ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΘΕΜΑ

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΚΑΙ Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΛΜΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΔΡ. Δ. ΠΛΙΑΚΗΣ

ΦΟΙΤΗΤΕΣ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΚΗΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

ΛΑΜΠΑΘΑΚΗΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ

Peter D. Lax
Courant Institute of Mathematical Sciences
New York University

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΚΑΙ Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΛΜΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Είναι ευρέως γνωστό ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών για μια ομαλή μη γραμμική εξίσωση ίσως και να μην έχει πάντα λύση- η λύση ενδέχεται να γίνει άπειρη σε πεπερασμένο χρόνο. Το ίδιο ισχύει και για τις ημιγραμμικές υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις· ίσως σπάσουν σε πεπερασμένο χρόνο όταν οι παράγωγοι τους γίνουν άπειρα. Σε αυτές τις σημειώσεις γίνεται μελέτη στην πρώτη τάξη μερικών γραμμικών υπερβολικών συστημάτων που προέρχονται από τους νόμους διατήρησης. Έχοντας υπόψιν ότι ένας νόμος διατήρησης είναι ολοκληρωτική σχέση, ίσως ικανοποιηθεί από συναρτήσεις που δεν είναι διαφορισιμες, ούτε καν συνεχής. Ενδεχομένως να είναι απλά μετρήσιμες και φραγμένες τις οποίες θα αποκαλούμε γενικευμένες λύσεις, σε αντίθεση με τις κανονικές, δηλαδή τις διαφορικές. Η ανάλυση μιας κανονικής λύσης ίσως και να σημαίνει ότι παρόλο που μία γενικευμένη λύση υπάρχει πάντα, παύει να είναι διαφορίσιμη μετά από πεπερασμένο χρόνο. Όλα τα διαθέσιμα στοιχεία δείχνουν ότι αυτό ισχύει. Όμως φαίνεται πως υπάρχουν αρκετές γενικευμένες λύσεις με τα ίδια αρχικά δεδομένα, από τα οποία ένα έχει φυσική σημασία- ο στόχος είναι να δοθεί κριτήριο για την επιλογή του σωστού δεδομένου. Μία κατηγορία τέτοιων κριτήριων περιγράφεται σε αυτές τις σημειώσεις και ονομάζονται συνθήκες εντροπίας καθώς στην περίπτωση δυναμικών αερίων απαιτείται η αύξηση εντροπίας των μορίων που διανύουν ένα κρουστικό παλμό.

Αυτές οι διαλέξεις αντιμετωπίζουν την μαθηματική πλευρά της θεωρίας, δηλαδή ασχολούνται με τα αποτελέσματα που μπορούν να αποδειχθούν αυστηρά. Παρουσιάζουμε ότι είναι γνωστό για την ύπαρξη και την μοναδικότητα των γενικευμένων λύσεων του προβλήματος αρχικής τιμής που υποβάλλεται σε συνθήκες εντροπίας. Επίσης ερευνούμε τον διακριτικό σχεδιασμό που εισάγει η συνθήκη εντροπίας και αποδεικνύουμε ότι προκαλεί μία αργή φθορά στην ένταση του σήματος.

Δεν παρουσιάζεται κανένα αριθμητικό αποτέλεσμα, όμως υπάρχει μία πολύ σύντομη εισαγωγή στις αριθμητικές μεθόδους στο κεφάλαιο 7 των σημειώσεων. Οι κατά προσέγγιση λύσεις, οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν με αυτές τις μεθόδους, είναι και αρκετά χρήσιμες ποσοτικά αλλά δίνουν και ελπίδα ότι τέτοιοι μέθοδοι μπορούν να αποδείξουν την ύπαρξη λύσεων που θα οδηγήσει στην ποσοτική τους μελέτη.

1. **Μερικές γραμμικές υπερβολικές εξισώσεις.** Ένα σύστημα πρώτης διάταξης των μερικώς γραμμικών εξισώσεων σε δύο ανεξάρτητους μεταβλητές έχει την μορφή

(1.1)
$$u_t + Au_x = 0,$$

όπου *u* η διανυσματική συνάρτηση του x και *t, το A* πινακοσυνάρτηση του *u* αλλά και των *x* και *t*. Τέτοιο σύστημα ονομάζεται αυστηρά υπερβολικό αν για κάθε x, *t* και *u* ο πίνακας *A* = *A(x, t, u)* έχει πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές $\tau_j = \tau_j\,(x, t, u)$, $j = 1, \ldots, n$.

Παρομοίως, ένα μερικώς γραμμικό σύστημα με $k + 1$ μεταβλητές $x^1, x^2, \ldots, x^k$, r

$$u_t + \sum_{i=1}^{k} A_i u_{x^i} = 0,$$
$$A_i = A_i(x, t, u),$$

ονομάζεται υπερβολικό αν για κάθε *x, t, u* και διανυσματική μονάδα**,** ο πίνακας

$$\sum A_i \omega_i$$

έχει πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές $\tau_j\,(x, t, u, \omega)$, $j = 1, \ldots, n$.

Το πρόβλημα αρχικών τιμών για την (1.1) ή την (1.2) είναι να βρεθεί λύση u(x, t) με καθορισμένες τιμές $t = 0$:

(1.3)
$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Εύκολα συμπεραίνουμε από την γραμμική θεωρία το γεγονός ότι αυτό το πρόβλημα αρχικής τιμής έχει το πολύ μία λύση στην κατηγορία των λύσεων C^1.

$$u_t + A(u)u_x = 0, \qquad v_t + A(v)v_x = 0,$$
$$u(x,0) = v(x,0).$$

Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε ότι η διαφορά $d = u - v$ είναι ικανοποιητική

$$(1.4) \qquad d_t + A(u)d_x + [A(u) - A(v)]v_x = 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι το A είναι C^1 τότε $|A(u) - A(v)| \leq$ const. $|d|$ για την μερικώς γραμμική εξίσωση (1.1), και παρομοίως για την (1.2), τότε ακολουθεί ότι $d = 0$.

Στο ερώτημα αν το πρόβλημα αρχικής τιμής έχει πάντα λύση, θα αναπτύξουμε την θεωρία ότι όντως έχει, αν οι αρχικές τιμές είναι αρκετά ομαλές. Την λύση την βρίσκουμε επαναλαμβάνοντας τον μετασχηματισμό $u = \mathscr{T} v$ που ορίζεται ως εξής: u είναι η λύση του προβλήματος γραμμικής αρχικής τιμής

$$u_t + \sum_{i=1}^{k} A_i(v)u_{x^i} = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x).$$

Ας υποθέσουμε ότι τα A_i είναι συμμετρικοί πίνακες. Εύκολα αποδεικνύεται ότι, χρησιμοποιώντας ενεργειακές εκτιμήσεις για τα γραμμικά συμμετρικά υπερβολικά συστήματα και τις ανισότητες Sobolev, ο μετασχηματισμός $\mathscr{T}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

Ας υποθέσουμε ότι το u_0 είναι της κατηγορίας C^N, όπου $N > 1 + k/2$. Υπολογίζουμε τη στάθμη συνάρτησης $||u||_{N,T}$ με

$$\|u\|^2_{N,T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \int \sum_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha_x u|^2 \, dx.$$

(i) **Για *R* πολύ μεγάλο και *T* πολύ μικρό ο $\mathscr{T}$ καθορίζει τη σφαίρα $B^r_{N,T}$ ακτίνας *R*:**

$$\|v\|_{N,T} \leqq R$$

στον εαυτό της.

(ii) είναι $\mathscr{T}$ συστολή του $B^r_{N,T}$ **σε σχέση με την** $\|\bullet\|_{0,T}$ **στάθμη:**

$$\|\mathscr{T} v_1 - \mathscr{T} v_2\|_{0,T} \leqq \tfrac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{0,T}.$$

Αφού το $B^r_{N,T}$ περιορίζεται στη στάθμη $\|\bullet\|_{0,T}$, συνάγεται ότι το *T* έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο στο $B^r_{N,T}$ το οποίο κατασκευάζεται από επανάληψη. Αυτό το σταθερό σημείο λύνει το πρόβλημα αρχικής τιμής για την μερικώς γραμμική εξίσωση (1.2).

Αυτή η απόδειξη δείχνει ότι τα (1.2) και (1.3) έχουν λύση σε κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq T$. Τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στο 3^o και 6^o μέρος δείχνουν ότι γενικά ομαλές λύσεις δεν υπάρχουν όταν περάσει κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Αφού οι λύσεις περιγράφουν την κατάσταση ενός φυσικού συστήματος, γεννιέται το ερώτημα πως πρέπει να λάβει κάποιος την ανυπαρξία λύσεων σε ευρύτερο επίπεδο. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι υπάρχει τρόπος να προσδιοριστούν γενικευμένες λύσεις για τις μερικώς γραμμικές εξισώσεις που προέρχονται από νόμους διατήρησης.

2. **Νόμους διατήρησης.** Ένας νόμος διατήρησης θέτει ότι ο ρυθμός αλλαγής του συνολικού ποσού των ουσιών που περιέχεται στο καθορισμένο χωρίο G είναι ίσος με την ρευστή κατάσταση των ουσιών πέρα από τα όρια του G. Δηλώνοντας την πυκνότητα της ουσίας με u και την ρευστότητα με *f*, ο νόμος διατήρησης είναι:

$$\frac{d}{dt}\int_G u\,dx = -\int_{\partial G} f \cdot n\,dS; \tag{2.1}$$

όπου το *n* δηλώνει τον προς τα έξω κανόνα του G και το *dS* δηλώνει το στοιχείο επιφάνειας στο ∂G, το όριο του G, ώστε το ολοκλήρωμα στα δεξιά στην (2.1) να μετράει την εκροή – εξού και το πλην. Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης και βάζοντας το *d/dt* κάτω από το ολοκληρωτικό σύμβολο έχουμε

$$\int_G (u_t + \operatorname{div} f)\, dx = 0.$$

Διαιρώντας με τον όγκο (G) και μικραίνοντας το G σε σημείο όπου όλα τα μερικά παράγωγα του *u* και *f* να είναι συνεχή, καταλήγουμε στον διαφορικό νόμο διατήρησης

(2.2)
$$u_t + \operatorname{div} f = 0.$$

Θα αντιμετωπίσουμε τα συστήματα των νόμων διατήρησης

($$u_t^j + \operatorname{div} f^j = 0, \qquad j = 1, \cdots, n,$$

Όπου κάθε f^j είναι κάποια μη γραμμική συνάρτηση του $u^1, \ldots, u^n$. Εκτελώντας τις διαφορικότητες στην (2.3) βγάζουμε το πρώτο βαθμό του μερικώς γραμμικού συστήματος

$$u_t^j + \sum \frac{\partial f_i^j}{\partial u^k} u_{x^i}^k = 0.$$

(2.4)

Εισάγοντας τον συμβολισμό του διανύσματος και του πίνακα

(2.5)
$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^n \end{pmatrix}, \quad f_i = \begin{pmatrix} f_i^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_i^n \end{pmatrix},$$

$$A_i = \left(\frac{\partial f_i^j}{\partial u^k} \right) = \operatorname{grad}_u f_i,$$

Μπορούμε να γράψουμε το (2.4) με την μορφή

(2.6) $$u_t + \sum A_i u_{x^i} = 0.$$

Αφού τα f^j είναι μη γραμμικές συναρτήσεις του u, οι πίνακες A_i όπως καθορίζονται στο (2.5) είναι συναρτήσεις του *u*. Υποθέτουμε ότι το μερικώς γραμμικό σύστημα (2.6) είναι αυστηρά υπερβολικό.

u ονομάζεται μία γενικευμένη λύση του συστήματος των νόμων διατήρησης (2.3) αν αυτό ικανοποιεί την ολοκληρωματική μορφή αυτών των νόμων, π.χ. αν

(2.7) $$\int_G u^j \, dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial G} f^j \cdot n \, dS \, dt = 0$$

κρατάει για κάθε ομαλά φραγμένο χωρίο και για κάθε χρονικό διάστημα (t_1, t_2 *)*. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να απαιτείται η (2.3) να κρατήσει για κάθε λογική της θεωρίας κατανομής.

Ας θέσουμε το *S(t)* ως μία λεία επιφάνεια η οποία κινείται με το t, το *u* μία συνεχή διαφορίσιμη λύση της (2.3) σε όποια πλευρά του S που είναι ασυνεχής στην επιφάνεια του S. Η συνθήκη η οποία πρέπει να ικανοποιηθεί σε κάθε σημείο του S, αν το *u* είναι γενικευμένη λύση στην επιφάνεια του S, είναι

(2.8) $$s[u^j] = [f^j] \cdot n.$$

Εδώ το [u] και το [*f*] συμβολίζουν τη διαφορά μεταξύ των τιμών του u και του *f* αντίστοιχα στις δύο πλευρές του S. Το n είναι το κανονικό του S και s είναι η ταχύτητα διάδοσης του *S* προς το *n*. Η σχέση (2.8) ονομάζεται συνθήκη άλματος Rankine-Hugoniot. Στη συνέχεια θα το αποδείξουμε για μία μονοδιάστατη περίπτωση.

3. **Απλοί νόμοι διατήρησης.** Ένας απλός νόμος διατήρησης είναι εξίσωση σε μορφή

(3.1) $$u_t + f_x = 0,$$

όπου *f* είναι κάποια μη γραμμική συνάρτηση του *u*. Θέτοντας

(3.2) $$\frac{df}{du} = a(u)$$

μπορούμε να γράψουμε την (3.1) με την μορφή

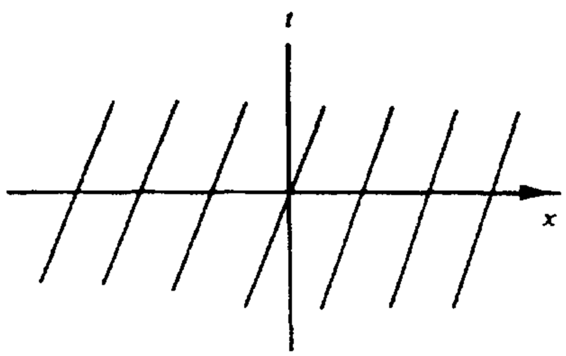
(3.3) $$u_t + a(u)u_x = 0,$$

το οποίο υποστηρίζει/ επιβάλλει ότι το *u* είναι σταθερό στις τροχιές x = *x(t)* τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα α:

(3.4) $$\frac{dx}{dt} = a.$$

Για αυτόν τον λόγο το *α* ονομάζεται *ταχύτητα σήματος* και οι τροχιές, ικανοποιώντας το (3.4), ονομάζονται *χαρακτηριστικά*. Σημειώνουμε ότι αν *f* είναι μη γραμμική συνάρτηση του *u*, και η ταχύτητα σήματος και τα χαρακτηριστικά εξαρτώνται από την λύση *u*.

Η σταθερότητα κατά μήκος των τροχιών σε συνδυασμό με το (3.4) δείχνει ότι τα χαρακτηριστικά διαδίδονται με σταθερή ταχύτητα και έτσι είναι ευθείες γραμμές. Αυτό οδηγεί στην παρακάτω γεωμετρική λύση του προβλήματος αρχικής τιμής *u(x,* 0) = u_0(x): Τραβάμε ευθείες γραμμές ξεκινώντας από τα σημεία *y* του άξονα χ, με ταχύτητα $u_0(y)$ (Βλ. Εικ. 1).



Εικ 1 :

Όπως θα αποδειχθεί παρακάτω, αν το u_0 είναι μία συνάρτηση C^1 τότε αυτές οι ευθείες γραμμές θα καλύψουν απλά μία επιφάνεια του άξονα x. Αφού η τιμή του u κατά μήκος της γραμμής που ξεκινάει από το σημείο y είναι $u_0(y)$, το u(x, t) προσδιορίζεται μοναδικά κοντά στον άξονα x.

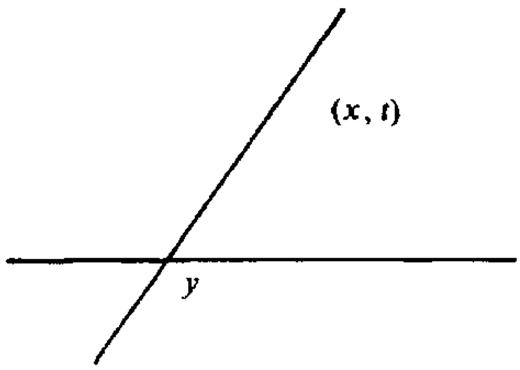


FIG. 2

Μία αναλυτική μορφή αυτής της κατασκευής απεικονίζεται στην Εικ. 2. Ας θέσουμε τα (x, t) ως τυχαία σημεία, το y ως την τομή του χαρακτηριστικού του x, t με τον άξονα x. Τότε το $u = u(x, t)$ ικανοποιεί

$$u - u_0(x - ta(u)) = 0. \tag{3.5}$$

Υποθέτουμε ότι το u_0 είναι διαφορίσιμο. Τότε, σύμφωνα με την θεωρία πεπλεγμένης συνάρτησης, η (3.5) μπορεί να λυθεί με το u να είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x και t με το t αρκετά μικρό και

$$u_t = -\frac{u_0' a}{1 + u_0' a_u t}, \tag{3.6}$$

$$u_x = \frac{u_0'}{1 + u_0' a_u t}.$$

Αντικαθιστώντας την (3.6) με την (3.3) βλέπουμε ότι το *u* καθορισμένο από την (3.5) ικανοποιεί την (3.3).

Ας υποθέσουμε ότι η (3.3) είναι μη γραμμική, δηλαδή ότι $a_u \neq 0$ για όλα τα *u,* όπως

(3.7) $$a_u > 0.$$

Τότε αν το u_0 είναι ≥ 0 για όλα τα *x, u* και u_x όπως δείχνουν οι τύποι τότε η (3.6) παραμένει φραγμένη για όλα τα $t > 0$. Από την άλλη, αν σε κάποιο σημείο είναι το $u'_0 < 0$ τότε και το *u* και το u_x τείνουν προς το ∞ καθώς το $1 + u'_0 a_u(u_0)t$ πλησιάζει το μηδέν. Και τα δυο αυτά γεγονότα συμπεραίνονται από την γεωμετρική μορφή της λύσης που βρίσκεται στην Εικ. 1 όπως φαίνεται παρακάτω.

Στην πρώτη περίπτωση, όταν το $u_0(x)$ βρίσκεται σε αύξουσα συνάρτηση του x, τα χαρακτηριστικά που ξεκινούν από τον άξονα x αποκλίνουν προς τη θετική κατεύθυνση του t ώστε τα χαρακτηριστικά απλά να καλύπτουν ολόκληρο το ημιεπίπεδο $t > 0$. Στην δεύτερη περίπτωση υπάρχουν δύο σημεία y_1 και y_2, τέτοια ώστε $y_1 < y_2$ και $u_1 = u_0(y_1) > u_0(y_2) = u_2$. Έπειτα, από την (3.7) επίσης βλέπουμε ότι $\alpha_1 = \alpha(u_1) > \alpha(u_2) = \alpha_2$ ώστε τα χαρακτηριστικά που ξεκινούν από αυτά τα σημεία τέμνουν την χρονική στιγμή $t = (y_2 - y_1)/(a_1 - a_2)$ (βλ. Εικ. 3). Στο σημείο της τομής, το u αναλαμβάνει και τις δύο τιμές u_l και u_2, κάτι που είναι αδύνατο.

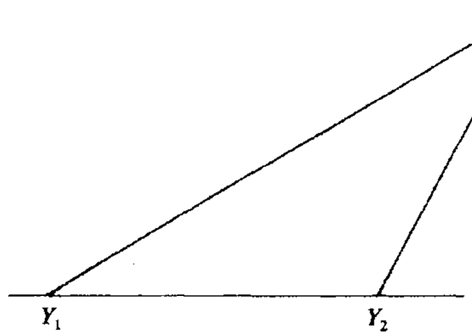
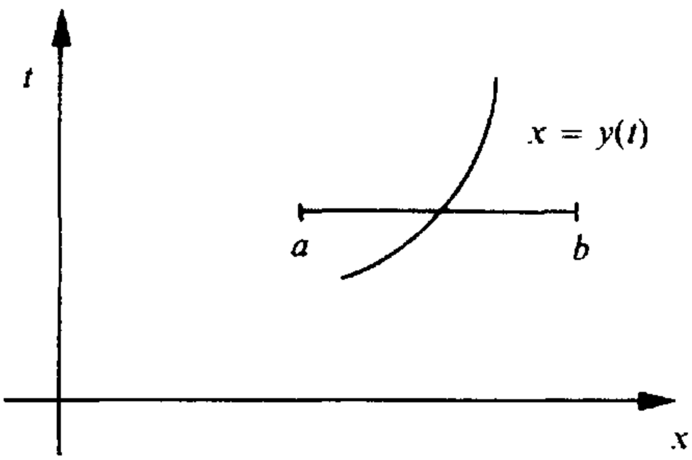


FIG. 3

Τόσο η γεωμετρική και η αναλυτική επιχειρηματολογία αποδεικνύουν πέρα από κάθε αμφιβολία ότι εάν $u_0(x)$ δεν αποτελεί αύξουσα συνάρτηση του x,τότε καμία συνάρτηση u (x, t) δεν υπάρχει για κάθε t > 0 με αρχική τιμή u_0 που λύνει το (3.3), με τη συνήθη έννοια! Είδαμε όμως στην § 2 , οι μετρήσιμες συναρτήσεις u που ικανοποιούν την (3.1) κατά την έννοια των κατανομών , μπορούν να θεωρηθούν ότι ικανοποιούν την ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της οποίας η (3.1) είναι η διαφορική μορφή. Γυρνάμε τώρα στη μελέτη αυτών των λύσεων διανομής, ξεκινώντας με το απλούστερο είδος –αυτές που ικανοποιούν την (3.1) κατά τη συνήθη έννοια σε κάθε πλευρά μιας ομαλής καμπύλης x = y (t) κατά μήκος της οποίας , το u είναι ασυνεχής. Θα συμβολίζουμε με το u και u_r τις τιμές του u στην αριστερή και δεξιά πλευρά, αντίστοιχα , του x =y.



