

Ανάλυση Σημάτων με τη Βοήθεια Μαθηματικών Εργαλείων

Πτυχιακή Εργασία

Εκπόνηση: Προτοψάλτης Ιωάννης ΑΜ 3540

Επίβλεψη: Κόκκινος Ευάγγελος

Οκτώβριος 2013



Περιεχόμενα

Περίληψη.....	6
Abstract	6
Κεφάλαιο 1°	7
1.1 Εισαγωγή.....	7
1.2 Σύνολα και Πιθανότητες	7
1.2.1 Βασικοί Ορισμοί.....	7
1.2.2 Διαγράμματα Venn και ορισμένοι νόμοι.....	9
1.2.3 Βασικές Έννοιες Πιθανοτήτων	12
1.2.4 Μέθοδοι Καταμέτρησης.....	14
1.2.5 Ιδιότητες, πιθανότητες υπό όρους και ο κανόνας του Bayes.....	18
1.3 Τυχαίες Μεταβλητές	23
1.3.1 Συναρτήσεις βήματος και παλμού	23
1.3.2 Διακριτές τυχαίες μεταβλητές.....	24
1.3.3 Συνεχής τυχαίες μεταβλητές	26
1.3.4 Μεικτές τυχαίες μεταβλητές.....	28
1.4 Ροπές	29
1.4.1 Προσδοκίες.....	29
1.4.2 Στιγμιαία συνάρτηση παραγωγής και χαρακτηριστική συνάρτηση	31
1.4.3 Άνω φράγμα πιθανοτήτων και ο νόμος των μεγάλων αριθμών.....	33
1.5 Τυχαίες μεταβλητές δυο-και περισσότερων διαστάσεων.....	35
1.5.1 Κατανομές υπό όρους	36
1.5.2 Προσδοκίες και συσχετίσεις.....	42
1.5.3 Από κοινού χαρακτηριστικές συναρτήσεις	45
1.6.1 Συναρτήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής.....	48
1.6.2 Συναρτήσεις δυο τυχαίων μεταβλητών	50
1.6.3 Δύο συναρτήσεις δύο τυχαίων μεταβλητών	56
1.7 Σύνοψη	61
Αναφορά.....	61
Επιλεγμένη Βιβλιογραφία	61

Κεφάλαιο 2°	63
2.1 Εισαγωγή	63
2.2 Διακριτές τυχαίες μεταβλητές.....	63
2.2.1 Η κατανομή Bernoulli, η Διωνυμική και η Πολυωνυμική κατανομή	63
2.2.2 Η γεωμετρική κατανομή και η κατανομή Pascal.....	66
2.2.3 Η υπεργεωμετρική κατανομή	68
2.2.4 Η κατανομή Poisson	71
2.3 Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές	73
2.3.1 Η ομοιόμορφη κατανομή.....	73
2.3.2 Η κανονική κατανομή.....	75
2.3.3 Η εκθετική κατανομή και η κατανομή Laplace	80
2.3.4 Οι κατανομές Γάμμα και Βήτα	82
2.3.5 Η Χι- τετράγωνο κατανομή.....	84
2.3.6 Οι κατανομές Rayleigh, Rice και Maxwell	88
2.3.7 Η m-κατανομή Nakagami	96
2.3.8 Η t- κατανομή ή κατανομή του Student, και η F-κατανομή	96
2.3.9 Η κατανομή Cauchy.....	100
2.4 Κάποιες ιδιαίτερες κατανομές	101
2.4.1 Η Διμεταβλητή και η Πολυμεταβλητή Γκαουσιανή κατανομή	101
2.4.2 Η κατανομή Weibull	108
2.4.3 Η Λογαριθμική κατανομή.....	109
2.4.4 Η K-κατανομή	110
2.4.5 Η Γενικευμένη σύνθετη κατανομή.....	112
2.5 Σύνοψη	113
Αναφορά.....	113
Επιλεγμένη Βιβλιογραφία	113
Κεφάλαιο 3°	116
3.1 Εισαγωγή και ορισμοί	116
3.2 Προσδοκίες.....	120
3.3 Ιδιότητες των συναρτήσεων συσχέτισης	126
3.3.1 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.....	126
3.3.2 Συνάρτηση διασυσχέτισης	127
3.3.3 Στατικές με την ευρεία έννοια	127

3.4 Μερικές τυχαίες διαδικασίες	128
3.4.1 Ένας παλμός γνωστού σχήματος αλλά τυχαίου πλάτους και χρόνου άφιξης.....	129
3.4.2 Πολλαπλοί παλμοί.....	130
3.4.3 Περιοδικές τυχαίες διαδικασίες.....	131
3.4.4 Γκαουσιανές διαδικασίες	133
3.4.5 Η διαδικασία Poisson	135
3.4.6 Οι διαδικασίες Bernoulli και οι Διωνυμικές διαδικασίες.....	137
3.4.7 Οι διαδικασίες “Τυχαίος Περίπατος” και Wiener	139
3.4.8 Η διαδικασία Markov	142
3.5 Φασματική πυκνότητα ισχύος	144
3.6 Γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα.....	147
3.6.1 Στοχαστικά σήματα	148
3.6.2 Συστήματα πολλαπλών τερματικών	152
3.7 Εργοδικότητα.....	153
3.7.1 Εργοδικότητα της μέσης τιμής	153
3.7.2 Εργοδικότητα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης	154
3.7.3 Εργοδικότητα της κατανομής πρώτης τάξης	155
3.7.4 Εργοδικότητα της φασματικής πυκνότητας ισχύος	155
3.8 Θεώρημα δειγματοληψίας.....	156
3.9 Συνέχεια, Παραγωγισιμότητα και Ολοκλήρωση.....	160
3.9.1 Συνεχείς συναρτήσεις.....	160
3.9.2 Παραγωγισιμότητα.....	162
3.9.3 Ολοκληρώματα.....	164
3.10 Μετασχηματισμός Hilbert και αναλυτικά σήματα	165
3.11 Θερμικός θόρυβος	169
3.12 Σύνοψη	174
Επιλεγμένη Βιβλιογραφία	175
Κεφάλαιο 4	176
4.1 Εισαγωγή	176
4.2 Πίνακες και γραμμική άλγεβρα.....	177
4.2.1 Αλγεβρικές πράξεις πινάκων.....	177
4.2.2 Πίνακες ειδικών μορφών	182
4.2.3 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	185

4.3 Σύνοψη	192
Επιλεγμένη Βιβλιογραφία	192

Περίληψη

Η παρούσα πτυχιακή εργασία παρουσιάζει μια σύνοψη και εισαγωγή στην “Μελέτη των μαθηματικών εργαλείων για την ανίχνευση σήματος”. Αυτά τα μαθηματικά εργαλεία είναι χρήσιμα καθώς η αναγνώριση σήματος συχνά απαιτεί περίπλοκους μηχανισμούς και αρκετά μεγάλο υπόβαθρο στα μαθηματικά που αφορούν μηχανικούς. Στα ακόλουθα κεφάλαια περιγράφονται βασικές έννοιες στη θεωρία πιθανοτήτων και συνόλων καθώς επίσης και οι στοχαστικές διαδικασίες – συνεχούς και διακριτού χρόνου, γνώσεις θεμελιώδεις για την αναγνώριση σήματος και την εκτίμηση παραμέτρων. Στο Κεφάλαιο 1 αναλύεται η θεωρία πιθανοτήτων και συνόλων, τα Venn-ια διαγράμματα. Αναλύονται επίσης οι τυχαίες μεταβλητές, οι ροπές και οι τυχαίες μεταβλητές δύο ή περισσότερων διαστάσεων. Στο κεφάλαιο 2 καλύπτονται οι διαφορετικές κατανομές οι οποίες μπορούν να εμφανιστούν στα ραντάρ και στα συστήματα επικοινωνιών. Στα Κεφάλαια 3 και 4 περιγράφεται με λεπτομέρεια η έννοια της στοχαστικής διαδικασίας. Στο Κεφάλαιο 3 εισάγονται οι έννοιες των στοχαστικών διαδικασιών συνεχούς χρόνου ενώ στο Κεφάλαιο 4 γίνεται εκτενής αναφορά στις στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου κάνοντας εισαγωγή και αναλύοντας την Γραμμική Άλγεβρα και την Άλγεβρα Πινάκων.

Abstract

This thesis provides an overview and introduction to the “Study of mathematic tools and signal detection”. The abovementioned mathematic tools are important, since some material on signal detection could be very complex and require a lot of background in engineering math. In the following chapters some basic concepts in signal detection and estimation are introduced. In Chapter 1, probability and set theory, Venn diagrams, random variables, moments and two-and higher-dimensional random variables are covered. In Chapter 2, covers various distributions that may arise in radar and communication systems. In Chapters 3 and 4, random processes are described in detail. Chapter 3 covers the topic of continuous time random processes, while Chapter 4 covers the topic of discrete-time random processes, describing in detail Matrix and Linear Algebra.

Κεφάλαιο 1^ο

Έννοιες Πιθανοτήτων

1.1 Εισαγωγή

Η παρούσα πτυχιακή εργασία, έχει σχεδιαστεί κυρίως για τη μελέτη των στατιστικών ανίχνευσης σημάτων και εκτίμησης παραμέτρων. Τέτοιες έννοιες απαιτούν καλή γνώση των θεμελιωδών αντιλήψεων σχετικά με τις πιθανότητες, τις τυχαίες μεταβλητές και τις στοχαστικές διαδικασίες. Στο κεφάλαιο 1, παρουσιάζουμε έννοιες σχετικά με τις πιθανότητες και τις τυχαίες μεταβλητές. Στο Κεφάλαιο 2, συζητάμε μερικές σημαντικές κατανομές που προκύπτουν σε πολλές εφαρμογές μηχανικής, όπως τα ραντάρ και τα συστήματα επικοινωνίας. Η γνώση της θεωρίας πιθανοτήτων αποτελεί προϋπόθεση για τα κεφάλαια 3 και 4, στα οποία θα καλύψουμε στοχαστικές διαδικασίες και κάποιες εφαρμογές αυτών. Ομοίως, οι βασικές αρχές των στοχαστικών διαδικασιών θα είναι απαραίτητες για τη σωστή κατανόηση των επόμενων θεμάτων, τα οποία καλύπτουν τις βασικές αρχές ανίχνευσης σημάτων και εκτίμησης παραμέτρων. Ξεκινάμε αυτό το κεφάλαιο με τη θεωρία των συνόλων, καθώς παρέχει τις πιο θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας των πιθανοτήτων. Εισάγουμε τις έννοιες των τυχαίων μεταβλητών και πιθανοτικών κατανομών, της στατιστικής στιγμών, των τυχαίων μεταβλητών δύο ή και περισσότερων διαστάσεων, και της μετατροπής τυχαίων μεταβλητών. Εξάγουμε βασικά αποτελέσματα, στα οποία θα αναφερόμαστε σε όλη την εργασία, και καθιερώνουμε το συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί.

1.2 Σύνολα και Πιθανότητες

1.2.1 Βασικοί Ορισμοί

Σύνολο μπορεί να οριστεί ως μια συλλογή αντικειμένων. Τα επιμέρους αντικείμενα που αποτελούν το σύνολο είναι τα «στοιχεία» του συνόλου, ή «μέλη» του συνόλου. Γενικά, τα σύνολα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα όπως A, B, Γ, και στοιχεία ή μέλη του συνόλου με πεζά γράμματα όπως α, β, γ. Αν ένα στοιχείο α «ανήκει» ή είναι «μέλος» του A, γράφουμε

$$a \in A \tag{1.1}$$

Αλλιώς, λέμε πως το a δεν είναι μέλος του A , ή ότι το a δεν ανήκει στο A , και γράφουμε

$$a \notin A \quad (1.2)$$

Ένα σύνολο μπορεί να περιγραφεί με τρεις πιθανούς τρόπους. Ο πρώτος είναι να καταγράψουμε όλα τα μέλη του συνόλου. Για παράδειγμα, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Μπορεί επίσης να περιγραφεί με λόγια. Για παράδειγμα, λέμε ότι το A απαρτίζεται από ακέραιους μεταξύ του 1 και του 6, συμπεριλαμβανομένων των άκρων. Ένας ακόμα τρόπος είναι να περιγράψουμε το σύνολο χρησιμοποιώντας την παρακάτω φόρμα

$$A = \{a \mid a \text{ ακέραιος και } 1 \leq a \leq 6\} \quad (1.3)$$

Το σύμβολο \mid διαβάζεται «έτσι ώστε», και η παραπάνω έκφραση διαβάζεται: «Το σύνολο όλων των στοιχείων a , έτσι ώστε το a να είναι ακέραιος αριθμός μεταξύ 1 και 6, συμπεριλαμβανομένων των άκρων.» Θα λέμε πως ένα σύνολο είναι μετρήσιμο, εάν τα στοιχεία του μπορούν να τεθούν σε ένα-προς-ένα αντιστοιχεία με τους ακέραιους αριθμούς 1, 2, 3, και ούτω καθεξής. Διαφορετικά, μη μετρήσιμο. Ένα πεπερασμένο σύνολο έχει πλήθος στοιχείων που είναι ίσο με το μηδέν ή κάποιο ορισμένο θετικό ακέραιο. Εάν ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από οποιοδήποτε πιθανό θετικό ακέραιο, τότε το σύνολο θεωρείται άπειρο. Το σύνολο όλων των στοιχείων υπό εξέταση ονομάζεται καθολικό σύνολο και συμβολίζεται ως U . Το σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία ονομάζεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με \emptyset .

Εντός δύο συνόλων A και B , αν κάθε στοιχείο του B είναι επίσης στοιχείο του A , τότε το B θα είναι υποσύνολο του A . Αυτό συμβολίζεται ως

$$B \subseteq A \quad (1.4)$$

Και διαβάζεται: “το B είναι υποσύνολο του A ”. Αν τουλάχιστον ένα στοιχείο του A δεν ανήκει στο B , τότε το B είναι γνήσιο υποσύνολο του A και συμβολίζεται

$$B \subset A \quad (1.5)$$

Αν τώρα, κάθε στοιχείο του B ανήκει και στο A , και κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B έτσι ώστε $B \subseteq A$ και $A \subseteq B$, τότε

$$A = B \quad (1.6)$$

Αν τα σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, τότε ονομάζονται ξένα ή αλληλοαποκλειόμενα.

Παράδειγμα 1.1

Σε αυτό το παράδειγμα, εφαρμόζουμε τους ορισμούς για τους οποίους κάναμε λόγο πιο πάνω. Θεωρούμε τα σύνολα $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Sigma T$ και Z όπως ορίζονται ακολούθως.

$A = \{\text{αριθμοί που εμφανίζονται στις πλευρές ενός ζαριού}\}$

$B = \{x \mid x \text{ περιττός αριθμός με } 1 \leq x \leq 6\}$

$\Gamma = \{x \mid x \text{ πραγματικός και } x \geq 1\}$

$\Delta = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$E = \{1, 3, 5\}$

$\Sigma T = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$Z = \{0\}$

Λύση

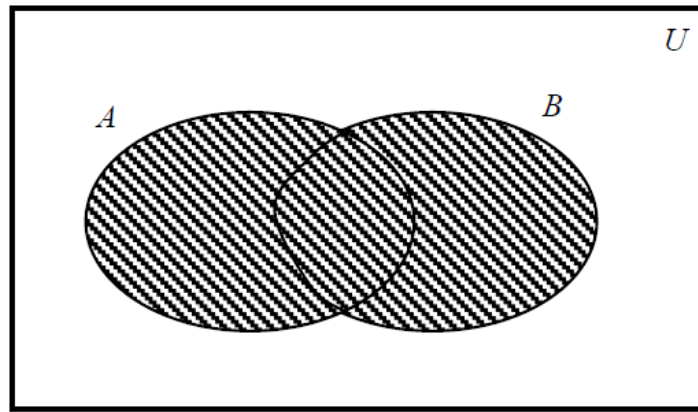
Επισημαίνουμε ότι τα σύνολα A και B μπορούν να γραφούν και ως $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $B = \{1, 3, 5\}$. Τα σύνολα A, B, Δ, E, Z είναι μετρήσιμα και πεπερασμένα. Το ΣT είναι μετρήσιμο αλλά μη πεπερασμένο. Αφού τα στοιχεία του συνόλου A είναι οι αριθμοί που αναπαριστούνται στις πλευρές ενός ζαριού, και το πρόβλημα που εξετάζεται (παιχνίδι τύχης) είναι οι αριθμοί στις πλευρές του ζαριού, τότε το A είναι στην πραγματικότητα το καθολικό σύνολο U .

$A \subset \Sigma T$, $B \subset \Sigma T$, $\Delta \subset \Sigma T$, και $E \subset \Sigma T$. $B \subset A$ και $E \subset A$. Αν $B \subseteq E$ και $E \subseteq B$, τότε $E = B$. Δ και E είναι αμοιβαία αποκλειόμενες. Σημειώστε ότι το Z δεν είναι το κενό σύνολο, αλλά ένα σύνολο με το μηδενικό στοιχείο. Το κενό σύνολο είναι ένα υποσύνολο όλων των συνόλων. Εάν το καθολικό σύνολο έχει n στοιχεία, τότε υπάρχουν 2^n υποσύνολα. Στην περίπτωση του κυλιόμενου ζαριού, έχουμε $2^6 = 64$ υποσύνολα.

1.2.2 Διαγράμματα Venn και ορισμένοι νόμοι

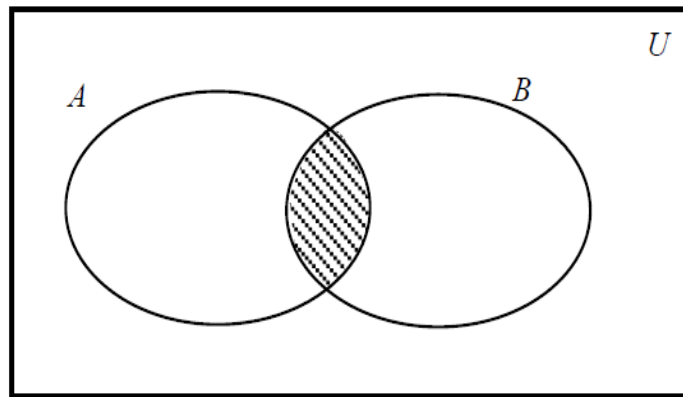
Με σκοπό να παρέχουμε μια γεωμετρική άποψη και μια οπτική σχέση μεταξύ των συνόλων, αναπαριστούμε αυτά με τη βοήθεια των διαγραμμάτων Venn. Το καθολικό σύνολο, U , αναπαριστάται με ένα ορθογώνιο, ενώ τα υπόλοιπα αναπαριστούνται από κύκλους ή άλλα γεωμετρικά στοιχεία.

Ένωση Σύνολο όλων των στοιχείων που είναι μέλη του A ή B ή και των δύο, και συμβολίζεται ως $A \cup B$. Αυτό φαίνεται στο διάγραμμα 1.1.



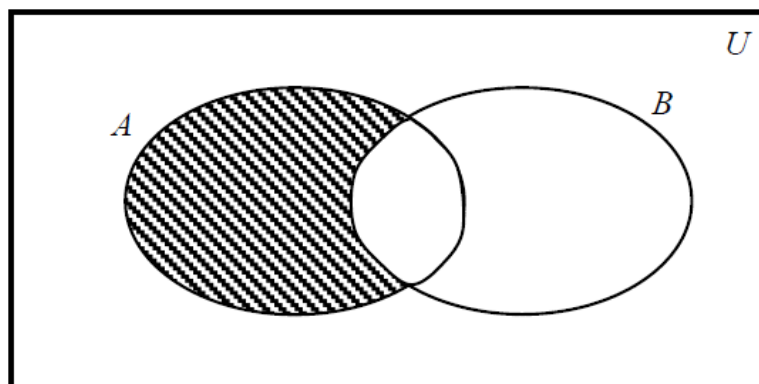
Διάγραμμα 1.1 Ένωση

Τομή Σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν τόσο στο A όσο και στο B και συμβολίζεται ως $A \cap B$. Αυτό φαίνεται στο διάγραμμα 1.2.



Διάγραμμα 1.2 Τομή

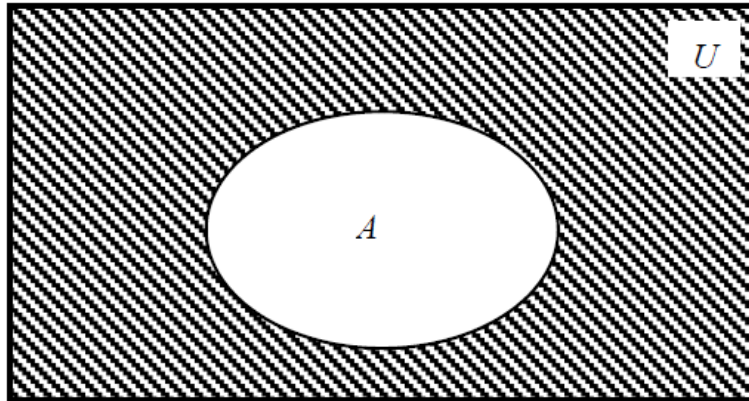
Διαφορά Σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B και συμβολίζεται ως $A - B$. Αυτό φαίνεται στο διάγραμμα 1.3.



Διάγραμμα 1.3 Διαφορά

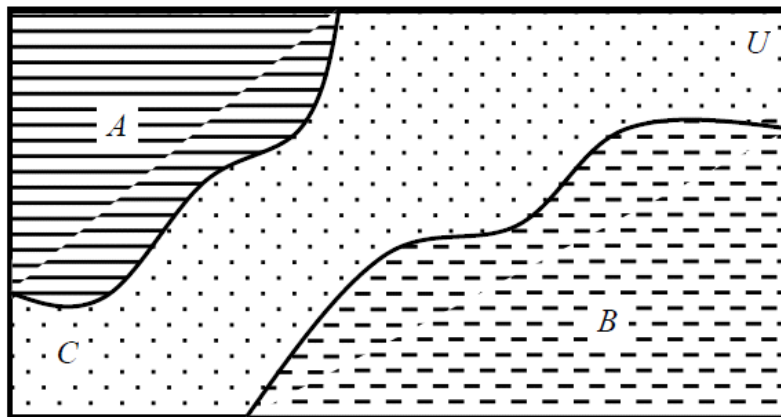
Συμπλήρωμα Το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του U τα οποία δεν είναι μέρος του A καλείται συμπλήρωμα του A και συμβολίζεται ως

$$P(\emptyset) = 0 \quad (1.15)$$



Διάγραμμα 1.4 Συμπλήρωμα

Διαχώρισμα Ένα σύνολο από αμοιβαία αποκλειόμενα σύνολα τα οποία καλύπτουν ολόκληρο το υπερσύνολο U απαρτίζουν έναν διαχώρισμα. Αυτό φαίνεται στο διάγραμμα 1.5.



Διάγραμμα 1.5 Διαχώρισμα

Καρτεσιανό Γινόμενο Το καρτεσιανό γινόμενο δυο συνόλων A και B , συμβολίζεται , είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζεύγων όπου το πρώτο στοιχείο ανήκει στο σύνολο A και το δεύτερο στοιχείο στο σύνολο B . Έτσι, αν το σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ και το σύνολο $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B = \{(\alpha_1, b_1), (\alpha_1, b_2), \dots, (\alpha_1, b_m), (\alpha_2, b_1), (\alpha_2, b_2), \dots, (\alpha_2, b_m), \dots, (\alpha_n, b_1), (\alpha_n, b_2), \dots, (\alpha_n, b_m)\}$. Πρέπει να επισημανθεί ότι το Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ γενικά δεν είναι το ίδιο με το $B \times A$.

Κάποιοι Νόμοι και Θεωρήματα

1. Εάν τα A και B είναι σύνολα, τότε και τα $A \cup B$ και $A \cap B$ είναι σύνολα
2. Υπάρχει μόνο ένα σύνολο \emptyset και ένα καθολικό σύνολο U , τέτοια ώστε $A \cup \emptyset = A$ και $A \cap U = A$ για κάθε A .
3. Μεταθετική ιδιότητα: $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$.
4. Επαγωγική ιδιότητα: $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ και $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
5. Επιμεριστική ιδιότητα: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ και $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6. $A \cup \bar{A} = U$ και $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
7. Κανόνες De Morgan: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ και $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
8. Εάν $A = B$, τότε $\bar{A} = \bar{B}$. Εάν $A = B$ και $C = D$, τότε $A \cap C = B \cap D$ και $A \cup C = B \cup D$.
9. $\overline{\bar{A}} = A$

1.2.3 Βασικές Έννοιες Πιθανοτήτων

Αρχικά, η θεωρία των πιθανοτήτων αναπτύχθηκε για να χρησιμεύσει ως ένα μοντέλο των παιγνιδιών της τύχης, όπως ένα ρίξιμο ενός ζαριού, το στρίψιμο του τροχού της ρουλέτας, ή το μοίρασμα της τράπουλας. Αργότερα, αυτή η θεωρία αναπτύχθηκε για να μοντελοποιήσει επιστημονικά φυσικά πειράματα.

Γεφυρώνοντας τη θεωρία συνόλων και την έννοια της πιθανότητας, καλούμε το σύνολο όλων των πιθανών διαφορετικών εκβάσεων ενδιαφέροντος σε ένα συγκεκριμένο πείραμα, ως το δειγματοχώρο S . Ένα γεγονός είναι ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα ή ένας συνδυασμός αποτελεσμάτων. Σύμφωνα με τη θεωρία συνόλων, η έννοια μιας εκδήλωσης είναι υποσύνολο του δειγματοχώρου.

Εάν ένα βασικό πείραμα μπορεί να οδηγήσει σε N αμοιβαία αποκλειόμενα και ισοπίθανα αποτελέσματα, και αν είναι τα πιθανά αποτελέσματα στην επέλευση του γεγονότος A , τότε η πιθανότητα εκδήλωσης του A ορίζεται από

$$\text{probability of } A = \frac{N_A}{N} \quad (1.7)$$

Ωστόσο, ο πιο διαδεδομένος ορισμός για τους μηχανικούς είναι ένας δεύτερος ο οποίος είναι γνωστός ως *σχετική συχνότητα*. Εάν ένα πείραμα επαναλαμβάνεται n φορές υπό τους ίδιους όρους, και αν είναι ο αριθμός των εμφανίσεων του αποτελέσματος A , τότε η πιθανότητα A , $P(A)$, ορίζεται από

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (1.8)$$

Σημειώστε ότι στο δεύτερο ορισμό, ο οποίος βασίζεται σε πείραμα, η έννοια των ισοπίθανων γεγονότων δεν είναι απαραίτητη, αλλά στην πράξη το n είναι πεπερασμένο. Εξαιτίας της φύσης της, η έννοια της πιθανότητας έχει επίσης έναν υποκειμενικό ορισμό, ο οποίος είναι, ο βαθμός εμπιστοσύνης σε ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα ενός συγκεκριμένου πειράματος, ή σε μία συγκεκριμένη κατάσταση στο δειγματοχώρο. Η υποκειμενική θεωρία των πιθανοτήτων, όπως αντιμετωπίζεται από τον De Finetti^[1], λύνει την έλλειψη σύνθεσης του ορίου της «σχετικής συχνότητας» και τον συνδυαστικό περιορισμό της «αναλογίας των αποτελεσμάτων».

Επισημοποιώντας την έννοια της απόκτησης ενός αποτελέσματος που βρίσκεται σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο του δειγματοχώρου S σαν έναν ορισμό της πιθανότητας.

Ορισμός Δωθέντων ενός δειγματοχώρου S και ενός γεγονότος A , μια συνάρτηση πιθανότητας, $P(\cdot)$, σχετίζει στο γεγονός A έναν πραγματικό αριθμό, τέτοιον ώστε:

1. $P(A) \geq 0$ για κάθε γεγονός A ,
2. $P(S) = 1$,
3. Εάν υπάρχουν μετρήσιμα γεγονότα A_1, A_2, \dots, A_n αμοιβαία αποκλειόμενα ($A_i | A_j = \emptyset, i \neq j$), τότε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Παράδειγμα 1.2

Θεωρούμε το πείραμα δύο εξαέδρων ζαριών και ότι κάθε ζάρι έχει στις πλευρές του τους αριθμούς από 1 μέχρι 6. Το σύνολο αποτελεσμάτων, S , σε αυτήν την περίπτωση θα είναι

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Θεωρούμε πως το γεγονός A είναι το «το άθροισμα είναι 7», το γεγονός B είναι το «το ένα ζάρι δείχνει άρτιο αριθμό και το άλλο περριττό». Τα A και B είναι τα

$$A = \{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{ccc} (2,1) & (4,1) & (6,1) \\ (1,2) & (3,2) & (5,2) \\ (2,3) & (4,3) & (6,3) \\ (1,4) & (3,4) & (5,4) \\ (2,5) & (4,5) & (6,5) \\ (1,6) & (3,6) & (5,6) \end{array} \right\}$$

Μπορούμε να δούμε ότι η πιθανότητα γεγονότων A, B, A|B και να είναι $P(A) = 6/36$, $P(B) = 18/36 = 1/2$, $P(A|B) = P(A) = 1/6$, και $P(\bar{A}) = 30/36 = 5/6$.

Το παράδειγμα 1.2 μας δείχνει το γεγονός ότι η καταμέτρηση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία πιθανοτήτων. Ωστόσο, καθώς ο αριθμός των πιθανών αποτελεσμάτων καθίσταται μεγάλη, η διαδικασία καταμέτρησης καθίσταται πολύ δύσκολη, και έτσι μπορεί να είναι απαραίτητο να οι καταμετρήσεις να διαιρούνται σε έναν αριθμό βημάτων, όπως φαίνεται στην ακόλουθη ενότητα.

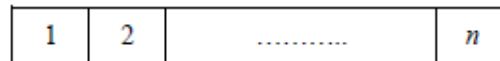
1.2.4 Μέθοδοι Καταμέτρησης

Μία στρατηγική καταμέτρησης είναι η διαίρεση μιας εργασίας σε μία πεπερασμένη ακολουθία από μικρότερες εργασίες, έτσι ώστε ο αριθμός των μεθόδων για την εκτέλεση μιας συγκεκριμένης εργασίας να μην εξαρτάται από τις προηγούμενες εργασίες στην αλληλουχία. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν μέθοδοι για να γίνει το βήμα 1, και για κάθε μέθοδο του βήματος 1, υπάρχουν τρόποι για να γίνει το βήμα 2. Για κάθε μέθοδο εκτέλεσης των βήμα 1 και βήμα 2, υπάρχουν μέθοδοι για να εκτελεστεί το βήμα 3, και ούτω καθεξής μέχρι το βήμα k. Στη συνέχεια, ο αριθμός μεθόδων για την εκτέλεση της διαδικασίας είναι . Το κλασσικό παράδειγμα αυτής της αρχής είναι η εύρεση του αριθμού των μεθόδων να γραφεί μία 5-ψήφια λέξη. Η λέξη είναι η 2 2 2 2 2. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν = 26 μέθοδοι για το στάδιο 1, = 26 τρόποι για το στάδιο 2, και ούτω καθεξής, μέχρι να έχουμε την 5-ψήφια λέξη. Ο συνολικός αριθμός των εν λόγω μεθόδων είναι $26^5 = 11,881,376$ μέθοδοι. Σημειώστε ότι εάν δεν μπορεί να επαναληφθεί κάποιο γράμμα, τότε για το βήμα 1 έχουμε όλα τα 26 γράμματα του αλφαβήτου. Για το βήμα 2, ωστόσο, θα υπάρχουν 25 μέθοδοι, μέχρι το βήμα 5 με $n_5=22$. Ο αριθμός των πιθανών λέξεων γίνεται τώρα $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7,893,600$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε r διακριτά αντικείμενα (σωματίδια) τα οποία πρέπει να τοποθετηθούν σε n υποδοχές. Από το διάγραμμα 1.6, παρατηρούμε ότι έχουμε r τρόπους για την τοποθέτηση των αντικειμένων στην πρώτη υποδοχή. Μετά την επιλογή του πρώτου αντικειμένου, υπάρχουν r-1 τρόποι τοποθέτησης ενός αντικειμένου στην δεύτερη υποδοχή, και ούτω καθεξής μέχρι την υποδοχή r, η οποία θα γεμίζεται με n-r+1 τρόπους. Ετσι, ο συνολικός αριθμός των τρόπων εισαγωγής r αντικειμένων σε n υποδοχές είναι $n(n-1)\dots(n-r+1)$. Αυτό ονομάζεται παραλλαγές ή ρυθμίσεις των r αντικειμένων μεταξύ n και συμβολίζεται ${}_n P_r$, η οποία μπορεί να γραφεί ως

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (1.9)$$

Σημειώστε ότι αν το $r=n$, δηλαδή, έχουμε παραλλαγές των n διαφορετικών αντικειμένων από n , στη συνέχεια, μετά το 1 είναι γεμάτο, με το ίδιο σκεπτικό όπως και πριν, έχουμε n τρόπους για να γεμίσει η υποδοχή 1. Μετά την υποδοχή 1 έχουμε $(n-1)$ τρόπους για να γεμίσουμε την υποδοχή 2, και ούτω καθεξής, μέχρι την n -οστή υποδοχή η οποία μπορεί να συμπληρωθεί με έναν μόνο τρόπο. Τότε, ${}_n P_n = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$.



Διάγραμμα 1.6 Οι υποδοχές

Η αντικατάσταση του $R=n$ στην (1.9) έχει ως αποτέλεσμα $0!=1$ η οποία είναι αποδεκτή σύμβαση και συμπεραίνουμε πως οι πιθανές αντιμεταθέσεις n αντικειμένων ισούται με $n!$. Σημειώνετε ότι στην περίπτωση που συζητήθηκε παραπάνω η σειρά διάταξης των αντικειμένων είναι σημαντική ωστόσο όταν η σειρά δεν έχει κάποια σημασία αλλά το πρόβλημα πάντα απαριθμεί το πλήθος των τρόπων επιλογής R αντικειμένων από συνολικά n , τότε δεν μιλάμε για αντιμεταθέσεις αλλά συνδυασμούς. Λόγου χάρη αν έχουμε $n=3$ αντικείμενα a, b, c και επιλέξουμε $R=2$ αντικείμενα δίχως να δίνουμε σημασία στην διάταξη οι πιθανές περιπτώσεις είναι ab, ac, bc . Σημειώνουμε σε αυτή την περίπτωση ότι το ab και το ba είναι ο ίδιος συνδυασμός. Ο συνολικός αριθμός συνδυασμών R αντικειμένων από σύνολο n δίδεται από

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!} \quad (1.10)$$

Ο συμβολισμός

$$\binom{n}{r} = {}_n C_r$$

μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί. Οι αριθμοί

$$\binom{n}{r}$$

καλούνται διωνυμικοί συντελεστές. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad (1.11)$$

και

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad (1.12)$$

Εάν τα n αντικείμενα δεν είναι όλα ξεχωριστά έτσι ώστε n_1 είναι ενός είδους, n_2 ενός αλλού και ούτω κάθε εξής μέχρις ότου n_k να ανήκουν σε έναν τύπο k όπου $n_1+n_2+n_k+K$ τότε το πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων αυτών των n αντικειμένων δίδεται από τον

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \Lambda \binom{n-n_1-n_2-K-n_{k-2}}{n_{k-1}} = \frac{n!}{n_1! n_2! K n_k!} \quad (1.13)$$

Οι αριθμοί που ορίζονται στην (1.13) είναι γνωστοί ως πολυονυμικοί συντελεστές και μπορούνε επίσης να συμβολιστούν ως ${}_n P_{n_1, n_2, K, \dots, n_k}$. Θα λύσουμε κάποια παραδείγματα εφαρμόζοντας διαφορετικές στρατηγικές μετρήσεων.

Παράδειγμα 1.3 (δενδρικό διάγραμμα)

Το δοχείο A περιέχει πέντε κόκκινες και δυο άσπρες μπάλες. Το δοχείο B περιέχει τρεις κόκκινες και δυο άσπρες. Ένα δοχείο επιλέγεται τυχαία και δύο μπάλες τραβιόνται διαδοχικά χωρίς επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας. Κάθε δοχείο θεωρείται να έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής.

