτή την αλγεβρική μορφή της τρίτης υπόθεσης σοκ, οι σχέσεις ανάμεσα στις ποικίλες ποσότητες και στις δύο πλευρές του μπροστινού σοκ και της ταχύτητας  $U$  του μπροστινού σοκ είναι καθαρώς αλγεβρικού χαρακτήρα.

Η σχέση ανάμεσα των σχετικών ταχυτήτων  $U_0, U_1$  και στις δύο πλευρές του μπροστινού σοκ μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα πολύ κομψό και χρήσιμο τύπο χάρη στο Prandtl, δηλαδή

$$(66.02) \quad v_0 v_1 = c_*^2 .$$

Η θεμελιώδης σχέση περιλαμβάνει ταχύτητες μόνο και δεν αναφέρεται ακριβώς στις θερμοδυναμικές ποσότητες όπως η πίεση και η πυκνότητα.

Για να αποδείξουμε τη σχέση Prandtl, μπορούμε, για παράδειγμα, να πηγάσουμε από την (54.09), (66.01) και  $\gamma\rho = \rho c^2$ , δες (3.06) τις σχέσεις

$$\mu^2 P + p_1 = \mu^2 v_1^2 \rho_1 + (1 + \mu^2) p_1 = c_*^2 \rho_1 ,$$

$$\mu^2 P + p_0 = \mu^2 v_0^2 \rho_0 + (1 + \mu^2) p_0 = c_*^2 \rho_0 .$$

Αφαιρώντας βρίσκουμε

$$p_1 - p_0 = c_*^2 (\rho_1 - \rho_0)$$

ή

$$c_*^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0} ,$$

και η σχέση (66.02) βγαίνει από (59.03).

Η σχέση του Prandtl είναι προφανώς ίση με την φόρμουλα μετάβασης

$$(66.03) \quad \frac{c_*}{v_1} + \frac{v_1}{c_*} = \frac{c_*}{v_0} + \frac{v_0}{c_*} ,$$

δεδομένου ότι  $U_1$  και  $U_0 \neq U$  .



Τυχαία, η σχέση του Prandtl αποδεικνύει το γεγονός ότι σε ένα μπροστινό σοκ φτάνει ένα ηχητικό κύμα, όπως η δύναμη του φτάνει στο μηδέν. Γιατί εάν  $U_0=U_1$  (66.02) φαίνεται ότι και το  $U_0$  και το  $U_1$  έχουν την ίδια τιμή  $c^*$ , αφού  $c=c^*$  μια αδύναμη ασυνέχεια επομένως αναπτύσσεται περίπου με ταχύτητα ήχου. Φυσικά αυτό το γεγονός είναι σε συμφωνία με την αρχή ότι οι ενοχλήσεις δεν συμβαίνουν στις ποσότητες  $u$  και  $p$ , αλλά μόνο στις παραγώγους τους και διαδίδονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών.

Σαν μια άμεση επίπτωση της σχέσης Prandtl αναγνωρίζουμε το γεγονός ότι η ταχύτητα του αερίου που είναι σχετικά με το μπροστινό σοκ είναι υπερηχητική στη μπροστινή πλευρά, υποηχητική στην πίσω πλευρά του μπροστινού σοκ, σε συμφωνία με τα γενικά αποτελέσματα του κεφαλαίου 65.

Η φόρμουλα (66.02) δείχνει ότι  $|U_0| > |U_1|$  και συνεπάγεται ότι  $|u_0| > c^*$  και  $|u_1| < c^*$  και ο ισχυρισμός μας βγαίνει από τις βασικές μας ιδιότητες της κρίσιμης ταχύτητας  $c^*$ , που για αυτή την περίπτωση μπορούν να διαβαστούν από (66.01) όταν γράφονται στη μορφή :

$$(1 - \mu^2)(v_0^2 - c_0^2) = v_0^2 - c_*^2, (1 - \mu^2)(v_1^2 - c_1^2) = v_1^2 - c_*^2.$$

### **67. Οι σχέσεις σοκ για τα πολυτροπικά αέρια.**

Από τις τρεις σταθερές σχέσεις σοκ που διαφέρουν από άλλες σχέσεις μπορούν να προέρθουν από τις ποσότητες και στις δύο πλευρές ενός σοκ.

Η σχέση Hugoniot  $H(t_1 p_1) = 0$  για τα πολυτροπικά αέρια υποθέτει από την (64.04) τη μορφή  $(\tau_1 - \mu^2 \tau_0) p_1 - (\tau_0 - \mu^2 \tau_1) p_0 = 0$ , και έτσι αποφέρει τη σημαντικά φόρμουλα

$$(67.01) \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{\tau_0 - \mu^2 \tau_1}{\tau_1 - \mu^2 \tau_0} = \frac{\rho_1 - \mu^2 \rho_0}{\rho_0 - \mu^2 \rho_1}.$$

Αντιστρέφοντας τη σχέση αυτή έχουμε

$$(67.02) \quad \frac{\tau_0}{\tau_1} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1 + \mu^2 p_0}{p_0 + \mu^2 p_1}.$$

Η σχέση (67.02) δείχνει όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 64 ότι η συμπίεση είναι πάντα περιορισμένη στην ακτίνα

$$(67.03) \quad \mu^2 < \frac{\rho_1}{\rho_0} < \frac{1}{\mu^2};$$

έτσι ώστε η συμπίεση να μην είναι ποτέ περισσότερη από τη πτυχή  $\mu^2$ . Για  $\gamma=1.4$  η πυκνότητα συμπίεσης είναι επομένως πάντα λιγότερη από 6-πτυχή και για  $\gamma=1.2$  το όριο της αναλογίας συμπίεσης είναι 11.

Η αλλαγή της θερμοκρασίας και εντροπίας κατά μήκος του σοκ άμεσα διαβάζεται από (67.02) χρησιμοποιώντας  $T_1/T_0 = p_1 \tau_1 / p_0 \tau_0$  και  $S_1 - S_0 = c_v \log p_1 \tau_1^\gamma / p_0 \tau_0^\gamma$ , δεξ (3.01) και (3.23). Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι και το  $S$  και το  $T$  αυξάνουν μέσω του σοκ.

Από τις μηχανικές σχέσεις σοκ του κεφαλαίου 59 μπορούμε να πηγάσουμε σχέσεις κατά μήκος των ταχυτήτων, των πιέσεων και της πυκνότητας μόνο στη μία πλευρά. Από τη (59.02) βρίσκουμε με (67.01) την

$$(67.04) \quad m^2 = \frac{p_1 + \mu^2 p_0}{(1 - \mu^2) \tau_0} = \frac{p_0 + \mu^2 p_1}{(1 - \mu^2) \tau_1},$$

από 'που από (59.01)

$$(67.05) \quad \begin{aligned} (u_1 - u_0)^2 &= (p_1 - p_0)^2 \frac{(1 - \mu^2) \tau_0}{p_1 + \mu^2 p_0} \\ &= (p_1 - p_0)^2 \frac{(1 - \mu^2) \tau_1}{p_0 + \mu^2 p_1} \end{aligned}$$

Μια συγκεκριμένα απλά σχέση υπάρχει ανάμεσα στην αναλογία πίεσης και τον αριθμό του Mach

$$(67.06) \quad M_0 = \frac{|v_0|}{c_0}$$

ή της ροής αερίου, δεξ (10.01). Από την (67.41) και  $p_0 c_0 = \gamma p_0$  έχουμε

$$p_1 + \mu^2 p_0 = (1 - \mu^2) \rho_0 v_0^2 = \gamma (1 - \mu^2) p_0 M_0^2$$

ή

$$(67.07) \quad \frac{p_1}{p_0} = (1 + \mu^2) M_0^2 - \mu^2.$$

Οι σχέσεις σοκ που περιλαμβάνουν μόνο το μόριο και τις ταχύτητες ήχου μπορούν πολύ εύκολα να παραχθούν από τη σχέση του Prandtl (66.02). Αντικαθιστώντας το  $U_1 = U_1 - U$  στην (66.02) Κι χρησιμοποιώντας την (66.01) βρίσκουμε

$$(67.08) \quad \begin{aligned} (u_0 - U)(u_1 - U) &= \mu^2(u_0 - U)^2 + (1 - \mu^2)c_0^2 \\ &= \mu^2(u_1 - U)^2 + (1 - \mu^2)c_1^2. \end{aligned}$$

Για αυτό το λόγο αποκτούμε τη σχέση

$$(67.09) \quad (1 - \mu^2)(U - u_0)^2 - (u_1 - u_0)(U - u_0) = (1 - \mu^2)c_0^2,$$

Που αντιπροσωπεύει μια τετραγωνική σχέση για  $U - u_0$  εάν το  $u_1$  και  $c_0$  δίνονται · είναι ίση με

$$(67.10) \quad \frac{u_1 - u_0}{c_0} = (1 - \mu^2) \left( \frac{U - u_0}{c_0} - \frac{c_0}{U - u_0} \right),$$

ένας τύπος που είναι περιστασιακά χρήσιμος.

### **68. Η κατάσταση σε μια πλευρά του προστινίου σοκ σε ένα πολυτροπικό αέριο που ορίζεται από την κατάσταση στην άλλη πλευρά.**

Οι ποικίλες φόρμουλες που έχουν ήδη παραχθεί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουμε εντελώς τη μετάβαση σοκ, εάν η κατάσταση δίνεται σε μια πλευρά, και επιπλέον μια άλλη ποσότητα όπως η ταχύτητα του σοκ  $U$ , ή η πίεση, ή η ταχύτητα στην άλλη πλευρά. Έτσι πετυχαίνουμε την επιβεβαίωση των θεωρημάτων (A), (B) και (C) για τα πολυτροπικά αέρια που αναφέραμε στο κεφάλαιο 64. Αντί να ακολουθήσουμε τα βήματα του κεφαλαίου 64, χρησιμοποιούμε μια εναλλακτική διαδικασία που περιέχει τις ταχύτητες ήχου αντί τις πυκνότητες.