Εικ. 4

Επιλέξτε τα α και b , έτσι ώστε η καμπύλη να τέμνει το διάστημα α ≤ x ≤ b τη χρονική στιγμή t (βλέπε εικόνα 4). Συμβολίζοντας με I(t) την ποσότητα

$$I(t) = \int_a^b u(x,t)\,dx = \int_a^y + \int_y^b,$$

έχουμε:

$$\frac{dI}{dt} = \int_a^y u_t\,dx + u_l s + \int_y^b u_t\,dx - u_r s, \tag{3.8}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη συντομογραφία :

$$s = \frac{dy}{dt} \tag{3.9}$$

για την ταχύτητα με την οποία η ασυνέχεια διαδίδεται. Δεδομένου ότι σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας η (3.1) ικανοποιείται , θα μπορούσαμε να θέσουμε $u_t = -f_x$ στην (3.8) για $x < y$ και $x > y$. Μετά την ολοκλήρωση της διενέργειας προκύπτει ότι

$$\frac{dI}{dt} = f_a - f_l + u_l s - f_b + f_r - u_r s.$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει τις εύχρηστες συντομεύσεις

$$f(u_l) = f_l, \qquad f(u_r) = f_r,$$
$$f(u(a)) = f_a, \qquad f(u(b)) = f_b.$$

Ο νόμος της διατήρησης ισχυρίζεται ότι :

$$\frac{dI}{dt} = f_a - f_b.$$

Συνδυάζοντας αυτόν τον τύπο με την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε την αλματώδη κατάσταση

$$s[u] = [f], \tag{3.10}$$

όπου [u] = u_r - u και [f] = f_r - f_t υποδηλώνουν το άλμα σε u και f σε όλο τον y .

Θα δείξουμε τώρα σε ένα παράδειγμα ότι προηγουμένως άλυτα προβλήματα αρχικών τιμών μπορούν να λυθούν για όλα τα t με την βοήθεια των ασυνεχών λύσεων.

(3.11) $$f(u) = \tfrac{1}{2}u^2,$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x \leqq 0, \\ 1 - x & \text{for} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \\ 0 & \text{for} \quad 1 \leqq x. \end{cases}$$

Η γεωμετρική λύση (βλέπε fig. 5) παίρνει μία μόνο τιμή για $t \leq 1$ άλλα δύο τιμές έπειτα.

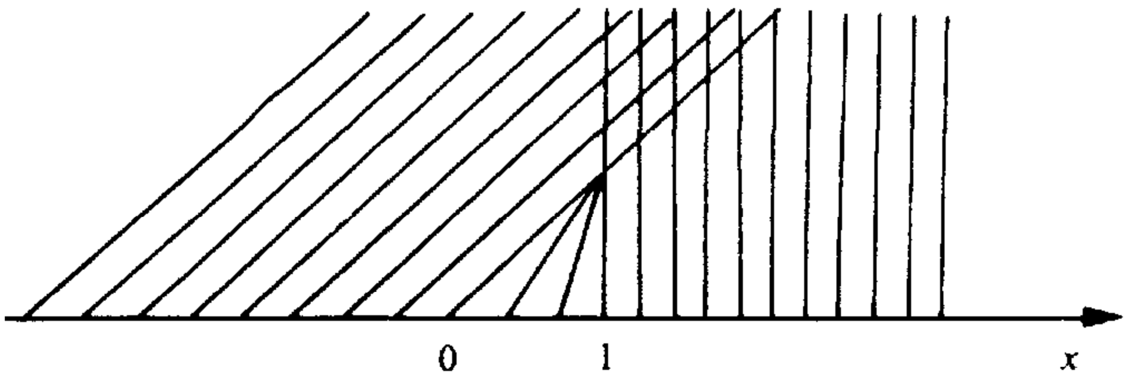


FIG. 5

Τώρα ορίζουμε για $t \geq 1$

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x < \dfrac{1+t}{2}, \\ 0 & \text{for} \quad \dfrac{1+t}{2} < x. \end{cases}$$

Η ασυνέχεια ξεκινάει στο σημείο (1,1) και διαχωρίζει την κατάσταση $u_t = 1$ στα αριστερά από την κατάσταση $u_r = 0$ η οποία είναι στα δεξιά. Η ταχύτητα διάδοσης επιλέχτηκε αναλόγως της κατάστασης άλματος (3.10) με f(u) = $\frac{1}{2}u^2$:

$$s = \frac{0 - 1/2}{0 - 1} = \frac{1}{2}$$

Εισάγοντας γενικευμένες λύσεις καθιστά δυνατή την επίλυση των προβλημάτων της αρχικής τιμής τα οποία δεν θα μπορούσαν να λυθούν με την κατηγορία των γνήσιων λύσεων. Ταυτόχρονα απειλεί με τον κίνδυνο ότι η διευρυμένη κατηγορία των λύσεων είναι τόσο μεγάλη ώστε να υπάρχουν αρκετές γενικευμένες λύσεις με τα ίδια αρχικά δεδομένα. Το παράδειγμα που ακολουθεί μας δείχνει ότι αυτή η ανησυχία είναι βάσιμη :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < 0, \\ 1 & \text{for} \quad 0 < x. \end{cases}$$

Η γεωμετρική λύση (βλέπε Fig. 6) παίρνει μία μόνο τιμή για t > 0 άλλα δεν ορίζει (υπολογίζει) την τιμή του u στην περιοχή 0 < x < t. Θα μπορούσαμε να καλύψουμε αυτό το κενό σύμφωνα με το μοντέλο του προηγούμενου παραδείγματος και να θέσουμε

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < \frac{t}{2}, \\ 1 & \text{for} \quad \frac{t}{2} < x. \end{cases} \tag{3.12}$$

Η ταχύτητα διάδοσης επιλέχθηκε έτσι ώστε η κατάσταση άλματος της (3.10) να ικανοποιείται. Από την άλλη πλευρά η συνάρτηση

(3.12’) $$u(x,t)=\frac{x}{t}, \qquad 0 \leqq x \leqq t,$$

Ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (3.3) με α(u) = u και συνδέει συνεχώς το υπόλοιπο της προσδιορισθείσας λύσης γεωμετρικά. Σαφώς μόνον μία από αυτές τις λύσεις μπορεί να έχει φυσική σημασία. Το ερώτημα είναι ποιά ;

Απορρίπτουμε την ασυνεχή λύση της (3.12) για την αποτυχία να πληροί τα ακόλουθα κριτήρια :

Τα χαρακτηριστικά ξεκινώντας από οποιαδήποτε πλευρά της ασυνεχής καμπύλης όταν συνεχίζουν προς την κατεύθυνση της αύξησης του t τέμνονται με την γραμμή ασυνέχειας. Αυτή θα είναι η περίπτωση αν

(3.13) $$a(u_l) > s > a(u_r).$$

Είναι σαφές ότι αυτή η συνθήκη παραβιάζει τη λύση που δόθηκε από την (3.12)

Αν όλες οι ασυνέχειες μιας γενικευμένης λύσης ικανοποιούν τους όρους της (3.13) , κανένα χαρακτηριστικό σχεδιασμένο προς την κατεύθυνση φθίνοντος t δεν τέμνει την γραμμή ασυνεχείας . Αυτό δείχνει ότι για τέτοιου είδους λύσεις κάθε σημείο μπορεί να συνδεθεί από ένα προς τα πίσω χαρακτηριστικό προς ένα σημείο της αρχικής γραμμής. Εδώ έγκειται η σημασία της συνθήκης (3.13). Όταν εφαρμόζεται στις εξισώσεις της ροής συμπιεστού , αυτή η γενίκευση αντιστοιχεί στο να απαιτεί το υλικό που διασχίζει την ασυνέχεια , να πρέπει να υφίσταται αύξηση της εντροπής. Γι αυτό το λόγο η συνθήκη (3.13) θα λέγεται συνθήκη εντροπίας.

Μια ασυνέχεια που ικανοποιεί την σχέση άλματος (3.10) και την συνθήκη εντροπίας (3.13) ονομάζεται κύμα. Το έργο που έχουμε μπροστά μας είναι να διερευνηθεί κατά πόσον κάθε πρόβλημα αρχικής τιμής για την (3.1) έχει ακριβώς μία γενικευμένη λύση , η οποία προσδιορίζεται για όλους τους $t \geq 0$ και έχει μόνο κύματα όπως ασυνέχειες.

Θα πρέπει πρώτα να ελέγξουμε την υπόθεση όταν η συνθήκη (3.7) ικανοποιείται δηλαδή η α(u) είναι μια αυξητική συνάρτηση του u. Σαφώς αυτό είναι έτσι ώστε κάθε φορά η f(u) να είναι μία κυρτή συνάρτηση του u.

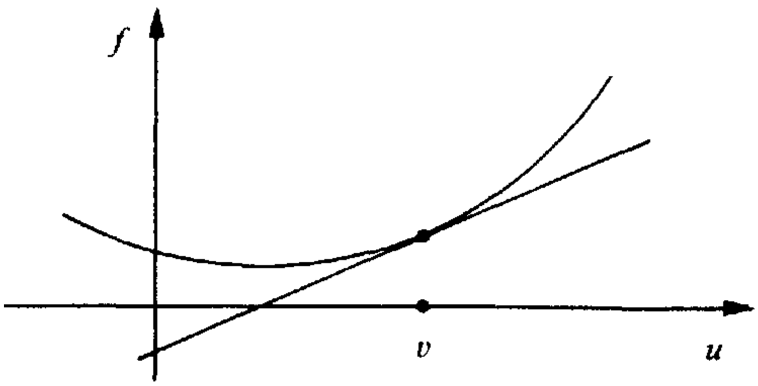


FIG. 7

(βλέπε Fig. 7). Μια τέτοια συνάρτηση έγκειται πάνω από όλα στις εφαπτόμενες της:

(3.14) $$f(u) \geqq f(v) + a(v)(u - v).$$

Ας υποθέσουμε ότι η u είναι μια πραγματική (δηλαδή συνεχής και διαφορίσιμη) λύση της (3.1) και ας υποθέσουμε ότι u_0=u(x,0) είναι 0 για μεγάλες αρνητικές τιμές του x. Τότε το ίδιο ισχύει για το u(x,t) για κάθε t > 0 που το u ορίζεται. Έχουμε εισάγει την ολοκληρώσιμη συνάρτηση U(x,t) που ορίζεται ως εξής :

(3.15) $$U(x, t) = \int_{-\infty}^{x} u(y, t)\, dy;$$

τότε

(3.16) $$U_x = u.$$

Ολοκληρώνοντας την (3.1) από το -∞ εώς το x και χρησιμοποιώντας την (3.16) παίρνουμε

(3.17) $$U_t + f(U_x) = 0,$$

όπου έχουμε προσαρμόσει το f έτσι ώστε

(3.18) $$f(0) = 0.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα (3.14) με U_x = u και για οποιονδήποτε αριθμό υ παίρνουμε ότι

(3.19) $$U_t + a(v)U_x \leqq a(v)v - f(v).$$

Συμβολίζουμε με y το σημείο όπου η γραμμή $\frac{dx}{dt}$ =α(u) δια μέσω του x,t τέμνει τον x άξονα. Προφανώς

(3.20) $$\frac{x-y}{t} = a(v).$$

Ολοκληρώνοντας την (3.19) κατά μήκος αυτής της γραμμής από το 0 έως το t παίρνουμε , για t ≥ 0

(3.21) $$U(x,t) \leqq U(y,0) + t[a(v)v - f(v)].$$

Συμβολίζουμε με b το αντίστροφο της συνάρτησης α. Από την (3.20) παίρνουμε την

(3.22) $$b\left(\frac{x-y}{t}\right) = v.$$

Συμβολίζουμε με g την συνάρτηση

(3.23) $$g(z) = a(v)v - f(v), \qquad v = b(z).$$

Προφανώς , δεδομένου ότι οι α και b και αντίστροφες ισχύει ότι

$$\frac{dg}{dz} = v\frac{da}{dv}\frac{db}{dz} = b(z).$$

Συμβολίζουμε το α(0) με c. Τότε b(c) = 0 και λαμβάνοντας υπόψιν την εξομάλυνση με την (3.18) έχουμε από την (3.23) ότι g(c) = 0. Έτσι παράγοντας την συνάρτηση g στο δεξί μέρος της (3.21) παίρνουμε

(3.24) $$U(x,t) \leqq U(y,0) + tg\left(\frac{x-y}{t}\right).$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει για όλες τις τιμές του y.Για την τιμή του y για την οποία το υ, δίνεται από την (3.22) , ισούται με u(x,t) ,η ισότητα στην σχέση (3.19) κατά μήκος όλου του χαρακτηριστικού $\frac{dx}{dt}$ = u απορέει από το (x,t). Συνεπώς ισχύει η ισότητα και στην (3.24). Συνοψίζουμε αυτά τα αποτελέσματα ως εξής :

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1 : Ας υποθέσουμε ότι η u είναι μια πραγματική λύση της (3.1) τότε

(3.25) $$u(x,t) = b\left(\frac{x-y}{t}\right),$$

όπου y = y(x,t) είναι αυτή η τιμή η οποία ελαχιστοποιεί.

(3.26) $$U_0(y) + tg\left(\frac{x-y}{t}\right) = G(x,y,t).$$

Εδώ το b είναι η αντίστροφη συνάρτηση του α και η g ορίζεται από

(3.27) $$\frac{dg}{dz} = b(z), \qquad g(c) = 0, \quad where \quad a(0) = c,$$

Και

(3.28) $$U_0(y) = \int_{-\infty}^{y} u_0(x)\,dx, \qquad u_0(x) = u(x,0).$$

Ας υποθέσουμε ότι η u(x,t) είναι μια γενικευμένη λύση. Η σχέση (3.17) είναι η ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης (3.1).Έτσι προκύπτει ότι όταν η f είναι κυρτή η ανισότητα (3.24) είναι ισχύει και για τις γενικευμένες λύσεις επίσης.

Αν όλες οι ασυνέχειες της γενικευμένης λύσης της u είναι κύματα , τότε κάθε σημείο (x,t) μπορεί να συνδεθεί σε ένα σημείο y της αρχικής γραμμής από ένα χαρακτηριστικό προηγούμενο .

Για την συγκεκριμένη τιμή του y το σύμβολο της ισότητας διατηρείται στη (3.24). Επομένως το θεώρημα 3.1 ισχύει και για γενικευμένες λύσεις της (3.1) της όποιας οι ασυνέχειες είναι κύματα. Σας δείχνουμε ότι και το αντίστροφο ισχύει , αποδεικνύοντας έτσι την ύπαρξη των λύσεων με κύματα(διακυμάνσεις) και με αυθαίρετο τρόπο ορίστηκαν ολοκληρωμένα αρχικά δεδομένα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2 : Οι τύποι (3.25) – (3.26) καθορίζουν μια ενδεχομένως ασυνεχή λειτουργία του u(x,t) για τις αυθαίρετα ολοκληρωμένες αρχικές τιμές $u_0(x)$. Η συνάρτηση u που ορίζεται έτσι ικανοποιεί την (3.1) υπό την έννοια των κατανομών και οι ασυνέχειες του u είναι κύματα.

Απόδειξη : **(i)** Εάν το u_0 είναι ολοκληρωμένο, τότε το U_0 οριοθετείται. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί από την (3.27),η g είναι μια κυρτή συνάρτηση η όποια επιτυγχάνει την ελάχιστη τιμή της στο z = c. Επομένως η συνάρτηση G που ορίζεται από την (3.26) επιτυγχάνει την ελάχιστη τιμή της σε κάποιο σημείο ή σημεία της y.

Λημμα 3.3 : Για σταθερό t, συμβολίζουμε με y(x) οποιαδήποτε τιμή του y, όπου G (x, y) επιτυγχάνει την ελάχιστη τιμή του. Τότε η y(x) είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση του x.

Απόδειξη : Πρέπει να δείξουμε ότι για $x_2 > x_1$, η $G(x_2, y)$ δεν λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της για $y < y_1 = y(x_1)$. Ειδικότερα, θα δείξουμε ότι για $y < y_1$ ισχύει

$$G(x_2, y_1) < G(x_2, y). \tag{3.29}$$

Για την ελαχιστοποίηση της ιδιότητας του y_1

$$G(x_1, y_1) \leqq G(x_1, y). \tag{3.30}$$

Από την ανισότητα του Jensen έχουμε ότι για $x_1 < x_2$ και $y < y_1$

$$g\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) + g\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) < g\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + g\left(\frac{x_2 - y}{t}\right).$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή τη τελευταία ανισότητα με το t και προσθέτοντας την στην (3.30) παίρνουμε την (3.29). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος.

Προκύπτει από το λήμμα ότι ,για σταθερό t ,για όλα αλλά για ένα αριθμήσιμο σύνολο των x το ελάχιστο του G (x, y, t) επιτυγχάνεται σε ένα σημείο ακριβώς y = y (x, t), το οποίο είναι μια μονότονη αύξουσα συνάρτηση του x. Έτσι το u (x, t) είναι καλά καθορισμένο από την(3,25), αλλά σε όλα αυτά τα σημεία.

(ii) Μπορούμε να συνδυάσουμε την(3.25) και την(3.26) σε ένα τύπο

$$u = \lim u_N,$$

όπου

$$u_N(x,t) = \frac{\int b[(x-y)/t]\exp\{-NG\}\,dy}{\int \exp\{-NG\}\,dy}.$$

Ομοίως

$$f(u) = \lim f_N,$$

όπου

$$f_N(x,t) = \frac{\int f(b((x-y)/t))\exp\{-NG\}\,dy}{\int \exp\{-NG\}\,dy}.$$

Δηλώνουμε ως V_N την συνάρτηση

$$V_N = \log\int \exp\{-NG\}\,dy.$$

Σαφώς

$$u_N = -\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x}V_N$$

Και ομοίως βλέπουμε ότι

$$f_N = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial t}V_N$$

με την προϋπόθεση ότι θα κάνουμε χρήση της ταυτότητας

$$zb(z) - g(z) = f(b(z)).$$

Προκύπτει από αυτές τις σχέσεις ότι $u_{N_t} + f_{N_x} = 0$

τοποθετώντας το Ν → ∞ λαμβάνουμε το όριο στη σχέση(3.1) για u.

(iii) Εφόσον στο Λήμμα 3.3 η y (x, t) είναι μια αύξουσα συνάρτηση του x, και δεδομένου ότι το b είναι μια αύξουσα συνάρτηση ισχύει για $x_t < x_2$ ότι

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= b\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) \geqq b\left(\frac{x_1 - y_2}{t}\right) \\ &\geqq b\left(\frac{x_2 - y_2}{t}\right) - k\frac{x_2 - x_1}{t} \\ &= u(x_2, t) - k\frac{x_2 - x_1}{t}; \end{aligned}$$

Εδώ το k είναι μια σταθερά Lipschitz για το b.Το αποτέλεσμα είναι μια μονόπλευρη κατάσταση Lipschitz για το u

(3.31)
$$\frac{u(x_2, t) - u(x_1, t)}{x_2 - x_1} \leqq \frac{k}{t},$$

η οποία δείχνει ότι στα σημεία ασυνέχειας ισχύει $u_r < u_t$ όπως απαιτείται από την κυματώδη κατάσταση.

(iv) Οι λύσεις που ορίζονται από τις (3,25), (3,26) έχουν την ιδιότητα υποομάδας, δηλαδή ότι , εάν η u(x ,t_1) λαμβάνεται ως νέα αρχική τιμή, τότε η αντίστοιχη λύση σε χρόνο t2

παρέχεται από την(3.25) ,(3.26) και ισούται με u (x, t_1+t_2). Αυτό εύκολα επαληθεύεται από ένα απλό επιχείρημα.

Περνάμε τώρα στο πρόβλημα της μοναδικότητας.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4</u> : Έστω ότι u και υ είναι δύο τμήματα συνεχών γενικευμένων λύσεων της (3.1).Ας υποθέσουμε ότι η f είναι κυρτή και ότι όλες οι ασυνέχειες των u και υ είναι κύματα.

Έπειτα η $\|u(t) - v(t)\|$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του t όπου η στάθμη είναι η L_1 στάθμη όσον αφορά την μεταβλητή x.