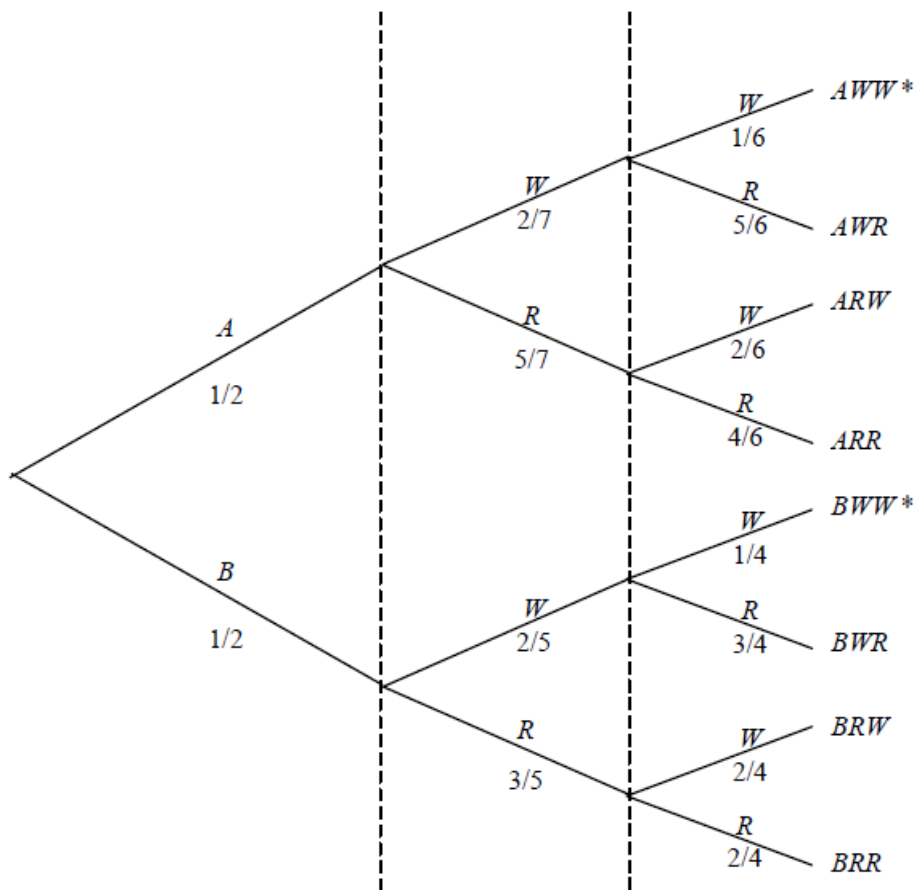
- α) σχεδιάστε το δενδρικό διάγραμμα
- β) ποιά η πιθανότητα επιλογής δυο άσπρων μπάλων

Λύση

α) το πείραμα αποτελείται από την επιλογή δοχείου και το τράβηγμα δυο μπάλων από το δοχείο που επιλέχθηκε. Σημειώνουμε επίσης ότι το μέγεθος δείγματος αλλάζει ύστερα από το τράβηγμα της πρώτης μπάλας με αποτέλεσμα τα γεγονότα να μην είναι ανεξάρτητα. Επειδή το μέγεθος δείγματος είναι μικρό, εισάγουμε την έννοια ενός δενδρικού διαγράμματος σε αυτό το παράδειγμα. Το όλο πείραμα με όλες τις πιθανές εκβάσεις φαίνονται στο σχήμα (1.7), όπου R εννοούμε τράβηγμα κόκκινης και W τράβηγμα άσπρης μπάλας.

β) παρατηρούμε ότι οι δυο διακλαδώσεις AWW και BWW σημειώνονται με * είναι οι πιθανές περιπτώσεις να τραβήξουμε δυο άσπρες μπάλες έτσι,

$$P(2W) = \frac{1}{2} \frac{2}{7} \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \frac{2}{5} \frac{1}{4} = \frac{1}{42} + \frac{1}{20} = 0.0738$$



Διάγραμμα 1.7 Δενδρικό διάγραμμα

Παράδειγμα 1.4

Ένα δοχείο αποτελείται από πέντε κόκκινες τρεις πράσινες τέσσερις μπλε και δυο άσπρες μπάλες. Ποια η πιθανότητα επιλογής ενός μεγέθους δείγματος έξι μπάλων που να περιέχει δυο κόκκινες μια πράσινη δυο μπλε και μια άσπρη μπάλα ;Σε αυτή την περίπτωση ,η πιθανότητα δίδεται από

$$\frac{\binom{5}{2} \binom{3}{1} \binom{4}{2} \binom{2}{1}}{\binom{14}{6}} = 0.080$$

Παράδειγμα 1.5

Ένα κουτί περιέχει δέκα μαύρες και δεκαπέντε άσπρες μπάλες .Τραβάμε τυχαία μια μπάλα κάθε φορά ,σημειώνουμε το χρώμα της και επανατοποθετούμε την μπάλα στο κουτί για το επόμενο τράβηγμα.

α) βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άσπρη μπάλα να τραβηχτεί στην τρίτη προσπάθεια

β)βρείτε την πιθανότητα η δεύτερη και τρίτη άσπρη μπάλα να τραβηχτούν στην πέμπτη και όγδοη προσπάθεια αντίστοιχα.

Λύση

α) σημειώνουμε ότι τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα από την στιγμή που η μπάλα επανατοποθετείται στο κουτί και έτσι ο δειγματοχώρος δεν αλλάζει. Συμβολίζουμε ως B το τράβηγμα μαύρης και W το τράβηγμα άσπρης μπάλας. Ο συνολικός αριθμός μπάλων στον δειγματοχώρο είναι 25. Έτσι έχουμε

1^ο προσπάθεια → B

2^ο προσπάθεια → B

3^ο προσπάθεια → W

Έτσι,

$$\begin{aligned} P(\text{first white ball drawn in the 3rd draw}) &= \frac{\binom{10}{1} \binom{10}{1} \binom{15}{1}}{\binom{25}{1} \binom{25}{1} \binom{25}{1}} \\ &= \left(\frac{10}{25}\right)^2 \left(\frac{15}{25}\right) = 0.096 \end{aligned}$$

Για να περιγράψουμε το πείραμα όπου η δεύτερη και τρίτη άσπρη μπάλα τραβιόνται στην πέμπτη και όγδοη προσπάθεια κάνουμε το εξής

$\left. \begin{array}{l} \text{1η προσπάθεια} \\ \text{2η προσπάθεια} \\ \text{3η προσπάθεια} \\ \text{4η προσπάθεια} \end{array} \right\} 1W \text{ και } 3B, \text{ υπάρχουν τέσσερις τρόποι να καταλήξουμε σε}$

αυτό: $\binom{4}{1} = \frac{4}{1!3!} = 4$

5^η προσπάθεια → W (η δεύτερη άσπρη)

6^η προσπάθεια → B

7^η προσπάθεια → B

8^η προσπάθεια → W (η τρίτη άσπρη)

Σημειώνουμε ότι το εκτός και το έβδομο τράβηγμα θα πρέπει να είναι μαύρη μπάλα. Έτσι υπολογίζοντας την πιθανότητα έχουμε

$$P = 4 \left(\frac{15}{30}\right) \left(\frac{10}{30}\right)^3 \left[\left(\frac{15}{30}\right) \left(\frac{10}{30}\right)^2 \left(\frac{15}{30}\right) \right] = 0.00206$$

1.2.5 Ιδιότητες, πιθανότητες υπό όρους και ο κανόνας του Bayes

Τώρα που έχουμε ορίσει την έννοια της πιθανότητας μπορούμε να δηλώσουμε κάποιες βασικές πιθανότητες.

1) για κάθε γεγονός A η πιθανότητα είναι μεταξύ 0 και 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1.14)$$

2) Η πιθανότητα του κενού είναι μηδέν

$$P(\emptyset) = 0 \quad (1.15)$$

3) Εάν \bar{A} είναι το συμπλήρωμα του A τότε

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (1.16)$$

4) Εάν A και B είναι δυο γεγονότα τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1.17)$$

5) Εάν ο δειγματοχώρος αποτελείται από n αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα έτσι ώστε $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, τότε

$$P(S) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 \quad (1.18)$$

Πιθανότητες υπό όρους και ανεξάρτητα γεγονότα

Έστω A και B δυο γεγονότα έτσι ώστε $P(B) > 0$.

Η πιθανότητα του γεγονότος B δεδομένου ότι συνέβη το A είναι

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1.19)$$

$P(A|B)$ είναι η πιθανότητα το A να συμβεί δεδομένου ότι το B συνέβη. Ονομάζεται πιθανότητα υπό όρους του A δεδομένου B. Οσοδήποτε αν η εμφάνιση του γεγονότος B δεν επηρεάζει το A τότε λέμε ότι τα A και B είναι ανεξάρτητα γεγονότα. Σε αυτή την περίπτωση

$$P(A|B) = P(A) \quad (1.20)$$

το οποίο είναι ισοδύναμο ύστερα από αντικατάσταση της (1.20) στην (1.19) με το

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (1.21)$$

Για οποιαδήποτε τρία γεγονότα A_1, A_2, A_3 έχουμε

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \quad (1.22)$$

Αν τα τρία γεγονότα είναι ανεξάρτητα τότε θα πρέπει να είναι ανεξάρτητα κατά ζεύγη

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad i \neq j \quad \text{and} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.23)$$

και

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \quad (1.24)$$

Σημειώνεται ότι τόσο η (1.23) όσο και η (1.24) πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι τα A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα.

Κανόνας του Bayes

Αν έχουμε n αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα A_1, A_2, \dots, A_n η ένωση των οποίων είναι ο δειγματοχώρος S , $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ τότε για κάθε γεγονός A , ο κανόνας του Bayes λέει ότι

$$P(A_k | A) = \frac{P(A_k \cap A)}{P(A)} \quad (1.25)$$

όπου

$$P(A_k \cap A) = P(A_k)P(A | A_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.26)$$

εφόσον $P(A | A_k) = P(A_k | A) / P(A_k)$ και η συνολική πιθανότητα του A ορίζεται ως

$$P(A) = P(A | A_1)P(A_1) + P(A | A_2)P(A_2) + \dots + P(A | A_n)P(A_n) \quad (1.27)$$

Παράδειγμα 1.6

Μια πηγή ψηφιακών επικοινωνιών μεταδίδει σύμβολα από 0 και 1 ανεξάρτητα με πιθανότητα 0.6 και 0.4 αντίστοιχα μέσω του ίδιου καναλιού θορύβου. Στον δεκτή δεχόμαστε σύμβολα 0 και 1 αλλά με την πιθανότητα ότι οποιοδήποτε σύμβολο παραμορφώθηκε στο κανάλι = 0.2. Ποια η πιθανότητα στο δέκτη να εμφανιστεί μηδενικό;

Λύση

Θεωρούμε την πιθανότητα να μεταδόθηκε μηδέν $P(0) = 0.6$ και την πιθανότητα να μεταδόθηκε ένα $P(1) = 0.4$. Η πιθανότητα κάποιο σύμβολο να παραμορφώθηκε είναι 0.2. Αυτή είναι δηλαδή η πιθανότητα στον δεκτή να έχουμε 1 και να μεταδόθηκε 0 και η πιθανότητα στον δέκτη να έχουμε 0 και να μεταδόθηκε 1 είναι $P(\text{λήψη } 0 | \text{αποστολή } 1) = P(\text{λήψη } 1 | \text{αποστολή } 0) = 0.2$

έτσι η πιθανότητα στον δεκτή να έχουμε μηδενικό είναι $P(\text{λήψη μηδενικού}) = P(0 | 1)P(1) + P(0 | 0)P(0) = (0.2)(0.4) + (0.8)(0.6) = 0.56$

Παράδειγμα 1.7

Μία μπάλα τραβιέται τυχαία από κουτί που περιέχει επτά άσπρες, τρεις κόκκινες και έξι πράσινες μπάλες.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα η μπάλα που θα τραβηχτεί να είναι (1) άσπρη (2) κόκκινη (3)πράσινη (4) όχι κόκκινη και (5) κόκκινη η άσπρη
 β)Τρεις μπάλες επιλέγονται διαδοχικά από το κουτί αντί για μια. Βρείτε την πιθανότητα να επιλεχθούν κατά σειρά κόκκινη, άσπρη,πράσινη εάν κάθε μπάλα (1) επανατοποθετείτε στο κουτί μετά από κάθε επιλογή και (2) δεν επανατοποθετείτε

Λύση

Έστω W,R και G συμβολίζουνε τα γεγονότα λήψης άσπρης,κόκκινης,πράσινης μπάλας αντίστοιχα. Ο συνολικός αριθμός μπάλων στον δειγματοχώρο είναι $7+3+6=16$.

α)

$$1.P(W) = 7/16 = 0.4375$$

$$2.P(R) = 3/16 = 0.1875$$

$$3.P(G) = 6/16 = 3/8 = 0.375$$

$$4.P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - 3/16 = 13/16 = 0.8125$$

$$5.P(\text{κόκκινη ή άσπρη}) = P(R \cup W) = P(R) + P(W) - P(R \cap W)$$

Εφόσον τα γεγονότα R και W είναι αμοιβαία αποκλειόμενα τότε $P(R \cap W) = 0$, και

$$P(R \cup W) = P(R) + P(W) = \frac{7+3}{16} = \frac{10}{16} = 0.625$$

β) Σε αυτή την περίπτωση η διάταξη γίνεται ένας παράγοντας. Έστω τα γεγονότα R_1, W_2 και G_3 αναπαριστούν τα «κόκκινη στην πρώτη», «άσπρη στην δεύτερη», και «πράσινη στην τρίτη» αντίστοιχα.

1.Εφόσον κάθε μπάλα επανατοποθετείται πριν το επόμενο τράβηγμα ,ο δειγματοχώρος δεν αλλάζει και έτσι τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα. Από την (1.24) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap W_2 \cap G_3) &= P(R_1) P(W_2 | R_1) P(G_3 | R_1 \cap W_2) \\ &= P(R_1) P(W_2) P(G_3) \\ &= \left(\frac{3}{16}\right) \left(\frac{7}{16}\right) \left(\frac{3}{8}\right) = 0.0308 \end{aligned}$$

2. Όταν η μπάλα επανατοποθετείται πριν το επόμενο τράβηγμα ο δειγματοχώρος αλλάζει και έτσι τα γεγονότα είναι εξαρτημένα. Έχουμε

$$P(R_1 \cap W_2 \cap G_3) = P(R_1) P(W_2 | R_1) P(G_3 | R_1 \cap W_2)$$

αλλά $P(W2|R1) = 7 / (7 + 2 + 6) = 7 / 15 = 0.467$

και

$P(G3| R1 \cap W2) = 6 / (6 + 2 + 6) = 3/7$ άρα $P(R1 \cap W2 \cap G3) = 0.0375$

Παράδειγμα 1.8

Σε τρία δοχεία βρίσκονται μπάλες όπως φαίνεται στον πίνακα 1.1. Ένα πείραμα αποτελείται από τυχαία επιλογή δοχείου καταρχάς και επιλογή μιας μπάλας από το δοχείο αυτό στην συνέχεια. Κάθε δοχείο θεωρείται ότι έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής

α) Ποια η πιθανότητα να επιλέξεις άσπρη μπάλα δεδομένου ότι το δοχείο A έχει επιλεγεί

β) Αν επιλεγεί άσπρη μπάλα ποια η πιθανότητα να προέρχεται από το δοχείο B

Balls	Urn A	Urn B	Urn C	Totals
Red	5	3	6	14
Green	6	3	2	11
White	2	4	1	7
Totals	13	10	9	32

Λύση

α) Δεδομένου ότι το δοχείο A επιλέγεται μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ότι τραβιέται άσπρη μπάλα είναι

$$P(W|Urn A) = \frac{2}{13} = 0.1538$$

β) Σε αυτή την περίπτωση θέλουμε να υπολογίσουμε την εξαρτημένη πιθανότητα επιλογής του δοχείου B δεδομένου ότι τραβήχτηκε άσπρη μπάλα η οποία είναι $P(Urn B|Urn A)$. Άρα

$$P(Urn B|W) = \frac{P(Urn B \cap W)}{P(W)}$$

Η εξαρτημένη πιθανότητα να τραβήξουμε άσπρη μπάλα δεδομένου ότι το δοχείο B έχει επιλεγεί δίδεται από

$$P(W|Urn B) = \frac{P(W \cap Urn B)}{P(Urn B)}$$

Όμως

$$P(W \cap Urn B) = P(W|Urn B)P(Urn B)$$

$$\Rightarrow P(Urn B|W) = \frac{P(W|Urn B)P(Urn B)}{P(W)}$$

Όπου $P(1W)$ είναι η συνολική πιθανότητα να τραβήξεις άσπρη μπάλα. Έτσι

$$P(1W) = P(1W | \text{Urn A})P(\text{Urn A}) + P(1W | \text{Urn B})P(\text{Urn B}) + P(1W | \text{Urn C})P(\text{Urn C}) = \frac{2}{13} \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \frac{1}{3} = 0.2217$$

$P(1W | \text{Urn B})P(\text{Urn B}) = (4/10)(1/3) = 0.133$ και τότε $P(\text{Urn B} | 1W) = 0.6013$

1.3 Τυχαίες Μεταβλητές

Ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή ως μια πραγματική συνάρτηση όπου αντιστοιχά τα στοιχεία του δειγματοχώρου S σε σημεία των πραγματικών αξόνων. Παρατηρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή δεν είναι ούτε τυχαία αλλά ούτε και μεταβλητή αλλά μια συνάρτηση έτσι το όνομα της είναι παραπλανητικό. Η τυχαία μεταβλητή αναπαριστάται με ένα κεφαλαίο γράμμα (X, Y, Z, \dots), και κάθε μια πραγματική τιμή της τυχαίας μεταβλητής συμβολίζεται με ένα πεζό γράμμα (x, y, z, \dots). Εφόσον θα χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις παλμού και συναρτήσεις βήματος για να χαρακτηρίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές, πρώτα θα εισάγουμε τις έννοιες των συναρτήσεων παλμού και βήματος και στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τους τρεις διαφορετικούς τύπους τυχαίων μεταβλητών- διακριτές, συνεχείς και μεικτές.

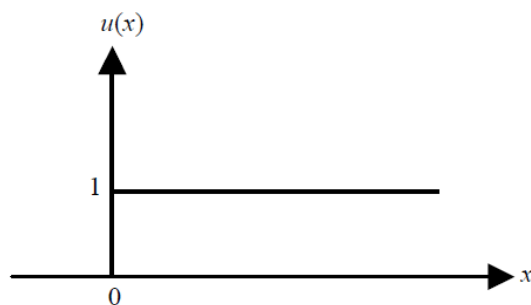
1.3.1 Συναρτήσεις βήματος και παλμού

Η μοναδιαία συνάρτηση βήματος η οποία παρουσιάζεται στο διάγραμμα 1.8, ορίζεται ως

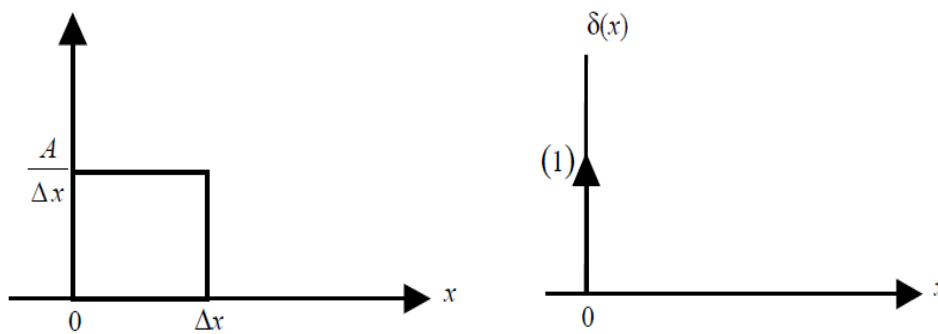
$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Η συνάρτηση βήματος ύψους A στο σημείο $x=x_0$ συμβολίζεται ως

$$Au(x-x_0) = \begin{cases} A, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases} \quad (1.29)$$



Διάγραμμα 1.8 Συνάρτηση βήματος



**Διάγραμμα 1.9 Τετραγωνική συνάρτηση παλμού και
Διάγραμμα 1.10 Μοναδιαία συνάρτηση παλμού**

Θεωρούμε την τετραγωνική συνάρτηση η οποία αναπαριστάται στο διάγραμμα 1.9 με την περιοχή $(A/\Delta x)\Delta x=A$. Στο όριο $\Delta x \rightarrow 0$, το πλάτος του παλμού τείνει μηδέν και το ύψος στο άπειρο. Ωστόσο η περιοχή παραμένει σταθερή και ίση με ένα. Έτσι η συνάρτηση μοναδιαίου παλμού (ένας παλμός με μοναδιαία περιοχή) φαίνεται στο διάγραμμα 1.10 και συμβολίζεται με $\delta(x)$. Ένας παλμός περιοχής A στο σημείο $x=x_0$ συμβολίζεται με $A\delta(x-x_0)$. Σημειώνουμε ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης μοναδιαίου παλμού είναι η συνάρτηση βήματος και ότι η συνάρτηση παλμού είναι η παραγωγός της συνάρτησης βήματος. Μια σημαντική ιδιότητα της συνάρτησης παλμού είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \delta(x-x_0) f(x) dx = A f(x_0) \quad (1.30)$$

1.3.2 Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Εάν μια τυχαία μεταβλητή X μπορεί να πάρει τιμές μόνο από ένα πεπερασμένο ή άπειρο μετρήσιμο σύνολο μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_n , τότε η X θα λέμε ότι είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή. Εάν διασύνδεουμε κάθε αποτέλεσμα x_i με ένα αριθμό $P(x_i)=P(X=x_i)$, ονομάζεται πιθανότητα του x_i ο αριθμός $P(x_i)$ ορισμένες φορές συμβολιζόμενος και ως P_i για απλούστευση, $i=1,2,\dots$, θα πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

$$P(x_i) \geq 0 \text{ για όλα τα } i \quad (1.31)$$

Και

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1 \quad (1.32)$$

Έτσι η πιθανότητα κάθε τιμής όπου το X μπορεί να λάβει πρέπει να είναι μη αρνητική και το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των διαφορετικών τιμών πρέπει να είναι ίσο με 1. Εάν X είναι μια τυχαία μεταβλητή τότε η συνάρτηση κατανομής της η αλλιώς αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ΑΣΚ) ορίζεται ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) \text{ for all } x \quad (1.33)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΠ) μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής η οποία λαμβάνει x_1, x_2, \dots . Είναι $P(x_1), P(x_2), \dots$. Όπου $P(x_i) = P(X=x_i)$, $i=1, 2, \dots$ σε περίπτωση παραπάνω της μιας τυχαίας μεταβλητής ορίζουμε ως ΣΠΠ μιας συγκεκριμένης μεταβλητής X σαν ένα δείκτη X στο P σαν $P_x(x)$

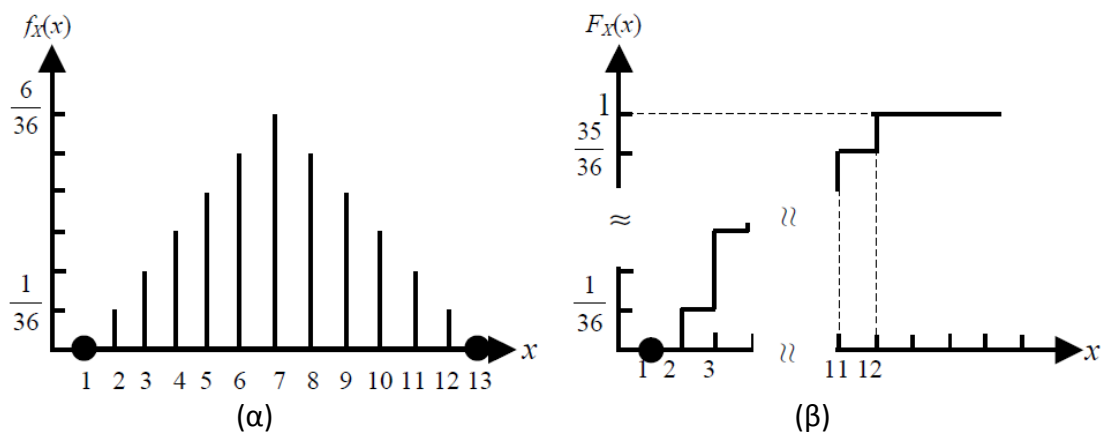
Παράδειγμα 1.9

Θεωρούμε το πείραμα ρίψεως δυο ζαριών. Έστω X αναπαριστά τον συνολικό αριθμό που εμφανίζεται στην πάνω πλευρά των ζαριών. Ποια η πιθανότητα το X να είναι μεταξύ 4 και 6 συμπεριλαμβανόμενων και αυτών; Υπολογίστε $P(X \geq 5)$. Σχεδιάστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και την συνάρτηση κατανομής του X .

Λύση

Εφόσον τα πιθανά γεγονότα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα $P(4 \leq X \leq 6) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$, όπου $P(X = 4) = 1/12$, $P(X = 5) = 1/9$ και $P(X = 6) = 5/36$. Έτσι $P(4 \leq X \leq 6) = 12/36 = 0.3333$. Χρησιμοποιώντας την (1.16) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - [P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)] = 5/6 = 0.8333$

Η συνάρτηση πυκνότητας και κατανομής της X απεικονίζονται στα διάγραμμα 1.11(α,β) αντίστοιχα.



Διάγραμμα 1.11 α) Συνάρτηση πυκνότητας β) Συνάρτηση κατανομής της X

Η συνάρτηση πυκνότητας της X γράφεται ως

$$f_X(x) = \frac{1}{36} [\delta(x-2) + 2\delta(x-3) + 3\delta(x-4) + 4\delta(x-5) + 5\delta(x-6) + 6\delta(x-7) + 5\delta(x-8) + 4\delta(x-9) + 3\delta(x-10) + 2\delta(x-11) + \delta(x-12)]$$

1.3.3 Συνεχής τυχαίες μεταβλητές

Η X καλείται Συνεχής τυχαία μεταβλητή εάν η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad (1.34)$$

όπου $f_X(x)$ είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Εξ ορισμού η $f_X(x)$ πρέπει να ικανοποιεί την

$$f_X(x) \geq 0 \text{ for all } x \quad (1.35)$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (1.36)$$

$f_X(x)$ συχνά καλείται και συνάρτηση πυκνότητας.

Παράδειγμα 1.10

α) Βρείτε την σταθερά c έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

να είναι συνάρτηση πυκνότητας

β) υπολογίστε την $P(1 < X < 2)$

γ) βρείτε την συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$

Λύση

α) η $f_X(x)$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση για το δοθέν εύρος του x . Για να είναι η $f_X(x)$ συνάρτηση πυκνότητας θα πρέπει να βρεθεί η σταθερά c έτσι ώστε

$$\int_0^3 cx dx = 1$$

υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα βρίσκουμε ότι $c=2/9$, και έτσι η συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$ η οποία φαίνεται στο διάγραμμα 1.12 α είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

β)

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \left(\frac{2}{9}\right)x dx = \frac{1}{3} = 0.3333$$

γ) για $0 \leq x < 3$

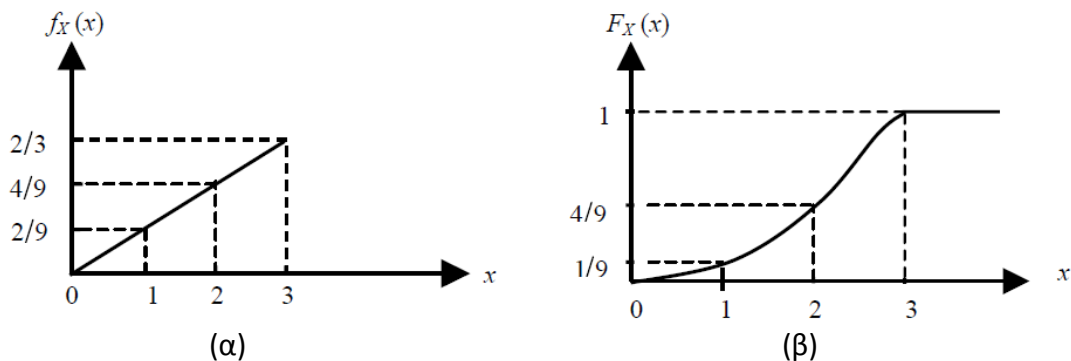
$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u) du = \frac{x^2}{9}$$

και $F_X(x)=1$ για $x \geq 3$. Έτσι η συνάρτηση κατανομής η οποία φαίνεται στο διάγραμμα 1.12β θα είναι

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας μπορεί να υπολογισθεί απευθείας από την συνάρτηση κατανομής απλά υπολογίζοντας την παραγωγό της, δηλαδή

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (1.37)$$



Διάγραμμα 1.12 α) συνάρτηση πυκνότητας β) συνάρτηση κατανομής της X

Όπου

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Αυτή είναι μια ιδική περίπτωση του κανόνα του Leibniz. Για διαφοροποίηση ενός ολοκληρώματος το οποίο είναι

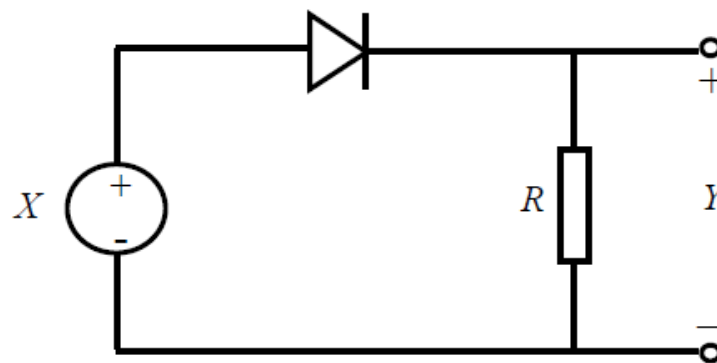
$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} F(u, x) du = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F}{\partial x} du + F[b(x), x] \frac{db(x)}{dx} - F[a(x), x] \frac{da(x)}{dx} \quad (1.38)$$

και έτσι

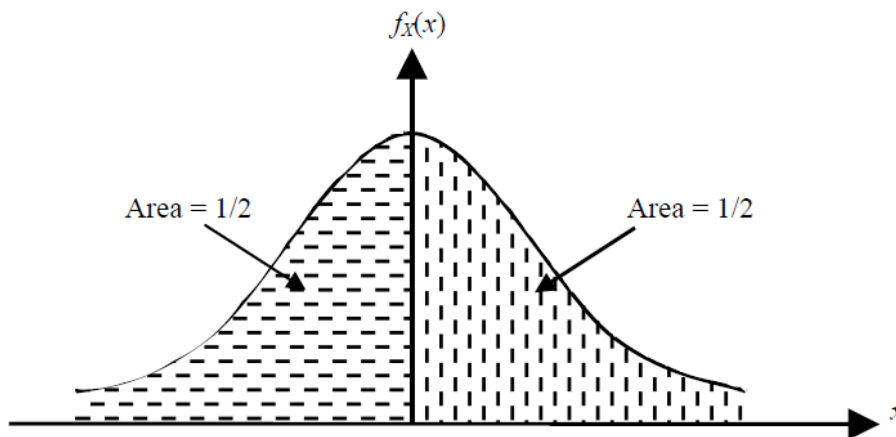
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(u) du = f(x) \quad (1.39)$$

1.3.4 Μεικτές τυχαίες μεταβλητές

Οι πιο σημαντικές τυχαίες μεταβλητές οι οποίες συναντώνται στην πράξη είναι είτε διακριτές είτε συνεχείς. Ωστόσο μια μεικτή τυχαία μεταβλητή μπορεί να συναντηθεί σε πρακτικά προβλήματα. Η συνάρτηση πυκνότητας της έχει και παλμούς που αναπαριστούν πιθανότητες των πιθανών αριθμών x_1, x_2, \dots, x_n και ένα συνεχές τμήμα για κάποιο διάστημα έστω $\alpha < x < \beta$. Ένας καλός τρόπος να παρουσιάσουμε μια μεικτή τυχαία μεταβλητή είναι να θεωρήσουμε το κύκλωμα του ανορθωτή ημίσεως κύματος το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα 1.13 α, όπου X είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ η οποία φαίνεται στο διάγραμμα 1.13 β.



(α)



(β)

Διάγραμμα 1.13 α) Κύκλωμα ανορθωτή ημίσεως κύματος και β) Συνάρτηση πυκνότητας του X

Η δίοδος θεωρείται ιδανική. Η έξοδος Y σχετίζεται με την είσοδο X με τον τύπο

$$Y = \begin{cases} X, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

έτσι

$$P(Y < 0) = 0, P(Y = 0) = \int_{-\infty}^{0} f_X(x) dx = 1/2$$

και

$$P(0 < Y < y) = P(0 \leq X \leq y)$$

κάθε $y > 0$. Έτσι η συνάρτηση πυκνότητας φαίνεται στο διάγραμμα 1.14. Αποτελείται από μια διακριτή τιμή στο σημείο μηδέν του $1/2$ και αναπαριστάται από ένα παλμό, και μια συνεχή συνάρτηση για $x > 0$, έτσι ώστε η περιοχή κάτω από την καμπύλη είναι επίσης $1/2$. Έχουμε δηλαδή

$$\int_0^{\infty} f_Y(y) dy = 1 = P(0 \leq Y < \infty) \quad (1.41)$$

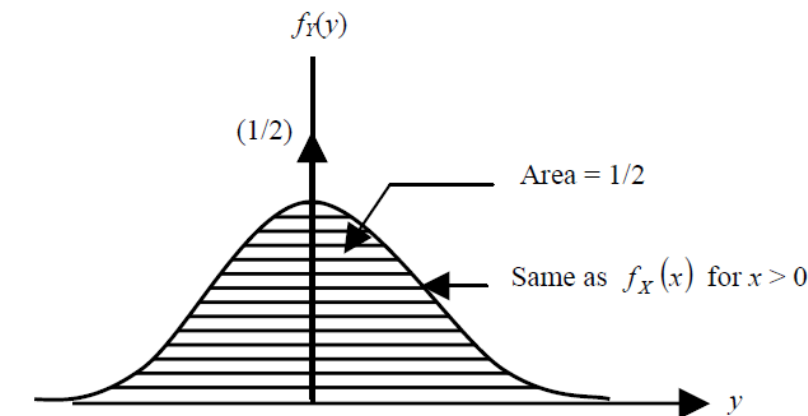
το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη (1.36), άρα

$$\int_{0^+}^{\infty} f_Y(y) dy = \frac{1}{2} = P(0 < Y < \infty) \quad (1.42)$$

1.4 Ροπές

1.4.1 Προσδοκίες

Μια σημαντική έννοια στην θεωρία των πιθανοτήτων και της στατιστικής είναι η μαθηματική προσδοκία, η προσδοκώμενη τιμή, η μέση τιμή, η στατιστικός μέσος μιας τυχαίας μεταβλητής X .



Διάγραμμα 1.14 Συνάρτηση κατανομής της εξόδου Y

Η προσδοκώμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής συμβολίζεται με $E[X]$ ή X ή m_x . Εάν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_n , τότε οι προσδοκώμενη τιμή της X ορίζεται ως

$$E[X] = \sum_x x P(X = x) = \sum_x x P(x) \quad (1.43)$$

όπου το άθροισμα βρίσκεται από όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η X . Ομοίως, για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με την συνάρτηση κατανομής $f_x(x)$, η προσδοκώμενη της X ορίζεται ως

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (1.44)$$

Παράδειγμα 1.11

Βρείτε την προσδοκώμενη τιμή των πόντων στην πάνω έδρα κατά το ρίξιμο ενός αμερόληπτου ζαριού

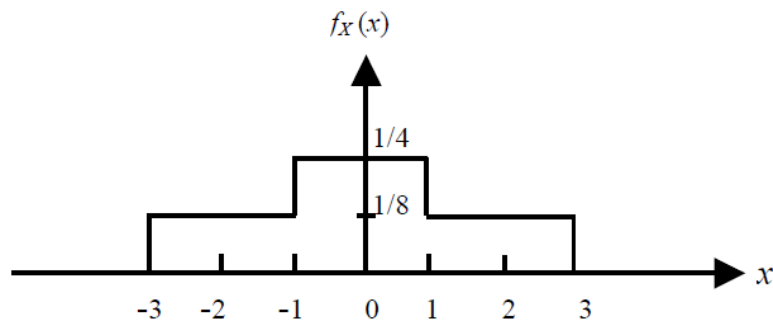
Λύση

Σε μια ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού, κάθε έδρα εμφανίζεται με πιθανότητα $1/6$. Έστω X οι πόντοι οι οποίοι εμφανίζονται στην πάνω έδρα του ζαριού. Τότε,

$$E[X] = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = 3.5$$

Παράδειγμα 1.12

Θεωρείστε την τυχαία μεταβλητή X με κατανομή η οποία φαίνεται στο διάγραμμα 1.15. Βρείτε την $E[X]$.



Διάγραμμα 1.15 Συνάρτηση κατανομής της X

Λύση

Χρησιμοποιώντας την (1.44), η προσδοκώμενη τιμή της X είναι

$$E[X] = \int_{-3}^{-1} x \frac{1}{8} dx + \int_{-1}^1 x \frac{1}{4} dx + \int_1^3 x \frac{1}{8} dx = 0$$

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Τότε, η συνάρτηση $g(X)$ είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή και η προσδοκώμενη τιμή της, $E[g(X)]$, θα είναι

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (1.45)$$

Η εξίσωση (1.45) είναι ένα σημαντικό θεώρημα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία.

Ιδιότητες

1. εάν η c είναι μια οποιαδήποτε σταθερά, τότε

$$E[cX] = c E[X] \quad (1.46)$$

2. εάν η συνάρτηση $g(X) = X^n$, $n=0,1,\dots$, τότε

$$E[g(X)] = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (1.47)$$

ονομάζεται η νιοστή προσδοκία της τυχαίας μεταβλητής X από την πηγή. Για $n=2$, βρίσκουμε την δεύτερη ροπή της X . Εξαιτίας της σημασίας της η δεύτερη ροπή της X ορίζεται ως

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \quad (1.48)$$

και καλείται τετραγωνική μέση τιμή .

Μια άλλη ποσότητα μεγάλης σημασίας είναι η κεντρική ροπή μέσου . Αυτή καλείται και διακύμανση ,συμβολίζεται σ_x^2 , και ορίζεται ως

$$\sigma_x^2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (1.49)$$

η ποσότητα σ_x , ονομάζεται τυπική απόκλιση .

Παράδειγμα 1.13

Βρείτε την διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής η οποία δίδεται στο παράδειγμα 1.12 .

Λύση

Ο μέσος βρέθηκε προηγουμένως στο παράδειγμα 1.12 ότι είναι μηδέν. Από την (1.48), η τετραγωνική μέση τιμή είναι

$$E[X^2] = 2 \left[\int_0^1 x^2 (1/4) dx + \int_1^3 x^2 (1/8) dx \right] = 7/3 = 2.3333$$

Εφόσον ο μέσος είναι μηδέν , η τετραγωνική μέση τιμή είναι απλά η διακύμανση $\sigma_x^2=7/3=2.33333$.