A) Δίνονται τα  $p_0, \rho_0, u_0$  και  $U$ . Πρώτα υπολογίζουμε  $u_0 = u_0 - U$ , μετά  $M_0 = |v_0|/c_0$ , και μετά  $p_1$  από (67.07). Μετά ορίζουμε  $c_*^2 = \mu^2 v_0^2 + (1 - \mu^2)c_0^2$ , και από εκεί

$$v_1 = \frac{c_*^2}{v_0}.$$

Τελικά βρίσκουμε το  $C_1^2$  από

$$\mu^2 v_1^2 + (1 - \mu^2)c_1^2 = c_*^2.$$

Η σχέση (67.10) χρησιμοποιείται ως έλεγχος.

B). Δίνονται τα  $p_0, \rho_0, u_0$  στο προστινίο μέρος από 1 σοκ που αντικρίζει προς τα πίσω (που συνεπάγεται ότι  $u_0 > 0$ ) και  $p_1 > p_0$ . Πρώτα βρίσκουμε το  $M_0^2$  από (67.07), μετά το

$$v_0 = M_0 c_0, U = u_0 - v_0, c_*^2 = \mu^2 v_0^2 + (1 - \mu^2)c_0^2 \text{ και συνεχίζουμε όπως και στο A).}$$

C). Δίνονται  $p_0, \rho_0, u_0$  στη προστινή πλευρά ενός σοκ που αντικρίζει προς τα πίσω και  $U_1 < U_0$ . Πρώτα βρίσκουμε το  $U$  λύνοντας την τετραγωνική εξίσωση (67.09) για

$v_0 = u_0 - U > 0$ . . Μετά συνεχίζουμε όπως και στο Α). Η σχέση  $u_1 - U = c_*^2/v_0$  χρησιμοποιείται ως έλεγχος.

### **69. Οι κρούσεις που προκύπτουν από μια κίνηση ομοιόμορφης συμπίεσης.**

Είδαμε γρηγορότερα, στο κεφάλαιο 45, ότι η ροή που παράγεται από 1 έμβολο σε ένα σωλήνα, που ξαφνικά αποσύρεται με συνεχή ταχύτητα, μπορεί να περιγραφεί με όρους του απλού κεντρικού κύματος αραιώσης. Εάν από την άλλη πλευρά το έμβολο ωθείται ξαφνικά μέσα στο σωλήνα με συνεχή ταχύτητα, η ροή που προκύπτει περιλαμβάνει ένα σοκ, δες κεφάλαιο 48. Μιλώντας μαθηματικά, αντιμετωπίζουμε ένα μπερδεμένο οριακό αρχικό πρόβλημα τιμής, δες κεφάλαιο 38:  $u = 0, p = p_0, \rho = \rho_0$  δίνονται για  $t=0$  στον ημιάξονα  $X>0$ , ενώ η υπόθεση  $U=UP$  επιβάλλεται στη γραμμή  $x=Upt$  που αντιπροσωπεύει την κίνηση του εμβόλου με συνεχή ταχύτητα  $UP$ . Μια λύση των διαφορικών εξισώσεων ροής (34.01) που ικανοποιεί αυτές τις υποθέσεις θα πρέπει να βρεθεί· όμως εάν  $UP>0$  δεν υπάρχουν τέτοιες λύσεις εκτός αν υφίστανται ασυνέχειες.

Μια ροή που περιλαμβάνει μια ασυνέχεια σοκ και ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις μπορεί εύκολα να περιγραφεί όπως στο κεφάλαιο 53 και εικόνα 30.

Ένα σοκ συνεχούς δύναμης κινείται με συνεχή ταχύτητα μέσα σε ένα αέριο που βρίσκεται σταματημένο και το αέριο πίσω από το μπροστινό σοκ βρίσκεται σε μια σταθερή κατάσταση. Η ταχύτητα του αερίου  $u$  πίσω από το μπροστινό σοκ είναι τότε ίση με τη δοσμένη ταχύτητα του εμβόλου,  $U=UP$ . Το θεώρημα (C), δες κεφάλαιο 64 και 68, δείχνει ότι υπό αυτές τις περιπτώσεις το σοκ και η κατάσταση πίσω του είναι ορισμένη για μια αυθαίρετη τιμή της ταχύτητας εμβόλου  $U_0>0$ . Για τα μη πολυτροπικά αέρια το ίδιο ισχύει υπό πολύ γενικές υποθέσεις. Το ότι η λύση του προβλήματος είναι η μοναδική πιθανή μαθηματικά απαιτεί μια μαθηματική απόδειξη, που παραλείπεται εδώ.

Αφού  $U_1 = UP$  και  $U_0=0$  βρίσκουμε το  $U$  για τα πολυτροπικά αέρια από την εξίσωση (67.09)

$$(69.01) \quad U = \frac{1}{2} \frac{u_P}{1 - \mu^2} + \sqrt{c_0^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{u_P}{1 - \mu^2} \right)^2}.$$

Η ταχύτητα του σοκ  $U$  είναι μεγαλύτερη του  $C_0$  και μεγαλύτερη από  $u_P/(1 - \mu^2)$ . Η τελευταία παρατήρηση δείχνει, για παράδειγμα, ότι στον αέρα με  $\gamma=1.4$ ,  $\mu^2 = 1/6$ , το σοκ είναι τουλάχιστον 20% γρηγορότερο από το έμβολο.

Με την ταχύτητα του σοκ να ορίζεται έτσι, η περιγραφή της βασικής κίνησης συμπίεσης του εμβόλου φαίνεται να είναι συνεχής. Αν και δεν έχουμε δώσει αποδείξεις της μοναδικότητας, δηλαδή δεν έχουμε αποκλείσει μαθηματικά την πιθανότητα άλλων σχεδίων ροής, αποδεχόμαστε την προηγούμενη αιτιολόγηση ως μία ικανοποιητική θεωρία για την διερμηνεία πραγματικών φαινομένων που παρατηρούνται υπό περιπτώσεις που μοιάζουν με το ιδεατό μοντέλο μας.

Έχοντας βρεί το  $U$ , βρίσκουμε με τη διαδικασία Α) των κεφαλαίων 64 και 68 την πίεση  $p_1$ , την ταχύτητα ήχου  $c_1$  και την πυκνότητα  $\rho_1$  στη ζώνη γειννίαςσης του εμβόλου.

Για μια υψηλή ταχύτητα  $UP$  του εμβόλου προσέγγισης, δηλαδή για  $UP/C_0 \gg 1$ , έχουμε από (69.01) και (67.02),

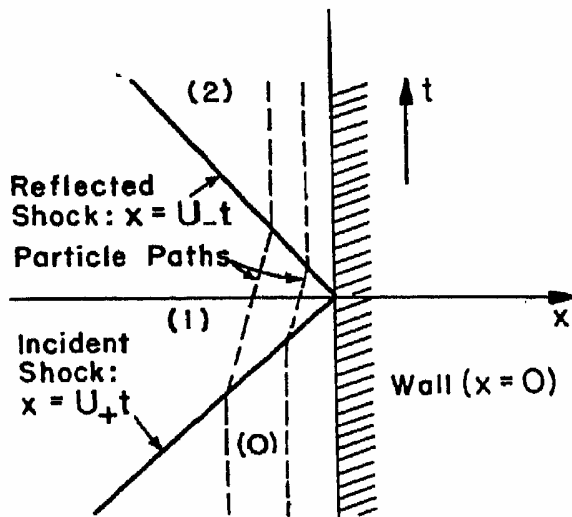
$$(69.02) \quad U \sim \frac{u_P}{1 - \mu^2},$$

$$(69.03) \quad \frac{p_1}{p_0} \sim \frac{1 + \mu^2}{(1 - \mu^2)^2} \frac{u_P^2}{c_0^2},$$

$$(69.04) \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} \sim \frac{1}{\mu^2}.$$

### 70. Η αντανάκλαση του σοκ σε έναν άκαμπτο τοίχο.

Θα συζητήσουμε τώρα ένα πολύ σημαντικό θέμα, την αντανάκλαση του σοκ. Έστω μια στήλη αερίου κατά προσέγγιση συνεχούς ταχύτητας  $u_1$  πίσω από ένα μπροστινό σοκ που χτυπά σε μια ζώνη ησυχίας που είναι περιορισμένη από ένα σταθερό τοίχο. Τότε το επακόλουθο φυσικό φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί ως αντανάκλαση του κύματος σοκ από τον τοίχο και μπορεί να παρουσιαστεί μαθηματικά από κομματιαστές συνεχείς λύσεις των διαφορικών εξισώσεων, που ικανοποιούν τις υποθέσεις σοκ