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u> : Αν u =υ τη στιγμή όπου t=0 τότε το u=υ για κάθε t>0.

(Αυτό είναι το θεώρημα της μοναδικότητας που ψάχναμε).

<u>Απόδειξη</u> : Μπορούμε να γράψουμε την στάθμη L_1 έτσι :

(3.32) $$\|u - v\| = \sum (-1)^n \int_{y_n}^{y_{n+1}} (u - v)\, dx,$$

όπου τα σημεία επιλέγονται έτσι ώστε u(x,t) – υ(x,t) είναι το σήμα $(-1)^n$ για $y_n < x < y_{n+1}$ (φυσικά οι y_n είναι συναρτήσεις του t).

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις :

(i) Το y_n είναι σημείο συνέχειας και των δύο υ και u . Σε αυτή την περίπτωση

(3.33) $$u(y_n,t) = υ(y_n,t)$$

Δεδομένου ότι οι τιμές λύσεων είναι σταθερές μαζί με τα χαρακτηριστικά επακολουθεί ότι σε αυτή την περίπτωση το y_n είναι γραμμική συνάρτηση του t.

(ii) Το y_n είναι σημείο ασυνέχειας μίας εκ των δύο υ και u.Σε αυτήν την περίπτωση y_n είναι μια καμπύλη κύματος.

Λύνοντας διαφορικά την (3.32) ως προς το t έχουμε την (3.34)

$$\frac{d}{dt}\|u - v\| = \sum (-1)^n \left[\int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{\partial}{\partial t}(u - v)\, dx + (u - v)(y_{n+1})\frac{dy_{n+1}}{dt} - (u - v)(y_n)\frac{dy_n}{dt} \right].$$

Για το διάστημα y_n , y_{n+1} και οι δύο τιμές ικανοποιούν την (3.1) στην έννοια των κατανομών.

Καθορίζοντας u_t = - $f(u)_x$, $v_t = \omega$ - $f(v)$ στην (3.34) λαμβάνουμε, αφού εκτελέσουμε την ολοκλήρωση.

$$(3.35)\qquad (-1)^n(f(v) - f(u))(y) + (u - v)(y)\frac{dy}{dt}\bigg|_{y_n}^{y_{n+1}}.$$

Στην περίπτωση (i) όπου u(y)= υ(y) κάνει την (3.35) να είναι ίση με το μηδέν (0).

Ερχόμαστε τώρα στην περίπτωση (ii) . Υποθέτουμε ότι η τιμή u έχει έναν κυματισμό στην τιμή $y_n = y_{n+1}$ και ότι το υ=υ(g) κυμαίνεται μεταξύ του u_1 και u_r

(3.36) $u_r < υ < u_1$

Στην συνέχεια το u-υ είναι θετικό στην (y_n,y_{n+1}) και άρα το n είναι ίδιο. Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία την (3.10), έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = s = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

Αντικαθιστώντας αυτό στην (3.35) καταλήγουμε στο σημείο (καταληκτικό) y_{n+1} με = u_1

$$(3.37)\qquad \begin{aligned} &f(v) - f(u_l) + (u_l - v)\frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \\ &= f(v) - \left[\frac{v - u_r}{u_l - u_r}f(u_l) + \frac{u_l - v}{u_l - u_r}f(u_r)\right]. \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι μια κυρτή συνάρτηση και από την (3.36) το υ έγκειται του διαστήματος (u_r , u_1) , προκύπτει από την ανισότητα Jensen's ότι η δεξιά πλευρά του (3.37) είναι αρνητική. Παρομοίως , επίσης η συμβολή του κατώτερου τελικού σημείου στην (3.35) είναι αρνητική. Αυτό μας δείχνει ότι το (d/dt)||u - υ|| είναι πάντα ≤ 0(μικρότερο ίσο του 0) άρα όπου το t αυξάνει το ||u - υ|| μειώνεται(φθίνει). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

Η περίπτωση όπου το y είναι ασυνέχεια και για τα δύο υ και u μπορεί να αντιμετωπιστεί με τον ίδιο τρόπο.

Για την παραγωγή του Θεωρήματος 3.4 μπορούμε να παραλείψουμε την απαίτηση ότι η f είναι κυρτή εάν αντικαταστήσουμε τον κανόνα εντροπίας (3.13) με τον ακόλουθο :

(i) Αν $u_r < u_l$ τότε η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[u_r , u_l]$ βρίσκεται κάτω από τη χορδή(βλέπε fig. 8).

(3.38i) $$f(\alpha u_r + (1 - \alpha)u_l) \leqq \alpha f(u_r) + (1 - \alpha)f(u_l) \quad \text{for} \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

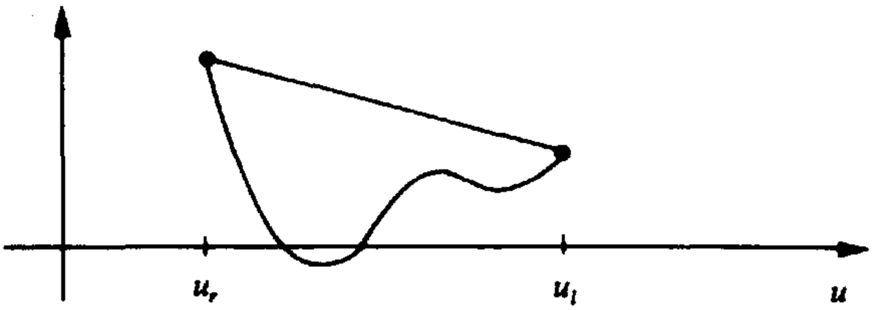


FIG. 8

(ii) Αν $u_l < u_r$ τότε η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[u_r , u_l]$ βρίσκεται πάνω από τη χορδή(βλέπε fig. 9).

(3.38ii) $$f(\alpha u_r + (1 - \alpha)u_l) \geqq \alpha f(u_r) + (1 - \alpha)f(u_l) \quad \text{for} \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

Οι συνθήκες (3.38) ονομάζονται ***γενικευμένοι κανόνες εντροπίας.***

Ας υποθέσουμε ότι f(u) είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση C^1 του u· ας υποθέσουμε ότι u(x,t) είναι μια λύση κατανομής της (3.1) η οποία είναι μια πραγματική λύση έξω από έναν πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών.

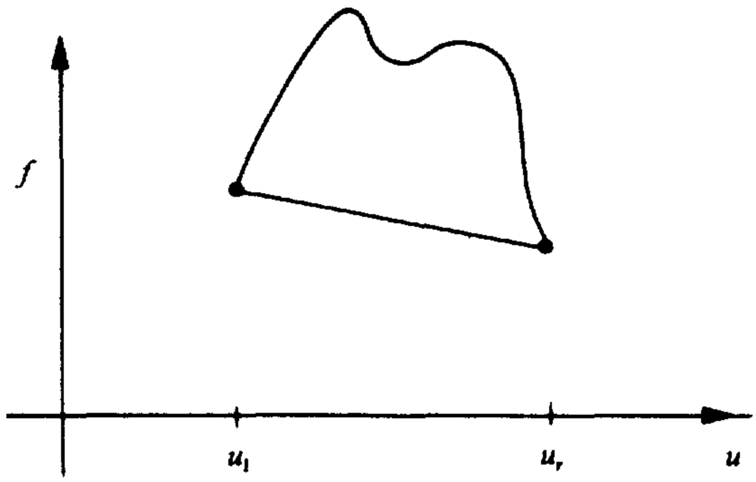


FIG. 9

Η ασυνέχεια στο u ονομάζεται κρουστική εάν τα u_l και u_r πληρούν έναν από τους κανόνες εντροπίας (3.38).

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.4 δίνει τα ακόλουθα περισσότερο γενικά αποτελέσματα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.5</u> : Έστω ότι η f μία οποιαδήποτε συνάρτηση C^1 , και τα u και υ δύο κατανεμητές λύσεις της (3.1) από όπου όλες οι ασυνέχειες είναι κρουστικές. Τότε || u(t) – υ(t) || είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του t. Ακολούθως συνεπάγεται ότι δύο τέτοιες λύσεις οι οποίες είναι ίσες για t=0 , είναι ίσες για όλα τα t. Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.5 επίσης δείχνει το παρακάτω αντίστροφο.

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u> : Αν το u είναι μια λύση κατανομής της (3.1) εκ των οποίων μια από τις ασυνέχειες αδυνατεί να ικανοποιήσει τον κανόνα εντροπίας (3.38) τότε υπάρχει μια πραγματική λύση υ τέτοια ώστε || u(t) – υ(t) || δεν είναι φθίνουσα συνάρτηση του t.

Το θεώρημα μοναδικότητας που προαναφέρθηκε δεν παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον εκτός εάν μπορέσουμε να καταδείξουμε ότι ο γενικευμένος κανόνας εντροπίας δεν είναι υπερβολικά περιοριστικός , δηλαδή , ότι κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών u(x,0) = $u_0(x)$ έχει λύση κατανομής u που οι ασυνέχειες του ικανοποιούν τον γενικευμένο κανόνα. Μια τέτοια λύση του u μπορεί να κατασκευασθεί ως το όριο των λύσεων u_λ της παραβολικής εξίσωσης

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda + \partial_x f(u_\lambda) = \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_\lambda, \qquad \lambda > 0, \tag{3.39}$$

$$u_\lambda(x, 0) = u_0(x).$$

Συνεπάγεται εύκολα από το μέγιστο αξίωμα ότι η (3.39) έχει το πολύ μία λύση· είναι επίσης αλήθεια ότι μια λύση u_λ υπάρχει για όλα τα t και ότι όταν λ → 0 αυτές οι λύσεις συγκλίνουν με βάση τον L_1 σε ένα όριο της u. Εμείς δε θα παρουσιάσουμε αυτές τις αποδείξεις ,αλλά θα δείξουμε ότι το όριο αυτό είναι μια λύση κατανομής της(3.1), η οποία ικανοποιεί τη γενικευμένη εντροπία κατάσταση. Για να δείξουμε την πραγματικότητα της πρώτης πρότασης πολλαπλασιάζουμε την (3.39) με την C_0^∞ συνάρτηση δοκιμής Φ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη· Παίρνουμε

$$-\int\int [\phi_t u_\lambda + \phi_x f(u_\lambda)]\, dx\, dt = \lambda\int \phi_{xx}u_\lambda.$$

Έστω ότι λ → 0· το αριστερό μέρος συγκλίνει στο

$$-\int\int \phi_t u + \phi_x f(u)]\, dx\, dt,$$

το δεξί μέρος συγκλίνει στο 0. Αυτό αποδεικνύει ότι η u αποτελεί λύση κατανομής της (3.1). Για να αποδείξουμε ότι το u ικανοποιεί την εντροπία κατάσταση, θα δείξουμε πρώτα ότι για κάθε δύο λύσεις u_λ και υ_λ της (3.39) ,

$$\| u_\lambda(t) - \upsilon_\lambda(t) \|$$

είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του t.

Για να το δούμε αυτό γράφουμε :

$$\|u_\lambda - v_\lambda\| = \sum(-1)^n \int_{y_n}^{y_{n+1}} (u_\lambda - v_\lambda)\, dx,$$

όπου $u_\lambda - v_\lambda$ αλλάζει πρόσημο στο σημείο y_n. Δεδομένου ότι οι λύσεις της (3.39) είναι συνεχείς,

$$(3.40) \qquad \boldsymbol{u_\lambda - v_\lambda = 0} \quad \textbf{στο σημείο } \boldsymbol{y_n} .$$

Κάνοντας διαφορική την $\|u_\lambda - v_\lambda\|$:

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda - v_\lambda\| = \sum(-1)^n \int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{\partial}{\partial t}(u_\lambda - v_\lambda)\, dx + \sum(-1)^n (u_\lambda - v_\lambda)\frac{dy}{dt}\Big|_{y_n}^{y_{n+1}} .$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.40), ο δεύτερος όρος στα δεξιά είναι μηδέν· αντικαθιστώντας από την(3.39) τον πρώτο όρο και εκτελώντας την ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda - v_\lambda\| = \sum(-1)^n \lambda \frac{\partial}{\partial x}(u_\lambda - v_\lambda)\Big|_{y_n}^{y_{n+1}} - \sum(-1)^n (f(u_\lambda) - f(v_\lambda))\Big|_{y_n}^{y_{n+1}} .$$

Και πάλι το δεύτερο άθροισμα στα δεξιά είναι μηδέν, λόγω της (3.40). Υποθέτουμε ότι κάθε όρος στο πρώτο άθροισμα είναι μη θετικός· Για $(-1)^n \lambda(u_\lambda - v_\lambda)$ = p είναι μη αρνητικό στο μεσοδιάστημα και από την (3.40) είναι μηδέν στα τελικά σημεία· άρα το p_x είναι μη αρνητικό στο αριστερό τελικό σημείο του διαστήματος και μη θετικό στο δεξί άκρο. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη ότι το

$$\|u_\lambda(t) - v_\lambda(t)\|$$

είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του t. Αν το u είναι το L_1 όριο του u_λ και το υ το L_1 όριο του v_λ τότε και το $\|u_\lambda(t) - v_\lambda(t)\|$ μειώνεται.

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι κάθε πραγματική λύση υ της (3.1) είναι το όριο καθώς το λ → 0 των λύσεων της v_λ της παραβολικής εξίσωσης. Ως εκ τούτου προκύπτει ότι εάν το u αποτελεί λύση κατανομής της (3.1) η οποία είναι ένα L_1 όριο των λύσεων u_λ της (3.39) και αν υ είναι μία οποιαδήποτε πραγματική λύση της (3.1) , τότε το $\|u_\lambda(t) - \upsilon_\lambda(t)\|$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του t. Σύμφωνα με το πόρισμα στο Θεώρημα 3.5 προκύπτει ότι όλες οι ασυνέχειες του u ικανοποιούν τη γενικευμένη κατάσταση εντροπίας, όπως υποστηρίχθηκε.

Το να απαλλαχθούμε από τους όρους κυρτότητας μας καθιστά δυνατό να επεκτείνουμε αυτές τις έννοιες και τα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας σε μονούς νόμους διατήρησης , σε οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών χώρου.

4. **Η μείωση των λύσεων καθώς το t τείνει στο άπειρο.** Ας υποθέσουμε ότι η f(u) είναι μια κυρτή συνάρτηση· τότε το Θεώρημα 3.2 δίνει μια ρητή έκφραση για τις λύσεις u της (3.1) από την άποψη των αρχικών δεδομένων

(4.1) $$u(x,t) = b\left(\frac{x-y}{t}\right),$$

Όπου το y ελαχιστοποιεί

(4.2) $$G(x,y,t) = U_0(y) + tg\left(\frac{x-y}{t}\right).$$

Ας δούμε τι μπορούμε να συμπεράνουμε από την (41) σχετικά με την τις λύσεις για μεγάλα t. Υπενθυμίζουμε ότι η g είναι μια κυρτή συνάρτηση και b μια μονότονα αύξουσα(μοναδική) , και ότι η g παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν c = α(0) και

(4.3) $$\mathbf{g(c) = 0}$$

Συμβολίζουμε με k την ποσότητα

(4.4) $$k = \tfrac{1}{2}b'(c) = \tfrac{1}{2}g''(c).$$

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αυστηρά κυρτή· τότε k > 0. Θα υποθέσουμε ότι η b΄ βρίσκεται μεταξύ δύο θετικών σταθερών για όλα τα u :

(4.5) $$k_- < \tfrac{1}{2}b' < k_+.$$

Έπεται από αυτήν και την (4.3) ότι

(4.6) $$g(z) \geqq k_-(z-c)^2;$$

τότε

$$tg\left(\frac{x-y}{t}\right) \geqq \frac{k_-}{t}(x-y-ct)^2.$$

Ας υποθέσουμε ότι η αρχική τιμή u_0 της u είναι μέσα στο L1· τότε για κάθε y, $U_0(y) = \int_{-\infty}^{y} u_0 dx$ οριοθετείται σε απόλυτη τιμή με $\|u_0\|$ = M. Χρησιμοποιώντας την (4.6) βλέπουμε ότι για όλα τα y

(4.7) $$-M + \frac{k}{t}(x-y-ct)^2 \leqq G(x, y, t).$$

$G(x, x+ct, t) = U_0(x+ct)$είναι ≤ M. Αυτό μας δείχνει ότι $G(x,y,t) \leq M$ στο ελάχιστο σημείο. Συνδυάζοντας αυτήν με την (4.7) βλέπουμε ότι

(4.8) $$\left|\frac{x-y}{t} - c\right| \leqq \sqrt{\frac{2M}{kt}}.$$

Από την (4.5) και b(c) = 0 έχουμε $|b(z)| < 2k_+|z-c|;$

και συνδυάζοντας αυτήν με την (4.8) παίρνουμε

$$\left|b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right| \leqq \frac{\text{const.}}{\sqrt{t}}, \quad \text{const.} = 2k_+\sqrt{\frac{2M}{k_-}}.$$

Έτσι από την (4.1)

$$|u(x,t)| \leqq \frac{\text{const.}}{\sqrt{t}}. \tag{4.9}$$

Υποθέτουμε ότι η αρχική τιμή $u_0(x)$ είναι μηδέν έξω από το διάστημα (-A,A). Τότε η $U_0(y)$ είναι μηδέν για x < -A και σταθερό για A < x . Σύμφωνα με την (4.8) η ελάχιστη τιμή του y βρίσκεται στο διάστημα

$$x - ct - \text{const.}\sqrt{t} \leqq y \leqq x - ct + \text{const.}\sqrt{t}.$$

Αν x < ct – const(σταθερά)$\sqrt{t} - A$, το y έγκειται στο διάστημα y < -A όπου η τιμή του $Uo(y)$ είναι ανεξάρτητη από το y· συνεπώς το ελάχιστο του G έχει ληφθεί στο σημείο το οποίο ελαχιστοποιεί την $tg((x - y)/t)$· αυτή η τιμή είναι η y = x – ct.

Ομοίως , για x > ct + const(σταθερά)$\sqrt{t} + A$ η τιμή y που ελαχιστοποιεί είναι η y = x – ct. Από το b(c)=0 , συμπεραίνουμε από την (4.1) ότι το u(x,t) = 0 για τα x έξω από το διάστημα

$$(ct - \text{const.}\sqrt{t} - A, ct + \text{const.}\sqrt{t} + A).$$

Αυτό το αποτέλεσμα αν το συνδυάσουμε με την (4.9) , μπορεί να εκφραστεί ως : Κάθε λύση u του οποίου η αρχική τιμή είναι μηδέν έξω από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα είναι , σε χρόνο t , μηδέν έξω από ένα διάστημα του οποίου το μήκος είναι O($\sqrt{t}$)· μέσα σε αυτό το διάστημα το u είναι O(1/$\sqrt{t}$).

Μια πιο λεπτομερής ανάλυση της ρητής φόρμουλας αποδίδει την ακόλουθη πιο ακριβής δήλωση σχετικά με τη συμπεριφορά των λύσεων για μεγάλα t.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1 : Ορίζουμε την ομάδα συναρτήσεων 2-παραμέτρων την υ(p,q) p,q ≥ 0 :

$$v(x,t;p,q) = \begin{cases} \frac{1}{h}\left(\frac{x}{t} - c\right) & \text{for} \quad ct - \sqrt{pt} < x < ct + \sqrt{qt}, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Έστω ότι u(x,t) είναι οποιαδήποτε λύση με κύματα της

(4.11) $$u_t + f_x(u) = 0,$$

όπου η f είναι κυρτή , f ΄(0) = c , f ΄΄(0) = h. Τότε

$$\| u(t) - \upsilon(t\,;p,q) \|$$

τείνει στο 0 όταν t → ∞ , όπου || · || είναι η στάθμη L_1 και

(4.12)
$$p = -2h \min_y \int_{-\infty}^{y} u_0(x)\,dx,$$
$$q = 2h \max_y \int_{y}^{\infty} u_0(x)\,dx.$$

Δεν θα παρουσιάσουμε απόδειξη αυτού του θεωρήματος αλλά θα παρουσιάσουμε μια επαλήθευση από μία από τις συνέπειές της.

Έχουμε εισάγει τις ακόλουθες συντομογραφίες:

(4.13)
$$\min_y \int_{-\infty}^{y} u(x)\,dx = I_-(u),$$
$$\max_y \int_{y}^{\infty} u(x)\,dx = I_+(u).$$

Σε συσχέτιση με αυτές η (4.12) μπορεί να γραφτεί ως

$$p = -2hI_-(u_0),$$
$$q = 2hI_+(u_0).$$

Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της υ στην (4.10) ότι , για κάθε T ,

$$\lim_{t \to \infty} \|v(t + T; p, q) - v(t; p, q)\| = 0.$$

Από το θεώρημα 4.1 έχουμε ότι $\| u(t+T; p, q) - v(t\ ; p,q) \| = 0$. Εφαρμόζοντας την (4.12) το $u(x, t+T)$ στην θέση του $u(x, t)$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε T

$$p = -2hI_{-}(u(T)),$$

$$q = 2hI_{+}(u(T)).$$

Με λόγια : I_{-} και I_{+} είναι χρονικά αμετάβλητες λειτουργίες των λύσεων.