1.4.2 Στιγμαία συνάρτηση παραγωγής και χαρακτηριστική συνάρτηση

Η στιγμιαία συνάρτηση παραγωγής (MGF) $M_x(t)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως

$$M_x(t) = E[e^{tX}] \quad (1.50)$$

Εάν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με κατανομή πιθανότητας $P(x_i)=P(X=x_i)$, $i=1,2,K$, τότε

$$M_x(t) = \sum_x e^{tx} P_X(x) \quad (1.51)$$

Εάν X είναι συνεχή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F_x(x)$ τότε η MGF θα είναι

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_x(x) dx \quad (1.52)$$

Ένα καλό πλεονέκτημα της MGF είναι η δυνατότητα να παράγει τις ροπές . Θυμίζουμε ότι η σειρά McLaurin της συνάρτησης e^x θα είναι

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1.53)$$

Αυτή είναι μια συγκλίνουσα σειρά. Έτσι η e^{tx} μπορεί να εκφραστεί με σειρά ως

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \dots + \frac{(tx)^n}{n!} + \dots \quad (1.54)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η προσδοκώμενη τιμή του αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των προσδοκώμενων τιμών, μπορούμε να γράψουμε την MGF ως

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E[e^{tX}] = E\left[1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots + \frac{(tX)^n}{n!} + \dots\right] \\ &= 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \frac{t^3}{3!}E[X^3] + \dots + \frac{t^n}{n!}E[X^n] + \dots \quad (1.55) \end{aligned}$$

Εφόσον t θεωρείται μια σταθερά σε σχέση με τον συντελεστή προσδοκίας, παίρνοντας την παράγωγο της $M_x(t)$ ως προς t έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dM_x(t)}{dt} &= M'_x(t) = E[X] + \frac{2t}{2!}E[X^2] + \frac{3t^2}{3!}E[X^3] + \dots + \frac{nt^{n-1}}{n!}E[X^n] + \dots \\ &= E[X] + tE[X^2] + \frac{t^2}{2!}E[X^3] + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}E[X^n] + \dots \quad (1.56) \end{aligned}$$

Θέτοντας $t=0$, όλοι οι όροι γίνονται μηδέν εκτός από την $E[X]$. Έτσι έχουμε

$$M'_x(0) = E[X] \quad (1.57)$$

Ομοίως παίρνοντας την δεύτερη παράγωγο της $M_x(t)$ ως προς t και θέτοντας την ίση με το μηδέν, έχουμε

$$M''_x(0) = E[X^2] \quad (1.58)$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε όλες τις ροπές ότι είναι

$$M_x^{(n)}(0) = E[X^n] \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.59)$$

Όπου $M_x^{(n)}$ ορίζει την νιοστή παράγωγο της M_x του t ως προς t .

Αν ορίσουμε $t=j\omega$ όπου j είναι η φανταστική μονάδα, συνάρτηση παραγωγής ροπών, παίρνουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση έτσι έχουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση $E[e^{j\omega X}]$ και καλείται $\Phi_x(\omega)$ που είναι στην πραγματικότητα ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης πυκνότητας $f_x(x)$. Έπεται ότι

$$\Phi_x(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{j\omega x} dx \quad (1.60)$$

όπως προηγουμένως παραγωγίζοντας την $\Phi_x(\omega)$ n φορές ως προς ω και θέτοντας $\omega=0$ στην παράγωγο παίρνουμε την νιοστή ροπή του X ότι είναι

$$E[X^n] = (-j)^n \left. \frac{d^n \Phi_x(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} \quad (1.61)$$

όπου ρίζα $\sqrt{-j} = -1$. Ένας σημαντικός ρόλος της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι να μας δίνει την συνάρτηση πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής χρησιμοποιώντας

μετασχηματισμό Fourier .Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} \Phi_x(\omega) d\omega \quad (1.62)$$

Είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση σε σχέση με την συνάρτηση παραγωγής ροπών επειδή υπάρχει πάντα, σε αντίθεση με την συνάρτηση παραγωγής ροπών η οποία μπορεί να μην υπάρχει ωστόσο η συνάρτηση παραγωγής ροπών ,εξαιτίας την ύπαρξης του εκθετικού όρου ,μπορεί να υπάρχει για μια πιο ευρεία κλάση συναρτήσεων. Εάν X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, η χαρακτηριστική της συνάρτηση ορίζεται ως

$$m_{10} = E[X] = m_x \quad (1.63)$$

Παράδειγμα 1.14

Βρείτε την χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής X η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|}$$

για κάθε x.

Λύση

Από την (1.60), η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι

$$\Phi_x(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{j\omega x} e^{\frac{1}{2}x} dx + \int_0^{\infty} e^{j\omega x} e^{-\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{(0.5 + j\omega)} + \frac{1}{(0.5 - j\omega)} = \frac{4}{1 + 4\omega^2}$$

1.4.3 Άνω φράγμα πιθανοτήτων και ο νόμος των μεγάλων αριθμών

Συχνά όταν οι κατανομές δεν είναι πλήρως ορισμένες αλλά γνωρίζουμε την μέση τιμή και την διακύμανση μας ενδιαφέρει να διαπιστώσουμε κάποια όρια (άνω ή κάτω) στις πιθανότητες. Παρουσιάζουμε το «θαύμα» Chernoff, το οποίο θεωρείτε ως ένα πιο «αυστηρό» φράγμα από το φράγμα που ορίζει η ανίσωση Tchebycheff.

Ανίσωση Tchebycheff

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με μέσο m_x και διακύμανση σ_x^2 τότε για $\varepsilon > 0$ η ανίσωση Tchebycheff μας δίνει ότι

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2} \quad (1.64)$$

Επιλέγοντας $\varepsilon = k\sigma_x$, όπου k είναι μια σταθερά ,έχουμε

$$P(|X - m_x| \geq k\sigma_x) \leq \frac{1}{k^2} \quad (1.65)$$

ή ισοδύναμα ,

$$P(|X - m_x| \geq k) \leq \frac{\sigma_x^2}{k^2} \quad (1.66)$$

Φράγμα Chernoff

Σε αντίθεση με το φράγμα Tchebycheff, το οποίο περιέχει τις δυο πλευρές της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, το φράγμα Chernoff εφαρμόζεται στο ένα μέλος της συνάρτησης πυκνότητας, είτε στο διάστημα (ε, ∞) ή στο διάστημα $(-\infty, \varepsilon)$ ορίζουμε

$$Y = \begin{cases} 1 & , \quad X \geq \varepsilon \\ 0 & , \quad X < \varepsilon \end{cases} \quad (1.67)$$

Η προσδοκώμενη τιμή του Y είναι

$$E[Y] = 1 \cdot P(X \geq \varepsilon) \quad (1.68)$$

και για κάθε $t > 0$, θα πρέπει να είναι αληθές ότι

$$Y e^{t\varepsilon} \leq e^{tX} \quad (1.69)$$

τότε,

$$E[Y e^{t\varepsilon}] = e^{t\varepsilon} E[Y] \leq E[e^{tX}] \quad (1.70)$$

Αντικαθιστώντας την (1.68) στην (1.70) και αναδιατάσσοντας τους όρους παίρνουμε την

$$P(X \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} E[e^{tX}] \quad (1.71)$$

Το άνω φράγμα της (1.71) είναι το φράγμα Chernoff. Σημειώνεται ότι σε αυτή τη περίπτωση χρειάζονται περισσότερες πληροφορίες για την κατανομή ούτως ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το $E[e^{tX}]$.

Ομοίως αν οριστεί ότι βρίσκεται στο διάστημα $(-\infty, \varepsilon)$

Έτσι ώστε

$$Y = \begin{cases} 0 & , \quad X \geq \varepsilon \\ 1 & , \quad X < \varepsilon \end{cases} \quad (1.72)$$

Το φράγμα Chernoff δίνεται από την

$$P(X \leq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} E[e^{tX}] \quad (1.73)$$

Νόμος των μεγάλων αριθμών

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n είναι n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, κάθε μια από τις οποίες έχουν μέσο $E[X_i] = m_x$ και διακύμανση $\text{var}[X_i] = \sigma_x^2$ $i=1, 2, \dots, n$. Εάν $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ είναι το άθροισμα των n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m_x\right| \geq \varepsilon\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m_x\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad (1.74)$$

δεδομένο ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_x^2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (1.75)$$

Το θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας την ανισότητα Tchebycheff, και αναφέρεται ως ο αδύναμος νόμος των μεγάλων αριθμών. Με άλλα λόγια, το θεώρημα λέει πως η πιθανότητα ένας αριθμητικός μέσος (ο οποίος μπορεί να είναι και μια εκτίμηση) να διαφέρει από τον πραγματικό μέσο m_x περισσότερο από ε ($\varepsilon > 0$), είναι μηδέν όταν το n τείνει στο άπειρο. Ωστόσο εάν η πιθανότητα του

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(S_n/n) = m_x \right]$$

ισούται με ένα έχουμε τον αυστηρό νόμο των μεγάλων αριθμών.

1.5 Τυχαίες μεταβλητές δυο-και περισσότερων διαστάσεων

Σε προηγούμενες ενότητες ορίσαμε την έννοια μιας τυχαίας μεταβλητής και αλλά σχετικά θέματα όπως στατιστικοί μέσοι, συναρτήσεις παραγωγής ροπών και χαρακτηριστικές συναρτήσεις.

Συχνά, δεν μας ενδιαφέρει μόνο μια τυχαία μεταβλητή αλλά η σχέση μεταξύ δυο η και περισσότερων τυχαίων μεταβλητών. Θα γενικεύσουμε τις παραπάνω έννοιες για N τυχαίες μεταβλητές. Θα μας απασχολήσουν κυρίως συνεχείς τυχαίες μεταβλητές αφού οι κατάλληλες αλλαγές για την συνεχή ή μεικτή περίπτωση γίνονται εύκολα με αναλογία. Εάν X και Y είναι δυο τυχαίες μεταβλητές συνεχούς χρόνου, ορίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλούστερα από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της X και Y .

$$f_{XY}(x, y) \geq 0 \quad (1.76)$$

και

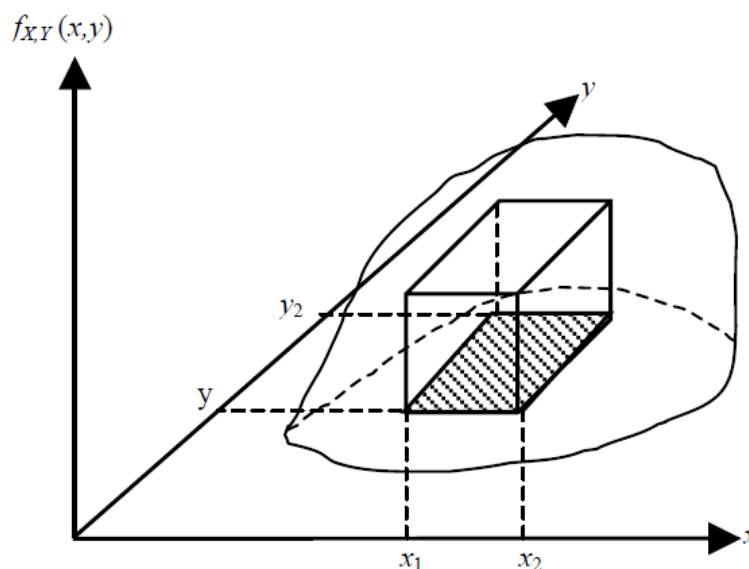
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1 \quad (1.77)$$

Γεωμετρικά η $f_{XY}(x,y)$ αναπαριστά μια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.16. Ο συνολικός όγκος που ορίζει αυτή η επιφάνεια και ο xy άξονας είναι μοναδιαίος, όπως φαίνεται στην (1.77). Η πιθανότητα του X να βρίσκεται μεταξύ του x_1 και x_2 και Y να βρίσκεται μεταξύ y_1 και y_2 , όπως φαίνεται στην σκιασμένη περιοχή του διαγράμματος 1.16, δίδεται από

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_{XY}(x, y) dx dy \quad (1.78)$$

Η από κοινού κατανομή του X και Y είναι η πιθανότητα των γεγονότων $\{X \leq x, Y \leq y\}$ η οποία δίνεται από

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{XY}(u, v) du dv \quad (1.79)$$



Διάγραμμα 1.16 δισδιάστατη συνάρτηση πυκνότητας

Η από κοινού κατανομή $F_{XY}(x,y)$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες

1. $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$
2. $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$
3. $F_{XY}(-\infty, -\infty) = F_{XY}(x, -\infty) = F_{XY}(-\infty, y) = 0$
4. $P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y) = F_{XY}(x_2, y) - F_{XY}(x_1, y) \geq 0$
5. $P(X \leq x, y_1 < Y \leq y_2) = F_{XY}(x, y_2) - F_{XY}(x, y_1) \geq 0$
6. $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2)$
 $= F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας μπορεί να εξαχθεί από την συνάρτηση κατανομής παραγωγίζοντας την $F_{XY}(x, y)$ ως προς x και y

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) \quad (1.80)$$

η οριακή συνάρτηση κατανομής της X , $F_X(x) = P(X \leq x)$, εξάγεται από την (1.79) ολοκληρώνοντας ως προς y για όλες τις δυνατές τιμές. Έτσι

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u, v) dv du \quad (1.81)$$

όμοιος η οριακή κατανομή του Y δίδεται από

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u, v) du dv \quad (1.82)$$

Αν γενικεύσουμε τις έννοιες της κατανομής και της συνάρτησης πυκνότητας για n τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n τότε η από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας θα είναι

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \quad (1.83)$$

και η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η νιοστή παραγωγός της (1.83) η οποία είναι

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.84)$$

1.5.1 Κατανομές υπό όρους

Η οριακή συνάρτηση πυκνότητα των τυχαίων μεταβλητών X και Y βρίσκονται παίρνοντας την παράγωγο των αντίστοιχων οριακών συναρτήσεων κατανομών $F_X(x)$ και $F_Y(y)$ που δίνονται στην (1.81) και (1.82). Χρησιμοποιώντας την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των X και Y οι οριακές συναρτήσεις $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ είναι

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad (1.85)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \quad (1.86)$$

Εάν οι οριακές συναρτήσεις κατανομής είναι γνωστές ,απλουστεύεται ο υπολογισμός των συναρτήσεων κατανομών υπό όρους. Σε πολλά προβλήματα μας ενδιαφέρει η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X δεδομένου ότι η τυχαία μεταβλητή Y παίρνει κάποια συγκεκριμένη τιμή, η ότι η τυχαία μεταβλητή Y βρίσκεται σε κάποιο διάστημα από y_1 έως y_2 .

Όταν μια τυχαία μεταβλητή παίρνει μια συγκεκριμένη μεταβλητή λέμε ότι έχουμε σημειακή προϋπόθεση για να διευκρινίσουμε αυτή την έννοια θεωρούμε την συνάρτηση κατανομής υπό όρους της τυχαίας μεταβλητής X δεδομένου ότι $y-\Delta y < Y \leq y+\Delta y$, όπου Δy είναι μια μικρή ποσότητα. Έτσι,

$$F_X(x | y - \Delta y < Y \leq y + \Delta y) = \frac{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} \int_{-\infty}^x f_{XY}(u, v) du dv}{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f_Y(v) dv} \quad (1.87)$$

στο όριο, όσο το Δy τείνει στο μηδέν και για κάθε y , έχουμε

$$F_X(x | Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^x f_{XY}(u, y) du}{f_Y(y)} \quad (1.88)$$

όπου $F_{XY}(x,y)$ είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των X και Y , και $F_Y(y)$ είναι η οριακή συνάρτηση πυκνότητας του Y . Διαφορίζοντας και τα δυο μέλη της (1.88) ως προς x , έχουμε

$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (1.89)$$

η οποία μπορεί επίσης να γραφτεί

$$f_X(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (1.90)$$

ομοίως μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$f_Y(y | x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \quad (1.91)$$

Στην προϋπόθεση διαστήματος η τυχαία μεταβλητή λαμβάνει ένα εύρος τιμών η συνάρτηση κατανομής υπό όρους του X δεδομένου ότι $y_1 < Y \leq y_2$ ορίζεται ως

$$F_X(x | y_1 < Y \leq y_2) = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \int_{-\infty}^x f_{XY}(u, y) du dy}{\int_{y_1}^{y_2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy} \quad (1.92a)$$

$$= \frac{F_{XY}(x, y_2) - F_{XY}(x, y_1)}{\int_{y_1}^{y_2} f_Y(y) dy} \quad (1.92b)$$

Εφόσον

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = f_Y(y)$$

είναι η οριακή συνάρτηση πυκνότητας της Y. Διαφορίζοντας ξανά και τα δυο μέλη της (1.92α) έχουμε

$$f_X(x | y_1 < Y \leq y_2) = \frac{\int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x, y) dy}{\int_{y_1}^{y_2} f_Y(y) dy} \quad (1.93)$$

ομοίως η συνάρτηση πυκνότητας υπό όρους της Y δεδομένου ότι $x_1 < X \leq x_2$ δίδεται από

$$f_Y(y | x_1 < X < x_2) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f_{XY}(x, y) dx}{\int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx} \quad (1.94)$$

όπου

$$\int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx = F_X(x_2) - F_X(x_1) \quad (1.95)$$

Αν X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε τα γεγονότα $\{X \leq x\}$ και $\{Y \leq y\}$, είναι ανεξάρτητα γεγονότα για κάθε x και y. Αυτό παράγει

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) P(Y \leq y) \quad (1.96)$$

η οποία είναι

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad (1.97)$$

ισοδύναμα

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (1.98)$$

όπου $F_X(x)$ και $F_Y(y)$ είναι οι οριακές συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y. Εάν η από κοινού συνάρτηση κατανομής ή η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας δεν μπορούν να γραφτούν σε μορφή γινομένου όπως δίδεται στην (1.97) και (1.98), τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες. Σημειώνουμε ότι εάν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες, χρησιμοποιώντας τις (1.97) και (1.98) θα έχουμε ότι

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

και

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

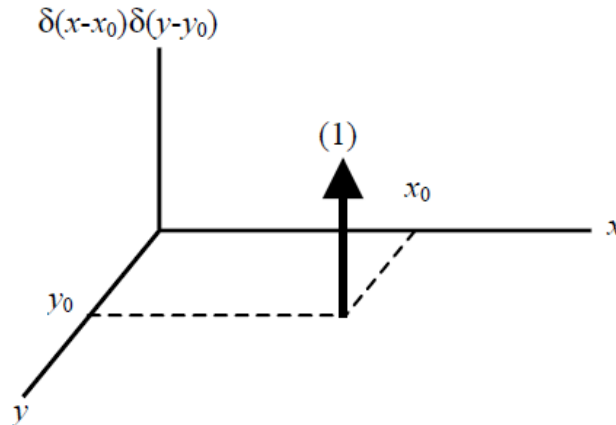
όπως αναμενόταν.

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να τροποποιηθούν κατάλληλα για διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές με τιμές $x_i, i=1,2,\dots,n$ και $y_j, j=1,2,\dots,m$ και έχουν πιθανότητες $P(X=x_i) = P(x_i) = P_i, i = 1, 2, \dots, n$ και $P(Y=y_j) = P(y_j) = P_j, j = 1, 2, \dots, m$ αντίστοιχα. Η από κοινού πιθανότητα των x_i και y_j , που συμβολίζονται ως $P(X=x_i, Y=y_j) = P(x_i, y_j) = P_{ij}$ δίδεται όπου

$$f_{XY}(x, y) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n P(x_i, y_j) \delta(x - x_i) \delta(y - y_j) \quad (1.99)$$

όπου $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ είναι η συνάρτηση παλμού όγκου ένα ο οποίος συμβαίνει στο σημείο $x=x_0$ και $y=y_0$, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.17. Σημειώνουμε ότι γράφουμε 1 σε παρένθεση για να δείξουμε ότι αναπαριστά όγκο και όχι ύψος. Βασιζόμενοι στις παρακάτω ιδιότητες των δισδιάστατων συναρτήσεων παλμού έχουμε

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) A \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx dy = A g(x_0, y_0)$$



Διάγραμμα 1.17 Δισδιάστατη συνάρτηση παλμού

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) A \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx = A g(x_0, y) \delta(y - y_0)$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) A \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dy = A g(x, y_0) \delta(x - x_0)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η οριακή συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f_X(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x_i, y) dy \quad (1.100)$$

Αντικαθιστώντας την (1.99) στην (1.100) και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες της δισδιάστατης συνάρτησης παλμού, έχουμε

$$\begin{aligned} f_X(x_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \delta(x - x_i) \delta(y - y_j) dy \\ &= [P(x_i, y_1) + P(x_i, y_2) + \dots + P(x_i, y_m)] \delta(x - x_i) \\ &= P(x_i) \delta(x - x_i) \end{aligned} \quad (1.101)$$

εφόσον

$$\sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) = P(x_i)$$

Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι

$$f_Y(y_j) = P(y_j) \delta(y - y_j) \quad (1.102)$$

Σημειώνουμε ότι η $F_X(x)$ θα αποτελείται ολόκληρη από j στην (1.99) και μας δίνει

$$f_X(x) = \sum_{j=1}^m P(y_j) \delta(y - y_j) \quad (1.103)$$

και $F_Y(y)$ θα είναι μόνο i και θα μας δίνει

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \delta(x - x_i) \quad (1.104)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας υπό όρους $f_X(x|y=y_j)$ δίδεται από

$$f_X(x|y=y_j) = \sum_{i=1}^n \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)} \delta(x - x_i) \quad (1.105)$$

και η συνάρτηση κατανομής υπό όρους, η οποία είναι το ολοκλήρωμα της (1.105), γίνεται

$$F_X(x|y=y_j) = \sum_{i=1}^n \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)} u(x - x_i) \quad (1.106)$$

όπου $u(x-x_i)$ είναι η μοναδιαία συνάρτηση βήματος έτσι ώστε $u(x-x_i)$ είναι ένα για $x \geq x_i$ και μηδέν αλλιώς. Η παραγωγός της μοναδιαίας συνάρτησης βήματος μας δίνει την μοναδιαία συνάρτηση παλμού όπου συζητήθηκε στην παράγραφο 1.3.1.

Παράδειγμα 1.15

Έστω X και Y δυο τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ and } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

α) επιβεβαιώστε ότι η $f_{XY}(x, y)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας

β) υπολογίστε τις οριακές συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$

γ) υπολογίστε $P(X > 1/2)$, $P(Y < X)$, και $P(Y < 1/2 | X < 1/2)$.

Λύση

α) για να είναι η τύπος συνάρτηση πυκνότητας θα πρέπει να ικανοποιεί την (1.76) και την (1.77). Το πρώτο επιβεβαιώνεται εύκολα ενώ για την δεύτερη απόδειξη θα πρέπει το ολοκλήρωμα για όλες τις θετικές τιμές του X και Y να είναι ένα. Αυτό σημαίνει

$$\int_0^2 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} y \right) dy = 1$$

β) οι οριακές συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y είναι εφαρμογές της (1.85) και (1.86), έτσι

$$f_X(x) = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy = 2x^2 + \frac{2}{3}x \quad \text{for } 0 < x < 1$$

και

$$f_Y(y) = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx = \frac{1}{6}y + \frac{1}{3} \quad \text{for } 0 < y < 2$$

γ) υπολογίζοντας τις διαφορετικές πιθανότητες έχουμε

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^1 f_X(x) dx = \int_{1/2}^1 \left(2x^2 + \frac{2}{3}x \right) dx = \frac{5}{6} = 0.8333$$

$$P(Y < X) = \int_0^1 \int_0^x \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy dx = \frac{7}{24} = 0.2917$$

$$P\left(Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(Y < \frac{1}{2}, X < \frac{1}{2}\right)}{P\left(X < \frac{1}{2}\right)}$$

έχουμε ήδη βρει ότι $P(X > 1/2)$ ισούται με $5/6$.

Έτσι $P(X < 1/2) = 1 - P(X > 1/2) = 1/6 = 0.1667$. Αρκεί λοιπόν να βρούμε το $P(Y < 1/2, X < 1/2)$ ο οποίος είναι

$$P\left(Y < \frac{1}{2}, X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx dy = \frac{5}{192} = 0.0260$$

Τελικά

Πίνακας 1.2 Από κοινού πιθανότητες των X και Y

Y	X	
	1	2
0	1/4	1/4
1	0	1/8
2	1/4	1/8

$$P\left(Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right) = \frac{5/192}{1/6} = \frac{5}{32} = 0.1563$$

Παράδειγμα 1.16

Έστω (X, Y) μια δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση από κοινού πυκνότητας πιθανότητας όπως ορίζεται στον πίνακα 1.2

- α) σχεδιάστε την $F_{XY}(x, y)$
- β) υπολογίστε την $F_X(1)$ και την $F_X(2)$
- γ) είναι η X και Y ανεξάρτητες

Λύση

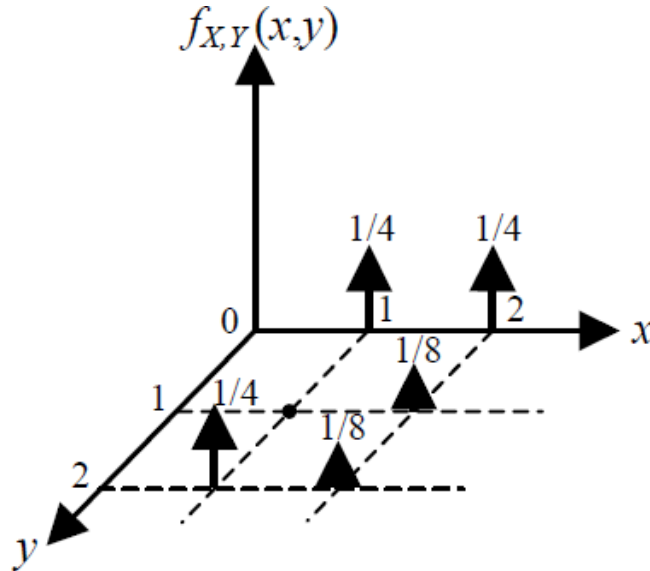
α) η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $F_{XY}(x, y)$ φαίνεται στο διάγραμμα 1.18. Σημειώνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$

β) από την (1.100) $F_X(1)$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλα τα y με $x=1$. Έχουμε

$$f_X(1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(1, y) dy = \frac{1}{4} \delta(x-1) + \frac{1}{4} \delta(x-1) = \frac{1}{2} \delta(x-1)$$

και $F_Y(2)$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλα τα x στο $y=2$. Έτσι



Διάγραμμα 1.18 από κοινού κατανομή της (X,Y)

$$f_Y(2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, 2) dx = \frac{1}{4} \delta(y-2) + \frac{1}{8} \delta(y-2) = \frac{3}{8} \delta(y-2)$$

γ) X και Y θα είναι ανεξάρτητα εάν $P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j)$ για όλα τα x_i και y_j . Σημειώνουμε ότι χρειαζόμαστε μόνο ένα αντιπαράδειγμα για να αποδείξουμε ότι η παραπάνω ταυτότητα δεν ικανοποιείτε. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της (β) βλέπουμε ότι $P(X=1, Y=2) = 1/4, P(X=1) = 1/2$, και $P(Y=2) = 3/8$.

Αφού $P(X=1, Y=2) = 1/4 \neq P(X=1)P(Y=2) = 3/16$, τότε X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

1.5.2 Προσδοκίες και συσχετίσεις

Έχουμε δει στην ενότητα 1.4 ότι εάν το X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$ τότε η προσδοκώμενη τιμή της $g(X)$ που είναι μια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X , είναι

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (1.107)$$

Η έννοια αυτή γενικεύεται εύκολα σε συναρτήσεις δυο τυχαίων μεταβλητών. Ειδικά, εάν X και Y είναι δυο τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{XY}(x, y)$, τότε

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy \quad (1.108)$$

Εάν έχουμε n συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών $g_1(X, Y), g_2(X, Y), \dots, g_n(X, Y)$, τότε

$$\begin{aligned} E[g_1(X, Y) + g_2(X, Y) + \dots + g_n(X, Y)] \\ = E[g_1(X, Y)] + E[g_2(X, Y)] + \dots + E[g_n(X, Y)] \end{aligned} \quad (1.109)$$

Ως εκ τούτου για την απλή περίπτωση του αθροίσματος δυο τυχαίων μεταβλητών X και Y, η προσδοκώμενη τιμή των αθροισμάτων των τυχαίων μεταβλητών είναι το άθροισμα των προσδοκώμενων τιμών της κάθε μιας. Συγκεκριμένα

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (1.110)$$

Η προσδοκώμενη τιμή του γινομένου των τυχαίων μεταβλητών X και Y, $E\{XY\}$, είναι γνωστό ως συσχέτιση, R_{xy} των X και Y. Η συσχέτιση μεταξύ των X και Y είναι στην πραγματικότητα μια ιδιαίτερη περίπτωση των από κοινού ροπών που ορίζονται

$$m_{k\lambda} = E[X^k Y^\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^\lambda f_{XY}(x, y) dx dy \quad (1.111)$$

Σημειώνουμε ότι η τάξη της ροπής είναι $n=k+\lambda$. Η συσχέτιση R_{xy} είναι η ροπή m_{11} τάξεως 2 με $k=1$ και $\lambda=1$. Είναι επίσης γνωστό ως ροπή δευτέρας τάξεως. Σημειώνουμε επίσης ότι αν το k είναι μηδέν ή αν το λ είναι μηδέν, τότε έχουμε την προσδοκώμενη τιμή μιας μονοδιάστατης τυχαίας μεταβλητής όπως οριστική στην (1.43).

$$m_{10} = E[X] = m_x \quad (1.112)$$

και

$$m_{01} = E[Y] = m_y \quad (1.113)$$

όπου m_x είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X και m_y είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y.

Η γενική φόρμα της κεντρικής ροπής δίδεται από

$$\begin{aligned} \mu_{k\lambda} &= E[(X - m_x)^k (Y - m_y)^\lambda] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^\lambda f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (1.114)$$

Όταν $k=2$ και $\lambda=0$ ή όταν $k=0$ και $\lambda=2$ τότε εξάγουμε τις διακυμάνσεις σ_x^2 και σ_y^2 των τυχαίων μεταβλητών X και Y αντίστοιχα. Ως εκ τούτου

$$\mu_{20} = E[(X - m_x)^2] = \sigma_x^2 \quad (1.115)$$

και

$$\mu_{02} = E[(Y - m_y)^2] = \sigma_y^2 \quad (1.116)$$

Όταν X και Y δεν είναι ανεξάρτητες συχνά προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τον «βαθμό συσχέτισης» μεταξύ X και Y μέσω κάποιων ουσιαστικών παραμέτρων. Αυτή η παράμετρος είναι ο συντελεστής συσχέτισης ο οποίος ορίζεται

$$\rho_{xy} = \frac{E[(X - m_x)(Y - m_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.117)$$

Όπου ρ_{xy} είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ X και Y, m_x είναι η μέση τιμή της X, m_y είναι η μέση τιμή της Y και σ_x και σ_y είναι οι τυπικές αποκλίσεις των X και Y αντίστοιχα. Ο βαθμός συσχέτισης ο οποίος είναι η τιμή του συντελεστή ρ , βρίσκεται μεταξύ του -1 και 1 συμπεριλαμβανομένων των ακρών

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (1.118)$$

Αν X και Y είναι ασυσχέτιστες, τότε η προσδοκώμενη τιμή του γινομένου του X και Y μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο των προσδοκώμενων τιμών. Έχουμε

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad (1.119)$$

Παρατηρούμε ότι $R_{xy}=E[X]E[Y]$ που σημαίνει ότι η ρ_{xy} στην (1.117) είναι μηδέν. Ο αριθμητής της (1.117) ο οποίος είναι

$$C_{xy} = E[(X - m_x)(Y - m_y)] \quad (1.120)$$

είναι γνωστός ως συνδιακύμανση των X και Y και γίνεται ίσος με το μηδέν. Παρατηρούμε ότι η συνδιακύμανση αντιστοιχεί στην δεύτερης τάξεως κεντρική ροπή για $k=\lambda=1$ το οποίο σημαίνει $\mu_{11}=C_{xy}$. Ο συντελεστής συσχέτισης μπορεί να γραφτεί με όρους συνδιακύμανσης ως

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.121)$$

Σημειώνουμε επίσης ότι η διακύμανση των $X+Y$ είναι το άθροισμα των διακυμάνσεων των X και Y , δηλαδή

$$\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] \quad (1.122)$$

ή,

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (1.123)$$

Θα πρέπει να τονισθεί ότι εάν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες, είναι και ασυσχέτιστες. Το ανάποδο δεν είναι αληθές. Εάν

$$E[XY] = 0 \quad (1.124)$$

τότε λέμε ότι X και Y είναι ορθογώνιες.

Όταν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες μπορούμε να ορίσουμε της υπό όρους προσδοκία της μιας τυχαίας μεταβλητής σε σχέση με την υπό όρους συνάρτηση πυκνότητας. Η υπό όρους προσδοκία της X δεδομένου ότι $Y=y$ ορίζεται από την

$$E[X|y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx \quad (1.125)$$

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι

$$E\{E[X|Y]\} = E[X] \quad (1.126)$$

και

$$E\{E[Y|X]\} = E[Y] \quad (1.127)$$

όπου

$$E[X|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|y] f_Y(y) dy \quad (1.128)$$

Σημειώνουμε ότι εάν η X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε $E[X|Y]=E[X]$ και $E[Y|X]=E[Y]$. Γενικά η προσδοκώμενη τιμή της συνάρτησης τυχαίων μεταβλητών X και Y δεδομένου ότι η X ισούται με μια τιμή x , δίδεται από την

$$E[g(X, Y)|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_Y(y|X=x) dy \quad (1.129)$$

όπου $f_Y(y|X=x) = f_{XY}(x, y)/f_X(x)$. Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα είναι

$$E\{E[g(X, Y)|X]\} = E[g(X, Y)] \quad (1.130)$$

1.5.3 Από κοινού χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Είδαμε στην παράγραφο 1.4.2 ότι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις παραγωγής ροπών είναι συναρτήσεις οι οποίες παράγουν ροπές τυχαίων μεταβλητών. Θα επεκτείνουμε τώρα την έννοια για περισσότερες από μια τυχαίες μεταβλητές. Η από κοινού χαρακτηριστική συνάρτηση δυο τυχαίων μεταβλητών X και Y ορίζεται ως

$$\Phi_{xy}(\omega_1, \omega_2) = E[e^{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} f_{XY}(x, y) dx dy \quad (1.131)$$

όπου ω_1 και ω_2 είναι πραγματικοί αριθμοί. $\Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2)$ είναι ο διπλός μετασχηματισμός Fourier της $f_{XY}(x, y)$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier θα είναι

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 x + \omega_2 y)} \Phi_{xy}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (1.132)$$

Οι οριακές χαρακτηριστικές συναρτήσεις παράγονται θέτοντας $\omega_1=0$ ή $\omega_2=0$ ως εκ τούτου

$$\Phi_{xy}(\omega_1, 0) = E[e^{j\omega_1 X}] = \Phi_x(\omega_1) \quad (1.133)$$

και

$$\Phi_{xy}(0, \omega_2) = E[e^{j\omega_2 Y}] = \Phi_y(\omega_2) \quad (1.134)$$

Εάν $g(X)$ είναι μια συνάρτηση του X και $h(Y)$ είναι μια συνάρτηση του Y τότε $g(X)$ και $h(Y)$ είναι ανεξάρτητες δεδομένου ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες. Ω αποτέλεσμα, η χαρακτηριστική συνάρτηση της $(X+Y)$ είναι το γινόμενο των επιμέρους χαρακτηριστικών συναρτήσεων των X και Y το οποίο είναι

$$\Phi_{x+y}(\omega) = E[e^{j\omega(X+Y)}] = E[e^{j\omega X}] E[e^{j\omega Y}] = \Phi_x(\omega) \Phi_y(\omega) \quad (1.135)$$

Η από κοινού χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με όρους της σειράς ώστε να εξαχθούν οι ροπές. Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} \Phi_{xy}(\omega_1, \omega_2) &= E[e^{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)}] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)\}^n}{n!}\right] \\ &= 1 + j\omega_1 m_x + j\omega_2 m_y - \frac{1}{2}\omega_1^2 E[X^2] - \omega_1\omega_2 E[XY] \\ &\quad - \frac{1}{2}\omega_2^2 E[Y^2] + \Lambda \end{aligned} \quad (1.136)$$

Η από κοινού ροπές $m_{k\lambda}$ μπορούν να εξαχθούν από την (1.136) και είναι

$$m_{k\lambda} = E[X^k Y^\lambda] = (-j)^{k+\lambda} \left. \frac{\partial^{k+\lambda} \Phi_{xy}(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^k \partial \omega_2^\lambda} \right|_{\omega_1 = \omega_2 = 0} \quad (1.137)$$

Παράδειγμα 1.17

Θεωρούμε την δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) , με από κοινού πυκνότητα

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy, & x \leq y \text{ and } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Βρείτε

α) την σταθερά k

β) $f_{X|Y}^{(X|Y)}$

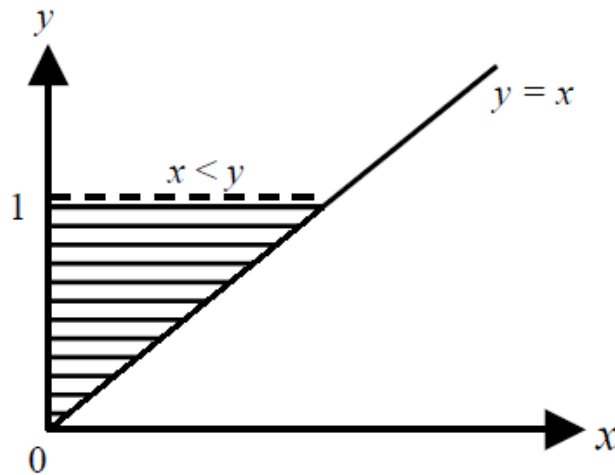
γ) $E[X|Y=y]$

Λύση

α) Για να βρούμε την σταθερά k επιλύουμε το ολοκλήρωμα της (1.77). Από το διάγραμμα (1.19) παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα που πρέπει να επιλύσουμε είναι το

$$\int_0^1 \int_0^y kxy \, dx \, dy = 1 \quad \Rightarrow \quad k=8$$

β) έχοντας ως στόχο να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό (1.90), πρέπει να καθορίσουμε την $f_Y(y)$



Διάγραμμα 1.19 Όρια της $f_{XY}(x,y)$

$$f_Y(y) = \int_0^y 8xy \, dx = 4y^3 \quad \text{for } 0 \leq y \leq 1$$

Ως εκ τούτου,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2}, & \text{for } 0 \leq x \leq y \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

γ)

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) \, dx = \int_0^y \frac{2x^2}{y^2} \, dx = \frac{2}{3}y.$$

Παράδειγμα 1.18

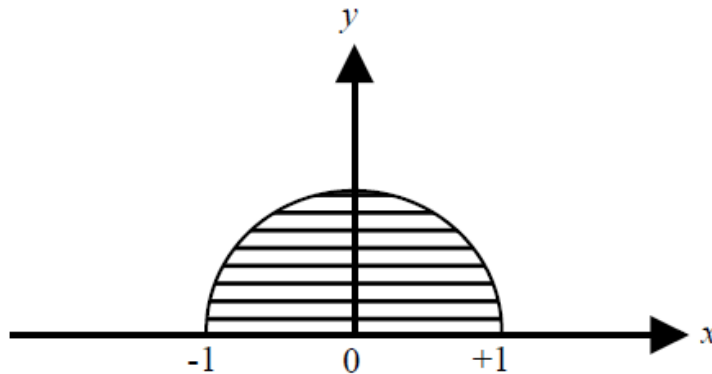
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της δισδιάστατη τυχαίας μεταβλητής (X,Y) μέσα στην περιοχή που φαίνεται στο διάγραμμα 1.20 δίδεται από

$$f_{XY}(x,y) = \frac{2}{\pi} \quad \text{for } x^2 + y^2 \leq 1$$

Βρείτε τον συντελεστή συσχέτισης ρ_{xy} μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών X και Y .