κατά μήκος του τυχαίου κύματος σοκ και του αντανακλανόμενου κύματος σοκ. Υπό την επίδραση του τυχαίου κύματος σοκ η ζώνη (0) δίπλα στον τοίχο συστέλλεται στο 0, στο χρόνο  $t=0$  τότε ένα σοκ που αντανακλάται ξεκινά στην αντίθετη διεύθυνση και στην σειρά αφήνει μια ζώνη ησυχίας που αναπτύσσεται μεταξύ του και του τοίχου. Η κατάσταση μπορεί να περιγραφεί καλύτερα με ένα διάγραμμα στο  $(x, t)$  επίπεδο. Η κατάσταση (0) είναι μια ζώνη ησυχίας που χαρακτηρίζεται από τις ποσότητες  $U_0=U, p_0, \rho_0, C_0$ . Στην κατάσταση (1) που ακολουθεί το τυχαίο σοκ έχουμε  $U=U_1$  στην κατάσταση (2) από τα δεδομένα  $p_0, \rho_0, u_0=0, U_1$ . Σε αυτό το τέλος σημειώνουμε ότι το σχέδιο που υποθέτουμε στην εικόνα 37 και δείχνει μια κατάσταση (1) με ροή ταχύτητας  $U_1$  και ήχο ταχύτητας  $C_1$  που συνδέεται μέσω ενός σοκ με μία ζώνη σταματήματος (0) και μέσω μιας άλλης κρούσης με ζώνη ανάπαυσης (2). Η  $U_+$  είναι η ταχύτητα του συμβάντος, ενώ το  $U_-$  η ταχύτητα του σοκ που αντανακλάται τότε σύμφωνα με την εξίσωση (67.08) και οι δύο αυτές ταχύτητες ικανοποιούν την ίδια τετραγωνική εξίσωση

$$(U - u_1)^2 + \frac{(U - u_1)u_1}{1 - \mu^2} - c_1^2 = 0,$$

ή τους δύο αριθμούς

$$M_+ = (u_1 - U_+)/c_1 < 0 \text{ and } M_- = (u_1 - U_-)/c_1 > 0$$

ικανοποιούν την τετραγωνική εξίσωση

$$(70.01) \quad M^2 - (1 - \mu^2)^{-1} c_1^{-1} u_1 M - 1 = 0,$$

Έτσι ώστε

$$(70.02) \quad M_+ M_- = -1.$$

Επιπλέον οι σχέσεις πίεσης που προκύπτουν από (67.07) είναι

$$(70.03) \quad \frac{p_0}{p_1} = (1 + \mu^2)M_+^2 - \mu^2, \quad \frac{p_2}{p_1} = (1 + \mu^2)M_-^2 - \mu^2;$$

Χρησιμοποιώντας την (70.02), έχουμε για την αναλογία αντανακλώμενης πίεσης

$$(70.04) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(2\mu^2 + 1) \frac{p_1}{p_0} - \mu^2}{\mu^2 \frac{p_1}{p_0} + 1}$$

και για την αναλογία υπερβολικής πίεσης

$$(70.05) \quad \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} = 1 + \frac{1 + \mu^2}{\frac{p_0}{p_1} + \mu^2}.$$

Αυτή είναι η βασική σχέση για το σημαντικό φαινόμενο της αντανάκλασης. Σε μια «ηχητική αντανάκλαση» που προκύπτει από τη γραμμική κίνηση κύματος, η αναλογία έχει την τιμή 2 που δείχνει ότι η υπερβολική πίεση μετά την αντανάκλαση είναι απλά διπλάσια. Εδώ βρίσκουμε μια εντελώς διαφορετική κατάσταση, συγκεκριμένα εάν το τυχαίο σοκ είναι δυνατό, δηλαδή, ένα για την οποία η αναλογία είναι μεγάλη, βρίσκουμε

$$(70.06) \quad \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} \sim 2 + \frac{1}{\mu^2} = \begin{cases} 8 \text{ for } \gamma = 1.4, \\ 13 \text{ for } \gamma = 1.2, \\ 23 \text{ for } \gamma = 1.1. \end{cases}$$

Έτσι η αντανάκλαση ενός ισχυρού σοκ καταλήγει σε μια αξιοσημείωτη αύξηση της πίεσης στον τοίχο, ένα γεγονός που είναι προφανώς ύψιστης σημασίας.

Για ένα αδύναμο τυχαίο σοκ  $-1$  είναι μικρό και βρίσκουμε από τη σχέση (70.05)

$$\frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} \sim 2$$

σε συμφωνία με την περίπτωση της ηχητικής αντανάκλασης.

### **71. Η δύναμη σοκ για πολυτροπικά αέρια.**

Είναι βολικό για ποικίλες σκέψεις να εισάγουμε την έννοια της δύναμης σοκ. Αρκετοί παράμετροι μπορούν να προσφερθούν ως μέτρα για τη δύναμη ενός σοκ η υπερβολική αναλογία πίεσης

η συμπίκνωση

οι παράμετροι ή  $M_0^2 - 1$ .

$M_0 = |v_0|/c_0$  είναι ο αριθμός Mach της εισερχόμενης ροής που είναι σχετική με το μπροστινό σοκ, δεξ (10.01). Καταγράφουμε τις σχέσεις για αυτές τις ποσότητες για τα πολυτροπικά αέρια.

Η σχέσεις ανάμεσα στις ποικίλες διεργασίες δύναμης περιορίζεται στις φόρμουλες του κεφαλαίου 67. Συγκεκριμένα έχουμε από την (67.01)

$$(71.01) \quad \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2 \frac{\rho_1}{\rho_0}} \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\left(\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0}\right)^{-1} - \frac{\gamma - 1}{2}},$$

και από (67.02)

$$(71.02) \quad \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2 \frac{p_1}{p_0}} \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{1}{\gamma \left(\frac{p_1 - p_0}{p_0}\right)^{-1} + \frac{\gamma - 1}{2}}$$

και

$$(71.03) \quad \frac{\tau_0 - \tau_1}{\tau_0} = \frac{1 - \mu^2}{\frac{p_1}{p_0} + \mu^2} \frac{p_1 - p_0}{p_0}.$$

Από την (67.07) έχουμε τη συγκεκριμένα απλή φόρμουλα

$$(71.04) \quad \frac{p_1 - p_0}{p_0} = (1 + \mu^2)(M_0^2 - 1),$$

και από την (67.05) και (67.07)

$$(71.05) \quad \frac{|u_1 - u_0|}{c_0} = \frac{1 - \mu^2}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{p_1 - p_0}{p_0} \sqrt{\frac{p_0}{p_1 + \mu^2 p_0}} \\ = (1 - \mu^2) \frac{M_0^2 - 1}{M_0}.$$

Ευκής σημασίας είναι οι ακραίες περιπτώσεις των δυνατών και αδύναμων σοκ. Τα δυνατά σοκ μπορούν να χαρακτηριστούν από την υπόθεση ότι  $p_1/p_0$  ή  $M_0$  είναι πολύ μεγάλο. Από την (67.02) ή (71.02) βλέπουμε ότι η αναλογία πυκνότητας  $p_1/p_0$  φτάνει ένα πεπερασμένο όριο όπως το  $p_1/p_0 \rightarrow \infty$ , έτσι έχουμε

$$(71.06) \quad \rho_1/\rho_0 \rightarrow 1/\mu^2 = 6 \text{ for } \gamma = 1.4.$$

Η αναλογία πίεσης  $p_1/p_0$  αυξάνει όπως το τετράγωνο του αριθμού Mach σύμφωνα με (67.07) ή (71.04), δηλαδή

$$(71.07) \quad (p_1/p_0)/M_0^2 \rightarrow 1 + \mu^2.$$

Για την αναλογία των ταχυτήτων ήχου βρίσκουμε τότε

$$(71.08) \quad (c_1/c_0)/M_0 \rightarrow \mu \sqrt{1 + \mu^2},$$

αφού  $C_1^2/C_0^2 = p_1/p_0 / \rho_1$ . Για την διαφορά ταχύτητας  $U_1 - U_0$  βρίσκουμε από (71.05)

$$(71.09) \quad \frac{|u_1 - u_0|}{c_0} / M_0 \rightarrow (1 - \mu^2).$$

## **72. Αδύναμα σοκ. Σύγκριση με μεταβάσεις δια μέσου απλών κυμάτων.**

Εδώ είναι ο χώρος για ένα σημαντικό θεώρημα που συγκρίνει την ασυνεχή μετάβαση δια μέσου ενός σοκ με μια συνεχή μετάβαση δια μέσου ενός απλού κύματος.

Έστω ένα σοκ και ένα απλό κύμα που μεταμορφώνουν ένα αέριο σε αρχική κατάσταση  $(\tau_0, p_0, u_0)$  στις καταστάσεις  $(\tau, p, u)$  και  $(\tau^*, p^*, u^*)$  σχετικά. Μετράμε τη δύναμη σοκ με οποιαδήποτε από τις τρεις διαφορές  $\tau - \tau_0$ ,  $p - p_0$  ή  $u - u_0$  και σύμφωνα μιλάμε για ένα απλό κύμα και ένα κύμα σοκ ίσης δύναμης εάν  $\tau^* = \tau$ , ή  $p^* = p$  ή  $u^* = u$ . Μετά θέτουμε το θεώρημα: για μια μετάβαση σοκ και μια μετάβαση απλού κύματος με την ίδια αρχική κατάσταση και την ίδια δύναμη οι ποσότητες  $\tau^*$  και  $\tau$ ,  $p^*$  και  $p$ ,  $u^*$  και  $u$  συμφωνούν ως την δεύτερη τάξη στη δύναμη σοκ και διαφέρουν την τρίτη τάξη.

Για να ιδρύσουμε το θεώρημα είναι προφανώς επαρκές να το αποδείξουμε για έναν από τους τρεις ορισμούς της δύναμης. Για αυτό το λόγο, επιλέγουμε τη διαφορά  $T - \tau_0$ .