Θα παρουσιάσουμε τώρα μια άμεση απόδειξη για τη διακύμανση στην I_{-}.

Έστω ότι η u είναι μία λύση της (4.11) , πιθανόν με διακυμάνσεις. Δηλώνουμε με M(t) :

$$M(t) = I_{-}(u) = \min_{y} \int_{-\infty}^{y} u(x, t)\, dx$$

και με y(t) κάποια από τις τιμές y όπου λαμβάνεται το ενδεδειγμένο ελάχιστο. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η M είναι ανεξάρτητη του t.

Σύμφωνα με την ολοκληρωμένη μορφή του νόμου διατήρησης , για κάθε t_1 και t_2 και y ,

$$\int_{-\infty}^{y} u(x, t_2)\, dx = \int_{-\infty}^{y} u(x, t_1)\, dx + \int_{t_1}^{t_2} f(u(y, t))\, dt;$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει το δεδομένο ότι $u(-\infty, t) = 0$ και ότι $f(0) = 0$. Λαμβάνοντας το y ώστε $y(t_1) = y_1$, $y(t_2) = y_2$, αντίστοιχα , και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του y ως ελάχιστο , καταλήγουμε στις ανισότητες

$$M(t_2) \leqq M(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(y_1)\,dt,$$

$$M(t_1) \leqq M(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} f(y_2)\,dt,$$

Το οποίο σημαίνει ότι

(4.14) $$|M(t_2) - M(t_1)| \leqq |t_1 - t_2| F,$$

Όπου

(4.15) $$F = \sup_{t_1 \leqq t \leqq t_2} |f(y_1, t)|, |f(y_2, t)|;$$

εδώ f(y,t) χρησιμοποιείται εν συντομία του f(u(y,t)).

Λήμμα : y(t) , το t είναι ένα σημείο της συνέχειας του u , και

(4.16) u(y , t) = 0.

Απόδειξη. Με την ιδιότητα της ελαχιστοποίησης του y έχουμε :

(4.17) $$u_l = u(y_-, t) \leq 0 \ , \quad u_r = u(y_+, t) \geq 0$$

Επειδή το f θεωρείται κυρτό , η κατάσταση εντροπίας είναι ότι $u_l > u_r$ Έτσι προκύπτει από την (4.17) ότι η y(t) δεν μπορεί να είναι ένα σημείο ασυνέχειας και ότι u(y,t) = 0.

Δεδομένου ότι το σύνολο των σημείων ελαχιστοποίησης της y(t) ,το t είναι κλειστό ,συνεπάγεται ότι σε κάθε συμπαγές τμήμα του επιπέδου (x,t) , στον y(t) , το t έχει μια θετική απόσταση από οποιαδήποτε διακύμανση της αντοχής. | $u_r - u_l$| = ε. Από αυτό ακολουθεί ότι όταν $t_2 \rightarrow t_1$, η ταλάντωση του u(y_1, t) και του u(y_2, t) μέσα στο (t_1 , t_2) τείνει στο 0. Σύμφωνα με την (4.16) , u(y_1, t_1) = u(y_2, t_2) = 0.Έτσι τα u(y_1, t) και u(y_2, t) τείνουν στο 0 ομοιόμορφα στο (t_1 , t_2) όταν $t_2 \rightarrow t_1$. Επειδή το f(0)=0 , ακολουθεί ότι όμοια για το F , το μέγιστο του f μέσα σε αυτό το διάστημα τείνει στο 0 καθώς $t_2 \rightarrow t_1$.

Τότε συμπεραίνουμε από την (4.12) ότι $\frac{dM}{dt} = 0,$

το οποίο αποδεικνύει την σταθερότητα του M και δείχνει ότι μένει αμετάβλητη η συνάρτηση I_- . Το ότι μένει αμετάβλητη η I_+ ακολουθεί παρόμοια. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι το ελάχιστο και το μέγιστο στην (4.13) συμβαίνουν για την ίδια τιμή του y. Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$I_-(u) + I_+(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx = I_0(u).$$

Αυτό είναι μια συνέπεια της ολοκληρωτικής μορφής του νόμου διατήρησης ότι για τις λύσεις u οι οποίες είναι 0 στο $x=\pm\infty$, $I_0(u)$ είναι ανεξάρτητο του t. Έτσι το ότι μένει αμετάβλητη η I_+ ακολουθεί από το ότι μένουν αμετάβλητα η I_- και η I_0.

Η ποσότητα I_0 είναι εκ φύσεως αμετάβλητη και ανήκει στο νόμο της διατήρησης. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι υπάρχουν άλλες, "αφύσικες" σταθερές.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2</u> : Η εξίσωση (3.1) έχει ακριβώς δύο ανεξάρτητες σταθερές και συνεχείς συναρτήσεις στην τοπολογία L_1.

Απόδειξη : Ας υποθέσουμε ότι I είναι οποιαδήποτε σταθερή και συνεχής συνάρτηση στην τοπολογία L_1 . Από το θεώρημα 4.1 έχουμε

$$I(u) = \lim_{t \to \infty} I(v(t, p, q)).$$

Η τιμή της δεξιάς πλευράς καθορίζεται από τις τιμές του p και q , που με τη σειρά τους καθορίζονται από τις $I_-(u)$ και $I_+(u)$.Ως εκ τούτου , η τιμή της I(u) είναι μια συνάρτηση των τιμών των $I_-(u)$ και $I_+(u)$.

Χρησιμοποιώντας τη ρητή φόρμουλα (4.1) συμπεραίνουμε από την(4.9) και το θεώρημα 4.1 ότι οι λύσεις των αρχικών τιμών που βρίσκονται στην τοπολογία L_1 φθίνει στο 0 καθώς το $A \to \infty$. Θα παρουσιάσουμε τώρα μια άλλη μέθοδος για τη μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων καθώς το $t \to \infty$

η οποία δεν βασίζεται στην (4.1).Με την βοήθεια αυτής της μεθόδου μπορούμε να δείξουμε ότι καθώς $t \to \infty$ οι λύσεις των αρχικών τιμών που είναι περιοδικές τείνουν ομοιόμορφα στην μέση τιμή τους $\overline{u_0}$:

$$\bar{u}_0 = \frac{1}{p}\int_0^p u_0(x)\,dx. \tag{4.18}$$

Όπως παρατηρείται στην παράγραφο 3 , κάθε διαφορίσιμη λύση u της (4.11) είναι σταθερή

$$\frac{dx}{dt} = a(u) = f'(u). \tag{4.19}$$

Έστω $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι ένα ζεύγος χαρακτηριστικών , $0 \le t \le T$. Τότε υπάρχει μια κατηγορία χαρακτηριστικών μοναδικής παράμετρος που ενώνει τα σημεία του διαστήματος $[x_1(0),x_2(0)]$, t=0 με τα σημεία του διαστήματος $[x_1(T),x_2(T)]$, t=T. Επειδή το u είναι σταθερό κατά μήκος αυτών των χαρακτηριστικών το $u(x,0)$ στο πρώτο διάστημα και το $u(x,T)$ στο δεύτερο διάστημα είναι ισοδύναμα. Γενικότερα ,αν σ και τ είναι μη χαρακτηριστικές καμπύλες οι οποίες συνδέουν το x_1με το x_2 ,το u κατά μήκος των σ και τ είναι ισοδύναμα. Επειδή οι ισοδύναμες συναρτήσεις έχουν την ίδια συνολική αύξηση και μείωση διακύμανσης καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι συνολικές αυξήσεις και μειώσεις διακύμανσης από μια διαφορική λύση ανάμεσα σε οποιοδήποτε ζεύγος χαρακτηριστικών παραμένει.

Δηλώνουμε με D(t) το πλάτος της γραμμής που οριοθετείται από τα x_1και x_2 :

$$D(t) = x_2(t) - x_1(t). \tag{4.20}$$

Κάνοντας διαφορική την (4.20) σε σχέση με το t και χρησιμοποιώντας την (4.19) παίρνουμε

(4.21) $$\frac{d}{dt}D(t) = \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} = a(u_2) - a(u_1).$$

Ολοκληρώνοντας σε σχέση με το t έχουμε

(4.22) $$D(T) = D(0) + [a(u_2) - a(u_1)]T.$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας παλμός y ο οποίος βρίσκετε στο u ανάμεσα στις χαρακτηριστικές x_1και x_2 (βλέπε Fig.10).Επειδή σύμφωνα με την (3.13) οι χαρακτηριστικές εκατέρωθεν του παλμού

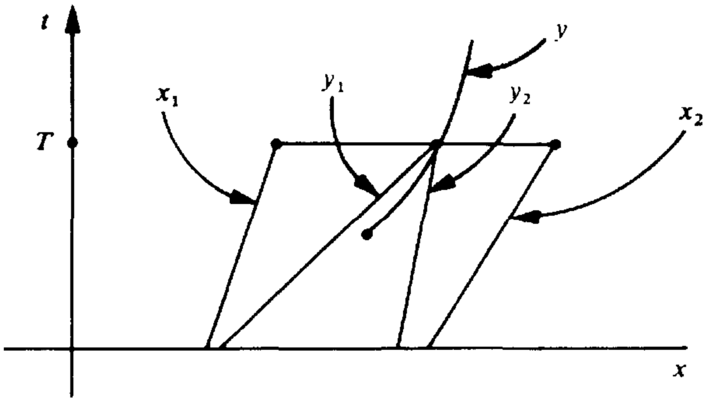


Fig 10

βρίσκονται στον παλμό , υπάρχουν σε κάθε δεδομένο χρόνο Τ ,δύο χαρακτηριστικές y_1και y_2 οι οποίες τέμνουν τον y παλμό σε ακριβώς χρόνο Τ. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν άλλοι παλμοί παρών καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αυξανόμενη διαφορά του u στο $(x_1(\mathrm{t}), y_1(\mathrm{t}))$, όπως και στο $(x_2(\mathrm{t}), y_2(\mathrm{t}))$, είναι ανεξάρτητη του t. Σύμφωνα με την σχέση (3.13) το α(u) μειώνεται δια μέσω των παλμών , έτσι ώστε η αύξηση μεταβολής του α(u) κατά μήκος του $[x_1(\mathrm{T}), x_2(\mathrm{T})]$ ισούται με το άθροισμα της αυξανόμενης μεταβολής του α(u) κατά μήκος των $[x_1(0), y_1(0)]$ και $[y_2(0), x_2(0)]$. Αυτό το άθροισμα είναι κατά κανόνα λιγότερο από ότι είναι η αύξουσα μεταβολή του u κατά μήκος του $[x_1(0), x_2(0)]$. Συνεπώς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν υπάρχουν παλμοί , η συνολική αύξουσα μεταβολή του α(u) ανάμεσα σε δύο χαρακτηριστικές μειώνεται με το χρόνο.

Δίνουμε τώρα μια ποσοτική εκτίμηση της μείωσης αυτής. Έστω ότι I_0 είναι οποιοδήποτε διάστημα του x άξονα. Το υποδιαιρούμε σε υποδιαστήματα $[y_{j-1}, y_j]$, j = 1,…,n , έτσι ώστε το u(x,0) να εναλλάξ αυξάνεται και μειώνεται σε αυτά τα διαστήματα(υποθέτουμε για την απλοποίηση ότι το u_0 είναι τμηματικά μονότονο). Συμβολίζουμε με $y_j(t)$ την χαρακτηριστική επακολουθία από το j σημείο της y_j , με την προϋπόθεση ότι αν το $y_j(t)$ βρίσκονται στον παλμό , το $y_j(t)$ θα συνεχίσει μέσα στον παλμό.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι για κάθε t > 0 , το u(x,t) αυξάνεται και μειώνεται εναλλάξ στα διαστήματα (y_{j-1}(t), y_j(t)). Δεδομένου ότι δια μέσω όλων των παλμών το u μειώνεται , η συνολική αύξηση μεταβολής $A^{+}(T)$ του α(u) καθ όλο το διάστημα I(T) = [y_0(T), y_n(T)] είναι

$$\sum_{j\,\mathrm{odd}} a(u_j(T)) - a(u_{j-1}(T)) = A^{+}(T), \tag{4.23}$$

όπου το u_{j-1}(T) υποδηλώνει την τιμή του u στο δεξιό άκρο του y_{j-1}(T) , και το u_j(T) υποδηλώνει την τιμή του u στο αριστερό άκρο του y_j(T). Στην περίπτωση που τα y_{j-1}(T) και y_j(T) είναι τα ίδια , ο j όρος στην (4.23) είναι μηδέν. Υποθέτουμε ότι y_{j-1}(T) < y_j(T). Τότε υπάρχουν χαρακτηριστικές x_{j-1}(t) και x_j(t) οι οποίες αρχίζουν όταν t = 0 μέσα στο (y_{j-1}, y_j) και οι οποίες όταν t = T βρίσκονται στα y_{j-1}(T) , και y_j(T) αντίστοιχα. Η τιμή του u κατά μήκος του x_j(t) είναι u_j(T).

Συμβολίζουμε το x_j(t) - x_{j-1}(t) με D_j(t). Σύμφωνα με την (4.22)

$$D_j(T) = D_j(0) + [a(u_j) - a(u_{j-1})]T.$$

Συνοψίζοντας όταν ο j είναι περιττός και χρησιμοποιώντας την (4.23) έχουμε

$$\sum D_j(T) = \sum D_j(0) + A^{+}(T)T.$$

Δεδομένου ότι τα διαστήματα [x_{j-1}(T) , x_j(T)] =[y_{j-1}(T) , y_j(T)] είναι τμηματισμένα και βρίσκονται στο I(T) , το άθροισμα των μήκων τους (όρων τους) δεν μπορεί να υπερβαίνει το μήκος L(T) του I(t). Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$A^{+}(T) \leqq \frac{L(T)}{T}. \tag{4.24}$$

Ας υποθέσουμε ότι η αρχική τιμή του u είναι περιοδική , με περίοδο p. Τότε , από τη μοναδικότητα προκύπτει ότι το u είναι περιοδικό για όλα τα p. Παίρνουμε το L_0 να είναι μήκους p. Τότε το L(T) έχει επίσης μήκος p και συμπεραίνουμε από την (4.24) ότι το $A^{+}(T) \leq p/T$. Δεδομένου ότι η αυξανόμενη μεταβολή της περιοδικής συνάρτησης ανά περίοδο είναι διπλάσια της συνολικής της μεταβολής , αποδεικνύουμε το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2 : Για κάθε διάστημα η περιοδική λύση u της (4.11) ,

$$\frac{\text{total variation of } a(u(T)) \text{ per period}}{\text{period}} \leqq \frac{2}{T}. \tag{4.25}$$

Η σχέση (4.25) μας δείχνει ότι η συνολική μεταβολή του α(u) ανά περίοδο τείνει στο μηδέν καθώς το Τ τείνει στο ∞. Δεδομένου ότι η μέση τιμή $\bar{u}_0$ της οποιαδήποτε περιοδικής λύσης του νόμου διατήρησης είναι ανεξάρτητη του t , συνεπάγεται ότι το u(x,T) τείνει στη $\bar{u}_0$ ομοιόμορφα όταν το Τ τείνει στο ∞. Υποθέτουμε ότι $|\alpha'(\bar{u}_0)| = h \neq 0$. Ακολουθεί από την (4.25) ότι η συνολική μεταβολή του u(T) ανά περίοδο είναι $\leq 2p/hT$. Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για Τ αρκετά μεγάλο ,

$$|u(x,t) - \bar{u}_0| < \frac{p}{ht}. \tag{4.26}$$

Η σύγκριση της (4.26) με την (4.9) μας δείχνει ότι οι περιοδικές λύσεις φθίνουν ταχύτερα από τις λύσεις των οποίων οι αρχικές τιμές είναι ολοκληρώσιμες (έχουν υποστεί ολοκλήρωμα).

Ο υπολογισμός της (4.26) , σε αντίθεση με την (4.9) , είναι απόλυτος, διότι η δεξιά πλευρά είναι ανεξάρτητη από το εύρος της λύσης.

5. Υπερβολικά συστήματα των νόμων διατήρησης. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε συστήματα των νόμων διατήρησης

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i + \frac{\partial}{\partial x}f_i = 0, \qquad i = 1, \cdots, n, \tag{5.1}$$

όπου κάθε f_i είναι μία συνάρτηση των $u_1 \dots\dots u_n$. Θα συμβολίσουμε το διάνυσμα στήλης που σχηματίζεται από τα $u_1 \dots\dots u_n$ με u. Με την εφαρμογή της διαφοροποίησης στην (5.1) παίρνουμε το μερικώς γραμμικό σύστημα.

$$u_t + A(u)u_x = 0, \tag{5.2}$$

όπου η i γραμμή του πίνακα A είναι η κλίση του f_i σε σχέση με το u. Υποθέτουμε ότι το σύστημα (5.2) είναι υπερβολικό, δηλ., ότι για κάθε τιμή του u ο πίνακας A έχει n πραγματικές διακρίνουσες ιδιοτιμές $\lambda_1 \dots\dots \lambda_n$, που επισημαίνονται σε αύξουσα σειρά. Από το A εξαρτάται για το u, και έτσι βγαίνουνε οι ιδιοτιμές λ_κ και τα αντίστοιχα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα r_k και l_k.

Η αληθινή μη γραμμικότητα έπαιξε σημαντικό ρόλο για τους μοναδικούς νόμους διατήρησης. Αυτή ήταν η απαίτηση ότι το λ είναι μια μη σταθερή συνάρτηση του u δηλ. ότι $\lambda_u \neq 0$. Η ανάλογη κατάσταση για το σύστημα δεν είναι απλώς ότι η grad $_u\lambda_\kappa$ είναι μη μηδενική , αλλά ότι δεν είναι ορθογώνιο στο r_k , το αντίστοιχα ιδιοδιάνυσμα. Εάν αυτό είναι έτσι μπορούμε να καλέσουμε τον k-τομέα *πραγματικά γραμμικό* και να εξομαλύνει τα r_k έτσι ώστε

$$r_k \cdot \text{grad } \lambda_k = 1. \tag{5.3}$$

Αν από την άλλη πλευρά $r_k \cdot \text{grad } \lambda_k \equiv 0$ καλούμε το k-χαρακτηριστικό τομέα γραμμικά ασθενής.

Γυρνάμε τώρα στη μελέτη των κατά τμήματα συνεχείς λύσεων της (5.1) στην ολοκληρωτική της μορφή. Κάθε ένα από τους n νόμους διατήρησης πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη άλματος Rankine-Hugoniot δηλ.

$$s[u_k] = [f_k], \qquad k = 1, \cdots, n, \tag{5.4}$$

πρέπει να κατέχουν σε κάθε ασυνέχεια , όπου το s είναι η ταχύτητα διάδοσης της ασυνέχειας.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε μια συνθήκη εντροπίας για συστήματα. Για μονές κυρτές (ή κοίλες) εξισώσεις αυτή η κατάσταση απαιτεί ότι τα χαρακτηριστικά εκατέρωθεν της ασυνέχειας ΄΄ τρέχουν ΄΄ πάνω στη γραμμή της ασυνέχειας , η οποία είναι η περίπτωση εάν η χαρακτηριστική ταχύτητα στα αριστερά είναι μεγαλύτερη, στο δεξί λιγότερο, από το s :

$$\lambda(\upsilon_l) > s > \lambda(u_r)$$

Για συστήματα απαιτούμε ότι για κάθε δείκτη k , 1≤ k ≤ n ,

(5.5΄) $$\lambda_\kappa(u_l) > s > \lambda_\kappa(u_r)$$

ενώ

(5.5΄΄) $$\lambda_{\kappa-1}(u_l) < s < \lambda_{\kappa+1}(u_r)$$

Οι ανισότητες αυτές υποστηρίζουν ότι τα χαρακτηριστικά k προσκρούουν στη γραμμή της ασυνέχειας από αριστερά , και τα $n - k + 1$ από τα δεξιά , στο σύνολο του n + 1. Αυτή η πληροφορία μεταφέρεται από αυτά τα χαρακτηριστικά συν των n -1 σχέσεων που λαμβάνονται από την (5.4), μετά εξαλείφοντας το s είναι επαρκή για να προσδιορίσουμε τις 2n τιμές στις οποίες το u υπάρχει και στις δύο πλευρές της γραμμής της ασυνέχειας.

Μια ασυνέχεια κατά μήκος της οποίας οι (5.4) και (5.5) ικανοποιούνται ονομάζεται k-shock(παλμός).

Δίνουμε τώρα μια περιγραφή όλων των αδύναμων k-shocks δηλ. αυτούς των οποίων τα u_l και u_r διαφέρουν λίγο. Είναι κατανοητό ότι το u_l είναι στα αριστερά του u_r.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1</u> : Το σύνολο των καταστάσεων u_r κοντά στο u_l τα οποία είναι συνδεδεμένα με κάποια δεδομένη κατάσταση u_l μέσω ενός k-shocks σχηματίζει μία στρωτή(λεία) κατηγορία μονής παραμέτρου $u_r = u(\varepsilon), -\varepsilon_0 < \varepsilon \le 0 , u(0) = u_l$. Η ταχύτητα παλμού s είναι επίσης μια λεία συνάρτηση του ε.