Λύση

Η έκφραση του ρ_{xy} δίδεται στην (1.117). Ως εκ τούτου, πρέπει να βρούμε τα $E[XY]$, $E[X]$, $E[Y]$, σ_x και σ_y . Χρησιμοποιώντας την (1.111) η προσδοκώμενη τιμή της XY είναι



Διάγραμμα 1.20 Πεδίο της $f_{xy}(x,y)$

Όπου ρ_{xy} είναι ο συντελεστής συσχέτισης των X και Y , m_x είναι η μέση τιμή του X , m_y είναι η μέση τιμή του Y και σ_x και σ_y είναι οι τυπικές αποκλίσεις των X και Y αντίστοιχα. Ο βαθμός συσχέτισης που είναι η τιμή του συντελεστή ρ , βρίσκεται μεταξύ -1 και $+1$ συμπεριλαμβανομένου των άκρων:

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (1.118)$$

Εάν X και Y είναι ασυσχέτιστες τότε η προσδοκώμενη τιμή του γινομένου των X και Y μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο των προσδοκώμενων τιμών. Έχουμε

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad (1.119)$$

Παρατηρούμε ότι $R_{xy} = E[X]E[Y]$ σημαίνει ότι η σ_{xy} στην (1.117) είναι μηδέν. Ο αριθμητής στην (1.117) δίδεται από

$$C_{xy} = E[(X - m_x)(Y - m_y)] \quad (1.120)$$

και είναι γνωστή ως συνδιακύμανση των X και Y , γίνεται ίσος με το μηδέν. Παρατηρούμε ότι η συνδιακύμανση αντιστοιχεί στην κεντρική ροπή δευτέρας τάξης με $k=\lambda=1$. Το οποίο είναι $\mu_{11} = C_{xy}$. Ο συντελεστής συσχέτισης μπορεί να γραφτεί με όρους της συνδιακύμανσης ως

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.121)$$

σημειώνουμε επίσης ότι η διακύμανση της $X+Y$ είναι ίση με το άθροισμα των διακυμάνσεων των X και Y .

$$\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] \quad (1.122)$$

ή

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (1.123)$$

Πρέπει να τονισθεί ότι εάν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες είναι και ασυσχέτιστες. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Εάν

$$E[XY] = 0 \quad (1.124)$$

τότε λέμε ότι X και Y είναι ορθογώνιες .

1.6.1 Συναρτήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής

Θεωρούμε το πρόβλημα του ορισμού της συνάρτησης πυκνότητας μια τυχαίας μεταβλητής Y όπου Y είναι μια συνάρτηση της X , $Y=g(X)$ και η συνάρτηση πυκνότητας της X ,είναι γνωστή ως $f_X(x)$. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $y=g(x)$ είναι μονοτονικά αύξουσα και διαφορίσιμη όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.21. Η συνάρτηση κατανομής της Y ως προς X είναι

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[X \leq g^{-1}(y)] \quad (1.138)$$

Όπου $g^{-1}(x)$ είναι ο ανάστροφος μετασχηματισμός . Εφόσον ξέρουμε την συνάρτηση πυκνότητας της X μπορούμε να γράψουμε ότι

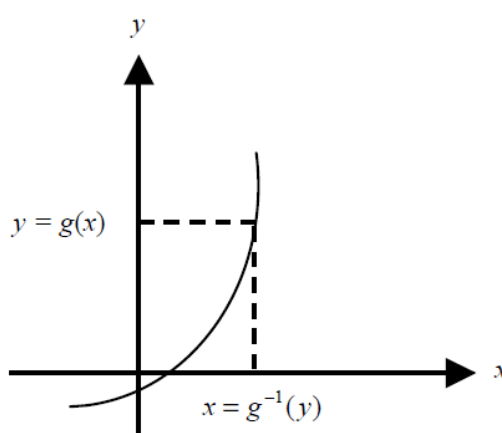
$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x) dx \quad (1.139)$$

Διαφορίζοντας και τα δυο μέλη της (1.139) ,καταλήγουμε

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \frac{d}{dy} [g^{-1}(y)] \quad (1.140)$$

Εάν η συνάρτηση g ήταν μονοτονικά φθίνουσα θα είχαμε

$$F_Y(y) = \int_{g^{-1}(y)}^{\infty} f_X(x) dx \quad (1.141)$$



Διάγραμμα 1.21 Συνάρτηση μονοτονίας της x

Και κατ' επέκταση

$$f_Y(y) = - f_X[g^{-1}(y)] \frac{d}{dy} [g^{-1}(y)] \quad (1.142)$$

Σε αυτή την περίπτωση ,η παράγωγος της $d[g^{-1}(y)]/dy$ είναι αρνητική .Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα της (1.141) και (1.142) ,η συνάρτηση πυκνότητας της Y δίδεται από την

$$f_Y(y) = |f_X[g^{-1}(y)]| \left\{ \frac{d}{dy} [g^{-1}(y)] \right\} \quad (1.143)$$

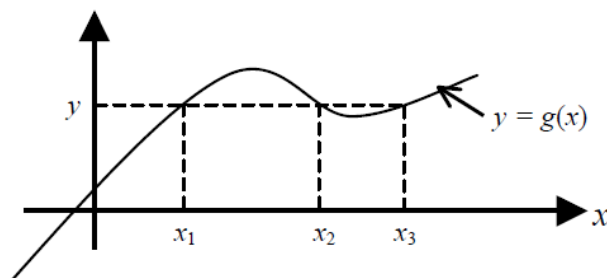
Το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί και για την περίπτωση όπου η συνάρτηση $g(x)$ έχει πολλές πραγματικές ρίζες x_1, x_2, K, x_n, K , όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.22. Σε

αυτή την περίπτωση η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y, Y=g(X)$, είναι

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} + \dots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|} \quad (1.144)$$

Όπου $f_X(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της X , και $x_i, i=1,2,\dots$, είναι εκφρασμένο ως προς y , $g'(x)$ είναι η παραγωγός της $g(x)$ ως προς x . Αυτό είναι γνωστό και ως *θεμελιώδες θεώρημα*. Μια ειδική περίπτωση του θεμελιώδους θεωρήματος είναι όταν $Y=aX+b$. Η συνάρτηση $y=g(x)=ax+b$ έχει μια ρίζα $x_1=(y-a)/b$. Η παράγωγος της $g(x)$ είναι η σταθερά a . $g'(x)=a$. Έτσι

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad (1.145)$$



Διάγραμμα 1.22 Συνάρτηση $y=g(x)$

Παράδειγμα 1.19

Εξακριβώστε αν η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής Y , όπου $Y=g(X)=aX^2$ δεδομένου ότι το a είναι θετικό και η συνάρτηση πυκνότητας της X είναι $f_X(x)$.

Λύση

Υπάρχουν δυο τρόποι για την επίλυση του προβλήματος, είτε εφαρμόζουμε απευθείας το θεμελιώδες θεώρημα είτε χρησιμοποιούμε παραγωγή ξεκινώντας από την συνάρτηση κατανομής. Θα υλοποιήσουμε και τις δυο μεθόδους και θα εξακριβώσουμε εάν τα αποτελέσματα συμφωνούν.

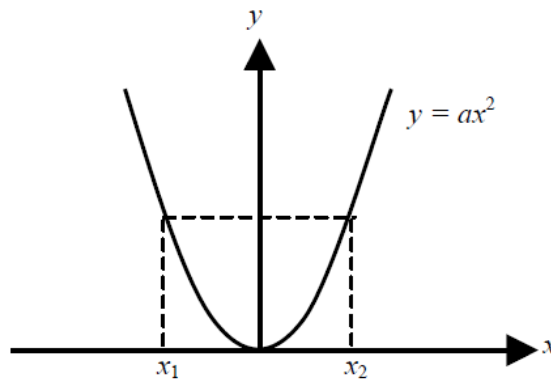
Μέθοδος 1. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.23, έχουμε δυο ρίζες $x_1 = -\sqrt{y/a}$ και $x_2 = +\sqrt{y/a}$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(-\sqrt{\frac{y}{a}} \leq X \leq +\sqrt{\frac{y}{a}}\right) = P\left(X \leq \sqrt{\frac{y}{a}}\right) - P\left(X \leq -\sqrt{\frac{y}{a}}\right) \\ &= F_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right) \end{aligned}$$

Διαφορίζοντας τα δυο μέλη της παραπάνω σχέσης καταλήγουμε στο

$$f_Y(y) = \frac{1}{2a\sqrt{y/a}} \left[f_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) + f_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right) \right], y > 0$$

Μέθοδος 2. Σε αυτή την μέθοδο χρησιμοποιούμε το θεμελιώδες θεώρημα. Έχουμε δυο ρίζες και κατά συνέπεια η συνάρτηση πυκνότητας της Y είναι



Διάγραμμα 1.23 Συνάρτηση $y=g(x)=ax^2$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$

Όπου $g'(x) = 2ax$, $x_1 = -\sqrt{y/a}$, και $x_2 = +\sqrt{y/a}$. Ως εκ τούτου $g'(x_1) = 2a(-\sqrt{y/a}) = -2\sqrt{ay}$, και $g'(x_2) = 2a(\sqrt{y/a}) = 2\sqrt{ay} \rightarrow$

$$f_Y(y) = \frac{f_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)}{2\sqrt{ay}} + \frac{f_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right)}{2\sqrt{ay}}$$

Και τα δυο αποτελέσματα συμφωνούν.

1.6.2 Συναρτήσεις δυο τυχαίων μεταβλητών

Θα δώσουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα για συγκεκριμένες ενέργειες. Το πρόβλημα είναι να εξακριβωθεί η συνάρτηση πυκνότητας της Z , όπου Z είναι μια συνάρτηση των τυχαίων μεταβλητών X και Y . Έχουμε

$$Z = g(X, Y) \quad (1.146)$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της (X, Y) , $f_{XY}(x, y)$, είναι γνωστή. Έστω Z μια τυχαία μεταβλητή ίση με το άθροισμα των δυο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X και Y ,

$$Z = X + Y \quad (1.147)$$

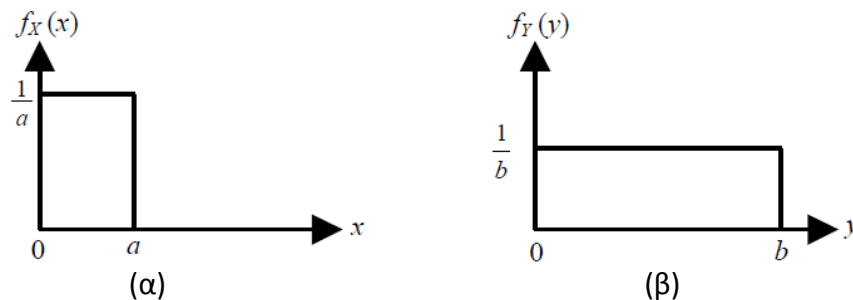
Η συνάρτηση πυκνότητας της Z μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι η συνέλιξη των συναρτήσεων πυκνότητας της X και Y

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z-y) dy \quad (1.148)$$

όπου $*$ συμβολίζει την συνέλιξη και χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, εφόσον X και Y είναι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 1.20

Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας της $Z=X+Y$, για X και Y ανεξάρτητα. Η συνάρτηση πυκνότητας της X και Y για $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, και $a < b$ φαίνονται στο διάγραμμα 1.24.



Διάγραμμα 1.24 Συνάρτηση πυκνότητας της (α) X και (β) Y

Λύση

Είναι πολύ πιο εύκολο να λύνουμε τις συνελίξεις γραφικά. Για $z < a$, δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των περιοχών που αναπαριστούν την συνάρτηση πυκνότητας όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.25 α. Έτσι έχουμε $f_Z(z)$ για $z < 0$.

Για $0 \leq z < a$, έχουμε μια αυξανόμενη περιοχή καθώς το z κινείται από το μηδέν στο a , όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.25β. Έτσι,

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{a} \frac{1}{b} dy = \frac{z}{ab}$$

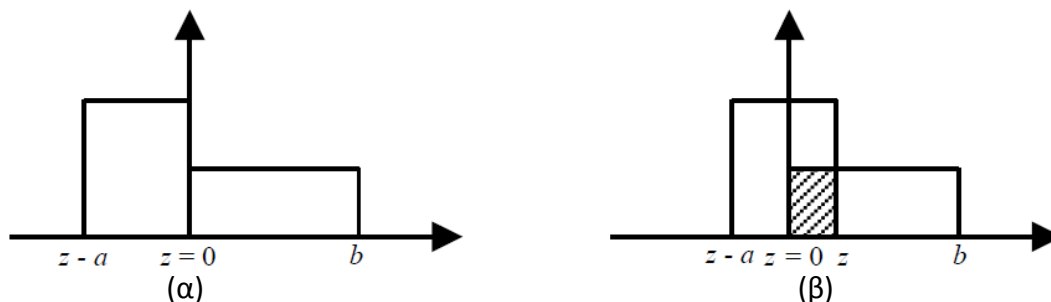
Για $a \leq z < b$, έχουμε μια σταθερή περιοχή όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.25γ

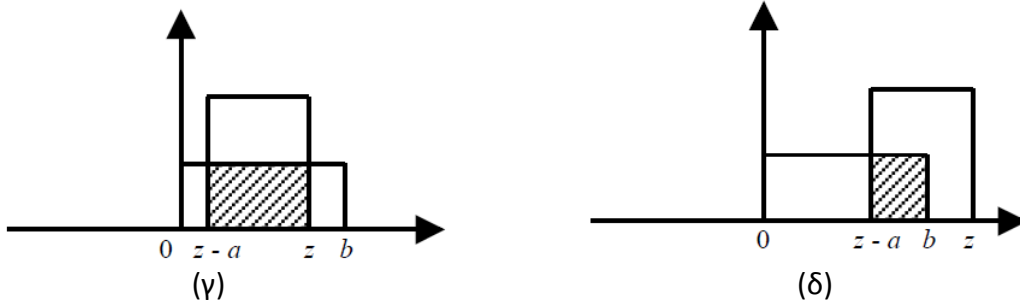
$$f_Z(z) = \int_{z-a}^z \frac{1}{a} \frac{1}{b} dy = \frac{1}{b}$$

Για $b \leq z < a+b$, από το διάγραμμα 1.25(δ), έχουμε

$$f_Z(z) = \int_{z-a}^b \frac{1}{a} \frac{1}{b} dy = \frac{a+b-z}{ab}$$

Για $z \geq a+b$, δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των δυο καμπυλών και κατά συνέπεια $f_Z(z) = 0$ για $z \geq a+b \Rightarrow$

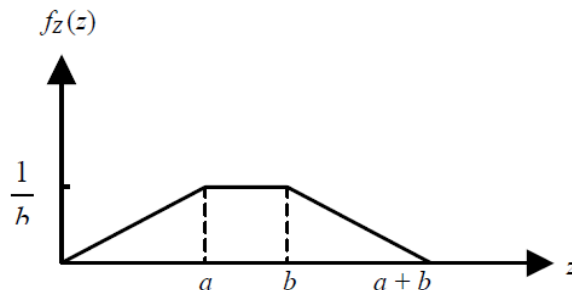




Διάγραμμα 1.25(α-δ) περιοχές ολοκλήρωσης για την συνέλιξη των X και Y

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{ab} & , 0 \leq z < a \\ \frac{1}{b} & , a \leq z < b \\ \frac{a+b-z}{ab} & , b \leq z < a+b \\ 0 & , z \geq a+b \text{ or } z < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας της Z, $f_Z(z)$, φαίνεται στο διάγραμμα 1.26



Διάγραμμα 1.26 συνάρτηση πυκνότητας της Z

Εάν X και Y δεν είναι ανεξάρτητες τότε

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-y, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x) dx \quad (1.149)$$

Εάν

$$Z = X - Y \quad (1.150)$$

Τότε η συνάρτηση πυκνότητας της Z θα είναι

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z+y, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, x-z) dx \quad (1.151)$$

Εάν X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε η συνάρτηση πυκνότητας γίνεται

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z+y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(x-z) dx \quad (1.152)$$

Παίρνουμε παρόμοια αποτελέσματα και για άλλες ενέργειες. Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες με οριακές συναρτήσεις κατανομής $f_X(x)$ και $f_Y(y)$. Έστω

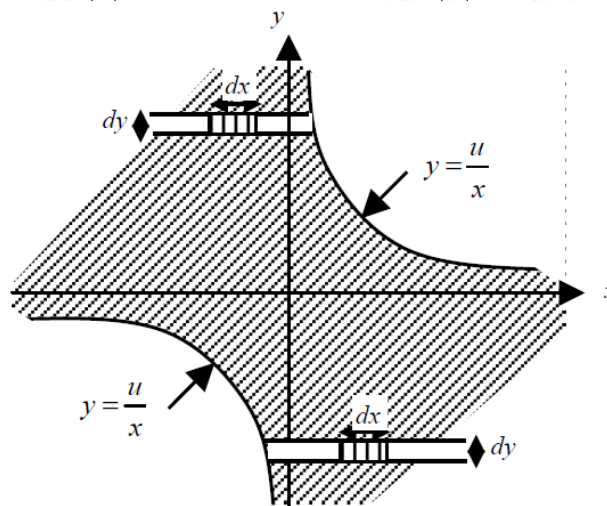
$$U = XY \quad (1.153)$$

Ως εκ τούτου χρειάζεται να προσδιορίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας $f_U(u)$ στην περιοχή η οποία φαίνεται στο διάγραμμα 1.27. Για $u > 0$, η συνάρτηση κατανομής $F_U(u)$ δίδεται από

$$F_U(u) = \int_0^{\frac{u}{y}} f_Y(y) dy \int_{-\infty}^{\frac{u}{y}} f_X(x) dx + \int_{-\infty}^0 f_Y(y) dy \int_{\frac{u}{y}}^{\infty} f_X(x) dx \quad (1.154)$$

Παραγωγίζοντας την 1.154 ως προς u και χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibniz, έχουμε

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{u}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_X\left(\frac{u}{y}\right) f_Y(y) dy \quad (1.155)$$



Διάγραμμα 1.27 Τομέας της $U=XY$

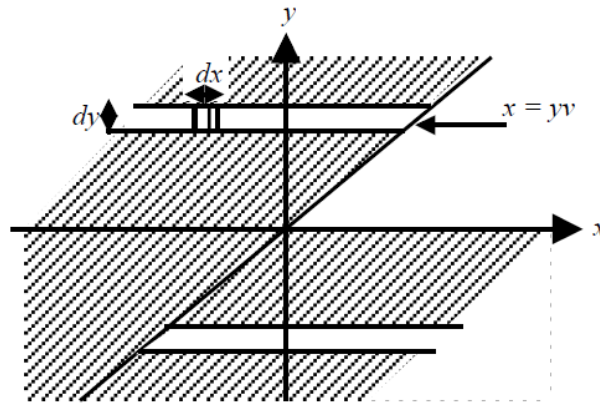
Τα ίδια αποτελέσματα μπορούν να εξαχθούν και για $u < 0$. Αν τώρα έχουμε

$$V = \frac{X}{Y} \quad (1.156)$$

τότε η περιοχή ολοκλήρωσης είναι αυτή που φαίνεται στο διάγραμμα 1.28. Η συνάρτηση κατανομής $F_V(v)$ δίδεται από

$$F_V(v) = \int_0^{\infty} f_Y(y) dy \int_{-\infty}^{vy} f_X(x) dx + \int_{-\infty}^0 f_Y(y) dy \int_{-\infty}^{\frac{0}{y}} f_X(x) dx \quad (1.157)$$

Διαφορίζοντας την $F_V(v)$ τύπος ως προς v έχουμε



Διάγραμμα 1.28 Τομέας της $V=X/Y$

$$\begin{aligned}
 f_V(v) &= \int_0^{\infty} y f_X(vy) f_Y(y) dy - \int_{-\infty}^0 y f_X(vy) f_Y(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(vy) f_Y(y) dy
 \end{aligned}
 \tag{1.158}$$

Εάν

$$M = \max(X, Y) \tag{1.159}$$

τότε η περιοχή που αντιστοιχεί στο $\max(x,y) \leq m$ φαίνεται στο διάγραμμα 1.29. Σε αυτή την περίπτωση, τύπος δίδεται από

$$F_M(m) = F_{XY}(m, m) = F_X(m) F_Y(m) \tag{1.160}$$

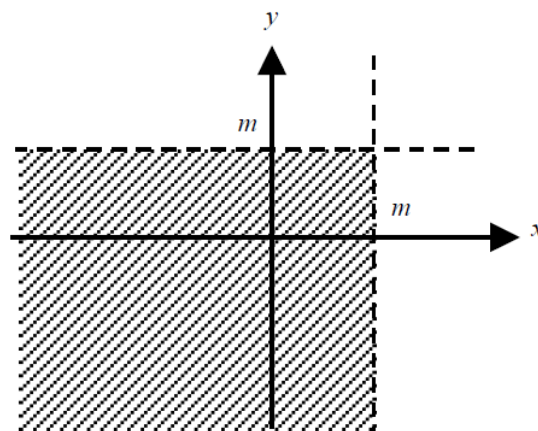
όπου $F_X(m)$ και $F_Y(m)$ είναι η οριακές συναρτήσεις κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X και Y αντίστοιχα. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας την παράγωγο της $F_M(m)$ ως προς m , παίρνουμε

$$f_M(m) = F_X(m) f_Y(m) + f_X(m) F_Y(m) \tag{1.161}$$

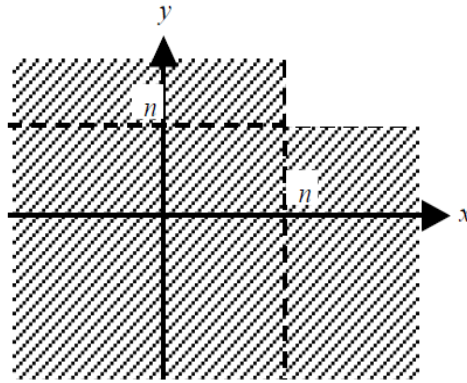
Εάν

$$N = \min(X, Y) \tag{1.162}$$

τότε η περιοχή της $\min(x,y) \leq n$ στον x - y άξονα φαίνεται στο διάγραμμα 1.30. Η συνάρτηση κατανομής τύπος του N δίδεται από



Διάγραμμα 1.29 Τομέας της $M=\max(x,y)$



Διάγραμμα 1.30 Τομέας της $N=\min(X,Y)$

$$\begin{aligned} F_N(n) &= F_{XY}(n, \infty) + F_{XY}(\infty, n) - F_{XY}(n, n) \\ &= F_X(n) + F_Y(n) - F_X(n)F_Y(n) \end{aligned} \quad (1.163)$$

Όπου $F_{XY}(x,y)$ είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των X και Y , με την παραδοχή ότι τα X και Y είναι ανεξάρτητα να ισχύει ακόμα. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας την παράγωγο της (1.163) ως προς n , έχουμε

$$\begin{aligned} f_N(n) &= f_X(n) + f_Y(n) - F_X(n)f_Y(n) - f_X(n)F_Y(n) \\ &= f_X(n)[1 - F_Y(n)] + f_Y(n)[1 - F_X(n)] \end{aligned} \quad (1.164)$$

Εάν τώρα οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι στατιστικά ανεξάρτητες τότε οι συναρτήσεις πυκνότητας των U, V, M και N δίδονται από

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{XY}\left(x, \frac{u}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_{XY}\left(\frac{u}{y}, y\right) dy \quad (1.165)$$

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_{XY}(vy, y) dy \quad (1.166)$$

$$f_M(m) = \int_{-\infty}^m f_{XY}(m, y) dy + \int_{-\infty}^m f_{XY}(x, m) dx \quad (1.167)$$

και

$$f_N(n) = f_X(n) + f_Y(n) - \int_{-\infty}^n f_{XY}(n, y) dy - \int_{-\infty}^n f_{XY}(x, n) dx \quad (1.168)$$

Παράδειγμα 1.21

Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας της $U=XY$, όπου X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{and} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3y^2}{8}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας την (1.155) και τα δοθέντα όρια των x και y , έχουμε

$$f_U(u) = \int_{u/2}^1 \frac{1}{x} \cdot 2x \cdot \frac{3}{8} \left(\frac{u}{x}\right)^2 dx = \frac{3}{4} u^2 (2-u), \quad 0 \leq u \leq 2$$

1.6.3 Δύο συναρτήσεις δύο τυχαίων μεταβλητών

Σε αυτή την παράγραφο επεκτείνουμε την έννοια του θεμελιώδους θεωρήματος μιας συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής σε δύο συναρτήσεις δύο τυχαίων μεταβλητών. Έστω

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) \quad \text{and} \quad Y_2 = g_2(X_1, X_2) \quad (1.169)$$

όπου $g_1(X_1, X_2)$ και $g_2(X_1, X_2)$ είναι δύο συναρτήσεις δυο τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2 με πραγματικές τιμές x_1 και x_2 . Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της X_1 και X_2 είναι $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$. Στόχος μας είναι να βρούμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ και την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$, συναρτήσει των συναρτήσεων $y_1 = g_1(x_1, x_2)$, $y_2 = g_2(x_1, x_2)$, και της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ της X_1 και X_2 . Η Jacob-ιανη μετασχηματισμού (x_1, x_2) στον (y_1, y_2) δίδεται από

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x_2} \end{vmatrix} \quad (1.170)$$

όπου $J(x_1, x_2) \neq 0$, και $\partial/\partial x$ συμβολίζουν την μερική παράγωγο. Η Jacob-ιανή $J(x_1, x_2)$ μπορεί επίσης να συμβολιστεί ως $J(y_1, y_2/x_1, x_2)$ ή $\partial(x_1, x_2)/\partial(y_1, y_2)$. Έτσι η συνάρτηση πυκνότητας $f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)$ μπορεί να δειχθεί ότι είναι

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{|J(x_1, x_2)|} \quad (1.171)$$

Ωστόσο, εάν τα ζεύγη $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), \dots, (x_{1n}, x_{2n})$, είναι όλοι πραγματικές ρίζες των εξισώσεων $y_1 = g_1(x_{1i}, x_{2i})$ και $y_2 = g_2(x_{1i}, x_{2i})$, $i=1, 2, \dots, n$ (π.χ τα n σημεία στον x_1-x_2 άξονα αντιστοιχούν σε ένα σημείο του y_1-y_2 άξονα), τότε $f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)$ δίδεται από

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_{11}, x_{21})}{|J(x_{11}, x_{21})|} + \frac{f_{X_1 X_2}(x_{12}, x_{22})}{|J(x_{12}, x_{22})|} + \dots + \frac{f_{X_1 X_2}(x_{1n}, x_{2n})}{|J(x_{1n}, x_{2n})|} \quad (1.172a)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{f_{X_1 X_2}(x_{1i}, x_{2i})}{|J_i(x_{1i}, x_{2i})|}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1.172b)$$

$J_i(x_{1i}, x_{2i})$, $i=1, 2, \dots, n$, είναι οι Jacob-ιανές εκτιμημένες στην i -οστή ρίζα. Η Jacob-ιανή του αντιστρόφου μετασχηματισμού δίδεται από

$$J(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \quad (1.173)$$

όπου $J(y_1, y_2)$ μπορεί να γραφτεί επίσης ως $J(x_1, x_2 / y_1, y_2)$ ή $\partial(y_1, y_2) / \partial(x_1, x_2)$. Για την περίπτωση n πραγματικών ριζών $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), \dots, (x_{1n}, x_{2n})$, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας θα είναι

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^n |J_i(y_1, y_2)|^{-1} f_{X_1 X_2}(x_{1i}, x_{2i}) \quad (1.174)$$

όπου ο δείκτης $i, i=1, 2, \dots, n$ δείχνει ότι η Jacob-ιανή έχει υπολογισθεί στην i -οστή ρίζα και ότι $J_i(y_1, y_2)$ ορίζεται στην (1.173). Η συνάρτηση κατανομής $F_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)$ θα είναι απλά

$$F_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) = \iint_D f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.175)$$

όπου D συμβολίζει την περιοχή στον x_1 - x_2 άξονα για τον οποίο $g_1(x_1, x_2) \leq y_1$ και $g_2(x_1, x_2) \leq y_2$. Σημειώνουμε επίσης ότι

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 F_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} \quad (1.176)$$

Παράδειγμα 1.22

Θεωρείστε το καθιερωμένο παράδειγμα που δίδεται σε πολλές περιπτώσεις όπου $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ και $Y_2 = X_1 / X_2$. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)$ ως προς την συνάρτηση πυκνότητας $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$.

Λύση

Θα λύσουμε το παράδειγμα δίδοντας περισσότερες πληροφορίες για να εξαλείψουμε τις ασάφειες. Από την (1.170) πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε την Jacob-ιανή του μετασχηματισμού $y_1 = g_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ και $y_2 = g_2(x_1, x_2) = x_1 / x_2$, τα οποία δίδονται από

$$\begin{aligned} J(x_1, x_2) &= \begin{vmatrix} \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{vmatrix} = -\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -y_2^2 \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_1} = -\frac{y_2^2 + 1}{y_1} \end{aligned}$$

Άρα $|J(x_1, x_2)| = (y_2^2 + 1) / y_1$. Λύνοντας για την εύρεση των ριζών των δυο συναρτήσεων y_1 και y_2 έχουμε

$$y_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = \left[x_1^2 \left(1 + \frac{x_2^2}{x_1^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \pm x_1 \left(1 + \frac{x_2^2}{x_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm x_1 \left(1 + \frac{1}{y_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm x_1 \left(\frac{y_2^2 + 1}{y_2^2} \right) \Rightarrow x_1 = \pm \frac{y_1 y_2}{(y_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε δυο ρίζες τις

$$x_{11} = y_1 y_2 / (y_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

και

$$x_{12} = -y_1 y_2 / (y_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια προσεγγίσει λύνουμε ως προς x_2 και έχουμε

$$x_2 = \pm y_1 / (y_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

ο οποίος είναι

$$x_{21} = y_1 / (y_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

και

$$x_{22} = -y_1 / (y_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

Σημειώνουμε ότι στην πραγματικότητα έχουμε τέσσερα πιθανά ζευγάρια

(x_{1i}, x_{2i}) , $i=1,2,3,4$, αλλά αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι τα ταιριάξουμε τα θετικά πρόσημα μαζί και τα αρνητικά μαζί, εφόσον η y_1 πρέπει να είναι μη αρνητική για να έχει πραγματικές ρίζες. Ως εκ τούτου ,χρησιμοποιώντας την (1.172α), η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της Y_1 και Y_2 γίνεται

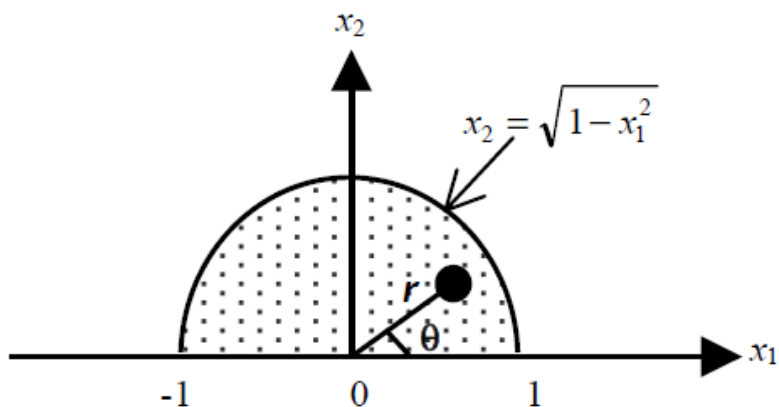
$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \left[f_{X_1 X_2} \left(\frac{y_1 y_2}{(y_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}, \frac{y_1}{(y_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right) + f_{X_2 X_2} \left(\frac{-y_1 y_2}{(y_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}, \frac{-y_1}{(y_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \cdot \frac{y_1}{y_2^2 + 1}, & y_1 > 0 \\ 0, & y_1 < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.23

Έστω (X_1, X_2) μιας δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας στην περιοχή που ορίζεται στο διάγραμμα 1.31. Ορίστε τον μετασχηματισμό (R, Θ) με $X_1 = R \cos \Theta$ και $X_2 = R \sin \Theta$. Υπολογίστε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{R\Theta}(r, \theta)$.

Λύση

Σε αυτό το παράδειγμα ,στόχος είναι να χρησιμοποιήσουμε την Jacob-ιανή του αντιστρόφου μετασχηματισμού, $|J^{-1}|$ η οποία δίδεται στην (1.173) και μπορεί περιστασιακά να είναι μη αξιολογήσιμη. Ως εκ τούτου



Διάγραμμα 1.31 Περιοχή της $f_{x_1x_2}(x_1, x_2)$

$$|J^{-1}(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r = r$$

εφόσον $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την (1.174) η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της (R, Θ) γίνεται

$$\begin{aligned} f_{R\Theta}(r, \theta) &= |J^{-1}(r, \theta)| f_{x_1x_2}(x_1, x_2) \\ &= \frac{2r}{\pi} \quad \text{for } 0 \leq r \leq 1 \text{ and } 0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι οι οριακές συναρτήσεις πυκνότητας των R και Θ υπολογίζονται εύκολα ότι είναι

$$f_R(r) = \int_0^{\pi} \frac{2r}{\pi} d\theta = 2r, \quad 0 \leq r \leq 1$$

και

$$f_{\Theta}(\theta) = \int_0^1 \frac{2r}{\pi} dr = \frac{1}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Οι R και θ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, εφόσον $f_{R\Theta}(r, \theta) = f_R(r)f_{\Theta}(\theta)$.

Θα γενικεύσουμε τώρα το θεμελιώδες θεώρημα σε διανύσματα n τυχαίων μεταβλητών. Έστω $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ μια n -διάστατη τυχαία μεταβλητή συνεχούς τύπου, με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Έστω Y_1, Y_2, \dots, Y_n συναρτήσεις των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, \dots, X_n , που δίδονται από

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \tag{1.177}$$

M

$$Y_n = g_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Οι συναρτήσεις $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i=1, 2, \dots, n$, είναι συνεχείς και έχουν μερικές παραγώγους για κάθε (x_1, x_2, \dots, x_n) . Έτσι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του μετασχηματισμού θα δίδεται από

$$f_{Y_1, Y_2, K, Y_n}(y_1, y_2, K, y_n) = \frac{1}{|J(x_1, x_2, K, x_n)|} f_{X_1, X_2, K, X_n}(x_1, x_2, K, x_n) \quad (1.178)$$

Όπου η Jacob-νη $J(x_1, x_2, K, x_n) = J[(y_1, y_2, K, y_n)/(x_1, x_2, K, x_n)]$ ορίζεται ως

$$J(x_1, x_2, K, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \Lambda & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \Lambda & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ & & M & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \Lambda & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (1.179)$$

Εάν οι n -αδες $(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}), (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}), \dots, (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn})$ είναι λύσεις των

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1^{-1}(y_1, y_2, K, y_n) \\ x_2 &= g_2^{-1}(y_1, y_2, K, y_n) \\ &M \end{aligned} \quad (1.180)$$

$$x_n = g_n^{-1}(y_1, y_2, K, y_n)$$

Η Jacob-νη του αντιστρόφου μετασχηματισμού δίδεται από

$$J\left(\frac{x_1, x_2, K, x_n}{y_1, y_2, K, y_n}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \Lambda & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \Lambda & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ & & M & \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \Lambda & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (1.181)$$

Όπου

$$J[(x_1, x_2, K, x_n)/(y_1, y_2, K, y_n)] = J(y_1, y_2, K, y_n)$$

και

$$|J(x_1, x_2, K, x_n)|^{-1} = |J(y_1, y_2, K, y_n)|.$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{Y_1, Y_2, K, Y_n}(y_1, y_2, K, y_n)$$

γίνεται

$$f_{Y_1, Y_2, K, Y_n}(y_1, y_2, K, y_n) = \sum_{i=1}^n |J_i(y_1, y_2, K, y_n)|^{-1} f_{X_1, X_2, K, X_n}(x_{1i}, x_{2i}, K, x_{ni}) \quad (1.182)$$

όπου πάλι ο δείκτης i , $i=1,2,\dots,n$ δείχνει ότι οι Jacob-ιανές έχουν υπολογισθεί στην i -ιοστή ρίζα και $J_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ είναι όπως ορίζεται στην (1.181).