Στο θεώρημα αυτό συνεπάγονται δύο γεγονότα: και η αλλαγή της εντροπίας και η αλλαγή μιας από τις σταθερές του Riemann δια μέσου ενός σοκ είναι τρίτης τάξεως, αφού και οι δύο ποσότητες είναι συνεχείς κατά μήκος ενός απλού κύματος (συγκεκριμένα η κατάλληλη σταθερά του Riemann είναι  $S$  για ένα σοκ που αντικρίζει προς τα πίσω). Το πρώτο από αυτά τα γεγονότα αποδείχθηκε ήδη στο κεφάλαιο 65 και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε τώρα για να αποδείξουμε αμέσως το μέρος που αφορά ταχύτητες δεν βγαίνει από την υπόθεση στην εντροπία και για αυτό χρειαζόμαστε ένα περισσότερο εκλεπτυσμένο επιχείρημα.

Για να ορίσουμε την αλλαγή στην πίεση, εισβάλουμε στην επέκταση

$$p = p_0 + g_r(\tau_0, S_0)(\tau - \tau_0) + g_s(\tau_0, S_0)(S - S_0) + \frac{1}{2}g_{rr}(\tau_0, S_0)(\tau - \tau_0)^2 + \dots$$

η κατάλληλη επέκταση του  $S - S_0$  σε όρους του  $\tau - \tau_0$  οι όροι της πρώτης και δεύτερης τάξης στο  $\tau - \tau_0$  δεν επηρεάζονται και για αυτό το λόγο είναι τα ίδια όπως και για το απλό κύμα, διαμέσου του οποίου το  $S = S_0$  είναι συνεχές. Έτσι η πίεση είναι μέχρι τη δεύτερη τάξη, δεξ δήλωση II στο κεφάλαιο 65.

Το μέρος του θεωρήματος που αφορά την ταχύτητα βρίσκεται από τη μηχανική σχέση σοκ (59.05)

$$(p - p_0)(\tau - \tau_0) = (u - u_0)^2.$$

Διαφοροποιώντας αυτή τη σχέση διαδοχικά τρεις φορές με αναφορά στο ένα και θέτοντας  $\tau = \tau_0$ ,  $p = p_0$ ,  $u = 0$ , παίρνουμε τις σχέσεις

$$(72.01) \quad dp/d\tau = (du)^2,$$

$$(72.02) \quad d^2p/d\tau^2 = 2d^2u/du.$$

στις οποίες οι διαφορικοί θα παρθούν για  $\tau = \tau_0$ . Αφού  $dp = g_r(\tau_0, S_0)d\tau = -\rho_0^2 c_0^2 d\tau$  και  $d^2p = \frac{1}{2}g_{rr}(\tau_0, S_0)d\tau^2$

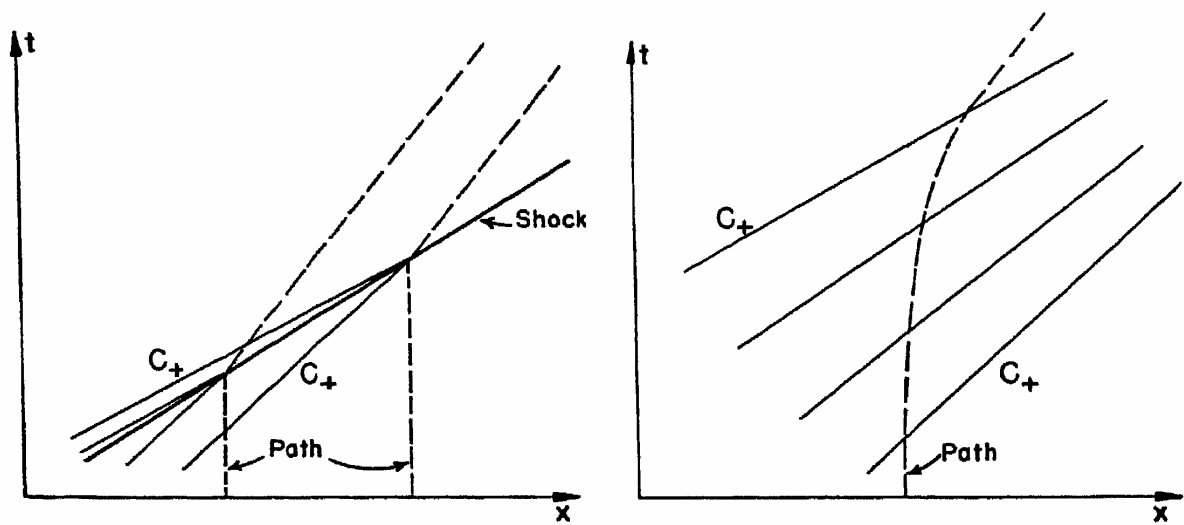
έχουν ήδη οριστεί το  $d_0$  και  $d^2u$  μπορούν να υπολογισθούν από (72.01) και (72.02). Το σήμα του  $d_u$  εξαρτάται από το πόσο το σοκ αντικρίζει εμπρός ή πίσω (στην προηγούμενη περίπτωση το  $du/dt$  είναι θετικό και στη τελευταία αρνητικό).

Τώρα ας υποθέσουμε έναν συνδυασμό απλών κυμάτων με την ίδια κατάσταση  $(\tau_0, p_0, u_0)$  μπροστά από αυτό και την αξία  $\tau$  στο τέλος της. Τέτοιος συνδυασμός είναι απλά «επιπλωμένος» από τα κεφάλαια ενός απλού κύματος ανάμεσα στο κύριο χαρακτηριστικό που φέρει τις αξίες  $\tau_0, p_0, u_0$  και το χαρακτηριστικό που φέρει την αξία  $\tau$ . η εξάρτηση του  $p$  και  $u$  στο  $\tau$  είναι τότε η ίδια όπως κατά μήκος ενός δια- χαρακτηριστικού. Έτσι η σχέση  $dp/d\tau = (du)^2$  ισχύει, δεξ (34.05) και από τη διαφοροποίηση σε αναφορά στο  $\tau$ , επίσης,  $d^2p/d\tau^2 = 2d^2u/du$ . Οι δύο αυτές σχέσεις δεδομένου ότι  $\tau = \tau_0$  συμφώνησαν με τις σχέσεις (72.01-02) για τα σοκ. Συνεπώς το  $d_u$  και  $d^2u$  στο  $\tau = \tau_0$  για απλά κύματα επίσης συμφωνούν και εκείνα για τα σοκ. Με άλλα λόγια, οι επεκτάσεις του  $u$  σε δυνάμεις του  $\tau = \tau_0$  για το σοκ και το απλό κύμα είναι ίδια μέχρι και συμπεριλαμβανομένου τους όρους της δεύτερης τάξης.

Μπορεί πολύ εύκολα να επιβεβαιωθεί από υπολογισμούς ότι οι αλλαγές της πίεσης και της ταχύτητας για το σοκ και το απλό κύμα διαφέρουν στους όρους της τρίτης τάξης.

Το θεώρημά μας παραμένει έγκυρο, φυσικά, εάν συγκρίνουμε το σοκ και τις μεταβάσεις απλού κύματος που καταλήγουν με την ίδια τιμή της πίεσης  $p$  ή της ταχύτητας  $u$  αντί του  $\tau$ , δεξ εικόνα 38. Οι επεκτάσεις όλων των ποσοτήτων που έχουν αναφερθεί σε δύναμη του  $p - p_0$  ή  $u - u_0$  συμφωνούν στους όρους της δεύτερης τάξης.

Αναλογιζόμαστε τώρα επεκτάσεις στη δύναμη του  $u - u_0$  αντί του  $\tau - \tau_0$ . Για ένα απλό κύμα, αυτά είναι ίδια μέχρι και συμπεριλαμβανομένου όρου της δεύτερης τάξης όπως αυτά που έχουν δοθεί για τα



απλά κύματα στο κεφάλαιο 40, δεξ (40.10-11) συγκεκριμένα, για ένα μπροστινό σοκ που αντικρίζει προς τα εμπρός για ένα πολυτροπικό αέριο

$$\begin{aligned}
 c &= c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} (u - u_0) + \dots, \\
 u + c &= u_0 + c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} (u - u_0) + \dots, \\
 u - \frac{2}{\gamma - 1} c &= u_0 - \frac{2}{\gamma - 1} c_0 + \dots, \\
 (72.03) \quad p &= p_0 + \rho_0 c_0 (u - u_0) \\
 &\quad + \frac{\gamma + 1}{4} \rho_0 (u - u_0)^2 + \dots, \\
 \tau &= \tau_0 - \tau_0 c_0^{-1} (u - u_0) \\
 &\quad + \frac{\gamma + 1}{4} \tau_0 c_0^{-2} (u - u_0)^2 + \dots,
 \end{aligned}$$

οι τελείες δηλώνουν όρους της τρίτης τάξης.

Υπάρχει μια σημαντική ποσότητα που συνδέεται με ένα σοκ που δεν επηρεάζεται από το θεώρημά μας, η ταχύτητα του σοκ  $U$ . Εισχωρώντας στην επέκταση του  $p$  στη μηχανική σχέση σοκ (59.02) που γράφεται στη μορφή

$$(72.04) \quad (u_0 - U)^2 = -\frac{2}{\tau_0} \frac{p - p_0}{\tau - \tau_0}$$

Ο καθένας εύκολα παίρνει την επέκταση του  $U$  σε δυνάμεις του  $\tau - \tau_0$ . Εδώ δίνουμε μόνο την επέκταση του  $U$  για τα πολυτροπικά αέρια σε δυνάμεις του  $u - u_0$ .