Θα πρέπει να παραλείψουμε την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, αλλά πρέπει να υπολογίσουμε τα δύο πρώτα παράγωγα του u(ε) για ε=0.

Κάνοντας διαφορική την σχέση του άλματος

$$s[u - u_l] = f(u) - f(u_l)$$

Παίρνουμε χρησιμοποιώντας το σύμβολο $\dot{}$ = d/dε,

$$\dot{s}[u] + s\dot{u} = \dot{f} = A\dot{u}. \tag{5.6}$$

Στο σημείο ε=0 έχουμε [u] = 0 και έτσι

$$s(0)\dot{u}(0) = A(u_l)\dot{u}(0),$$

Η οποία ικανοποιείται για $\dot{u} \neq 0$ μόνο εάν s(0) είναι μία ιδιοτιμή του A :

$$s(0) = \lambda_k(u_l), \tag{5.7}$$

και το $\dot{u}(0)$ ένα ιδιοδιάνυσμα :

$$\dot{u}(0) = \alpha r_k(u_l). \tag{5.8}$$

Με την επανα-παραμετροποίηση μπορούμε να πάρουμε α =1.Κάνοντας διαφορική για άλλη μια φορά την (5.6) και βάζοντας ε=0 παίρνουμε (παραλείποντας τον δείκτη k)

$$s\ddot{u} + 2\dot{s}\dot{u} = A\ddot{u} + \dot{A}\dot{u}.$$

Αντικαθιστώντας τις (5.7) και (5.8) , με α=1 έχουμε

$$\lambda\ddot{u} + 2\dot{s}r = A\ddot{u} + \dot{A}r. \tag{5.9}$$

Για τον προσδιορισμό του $\dot{s}$ και του $\ddot{u}$ στρεφόμαστε στην σχέση ιδιοτιμής $\lambda r = Ar$, περιορίζοντας το u = u(ε) και κάνοντας διαφορική ως προς το ε :

$$\lambda\dot{r} + \dot{\lambda}r = A\dot{r} + \dot{A}r.$$

Αφαιρώντας αυτό από την (5.9) :

$$\lambda(\ddot{u} - \dot{r}) + (2\dot{s} - \dot{\lambda})r = A(\ddot{u} - \dot{r}). \tag{5.10}$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το αριστερό ιδιοδιάνυσμα l που ανήκει στο λ έχουμε $$2\dot{s} - \dot{\lambda} = 0.$$

Δεδομένου από την (5.3) , $\dot{\lambda} = \dot{u}$ grad λ = r grad λ = 1 παίρνουμε

(5.11) $$2\dot{s} = \dot{\lambda} = 1.$$

Η εξίσωση (5.10) έχει τη λύση $\ddot{u} - \dot{r} = \beta r$.Με την αλλαγή της παραμέτρου ε συμπληρώνουμε ότι β=0 και έτσι

(5.12) $$\ddot{u}(0) = \dot{r}(0).$$

Προκύπτει από την (5.11) ότι ο όρος O(ε^2),

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda(0) + \varepsilon,$$

$$s(\varepsilon) = \lambda(0) + \varepsilon/2.$$

Έτσι η κατάσταση εντροπίας (5.5)

$$\lambda(u_l) = \lambda(0) > s(\varepsilon) > \lambda(\varepsilon) = \lambda(u_r)$$

ικανοποιείται για ε < 0 και όχι για ε > 0.Αυτό ισχύει επειδή στο Θεώρημα 5.1 η παράμετρος ε περιορίζεται στο ότι ε ≤ 0.

Στη συνέχεια θα στραφούμε σε μια σημαντική κατηγορία των συνεχών λύσεων , τα επικεντρωμένα αραιωμένα κύματα. Αυτά είναι λύσεις οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την αναλογία $(x - x_0)/(t - t_0)$, x_0 , t_0 είναι το κέντρο του κύματος.

Έστω ότι u είναι ένα αραιό κύμα επικεντρωμένο στο προσδιοριστικό σημείο :

(5.13) $$u(x, t) = h(x/t).$$

Έστω ότι δηλώνουμε το x/t με ξ και την παράγωγο σε σχέση με το ξ με ΄. Αντικαθιστώντας την (5.13) στην (5.2) παίρνουμε

$$-\frac{x}{t^2}h' + \frac{1}{t}Ah' = 0,$$

το οποίο είναι το ίδιο με το $$[A(h) - \xi]h'(\xi) = 0.$$

Αυτό ικανοποιείται από την

(5.14) $$\xi = \lambda(h(\xi)), \quad h' = \alpha r(h).$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (5.3) παίρνουμε , αφού κάνουμε διαφορική την πρώτη σχέση της (5.14) και χρησιμοποιώντας την δεύτερη , ότι

$$1 = \lambda(h(\xi))' = h' \operatorname{grad} \lambda = \alpha r \operatorname{grad} \lambda = \alpha,$$

όπου λ = λ_κ είναι μία από τις ιδιοτιμές του Α. Το h καλείται μία k-αραίωση κύματος. Βάζοντας α =1 στην (5.14) έχουμε

(5.14΄) $$h' = r(h).$$

Συντομεύουμε το λ(u_l) με λ. Η διαφορική εξίσωση (5.14΄) έχει μια μοναδική λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

(5.15) $$h'(\lambda) = u_l;$$

Το h ορίζεται για όλα τα ξ που είναι αρκετά κοντά στο λ.

Έστω ότι ε είναι ≥ 0 ,τόσο μικρό ώστε το h να ορίζεται στο λ + ε. Αντικαθιστούμε με u_r την τιμή

(5.16) $$u_r = h(\lambda + \varepsilon).$$

Δημιουργούμε τώρα την ακόλουθη τμηματικά ομαλή συνάρτηση u(x,t) που ορίζεται για t ≥ 0 (βλέπε Fig. 11) :

(5.17) $$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{for} \quad x < \lambda t, \\ h(x/t) & \text{for} \quad \lambda t \leqq x \leqq (\lambda + \varepsilon)t, \\ u_r & \text{for} \quad (\lambda + \varepsilon)t < x. \end{cases}$$

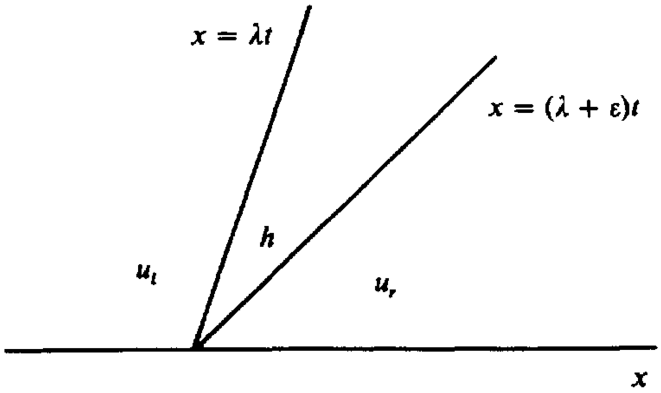


FIG. 11

Αυτή η συνάρτηση u ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (5.2) σε κάθε μία από τις τρεις περιοχές , και είναι συνεχής σε όλη τη γραμμή που χωρίζει τις περιοχές. Μπορούμε να πούμε ότι στην u οι περιοχές u_r και u_l συνδέονται από ένα κεντρικό k-αραίωσης κύμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2 : Λαμβάνοντας υπόψη μια περιοχή u_l , υπάρχει μια συγγενική μοναδική παράμετρος των περιοχών $u_r = u(\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, όπου μπορεί να συνδεθεί με την u_l μέσω ενός κεντρικού k-αραίωσης κύματος.

Τα θεωρήματα 5.1 και 5.2 μπορούν να συνδυαστούν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3 : Λαμβάνοντας υπόψη μια περιοχή u_l ,αυτή μπορεί να συνδεθεί με μια συγγενική μοναδική παράμετρος των περιοχών $u_r = u(\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, στα δεξιά της u_l μέσω ενός κεντρικού k-αραίωσης κύματος , δηλ. είτε ένα k-κύμα είτε ένα k-αραίωσης κύμα. Το $u(\varepsilon)$ είναι δύο φορές συνεχής διαφορίσιμο σε σχέση με το ε.

Το μόνο σημείο που χρειάζεται απόδειξη είναι η συνέχεια του du/dε και του $d^2u/d\varepsilon^2$ στο ε = 0. Από την (5.8) και την (5.14) βλέπουμε , όταν το α = 1 και στις δύο περιπτώσεις , ότι du/dε = r(u_l) για ε = $\pm$ 0. Για να δείξουμε ότι το $d^2u/d\varepsilon^2$ είναι συνεχής στο ε = 0 κάνουμε διαφορική την (5.14΄) σε σχέση με το ε και έχουμε

(5.18) $$\frac{d^2}{d\varepsilon^2}u(+0) = h''(\lambda) = r'.$$

Δεδομένου ότι u΄(0) = $\dot{u}(0)$, βλέπουμε συγκρίνοντας τις (5.18) και (5.12) , ότι u΄΄ = $\ddot{u}$ στο ε = 0. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.

Αν το k χαρακτηριστικό πεδίο της (5.1) είναι παραγωγίσιμο , τότε η (5.1) έχει ασυνεχείς λύσεις των οποίων η ταχύτητα διάδοσης είναι

$$s = \lambda_k(u_l) = \lambda_k(u_r).$$

Αυτές καλούνται σημεία ασυνέχειας.

Επιστρέφουμε τώρα στο Riemann πρόβλημα αρχικής τιμής , όπου η αρχική συνάρτηση u_0 είναι η

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0 & \text{for} \quad x < 0, \\ u_n & \text{for} \quad 0 < x, \end{cases} \tag{5.19}$$

όπου u_0 και u_n είναι δύο διανύσματα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3</u> : Αν οι περιοχές u_0 και u_n είναι αρκετά κοντά , το πρόβλημα αρχικής τιμής της (5.19) έχει μια λύση. Αυτή η λύση αποτελείται από n + 1 σταθερές περιοχές $u_0, u_1, \dots \dots, u_n$, διαχωρισμένα από την κεντρική αραίωση ή παλμικά κύματα ,ένα από κάθε ομάδα.(βλέπε Fig 12)

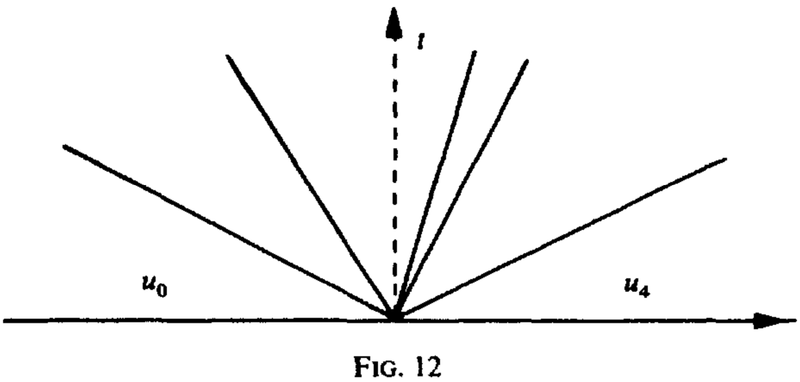


FIG. 12

Απόδειξη : Η περιοχή u_0 μπορεί να συνδεθεί μέσω ενός μονού κύματος σε μια ομάδα μονής παραμέτρου της περιοχής $u_1(\varepsilon_1)$ στα δεξιά της u_0. Η u_1 αντίστοιχα μπορεί να συνδεθεί μέσω ενός διπλού κύματος σε μια ομάδα μονής παραμέτρου $u_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ των περιοχών στα δεξιά του u_1 κτλ. Έτσι η u_0 μπορεί να συνδεθεί μέσω μιας αλληλοδιαδοχής n κυμάτων σε μια n(νιοστή) ομάδα παραμέτρων των περιοχών $u_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \dots, \varepsilon_n)$.

Από τις σχέσεις (5.8) έως (5.14) ,

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_j} = r_j;$$

Δεδομένου ότι η r_j είναι γραμμικά ανεξάρτητη , ακολουθεί από το θεώρημα άπειρων συναρτήσεων ότι μια μικρή ομάδα των ε καθορίζεται μία προς μία γειτονικά του u_0. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.

Θα περιγράψουμε τώρα μια μέθοδο που αναπτύχθηκε από τον James Glimm για να λύσει κάθε πρόβλημα αρχικής τιμής του u(x,0) = u_0(x) όπου η ταλάντωση του u_0 είναι μικρή. Η λύση u λαμβάνεται ως το όριο όταν το h→0 των κατά προσέγγιση λύσεων u_h κατασκευασμένες ως ακολούθως :

(I) $u_h(x,0)$ είναι μια τμηματικά σταθερή προσέγγιση στο u_0(x) :

(5.20) $$u_h(x,0) = m_j \quad \text{for} \quad jh < x < (j+1)h, \qquad j = 0, \pm 1, \cdots$$

όπου το m_j είναι ένα είδος της μέσης τιμής του u_0(x) μέσα στο διάστημα (jh,(j+1)h).

(II) Για 0 ≤ t < h/λ ,) $u_h(x,t)$ είναι μια ακριβής λύση της (5.1) με αρχικές τιμές $u_h(x,0)$ που δίνονται από την (5.20). Εδώ το λ είναι ένα πάνω όριο για 2|$\lambda_\kappa(u)$|. Αυτή η ακριβής λύση έχει κατασκευαστεί από την λύση των Riemann προβλημάτων αρχικής τιμής

(5.21j) $$u(x,0) = \begin{cases} m_{j-1} & \text{for} \quad x < jh, \\ m_j & \text{for} \quad jh < x, \end{cases}$$

j = 0,$\pm 1, \dots \dots$,.Δεδομένου ότι η ταλάντωση του u_0 είναι μικρή , τα m_j και m_{j-1} είναι κοντά και έτσι σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4 αυτό το πρόβλημα αρχικής τιμής έχει μια λύση που αποτελείται από σταθερές περιοχές διαχωρισμένες από παλμούς ή κεντρικά αραιωμένα κύματα που απορρέουν από τα σημεία x = jh , t=0(βλέπε Fig. 13). Όσο

(5.22) t < h/λ

Αυτά τα κύματα δεν τέμνουν μεταξύ τους και έτσι οι λύσεις του προβλήματος αρχικής τιμής μπορεί να συνδυαστεί σε μια μοναδική λύση u_h.

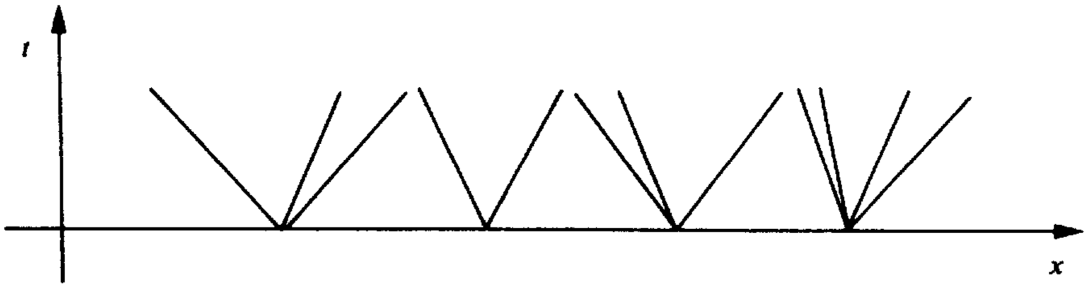


FIG. 13

(III) Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία , με t = h/λ ως νέο αρχικό χρόνο στο σημείο όπου t = 0.

Δεν είναι καθόλου προφανές ότι αυτή η διαδικασία δίνει μια προσεγγιστική λύση u_h η οποία ορίζεται για όλα τα t.Για να αποδείξουμε αυτό πρέπει να δείξουμε ότι η ταλάντωση του u(x,nh) παραμένει μικρή , ομοιόμορφα για n = 1,2,… ούτως ώστε τα Riemann προβλήματα (5.21j) να μπορούν να λυθούν , και το λ να μην τείνει στο ∞. Αυτή η εκτίμηση αποδεικνύεται να εξαρτάται η μεγάλη ευαισθησία με το είδος του κατά μέσο όρου που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της μέσης τιμής m_j.Στο καθεστώς που έγινε από τον Glimm οι ποσότητες m_j υπολογίζονται ως :

Επιλέγεται μία ακολουθία τυχαίων αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots$, ομοιόμορφα κατανεμημένων στο [0,1]. Λαμβάνεται η m_j^n , η μέση τιμή του u(x,nh/λ) μέσα στο διάστημα (jh,(y+1)h) να είναι

$$m_j^n = u(jh + \alpha_n h, nh/\lambda). \tag{5.23}$$

O Glimm μας δείχνει :

(A) Λαμβάνοντας υπόψη οποιοδήποτε ε , μπορούμε να διαλέξουμε ένα n τόσο μικρό ώστε εάν η ταλάντωση και η συνολική μεταβολή του u_0 να είναι μικρότερη του n τότε για κάθε t , η ταλάντωση και η συνολική μεταβολή του u(x,t) κατά μήκος οποιουδήποτε κενού γραμμής είναι μικρότερη του ε.

(B) Μια ακολουθία του u_h συγκλίνει στην στάθμη L1 σε σχέση με το x , ομοιόμορφα με το t ,στο όριο u.

(C) Για όλες σχεδόν τις επιλογές της τυχαίας ακολουθίας $\{\alpha_n\}$, αυτό το όριο u είναι μία λύση του νόμου διατήρησης (5.1).

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον Glimm. Εδώ έχουμε μόνο να επισημάνουμε πως το σχέδιο του Glimm αντιμετωπίζει ένα ιδιαίτερα απλό πρόβλημα αρχικής τιμής , ένα Riemann πρόβλημα αρχικής τιμής :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{for} \quad x < 0, \\ u_r & \text{for} \quad 0 < x, \end{cases}$$

όπου τα u_l και u_r επιλέγονται έτσι ώστε η ακριβής λύση του u συνίσταται των δύο περιοχών u_l , u_r διαχωρισμένα από ένα μοναδικό παλμό

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{for} \quad x < st, \\ u_r & \text{for} \quad st < x, \end{cases} \tag{5.24}$$

όπου το s είναι η ταχύτητα με την οποία ο παλμός χωρίζει τις 2 περιοχές που διαδίδεται. Με την παραδοχή , λ > |s|.Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι 0 < s. Τότε από τον τύπο του Glimm η (5.23) δίνει

$$u_h(x, h/\lambda) = \begin{cases} u_l & \text{for} \quad x < J_1 h, \\ u_r & \text{for} \quad J_1 h < x, \end{cases}$$

όπου

$$J_1 = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \alpha_1 < s/\lambda, \\ 0 & \text{if} \quad s/\lambda < \alpha_1. \end{cases}$$

Επαναλαμβάνοντας αυτή την ανάλυση n φορές παίρνουμε

$$u_h(x, nh/\lambda) = \begin{cases} u_l & \text{for} \quad x < J_n h, \\ u_r & \text{for} \quad J_n h < x, \end{cases} \tag{5,25}$$

όπου το J_n είναι αριθμός του α_j,j = 1,…,n , το οποίο ικανοποιεί

(5.26) $$\alpha_j < \frac{s}{\lambda}.$$

Δεδομένου ότι το $\{\alpha_j\}$ είναι μία ομοιόμορφα κατανεμημένη τυχαία ακολουθία ,

(5.27) $$\frac{J_n}{n} \to \frac{s}{\lambda}$$

με πιθανότητα 1.Αυτό μας δείχνει ότι η προσεγγιστική λύση που δίνεται από την (5.25) τείνει σχεδόν σίγουρα στην ακριβής λύση που δίνεται από την (5.24).

Σημειώστε ότι εάν, αντί να χρησιμοποιηθούν τυχαίες ακολουθίες χρησιμοποιείται μια ενιαία ακολουθία αριθμών $\{\alpha_j\}$, δηλ. αριθμοί για τις οποίες η (5.27) διατηρείται , συμπεραίνουμε ότι το u_h τείνει στο u όταν $h \to 0$.

Συμπεραίνουμε δηλώνοντας ακριβώς το υπάρχον θεώρημα του οποίου η απόδειξη του οποίου περιγράφεται παραπάνω, και δηλώνοντας κάποια άλυτα προβλήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.5 : Το πρόβλημα αρχικής τιμής για τα συστήματα των νόμων διατήρησης της (5.1) έχουν μία λύση για όλα τα t υπό την προϋπόθεση ότι η αρχική συνάρτηση u_0 έχει αρκετά μικρή ταλάντωση και συνολική μεταβολή.

Αυτό που λείπει προς το παρόν είναι μια απόδειξη ότι η λύση u που κατασκευάστηκε από το σχέδιο του Glimm ικανοποιεί τη συνθήκη εντροπίας , και ότι μοναδικά καθορίζεται από το u_0. Μερικές παρατηρήσεις σχετικά με τα δύο σημεία θα γίνουν στην §6.

Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα είναι να καταργηθεί η απαίτηση ότι το u_0 έχει μικρή ταλάντωση.