1.7 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγαμε τις έννοιες των συνόλων, πιθανοτήτων, τυχαίων μεταβλητών και των συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών. Στις περισσότερες περιπτώσεις περιορίσαμε την συζήτηση σε δυο τυχαίες μεταβλητές ή δυο συναρτήσεις δυο τυχαίων μεταβλητών αλλά οι έννοιες μπορούν να επεκταθούν σε n τυχαίες μεταβλητές και/ή n συναρτήσεις n τυχαίων μεταβλητών. Λόγο της αναλογίας μεταξύ συνεχών τυχαίων μεταβλητών και διακριτών τυχαίων μεταβλητών, οι περισσότερες μαθηματικές υλοποιήσεις έγιναν για συνεχείς συναρτήσεις. Ωστόσο, ορισμένα στοιχεία των διακριτών τυχαίων μεταβλητών δόθηκαν με λεπτομέρεια για να αποσαφηνίσουν ορισμένα θεμελιώδη θέματα. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποιες κατανομές πιθανοτήτων

Αναφορά

{1} De Finetti, B., *Theory of Probability, Vol. 1, New York: John Wiley and Sons, 1974.*

Επιλεγμένη Βιβλιογραφία

Breipohl, A. M., *Probabilistic Systems Analysis, New York: John Wiley and Sons, 1970.*
Dudewics, E. J., *Introduction to Statistics and Probability, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976.*

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, New York: John Wiley and Sons, 1968.*

Foata, D., and A. Fuchs, *Calcul des Probabilités, Paris: Dunod, 1998.*

Ghorbanzadeh, D., *Probabilités: Exercices Corrigés, Paris: Editions Technip, 1998.*

Haykin, S., *Communications Systems, New York: John Wiley and Sons, 1983.*

Meyer, P. L., *Introductory Probability and Statistical Applications, Reading, MA: Addison-Wesley, 1970.*

Papoulis, A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, New York: McGraw-Hill, 1991.

Peebles, P. Z., Probability, Random Variables, and Random Signal Principles, New York: McGraw-Hill, 1980.

Proakis, J. G., Digital Communications, New York: McGraw-Hill, 1995.

Rohatgi, V. K., An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics, New York: John Wiley and Sons, 1976.

Spiegel, M. R., Schaum's Outline Series: Probability and Statistics, New York: McGraw-Hill, 1975.

Stark, H., and J. W. Woods, Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1986.

Urkowitz, H., Signal Theory and Random Processes, Dedham, MA: Artech House, 1983.

Wozencraft, J. M., and I. M. Jacobs, Principles of Communication Engineering, New York: John Wiley and Sons, 1965.

Κεφάλαιο 2^ο

Κατανομές

2.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, ορίσαμε τις έννοιες της πιθανότητας, των τυχαίων μεταβλητών και των στατιστικών ροπών. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε κάποιες σημαντικές συναρτήσεις κατανομής που συναντώνται συχνά. Δεδομένου ότι αυτές οι κατανομές έχουν ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, θα τις μελετήσουμε στη γενική μορφή τους, και σε ορισμένες περιπτώσεις, θα δώσουμε περισσότερες λεπτομέρειες για συγκεκριμένες εφαρμογές. Ορισμένες από τις έννοιες που ορίζονται θα εφαρμοστούν σε αυτές τις ειδικές κατανομές, οι οποίες δίνουν κάποια σταθερά αποτελέσματα που θα χρησιμοποιηθούν αργότερα. Στις ενότητες 2.2 και 2.3, παρουσιάζουμε κάποιες διακριτές και συνεχείς συναρτήσεις κατανομής, αντίστοιχα. Στην ενότητα 2.4 παρουσιάζονται κάποιες ιδιαίτερες συναρτήσεις κατανομής.

2.2 Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

2.2.1 Η κατανομή Bernoulli, η Διωνυμική και η Πολυωνυμική κατανομή

Η απλούστερη κατανομή είναι αυτή που έχει μόνο δύο πιθανά γεγονότα. Για παράδειγμα, ρίπτεται ένα κέρμα, και τα γεγονότα είναι κορώνα ή γράμματα, τα οποία πρέπει να συμβαίνουν με κάποια πιθανότητα .

Εάν η ρίψη του νομίσματος γίνει n φορές, έχουμε μια σειρά ανεξάρτητων δοκιμών, κάθε μία εκ των οποίων αποδίδει ένα από τα δύο πιθανά αποτελέσματα: κορώνα ή γράμματα. Αυτά τα δύο πιθανά αποτελέσματα αναφέρονται επίσης ως "επιτυχία", που σχετίζεται με την τιμή 1, και "αποτυχία", που σχετίζεται με την τιμή 0 . Δεδομένου ότι όλα τα πειράματα θεωρούμε ότι είναι πανομοιότυπα, το αποτέλεσμα 1 παρουσιάζεται με πιθανότητα p , ενώ το αποτέλεσμα 0 εμφανίζεται με πιθανότητα $1-p$, με $0 \leq p \leq 1$. Οι ρίψεις του νομίσματος καλούνται *δοκιμές Bernoulli*.

Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι ακολουθεί την *κατανομή Bernoulli* αν για κάποιο p , $0 \leq p \leq 1$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της, ή απλώς συνάρτηση πιθανότητας, δίνεται από τον τύπο

$$P_X(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & x = 0, 1 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.1)$$

Το $(1 - p)$ συχνά συμβολίζεται με q , έτσι ώστε $p + q = 1$. Ας υποθέσουμε ότι στο πείραμα

της ρίψης του κέρματος n φορές, "κορώνα" ή "1" εμφανίζεται σε k δοκιμές, στη συνέχεια, "γράμματα" ή "0" εμφανίζεται σε $(n - k)$ για δοκιμές. Δηλαδή, έχουμε

$$\underbrace{111 \dots 11}_{k \text{ times}} \underbrace{000 \dots 00}_{n-k \text{ times}}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το ποιο αποτέλεσμα θα έρθει πρώτο, το 1 ή το 0, δεν έχει σημασία. Αυτό που έχει σημασία είναι ο αριθμός k των "1" και ο αριθμός $(n-k)$ των "0" στις n δοκιμές. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με το Κεφάλαιο 1, Ενότητα 1.2.4, τα n αντικείμενα (όλα τα 1 και 0) μπορούν να διαταχθούν με $n!$ τρόπους. Τα k "1" μπορούν να διαταχθούν με $k!$ τρόπους, ενώ τα $(n-k)$ "0" με $(n-k)!$ τρόπους. Συνεπώς υπάρχουν $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ τρόποι διάταξης των k "1" και των $(n-k)$ "0". Το $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ είναι ο διωνυμικός συντελεστής όπως αυτός ορίστηκε στην ενότητα (1.10). Ως εκ τούτου, η πιθανότητα εμφάνισης του "1" k φορές είναι

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (2.2)$$

Συνοψίζοντας, λέμε ότι η πιθανότητα παρατήρησης ακριβώς k επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή. Η πιθανότητα επιτυχίας είναι p , και η πιθανότητα της αποτυχίας $q=1-p$. Η τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι έχει διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p αν

$$P(X = k \text{ in } n \text{ trials}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής X περιγράφεται από την

$$P_X(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta(x-k) \quad (2.4)$$

όπου $\delta(x-k)$ είναι η κρουστική συνάρτηση ή συνάρτηση Δέλτα. Η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x P_X(u) du = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} u(x-k) \quad (2.5)$$

όπου $u(x-k)$ είναι η συνάρτηση βήματος, και το ολοκλήρωμα της συνάρτησης Δέλτα ισούται με τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος. Πρέπει να σημειωθεί ότι το ανάπτυγμα της διωνυμικής δύναμης είναι το εξής

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (2.6)$$

Μπορεί να αποδειχθεί επίσης ότι η μέση τιμή, η διασπορά και η χαρακτηριστική συνάρτηση της X δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$E[X] = np \quad (2.7)$$

$$\text{var}(X) = npq \quad (2.8)$$

και

$$\Phi_x(\omega) = (pe^{j\omega} + q)^n \quad (2.9)$$

Παράδειγμα 2.1

Θεωρούμε το πείραμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού, 10 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθεί το “6” δύο φορές;

Λύση

Σημειώστε ότι ο αριθμός των ρίψεων του ζαριού είναι $n = 10$, και το $k = 2$ είναι ο αριθμός των ρίψεων στις οποίες το ζάρι δείχνει, στην πάνω πλευρά του, τον αριθμό “6”, με πιθανότητα $p = 1/6$. Ως εκ τούτου, με τη χρήση της (2.3), η πιθανότητα να εμφανιστεί το “6” δύο φορές είναι

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 0.2907$$

Παράδειγμα 2.2

Ένας δέκτης A λαμβάνει μια σειρά από “0” και “1” που εκπέμπεται από συγκεκριμένη πηγή. Ο δέκτης χρησιμοποιεί έναν κανόνα απόφασης βασισμένο στην πλειοψηφία. Με άλλα λόγια, αν ο δέκτης λάβει 3 σύμβολα και τα δύο ή τρία από αυτά είναι μηδενικά, αποφασίζει ότι αυτά τα σύμβολα δείχνουν ότι στάλθηκε ένα “0”. Ο δέκτης είναι σωστός μόνο στο 80% των περιπτώσεων. Ποιο είναι το $P(c)$, η πιθανότητα μιας σωστής απόφασης αν η πιθανότητα λήψης ενός “0” και ενός “1” είναι ίδια;

Λύση

Πρόκειται για δοκιμές Bernoulli, με $P(A) = p$ πιθανότητα να συμβεί το γεγονός A σε μια συγκεκριμένη δοκιμή. Ορίζουμε ως D την απόφαση που παίρνει ο δέκτης για “0” ή “1” και έχουμε, $P(D) = 0.8$. Ο αριθμός των συμβόλων που λαμβάνονται είναι $n = 3$. Από την (2.3), έχουμε

$$P(0\text{σωστέςαποφάσεις}) = \binom{3}{0} (0.8)^0 (1-0.8)^3 = 0.008$$

$$P(1\text{σωστήαπόφαση}) = \binom{3}{1} (0.8)^1 (1-0.8)^2 = 0.096$$

$$P(2\text{σωστέςαποφάσεις}) = \binom{3}{2} (0.8)^2 (1-0.8)^1 = 0.384$$

$$P(3\text{σωστέςαποφάσεις}) = \binom{3}{3} (0.8)^3 (1-0.8)^0 = 0.512$$

Συνεπώς, η πιθανότητα μιας σωστής απόφασης θα είναι

$$P(C) = P(D=2) + P(D=3) = 0.896$$

Στη διωνυμική κατανομή, το πείραμα επαναλαμβάνεται n φορές αλλά έχουμε μόνο δύο πιθανά αποτελέσματα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι και πάλι εκτελούμε το πείραμα n ανεξάρτητες φορές, αλλά για κάθε πείραμα έχουμε k αμοιβαίως αποκλειόμενα αποτελέσματα A_1, A_2, \dots, A_k . Συμβολίζουμε $P(A_i) = P_i$ και υποθέτουμε ότι

το P_i , $i=1,2,\dots,k$, παραμένει σταθερό για όλες τις n επαναλήψεις και επίσης, $P_1+P_2+\dots+P_k=1$. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_k , έτσι ώστε $X_i=n_i, i=1,2,\dots,k$, συμβολίζει τον αριθμό των φορών που το A_i συμβαίνει σε n επαναλήψεις. Τότε, $n=n_1+n_2+\dots+n_k$, και η συνδυασμένη πιθανότητα να έχουμε $X_1=n_1, X_2=n_2, \dots, X_k=n_k$, δίνεται από τη σχέση

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_k^{n_k} \quad (2.10)$$

Σημειώστε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_k δεν είναι ανεξάρτητες. Μια τυχαία μεταβλητή (X_1, X_2, \dots, X_k) με κατανομή όπως αυτή που περιγράφεται στην (2.10) λέμε ότι έχει *πολυωνυμική κατανομή*.

2.2.2 Η γεωμετρική κατανομή και η κατανομή Pascal

Θεωρούμε το πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος όπως περιγράφηκε νωρίτερα. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός αποτελέσματος, ας πούμε “κορώνα” ή “επιτυχία”, είναι $P(A)=p$, και η πιθανότητα μη-εμφάνισης (ή αποτυχίας) είναι $P(\bar{A})=1-p=q$. Στη διωνυμική κατανομή, επαναλάβουμε το πείραμα n φορές, και υπολογίσαμε την πιθανότητα εμφάνισης k επιτυχιών στις n δοκιμές Bernoulli. Το πείραμα τώρα, είναι λίγο διαφορετικό υπό την έννοια ότι τώρα συνεχίζουμε τη ρίψη του νομίσματος μέχρι να εμφανιστεί το επιθυμητό γεγονός A (“κορώνα” ή “επιτυχία”) για πρώτη φορά, και τότε το πείραμα σταματάει. Συνεπώς, ο αριθμός n των δοκιμών στη διωνυμική κατανομή είναι προκαθορισμένος, ενώ σε αυτό το νέο πείραμα είναι μια τυχαία μεταβλητή, εφόσον δε γνωρίζουμε πότε αυτές θα σταματήσουν. Με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε τη *γεωμετρική κατανομή*.

Το X θα είναι μια τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τις επαναλήψεις ενός πειράματος μέχρι την πρώτη εμφάνιση ενός γεγονότος A στην k -οστή δοκιμή. Στην περίπτωση αυτή, όταν το X λαμβάνει τις τιμές $1, 2, \dots, k-1$, τα αντίστοιχα αποτελέσματα της επανάληψης του πειράματος είναι \bar{A} . Τότε, η πιθανότητα εμφάνισης του γεγονότος A για πρώτη φορά στην k -οστή δοκιμή όπου $X=k$ δίνεται από τη

$$P(X = k) = P_X(k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1} p, & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.11)$$

Η τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι έχει *γεωμετρική κατανομή* που περιγράφεται από την (2.11) με $0 \leq p \leq 1$ και $1-p=q$. Η μέση τιμή της X δίνεται από την

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq} (q^k) = p \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} q^k \end{aligned} \quad (2.12)$$

όπου το d/dq συμβολίζει παράγωγο, και το άθροισμα που τείνει στο άπειρο, συγκλίνει, όπως γνωρίζουμε, στο

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{for } 0 < q < 1 \quad (2.13)$$

Άρα, η μέση τιμή του X γίνεται

$$E[X] = p \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \quad (2.14)$$

Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι η διασπορά του X θα είναι

$$\text{var}[X] = \frac{q}{p^2} \quad (2.15)$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της γεωμετρικής κατανομής μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι

$$M_x(t) = \frac{p}{1 - q e^t} \quad (2.16)$$

Ας, θεωρήσουμε, τώρα, το ίδιο πείραμα που μας έδωσε τη γεωμετρική κατανομή, αλλά χωρίς να σταματήσουμε τις δοκιμές στην πρώτη εμφάνιση του γεγονότος A , αλλά όταν αυτό εμφανιστεί r φορές. Στην περίπτωση αυτή, στις $X=k-1$ δοκιμές, έχουμε $r-1$ εμφανίσεις του γεγονότος A , και όταν $X=r$, συμβαίνει το γεγονός για r -οστή φορά. Συνεπώς,

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}, \quad k = r, r+1, \dots \quad (2.17)$$

Το X λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή *Pascal*. Να σημειωθεί, ότι όταν $r=1$ στην (2.17), προκύπτει η γεωμετρική κατανομή που περιγράφει η (2.11). Συχνά, η κατανομή Pascal αναφέρεται και ως *αρνητική διωνυμική κατανομή*. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να πούμε ότι έχουμε x αποτυχίες σε αντιστοιχία με $r-1$ επιτυχίες στην $(k-1)$ -οστή δοκιμή. Στην k -οστή δοκιμή, πρέπει να έχουμε την r -οστή επιτυχία. Ως εκ τούτου, η πιθανότητα των x αποτυχιών δίνεται από την

$$P(X = x) = \binom{x+r-1}{x} p^r q^x, \quad x = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

ή η πιθανότητα της r -οστής επιτυχίας στην $k = x + r$ δοκιμή, γνωρίζοντας ότι στην $k-1 = x+r-1$ έχουμε $r-1$ επιτυχίες, είναι η

$$P(X = x) = \binom{x+r-1}{r-1} p^r q^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

Η (2.18) είναι ισοδύναμη της (2.19), αφού

$$\binom{x+r-1}{r-1} = \binom{x+r-1}{x} \quad (2.20)$$

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η (2.17) μπορεί να γραφεί επιπλέον με τον ακόλουθο τρόπο

$$P(X = x) = \binom{-r}{x} p^r (-q)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

που δίνει ότι

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = 1 \quad (2.22)$$

δεδομένου ότι

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x = (1-q)^{-r} = p^{-r} \quad (2.23)$$

Ο λόγος που καλούμε την εν λόγω κατανομή *αρνητική διωνυμική* είναι ο αρνητικός εκθέτης $(-r)$ στη σχέση (2.23). Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι στην (2.19) μας ενδιαφέρει η κατανομή του αριθμού των δοκιμών που απαιτείται για να έχουμε r επιτυχίες με $k=x+r$, ενώ στην (2.18) μας ενδιαφέρει ο αριθμός των αποτυχιών. Με άλλα λόγια, η κατανομή της (2.17) μπορεί να οριστεί σαν $Y=X+r$, με το X να συμβολίζει τον αριθμό των αποτυχιών πριν την r -οστή επιτυχία. Έχουμε λοιπόν,

$$P(Y = y) = \binom{y-1}{r-1} p^r q^{y-r}, \quad y = r, r+1, \dots \quad (2.24)$$

Οι μέσες τιμές των X και Y μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι

$$E[X] = r \frac{q}{p} \quad (2.25)$$

και

$$E[Y] = E[X] + r = \frac{r}{p} \quad (2.26)$$

ενώ οι διασπορές των X και Y δίνονται από την

$$\text{var}[X] = \text{var}[Y] = r \frac{q}{p^2} \quad (2.27)$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της X προκύπτει ότι είναι

$$\begin{aligned} M_x(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r-1}{x} p^r q^x e^{tx} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} p^r (-q)^x e^{tx} \\ &= p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q e^t)^x = p^r (1 - q e^t)^{-r} \quad \text{for } q e^t < 1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ενώ η ροπογεννήτρια της Y μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι

$$M_y(t) = \left(\frac{p e^t}{1 - q e^t} \right)^r \quad \text{for } q e^t < 1 \quad (2.29)$$

Ολοκληρώνουμε την ενότητα δίνοντας τη σχέση μεταξύ της διωνυμικής κατανομής και της κατανομής Pascal. Αν η X είναι μια διωνυμική κατανομή όπως αυτή ορίζεται στη (2.4), και η Y είναι μια κατανομή Pascal όπως αυτή ορίζεται στη (2.17), τότε

$$P(X \geq r) = P(Y \leq n) \quad (2.30)$$

Η σχέση δείχνει ότι αν υπάρχουν r ή περισσότερες επιτυχίες στις πρώτες n δοκιμές, τότε ο αριθμός των δοκιμών για να εξασφαλίσουμε τις πρώτες r επιτυχίες είναι το πολύ n . Επίσης,

$$P(X < r) = P(Y > n) \quad (2.31)$$

Δηλαδή, αν υπάρχουν λιγότερες από r επιτυχίες στις πρώτες n δοκιμές, τότε χρειαζόμαστε τουλάχιστον n δοκιμές για να έχουμε τις πρώτες r επιτυχίες.

2.2.3 Η υπεργεωμετρική κατανομή

Έστω ένα δοχείο που περιέχει N σφαιρίδια, r από τα οποία είναι λευκά και τα υπόλοιπα $N - r$ είναι διαφορετικών χρωμάτων. Στο πλαίσιο του πειράματος επιλέγουμε n σφαιρίδια, όπου $n \leq N$. Όταν επιλέγεται κάθε σφαιρίδιο, καταγράφεται το χρώμα του και επανατοποθετείται στο δοχείο. Επιτυχία θεωρούμε

την επιλογή ενός λευκού σφαιριδίου. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τις επιλογές λευκών σφαιριδίων (επιτυχίες) στις n δοκιμές. Τότε, η πιθανότητα να έχουμε k επιτυχίες σε n δοκιμές δίνεται από τον τύπο

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{r}{N}\right)^k \left(\frac{N-r}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{r^k (N-r)^{n-k}}{N^n} \quad (2.32)$$

αφού $p = r / N$ και $q = 1 - p = (N - r) / N$. Αυτή η διαδικασία καλείται *δειγματοληψία με επανάθεση*. Αν, τώρα, καθώς επιλέγεται κάθε σφαιρίδιο, το χρώμα του σημειώνεται αλλά δεν επανατοποθετείται στο δοχείο, έχουμε *δειγματοληψία χωρίς επανάθεση*. Σε αυτήν την περίπτωση, η πιθανότητα να επιλέξουμε k λευκά σφαιρίδια (επιτυχίες) σε n δοκιμές, δίνεται από τη σχέση

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Μία διακριτή τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή που περιγράφεται στην (2.33) λέμε ότι έχει *Υπεργεωμετρική κατανομή*. Σημειώστε ότι το k δε μπορεί να υπερβεί το n ή το r , δηλαδή,

$$k \leq \min(n, r) \quad (2.34)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της Υπεργεωμετρικής κατανομής X αποδεικνύεται ότι είναι

$$E[X] = \frac{n}{N} r \quad (2.35)$$

και

$$\text{var}[X] = \frac{nr}{N^2(N-1)} (N-r)(N-n) \quad (2.36)$$

Επίσης, η μέση τετραγωνική τιμή δίνεται από τη σχέση

$$E[X^2] = \frac{r(r-1)}{N(N-1)} n(n-1) + \frac{nr}{N} \quad (2.37)$$

Υπολογίζοντας την πιθανότητα των k λευκών σφαιριδίων σε n δοκιμές χωρίς επανάθεση, που δίνεται στη (2.33), έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{r!}{k!(r-k)!} \frac{(N-r)!}{(n-k)!(N-r-n+k)!} \frac{n!(N-n)!}{N!} \\
&= \frac{1}{k!} r(r-1)\dots(r-k+1) \frac{1}{(n-k)!} (N-r)(N-r-1)\dots(N-r-n+k+1) \\
&\quad \cdot n! \frac{1}{N(N-1)\dots(N-n+1)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} r(r-1)\dots(r-k+1) \frac{(N-r)(N-r-1)\dots(N-r-n+k+1)}{N(N-1)\dots(N-n+1)} \\
&= \binom{n}{k} \frac{r^k}{N^n} (N-r)^{n-k} \frac{1\left(1-\frac{1}{r}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{r}\right) 1\left(1-\frac{1}{N-r}\right)\dots\left(1-\frac{n-k-1}{N-r}\right)}{1\left(1-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Έστω ότι η αναλογία των λευκών σφαιριδίων στο δοχείο πριν από οποιαδήποτε δειγματοληψία είναι $r/N = p$, και η αναλογία των υπόλοιπων σφαιριδίων είναι $1-p = (N-r)/N = q$. Τότε, η (2.38) γίνεται

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{r}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{r}\right)}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)} \\
&\quad \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{N-r}\right)\left(1-\frac{2}{N-r}\right)\dots\left(1-\frac{n-k-1}{N-r}\right)}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά σε σχέση με τις αναλογίες p και q δίνονται από τη σχέση

$$E[X] = np \tag{2.40}$$

και

$$\text{var}[X] = n \frac{r}{N} \frac{N-r}{N} \frac{N-n}{N-1} = npq \frac{N-n}{N-1} \tag{2.41}$$

Όταν το N τείνει στο άπειρο (δηλαδή το N είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το n), η μέση τιμή και η διασπορά γίνονται

$$E[X] = np \tag{2.42}$$

και

$$\text{var}[X] = npq \tag{2.43}$$

ενώ η πιθανότητα k επιτυχιών σε n δοκιμές χωρίς επανάθεση που παρουσιάστηκε στη (2.38), γίνεται

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{2.44}$$

Δηλαδή, φθάνουμε στο αποτέλεσμα που δίνεται στη (2.32), που αφορά τη δειγματοληψία με επανάθεση. Το γεγονός αυτό έχει λογική αν το δούμε διαισθητικά, αφού για ένα πολύ μεγάλο N , το να επιλέξουμε ένα σφαιρίδιο χωρίς επανάθεση, δεν επηρεάζει το μέγεθος του δείγματος, και το πείραμα είναι παρόμοιο με το να επιλέγαμε ένα σφαιρίδιο και να το επανατοποθετούσαμε στο δοχείο.

Παράδειγμα 2.3

Ένα δοχείο περιέχει πέντε λευκά σφαιρίδια, τρία μαύρα σφαιρίδια, και τρία κόκκινα σφαιρίδια. Το πείραμα αφορά την επιλογή ενός σφαιριδίου και την καταγραφή του χρώματός του. Βρείτε την πιθανότητα να επιλεγεί το τρίτο λευκό σφαιρίδιο στην έβδομη δοκιμή, εάν γνωρίζουμε ότι το σφαιρίδιο που επιλέγεται δεν επανατοποθετείται στο δοχείο.

Λύση

Έχουμε να κάνουμε με υπεργεωμετρική κατανομή με $N = 11$ σφαιρίδια; $r = 5$ λευκά σφαιρίδια, και $N - r = 6$ σφαιρίδια άλλων χρωμάτων. Η πιθανότητα να επιλεγούν $k = 3$ λευκά σφαιρίδια (επιτυχίες) σε $n = 7$ δοκιμές δίνεται από τη (2.33) και είναι

$$P(X = 3 \text{ white balls in 7 trials}) = \frac{\binom{5}{3} \binom{6}{4}}{\binom{11}{7}} = \frac{5}{11} = 0.4545$$

2.2.4 Η κατανομή Poisson

Σε πολλές εφαρμογές, μας απασχολεί ο αριθμός των εμφανίσεων ενός γεγονότος σε μία δεδομένη περίοδο χρόνου t . Θεωρούμε ότι η εμφάνιση (ή η μη εμφάνιση) ενός ενδεχομένου σε ένα χρονικό διάστημα, είναι ανεξάρτητη από την εμφάνισή του ή μη, σε κάποιο άλλο χρονικό διάστημα. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός σε δεδομένη χρονική περίοδο είναι η ίδια, ανεξάρτητα εάν βρισκόμαστε στην αρχή ή το τέλος της περιόδου αυτής. Τότε λέμε ότι η κατανομή της X , του αριθμού των εμφανίσεων ενός ενδεχομένου σε μια δεδομένη χρονική περίοδο t , είναι *κατανομή Poisson*. Εφαρμογές τέτοιων τυχαίων δεδομένων, μπορεί να περιλαμβάνουν την εμφάνιση μεγάλης κίνησης στις τηλεφωνικές γραμμές, τυχαίες βλάβες σε κάποιον εξοπλισμό, αποσύνθεση ραδιενεργού υλικού, διεκδικήσεις σε μια ασφαλιστική εταιρεία, ή άφιξη πελατών σε μία υπηρεσία.

Έστω ότι το X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ και έχει παράμετρο $\lambda, \lambda > 0$. Τότε, αν

$$P(X = k) = P_X(k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, & k = 0, 1, 2, \dots, \text{ and } \lambda > 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.45)$$

λέμε ότι η X ακολουθεί την κατανομή *Poisson*. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η σωρευτική συνάρτηση κατανομής είναι

$$P_X(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta(x-k) \quad (2.46)$$

και

$$F_X(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} u(x-k) \quad (2.47)$$

όπου η $\delta(x)$ και η $u(x)$ είναι η μοναδιαία συνάρτηση Δέλτα και η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος, αντίστοιχα.

Η μέση τιμή και η διασπορά της X είναι ίσες και μπορεί να υπολογιστεί ότι είναι

$$E[X] = \sigma_x^2 = \lambda \quad (2.48)$$

ενώ η μέση τετραγωνική τιμή είναι $E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$. Μπορεί επίσης να δειχθεί ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση και η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$M_x(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)] \quad (2.49)$$

και

$$\Phi_x(t) = \exp[\lambda(e^{j\omega} - 1)] \quad (2.50)$$

Παράδειγμα 2.4

Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή *Poisson* με παραμέτρους λ_1 και λ_2 , αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι η κατανομή $X + Y$ είναι επίσης κατανομή *Poisson*, και να προσδιοριστεί η παράμετρός της.

Λύση

Για $n > 0$, η κατανομή της $X + Y$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq n) &= \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{n-k!} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε το διωνυμικό ανάπτυγμα που δόθηκε στη (2.6). Συνεπώς, η κατανομή του $X + Y$ είναι *Poisson* με παράμετρο $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Η κατανομή *Poisson* είναι μια προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής όταν ο αριθμός των δοκιμών τείνει στο άπειρο (και, επιλύοντας το όριο, $n p = \lambda$).

Θεωρούμε μια διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p . Η πιθανότητα της $X = k$ στη διωνυμική κατανομή δίνεται από τη σχέση

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2.51)$$

με μέση τιμή $\lambda = n p$. Τότε, επιλύοντας το όριο καθώς $n \rightarrow \infty$ και υποθέτοντας ότι το $p = \lambda / n$ είναι πολύ μικρό, έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \quad (2.52)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (2.53)$$

έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \quad (2.54)$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k e^{-\lambda} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^k e^{-\lambda} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned} \quad (2.55)$$

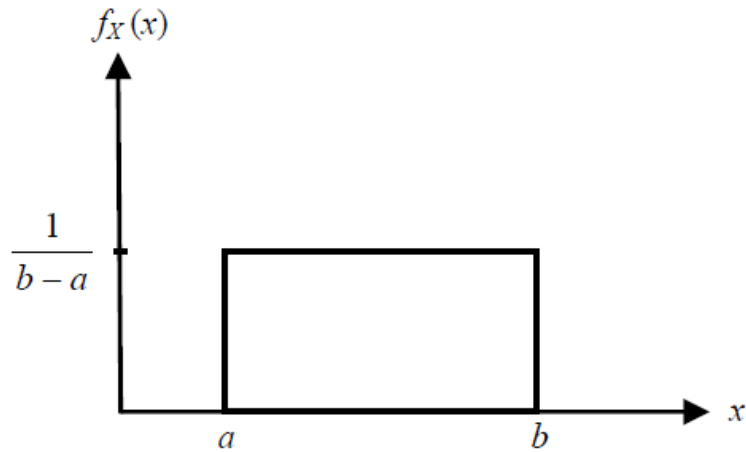
εφόσον ο όρος εντός των αγκυλών, τείνει στο 1. Να σημειωθεί επίσης ότι, από την ενότητα 2.2.3, η υπεργεωμετρική κατανομή μπορεί να προσεγγιστεί με μία διωνυμική κατανομή, και συνεπώς από μια κατανομή Poisson.

2.3 Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

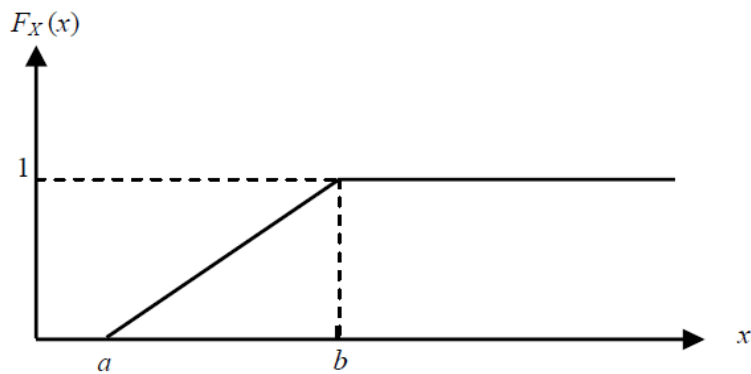
2.3.1 Η ομοιόμορφη κατανομή

Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα από το a στο b , $a < b$, όπως απεικονίζεται στο διάγραμμα 2.1, αν η συνάρτηση πυκνότητάς της δίνεται από τον τύπο

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.56)$$



Διάγραμμα 2.1 Συνάρτηση πυκνότητας ομοιόμορφης κατανομής



Διάγραμμα 2.2 Συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής

Η συνάρτηση κατανομής της X , που φαίνεται στο διάγραμμα 2.2, δίνεται από τον τύπο

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1 & , \quad x \geq b \end{cases} \quad (2.57)$$

Η μέση τιμή, η διασπορά, και η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι, αντίστοιχα,

$$E[X] = \frac{1}{2}(a+b) \quad (2.58)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2 \quad (2.59)$$

και

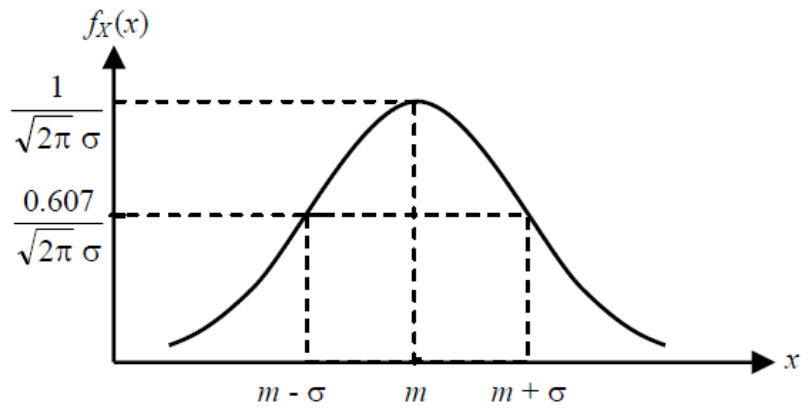
$$\Phi_x(\omega) = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)} \quad (2.60)$$

2.3.2 Η κανονική κατανομή

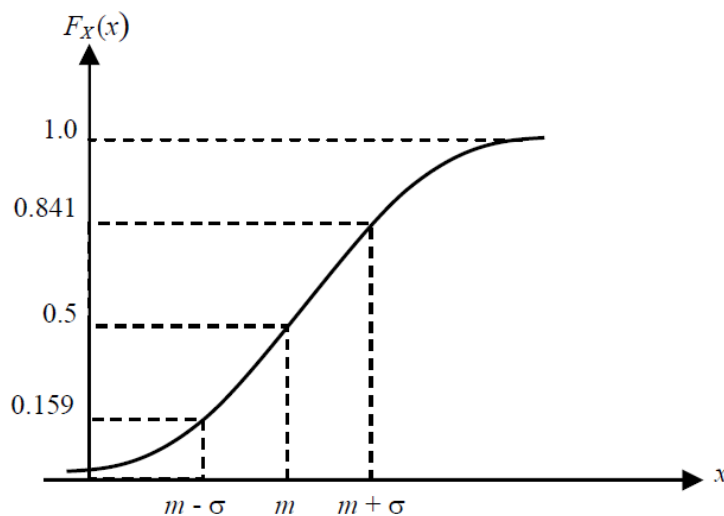
Μία από τις πιο σημαντικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές μιας κατανομής πιθανότητας είναι η *κανονική κατανομή*. Συχνά καλείται και *Γκαουσιανή (Gaussian)* κατανομή και απεικονίζεται στο διάγραμμα 2.3. Η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ for all } x \quad (2.61)$$

όπου τα m και σ είναι, αντίστοιχα, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της X και ικανοποιούν τις συνθήκες $-\infty < m < \infty$ και $\sigma > 0$.



Διάγραμμα 2.3 Κανονική συνάρτηση πυκνότητας



Διάγραμμα 2.4 Κανονική συνάρτηση κατανομής

Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2.4, δίνεται από τη σχέση

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right] du \quad (2.62)$$

Η συνάρτηση κατανομής μπορεί να οριστεί και σε όρους *συνάρτησης σφάλματος*. Η συνάρτηση σφάλματος που συμβολίζεται με $\text{erf}(\cdot)$, προσδιορίζεται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους στη βιβλιογραφία. Ορίζουμε τη συνάρτηση σφάλματος ως

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (2.63)$$

Πρόσθετες πληροφορίες για τη συνάρτηση σφάλματος και για το στατιστικό της πίνακα, δίνονται στο παράρτημα. Έστω $u = (x - m) / \sigma$ στη (2.61). Τότε $du = dx / \sigma$, και η συνάρτηση κατανομής γίνεται

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = I(x) \quad (2.64)$$

Οι τιμές της $I(x)$ επίσης καταγράφονται στο παράρτημα. Η κατανομή που περιγράφεται στη (2.64) μπορεί να γραφτεί και ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (2.65)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης σφάλματος που δόθηκε στη (2.63), η συνάρτηση κατανομής, γίνεται

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.66)$$

Ορίζουμε ως τυποποιημένη κανονική κατανομή την κανονική κατανομή με μέση τιμή $m = 0$ και διασπορά $\sigma^2 = 1$, που συμβολίζεται $N(0,1)$, και εκφράζεται ως

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.67)$$

Η αντίστοιχη κατανομή δίνεται στη (2.66) όσον αφορά τη συνάρτηση σφάλματος. Άλλα σημαντικά αποτελέσματα που χρειάζεται να εξάγουμε, είναι η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος και η συνάρτηση-Q που δίνονται από τις σχέσεις

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \quad (2.68)$$

τέτοια ώστε

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erfc}(x) \quad (2.69)$$

και

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (2.70)$$

όπου

$$Q(0) = \frac{1}{2} \quad (2.71)$$

και

$$Q(-x) = 1 - Q(x) \quad \text{for } x \geq 0 \quad (2.72)$$

Σημειώστε ότι, χρησιμοποιώντας τις (2.67) και (2.70), η συνάρτηση-Q μπορεί να γραφτεί με βάση τη συνάρτηση σφάλματος ως εξής

$$Q(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (2.73a)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.73b)$$

Επίσης ισχύει

$$I(x) + Q(x) = 1 \quad (2.74)$$

και

$$Q(x) \cong \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{for } x > 4 \quad (2.75)$$

Σε κάποια βιβλία, η $Q(x)$ όπως ορίστηκε στη (2.70) συμβολίζεται $\operatorname{erfc}^*(x)$, ενώ η $I(x)$ στη (2.64) συμβολίζεται $\operatorname{erf}^*(x)$ και συνεπώς $\operatorname{erf}^*(x) + \operatorname{erfc}^*(x) = 1$ όπως βλέπουμε στη (2.74).