Ο όρος πρώτης τάξης μπορεί να αποκτηθεί εισχωρώντας στη σχέση (72.04) τις δύο τελευταίες επεκτάσεις (72.03). Για να πηγιάσουμε τη πλήρη επέκταση είναι πιο βολικό να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (67.10) που δίνει



$$(72.05) \quad U = u_0 + c_0 + \frac{\gamma + 1}{4} (u - u_0) + \frac{(\gamma + 1)^2}{32} \frac{(u - u_0)^2}{c_0} + \dots$$

για ένα μπροστινό σοκ που κοιτάζει προς τα εμπρός. Για μετέπειτα σκοπούς η επέκταση του  $U$  σε δυνάμεις του  $u + C - u_0 - C_0$  είναι χρήσιμη χρησιμοποιώντας τη (72.03) παίρνουμε

$$(72.06) \quad U = u_0 + c_0 + \frac{1}{2}(u + c - u_0 - c_0) + \frac{1}{8} \frac{(u + c - u_0 - c_0)^2}{c_0} + \dots$$

Βλέπουμε από αυτή τη φόρμουλα ότι η ταχύτητα ενός μπροστινού σοκ που κοιτάζει προς τα εμπρός είναι σε πρώτη τάξη απλά η κύρια αξία  $\frac{1}{2}(u_0 + c_0 + u + c)$  των ταχυτήτων των κυμάτων ήχου που κοιτάζουν προς τα εμπρός μπροστά και πίσω του μπροστινού σοκ.

Η ανακρίβεια που προκύπτει αντικαθιστώντας τις σχέσεις απλού κύματος για τις σχέσεις σοκ είναι πολύ μικρή ακόμα και για σοκ με μια υπερβολική αναλογία πίεσης  $(p_1 - p_0)/p_0$  τόσο μεγάλη όσο 1.5, δεξ (54). Για ένα σοκ τέτοιας δύναμης, σε ένα πολυτροπικό αέριο με  $\gamma = 1.4$ .

$$\frac{u_1 - u_0}{c_0} = .71, \quad \frac{c_1 - c_0}{c_0} = .15,$$

$$\frac{c_1 - c_0}{c_0} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_1 - u_0}{c_0} = .01,$$

ενώ για ένα απλό κύμα της ίδιας δύναμης

$$\frac{u_1 - u_0}{c_0} = .70, \quad \frac{c_1 - c_0}{c_0} = .14,$$

$$\frac{c_1 - c_0}{c_0} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_1 - u_0}{c_0} = 0.$$

Η ταχύτητα της κρούσης  $u$  δίνεται από

$$\frac{U - u_0}{c_0} = 1.51,$$

Ενώ η φόρμουλα (72.06) δίνει

$$\frac{U - u_0}{c_0} = 1.52.$$

Αυτό δείχνει ότι ακόμα και για σοκ με μία δύναμη κάπως μεγαλύτερη από  $(p_1 - p_0)/p_0 = 1.5$  η μέθοδος της αντικατάστασης των σχέσεων απλού κύματος για τις σχέσεις σοκ και χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα (72.06) για την ταχύτητα σοκ θα είναι ακριβές για τους περισσότερους σκοπούς μας.

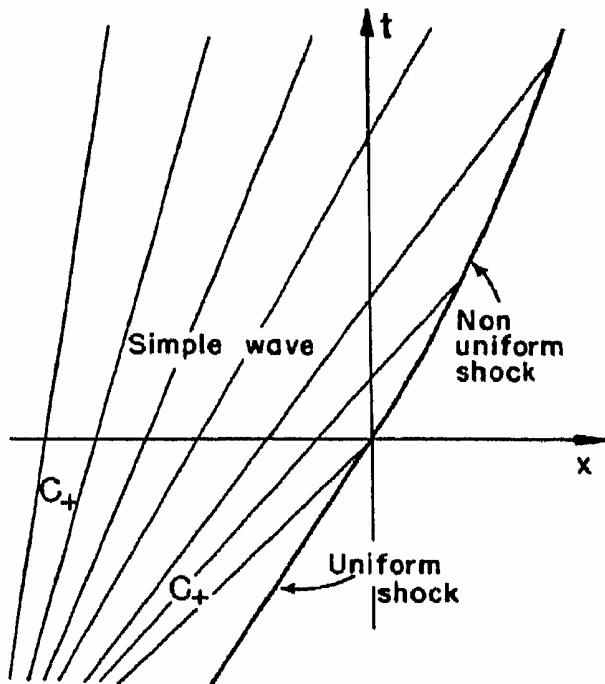
### **73. Ανομοιόμορφοι σοκ.**

Στις κινήσεις κύματος σοκ που συζητήσαμε προηγουμένως στο κεφάλαιο 53 και 57 η κατάσταση είναι πολύ απλή αφού οι καταστάσεις και στις δύο πλευρές του μπροστινού σοκ είναι συνεχείς. Αυτό συνεπάγεται συνεχή ταχύτητα και δύναμη του μπροστινού σοκ. Στο  $(x, \tau)$  επίπεδο ένα τέτοιο μπροστινό σοκ παρουσιάζεται με ένα ευθύ «μονοπάτι σοκ» όπου η κλήση του σε αναφορά με το  $x$ -άξονα είναι συνεχής ταχύτητα σοκ  $U$ . Συνεχώς, όμως, οι καταστάσεις και στις δύο πλευρές δεν είναι ταυτόχρονα συνεχείς, αλλά πρέπει να περιγραφούν από μη συνεχείς λύσεις των εξισώσεων ροής. Τότε το μπροστινό σοκ δεν έχει μια συνεχή ταχύτητα, δηλαδή, το μονοπάτι σοκ στο  $(x, \tau)$  επίπεδο έχει καμπύλη. Γενικά η αλλαγή της εντροπίας δια μέσου

τέτοιων σοκ επίσης ποικίλει. Έτσι ακόμα και εάν η κατάσταση μπροστά από το μπροστινό σοκ είναι ομοιόμορφης εντροπίας, η κατάσταση πίσω δεν είναι και είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις (34.06) για τη μη ισοτροπική ροή. Αυτή η μαθηματική περιπλοκή αποκλείει μια ακριβής θεωρία αν και οι υπολογισμοί σε συγκεκριμένα προβλήματα είναι αρκετά κατορθωτή. Ευτυχώς σε πολλές περιπτώσεις πρακτικής σημασίας, το σοκ είναι αδύναμο ή μέτριας δύναμης έτσι ώστε οι αλλαγές στην εντροπία μπορούν δικαιολογημένα να απορριφθούν. τότε η νουμερική αντιμετώπιση του προβλήματος είναι πολύ πιο εύκολη. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις απλούστερες διαφορικές εξισώσεις για ισοτροπική ροή, χρησιμοποιώντας μόνο τις πρώτες δύο μηχανικές υποθέσεις σοκ και αφήνοντας την τρίτη. Μια ακόμα απλούστερη περίπου προσέγγιση θα συζητηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

#### **74. Η κατά περίπτωση μεταχείριση των μη ομοιόμορφων σοκ μέτριας δύναμης.**

Για τα ομοιόμορφα σοκ που είναι αδύναμα ή μέτριας δύναμης, τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 72 προτείνουν να αντικαταστήσουμε τις σχέσεις μετάβασης σοκ με εκείνες για μία μετάβαση δια μέσου ενός αντίστοιχου απλού κύματος συμπίεσης. Με άλλα λόγια, θα υποθέσουμε ότι η εντροπία και η κατάλληλη σταθερή Riemann παραμένουν ίδιες δια μέσου του σοκ.



Μια κατά προσέγγιση μεταχείριση που βασίζεται σε αυτή τη διαδικασία χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τον Chaudrasekhar [54] και αναπτύχθηκε αρκετά γενικά αργότερα, δεξ [55]. Είναι χαρακτηριστικά εύκολο να χειριστούμε εάν η ροή μπροστά από το κυρτό μπροστινό σοκ είναι συνεχείς, για παράδειγμα σε κατάσταση ηρεμίας. Ως επί το πλείστον θα περιοριστούμε σε αυτή την περίπτωση.

Η πιο φυσική κατάσταση που περιλαμβάνει ένα ανομοιόμορφο σοκ εγείρεται σαν ένα ομοιόμορφο μπροστινό σοκ που αντικρίζει προς τα εμπρός με συνεχείς καταστάσεις μπροστά και πίσω φθίνετε από πίσω από ένα απλό κύμα που κοιτάζει προς τα εμπρός και συνεχώς τροποποιημένο, δεξ εικόνα 39. (Αυτό είναι ένα από τα προβλήματα αλληλεπίδρασης των κυμάτων που θα συζητηθούν από μια διαφορετική οπτική γωνία στο μέρος P). Έστω ότι το σοκ

είναι μέτριας δύναμης και υιοθετώντας τη διαδικασία που υποδείχτηκε, ορίζουμε στη ροή του κύματος πίσω από το τροποποιημένο μπροστινό σοκ μια συνεχή εντροπία και μια συνεχή σταθερά Riemann's. Μια ροή με συνεχή εντροπία και συνεχές  $s$  είναι ένα απλό κύμα που αντικρίζει προς τα εμπρός σύμφωνα με τη θεωρία του κεφαλαίου 2, δεξ κεφάλαιο 29. Τα  $C_+$  - χαρακτηριστικά, κατά μήκος των οποίων το  $r$  είναι επίσης συνεχές, είναι ευθεία. Συνεπώς, αυτό το απλό κύμα είναι μόνο η συνέχεια του απλού κύματος. Έτσι μέσα στη προσέγγιση, το σοκ δεν επηρεάζει το απλό κύμα. Είναι για αυτό το λόγο, όπως θα δούμε, ότι η επιρροή του απλού κύματος σοκ τόσο εύκολα ορισμένη.