Οι ανισότητες (3.14) και (3.38) και (5.5) είναι κριτήρια που απορρίπτουν ορισμένες ασυνέχειες όπως φυσικά απραγματοποίητα ακόμη και αν οι νόμοι διατήρησης ικανοποιούνται ολόκληροι. Έχουμε ορίσει τα κριτήρια αυτά ως συνθήκες εντροπίας. Θα εισάγουμε τώρα μια έννοια της εντροπίας που μπορεί να σχετίζεται με αυτά τα κριτήρια.

Αρχίζουμε με ένα σύστημα των νόμων διατήρησης (5.1). Έστω ότι το U είναι μία συνάρτηση $u_1, \dots, u_n$. Πότε το U ικανοποιεί έναν νόμο διατήρησης , δηλ. , έναν νόμο της μορφής

(5.28) $$U_t + F_x = 0,$$

όπου F είναι οποιαδήποτε συνάρτηση $u_1, \dots, u_n$; Εκτελώντας την διαφοροποίηση στην (5.28) παίρνουμε

$$\text{grad}\, U \cdot u_t + \text{grad}\, F \cdot u_x = 0,$$

όπου η κλίση είναι σε σχέση με το u. Για να συμπεράνουμε αυτό από την
(5.2) $$u_t + Au_x = 0.$$
πολλαπλασιάζουμε την (5.2) στα αριστερά με το ***gradU***. Η (5.28) προκύπτει αν και μόνο αν η σχέση

(5.29) $$\text{grad}\, U \cdot A = \text{grad}\, F$$

ισχύει. Αυτό είναι ένα σύστημα των n μερικώ διαφορικών εξισώσεων του U και του F. Για n $\geq$ 2 υπερπροσδιορίζεται και δεν έχει γενικά λύση. Υπάρχουν , ωστόσο , ειδικές περιπτώσεις κάποιας σπουδαιότητας με τετριμμένη λύση , για παράδειγμα , στην αέρια δυναμική. Μια γενική κατηγορία των εξισώσεων, όπου υπάρχει μια λύση είναι οι συμμετρικές αυτές , δηλ. όταν A είναι ένας συμμετρικός πίνακας. Στην περίπτωση αυτή ,

(5.30) $$\frac{\partial f_j}{\partial u_l} = \frac{\partial f_l}{\partial u_j}.$$

Η σχέση (5.30) είναι μια συμβατική σχέση για την ύπαρξη μιας συνάρτησης g(u) που ικανοποιεί

$$\frac{\partial g}{\partial u_l} = f_l.$$

Τότε είναι εύκολο να εξακριβωθεί ότι

(5.31) $$U = \sum u_j^2 \quad \text{and} \quad F = \sum u_j f_j - g$$

ικανοποιεί την (5.29).

Ο ρόλος των συνθηκών εντροπίας είναι να διακρίνουν τις ασυνεχείς λύσεις οι οποίες είναι φυσικά πραγματοποιήσιμες από αυτές που δεν είναι. Ένας άλλος τρόπος που χαρακτηρίζει τις φυσικά πραγματοποιήσιμες λύσεις είναι να προσδιορίσουμε τα όρια των λύσεων των εξισώσεων στην οποία ένας μικρός μηχανισμός διάδοσης έχει προστεθεί στους νόμους που έχουν ήδη ενσωματωθεί στην (5.1). Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ενός τέτοιου μηχανισμού διάδοσης είναι τεχνητό ιξώδες. Εδώ η επαυξημένη συνάρτηση είναι

(5.32) $$u_t + Au_x = \lambda u_{xx}, \qquad \lambda > 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε αυτήν με ***gradU***. Αν η (5.29) ικανοποιείται παίρνουμε

(5.33) $$U_t + F_x = \lambda \operatorname{grad} U \cdot u_{xx}.$$

Έχουμε την ταυτότητα

$$U_{xx} = \operatorname{grad} U \cdot u_{xx} + U_{ij} u_x^i u_x^j,$$

όπου

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Υποθέτουμε ότι η U είναι κυρτή , δηλ. , ο πίνακας των δεύτερων παράγωγών της είναι θετικά ορισμένος. Τότε συμπεραίνουμε ότι

$$U_{xx} \geqq \operatorname{grad} U \cdot u_{xx};$$

αντικαθιστώντας αυτό στην (5.33) παίρνουμε , και για όσο λ > 0 , ότι

$$U_t + F_x \leqq \lambda U_{xx}.$$

Έστω ότι το λ → 0. Η δεξιά πλευρά τείνει στο μηδέν κατά την έννοια της κατανομής και συμπεραίνουμε το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.5 : Έστω ότι η (5.1) είναι ένα σύστημα νόμων διατήρησης η οποία συνεπάγεται έναν πρόσθετο νόμο διατήρησης της (5.28) Υποθέτουμε ότι η U είναι αυστηρά κυρτή. Έστω ότι u(x,t) είναι μια λύση κατανομής της (5.1) η οποία είναι το όριο , φραγμένο, των λύσεων της (5.32) που περιέχουν έναν τεχνητό όρο. Τότε ο u ικανοποιεί την ανισότητα

(5.34) $$U(u)_t + F(u)_x \leqq 0.$$

Το παρακάτω είναι άμεση συνέπεια της (5.34) :

(a)

(5.35) $$\int U(t)\, dx,$$

Εάν είναι πεπερασμένο τότε είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του t.

(b) Υποθέτουμε ότι u είναι κατά τμήματα συνεχείς. Τότε σε μια ασυνέχεια

(5.36) $$s[U_l - U_r] - [F_l - F_r] \leqq 0.$$

Μπορούμε να καλούμε συνθήκες εντροπίας τις (5.34) και (5.36). Για να δικαιολογήσουμε το όνομα πρέπει να δείξουμε τη συμβατότητα με τις προηγούμενες ονομασίες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.7 : Υποθέτουμε ότι το σύστημα των νόμων διατήρησης (5.1) είναι υπερβολικό και πραγματικά γραμμικό κατά την έννοια της (5.3). Υποθέτουμε ότι είναι μία αυστηρά κυρτή συνάρτηση U της u η οποία ικανοποιεί τον πρόσθετο νόμο διατήρησης (5.28). Έστω ότι u είναι μία λύση της (5.1) σε ολοκληρωμένη έννοια η οποία έχει μια ασυνέχεια που πολλαπλασιάζεται με ταχύτητα s.Υποθέτουμε ότι οι τιμές στις δύο πλευρές της ασυνέχειας είναι κλειστές. Τότε η συνθήκη εντροπίας (5.5) ισχύει αν και μόνο αν ισχύει και η συνθήκη εντροπίας (5.36).

Απόδειξη : Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1 οι καταστάσεις u_r οι οποίες μπορούν να ενωθούν με μια δεδομένη κατάσταση u_l μέσω ενός k κύματος , σχηματίζουν μια μοναδική παράμετρο των καταστάσεων $u_r = u(\varepsilon)$, - $\varepsilon_0 < \varepsilon < 0$. Δηλώνουμε με Ε(ε) την ποσότητα στα αριστερά της (5.36) :

$$E(\varepsilon) = s[U(u_r) - U(u_l)] - F(u_r) + F(u_l).$$

Ένας σύντομος υπολογισμός χρησιμοποιώντας τις (5.8) και (5.11) , και τις οποίες θα παραλείψουμε , δείχνει ότι οι τιμές των δύο πρώτων παραγώγων σε σχέση με το ε του Ε(ε) είναι μηδέν όταν ε=0 , και η τιμή της τρίτης παραγώγου στο ε=0 είναι

$$\dddot{E} = \tfrac{1}{2}{}^t r U'' r.$$

Εδώ το ${}^t r$ είναι η μετάθεση του δεξιού ιδιοδιανύσματος r και U΄΄ είναι ο πίνακας της δεύτερης παραγώγου του U. Δεδομένου ότι η U είναι κυρτή , το $\dddot{E}$ είναι θετικό. Αυτό μας δείχνει ότι το Ε(ε) είναι μία αύξουσα συνάρτηση του ε κοντά στο ε = 0. Αλλά τότε η Ε(ε) είναι αρνητική για ε αρνητικά. Δεδομένου του Θεωρήματος 5.1 η κατάσταση άλματος (5.5) περιορίζει το u_n σε αρνητικές τιμές του ε.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η συνθήκη εντοπίας (5.34) είναι ισοδύναμη με την συνθήκη εντροπίας (3.38) που επιβάλλονται στις λύσεις των μοναδικών εξισώσεων. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή η U μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι οποιοδήποτε συνάρτηση του u. Η F μπορεί να προσδιοριστεί από την (5.29) με ολοκλήρωση.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.8</u> : Η συνθήκη εντροπίας (3.38) ικανοποιείται αν και μόνο αν η (5.36) ικανοποιείται για όλες τις U , F οι οποίες ικανοποιούν την (5.29) και όπου η U είναι κυρτή.

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι $u_l < u_r$. Έστω zείναι ένας οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ των $u_l \; και \; u_r$, και βάζοντας

$$U(u) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad u < z, \\ u - z & \text{for} \quad z \leqq u. \end{cases}$$

Ακολουθεί από την (5.29) ότι

$$F(u) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad u < z, \\ f(u) - f(z) & \text{for} \quad z \leqq u. \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας αυτά στην (5.36) και χρησιμοποιώντας την αλματώδη εξίσωση

$$s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}$$

παίρνουμε μετά την αναδιάταξη

$$f(z) \geqq \frac{u_n - z}{u_r - u_l} f(u_l) + \frac{z - u_l}{u_r - u_l} f(u_r),$$

που είναι ακριβώς η κατάσταση (3.38ii). Η άλλη περίπτωση αντιμετωπίζεται παρόμοια.

6. Ζεύγη των νόμων διατήρησης : Περισσότερα γνωρίζουμε σχετικά με τα συστήματα των δύο νόμων διατήρησης από ότι τα συστήματα που αποτελούνται από παραπάνω από δύο. Το ιδιαίτερο σχετικά με τα συστήματα των δύο μόνο εξισώσεων είναι η ύπαρξη των σταθερών Riemann,τις οποίες εμείς τώρα θα περιγράψουμε.
Γράφουμε το σύστημα ως

(6.1) $$u_t + f_x = 0, \qquad v_t + g_x = 0,$$

Όπου f και g είναι συναρτήσεις των u και v. Για την πραγματοποίηση της διαφοροποίησης στην (6.1) παίρνουμε

(6.2) $$\binom{u}{v}t + \mathrm{A}\binom{u}{v}\mathrm{x} = 0,$$

Όπου

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι η (6.2) είναι υπερβολική, που σημαίνει ότι ο πίνακας A έχει πραγματικές και διακριτές ιδιοτιμές. Εμείς τις συμβολίζουμε λ και ρ, έτσι ώστε λ < ρ και φυσικά λ και ρ είναι συναρτήσεις των u και ορίζουμε το αριστερό και δεξιό ιδιοδιάνυσμα των l και r, το οποίο είναι

$$l_\lambda \mathrm{A} = \lambda l_\lambda, \quad \mathrm{A} r_\lambda = \lambda r_\lambda$$

και

$$l_\rho \mathrm{A} = \rho l_\rho, \quad \mathrm{A} r_\rho = \rho r_\rho$$

Τα ιδιοδιανύσματα, επίσης , εξαρτώνται από τα u και υ. Εμείς θα εξετάσουμε τις συναρτήσεις w των u και υ οι οποίες ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση

(6.3$_\lambda$) $\quad$ grad w * r_λ = 0

Η εξίσωση αυτή υποστηρίζει ότι το w είναι σταθερό κατά μήκος των τροχιών του διανυσματικού πεδίου r_λ.Εμείς μπορούμε να φτιάξουμε λύσεις της (6.3) παίρνοντας μία καμπύλη C η οποία δεν εφάπτεται στο r_λ σε κανένα σημείο και να βάλουμε τυχαίες τιμές του w κατά μήκος της. Θα πρέπει να επιλέξουμε το w να αυξάνεται αυστηρά κατά μήκος της C. Η τιμή του u προσδιορίζεται στη συνέχεια κατά μήκος κάθε τροχιάς τεμνόμενης στο C και το w έχει διακριτές τιμές ακολουθώντας διαφορετικές τροχιές. Η συνάρτηση z του u, υ ορίζεται ανάλογα ως λύση του

(6.3$_\lambda$) $\quad$ grad z * r_ρ = 0

Επειδή το w έχει διακριτές τιμές ακολουθώντας διαφορετικές r_λ-τροχιές και το z έχει διακριτές τιμές ακολουθώντας r_ρ-τροχιές και δεδομένου ότι στην απλά συνδεδεμένη περιοχή του u,υ διαστήματος μια r_ρ-τροχιά τέμνει μια r_λ-τροχιά το πολύ σε ένα σημείο, προκύπτει ότι **η χαρτογράφηση**

$$u, \upsilon \rightarrow w, z$$

είναι ένα προς ένα πάνω από οποιοδήποτε απλά συνδεδεμένο τομέα.

Είναι γνωστό ότι τα αριστερά και τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του πίνακα με διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια. Από εδώ εμείς εκμεταλλευόμαστε ότι n = 2 : δεδομένου ότι από (6.3) grad w είναι ορθογώνια προς το r_λ και έπειτα ότι το grad w είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή ρ :

(6.4$_\rho$) $\quad$ grad w A = ρ grad w .

Ομοίως ,

(6.4_{λ}) grad z A = λ grad z

Πολλαπλασιάζοντας την (6.2) από grad w, χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και τον κανόνα αλυσίδας , παίρνουμε

(6.5) $w' = w_t + \rho w_x = 0$,

Όπου υποδηλώνει διαφοροποίηση στην κατεύθυνση

(6.6) $\frac{dx}{dt} = \rho$

Ομοίως ,

(6.7) $z = z_t + \lambda z_x = 0$,

Που είναι διαφορίσιμο στην κατεύθυνση(κλίση)

(6.8) $\frac{dx}{dt} = \lambda$.

Οι καμπύλες που ικανοποιούν τις (6.6) και (6.8) ονομάζονται λ και ρ χαρακτηριστικές αντίστοιχα. Οι σχέσεις (6.5) και (6.7) μπορούν να διατυπωθούν με λόγια ως εξής.

Ως συναρτήσεις των x και t ,το w είναι σταθερό κατά μήκος των ρ-χαρακτηριστικών, το z είναι σταθερό κατά μήκος των λ-χαρακτηριστικών. Μετά που ανακαλύφτηκαν , w και z ονομάστηκαν Riemann αμετάβλητες.

Στο § 3 όσον αφορά τους απλούς νόμους διατήρησης δώσαμε ένα γεωμετρικό επιχείρημα για την ανυπαρξία συνεχόμενων λύσεων πέρα από ένα ορισμένο χρονικό διάστημα . Ένα συστατικό της απόδειξης αυτής ήταν η σταθερότητα του u κατά μήκος των χαρακτηριστικών και το άλλο ήταν το γεγονός ότι οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες γραμμές. Το πρώτο συστατικό είναι τώρα εδώ: w και z είναι σταθερά κατά μήκος των χαρακτηριστικών, αλλά δεν είναι πλέον αληθές ότι οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες γραμμές , έτσι η απλή γεωμετρική λογική που δίνεται στην § 3 δεν μπορεί να επεκταθεί σε συστήματα. Εμείς παρουσιάζουμε τώρα μια διαφορετική απόδειξη ανυπαρξίας για μία μόνο εξίσωση η οποία είναι ικανή γενίκευσης.

Η εξίσωση (3.3) που ικανοποιείται από το u είναι

$$u_t + \alpha(u)\, u_x = 0$$

Και διαφοροποιείται ως προς το x:

$$u_{1x} + \alpha u_{xx} + a_u\, u_x\, u_x = 0\,.$$

Αντικαθιστώντας το u_x με q , το παραπάνω μπορεί να γραφεί ως

(6.9) $$q' + a_u q^2 = 0,$$

Όπου το q' είναι εν συντομία η κατευθυνόμενη παράγωγος

$$q' = q_t + a q_x$$

Η εξίσωση (6.9) είναι μία συνηθισμένη διαφορική εξίσωση για το q κατά μήκος της χαρακτηριστικής και μπορεί να ενσωματωθεί ρητά :

(6.10) $$q(t) = \frac{q_0}{1 + q_0 k t}$$

Όπου q_0= q(0) και k=a'(u) είναι σταθερά κατά μήκος των χαρακτηριστικών. Αυτός ο τύπος δείχνει ότι εάν q_0k>0, τότε το g(t) οριοθετείται για όλα τα $t > 0$, ενώ όταν q_0k< 0 , q(t) οριοθετείται σε t=$-1/q_0 k$.

Μιμούμαστε την παραπάνω απόδειξη για το σύστημα (6.5),(6.7) ως ακολούθως. Διαφοροποιείται η (6.5) ως προς το x:

$$w_{1x} + \rho w_{xx} + \rho_w\, {w^2}_x + \rho_z\, w_x\, z_x = 0\,.$$

Αντικαθιστώντας το w_x με p μπορούμε να βάλουμε αυτό ως

(6.11) $$p' + \rho_w p^2 + \rho_z\, p z_x = 0$$

Από (6.7) συμπεραίνουμε ότι

(6.12) $$z_x = \frac{z'}{\rho - \lambda}$$

Και αντικαθιστώντας αυτήν μέσα στην (6.11) παίρνουμε

(6.13) $$p' + \rho_w p^2 + \frac{\rho_z}{\rho-\lambda}\, z'p \; = 0\ .$$

Έστω h υποδηλώνει μία συνάρτηση των w και z που ικανοποιεί

$$h_z = \frac{\rho_z}{\rho-\lambda}\ .$$

Τότε σύμφωνα με (6.5) $w' = 0$,

$$h' = \; h_w w' + h_z z' = \frac{\rho_z}{\rho-\lambda} z'\ .$$

Αντικαθιστώντας τώρα αυτήν στην (6.13) παίρνουμε

$$p' + \rho_w p^2 + h'\mathrm{p} = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε αυτό με e^h, χρησιμοποιώντας τις συντομογραφίες

(6.14) $$e^h\mathrm{p} = \mathrm{q}\ , \quad e^{-h}\rho_w = \mathrm{k} \quad ,$$

η εξίσωση που προκύπτει μπορεί να ξαναγραφεί ως

(6.15) $$q' + kq^2 = 0$$

Αυτή είναι μία συνηθισμένη διαφορική εξίσωση για το q κατά μήκος κάθε ρ – χαρακτηριστικής , ομοίως και στην (6.9) εκτός του ότι ο συντελεστής k του q^2 δεν είναι σταθερός .Ωστόσο ο ρητός τύπος για το q μπορεί να γραφτεί :

(6.16) $$\mathrm{q(t)} = \frac{q_0}{1+q_0 K_{(t)}}$$

Όπου q_0=q (0) και

$$\mathrm{K(t)} = \int_0^t k\ dt\ ,$$

η ολοκλήρωση κατά μήκος της ρ- χαρακτηριστικής.

Σαφώς το φραγμένο ή μη του q(t) εξαρτάται από το αν το q0K(t) παίρνει ποτέ την τιμή -1.
Αυτό είναι εύκολο να αναλυθεί αν $\rho_w \neq 0$ οπουδήποτε και δεδομένου ότι το πρόσημο του w είναι αυθαίρετο, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι

(6.17) $$\rho_w > 0$$

Ας υποθέσουμε ότι οι αρχικές τιμές των w, z οριοθετούνται : $|w|$,$|z|$ <M. Οι ίδιες ανισότητες ισχύουν για όλα τα t $>$ 0 , δεδομένου ότι η τιμή του w ή z σε οποιοδήποτε σημείο ισούται με την τιμή του w ή του z σε εκείνο το σημείο σχετικά με την αρχική γραμμή όπου το P μπορεί να συνδέεται με μία ρ ή λ χαρακτηριστική. Αφού ξέρουμε ότι (w , z) μένει για όλη την ώρα σ' ένα σύνολο ορίων , μπορούμε να συμπεράνουμε από (6.17) ότι η συνάρτηση k ορίζεται ως $e^{-h}p_w$ στην (6.14) η οποία οριοθετείται από κάτω για όλα τα t και x από μία θετική σταθερά k_0. Το ολοκλήρωμα K τότε ικανοποιεί

$$K(t) \geq k_0 t \text{ για όλα τα } t \geq 0.$$

Αντικαθιστώντας αυτό στην (6.16) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν $q_0 > 0$, το q(t) παραμένει οριοθετημένο, αν $q_0 < 0$, το q(t) γίνεται απεριόριστο μετά από κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα . Βλέπουμε από την (6.14) ότι το σημείο του q_0 είναι το ίδιο με εκείνο του p_0 , την αρχική τιμή του w_x . Έτσι μπορούμε να συνοψίσουμε τι έχουμε αποδείξει ως ακολούθως.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 : Ας υποθέσουμε ότι η συνθήκη (6.17) ικανοποιείται για ένα σύστημα εξισώσεων της 6.2. Ας πούμε ότι u , υ είναι μια λύση της οποίας οριοθετούνται οι αρχικές τιμές , τότε αν $w_x(x,0) < 0$ σε οποιοδήποτε σημείο οι παράγωγοι της λύσης γίνονται απεριόριστοι μετά από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει σε σχέση με την άλλη μεταβλητή z και το ακόλουθο αντίστροφο ισχύει :

Ας υποθέσουμε ότι για το σύστημα (6.2) $\rho_w > 0$ και $\lambda_z > 0$. Επίσης ότι u , υ είναι μία λύση της (6.2) της οποίας οριοθετούνται οι αρχικές τιμές και ας υποθέσουμε ότι w(x,0) και z(x,0) είναι αυξανόμενες εξισώσεις του x. Τότε τα πρώτα παράγωγα της λύσης παραμένουν ομοιόμορφα οριοθετημένα και η λύση υπάρχει και είναι διαφορίσιμη για όλα τα $t > 0$.