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση γνωρίζουμε ότι είναι

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{tx} dx = \exp \left(mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) \quad (2.76)$$

και η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι

$$\Phi_x(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \exp \left(jm\omega - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \right) \quad (2.77)$$

Οι ροπές, μπορεί να εξαχθεί από τη χαρακτηριστική συνάρτηση ότι είναι

$$E[X^n] = \frac{1}{j^n} \frac{d^n}{d\omega^n} \Phi_x(\omega) \Big|_{\omega=0} = n! \sum_{k=0}^K \frac{m^{n-2k} \sigma^{2k}}{2^k k! (n-2k)!} \quad (2.78a)$$

όπου

$$K = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{for } n \text{ even} \\ \frac{n-1}{2} & \text{for } n \text{ odd} \end{cases} \quad (2.78b)$$

Αν η τυχαία μεταβλητή έχει μέση τιμή ίση με το μηδέν, η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι

$$\Phi_x(x) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \omega^2} = 1 - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\sigma^4 \omega^4}{4} - \frac{1}{3!} \frac{\sigma^6 \omega^6}{8} + \dots \quad (2.79)$$

Ως εκ τούτου, οι ροπές είναι

$$E[X^n] = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ odd} \\ \frac{n! \sigma^n}{(n/2)! 2^{n/2}} & \text{for } n \text{ even} \end{cases} \quad (2.80)$$

Παράδειγμα 2.5

Υποθέτουμε ότι η Y έχει την κατανομή $N(m, \sigma^2)$. Θέλουμε να βρούμε την τιμή του λ , έτσι ώστε $P(Y > \lambda) = \alpha$, όπου α και λ είναι σταθερές.

Λύση

Η πιθανότητα να είναι η Y μεγαλύτερη από λ είναι

$$P(Y > \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y-m)^2\right] dy$$

Πρέπει να κάνουμε αλλαγή μεταβλητών έτσι ώστε να φθάσουμε στην τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Έστω

$$x = (y-m)/\sqrt{2}\sigma$$

Τότε,

$$dy = \sqrt{2}\sigma dx,$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\alpha = P(Y > \lambda) = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda-m}{\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} dx$$

Έτσι έχουμε, $\alpha = (1/2) \operatorname{erfc}[(\lambda-m)/\sqrt{2}\sigma]$. Ή, θέτοντας $x = (y-m)/\sigma \Rightarrow dx = \sigma dy$, έχουμε

$$\alpha = P(Y > \lambda) = \int_{\frac{\lambda-m}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\frac{\lambda-m}{\sigma}\right) = 1 - I\left(\frac{\lambda-m}{\sigma}\right)$$

Δίνουμε, τώρα, ένα αριθμητικό παράδειγμα έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα της συνάρτησης- Q ή συνάρτησης σφάλματος. Έστω $m = 3$, $\sigma^2 = 4$, και $\lambda = 4$. Τότε,

$$\begin{aligned} P(Y > 4) &= 1 - P\left(X = \frac{Y-m}{\sigma} \leq \frac{4-m}{\sigma} = \frac{4-3}{2}\right) \\ &= 1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - I\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 0.6915 = 0.3085 \end{aligned}$$

όπου X είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή, και $P(X \leq 1/2) = I(1/2) = 0.6915$ που εξάγεται απευθείας από τον πίνακα στο Παράρτημα. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε για το α αντικαθιστώντας απλά τα αριθμητικά δεδομένα και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση σφάλματος όπως ορίστηκε στη (2.63).

Αν η Y έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή m και διασπορά σ^2 , η πιθανότητα να βρίσκεται η Y μεταξύ a και b είναι

$$\begin{aligned} P(a \leq Y \leq b) &= P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq \frac{Y-m}{\sigma} \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) \\ &= F_X\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F_X\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = I\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - I\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \quad (2.81) \end{aligned}$$

όπου X είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή που ορίσαμε στη (2.64). Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης σφάλματος, η $P(a \leq Y \leq b)$ που δόθηκε στη (2.81) γίνεται

$$P(a \leq Y \leq b) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

Για το αριθμητικό παράδειγμα που είδαμε, όπου $Y = N(3, 4)$ έχουμε,

$$\begin{aligned} P(2 < Y < 5) &= P\left(\frac{2-3}{2} < \frac{Y-3}{2} \leq \frac{5-3}{2}\right) \\ &= P\left(-\frac{1}{2} < X \leq 1\right) = P(X \leq 1) - P\left(X < -\frac{1}{2}\right) \\ &= I(1) - I\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.8413 - 0.3085 = 0.5328 \end{aligned}$$

Στο κεφάλαιο 1, δώσαμε τον ορισμό του νόμου των μεγάλων αριθμών. Τώρα θα διατυπώσουμε το *κεντρικό οριακό θεώρημα*, χωρίς απόδειξη, το οποίο ουσιαστικά αναφέρει ότι το άθροισμα n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που έχουν την ίδια συνάρτηση πυκνότητας, προσεγγίζει την τυποποιημένη κανονική κατανομή όσο το n αυξάνεται.

Κεντρικό οριακό θεώρημα

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ μια αλληλουχία ανεξάρτητων και όμοια κατανομημένων τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή οι αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας, $f_{X_k}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, είναι ίδιες. Έστω $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, το άθροισμα των n τυχαίων μεταβλητών, με μία πεπερασμένη μέση τιμή $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, και διασπορά $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$, όπου

$$m_k = E[X_k]$$

και

$$\sigma_k^2 = \operatorname{var}[X_k], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας της S_n , που δίνεται από τη σχέση

$$f_{S_n}(x) = f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x) * \dots * f_{X_n}(x),$$

προσεγγίζει μια τυποποιημένη κανονική κατανομή όσο το n αυξάνεται, δηλαδή,

$$f_{S_n}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.82)$$

Αν το άθροισμα S_n κανονικοποιηθεί, έτσι ώστε

$$S_n = \sum_{k=1}^n (X_k - m_k) / \sigma,$$

τότε η κατανομή S_n προσεγγίζει την τυποποιημένη κανονική κατανομή, δηλαδή,

$$f_{S_n}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.83)$$

Πιο συγκεκριμένα, αν οι μέσες τιμές και οι διασπορές είναι ίσες, $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ και

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2 = \sigma^2,$$

τότε η S_n είναι $N(0, 1)$, και

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[a \leq \frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \leq b \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[a \leq \frac{(X_1 - m) + (X_2 - m) + \dots + (X_n - m)}{\sigma \sqrt{n}} \leq b \right] \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned} \quad (2.84)$$

Το θεώρημα αυτό ισχύει για όλες τις κατανομές, αλλά θα ασχοληθούμε μόνο με τη διωνυμική κατανομή και την κατανομή Poisson. Για τη διωνυμική κατανομή, αν ο αριθμός των δοκιμών Bernoulli n είναι μεγάλος, η τυχαία μεταβλητή U που δίνεται από τη σχέση

$$U = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \quad (2.85)$$

όπου p είναι η πιθανότητα επιτυχίας, προσεγγίζει την κανονική κατανομή. Δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[a \leq \frac{U - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (2.86)$$

Ομοίως, αφού η κατανομή Poisson έχει μέση τιμή λ και διασπορά λ , και έχοντας δείξει στην ενότητα 2.2.4 ότι η παράμετρος λ στην κατανομή Poisson σχετίζεται με το np στη διωνυμική κατανομή ($\lambda = np$), έχουμε,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P \left[a \leq U = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq b \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (2.87)$$

Αν και η κανονική κατανομή είναι η πιο σημαντική κατανομή, υπάρχουν πολλές εφαρμογές για τις οποίες η κανονική κατανομή δε θα ήταν η καταλληλότερη. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε άλλες ενδιαφέρουσες κατανομές.

2.3.3 Η εκθετική κατανομή και η κατανομή Laplace

Μια τυχαία μεταβλητή X έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο β , $\beta > 0$, εάν η συνάρτηση πυκνότητάς της δίνεται από τον τύπο

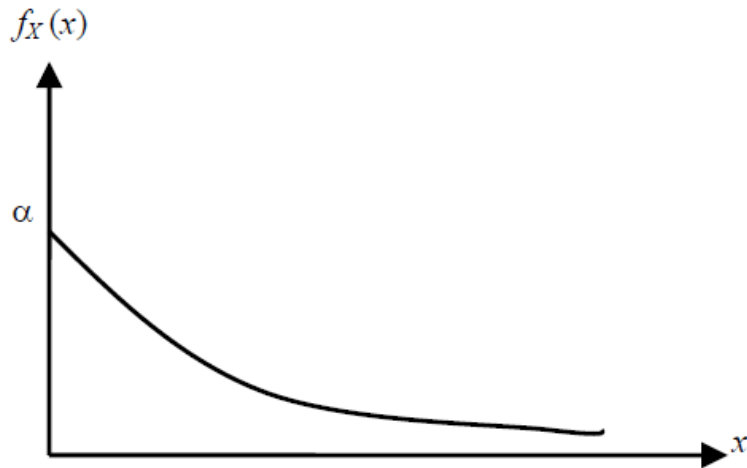
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta}(x-a)}, & x \geq a, -\infty < a < +\infty \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.88)$$

Αν θέσουμε $a = 0$ και $\alpha = 1/\beta$, τότε η $f_X(x)$, όπως αποτυπώνεται στο διάγραμμα 2.5, γίνεται

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.89)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της X είναι

$$E[X] = \beta = \frac{1}{\alpha} \quad (2.90)$$



Διάγραμμα 2.5 Συνάρτηση πυκνότητας εκθετικής κατανομής

και

$$\text{var}[X] = \beta^2 = \frac{1}{\alpha^2} \quad (2.91)$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση και η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι

$$M_x(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t} = \frac{1}{1 - \beta t}, \quad t < \beta^{-1} \quad (2.92)$$

και

$$\Phi_x(\omega) = \left(1 - \frac{j\omega}{\alpha}\right)^{-1} = \frac{1}{1 - j\beta\omega} \quad (2.93)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας Laplace ορίζεται ως

$$f_X(x) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x-m|}{\lambda}\right) \quad -\infty < x < \infty, \quad \lambda > 0, \text{ and } -\infty < m < \infty \quad (2.94)$$

Εάν θέσουμε τη μέση τιμή $m = 0$ και $\alpha = 1/\lambda$, η συνάρτηση πυκνότητας γίνεται

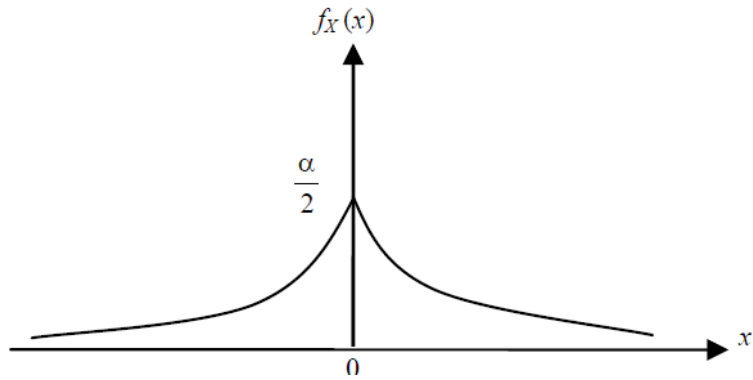
$$f_X(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} \quad (2.95)$$

Και απεικονίζεται στο διάγραμμα 2.6. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση και η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής Laplace που ορίστηκε στη (2.94), είναι

$$M_x(t) = \frac{e^{mt}}{1 - \lambda^2 t^2}, \quad |t| < \frac{1}{\lambda} \quad (2.96)$$

και

$$\Phi_x(\omega) = \frac{e^{-jm\omega}}{1 + \lambda^2 \omega^2} \quad (2.97)$$



Διάγραμμα 2.6 Συνάρτηση πυκνότητας κατανομής Laplace

2.3.4 Οι κατανομές Γάμμα και Βήτα

Σε αυτήν την ενότητα, θα περιγράψουμε πρώτα τη συνάρτηση Γάμμα προτού παρουσιάσουμε τις κατανομές Γάμμα και Βήτα. Η συνάρτηση Γάμμα, που συμβολίζεται ως Γ , ορίζεται ως εξής

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0 \quad (2.98)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα, συγκλίνει για $\alpha > 0$. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη, χρησιμοποιώντας τις μετατροπές $u = x^{\alpha-1}$ and $dv = e^{-x} dx$, προκύπτει

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-2} dx = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1) \quad (2.99)$$

Συνεχίζοντας καθ' αυτόν τον τρόπο και υποθέτοντας ότι το α είναι κάποιος θετικός ακέραιος αριθμός, $\alpha = n$, παίρνουμε

$$\Gamma(n) = (n - 1)(n - 2) \dots \Gamma(1) = (n - 1)! \quad (2.100)$$

Όπου

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα για τη συνάρτηση Γάμμα είναι

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi} \quad (2.101)$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε την κατανομή Γάμμα. Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι έχει κατανομή Γάμμα, ή ότι κατανέμεται ως γάμμα, όπως δείχνει το διάγραμμα 2.7, εάν η συνάρτηση πυκνότητάς της δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.102)$$

Συμβολίζεται επίσης και ως $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Η μέση τιμή και η διασπορά είναι, αντίστοιχα,

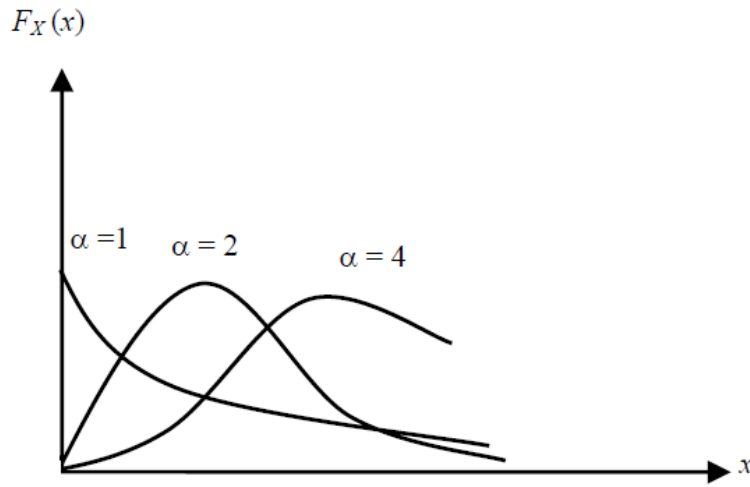
$$E[X] = m = \alpha\beta \quad (2.103)$$

και

$$\text{var}[X] = \sigma^2 = \alpha\beta^2 \quad (2.104)$$

ενώ η ροπογεννήτρια συνάρτηση και η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι

$$M_x(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \quad (2.105)$$



Διάγραμμα 2.7 Συνάρτηση πυκνότητας κατανομής Γάμμα

και

$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{(1-j\beta\omega)^\alpha} \quad (2.106)$$

Προτού ορίσουμε την κατανομή Βήτα, θα ορίσουμε τη συνάρτηση βήτα $B(\alpha, \beta)$, και θα δώσουμε το συσχετισμό της με τη η συνάρτηση γάμμα. Η συνάρτηση βήτα ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du, \quad \alpha > 0 \text{ and } \beta > 0 \\ &= 2 \int_0^1 u^{2\alpha-1} (1-u^2)^{\beta-1} du \end{aligned} \quad (2.107)$$

Η συνάρτηση βήτα συνδέεται με τη συνάρτηση γάμμα με την ακόλουθη σχέση

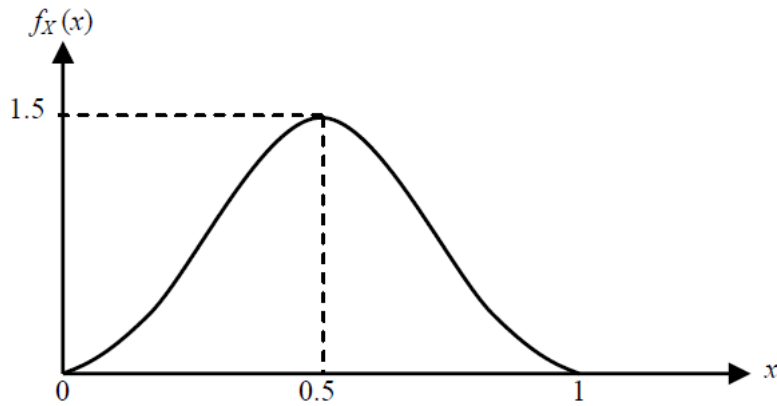
$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\beta, \alpha) \quad (2.108)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας βήτα, που απεικονίζεται στο διάγραμμα 2.8, με παραμέτρους α και β , ορίζεται ως εξής

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1, \alpha > 0 \text{ and } \beta > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.109)$$

και γράφουμε $X \sim B(\alpha, \beta)$. Χρησιμοποιώντας τη (2.108), η συνάρτηση πυκνότητας βήτα μπορεί να γραφτεί ως

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1, \alpha > 0, \text{ and } \beta > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.110)$$



Διάγραμμα 2.8 Συνάρτηση πυκνότητας βήτα. $\alpha = \beta = 2$ και $f_X(x) = 6x(1-x)$

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην ειδική περίπτωση όπου $\alpha = \beta = 1$, στην ουσία έχουμε την ομοιόμορφη κατανομή για $0 < x < 1$. Η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής βήτα για $\alpha > 1$ και $\beta > 1$ δίνονται από τη σχέση

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (2.111)$$

και

$$\text{var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)} \quad (2.112)$$

ενώ η ροπογεννήτρια συνάρτηση και η χαρακτηριστική συνάρτηση έχουν ως εξής

$$M_X(t) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 e^{tx} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)\Gamma(\alpha)} \quad (2.113)$$

και

$$\Phi_X(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\omega)^k}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)\Gamma(\alpha)} \quad (2.114)$$

2.3.5 Η Χi- τετράγωνο κατανομή

Η Χi τετράγωνο κατανομή είναι μια σημαντική συνάρτηση κατανομής. Μπορεί να θεωρηθεί σαν ειδική περίπτωση της κατανομής Γάμμα με $\alpha = n/2$ και $\beta = 2$, όπου το n είναι ένας θετικός ακέραιος. Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει *χι τετράγωνο κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας*, και συμβολίζουμε χ^2_n , αν η συνάρτηση πυκνότητάς της δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{(n/2)-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.115)$$

Η χιτετράγωνο κατανομή αναπαριστά την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X , όπου

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \quad (2.116)$$

και $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, είναι η τυποποιημένη κανονική τυχαία μεταβλητή $N(0, 1)$ που ορίσαμε στη (2.67). Δηλαδή, η μέση τιμή ισούται με το 0 και η διασπορά με το 1. Οι X_i είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες. Η μέση τιμή και η διασπορά της χ^2 τετράγωνο κατανομής είναι

$$E[X] = E[\chi_n^2] = n \quad (2.117)$$

και

$$\text{var}[X] = \text{var}[\chi_n^2] = 2n \quad (2.118)$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση και η χαρακτηριστική συνάρτηση αντίστοιχα, έχουν ως εξής

$$M_x(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}} \quad \text{for } t < \frac{1}{2} \quad (2.119)$$

και

$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{(1-j2\omega)^{n/2}} \quad (2.120)$$

Αν υποθέσουμε ότι τα X_i εξακολουθούν να έχουν μέση τιμή 0 αλλά οι διασπορές δεν είναι κανονικοποιημένες στο 1 αλλά ίσες με σ^2 , δηλαδή, $E[X_i^2] = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$, τότε, η συνάρτηση πυκνότητας της X είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{(n/2)-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.121)$$

Ενώ η χαρακτηριστική συνάρτηση γίνεται

$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{(1-j2\omega\sigma^2)^{n/2}} \quad (2.122)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά είναι

$$E[X] = n\sigma^2 \quad (2.123)$$

και

$$\text{var}[X] = 2n\sigma^4 \quad (2.124)$$

Έτσι, η δεύτερη ροπή είναι $E[X^2] = 2n\sigma^4 + n^2\sigma^4$. Η συνάρτηση κατανομής είναι το ολοκλήρωμα της (2.121), δίνοντας

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2} \Gamma(n/2)} u^{(n/2)-1} e^{-\frac{u}{2\sigma^2}} du \quad (2.125)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\int_0^x u^m e^{-\alpha u} dx = \frac{m!}{\alpha^{n+1}} e^{-\alpha x} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!} \frac{x^k}{\alpha^{m-k+1}}, \quad x > 0 \text{ and } \alpha > 0 \quad (2.126)$$

και το ότι $m = n/2$ ένας ακέραιος, προκύπτει ότι η συνάρτηση κατανομής της X είναι

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2\sigma^2}\right)^k, \quad x \geq 0 \quad (2.127)$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι τα X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, στη (2.116) εξακολουθούν να είναι ανεξάρτητες κανονικές μεταβλητές αλλά με μέση τιμή $E[X_i] = m_i$ και διασπορά $\sigma^2 = \text{var}[X_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, τότε η,

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \quad (2.128)$$

λέγεται ότι είναι μη κεντρική χι τετράγωνο τυχαία μεταβλητή με n βαθμούς ελευθερίας. Η συνάρτηση πυκνότητας της X δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}} e^{-\frac{(x+\lambda)}{2\sigma^2}} I_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{x\lambda}}{\sigma^2}\right), \quad x \geq 0 \quad (2.129)$$

όπου το λ , που ονομάζεται παράμετρος μη κεντρικότητας, δίνεται από τον τύπο

$$\lambda = \sum_{i=1}^n m_i^2 \quad (2.130)$$

και η $I_\alpha(x)$ είναι η πρώτου είδους τροποποιημένη συνάρτηση Bessel τάξης α , [ο $\alpha = (n/2) - 1$ δεν είναι ακέραιος], και μπορεί να γραφτεί σαν

$$I_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2k}, \quad x \geq 0 \quad (2.131)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της X είναι

$$E[X] = n\sigma^2 + \lambda \quad (2.132)$$

και

$$\text{var}[X] = 2n\sigma^4 + 4\sigma^2 \lambda \quad (2.133)$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση και η χαρακτηριστική συνάρτηση αποδεικνύεται ότι είναι

$$M_x(t) = \frac{1}{(1-2t\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(\frac{\lambda t}{1-2t\sigma^2}\right), \quad t < \frac{1}{2} \quad (2.134)$$

και

$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{(1-j2\omega\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(\frac{j\omega\lambda}{1-j2\omega\sigma^2}\right) \quad (2.135)$$

Η συνάρτηση κατανομής της μη κεντρικής χι τετράγωνο τυχαίας μεταβλητής με μεταβλητή n βαθμών ελευθερίας δεν έχει έκφραση κλειστής μορφής. Ωστόσο, θα τη μελετήσουμε έτσι ώστε να οδηγηθούμε στη συνάρτηση- Q , η οποία θα χρησιμοποιηθεί αργότερα στο βιβλίο. Έχουμε

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}} e^{-\frac{(u+\lambda)}{2\sigma^2}} I_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{\lambda u}}{\sigma^2}\right) du \quad (2.136)$$

Αν το $m = n/2$ είναι ακέραιος αριθμός, έχουμε

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\frac{m-1}{2}} e^{-\frac{(u+\lambda)}{2\sigma^2}} I_{m-1} \left(\frac{\sqrt{\lambda u}}{\sigma^2}\right) du \quad (2.137)$$

Η γενικευμένη συνάρτηση Marcum -Q ορίζεται ως

$$Q_m(a, b) = \int_b^{\infty} x \left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} e^{-\frac{(x^2+a^2)}{2}} I_{m-1}(ax) dx \quad (2.138)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\int_0^{\infty} f_X(x) dx = 1 = \int_0^x f_X(u) du + \int_x^{\infty} f_X(u) du \quad (2.139)$$

προκύπτει ότι η συνάρτηση κατανομής μπορεί να γραφεί ως

$$F_X(x) = 1 - \int_x^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\frac{m-1}{2}} e^{-\frac{(u+\lambda)}{2\sigma^2}} I_{m-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda u}}{\sigma}\right) du \quad (2.140)$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές $v^2 = u/\sigma^2$ και $a^2 = \lambda/\sigma^2$, και άρα $2\sigma^2 dv = du$, η συνάρτηση κατανομής γίνεται

$$F_X(x) = 1 - \int_{\sqrt{x}/\sigma}^{\infty} v \left(\frac{v}{a}\right)^{m-1} e^{-\frac{(v^2+a^2)}{2}} I_{m-1}(av) dv \quad (2.141)$$

Συγκρίνοντας τις (2.141) και (2.138), η συνάρτηση κατανομής, είναι, σε σχέση με τη συνάρτηση Marcum -Q,

$$F_X(x) = 1 - Q_m\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sigma}, \frac{\sqrt{x}}{\sigma}\right) \quad (2.142)$$

Η μη κεντρική χι τετράγωνο τυχαία μεταβλητή που ορίστηκε στη (2.129) μερικές φορές καλείται *μη κεντρική γάμμα*, ενώ η κανονικοποιημένη μη κεντρική χι τετράγωνο τυχαία μεταβλητή ($\sigma^2 = 1$) αναφέρεται ως μη κεντρική χι τετράγωνο. Στο παρόν βιβλίο, θα αναφέρεται, όπως και στο μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας, ως η μη κεντρική χι τετράγωνο τυχαία μεταβλητή. Η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικοποιημένης μη κεντρικής χι τετράγωνο τυχαίας μεταβλητής εξάγεται απευθείας από τη (2.129) και είναι

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}} e^{-\frac{(x+\lambda)}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}(\sqrt{\lambda x}), x \geq 0 \quad (2.143)$$

Όπου τα

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

και

$$X_i, i = 1, 2, \dots, n$$

είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $E[X_i] = m_i$, αλλά έχουν μοναδιαία διασπορά. Η παράμετρος μη κεντρικότητας λ είναι όπως ορίστηκε στη (2.130). Σημειώστε επίσης ότι η χι τετράγωνο τυχαία μεταβλητή που δίνεται στη (2.115) είναι απλά η γάμμα τυχαία μεταβλητή που δόθηκε στη (2.102) με $\alpha = n/2$, $n > 0$ ακέραιο, και $\beta = 2$. Αυτό οδηγεί κάποιους συγγραφείς στο να αναφέρονται στην κανονικοποιημένη μη κεντρική χι τετράγωνο τυχαία μεταβλητή ως (μη κεντρική γάμμα τυχαία μεταβλητή).

2.3.6 Οι κατανομές Rayleigh, Rice και Maxwell

Η κατανομή Rayleigh, που χρησιμοποιείται συχνά για να μοντελοποιήσει τα στατιστικά των σημάτων, βρίσκει εφαρμογές σε πολλά προβλήματα σχετικά με ραντάρ και επικοινωνίες.

Έστω

$$X = X_1^2 + X_2^2,$$

όπου X_1 και X_2 είναι στατιστικά ανεξάρτητες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και έχοντας κάθε μία, διασπορά σ^2 . Τότε, από τη (2.116), η X έχει μια χι τετράγωνο κατανομή με $n = 2$ βαθμούς ελευθερίας. Αντικαθιστώντας το $n = 2$ στη (2.121), βρίσκουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{x}{2\sigma^2}\right), & x \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.144)$$

Τώρα, ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή, την

$$Y = \sqrt{X} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (2.145)$$

Αυτή είναι μια απλή μετατροπή τυχαίων μεταβλητών με $Y = g(X) = \sqrt{x}$. Εφαρμόζοντας το θεμελιώδες θεώρημα που δόθηκε στη (1.144), έχουμε

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right), & y \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.146)$$

Λέμε ότι η Y έχει κατανομή Rayleigh, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2.9(α). Η συνάρτηση κατανομής, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2.9(β), δίνεται από τη σχέση

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & y \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.147)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι ροπή τάξης k της κατανομής Rayleigh περιγράφεται από τη σχέση

$$E[Y^k] = (2\sigma^2)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \quad (2.148)$$

Έτσι, η μέση τιμή και η διασπορά της Y έχουν ως εξής

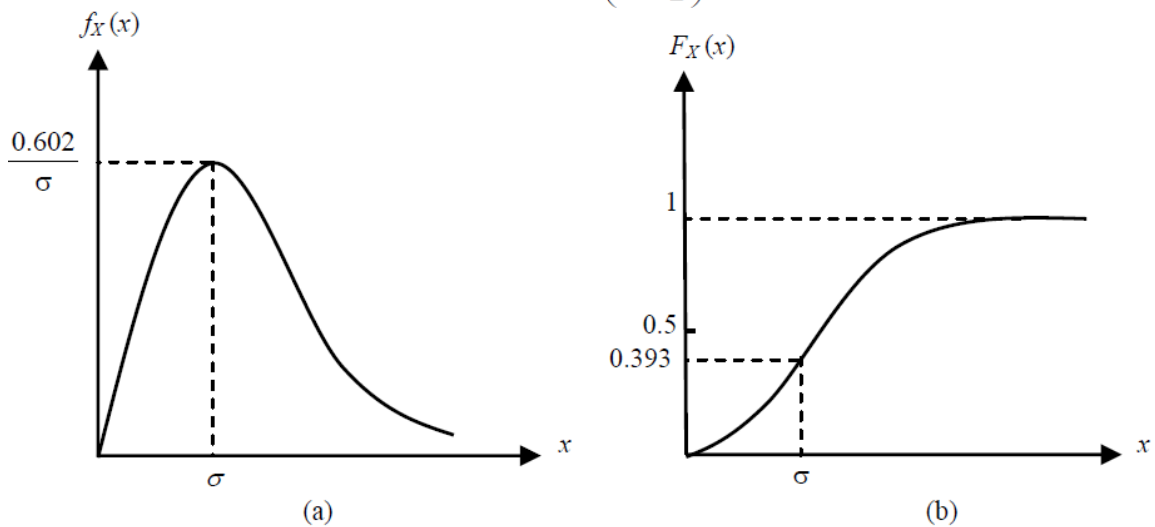
$$E[Y] = \sqrt{2} \sigma \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (2.149)$$

αφού

$$\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi/2}$$

και

$$\text{var}[Y] = \sigma_y^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2 \quad (2.150)$$



Διάγραμμα 2.9 α) Συνάρτηση πυκνότητας και β) Συνάρτηση κατανομής Rayleigh

Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι

$$\begin{aligned} \Phi_y(\omega) &= \int_0^{\infty} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} e^{j\omega y} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \cos \omega y dy + j \int_0^{\infty} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \sin \omega y dy \\ &= {}_1F_1\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \omega^2 \sigma^2\right) + j \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega \sigma^2 e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}} \end{aligned} \quad (2.151)$$

όπου ${}_1F_1(a; b; x)$ είναι η συμβάλλουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση, η οποία ορίζεται ως

$${}_1F_1(a; b; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+k)} \cdot \frac{x^k}{k!}, \quad b \neq 0, -1, -2, \dots \quad (2.152)$$

και

$${}_1F_1\left(1; \frac{1}{2}; -a\right) = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(2k-1)k!} \quad (2.153)$$

Παράδειγμα 2.6

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = P(X \leq x)$, να καθοριστεί η συνάρτηση πυκνότητας των

α) $X = X_1^2 + X_2^2$

β) $X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$

όπου X_1 και X_2 είναι όμοιες και ανεξάρτητες συναρτήσεις κανονικής πυκνότητας με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ^2 .

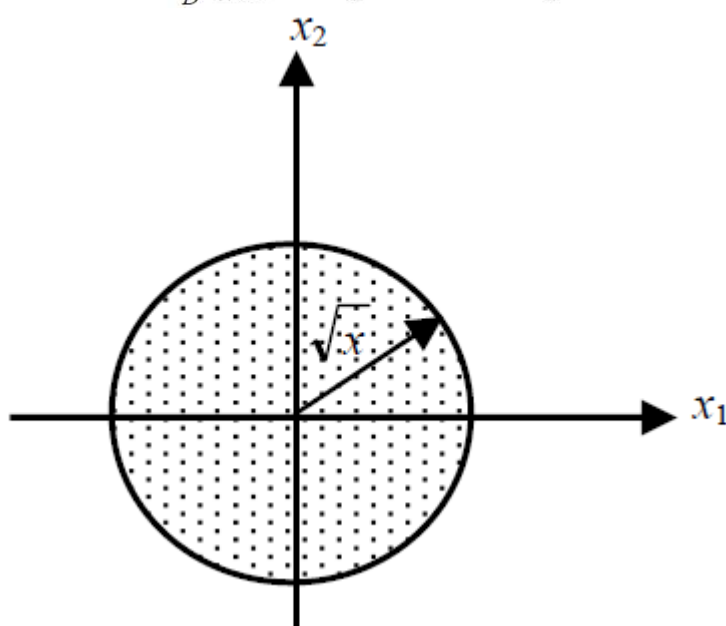
Λύση

α) Η συνάρτηση κατανομής της X είναι

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \iint_D f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad x \geq 0$$

όπου D είναι ένα πεδίο ορισμού των X_1 και X_2 , το οποίο σε αυτήν την περίπτωση είναι η επιφάνεια σε κύκλο ακτίνας \sqrt{x} , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10. Ως εκ τούτου,

$$F_X(x) = \iint_D \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right] dx_1 dx_2$$



Διάγραμμα 2.10 Περιοχή του

$$X_1^2 + X_2^2 \leq x, \quad x \geq 0.$$

Για να επιλύσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, κάνουμε τη μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες θέτοντας $x_1 = r \cos \theta$ και $x_2 = r \sin \theta$ έτσι ώστε $dx_1 dx_2 = r dr d\theta$ και $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Έτσι, έχουμε

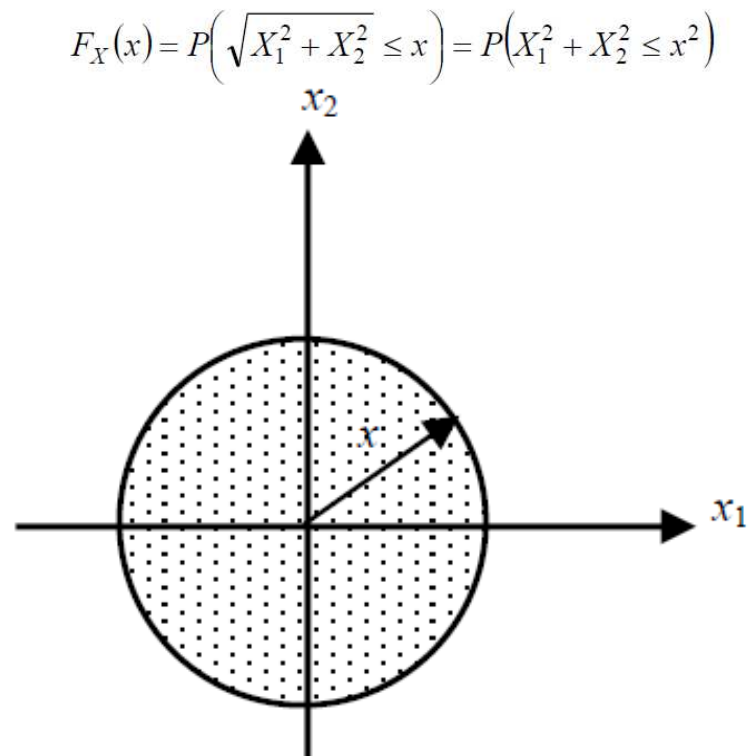
$$F_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{x}} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = 1 - e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0$$

Η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

η οποία αντιστοιχεί στην κατανομή χ^2 τετράγωνο με $n=2$ βαθμούς ελευθερίας, όπως δίνεται στη (2.144).

β) Αν $X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, τότε,



Διάγραμμα 2.11 Περιοχή του

$$\sqrt{X_1^2 + X_2^2} \leq x, \quad x > 0$$

Η περιοχή ολοκλήρωσης είναι η επιφάνεια που ορίζεται από τον κύκλο όπως απεικονίζεται αυτός στο διάγραμμα 2.11, αλλά η ακτίνα είναι x , και όχι \sqrt{x} όπως στο διάγραμμα 2.10. Και στη συγκεκριμένη περίπτωση, κάνοντας τη μετατροπή από Καρτεσιανές συντεταγμένες σε πολικές, η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ γίνεται

$$F_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^x r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0$$

Ενώ η συνάρτηση πυκνότητας γίνεται

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Η οποία αντιστοιχεί στη συνάρτηση πυκνότητας Rayleigh που δόθηκε (2.146). Θυμηθείτε ότι στη (2.146) καταλήξαμε χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα μετασχηματισμού τυχαίων μεταβλητών

Παράδειγμα 2.7

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή Rayleigh με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Θεωρούμε $Y = \alpha + bX^2$, όπου α και b είναι σταθερές. Να προσδιοριστεί η διασπορά της Y .