Είναι επαρκές να περιγράψουμε την κατάσταση του αερίου δίνοντας τη μοριακή ταχύτητα  $u$  και την ταχύτητα ήχου  $c$ . Έστω ότι  $u=0$ , και  $c=c_0$  μπροστά του μπροστινού σοκ και έστω ότι φτάνεται στο χρόνο  $t=0$  και στο σημείο  $x=0$ . Τότε το απλό κύμα πίσω από το μπροστινό σοκ μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις

$$(74.01) \quad x = \xi + \omega(\xi)t,$$

$$(74.02) \quad \omega(\xi) = u(\xi) + c(\xi),$$

Για  $\xi < 0$ , στο οποίο  $u(\xi)$  και  $c(\xi)$  θα μπορούν να ικανοποιούν τη σχέση  $u(\xi) - c(\xi) = -1$ , δεξ (40.01) και (49.01) εδώ το  $1$  είναι μια γνωστή λειτουργία της αφού η εντροπία υποτίθεται ότι είναι ίδια και στις δύο πλευρές του μπροστινού σοκ, δεξ κεφάλαια 40 και 49. Από την απλή μορφή (40.09) για την πολυτροπική αέρια, παίρνουμε

$$(74.03) \quad \begin{aligned} u(\xi) &= (1 - \mu^2)(\omega(\xi) - c_0), \\ c(\xi) - c_0 &= \mu^2(\omega(\xi) - c_0), \end{aligned}$$

Δεξ (40.06) το μονοπάτι του μπροστινού σοκ μπορεί τώρα να περιγραφεί παραμετρικά δίνοντας το  $\xi$  σαν μια λειτουργία του  $t$  και εισχωρώντας αυτή τη λειτουργία στο (74.01).

Διαφοροποιώντας τη σχέση (74.01) με αναφορά στο  $\xi$  κατά μήκος του μονοπατιού βρίσκουμε τη σχέση

$$(74.04) \quad [U(\xi) - \omega(\xi)] \frac{dt}{d\xi} - \frac{d\omega(\xi)}{d\xi} t = 1,$$

Που είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση για τη λειτουργία  $t=t(\xi)$ , άπαξ το  $u$  σαν μια λειτουργία του  $\xi$  είναι γνωστόν. Τώρα η ταχύτητα του σοκ  $u$  εξαρτάται από την κατάσταση του αερίου και στις δύο πλευρές του μπροστινού. Χρησιμοποιούμε τη φόρμουλα (72.06) και τη γράφουμε στη μορφή

$$(74.05) \quad U(\xi) = c_0 + \frac{1}{2}[\omega(\xi) - c_0] + \frac{1}{8c_0} [\omega(\xi) - c_0]^2.$$

Εισχωρώντας αυτή τη σχέση στην (74.04) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$(74.06) \quad \left\{ \frac{1}{2}(\omega - c_0) - \frac{1}{8c_0} (\omega - c_0)^2 \right\} \frac{dt}{d\xi} + \frac{d\omega}{d\xi} t = -1,$$

Που θα λυθεί από την αρχική υπόθεση  $t=0$  για  $\xi=0$ .

Θέτοντας

$$(74.07) \quad \omega(\xi) = c_0 + c_0 \sigma(\xi),$$

Βρίσκουμε τη λύση ακριβώς όπως

$$(74.08) \quad c_0 t = 8 \left( \frac{4 - \sigma(\xi)}{\sigma(\xi)} \right)^2 \int_{\xi}^0 \frac{\sigma(\eta) d\eta}{[4 - \sigma(\eta)]^3}.$$

Η υπόθεση ότι η ταχύτητα του σοκ είναι υπερηχητική σχετικά με το αέριο μπροστά μπορεί να εκφραστεί από  $0 < u - c = 1/8 (w - c) (c_1 + \sigma)$ , που δείχνει ότι το  $\sigma > 0$  ή  $w > c$  πίσω από το μπροστινό σοκ. Από την άλλη η υπόθεση ότι η ταχύτητα σοκ είναι υποηχητική σχετικά με το αέριο πίσω, όπως δείχνεται από  $0 < w - U = 1/8 (w - c) (c_1 - \sigma)$ , δείχνει ότι  $\sigma < 4$  ή  $w - c < 4$ .

Αποδεδειγμένα το  $\sigma$  είναι μικρό συγκρινόμενο με το 4 οπότε η προσέγγιση μας μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιατί αλλιώς ο όρος της δεύτερης τάξης στην (74.05) δεν θα ήταν μικρός συγκρινόμενος με τον όρο πρώτης τάξης).

Η λειτουργία  $\tau(\xi)$  που ορίστηκε εφόσον  $\sigma > 0$ , και με αυτήν η λειτουργία  $\chi(\xi)$  που πάρθηκε από (74.01) περιγράφουν το μονοπάτι του μπροστινού σοκ όπως και της διαμέσου της περιοχής απλού κύματος.

Εάν το απλό κύμα είναι συμπιεστικό το μπροστινό σοκ επιταχύνει και συνεπώς αυξάνεται σε δύναμη· εάν το απλό κύμα είναι διασταλτικό το μπροστινό σοκ επιβραδύνει και συνεπώς μειώνει σε δύναμη.

Για να αποδείξουμε αυτό πρώτα παρατηρούμε ότι  $d\omega(\xi)/d\xi > 0$  σε ένα κύμα αραιώσης που αντικρίζει εμπρός, όπως προκύπτει από τις δηλώσεις που έγιναν στο κεφάλαιο 40· συνεπώς  $dU(\xi)/d\xi > 0$  από (74.05). Δεύτερον παρατηρούμε ότι  $d\xi/dt < 0$  όπως προκύπτει από (74.06) και  $0 < \sigma < 4$  για συμπιεστικά κομμάτια  $d\xi/dt$  μπορεί αν γίνει ατέρμονο και να αλλάξει πρόσημο αλλά τότε η προσέγγιση δεν θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί άλλο.

### **75. « φθείροντας » το κύμα σοκ. U- Κύμα.**

Εξαιρετικής σημασίας είναι η φθορά του κύματος σοκ που παράγεται στον ένα σοκ που προσκρούετε σε μια ζώνη σταματήματος ξεπερνιέται από ένα κύμα αραιώσης που μένει αόριστα σε επαφή με το μπροστινό σοκ. Αυτή είναι η περίπτωση, όπως θα δούμε, εάν η ταχύτητα του αερίου πίσω από το κύμα αραιώσης εξαφανίζεται. Από την υπόθεση μας το αέριο στο κύμα αραιώσης έχει την ίδια εντροπία και την ίδια σταθερά Riemann  $s$  όπως το αέριο μπροστά από το μπροστινό σοκ, συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα ήχου και η πίεση πίσω από το κύμα αραιώσης είναι η ίδια όπως αυτή μπροστά από το μπροστινό σοκ.

Είναι μεγάλης σημασίας να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της θέσης του μπροστινού σοκ και την συνεισφορά των  $u, c$  και  $p$  στη ζώνη κύματος πίσω του, δηλαδή τη συμπεριφορά για μεγάλους χρόνους  $t$ . Δεν είναι καθόλου προφανές εάν το πλάτος του κύματος σοκ, δηλαδή η απόσταση ανάμεσα στο μπροστινό σοκ και στην ουρά του κύματος αραιώσης αυξάνεται, μειώνεται ή προσεγγίζει μια πεπερασμένη τιμή διάφορη του μηδενός, καθώς ο χρόνος αυξάνει. Θα δείξουμε ότι το πλάτος του κύματος σοκ αυξάνει όπως η τετραγωνική διαδρομή του χρόνου  $t$ .

Παρατηρούμε απ (74.08) ότι το  $t$  φτάνει στο άπειρο όταν το  $\sigma$  φτάνει το μηδέν ή το  $w$  φτάνει το  $\infty$ . Έτσι το μπροστινό σοκ σταδιακά διασταυρώνεται με το μέρος το απλού κύματος όπου η πίεση και η πυκνότητα είναι μεγαλύτερες από ότι μπροστά από το μπροστινό σοκ. Δεν θα διεισδύσει σε μέρη του απλού κύματος στα οποία η πίεση και η πυκνότητα είναι μικρότερα από ότι μπροστά του. Έτσι εάν η πίεση στην ουρά του κύματος αραιώσης είναι μεγαλύτερη από ότι η πίεση μπροστά από το σοκ, το σοκ διασταυρώνει το κύμα αραιώσης και μετά συνεχίζει σε ευθεία διαδρομή. Σε αυτή τη περίπτωση το πλάτος του κύματος σοκ μειώνεται στο μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο.

Για να ερευνήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του σοκ, θεωρούμε  $v$  περίπτωση στην οποία η πίεση στην ουρά του απλού κύματος αραιώσης μόλις ισοδυναμεί με την πίεση μπροστά από το μπροστινό σοκ. Μέσα από ακρίβεια της προσέγγισης μας το αέριο είναι τότε σε σταμάτημα πίσω από το κύμα αραιώσης αφού είναι σε σταμάτημα μπροστά από το μπροστινό σοκ. Η ουρά αυτού του κύματος, που δίνεται από το κύμα ήχου  $\xi = \infty$  χαρακτηρίζεται τότε από την υπόθεση  $w(\infty) = 0$  ή  $\sigma(\infty) = 0$ .