Παρατήρηση. Είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι η κατάσταση $\rho_w \neq 0$ είναι η ίδια όπως η γνήσια μη γραμμική κατάσταση (5.3).

Γυρνάμε τώρα σε λύσεις με κύματα(παλμούς).Δεδομένου ότι υπάρχουν δύο οικογένειες χαρακτηριστικών, υπάρχουν δύο οικογένειες ασυνεχειών , θα αναφερθούμε σ' αυτές ως ρ-shocks και λ- shocks.

Πως αλλάζει η σταθερά Riemann w δια μέσου της λ-shock ; Σύμφωνα με το θεώρημα 5.1 οι καταστάσεις u_r που μπορούν να συνδεθούν με u_l σε μια μορφή λ- shock μίας οικογένειας παραμέτρων u(ε) ,ε < 0 , η πρώτη παράγωγος του u σε σχέση με το ε δίνεται από την (5.8) :

$$\binom{\dot{u}}{v}(0) = r_\lambda$$

Ας υπολογίσουμε το $\dot{w}$:

$$\dot{w} = \text{grad w} * \binom{\dot{u}}{v} = \text{const. grad w} * r_\lambda ,$$

η οποία σύμφωνα με την (6.4_λ) είναι μηδέν.

Ένας παρόμοιος υπολογισμός σύμφωνα με την (5.12) , δείχνει επίσης ότι

$$\ddot{w} = 0 .$$

Ωστόσο το $\dddot{w}$ γενικά δεν είναι μηδέν. Αν επιβάλουμε την ανάγκη ότι $\dddot{w} \neq 0$, λέμε

(6.18) $$\dddot{w} > 0 ,$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι , τουλάχιστον για τα αδύναμα κύματα.

(6.19) $$\text{w}(u_l) > \text{w}(u_r)$$

Θεωρήστε μια λύση που περιέχει ένα πεπερασμένο αριθμό αδύναμων κυμάτων. Έστω (x, t) οποιοδήποτε σημείο , $t > 0$. Σχεδιάστε μία προς τα πίσω ρ-χαρακτηριστική μέσω αυτού του σημείου. Σύμφωνα με την κατάσταση άλματος (5.5) , η C δεν μπορεί να τρέξει σε ένα ρ-shock , έτσι η C μπορεί να συνεχιστεί σε όλη την διαδρομή προς την αρχική γραμμή. Η C θα τέμνει ένα πεπερασμένο αριθμό των λ-shocks .Μεταξύ δύο σημείων τομής το w είναι σταθερό. Από $\lambda > \rho$, όπως προκύπτει από (6.19) ότι w αυξάνεται κατά μήκος της C όσο το t μειώνεται . Έτσι συμπεραίνουμε :

Αν (6.18) ισχύει , τότε

(6.20) $$w(x, t) < w(y, 0) ,$$

όπου y είναι το σημείο που η ρ-χαρακτηριστική μέσω του (x, t) τέμνει τη γραμμή $t = 0$.

Γυρνάμε τώρα στην ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων για μεγάλα t. Αυτό το πρόβλημα μελετήθηκε για μονούς νόμους διατήρησης στο §4. Το κύριο εργαλείο υπήρξε η διατήρηση της αύξησης και μείωσης μεταβολής των συνεχών λύσεων ανάμεσα σε δύο χαρακτηριστικές . Χάρη στην ύπαρξη των σταθερών Riemann , έχουμε τη διατήρηση της μεταβολής του w μεταξύ των ρ-χαρακτηριστικών και του z μεταξύ των λ-χαρακτηριστικών , που ισχύει για συνεχείς λύσεις. Είδαμε ότι για λύσεις ενός μονού νόμου διατήρησης με παλμούς η μεταβολή μεταξύ δύο χαρακτηριστικών μειώνεται όσο το t αυξάνεται . Το ίδιο επιχείρημα, εφαρμόζοντας τις σταθερές Riemann, δείχνει ότι η παρουσία των ρ-κυμάτων προκαλεί τη μεταβολή του w, μεταξύ χαρακτηριστικών να μειώνεται με την αύξηση του χρόνου , και ομοίως η παρουσία των λ-κυμάτων προκαλεί τη μεταβολή του z με το z να μειώνεται. Έχουμε όμως την επιπλέον εργασία της εκτίμησης επίδρασης των λ-κυμάτων σχετικά με τη διακύμανση των w και ρ-κυμάτων στο z. Αυτό έχει πραγματοποιηθεί σε Glimm – Lax για τις λύσεις των οποίων η ταλάντωση είναι μικρή.

Το ακριβές αποτέλεσμα απέδειξε ότι υπάρχει το ακόλουθο.

Ας υποθέσουμε η κατάσταση (6.18) και μία ανάλογη κατάσταση για το z , ικανοποιείται για ένα σύστημα νόμων διατήρησης (6.1).Τότε το πρόβλημα των αρχικών τιμών για (6.1) έχει μια λύση για όλα τα οριοθετημένα, μετρήσιμα αρχικά δεδομένα των οποίων η ταλάντωση είναι αρκετά μικρή. Η συνολική μεταβολή αυτής της λύσης σε ένα διάστημα μήκους t σε χρόνο t οριοθετείται από μία σταθερά. Για περιοδικές λύσεις , η συνολική μεταβολή του u και του v ανά περίοδο φθίνει ως

$$\frac{const}{t}$$

Όχι πολύ γνωστή για τη μοναδικότητα. Ο Oleinik έχει μελετήσει λύσεις συστημάτων της ειδικής μορφής

$$u_t - u_x = 0, \qquad u_t + f(u)_x = 0,$$

όπου f είναι μια αύξουσα συνάρτηση του u.Έχει αποδειχθεί ότι οι λύσεις που περιέχουν ένα πεπερασμένο αριθμό διαταραχών και κεντρικά επαληθευμένα κύματα προσδιορίζονται μοναδικά από τα αρχικά δεδομένα τους.

Γυρνάμε τώρα στην κατάσταση εντροπίας (5.36) που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα :

$$U_t + F_x \leq 0$$

Για όλα τα U(u, r) και F(u, r) τα οποία ικανοποιούν την (5.29) :

(6.21) $\qquad$ grad U * A = grad F.

Μπορούμε να εξαλείψουμε το F από αυτό το σύστημα εξισώσεων μέσω της διάκρισης. Παίρνουμε μία ομογενής εξίσωση δεύτερου βαθμού για το U :

(6.22) $\qquad \alpha U_{uu} + b\, U_{uv} + c\, U_{vv} = 0,$

όπου

(6.23) $\qquad \alpha = - f_u, \quad b = f_u - g_u, \quad c = g_u .$

Είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι εάν το αρχικό μη γραμμικό σύστημα (6.1) είναι υπερβολικό , έτσι είναι και το γραμμικό σύστημα (6.21) και η προκύπτουσα εξίσωση (6.22). Η ερώτηση είναι : έχει η υπερβολική εξίσωση δεύτερης τάξης (6.22) κυρτές λύσεις ; Είναι αρκετά εύκολο να δείξουμε ότι η απάντηση είναι ‘‘ναι’’, στην βάση αυτής της εξέτασης : Εάν ο πραγματικός συμμετρικός πίνακας $\alpha_{i\,j}$ είναι αόριστος , υπάρχει ένας θετικά ορισμένος πίνακας $U_{i\,j}$ τέτοιος ώστε

$$\sum \alpha_{i\,j} \;\; U_{i\,j} = 0.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η εξίσωση συμβατότητας (6.21) έχει λύσεις όπου το U είναι κυρτό, υπό τον όρο ότι η συγκεκριμένη συνθήκη , βλέπε (6.31) παρακάτω, ικανοποιείται. Εμείς δεν ισχυριζόμαστε ότι αυτή η συνθήκη είναι απαραίτητη.

Θα φτιάξουμε οικογένειες λύσεων ανάλογα με την παράμετρο k με αυτό τον τρόπο :

(6.24) $$U = e^{k\varphi} V + U_N\,, \qquad F = e^{k\varphi}\, H + F_N\,,$$

Όπου

(6.25)

$$V = \sum_{0}^{N} V_j/k^j, \qquad H = \sum_{0}^{N} H_j/k^j.$$

φ , V_j και H_j είναι συναρτήσεις του u και του v . U_N και F_N είναι συναρτήσεις του u, v και του k επίσης, της τάξης $k^{-N}\ e^{k\varphi}$, i.e.,

(6.26) $$|D^j(F_N + U_N)| \leqq O(e^{k\varphi}/k^{N-j}).$$

Επεκτάσεις αυτού του είδους , με iφ στη θέση του φ, είναι συνηθισμένα στην γεωμετρική οπτική.

Η επίσημη δομή στην πραγματική κατάσταση είναι η ίδια όπως στην φανταστική κατάσταση :

Αντικαθιστούμε τις (6.24) , (6.25) με την (6.21) , διαιρώντας με $e^{k\varphi}$ και εξισώνουμε τις δυνάμεις του k για να βρούμε

(6.27) V_0 (grad φ) A = H_0 grad φ,

(6.28) V_j (grad φ) A + V_{j-1} = H_j grad φ + H_{j-1} ,

j = 1,2, …. , N. Λύνουμε αυτά επαναλαμβανόμενα. Η εξίσωση (6.27) υποστηρίζει ότι grad φ είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A, με ιδιοτιμή $H_0/\ V_0$.Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται συνάρτηση φάσης στην γεωμετρική οπτική. Σύμφωνα με την (6.4) η κατάσταση αυτή σημαίνει ότι το φ είναι μία σταθερά Riemann.

Έχοντας βρει το φ, αντικαθιστούμε αυτό στην (6.28) την οποία λύνουμε επαναλαμβανόμενα, δίνοντας τυχαίες αρχικές τιμές για το U σε μια μη χαρακτηριστική καμπύλη. Εάν η αρχική τιμή για το U_0 επιλεγεί να είναι θετική , το U_0 θα είναι παντού θετικό.

Πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα πρώτου βαθμού για να ορίσουμε τα U_N και F_N .Ο ανομοιογενής όρος σε αυτό το σύστημα είναι O($e^{\kappa\varphi}/k^N$) και με την κατάλληλη επιλογή για μία αρχική καμπύλη, U_N και F_N θα ικανοποιούν την (6.26). Όταν η συνάρτηση U ορίζεται από την (6.24) , η (6.25) είναι κυρτή για αρκετά μεγάλο k , όταν είναι Q = $\xi^2\ U_{un}$ + ξη U_{uv} + $\eta^2 U_{vv}$ θετικό για όλα τα ξ ,η . Η απάντηση μπορεί να διαβαστεί από τους δύο πρώτους κύριους όρους του Q σε αυτή την ασυμπτωτική επέκταση των δυνάμεων του k . Ο συντελεστής του $k^2 e^{k\varphi}$ είναι

$$({\varphi_\mu}^2\xi^2 + 2\varphi_u\ \varphi_v\,\xi\eta + {\varphi_v}^2\eta^2)\ U_0\,,$$

το οποίο είναι ίσο με

(6.29) $(\ \varphi_u\ \xi + \varphi_v\ \eta)^2 U_0$.

Όπως έχουμε παρατηρήσει πριν ,το U_0 μπορεί να επιλεγεί να είναι θετικό παντού. Επομένως , ο παραπάνω τύπος είναι θετικός εκτός κατά μήκος του

(6.30) $(\xi, \eta) = (-\varphi_v, \varphi_u)$.

Ο συντελεστής του $ke^{k\varphi}$ αποτελείται από τρεις όρους. Δύο από αυτούς είναι μηδενικοί κατά μήκος της (6.30).Η παραμένων είναι

(6.31) $$\varphi_{uu}\ \varphi_v{}^2 - 2\varphi_{uv}\varphi_u\,\varphi_v + \varphi_{vv}\ \varphi_u{}^2.$$

Κάνουμε την υπόθεση ότι υπάρχει μία σταθερά Riemann φ για την οποία η (6.31) είναι θετική. Αν αυτό είναι έτσι, U που δίνεται από την (6.24) είναι κυρτή για k αρκετά μεγάλο. Εάν η (6.31) είναι θετική , η συνάρτηση

$$\Psi(u, v) = e^{k\varphi}$$

είναι κυρτή. Δεδομένου ότι ψ είναι μία συνάρτηση της σταθεράς Riemann φ είναι η ίδια μια άλλη σταθερά Riemann και έτσι το αποτέλεσμά μας μπορεί να διαμορφωθεί ως : Εάν υπάρχει μία κυρτή σταθερά Riemann ψ σε ένα τομέα του (u, v) επιπέδου , υπάρχουν συναρτήσεις του τύπου

$$U = e^{k\psi}\{U_0 + O(1/K)\},$$

(6.32) $$F = e^{k\psi}\{F_0 + O(1/k)\},$$

Οι οποίες ικανοποιούν την (6.21). Επιπλέον U είναι κυρτό για k αρκετά μεγάλο.

Τι μπορούμε να συμπεράνουμε από την κατάσταση εντροπίας

(6.33) $$U_t + F_x \leq 0$$

για συναρτήσεις της μορφής της (6.32) ;

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3</u> : Ας πούμε u, v είναι μια λύση γενικά των νόμων διατήρησης (6.1),η οποία ικανοποιεί την κατάσταση εντροπίας (6.33) για όλα τα U , F του τύπου (6.32) ,με k αρκετά μεγάλο. Τότε

$$\max_x \psi(u(x,t), v(x,t))$$

Είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του t.

Σκίτσο της απόδειξης. Ολοκληρώνουμε την (6.33) πάνω σε μία περιοχή σχήματος φακού περιεχόμενη ανάμεσα σε S_1 και S_2 (βλέπε Fig. 14). Παίρνουμε

(6.34)
$$\int_{S_2} (Un_t + Fn_x)\,ds \leqq \int_{S_1} U\,dx.$$

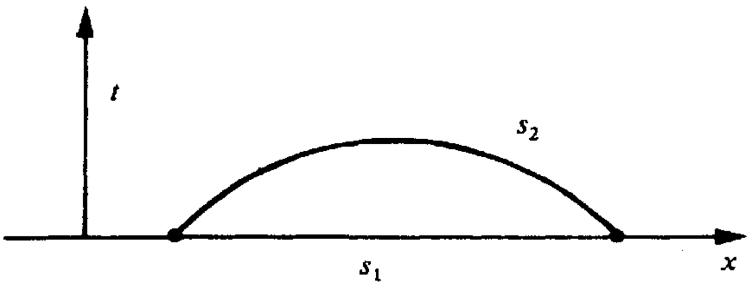


FIG. 14

Εάν S_2 επιλέγεται έτσι ώστε

$$n_t U^0 + n_x F^0 > 0,$$

η k-ρίζα της αριστερής πλευράς της (6.34) τείνει ως k→ ∞ στο μέγιστο του ψ στην S_2, ενώ η k-ρίζα της δεξιάς πλευράς τείνει στο μέγιστο του ψ στην S_1. Η προκύπτουσα ανισότητα αποδεικνύει το θεώρημα 6.3 και ακόμη λίγο περισσότερο.

<u>Παρατήρηση</u>. Το συμπέρασμα του θεωρήματος 6.3 συμφωνεί με την κατάσταση (6.20),που προέκυψε από την υπόθεση (6.18). Αποδεικνύεται ότι η ανισότητα (6.18) είναι ισοδύναμη με τη θετικότητα της (6.31) .

Σημειώσεις

1. Μερικώς γραμμικές εξισώσεις. Η ανισότητα ενέργειας για τα συμμετρικά υπερβολικά συστήματα είναι εξαιτίας των Friedrichs και Lewy , για τα μη συμμετρικά συστήματα , βλέπε τους Leray , Garding και Calderon. Το υπάρχον θεώρημα χρησιμοποιώντας το εποικοδομητικό χαρακτήρα του είναι $\mathscr{T}$ ιτίας του Schauden. Για πιο λεπτομερή προσέγγιση αυτών των προσεγγίσεων βλέπε το Κεφάλαιο 6 του Courant και Hilbert.

   Για την περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής χώρου μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τις εκτιμήσεις στη μέγιστη στάθμη αντί για την ενεργειακή στάθμη. Αυτό γίνεται ως εξής : Παραγωγίζοντας την (1.1) σε σχέση με το x. Δηλώνοντας την u_x με p παίρνουμε μια εξίσωση του παρακάτω τύπου :

   (1) $$p_t + Ap_x + Q(p) = 0,$$

   όπου Q είναι μια τετραγωνική συνάρτηση του p. Δηλώνουμε με l_j το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A :

   (2) $$l_jA = \lambda_j l_j, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

   Πολλαπλασιάζοντας την (1) με το l_j παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση για $p_j = l_j p$:

   (3) $$\partial_t p_j + \lambda_j \partial_j p_j + q_j(p) = 0,$$

   όπου q_j είναι κάποια τετραγωνική συνάρτηση του διανύσματος p. Οι πρώτοι δύο όροι στην (3) είναι οι κατευθυνόμενοι παράγωγοι του p_j σε ένα λεγόμενο χαρακτηριστικό , που δίνεται από την

   $$\frac{dx}{dt} = \lambda_j.$$

   Ολοκληρώνοντας την (3) κατά μήκος του j χαρακτηριστικού και συνδέοντας το σημείο (x,t) με ένα σημείο στην αρχική γραμμή t=0 παίρνουμε

   (4) $$p_j(x, t) = p_j(0) + \int_0^t q_j(p)\, dt.$$

Αντικαθιστώντας με M(T) το μέγιστο όλων των $p_j(x,t)$, j = 1,…,n , $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq T$.Παίρνουμε από την (4) ότι

(5) $$M \leqq M(0) + cTM^2.$$

Από αυτήν συμπεραίνουμε εύκολα ότι

(6) $$M(T) \leqq \frac{1}{2cT}\{1 - \sqrt{1 - 4cTM(0)}\},$$

και ισχύει για όσο διάστημα

(7) $$T \leqq \frac{1}{4cM(0)}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την εκτίμηση για τα πρώτα παράγωγα των λύσεων μπορούμε να αποδείξουμε ότι το αρχικό πρόβλημα τιμών (1.1) , η (1.3) έχει μια λύση στο χρονικό διάστημα (7) , όπου το M(0) ορίζεται ως

$$\max |l_j \partial_j u_0(x)| .$$

Η μη ύπαρξη του Θεωρήματος 6.1 μας δείχνει ότι το ο χρονικός περιορισμός (7) είναι , περίπου , απαραίτητος εκτός εάν βάλουμε περιορισμούς στις αρχικές τιμές όπως στο Θεώρημα 6.2

2. Νόμοι διατήρησης. Μια σημαντική ομάδα των υπερβολικών συστημάτων των νόμων διατήρησης είναι αυτοί που διέπουν τη ροή συμπιεσμένων , μη ιξώδους μη θερμικά αγώγιμων υγρών. Υπάρχουν 5 συντηρούμενες ποσότητες : μάζα ορμή και ενέργεια ανά μονάδα όγκου :

ρ = μάζα ανά μονάδα όγκου = πυκνότητα

M = ορμή ανά μονάδα όγκου =ρV , όπου (u,υ,w) =V είναι ταχύτητα ροής

E = ενέργεια ανά μονάδα όγκου = δυναμική(εσωτερική) +κινητική ενέργεια = ρe + ½ ρV^2 , όπου e = δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας.

Οι ροές υπάρχουν εν μέρει λόγω υλικού που μεταφέρεται σε όλο το όριο με την ταχύτητα της ροής. Για την ορμή υπάρχει μια επιπρόσθετη ροή λόγω της ώθησης που εισάγεται από την όση (δύναμη πίεσης) στο όριο , και υπάρχει ροή ενέργειας λόγω του έργου που παράγεται από τη δύναμη πίεσης(όση) στο όριο. Αν δεν υφίσταται θερμική αγωγιμότητα ,αυτό ισχύει για όλες τις μεταβολές ενέργειας. Για ένα μη ιξώδες υγρό η πίεση είναι μια μονοδιάστατη p , ασκούμενη εξίσου σε όλες τις κατευθύνσεις. Οι τύποι για τις ροές είναι :

$$\text{mass flux} = \rho V = M,$$

$$\text{momentum flux} = \begin{cases} \rho u V + (p, 0, 0), \\ \rho v V + (0, p, 0), \\ \rho w V + (0, 0, p), \end{cases}$$

$$\text{energy flux} = (E + p)V.$$

Η εσωτερική ενέργεια e η πίεση p και η πυκνότητα ρ συνδέονται με μία εξίσωση του τύπου :

$$p = p(e,\rho).$$

Βάση αυτό οι ροές μπορούν να εκφραστούν με τους όρους ρ , M και E.