Λύση

Η διασπορά της Y είναι

$$\text{var}[Y] = \sigma_y^2 = E[Y^2] - E^2[Y]$$

Συνεπώς, $E[Y] = E[\alpha + bX^2] = \alpha + bE[X^2]$, $E^2[Y] = (\alpha + bE[X^2])^2 = \alpha^2 + 2\alpha bE[X^2] + b^2 E^2[X^2]$, και $E(Y^2) = E[(\alpha + bX^2)^2] = \alpha^2 + 2\alpha bE[X^2] + b^2 E[X^4]$. Αντικαθιστώντας τους όρους $E[Y^2]$ και $E^2[Y]$ στον τύπο της διασποράς της Y , έχουμε

$$\sigma_y^2 = b^2 \{E[X^4] - E^2[X^2]\}$$

Γνωρίζουμε από τη (2.148) ότι

$$E[X^k] = (2\sigma^2)^{\frac{k}{2}} \Gamma[1 + (k/2)]$$

Τότε, $E[X^4] = 2(2\sigma^2)^2 = 8\sigma^4$, $E[X^2] = 2\sigma^2$, και η διασπορά του Y γίνεται

$$\sigma_y^2 = b^2 (8\sigma^4 - 4\sigma^4) = 4b^2 \sigma^4$$

Θεωρούμε τώρα,

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

αλλά οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή m_i , $i = 1, 2$, και διασπορά η κάθε μία σ^2 . Σημειώστε ότι στον ορισμό της (2.145), οι X_1 και X_2 έχουν μέση τιμή μηδέν, που έδωσε στην

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

χαρακτήρα τυχαίας μεταβλητής κατανομημένης κατά Rayleigh, αλλά τώρα οι X_1 και X_2 έχουν μέση τιμή $m_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Άρα, από τη (2.128), η κατανομή της

$$R^2 = X_1^2 + X_2^2$$

είναι η μη κεντρική χι τετράγωνο τυχαία μεταβλητή που δόθηκε στη (2.129), με δύο ($n = 2$) βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη κεντρικότητας

$$\lambda = m_1^2 + m_2^2$$

Η συνάρτηση κατανομής της

$$R^2 = X_1^2 + X_2^2 = T$$

θα είναι

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{(\lambda+t)}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\sqrt{\lambda t}}{\sigma^2}\right), & t \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.154)$$

όπου, $I_0(x)$ είναι η μηδενικού είδους τροποποιημένη συνάρτηση Bessel που δίνεται από

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \quad (2.155)$$

Εφόσον

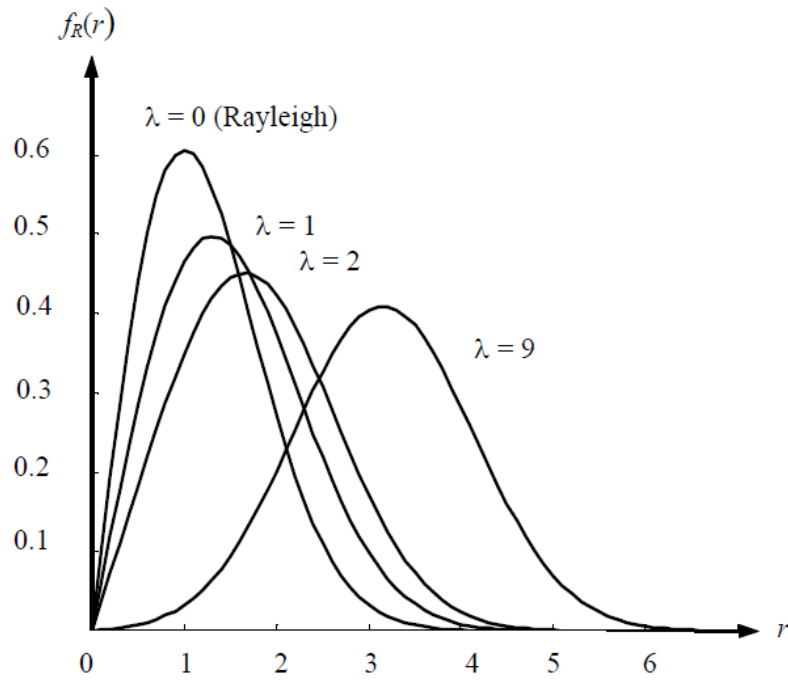
$$R = \sqrt{T} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2},$$

χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα (1.144) μετασχηματισμού τυχαίων μεταβλητών, λαμβάνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας Rice που είναι

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{(r^2+\lambda)}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\sqrt{\lambda} r}{\sigma^2}\right), & r \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.156)$$

Η κατανομή Rice με το λ σαν παράμετρο φαίνεται στο διάγραμμα 2.12. Η συνάρτηση κατανομής είναι η ακόλουθη

$$F_R(r) = \begin{cases} 1 - Q_1\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right), & r \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.157)$$



Διάγραμμα 2.12 Συνάρτηση πυκνότητας Rice

όπου $Q_1(a, b)$ είναι η συνάρτηση Marcum Q όπως ορίστηκε στη (2.138), τέτοια ώστε

$$Q_1(a, b) = e^{-\frac{(a^2+b^2)}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k I_k(ab), \quad b > a > 0 \quad (2.158)$$

Μία ακόμα ειδική περίπτωση είναι όταν $n = 3$. Τότε, η

$$X = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

με $X_1, X_2,$ και X_3 τυχαίες Γκαουσιανές μεταβλητές, η κάθε μία από τις οποίες έχει μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ^2 , είναι μια χι τετράγωνο κατανομή με τρεις βαθμούς ελευθερίας. Η κατανομή της

$$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$$

είναι γνωστή σαν κατανομή Maxwell. Απεικονίζεται στο διάγραμμα 2.13, και δίνεται από τον τύπο

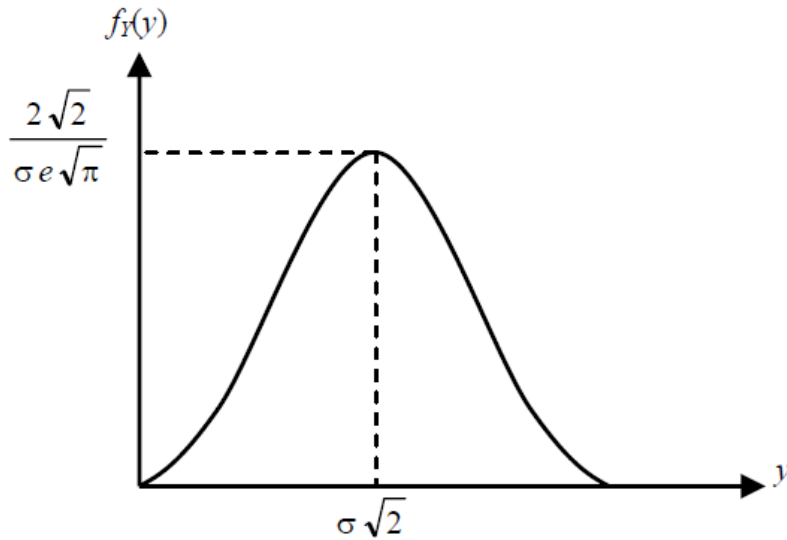
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & y \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.159)$$

με μέση τιμή

$$E[Y] = m_y = 2 \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.160)$$

και διασπορά

$$\text{var}[Y] = \sigma_y^2 = \sigma^2 \left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \quad (2.161)$$



Διάγραμμα 2.13 Συνάρτηση πυκνότητας Maxwell

Αν γενικεύσουμε το αποτέλεσμα της (2.159) για n τυχαίες μεταβλητές, $X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$, με $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, στατιστικά ανεξάρτητες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $m_i, i = 1, 2, \dots, n$, και έχοντας η κάθε μία διασπορά σ^2 , έχουμε την εξής συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1} \sigma^n \Gamma(n/2)} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.162)$$

Σε γενικές γραμμές, αν

$$Y = \sqrt{X} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2},$$

η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2 (\sqrt{\lambda})^{\frac{n}{2}-1}} y^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{(y^2 + \lambda)}{2\sigma^2}\right] I_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda} y}{\sigma^2}\right), & y \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.163)$$

και

$$\lambda = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2,$$

ενώ η συνάρτηση κατανομής δίνεται από

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \leq y^2)$$

$$= \begin{cases} 1 - Q_m\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sigma}, \frac{y}{\sigma}\right), & y \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.164)$$

Η ροπή τάξης k μπορεί να υπολογιστεί ότι είναι

$$\begin{aligned}
E[Y^k] &= \int_0^{\infty} y^k f_Y(y) dy = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} y^{k+1} e^{-\frac{(y^2+\lambda)}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\sqrt{\lambda} y}{\sigma^2}\right) dy \\
&= \left(2\sigma^2\right)^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\sigma^2}} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+k)\right]}{\Gamma(n/2)} {}_1F_1\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n}{2}; \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right), \quad y \geq 0 \quad (2.165)
\end{aligned}$$

όπου ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ είναι η συμβάλλουσα υπεργεωμετρική κατανομή.

2.3.7 Η m-κατανομή Nakagami

Η κατανομή Nakagami m χρησιμοποιείται σε συστήματα επικοινωνιών για να περιγράψει τα στατιστικά των σημάτων που διαδίδονται μέσω καναλιών εξασθένισης πολλαπλών διαδρομών. Η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{v}\right)^m x^{2m-1} e^{-\frac{mx^2}{v}} \quad (2.166)$$

όπου v είναι η μέση τετραγωνική τιμή της X, όπως ορίζεται στη

$$v = E[X^2] \quad (2.167)$$

και η παράμετρος m ορίζεται ως

$$m = \frac{v^2}{E[(X-v)^2]}, \quad m \geq \frac{1}{2} \quad (2.168)$$

Σημειώστε ότι η παράμετρος m είναι ένας λόγος ροπών και αναφέρεται σαν *εικόνα μείωσης* στα συστήματα επικοινωνιών. Η ροπή τάξης k της X δίνεται από

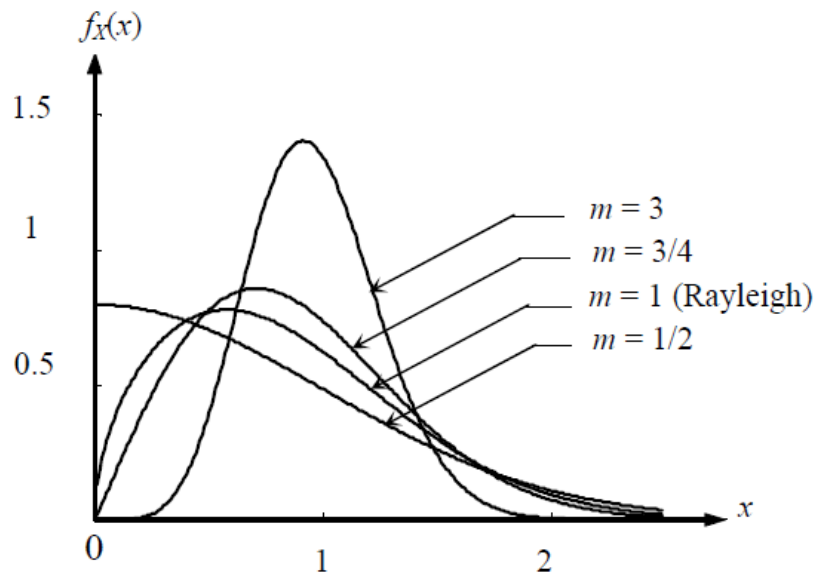
$$E[X^k] = \frac{\Gamma\left(m + \frac{k}{2}\right)}{\Gamma(m)} \left(\frac{v}{m}\right)^{\frac{k}{2}} \quad (2.169)$$

Παρατηρήστε ότι για m=1, καταλήγουμε στη συνάρτηση πυκνότητας Rayleigh που είδαμε στη (2.146). Μια απεικόνιση της $f_X(x)$ με το m σαν παράμετρο, απεικονίζεται στο διάγραμμα 2.14.

2.3.8 Η t- κατανομή ή κατανομή του Student, και η F-κατανομή

Έστω X μια Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μηδέν και μοναδιαία διασπορά $X \sim N(0, 1)$, και έστω Y μια χι τετράγωνο τυχαία μεταβλητή με n βαθμούς ελευθερίας $Y \sim \chi^2_n$. Αν η X και η Y είναι στατιστικά ανεξάρτητες, τότε η

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \quad (2.170)$$



Διάγραμμα 2.14 Συνάρτηση πυκνότητας Nakagami m

λέμε ότι ακολουθεί μια *t*-κατανομή (ή κατανομή του Student) με *n* βαθμούς ελευθερίας όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2.15, και δίνεται από τη σχέση

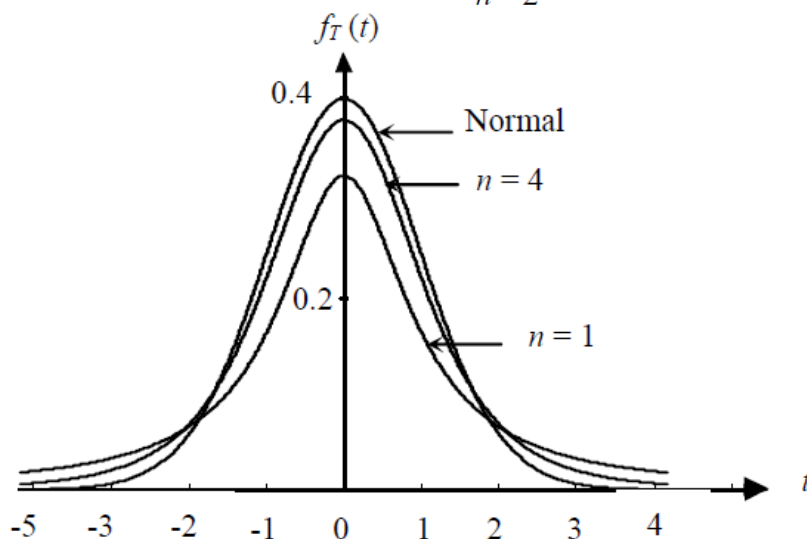
$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty \quad (2.171)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της *t*-κατανομής είναι

$$E[T] = m_t = 0 \quad (2.172)$$

και

$$\text{var}[T] = \sigma_t^2 = \frac{n}{n-2} \quad \text{for } n > 2 \quad (2.173)$$



Διάγραμμα 2.15 Συνάρτηση πυκνότητας *t*-κατανομής

Η ροπή τάξης *k* δίνεται από τη σχέση

$$E[T^k] = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n/2)} n^{\frac{k}{2}}, & k < n \text{ and } k \text{ even} \\ 0 & , \quad k < n \text{ and } k \text{ odd} \end{cases} \quad (2.174)$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση αποδεικνύεται ότι δίνεται από τον τύπο

$$\Phi_t(\omega) = \frac{1}{\pi \Gamma(n/2)} \left(\frac{|t|}{2\sqrt{n}} \right)^{\frac{n}{2}} Y_{\frac{n}{2}} \left(\frac{|t|}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.175)$$

όπου $Y_n(x)$ [που συμβολίζεται και $N_n(x)$] είναι η δεύτερου είδους συνάρτηση Bessel. Έστω τώρα ότι η X δεν έχει μέση τιμή ίση με το μηδέν αλλά ίση με m [δηλαδή, $X \sim N(m, \sigma^2)$], και η Y κανονικοποιείται έτσι ώστε η Y/σ^2 να είναι η χ^2 τετράγωνο κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας. Τότε η T που ορίστηκε στη (2.170) ακολουθεί μια μη-κεντρική t -κατανομή με παράμετρο (που επίσης καλείται παράμετρος μη κεντρικότητας) $\lambda = m/\sigma$ και n βαθμούς ελευθερίας. Η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικοποιημένης μη κεντρικής t -κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$f_T(t) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma(n/2)} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{(n+t^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{2t^2}{n+t^2} \right)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right) \quad (2.176)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της T έχουν ως εξής

$$E[T] = \lambda \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)} \sqrt{\frac{n}{2}}, \quad n > 0 \quad (2.177)$$

και

$$\text{var}[T] = \frac{n(1-\lambda^2)}{n-2} - \frac{\lambda^2 n}{2} \left\{ \frac{\Gamma[(n-1)/2]}{\Gamma(n/2)} \right\}^2, \quad n > 2 \quad (2.178)$$

Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες χ^2 τετράγωνο τυχαίες μεταβλητές με n_1 και n_2 βαθμούς ελευθερίας, αντίστοιχα. Ορίζουμε τη U να είναι

$$U = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \quad (2.179)$$

Τότε, η U λέμε ότι έχει μια F -κατανομή (ή κατανομή του Snedecor), $F(n_1, n_2)$, με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{u^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_2+n_1 u)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & u > 0 \\ 0 & , \quad u \leq 0 \end{cases} \quad (2.180)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της U είναι

$$E[U] = m_u = \frac{n_2}{n_2 - k}, \quad n_2 > 2 \quad (2.181)$$

και

$$\text{var}[U] = \sigma_u^2 = \frac{2 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 (n_2 - 4)(n_2 - 2)^2}, \quad n_2 > 4 \quad (2.182)$$

ενώ η ροπή τάξης k δίνεται από τη σχέση

$$E[U^k] = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2} + k\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2} - k\right)}{\Gamma(n_1/2) \Gamma(n_2/2)}, \quad n_2 > 2k \quad (2.183)$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση ακολουθεί τον τύπο

$$\Phi_u(\omega) = M\left(\frac{n_1}{2}, -\frac{n_2}{2}, -j \frac{n_2}{n_1} \omega u\right) \quad (2.184)$$

όπου $M(a, b, x)$ είναι η συμβάλλουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση του Kummer που ισούται με

$$M(a, b, x) = 1 + \frac{a x}{b} + \frac{(a)_2 x^2}{(b)_2 2!} + \dots + \frac{(a)_n x^n}{(b)_n n!} + \dots \quad (2.185)$$

και

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) \quad (2.186)$$

$$(a)_0 = 1 \quad (2.187)$$

Έστω X μια κανονικοποιημένη μη κεντρική χ^2 τετράγωνο τυχαία μεταβλητή με παράμετρο μη κεντρικότητας

$$\sqrt{\lambda} = \sum_{i=1}^n m_i^2 / \sigma^2$$

και n_1 βαθμούς ελευθερίας δηλαδή,

$$X = \sum_{i=1}^n X_i / \sigma^2,$$

$X_i \sim N(m_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$,

και Y μια χ^2 τετράγωνο τυχαία μεταβλητή με n_2 βαθμούς ελευθερίας. Τότε, η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \quad (2.188)$$

λέγεται ότι έχει μια μη κεντρική F-κατανομή με (n_1, n_2) βαθμούς ελευθερίας και μια παράμετρο μη κεντρικότητας λ . Η συνάρτηση πυκνότητας της μη κεντρικής F-κατανομής που ορίστηκε στη (2.188) μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι

$$f_Z(z; n_1, n_2, \sqrt{\lambda}) = \begin{cases} \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma(n_2/2)} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2} z} z^{\frac{n_1}{2}-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2} + k\right)}{k! \Gamma\left(\frac{n_1}{2} + k\right)} \frac{\left(\frac{n_1 \sqrt{\lambda} z}{2}\right)^k}{(n_1 z + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2} + k}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad (2.189)$$

Σημειώστε ότι αν η παράμετρος μη κεντρικότητας είναι ίση με το μηδέν

$$(\sqrt{\lambda} = 0)$$

στη (2.189), καταλήγουμε στην κεντρική F-κατανομή $F(n_1, n_2)$ που ορίστηκε στη (2.180). Η μέση τιμή και η διασπορά της μη κεντρικής F-κατανομής, μπορεί να δειχθεί ότι είναι

$$E[Z] = \frac{n_2 (n_1 + \sqrt{\lambda})}{n_1 (n_2 - 2)}, \quad n_2 > 2 \quad (2.190)$$

και

$$\text{var}[Z] = \frac{2 n_2^2}{n_1^2 (n_2 - 4)(n_2 - 2)^2} \left[(n_1 + \sqrt{\lambda})^2 + (n_2 - 2)(n_1 + 2\sqrt{\lambda}) \right], \quad n_2 > 4 \quad (2.191)$$

2.3.9 Η κατανομή Cauchy

Μια τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Cauchy με παράμετρο α , $-\infty \leq \alpha \leq \infty$, και β , $\beta > 0$, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της, δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\beta} \left[1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta} \right)^2 \right]^{-1} = \frac{\beta}{\pi} \frac{1}{\beta^2 + (x-\alpha)^2} \quad (2.192)$$

Συμβολίζουμε με $C(\alpha, \beta)$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή της κατανομής Cauchy με παραμέτρους $\beta = 1$ και $\alpha = 0$ είναι ίση με το μηδέν, αλλά η διασπορά και οι ροπές μεγαλύτερης τάξης δεν υπάρχουν. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση δεν υπάρχει, αλλά η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να δειχθεί ότι είναι

$$\Phi_x(\omega) = e^{j\alpha\omega - \beta|\omega|} \quad (2.193)$$

Σημειώστε ότι αν $\alpha = 0$ και $\beta = 1$, η συνάρτηση πυκνότητας γίνεται

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \quad (2.194)$$

η οποία είναι η t-κατανομή που είδαμε στη σχέση (2.171) με $n=1$ βαθμό ελευθερίας. Το άθροισμα τυχαίων μεταβλητών Cauchy είναι και αυτό Cauchy μεταβλητή, δηλαδή, αν $X=X_1+X_2+\dots+X_n$ όπου X_k , $k=1,2,\dots,n$, είναι Cauchy με παραμέτρους α_k και β_k , $k=1,2,\dots,n$, τότε η X είναι Cauchy με παραμέτρους α και β , τέτοια ώστε $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ και $\beta=\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n$.

2.4 Κάποιες ιδιαίτερες κατανομές

2.4.1 Η Διμεταβλητή και η Πολυμεταβλητή Γκαουσιανή κατανομή

Εξαιτίας της σημασίας της Γκαουσιανής κατανομής και των πολλών εφαρμογών της, επεκτείνουμε τις έννοιες που αναπτύξαμε νωρίτερα, στην δισδιάστατη και n -διάστατη Γκαουσιανή κατανομή. Έστω X_1 και X_2 , δύο από κοινού Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές $E[X_1]=m_1$ και $E[X_2]=m_2$, και διασπορές σ_1^2 και σ_2^2 . Η διμεταβλητή Γκαουσιανή συνάρτηση πυκνότητας ορίζεται ως

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\} \quad (2.195)$$

όπου ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ X_1 και X_2 . Η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$$

δίνεται από τον τύπο

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x_2-\alpha}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right] \quad (2.196)$$

όπου

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \left\{ \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x_2-\alpha)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right] dx_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.197)$$

Το ολοκλήρωμα στη (2.197) είναι μια Γκαουσιανή συνάρτηση πυκνότητας, με μέση τιμή $\alpha=m_2+\rho(\sigma_2/\sigma_1)(x_1-m_1)$ και διασπορά

$$\sigma_2^2(1-\rho^2).$$

Παρατηρούμε από τη (2.196), ότι η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$$

είναι επίσης Γκαουσιανή, με μέση τιμή α και διασπορά

$$\sigma_2^2 (1 - \rho^2).$$

Η υπό συνθήκη προσδοκία για τη X δεδομένου του $X_1 = x_1$, είναι

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \alpha = m_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - m_1) \quad (2.198)$$

και

$$\text{var}[X_2 | X_1 = x_1] = \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \quad (2.199)$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι η

$$f_{X_1 | X_2}(x_1 | x_2) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x_1 - \beta}{2\sigma_1^2 (1 - \rho^2)}\right] \quad (2.200)$$

είναι Γκαουσιανή, με μέση τιμή $\beta = m_1 + \rho(\sigma_1/\sigma_2)(x_2 - m_2)$ και διασπορά,

$$\sigma_1^2 (1 - \rho^2),$$

και η υπό συνθήκη προσδοκία της X_1 δεδομένου ότι $X_2 = x_2$, είναι

$$E[X_1 | X_2 = x_2] = \beta = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - m_2) \quad (2.201)$$

και

$$\text{var}[X_1 | X_2 = x_2] = \sigma_1^2 (1 - \rho^2) \quad (2.202)$$

Συνεπάγεται ότι,

$$E[X_2^2 | X_1 = x_1] = \text{var}[X_2 | X_1 = x_1] + E^2[X_2 | X_1 = x_1] \quad (2.203)$$

Για την ειδική περίπτωση, κατά την οποία ισχύει για τις μέσες τιμές, $m_1 = m_2 = 0$, οδηγούμαστε στη

$$E[X_2^2 | X_1 = x_1] = \sigma_2^2 (1 - \rho^2) - \rho^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 x_1^2 \quad (2.204)$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση και η χαρακτηριστική συνάρτηση των X_1 και X_2 είναι

$$\begin{aligned} M_{x_1 x_2}(t_1, t_2) &= E[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \exp\left[m_1 t_1 + m_2 t_2 + \frac{1}{2} \left(\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2\right)\right] \end{aligned} \quad (2.205)$$

και

$$\begin{aligned} \Phi_{x_1 x_2}(\omega_1, \omega_2) &= E[e^{j(\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 \omega_1^2 + \sigma_2^2 \omega_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \omega_1 \omega_2) + j(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)\right] \end{aligned} \quad (2.206)$$

Οι ροπές εξάγονται από την χαρακτηριστική συνάρτηση και είναι

$$E[X_1^n X_2^m] = (-j)^{n+m} \frac{\partial^n}{\partial \omega_1^n} \frac{\partial^m}{\partial \omega_2^m} \Phi_{x_1 x_2}(\omega_1, \omega_2) \Big|_{\omega_1 = \omega_2 = 0} \quad (2.207)$$

Μερικές φορές, είναι ευκολότερο να αναπαραστήσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας και χαρακτηριστική συνάρτηση σε μορφή πίνακα, ειδικά όταν ο αριθμός των τυχαίων μεταβλητών είναι μεγαλύτερος από δύο. Έστω $C = C[X_1, X_2]$ συμβολίζουμε τον πίνακα συνδιακύμανσης των δύο τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2 ,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.208)$$

όπου

$$c_{11} = \sigma_1^2, \quad c_{21} = c_{12} = \rho \sigma_1 \sigma_2$$

και

$$c_{22} = \sigma_2^2.$$

Ο συντελεστής συσχέτισης είναι

$$\rho = \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11} c_{22}}} = \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (2.209)$$

Η ορίζουσα του πίνακα συνδιακύμανσης C είναι

$$|C| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \quad (2.210)$$

Συνεπώς,

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.211)$$

Έστω

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T, \quad \boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2]^T,$$

και το διάνυσμα μέσων τιμών

$$\mathbf{m} = [m_1 \quad m_2]^T.$$

Τότε, η διμεταβλητή συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|C|}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[(\mathbf{x}^T - \mathbf{m}^T) C^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right]\right\} \quad (2.212)$$

όπου το T συμβολίζει αναστροφή πίνακα. Η χαρακτηριστική συνάρτηση γίνεται τώρα

$$\begin{aligned} \Phi_{x_1 x_2}(\omega_1, \omega_2) &= \exp\left[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}^T C \boldsymbol{\omega} + j \mathbf{m}^T \boldsymbol{\omega})\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 C_{k\ell} \omega_k \omega_\ell + j \sum_{k=1}^2 m_k \omega_k\right) \end{aligned} \quad (2.213)$$

Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι $\rho = 0$, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας γίνεται

$$\begin{aligned} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 \right]\right\} \\ &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \end{aligned} \quad (2.214)$$

Εφόσον η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας είναι το προϊόν των περιθωριακών συναρτήσεων πυκνότητας, οι X_1 και X_2 είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Αυτό είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των Γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών όπου οι ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές είναι απαραίτητα ανεξάρτητες. Η χαρακτηριστική συνάρτηση καταλήγει στη μορφή

$$\begin{aligned}\Phi_{x_1x_2}(\omega_1, \omega_2) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\sigma_1^2\omega_1^2 + \sigma_2^2\omega_2^2) + j(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)\right]\right\} \\ &= \Phi_{x_1}(\omega_1)\Phi_{x_2}(\omega_2)\end{aligned}\quad (2.215)$$

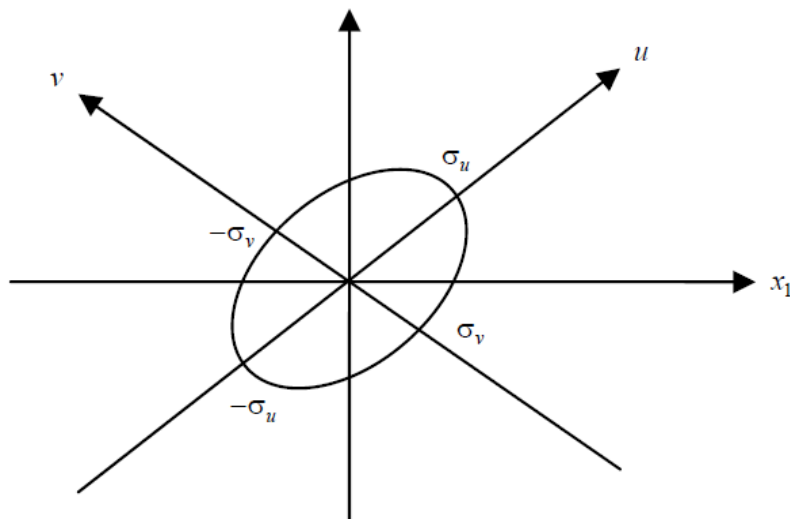
δηλαδή, η από κοινού χαρακτηριστική συνάρτηση ισούται με το γινόμενο των περιθωριακών χαρακτηριστικών συναρτήσεων όταν οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 είναι ασυσχέτιστες.

Η Τυπική Έλλειψη

Η Τυπική Έλλειψη της διμεταβλητής Γκαουσιανής συνάρτησης πυκνότητας εξάγεται από τη (2.195) θέτοντας τον όρο μεταξύ των αγκυλών, στον εκθέτη, ίσο με 1, για να δώσει

$$\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} = 1 \quad (2.216)$$

Η εξίσωση (2.216) αναπαριστά την εξίσωση μιας έλλειψης με κέντρο το $x_1 = m_1$ και $x_2 = m_2$. Για απλούστευση, έστω $m_1 = m_2 = 0$. Η έλλειψη αναπαριστάται εύκολα υποθέτοντας δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές U και V με μέση τιμή μηδέν, και αντίστοιχα διασπορά σ_u^2 και σ_v^2



Διάγραμμα 2.16 Έλλειψη με κέντρο το $m_1 = m_2 = 0$

Η τυπική έλλειψη, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2.16, περιγράφεται από τη σχέση

$$\frac{u^2}{\sigma_u^2} + \frac{v^2}{\sigma_v^2} = 1 \quad (2.217)$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των U και V είναι

$$f_{UV}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\sigma_u^2} + \frac{v^2}{\sigma_v^2}\right)\right] \quad (2.218)$$

Εφαρμόζοντας περιστροφή γωνίας θ ως προς τους άξονες uv , αποδίδεται το σύστημα συντεταγμένων x_1, x_2 που δίνεται από τις σχέσεις

$$x_1 = u \cos \theta - v \sin \theta \quad (2.219)$$

$$x_2 = u \sin \theta + v \cos \theta \quad (2.220)$$

Οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 προκύπτουν από τη μετατροπή των (2.219) και (2.220). Πιο συγκεκριμένα,

$$X_1 = U \cos \theta - V \sin \theta \quad (2.221)$$

$$X_2 = U \sin \theta + V \cos \theta \quad (2.222)$$

όπου

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= E[X_1^2] = E[U^2 \cos^2 \theta - 2UV \cos \theta \sin \theta + V^2 \sin^2 \theta] \\ &= E[U^2] \cos^2 \theta + E[V^2] \sin^2 \theta \\ &= \sigma_u^2 \cos^2 \theta + \sigma_v^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.223)$$

αφού $E[U] = E[V] = E[X_1] = E[X_2] = 0$. Σημειώστε ότι η θ είναι η γωνία στο μεγάλο άξονα της έλλειψης. Ομοίως, παίρνουμε

$$\sigma_2^2 = \sigma_u^2 \sin^2 \theta + \sigma_v^2 \cos^2 \theta \quad (2.224)$$

και η συνδιακύμανση μεταξύ X_1 και X_2 είναι

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= E[(U \cos \theta - V \sin \theta)(U \sin \theta + V \cos \theta)] \\ &= (\sigma_u^2 - \sigma_v^2) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (2.225)$$

Με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε και στις κατανομές των U και V . Δεδομένων των κατανομών των X_1 και X_2 , έχουμε

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_1^2 \cos^2 \theta - \sigma_2^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \quad (2.226)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\sigma_2^2 \cos^2 \theta - \sigma_1^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \quad (2.227)$$

$$\rho = \frac{E[X_1 X_2]}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \tan 2\theta, \quad \theta \neq \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4} \quad (2.228)$$

ή

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan 2\rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \quad (2.229)$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε n τυχαίες μεταβλητές. Έστω (X_1, X_2, \dots, X_n) n από κοινού Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές. Ορίζουμε τις μέσες τιμές ως

$$E[X_k] = m_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.230)$$

τις συνδιακυμάνσεις ως

$$c_{jk} = E[(X_j - m_j)(X_k - m_k)], \quad j, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.231)$$

και τους συντελεστές συσχέτισης ως

$$\rho_{jk} = \frac{c_{jk}}{\sqrt{c_{jj} c_{kk}}} \quad (2.232)$$

Η διασπορά της X_k είναι

$$\text{var}[X_k] = c_{kk} = \sigma_k^2 \quad (2.233)$$

Έστω τα διανύσματα \mathbf{X} , \mathbf{x} , και \mathbf{m} που έχουν ως εξής

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \quad (2.234)$$

και ο πίνακας διακύμανσης \mathbf{C} είναι

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 & \cdots & \rho_{1n} \sigma_1 \sigma_n \\ \rho_{21} \sigma_2 \sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n} \sigma_2 \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n1} \sigma_n \sigma_1 & \rho_{n2} \sigma_n \sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.235)$$

Η πολυμεταβλητή Γκαουσιανή συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\mathbf{x}^T - \mathbf{m}^T)\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})]\right\} \quad (2.236)$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε αυτή την κοινή συνάρτηση πυκνότητας n - διαστάσεων είναι

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\omega}) &= E[e^{j\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{X}}] = \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\omega} + j \mathbf{m}^T \boldsymbol{\omega}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} \omega_j \omega_k + j \sum_{k=1}^n m_k \omega_k\right) \end{aligned} \quad (2.237)$$

Αν ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{jk}=0$, $j, k=1,2,\dots,n$, τότε ο πίνακας συνδιακύμανσης γίνεται διαγώνιος για να δώσει

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.238)$$

Σημειώστε ότι το να είναι ο πίνακας συνδιακύμανσης διαγώνιος είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε οι τυχαίες μεταβλητές X_k , $k=1,2,\dots,n$, να είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Αυτό θα δειχθεί αργότερα λεπτομερώς. Ο αντίστροφος πίνακας συνδιακύμανσης \mathbf{C}^{-1} είναι επίσης διαγώνιος, και δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^{-2} \end{bmatrix} \quad (2.239)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας της συνδυασμένης πιθανότητας γίνεται το προϊόν των περιθωριακών συναρτήσεων πυκνότητας και αποδίδει

$$f_X(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_k - m_k)^2}{2\sigma_k^2}\right] = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(x_k) \quad (2.240)$$

Η συνδυασμένη χαρακτηριστική συνάρτηση γίνεται

$$\Phi_X(\omega) = \prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_k^2 \omega_k^2 + jm_k \omega_k\right) = \prod_{k=1}^n \Phi_{X_k}(\omega_k) \quad (2.241)$$

Χρησιμοποιώντας τη χαρακτηριστική συνάρτηση, μπορεί να εξαχθεί μια έκφραση κλειστής μορφής για τις συνδυασμένες ροπές. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$, όπου $(2n+1)$ είναι συνδυασμένες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν. Τότε,

$$E[X_1 X_2 \dots X_{2n+1}] = \begin{cases} 0 & , (2n+1) \text{ odd} \\ \sum \prod_{j \neq k} E[X_j X_k] & , (2n+1) \text{ even} \end{cases} \quad (2.242)$$

όπου η άθροιση γίνεται για όλα τα διακριτά ζευγάρια που προέκυψαν χρησιμοποιώντας κάθε παράγοντα μία φορά. Ο αριθμός των τρόπων να έχουμε τέτοια ζευγάρια είναι

$$\frac{(2n)!}{n! 2^n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \quad (2.243)$$

Μία από τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες συνδυασμένες ροπές είναι η συνδυασμένη ροπή τέταρτης τάξης ($2n = 4$). Σε αυτήν την περίπτωση, $n = 2$ και ο αριθμός των τρόπων να έχουμε διακριτά ζευγάρια όπως ορίστηκε στη (2.243) είναι τρεις. Συνεπώς,

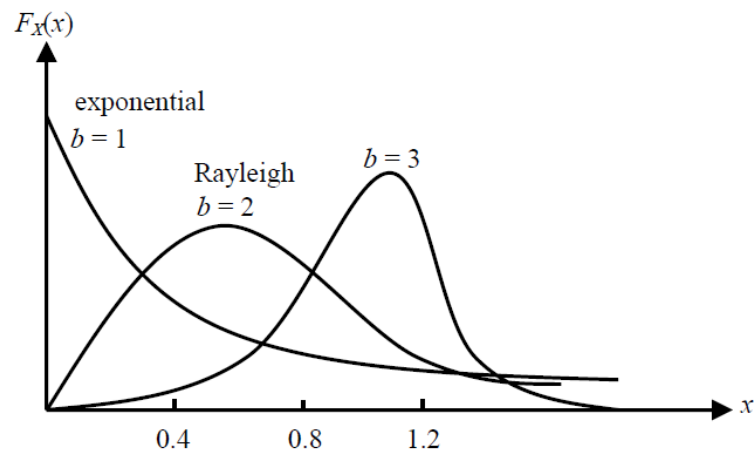
$$\begin{aligned} & E[X_1 X_2 X_3 X_4] \\ &= E[X_1 X_2] E[X_3 X_4] + E[X_2 X_3] E[X_1 X_4] + E[X_1 X_3] E[X_2 X_4] \end{aligned} \quad (2.244)$$

Στο σύγχρονο, υψηλής ανάλυσης προσαρμοστικό ραντάρ κατωφλίου CFAR, οι μετρήσεις ακαταστασίας (στη θάλασσα, στον καιρό, στην ξηρά) μπορεί να μην ακολουθούν το Γκαουσιανό μοντέλο ή το μοντέλο Rayleigh, αφού η κατανομή του εύρους αναπτύσσει μια “μεγαλύτερη” ουρά, που μπορεί να αυξήσει τη συχνότητα λανθασμένων συναγερμών. Μερικές κατανομές που εμφανίζονται σε εφαρμογές ραντάρ και μπορούν να δώσουν ένα καλύτερο μοντέλο αναπαράστασης της ακαταστασίας είναι η Weibull, η λογαριθμική, και οι K-κατανομές.