Με τη σημείωση

$$(75.01) \quad A = 32 \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{\sigma(\eta) d\eta}{[4 - \sigma(\eta)]^3}$$

Έχουμε από την (74.08) την ασυμπτωτική επέκταση

$$(75.02) \quad \sqrt{c_0 t} = \left( \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{4} \right) \sqrt{4A} + \dots,$$

Από την οποία

$$(75.03) \quad \sigma = 2 \sqrt{\frac{A}{c_0 t}} - \frac{A}{c_0 t} + \dots$$

Εισχωρώντας την έκφραση στην (74.01) βρίσκουμε

$$(75.04) \quad x = \xi_0 + c_0 t + 2\sqrt{Ac_0 t} - A$$

Όπως η ασυμπτωτική παρουσίαση του μονοπατιού του μπροστινού σοκ. Εφόσον η ουρά του κύματος αραιώσης δίνεται από  $x=+t$  βρίσκουμε για το πλάτος του κύματος σοκ την ασυμπτωτική έκφραση

$$(75.05) \quad d(t) = 2\sqrt{Ac_0 t} - A.$$

Η ασυμπτωτική έκφραση δεν σημαίνει με κανένα μέσο ότι η απόκλιση του πραγματικού πλάτους από την έκφραση  $d(t)$  φτάνει στο μηδέν όπως το  $t$  αυξάνει αόριστα. Η φόρμουλα (75.05) θα ερμηνευτεί καλύτερα υπό την αίσθηση ότι ο συντελεστής του και ο συνεχής όρος στην ευφυή ασυμπτωτική επέκταση διαφέρουν λίγο από τους όρους  $2$  και  $-A$  που δίνονται από (75.05)

Για να πετύχουμε τη συνεισφορά του  $u$  και του  $c$  στην ζώνη κύματος εκφράζουμε το  $\sigma$  σε όρους του  $x$  για σταθερό  $t$ . Θέτοντας

$$(75.06) \quad \sigma = a(\xi - \xi_0) + b(\xi - \xi_0)^2 + \dots,$$

Και εισχωρώντας στην (74.01) βρίσκουμε

$$(75.07) \quad x = \xi_0 + c_0 t + (ac_0 t + 1)(\xi - \xi_0) + bc_0 t(\xi - \xi_0)^2$$

Ασυμπτωτική και σύμφωνα

$$(75.08) \quad \xi - \xi_0 = \frac{x - \xi_0 - c_0 t}{ac_0 t + 1} - bc_0 t \frac{(x - \xi_0 - c_0 t)^2}{(ac_0 t + 1)^3},$$

Και από (75.06) ξανά

$$(75.09) \quad \sigma = a \frac{x - \xi_0 - c_0 t}{ac_0 t + 1} + b \frac{(x - \xi_0 - c_0 t)^2}{(ac_0 t + 1)^3}.$$

Εισχωρώντας την (75.09) στις εκφράσεις (74.02) και (74.03) για  $u$  και  $c$  που γράφονται στη μορφή

$$(75.10) \quad u = (1 - \mu^2)c_0 \sigma, \quad c = c_0 + \mu^2 c_0 \sigma,$$

Δίνεται η ασυμπτωτική συνεισφορά του  $u$  και  $c$  στη ζώνη κύματος που επεκτείνεται από  $x=$  σε  $x=+t + d(t)$

Η συνεισφορά πίεσης βρίσκεται από  $p=$  και (75.10)

$$(75.11) \quad p = p_0 [1 + (1 + \mu^2)\sigma + \frac{1}{2}(1 + \mu^2)\sigma^2].$$

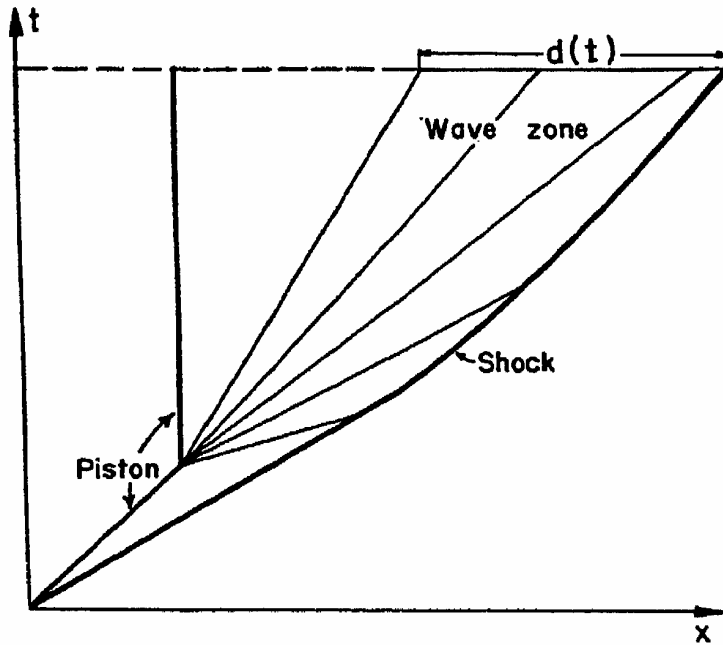
Αμέσως πίσω του μπροστινού σοκ έχουμε από (75.09)

$$(75.12) \quad \sigma = a \frac{d(t)}{ac_0 t + 1} + b \frac{d^2(t)}{(ac_0 t + 1)^3}$$

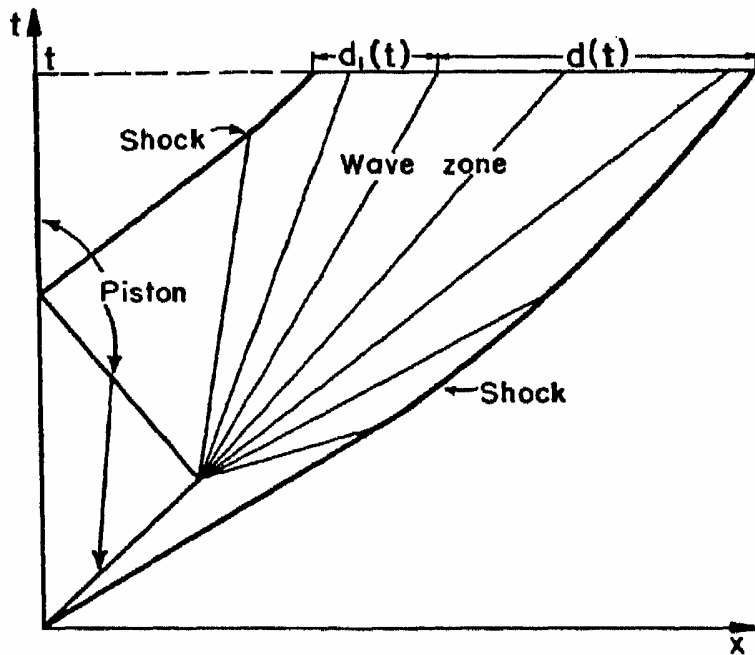
Που από την (75.05) είναι ίση με (75.03)

$$\sigma = 2 \sqrt{\frac{A}{c_0 t}} - \frac{A}{c_0 t} + \dots$$

Υποκαθιστώντας την (75.03) στην (75.11) βλέπουμε εύκολα ότι η πίεση αυξάνει δια μέσου του μπροστινού σοκ ή απλά η δύναμη σοκ μειώνεται σε αντίστροφη αναλογία με την τετραγωνική διαδρομή του χρόνου.



Ένα τέτοιου είδους κύμα σοκ που φθείρεται και παράγεται από ένα κύμα αραιώσης που το ξεπερνά, θα το βρούμε σε ένα σωλήνα όταν ένα έμβολο, αφού δημιουργήσει ένα σοκ συνεχούς δύναμης, ξαφνικά σταματήσει. Γιατί, το κεφάλι του κεντρικού κύματος αραιώσης που στέλνεται έξω τη στιγμή που το έμβολο είναι σταματημένο, ακολουθεί το μπροστινό σοκ σε ήχο ταχύτητας και το φτάνει. Για αυτή την περίπτωση η λειτουργία  $w=w(\xi)$  και οι σταθερές  $A, a$  και  $b$  υπολογίζονται εύκολα, δεξ [55]. Το σχέδιο ροής που προκύπτει φαίνεται στην εικόνα 40. Εάν το έμβολο δεν σταματά ξαφνικά αλλά αποσύρεται ξαφνικά με συνεχή ταχύτητα και τότε σταματά ξαφνικά στην αρχική της θέση, ένα δεύτερο μπροστινό σοκ στέλνεται στη στιγμή όπου το έμβολο σταματά τελικά. Το σχέδιο κύματος που απεικονίζεται στην εικόνα 41, αποτελείται τότε από ένα «κύριο μπροστινό σοκ» δια μέσου του οποίου το αέριο επιταχύνεται και συμπιέζεται, ένα κύμα αραιώσης δια μέσου του οποίου το αέριο επιβραδύνει σε αρνητική ταχύτητα και επεκτείνεται σε υπό-ατμοσφαιρική πίεση και από ένα «tail shock front», δια μέσου του οποίου το αέριο έρχεται σε σταμάτημα και αποκτά ατμοσφαιρική πίεση ξανά. Ένα σχέδιο κύματος τέτοιου τύπου καλείται ένα «N-κύμα». Η «ουρά» του σοκ ενός τέτοιου N-κύματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τον ίδιο τρόπο όπως το κύριο σοκ και η ασυμπτωτική συμπεριφορά του μπορεί να περιγραφεί από τις ίδιες φόρμουλες.