Οι εξισώσεις άλματος για τους παλμούς στη δυναμική αερίων πρωτοδιατυπώθηκαν από το Riemann , λανθασμένα , αφού συντήρησε εντροπία αντί για ενέργεια. Οι σωστές εξισώσεις διατυπώθηκαν από τους Rankine και Hugoniot.

Άλλα σημαντικά μη γραμμικά υπερβολικά συστήματα νόμων διατήρησης είναι οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση ενός ρηχού στρώματος νερού, και οι εξισώσεις των υδροδυναμικών ροών.(βλέπε Courant και Hilbert , Κεφάλαιο 6).

3. Ενιαίοι Νόμοι Διατήρησης. Η αρχή της αυστηρής θεωρίας των ενιαίων νόμων διατήρησης ήταν μια εργασία από τον Hopf το 1950 όπου ο σαφής τύπος που δηλώνεται στο θεώρημα 3.1 δόθηκε στην ειδική περίπτωση του νόμου τετραγωνικής διατήρησης f(u) = ½ u^2. Ο τύπος για την αυθαίρετη κυρτή f διατυπώθηκε από τον Lax (1954) , και αναλύθηκε από τον ίδιο το 1957.

Τα αποκαλυπτικά θεωρήματα 3.4 και 3.5 για την μείωση της L_1 στάθμης της διαφοράς δύο λύσεων υφίσταται λόγω της Barbara Quinn. Ο κανόνας L_1παίζει επίσης ρόλο στο έργο της Oleinik(1957). Η συνθήκη (3.38) υφίσταται λόγω της Oleinik(1959).Αυτή απέδειξε ότι οι λύσεις που ικανοποιούν την (3.38) προσδιορίζονται μονοσήμαντα από τα αρχικά τους δεδομένα , και ο Kalashnikof απέδειξε ότι οι λύσεις στην (3.39) συγκλίνουν όταν $\lambda \rightarrow 0$ σε μία λύση που ικανοποιεί την (3.38).

Υπάρχει μια παράλληλη θεωρία ενιαίων νόμων διατήρησης n μεταβλητών χώρου. Υπαρκτά θεώρημα υπάρχουν από τους Conway και Smoller , Volpert , Krushov (1969) και Kotlow. Ένα Θεώρημα μοναδικότητας για τμηματικές συνεχείς λύσεις δόθηκε από τους Douglis και Quinn. Ένα πιο γενικευμένο Θεώρημα μοναδικότητας διατυπώθηκε από τον Krushkov.

4. Η Διάσπαση των λύσεων. Στην εργασία του Hopf του 1950 μελέτησε την μακροχρόνια συμπεριφορά των λύσεων των νόμων τετραγωνικής διατήρησης. Η επέκταση σε κάθε κυρτό p διατυπώθηκε από τον Lax(1957). Τα πιο εκλεπτυσμένα Θεωρήματα 4.1 και 4.2 για τις δύο και μοναδικές συντηρημένες ποσότητες ανήκει στον Lax(1970). Οι νόμοι της μείωσης της αυξανόμενης μεταβολής , και η μέθοδος για την απόδειξή του προέρχεται από τους Glimm και Lax(1972).Για μη κυρτές περιπτώσεις βλέπε Dafermos(1972).
5. Υπερβολικά συστήματα των νόμων διατήρησης. Η συνθήκη άλματος(παλμού) (5.5) και τα Θεωρήματα 5.1 , 5.2 , 5.3 ,5.4 ανήκουν στον Lax(1957). Σε περίπτωση που το πεδίο k πεδίο είναι γραμμικά εκφυλισμένο , δηλ. , grad $\lambda_\kappa \cdot r_\kappa \equiv 0$, υπάρχουν ασυνεχείς λύσεις οπού η ασυνέχεια είναι ένα k χαρακτηριστικό που τείνει σε κάθε πλευρά. Τέτοιες ασυνέχειες ονομάζονται ασυνέχειες επαφής. Μπορεί να αποδειχθεί ότι λύσεις με μόνο ασυνέχειες επαφής είναι τα όριο των συνεχών λύσεων.

Ο Foy απέδειξε ότι αν $u_l \; και \; u_r$ μπορούν να συνδεθούν με έναν αδύναμο παλμό τότε μπορούν να συνδεθούν από ένα ιξώδες προφίλ δηλ. μία λύση επίπεδου κύματος της εξίσωσης

$$u_t + f_x = \lambda u_{xx}$$

Με τεχνητό ιξώδες όρο. Με το επίπεδο κύμα εννοούμε μία λύση της μορφής

$$u(x, t) = \frac{v(x - st)}{\lambda},$$

όπου υ είναι ανεξάρτητο του λ και ικανοποιεί την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$-sv' + f(v)' = v''.$$

Οι Conley , Smoller μελέτησαν ιξώδες προφίλ για ισχυρούς παλμούς.

Το βασικό εργαλείο στο υπάρχον Θεώρημα του Glimm , εκτός του καθεστώτος διαφοράς είναι μια συνάρτηση που μετράει την δυνητική αλληλεπίδραση που περιέχεται στα δεδομένα Cauchy κατά μήκος καμπυλοειδούς χώρου. Ο Glimm αποδεικνύει ότι αυτή η συνάρτηση μειώνεται με τον χρόνο.

Η αντίληψη της εντροπίας που συζητείται εδώ προτάθηκε από τον Lax(1971) και τον Krushkov(1970). Η θεωρία της συμμετρικής περίπτωσης ανήκει στον Godunov και εφαρμόστηκε από αυτόν στις εξισώσεις ροής συμπίεσης.

6. Υπερβολικά συστήματα δύο νόμων διατήρησης. Τα μη υπάρχοντα Θεωρήματα 6.1 και 6.2 είναι από τον Lax(1964). Μια άλλη εκδοχή δόθηκε από τον Zabusky(1962).

Οι Johnson και Smoller απέδειξαν ότι κατόπιν παραδοχής το αρχικό πρόβλημα τιμής του Riemann μπορεί να λυθεί μοναδικά για δύο αυθαίρετες μοναδικές καταστάσεις , όχι αναγκαία κοντινές. Έδειξαν πως λύνεται το πρόβλημα αρχικής τιμής για τέτοια συστήματα κατόπιν παραδοχής μονοτονίας για τις αρχικές τιμές.

Ο Nishida απέδειξε ότι για το σύστημα

$$u_t - v_x = 0,$$

$$v_t + \left(\frac{1}{w}\right)_x = 0,$$

το πρόβλημα αρχικής τιμής μπορεί να λυθεί για αυθαίρετες αρχικές τιμές u(x) , $\upsilon_0(x)$, $u_0 \geq 0$. Η εργασία του Nishida επεκτάθηκε από τους Bakhvalov , DiPerna , Greenberg και Smoller. Το πρόβλημα αρχικής τιμής του Rimann στη δυναμική αερίων για μία ευρεία κλάση εξισώσεων μελετήθηκε από τον Wendroff.

Το Θεώρημα 6.2 ανήκει στον Glimm , Lax. Περεταίρω Θεωρήματα μοναδικότητας , κατά την απουσία κυμάτων αραίωσης δόθηκε από τους Roxhdestvenskii και Hurd. Η δημιουργία της συνάρτησης εντροπίας αναλύεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια από τον Lax(1971).

7. Συστήματα διαφοράς. Καμία σειρά διαλέξεων για τους υπερβολικούς νόμους διατήρησης δεν πρέπει να λήξουν χωρίς αναφορά των διαφόρων αποτελεσματικών συστημάτων διαφοράς για τον υπολογισμό λύσεων των νόμων διατήρησης. Αυτά χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό λύσεων των ειδικών προβλήματα αρχικών τιμών οι οποίες κατέληξαν σε επιστημονικά και τεχνολογικά προβλήματα. Προβλήματα που αφορούν δύο διαστάσεις του χώρου μπορούν να αντιμετωπιστούν, επίσης. Επιπροσθέτως παρέχοντας αριθμητικές απαντήσεις σε συγκεκριμένα ερωτήματα, ελπίζοντας κανείς ότι η αριθμητική υπολογισμοί θα αποκαλύψουν τα πρότυπα τα οποία παίζουν ρόλο στη θεωρία να αναπτυχθούν σχετικά με τις λύσεις των εξισώσεων αυτών.

Αν ήταν δυνατό να αποδειχθεί αυστηρά ότι οι λύσεις των εξισώσεων πεπερασμένης διαφοράς συγκλίνουν , αυτό θα αποδεικνύει την ύπαρξη λύσεων με αυθαίρετα διατυπωμένα δεδομένα. Έως τώρα αυτό έχει επιτευχθεί μόνο για τους μοναδικούς νόμους διατήρησης , και για ένα πολύ ακατέργαστο σύστημα διαφοράς που προτάθηκε από τον Lax(1954) :

$$u_k^{n+1} = \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\{f_{k-1}^n - f_{k+1}^n\}. \tag{8}$$

Εδώ το u_k^n συντομογραφεί μία προσέγγιση του u στο t = nΔt , x = kΔt και f_k^n συντομογραφεί το $f(u_k^n)$. Η σύγκλιση αυτού του συστήματος για ειδική περίπτωση επιβεβαιώθηκε από τον Lax(1957). Η σύγκριση για κάθε κυρτή f ανήκει στον Vvedenskaya. Η σύγκλιση για κάθε αριθμό μεταβλητών χώρου αποδείχθηκε από τους Conway και Smoller και επίσης και από τον Kotlow.

Η προσέγγιση (8) σε μορφή διατήρησης είναι : αν θεωρήσουμε το u_k^n ως μία προσέγγιση ως προς τη μέση τιμή του u μέσα στο διάστημα $[\left(k-\frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta x]$ σε χρόνο t-nΔt η (8) είναι σε γενική μορφή

(9) $$u_k^{n+1} = u_k^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\{\tilde{f}_{k-1/2} - \tilde{f}_{k+1/2}\},$$

δηλ. όπου η μέση τιμή του u στο k διάστημα των χρόνων t = (n+1)Δt διαφέρει από την μέση τιμή σε χρόνο Δt κατά την μέση ποσότητα που εισήχθη και διέφυγε στα άκρα κατά τον χρόνο που πέρασε. Ο χαρακτήρας διατήρησης της προσεγγιστικής εξίσωσης (9) εκφράζεται από το γεγονός ότι το ποσό που εισήχθη στο k διάστημα , κατά το χρονικό διάστημα {nΔt,(n+1)Δt} μέσω του αριστερού άκρου είναι ακριβώς ίσο με το ποσό που διαφεύγει (από το k-1 διάστημα) από το δεξί άκρο κατά το ίδιο χρονικό διάστημα.

Στην (8) , $f_{l+1/2}$ ελήφθη να είναι

(10) $$\tilde{f}_{k+1/2} = \frac{f_{k+1}^n + f_k^n}{2} + \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{u_k^n - u_{k+1}^n}{2};$$

Είναι μία μάλλον φτωχή προσέγγιση στην μέση ροή στο k + ½ όταν {n,n+1}αφού η ροή αντί να είναι μέση εκτιμάται στο μικρότερο χρόνο n. Επιπλέον , για Δt μικρό, η παρουσία σχετικά μεγάλου ποσού σχετικής ιξώδες ανάλογη προς το $(\Delta x)^2 u_{xx}/\Delta t$ προκαλεί επιπλέον λάθη. Αυτόν ο δεύτερος όρος πρέπει να εισαχθεί για να σταθεροποιηθεί η (8). Για να διασφαλίσουμε σταθερότητα οφείλουμε να εισάγουμε την συνθήκη CFL

(11) $$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq \frac{1}{\lambda_{\max}}.$$

Μια πιο ακριβής επιλογή του $f_{k+1/2}$ προτάθηκε από τους Lax και Wendroff(1960),(1964). Ξεκινώντας από την σειρά του Taylor

$$u^{n+1} = u + \Delta t u_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}$$

και του τύπους

$$u_t = -f_x = -Au_x, \qquad u_{tt} = -f_{xt} = -f_{tx} = (-Au_t)_x = (A^2 u_x)_x = (Af_x)_x,$$

τοποθετούμενους στην (9)

(12) $$\tilde{f}_{k+1/2} = \frac{f^n_{k+1} + f^n_k}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_{k+1/2}(f_{k+1} - f_k).$$

Αφού αυτός ο τύπος συγκεντρώνει ορθά την ροή την στιγμή t =(n + ½)Δ είναι πιο ακριβής από την (8) . Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτός ο τύπος είναι σταθερός όταν ικανοποιείται η συνθήκη CFL.

Η ακόλουθη μετατροπή του (12) , που προτάθηκε από τον Ritchtmyer , αποδεικνύεται πιο πρακτική :

(13) $$\tilde{f}_{k+1/2} = f(\bar{u}^{n+1/2}_{k+1/2}),$$

όπου

(14) $$\bar{u}^{n+1/2}_{k+1/2} = \frac{u^n_k + u^n_{k+1}}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\{f^n_k - f^n_{k+1}\}$$

Μια επιπλέον ενδιαφέρουσα μετατροπή που προτάθηκε από τον R.W. MacCormack είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική σε περίπτωση αρκετών μεταβλητών χώρου.

Πρόσφατα , τα πιο ακριβή συστήματα δημιουργήθηκαν από τον Rusanov και από τους Burstein και Mirin.

Μια άλλη μορφή συστημάτων διαφοράς προτάθηκε από τον Godunov. Η αρχή είναι ίδια όπως στο σύστημα του Glimm , αλλά η κατά προσέγγιση μέση τιμή τον χρόνο (n+1)Δt στο κ διάστημα ορίζεται ως το μέσο της ακριβής τιμής που υπολογίζεται εδώ. Αυτή υπολογίζεται από την σχέση ροής δηλ. η (9) χρησιμοποιείται , με $f_{k+1/2}$ ως ακριβής τιμή του f στη σύνδεση μεταξύ του k και k+1 διαστήματος.

Υπολογισμοί που γίνονται με τις μεθόδους που περιγράφονται παραπάνω δίνουν προσεγγιστικές λύσεις στις οποίες ένας παλμός εκτίνεται σε έναν πεπερασμένο αριθμό – συνήθως 2 ή 4- σημείων. Σε πλήρη αντίθεση με αριθμητικές λύσεις ή γραμμικές εξισώσεις , όπου οι ασυνέχειες εκτείνονται σε περιοχές που είναι ανάλογες σε κάποια δύναμη του αριθμού των χρονικών βημάτων.

Μια διαφορετική μέθοδος υπολογισμού αποκαλούμενη σωματίδιο σε κύτταρο αναπτύχθηκε από τον Harlow. Αυτή η μέθοδος είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική σε αρκετές διαστάσεις χώρου.

Μία μελέτη του σχηματισμού των προφίλ σταθερής κατάστασης για λύσεις εξισώσεων διαφοράς ξεκίνησε από τον Jennings(1973).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

N. S. BAKHVALOV, *On the existence in the large of solutions of quasilinear hyperbolic systems,].* Comput. Math, and Math. Phys., 10 (1970), pp. 969-980.

S. Z. BURSTEIN AND A. A. MiRlN, *Third order difference methods for hyperbolic equations,* J. Comput. Physics, 5 (1970), pp. 547-571.

C. CONLEY AND J. SMOLLER, *Viscosity matrices for two-dimensional nonlinear hyperbolic systems,* Comm. Pure Appl. Math., 1973, to appear. , *Global solutions of the Cauchy problem for quasilinear first order equations in several space variables,* Ibid., 19 (1966), p. 95.

R. COURANT AND K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves,* Interscience, New York, 1948.

R. COURANT AND D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics,* vol. II, Interscience, New York, 1962
.

R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS AND H. LEWY, *Uber die partiellen Differenzengleichungen der Physik,* Math. Ann., 100 (1928), p. 32.

C. M. DAFERMOS, *Applications of the invariants principle for compact processes //. Asymptotic behavior of solutions of a hyperbolic conversion law,* J. Differential Equations, 11 (1972), pp. 416-424.

R. DIPERNA, *Global solutions to a class of nonlinear hyperbolic systems of equations,* Comm. Pure Appl. Math., 1973, to appear.

A. DOUGLIS, *An ordering principle,* Ibid., 12 (1959), p. 87.

R. L. FOY, *Steady siate solutions of hyperbolic systems of conservation laws with viscosity terms,* Ibid., 17(1964), pp. 177-188.

J. GLIMM, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations,* Ibid., 18 (1965), pp. 697- 715.

J. GLIMM AND P. D. LAX, *Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws,* Mem. Amer. Math. Soc., 101 (1970).

S. GODUNOV, *An interesting class of quasilinear systems,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 139 (1961), pp. 521- 523. , *Bounds on the discrepancy of approximate solutions constructed for the equations of gas dynamics*

,

J. Comput. Math, and Math. Phys., 1 (1961), pp. 623-637.

J. M. GREENBERG, *The Cauchy problem for the quasilinear wave equation,* Indiana J. Math., to appear.

F. H. HARLOW, *The particle-in-call method for fluid dynamics,* Methods of Computational Physics, vol. 3, B. Alder, ed., Academic Press, New York, 1964, pp. 319-343.

E. HOPF, *The partial differential equation* u_1 + uu_X = μ_{xx}, Comm. Pure Appl. Math., 3 (1950), pp. 201- 230. , *On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order,*

J. Math. Mech., 19 (1969), pp. 483-487.

W. HURD, *A uniqueness theorem for weak solutions,* Pacific J. Math., 28 (1969), pp. 556-559.

G. JENNINGS, *Discrete travelling waves,* Comm. Pure Appl. Math., 1973, to appear.

J. L. JOHNSON AND J. SMOLLER, *Global solutions for an extended class of hyperbolic systems of conservation laws.* Arch. Rational Mech. Anal., 32 (1969), pp. 169-189.

A. S. K.ALASHNIK.OV, *Construction of generalized solutions of quasi-linear equations of first order without convexity conditions as limits of solutions of parabolic equations with a small parameter,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 127 (1959), pp. 27-30.

D. KOTLOW, *Quasilinear parabolic equations and first order quasilinear conservation laws with bad Cauchy data,* J. Math. Anal. Appl., 35 (1971), pp. 563-576.

S. N. K.RUSHKOV, *Results on the character of continuity of solutions of parabolic equations and some of their applications,* Math. Zametky, 6 (1969), pp. 97-108. , *First order quasi-linear equations in several independent variables,* Math. USSR Sb., 10 (1970), no. 2, pp. 217-243.

P. D. LAX, *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation,* Comm. Pure Appl. Math., 7 (1954), pp. 159-193. , *Hyperbolic systems of conservation laws II,* Ibid., 10 (1957), pp. 537-566. , Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, J. Mathematical Phys., 5 (1964), pp. 611-613.
, *Invariant functional of nonlinear equations of evolution,* Proc. International Conference on Functional Analysis & Related Topics, Tokyo, 1969, pp. 240-251., *The formation and decay of shock waves,* Amer. Math. Monthly, 79 (1972), pp. 227-241., *Shock waves and entropy,* Proc. Symposium at the University of Wisconsin, 1971, E. H. Zarantonello, ed., 603-634.

P. D. LAX AND B. WENDROFF, *Systems of conservation laws,* Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), pp. 217-237. , *Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy,* Ibid., 17 (1964), pp. 381-398.

R. W. MACCORMACK, *Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer,* Lecture Notes on Physics No. 8, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

T. NISHIDA, *Global solutions for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system,* Proc. Japan Acad., 44 (1968), pp. 642-646.

T. NISHIDA AND J. A. SMOLLER, *Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws,* Comm. Pure Appl. Math., 1973, to appear.

O. A. OLEINIK, *Discontinuous solutions of non-linear differential equations,* Uspekhi Mat. Nauk (N.S.), 12(1957), no. 3 (75), pp. 3-73 (Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 26, pp. 95-172).
, *On the uniqueness of the generalized solution of the Cauchy problem for a nonlinear system of equations occurring in mechanics,* Ibid., 12 (1957), no. 6 (78), pp. 169-176.
, *Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation. Ibid.,* 14 (1959), pp. 165-170.

B. QUINN, *Solutions with shocks, an example of an L_1-contractive semigroup,* Comm. Pure Appl. Math., 24(1971), pp. 125-132.

R. D. RICHTMYER AND K. W. MORTON, *Difference Methods for Initial Value Problems,* Interscience, New York, 1967.

B. ROZHDESTVENSKII, *Discontinuous solutions of hyperbolic systems of quasi-linear equations,* Uspekhi Mat. Nauk., 15 (1960), no. 6 (96), pp. 59-117 (Russian Math. Surveys, 15 (1960), no. 6, pp. 55-111).

V. V. RUSANOV, *On difference schemes of third order accuracy for nonlinear hyperbolic systems,* J. Comput. Physics, 5 (1970), pp. 507-516.

A.I. VOL'PERT, Math. USSR Sb., 2 (1967), p. 225.

N. D. VVEDENSKAYA, *Solution of the Cauchy problem for a non-linear equation with discontinuous initial conditions by the method of finite differences,* Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 111 (1956), pp.517-520.

B. WENDROFF, *The Riemann problem for materials with nonconvex equation of state,* J. of Math., 38 (1972), pp. 454-466.

N. J. ZABUSKY, *Exact solution for the vibrations of a nonlinear continuous model string,* J. Mathematical Phys., 3 (1962), pp. 1028-1039.