Εικ 41

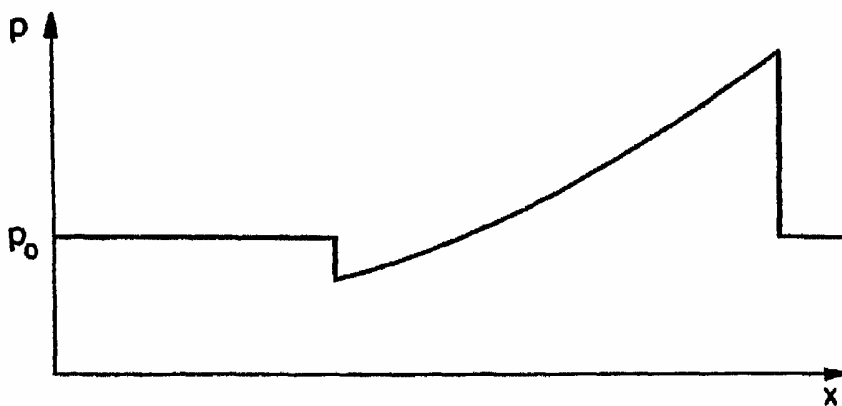
Το κύμα αραιώσης μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη που χωρίζονται από το κύμα ήχου,  $\xi =$  φέροντας τη ταχύτητα αερίου  $u=0$  και ταχύτητα ήχου  $c=$ . Το κύριο μπροστινό σοκ διασταυρώνει το μπροστινό μέρος του κύματος αραιώσης the tail μπροστινό σοκ το πίσω μέρος. Εάν η αρχική θέση του tail shock front είναι σε  $c=$ , βρίσκουμε ότι το πλάτος της ζώνης N-κύματος είναι ασυμπτωτικά

$$(75.13) \quad d(t) + d_1(t) = 2(\sqrt{A} + \sqrt{A_1})\sqrt{c_0 t} - (A + A_1)$$

Στην οποία

$$(75.14) \quad A_1 = 32 \int_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{\sigma(\eta) d\eta}{[4 - \sigma(\eta)]^3}$$

Ξανά το πλάτος αυξάνει όπως η τετραγωνική διαδρομή του  $t$ . Η ασυμπτωτική συνεισφορά των  $u, c, p$  δίνεται από τις φόρμουλες (75.09-11) όπως πριν.



Εικ 42

Η ασυμπτωτική συνεισφορά πίεσης στο N-κύμα που προκύπτει από ένα έμβολο που αποσύρεται φαίνεται στην εικόνα 42.

### **76. Σχηματισμός ενός σοκ**

Όπως δείξαμε στο μέρος B μια ασυνέχεια μπορεί να εμφανιστεί σε ένα κύμα αραιώσης. Η μορφή κύματος θα γίνει τόσο σταδιακά απότομη μέχρι έως ότου εμφανιστεί μια ατελείωτη κλίση σε κάποιο σημείο, δεξ κεφάλαιο 41 και σε αυτό το σημείο ένα σοκ θα δημιουργηθεί.

Περιγραφόμενα σε ένα  $(x,t)$  διάγραμμα τα  $(t)$  χαρακτηριστικά σε ένα κύμα συμπίεσης που αντικρίξει προς τα εμπρός μπορεί να δημιουργήσουν ένα φάκελο ξεκινώντας σε ένα όριο, δεξ κεφάλαιο 48. Σε αυτό το όριο ένα μονοπάτι σοκ ξεκινά. Ο φάκελος (εκτός εάν πέφτει ολοκληρωτικά σε ένα σημείο) έχει δύο παρακλάδια που έχουν την ίδια διεύθυνση στο όριο και οι ποσότητες  $u, c, p$  είναι ακόμα συνεχείς στο όριο (μόνο οι παράγωγοι γίνονται άπειροι εδώ). Συνεπώς, το σοκ ξεκινά με τη δύναμη μηδέν και είναι αδύναμο κατά τη διάρκεια των πρόωρων σταδίων του σχηματισμού του. Οι απλουστευμένες υποθέσεις που έγιναν στο κεφάλαιο 74 μπορεί επομένως να γίνουν και στην περιγραφή του σχηματισμού έως σοκ.

Περιοριζόμαστε στο να συζητήσουμε την περίπτωση όπου το σοκ ξεκινά στο «κεφάλι» ενός απλού κύματος που αντικρίξει προς τα εμπρός και που μπαίνει σε μια ζώνη σταματήματος.

Αυτή η περίπτωση προκύπτει για παράδειγμα, στο κύμα συμπίεσης που παράγεται από ένα έμβολο που επιταχύνει ομοιόμορφα, δεξ το τέλος του κεφαλαίου 49. Η περίπτωση είναι τότε πρακτικά η ίδια όπως εάν ένα απλό κύμα ξεπερνά ένα σοκ, δεξ κεφάλαιο 75, με εξαίρεση ότι σε αυτή την περίπτωση το αρχικό σοκ εξαφανίζεται.

Υποθέτοντας ότι το σοκ ξεκινά σε χρόνο  $t=0$  στο μέρος  $x=0$  και ότι η ζώνη  $x \geq 0$  είναι σε σταμάτημα σε  $t=0$ , απαιτούμε ότι  $w(\xi) = w_0$ ,  $dw/d\xi < 0$  για  $\xi < 0$  και για να δημιουργηθεί ένα σοκ σε  $x=0$ ,  $t=0$ ,  $dw/d\xi = -\infty$  στο  $\xi=0$ . Ειδικώς υποθέτουμε

$$(76.01) \quad \sigma = \sqrt{-\xi}(a + a_1\xi + \dots), \quad a > 0$$

Με  $w = (1+\sigma)$  δεξ (74.08). Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις φόρμουλες (74.08) και (74.01). Επεκτείνοντας τα σωστά μέρη από αυτές τις φόρμουλες σε αναφορά με τις δυνάμεις του  $\xi$  βρίσκουμε

$$(76.02) \quad \begin{aligned} c_0 t &= \frac{4}{3a} \sqrt{-\xi} - \frac{1}{12} \xi + \dots, \\ x &= \frac{4}{3a} \sqrt{-\xi} - \frac{5}{12} \xi + \dots, \end{aligned}$$

Ή

$$(76.03) \quad x = c_0 t + \frac{3}{8} a^2 c_0^2 t^2 + \dots$$

Όπως η αναπαράσταση του μονοπατιού σοκ. Έτσι το σοκ ξεκινά να κινείται με ταχύτητα, όπως ήταν αναμενόμενο, και η επιτάχυνση  $3/8$ . Η ανάπτυξη της δύναμης του σοκ φαίνεται από τις φόρμουλες

$$(76.04) \quad \begin{aligned} u &= \frac{3}{4}(1 - \mu^2) a^2 c_0^2 t + \dots, \\ c - c_0 &= \frac{3}{4} \mu^2 a^2 c_0^2 t + \dots, \\ p - p_0 &= \frac{3}{4}(1 + \mu^2) p_0 a^2 c_0 t + \dots, \end{aligned}$$

Που προκύπτουν από (74.03) και (76.02).

Μπορούμε εύκολα να εξειδικεύσουμε αυτές τις φόρμουλες για το σχηματισμό ενός σοκ στο κύμα συμπίεσης που παράγεται από ένα έμβολο που επιταχύνει ομοιόμορφα κινούμενο σύμφωνα με  $x = 1/2 b t^2$ . Το κύμα συμπίεσης δίνεται από



$$(76.05) \quad x = \frac{1}{2}b\beta^2 + \left[ c_0 + \frac{1}{1 - \mu^2} b\beta \right] (t - \beta),$$

Δες (46.06) το όριο δημιουργείται σε

$$(76.06) \quad t = t_c = (1 - \mu^2)c_0/b, \quad x = x_c = (1 - \mu^2)c_0^2/b,$$

Δες (49.10) αλλάζοντας την καταγωγή του ισάξιου συστήματος σε αυτό το σημείο και θέτοντας

$$\sigma = \beta/t_c$$

$$(76.07) \quad \xi = -\frac{1}{2} \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2} b\beta^2 = -\gamma b\beta^2/2,$$

Γράφουμε (76.05) στη μορφή

$$(76.08) \quad x - x_c = \xi + c_0(1 + \sigma)(t - t_c).$$

Έτσι ο συντελεστής  $a$  στην (76.01) δίνεται από

$$(76.09) \quad a^2 = \frac{2}{\gamma b t_c^2} = \frac{2b}{(1 - \mu^4)c_0^2}.$$

Αφού αντικαταστήσουμε το  $x$  και  $t$  με  $x-x_c$ ,  $t-t_c$  και εισχωρώντας την (76.08) και (76.09) στις φόρμουλες (76.02-04) παίρνουμε την περιγραφή της ανάπτυξης ενός σοκ. Για μια πιο λεπτομερή συζήτηση, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου το σοκ αναπτύσσεται στο εσωτερικό της περιοχής κύματος, δες [55].

Πρέπει να τονίσουμε ξανά ότι όλα τα συμπεράσματα που θα επακολουθήσουν και όλες οι νουμερικές εφαρμογές τους σε συγκεκριμένες περιπτώσεις είναι έγκυρες μόνο εφόσον η δύναμη του σοκ είναι επαρκώς μικρή. Όταν αυτή η υπόθεση δεν ισχύει δεν πρέπει μόνο να θεωρήσουμε μη ισοτροπικές ροές, αλλά να συνειδητοποιήσουμε ότι το σοκ τροποποιεί το απλό κύμα πίσω του. Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης που μπορεί να ερμηνευτεί από ένα «κύμα αντανάκλασης» σημειωτέας δύναμης ( ενώ τα αδύναμα σοκ δεν αντανακλούν επαρκώς τη ροή πίσω τους ). Στο μέρος D θα μελετήσουμε αλληλεπιδράσεις χωρίς να υποθέσουμε καθόλου τις αδυναμίες της κρούσης.