2.4.2 Η κατανομή Weibull

Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι ακολουθεί την κατανομή Weibull, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2.17, εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της δίνεται από τον τύπο

$$f_X(x) = \begin{cases} a b x^{b-1} e^{-ax^b}, & x > 0, a > 0, \text{ and } b > 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.245)$$



Διάγραμμα 2.17 Συνάρτηση πυκνότητας Weibull

όπου το a είναι γνωστό σαν παράμετρος κλίμακας και το b είναι η παράμετρος σχήματος. Σημειώστε ότι για $b = 1$, έχουμε

$$f_X(x) = a e^{-ax}, \quad x > 0;$$

η οποία είναι η εκθετική κατανομή που δόθηκε στη (2.89). Όταν $b = 2$, η συνάρτηση πυκνότητας Weibull γίνεται

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 a x e^{-ax^2}, & x > 0 \text{ and } a > 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.246)$$

Η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητας Rayleigh που ορίστηκε στη (2.146) με $a=1/2\sigma^2$. Η συνάρτηση κατανομής της Weibull τυχαίας μεταβλητής, X , θα είναι

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax^b}, & x > 0, a > 0, \text{ and } b > 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.247)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της X δίνονται από τους τύπους

$$E[X] = a^{-\frac{1}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \quad (2.248)$$

και

$$\text{var}[X] = a^{-\frac{2}{b}} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \right]^2 \right\} \quad (2.249)$$

ενώ η ροπή τάξης k είναι

$$E[X^k] = a^{-\frac{k}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{b}\right) \quad (2.250)$$

Πολλοί συγγραφείς γράφουν τη συνάρτηση πυκνότητας Weibull στη μορφή

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^c\right], & x > 0, a > 0, b > 0, \text{ and } c > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.251)$$

Στην περίπτωση αυτή, το b είναι η παράμετρο κλίμακας και το c είναι η παράμετρος σχήματος. Σημειώστε ότι η (2.251) είναι ισοδύναμη με τη (2.245) με $\alpha = 1/b^c$. Όταν $X = \ln(Z)$, η συνάρτηση πυκνότητας της $f_X(x)$ λέμε ότι έχει λογαριθμική-Weibull κατανομή για τη μεταβλητή Z.

2.4.3 Η Λογαριθμική κατανομή

Μια τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι έχει λογαριθμική κατανομή εάν η συνάρτηση πυκνότητάς της δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\ln^2 \frac{x}{x_m}}{2\sigma^2}\right), & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.252)$$

όπου x_m είναι η διάμεσος της X και σ^2 είναι η διασπορά της γεννήτριας κανονικής κατανομής. Μια παράμετρος που χρησιμοποιείται συχνά για το χαρακτηρισμό της λογαριθμικής κατανομής είναι ο λόγος μέση τιμή προς διάμεσο ρ που δίνεται από τον τύπο

$$\rho = \frac{E[X]}{X_m} \quad (2.253)$$

Εναλλακτικά, η συνάρτηση πυκνότητας της λογαριθμικής τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να γραφεί ως εξής

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\ln x - \ln x_m)^2}{2\sigma^2}\right], & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.254)$$

Η σωρευτική συνάρτηση κατανομής της X είναι

$$F_X(x) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(u)] \quad (2.255)$$

όπου

$$u = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma} \ln\left(\frac{x}{x_m}\right) \quad (2.256)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της X είναι

$$E[X] = x_m \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (2.257)$$

και

$$\operatorname{var}[X] = x_m^2 e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (2.258)$$

ενώ ροπή τάξης k είναι

$$E[X^k] = x_m^k \exp\left(\frac{k^2 \sigma^2}{2}\right) \quad (2.259)$$

2.4.4 Η Κ-κατανομή

Η Κ-κατανομή προέκυψε κυρίως για να αναπαραστήσει την ακαταστασία στη θάλασσα που προέρχεται από ραντάρ. Μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{b \Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{b}\right)^\nu K_{\nu-1}\left(\frac{2}{b}x\right) & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.260)$$

Λέγεται ότι έχει Κ-κατανομή. Η $K_\nu(x)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel, b είναι η παράμετρος κλίμακας, και ν είναι η παράμετρος σχήματος. Είναι γνωστό από την ανίχνευση του ραντάρ ότι η Κ-κατανομή είναι το αποτέλεσμα μιας συνάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών που δίνεται από τη σχέση

$$X = S T \quad (2.261)$$

Όπου η S , γνωστή σαν *στίγμα*, ακολουθεί μια κατανομή Rayleigh που δίνεται από τη σχέση

$$f_S(s) = 2 s e^{-s^2}, \quad s > 0 \quad (2.262)$$

και η T , γνωστή σαν *υφή*, είναι μια κατανομή Γάμμα που δίνεται από τη σχέση

$$f_T(t) = \frac{2}{b^\nu \Gamma(\nu)} t^{2\nu-1} e^{-\frac{t^2}{b^2}} \quad (2.263)$$

Η συνολική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ είναι γνωστό επίσης ότι είναι, σε όρους δεσμευμένης πιθανότητας,

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X|T}(x|t) f_T(t) dt \quad (2.264)$$

όπου

$$f_{X|T}(x|t) = \frac{2x}{t^2} e^{-\frac{x^2}{t^2}} \quad (2.265)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.265) και (2.263) μέσα στη (2.264) και λύνοντας το ολοκλήρωμα, καταλήγουμε στη

$$f_X(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{t^2} e^{-\frac{x^2}{t^2}} \frac{2}{b^\nu \Gamma(\nu)} t^{2\nu-1} e^{-\frac{t^2}{b^2}} dt = \frac{4}{b \Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{b}\right)^\nu K_{\nu-1} \left(\frac{2}{b}x\right) \quad (2.266)$$

Η ροπή τάξης k δίνεται από τον τύπο

$$E[X^k] = b^k \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{k}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} \quad (2.267)$$

Από τη (2.261), αποδείχθηκε από τον Αναστασσόπουλο {1}, ότι όταν η κατανομή του στίγματος S είναι γενικευμένη Γάμμα και η υφή T είναι επίσης γενικευμένη Γάμμα, η προκύπτουσα κατανομή αναφέρεται ως η γενικευμένη K - κατανομή, και δίνεται από τον τύπο

$$f_X(x; a, b, \nu_1, \nu_2) = \begin{cases} \frac{2a}{b \Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{a}{2}(\nu_1+\nu_2)-1} K_{\nu_1-\nu_2} \left[2\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{a}{2}}\right], & x \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.268)$$

όπου b είναι η παράμετρος κλίμακας και $K_\nu(x)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel. Η ροπή τάξης k δίνεται από

$$E[X^k] = b^k \frac{\Gamma\left(\nu_1 + \frac{k}{a}\right)\Gamma\left(\nu_2 + \frac{k}{a}\right)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \quad (2.269)$$

Να σημειωθεί ότι όταν $a=2$ και $\nu_1=1$ στη (2.268), καταλήγουμε στην K -συνάρτηση πυκνότητας που δόθηκε στη (2.260). Επίσης, αν θέσουμε $\nu_1=1$ και $\nu_2=1/2$, η γενικευμένη συνάρτηση πυκνότητας K γίνεται

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2a}{b \Gamma(1/2)} \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{3a}{4}-1} K_{-\frac{1}{2}} \left[2\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{a}{2}}\right], & x \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.270)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$K_{n+\frac{1}{2}}(x) = -K_{-n-\frac{1}{2}}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.271)$$

και

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right) e^{-x} \quad (2.272)$$

Καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση πυκνότητας Weibull έχει ως εξής

$$f_X(x; \rho, b) = \begin{cases} \frac{a}{2\rho} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{\frac{a}{2}-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\rho}\right)^{\frac{a}{2}}\right], & x > 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.273)$$

με $\rho = b \cdot 2^{-2/\alpha}$. Η ροπή τάξης k είναι

$$E[X^k] = \rho^k \Gamma\left(1 + \frac{2k}{a}\right) \quad (2.274)$$

Εάν, πάλι θέσουμε, $\alpha = 2$ στη συνάρτηση πυκνότητας Weibull που περιγράφει η (2.273), τότε καταλήγουμε στο ότι η εκθετική κατανομή είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} e^{-\frac{1}{\rho}x}, & x \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.275)$$

και όταν θέτουμε $\alpha = 4$ στη (2.273), βρίσκουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας Rayleigh είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\rho} \left(\frac{x}{\rho}\right) \exp\left[-\left(\frac{x}{\rho}\right)^2\right], & x > 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.276)$$

2.4.5 Η Γενικευμένη σύνθετη κατανομή

Όπως η K -κατανομή, που είναι μια σύνθετη κατανομή, η γενικευμένη σύνθετη κατανομή, χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει ακαταστασία στο ραντάρ σε πιο σοβαρές περιπτώσεις όπου η παραμόρφωση του στίγματος, που συνήθως αναπαρίσταται από μια συνάρτηση πυκνότητας Rayleigh, έχει μεγαλύτερη “ουρά”. Σε αυτήν την περίπτωση, η κατανομή του στίγματος είναι η γενικευμένη κατανομή γάμμα, και η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο

$$f_{X|S}(x|s) = \begin{cases} \frac{a_1}{s \Gamma(v_1)} \left(\frac{x}{s}\right)^{a_1 v_1 - 1} \exp\left[-\left(\frac{x}{s}\right)^{a_1}\right], & x \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.277)$$

ενώ η συνάρτηση πυκνότητας του στίγματος είναι

$$f_S(s) = \begin{cases} \frac{a_2}{b \Gamma(v_2)} \left(\frac{s}{b}\right)^{a_2 v_2 - 1} \exp\left[-\left(\frac{s}{b}\right)^{a_2}\right], & s > 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.278)$$

Συνεπώς, η συνολική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της γενικευμένης σύνθετης κατανομής θα είναι

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{\infty} f_{X|S}(x|s) f_S(s) ds \\
&= \frac{a_1 a_2}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \frac{x^{a_1 v_1 - 1}}{b^{a_2 v_2}} \int_0^{\infty} s^{a_2 v_2 - a_1 v_1 - 1} \exp\left[-\left(\frac{s}{b}\right)^{a_2} - \left(\frac{x}{s}\right)^{a_1}\right] ds \quad (2.279)
\end{aligned}$$

η οποία δεν έχει κλειστή μορφή. Η μέση τιμή της τάξης k δείχνεται ότι είναι

$$E[X^k] = b^k \frac{\Gamma\left(v_1 + \frac{k}{a_1}\right) \Gamma\left(v_2 + \frac{k}{a_2}\right)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \quad (2.280)$$

2.5 Σύνοψη

Στο παρόν κεφάλαιο, ορίσαμε κάποιες κατανομές και δώσαμε τις σχέσεις που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ τους. Ξεκινήσαμε περιγράφοντας τις απλούστερες κατανομές για διακριτές τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή, τις κατανομές Bernoulli και διωνυμική. Ύστερα, επεκτείναμε τα αποτελέσματα για τις κατανομές πολυωνυμική και υπεργεωμετρική. Η κατανομή Poisson, που προκύπτει σε πολλές εφαρμογές, επίσης παρουσιάστηκε λεπτομερώς. Στο δεύτερο μέρος, παρουσιάσαμε μερικές σημαντικές συνεχείς κατανομές, και δείξαμε τις πιθανές σχέσεις που μπορεί να έχουν μεταξύ τους. Πολλές κατανομές παρουσιάστηκαν με τρόπο ώστε να καλυφθούν, όσο το δυνατόν, πλήρως. Τέλος, δώσαμε κάποιες ειδικές κατανομές που προκύπτουν σε εφαρμογές ραντάρ και συστήματα επικοινωνιών. Αυτές οι κατανομές παρουσιάστηκαν με κάποιες λεπτομέρειες, αφού μελετήσουμε τις εφαρμογές τους στα Κεφάλαια 11 και 12.

Αναφορά

{1} Anastassopoulos, A., et al., "High Resolution Clutter Statistics," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 35, No. 1, January 1999, pp. 43–58.

Επιλεγμένη Βιβλιογραφία

Abramowitz, M., and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 10th Printing, December 1972.

Berbra, K., M. Barkat, and B. Atrouz, "Analysis of the CMLD in K-Distributed Clutter for Fully

Correlated/Uncorrelated Texture," Proceedings of the 1999 International Radar Conference, Brest, France, May 1999.

Dudewics, E. J., Introduction to Statistics and Probability, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976.

Farina, A., and F. Gini, "Tutorial on Advanced Topics on Radar Detection in Non-Gaussian Background," International Conference on Radar Systems, Brest, France, May 1999.

Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, New York: John Wiley and Sons, 1968.

Foata, D., and A. Fuchs, Calcul des Probabilités, Paris: Dunod, 1998.

Ghorbanzadeh, D., Probabilités: Exercices Corrigés, Paris: Editons Technip, 1998.

Gradshteyn, I. S., and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, New York: Academic Press, 1980.

Jakeman, E., and P. N. Pusey, "A Model for Non-Rayleigh Sea Echo," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, AP-24, November 1976, pp. 806–814.

Meyer, P. L., Introductory Probability and Statistical Applications, Reading, MA: Addison-Wesley, 1970.

Papoulis, A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, New York: McGraw-Hill, 1991.

Peebles, P. Z., Probability, Random Variables, and Random Signal Principles, New York: McGraw-Hill, 1980.

Proakis, J. G., Digital Communications, New York: McGraw-Hill, 1995.

Rohatgi, V. K., An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics, New York: John Wiley and Sons, 1976.

Shanmugan, K. S., and A. M. Breipohl, Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis, New York: John Wiley and Sons, 1988.

Schleher, D. C., Automatic Detection and Data Processing, Dedham, MA: Artech House, 1980.

Sekine, M., and Y. Mao, Weibull Radar Clutter, IEE Radar, Sonar, Navigation and Avionics Series 3, London, 1990.

Spiegel, M. R., Schaum's Outline Series: Probability and Statistics, New York: McGraw-Hill, 1975.

Stark, H., and J. W. Woods, Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1986.

Urkowitz, H., Signal Theory and Random Processes, Dedham, MA: Artech House, 1983.

Ward, K. D., and S. Watts, "Radar Sea Clutter," Microwave Journal, June 1985, pp. 109–121.

Wozencraft, J. M., and, I. M. Jacobs, Principles of Communication Engineering, New York: John Wiley and Sons, 1965.

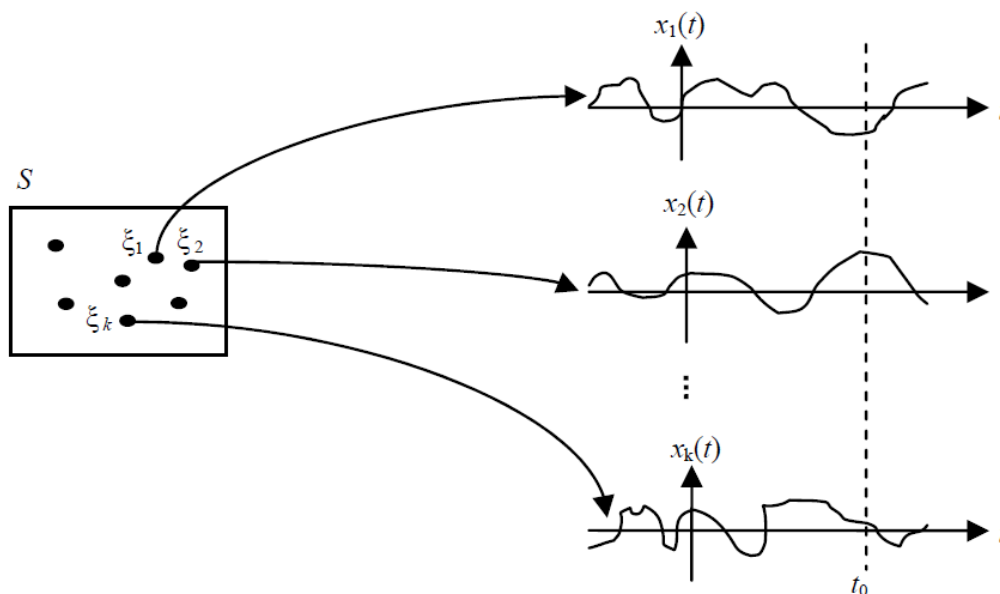
Κεφάλαιο 3^ο

Τυχαίες διαδικασίες

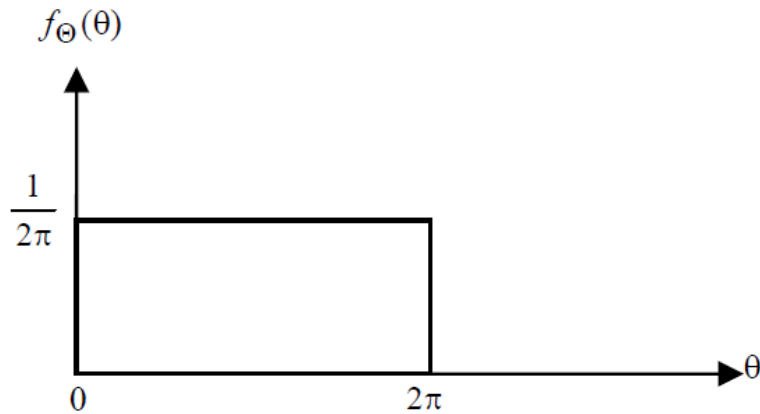
3.1 Εισαγωγή και ορισμοί

Μία τυχαία διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών, των οποίων η παράμετρος του χρόνου t , διατρέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Στο Κεφάλαιο 1, ορίσαμε μια τυχαία μεταβλητή σαν μια αντιστοίχιση των σημείων του δειγματοχώρου S σε σημεία του πραγματικού άξονα. Στις τυχαίες διαδικασίες, ο δειγματοχώρος θα λέγαμε ότι αντιστοιχεί σε μια οικογένεια χρονικών συναρτήσεων. Τυπικά, λέμε ότι μια τυχαία διαδικασία $X(t)$ είναι μια αντιστοίχιση των στοιχείων του δειγματοχώρου σε χρονικές συναρτήσεις. Κάθε στοιχείο του δειγματοχώρου συνδέεται με μια χρονική συνάρτηση όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.1.

Η σύνδεση μιας χρονικής συνάρτησης με κάθε στοιχείο του δειγματοχώρου έχει σαν αποτέλεσμα μια οικογένεια χρονικών συναρτήσεων που καλείται ένα σύνολο (ensemble). Συνεπώς, το σύνολο είναι οι συναρτήσεις – δείγματα με τις αντίστοιχες πιθανότητες. Παρατηρήστε ότι συμβολίζουμε την τυχαία διαδικασία με $X(t)$, και όχι $X(t, \xi)$, παραλείποντας την εξάρτηση από το ξ . Μία συνάρτηση - δείγμα συμβολίζεται με $x(t)$.



Διάγραμμα 3.1 Αντιστοίχιση του δειγματοχώρου στις συναρτήσεις – δείγματα



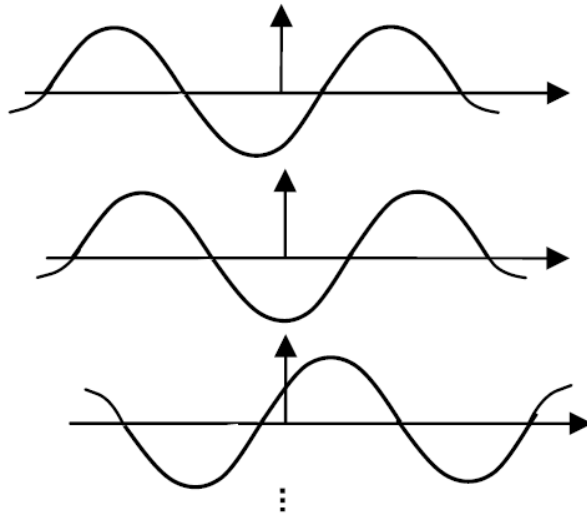
Διάγραμμα 3.2 Συνάρτηση πυκνότητας της Θ

Παράδειγμα 3.1

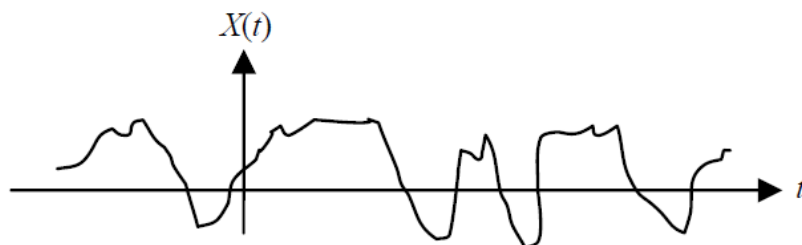
Θεωρούμε μια τυχαία διαδικασία $X(t) = A \cos(\omega t + \Theta)$, όπου Θ μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ του 0 και του 2π , όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.2. Ισχύει, δηλαδή,

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Κάποιες συναρτήσεις – δείγματα αυτής της τυχαίας διαδικασίας δίνονται στο διάγραμμα 3.3. Η μεταβολή στις συναρτήσεις – δείγματα αυτής της συγκεκριμένης διαδικασίας οφείλεται μόνο στη φάση. Μία τέτοια τυχαία διαδικασία, της οποίας οι μελλοντικές τιμές μπορούν να προβλεφθούν μέσω της γνώσης των παλαιότερων τιμών, λέγεται ότι είναι προβλέψιμη ή ντετερμινιστική. Μάλιστα, ορίζοντας μία συγκεκριμένη τιμή, $\pi/4$, για τη φάση, η συνάρτηση - δείγμα που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο στοιχείο ξ_k του δειγματοχώρου γίνεται ντετερμινιστική χρονική συνάρτηση, η $x_k(t) = A \cos[\omega t + (\pi / 4)]$.



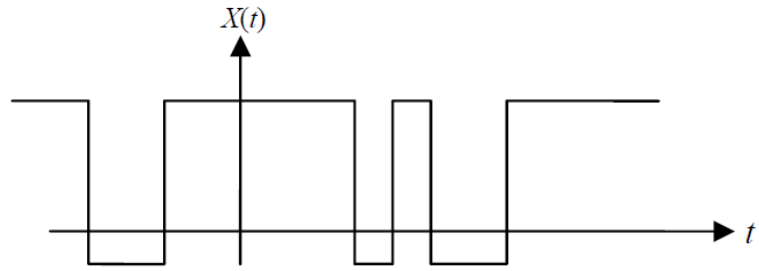
Διάγραμμα 3.3 Μερικές συναρτήσεις – δείγματα της $X(t)$



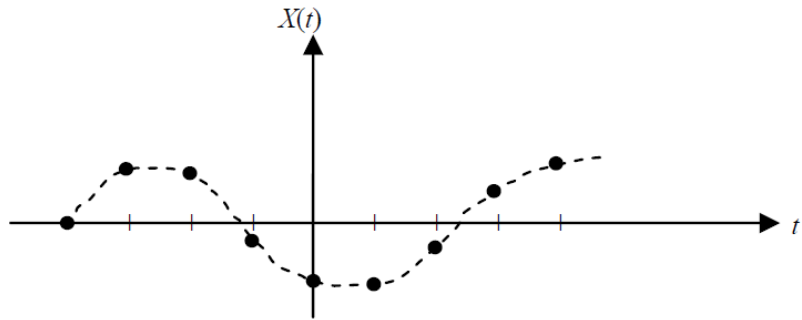
Διάγραμμα 3.4 Μία τυχαία συνεχής διαδικασία συνεχούς χρόνου

Όταν η παράμετρος t είναι παίρνει την τιμή μιας καθορισμένης χρονικής στιγμής t_0 , η τυχαία διαδικασία $X(t)$ γίνεται η τυχαία μεταβλητή $X(t_0)$, και η $x(t_0)$ θα είναι ένα δείγμα της τυχαίας μεταβλητής. Σε γενικές γραμμές, μας ενδιαφέρουν 4 τύποι τυχαίων διαδικασιών, ανάλογα με το χαρακτηριστικό του χρόνου t και την τυχαία μεταβλητή $X(t) = X$ στο χρόνο t . Αυτοί οι τύποι είναι:

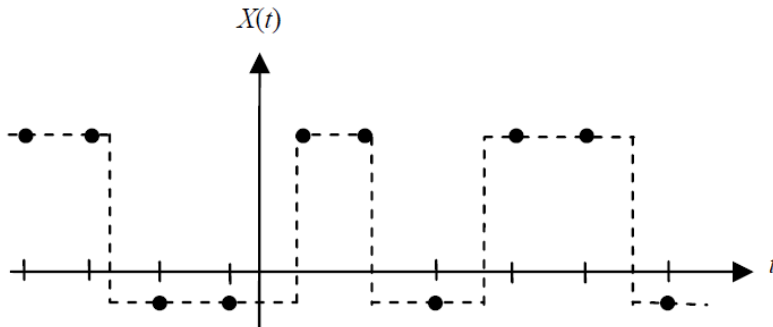
1. *Συνεχούς κατάστασης και συνεχούς χρόνου.* Σε αυτήν την περίπτωση, τόσο η $X(t)$ όσο και η t έχουν συνεχές πεδίο τιμών. Η $X(t)$ καλείται συνεχής τυχαία διαδικασία και απεικονίζεται στο διάγραμμα 3.4.
2. *Διακριτής κατάστασης και συνεχούς χρόνου.* Η $X(t)$ θεωρεί ένα διακριτό σύνολο τιμών ενώ ο χρόνος t είναι συνεχής. Μία τέτοια διαδικασία καλείται διακριτή τυχαία διαδικασία και απεικονίζεται στο διάγραμμα 3.5.
3. *Συνεχούς κατάστασης και διακριτού χρόνου.* Η $X(t)$ θεωρεί ένα συνεχές πεδίο τιμών ενώ ο χρόνος t ένα διακριτό σύνολο τιμών. Μία τέτοια διαδικασία καλείται συνεχής τυχαία ακολουθία, και απεικονίζεται στο διάγραμμα 3.6.
4. *Διακριτής κατάστασης και διακριτού χρόνου.* Τόσο η $X(t)$ όσο και ο χρόνος t θεωρούν διακριτό σύνολο τιμών. Μία τέτοιου είδους διαδικασία καλείται διακριτή τυχαία ακολουθία, και απεικονίζεται στο διάγραμμα 3.7.



Διάγραμμα 3.5 Μία τυχαία διακριτή διαδικασία συνεχούς χρόνου



Διάγραμμα 3.6 Μία τυχαία συνεχής ακολουθία



Διάγραμμα 3.7 Μία τυχαία διακριτή ακολουθία

Καθορίζοντας τον χρόνο t , η τυχαία διαδικασία $X(t)$ γίνεται μια τυχαία μεταβλητή. Σε αυτήν την περίπτωση, οι τεχνικές που χρησιμοποιούμε στις τυχαίες μεταβλητές, ισχύουν. Συνεπώς, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε μια τυχαία διαδικασία από την κατανομή πρώτης τάξης ως

$$F_X(x; t) = P[X(t_0) \leq x] \quad (3.1)$$

ή με τη συνάρτηση πυκνότητας πρώτης τάξης ως

$$f_X(x; t) = \frac{d}{dx} F_X(x; t) \quad (3.2)$$

για όλες τις πιθανές τιμές του t . Η συνάρτηση κατανομής δεύτερης τάξης είναι η κοινή κατανομή των δύο τυχαίων μεταβλητών $X(t_1)$ και $X(t_2)$ για κάθε t_1 και t_2 . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη σχέση:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1) \leq x_1 \text{ and } X(t_2) \leq x_2] \quad (3.3)$$

ενώ η συνάρτηση πυκνότητας δεύτερης τάξης είναι

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \quad (3.4)$$

Τυπικά, μια πλήρης στατιστική περιγραφή μιας αυθαίρετης τυχαίας διαδικασίας απαιτεί τον καθορισμό των κατανομών όλων των τάξεων που δίνεται από τη σχέση

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n] \quad (3.5)$$

ή από τη συνάρτηση πυκνότητας n – οστής τάξης

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (3.6)$$

Ευτυχώς, συνήθως μας ενδιαφέρουν διαδικασίες που χαρακτηρίζονται από κάποιου βαθμού κανονικότητα, τέτοια ώστε να μπορούν να περιγραφούν απλούστερα και έτσι η γνώση της συνάρτησης πυκνότητας, πρώτης και δεύτερης τάξης, μπορεί να είναι αρκετή για να αναπαραχθούν οι συναρτήσεις πυκνότητας υψηλότερων τάξεων.

3.2 Προσδοκίες

Σε πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα, μπορεί να είναι απαραίτητες μόνο οι στατιστικές πρώτης και δεύτερης τάξης για να χαρακτηριστεί μία τυχαία διαδικασία. Δεδομένης μίας πραγματικής τυχαίας διαδικασίας $X(t)$, η συνάρτηση μέσης τιμής είναι

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x, t) dx \quad (3.7)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ορίζεται ως

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.8)$$

Όταν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(t_1, t_2)$ της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά $|t_1 - t_2|$, και η μέση τιμή m_X είναι σταθερή, λέμε ότι η $X(t)$ είναι *στατική με την ευρεία έννοια* ή *ευρείας έννοιας στατική*. Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης γράφεται σαν συνάρτηση ενός όρου $\tau = t_1 - t_2$. Αν θέσουμε $t_2 = t$ και $t_1 = t + \tau$, τότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μόνο ως προς το τ , είναι

$$R_{xx}(t + \tau, t) = R_{xx}(\tau) \quad (3.9)$$

Μία τυχαία διαδικασία $X(t)$ είναι *αυστηρά στατική* ή *στατική με την αυστηρή έννοια* αν οι στατιστικές δε μεταβάλλονται σε σχέση με το χρόνο. Να σημειωθεί ότι μία αυστηρά στατική διαδικασία είναι και στατική με την ευρεία έννοια αλλά δεν ισχύει και το αντίθετο. Η συνθήκη για στατικές με την ευρεία έννοια είναι λιγότερο αυστηρή από ότι η συνθήκη για δεύτερης τάξης στατικές, επειδή, για τις στατικές διαδικασίες με την ευρεία έννοια, μόνο οι στατιστικές δεύτερης τάξης, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, είναι περιορισμένη.

Παράδειγμα 3.2

Η συνάρτηση που δόθηκε στο Παράδειγμα 3.1, είναι στατική με την ευρεία έννοια;

Λύση

Για να είναι μία τυχαία διαδικασία στατική με την ευρεία έννοια, πρέπει να ικανοποιεί δύο συνθήκες, δηλαδή, $E[X(t)] = \text{σταθερή}$ και $R_{xx}(t + \tau, t) = R_{xx}(\tau)$. Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της $X(t)$, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$E[g(\Theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta$$

Όπου σε αυτήν την περίπτωση, $g(\theta) = A \cos(\omega t + \theta)$ και $f_{\Theta}(\theta) = 1/2\pi$ στο διάστημα μεταξύ 0 και 2π . Τότε

$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A \cos(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι

$$\begin{aligned} E[X(t + \tau, t)X(t)] &= E\{A \cos[\omega(t + \tau) + \theta]A \cos(\omega t + \theta)\} \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta)] \end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική ιδιότητα

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

Ο δεύτερος όρος ισούται με το μηδέν. Συνεπώς, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης γίνεται

$$R_{xx}(t + \tau, t) = \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau = R_{xx}(\tau)$$

Εφόσον η μέση τιμή είναι σταθερή και η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνο από το τ , η $X(t)$ είναι μία στατική διαδικασία με την ευρεία έννοια.

Όταν έχουμε να κάνουμε με δύο τυχαίες διαδικασίες $X(t)$ και $Y(t)$, λέμε ότι είναι *συνδυασμένα στατικές με την ευρεία έννοια* αν κάθε μία είναι στατική με την ευρεία έννοια και

$$R_{xy}(t + \tau, t) = E[X(t + \tau)Y(t)] = R_{xy}(\tau) \quad (3.10)$$

Η $R_{xy}(t_1, t_2)$ αναπαριστά τη συνάρτηση διασυσχέτισης των $X(t)$ και $Y(t)$. Επίσης ορίζουμε τη συνάρτηση συνδιακύμανσης $C_{xx}(t_1, t_2)$ και τη συνάρτηση cross-covariance $C_{xy}(t_1, t_2)$ μεταξύ των $X(t)$ και $Y(t)$ ως

$$C_{xx}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\} \quad (3.11)$$

και

$$C_{xy}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_x(t_1)][Y(t_2) - m_y(t_2)]\} \quad (3.12)$$

Αν η $Z(t)$ είναι μία μιγαδική τυχαία διαδικασία τέτοια ώστε $Z(t) = X(t) + jY(t)$, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και αυτοδιακύμανσης της $Z(t)$ είναι

$$R_{zz}(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z^*(t_2)] \quad (3.13)$$

και

$$C_{zz}(t_1, t_2) = E[\{Z(t_1) - m_z(t_1)\}\{Z(t_2) - m_z(t_2)\}^*] \quad (3.14)$$

όπου το $*$ συμβολίζει το συζυγή ενός μιγαδικού και $m_z(t)$ είναι η μέση τιμή της συνάρτησης $Z(t)$. Οι συναρτήσεις διασυσχέτισης και cross-covariance μεταξύ της μιγαδικής τυχαίας διαδικασίας $Z(t)$ και μίας άλλης μιγαδικής τυχαίας διαδικασίας $W(t)$, $W(t) = U(t) + jV(t)$, είναι

$$R_{zW}(t_1, t_2) = E[Z(t_1)W^*(t_2)] \quad (3.15)$$

και

$$C_{zW}(t_1, t_2) = E\{[Z(t_1) - m_z(t_1)][W(t_2) - m_w(t_2)]^*\} \quad (3.16)$$

Παράδειγμα 3.3

Θεωρήστε το πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος άπειρο αριθμό φορών. Μία συνάρτηση - δείγμα της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ ορίζεται ως

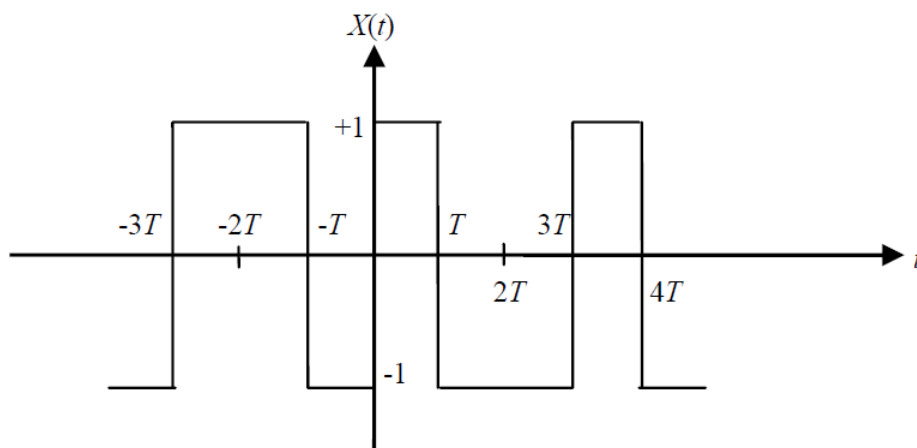
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } (n-1)T \leq t < nT \text{ if heads at } nth \text{ toss} \\ -1 & \text{for } (n-1)T \leq t < nT \text{ if tails at } nth \text{ toss} \end{cases}$$

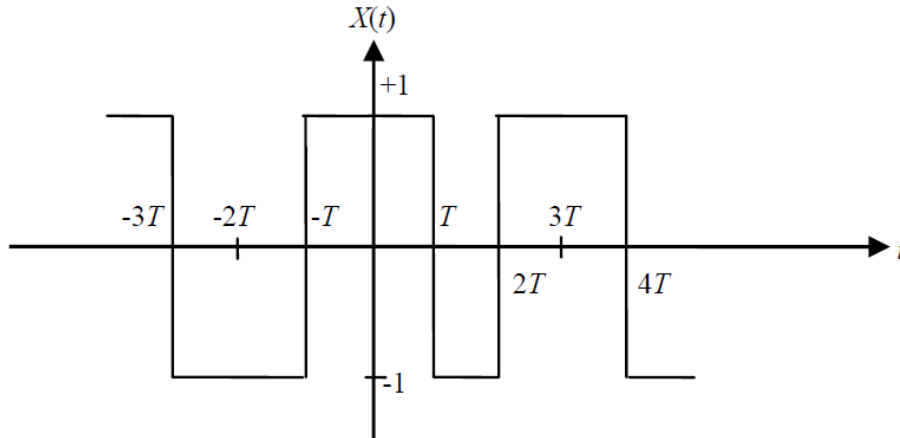
όπου το n παίρνει όλες τις πιθανές ακέραιες τιμές. Αυτή η διαδικασία είναι στατική με την ευρεία έννοια;

Λύση

Για να είναι η διαδικασία στατική με την ευρεία έννοια, πρέπει να επαληθευτεί ότι έχει μία σταθερή μέση τιμή, και μία συνάρτηση αυτοσυσχέτισης η οποία να είναι μόνο συνάρτηση του τ .

Έστω $P(H) = P(\text{κορώνα})$ και $P(T) = P(\text{γράμματα})$. Τότε, από το διάγραμμα 3.8,





Διάγραμμα 3.8 Συναρτήσεις – δείγματα της $X(t)$

$$E[X(t)] = (1)P(H) + (-1)P(T) = (1)\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 0$$

Εφόσον η μέση τιμή είναι σταθερή, η διαδικασία μπορεί να είναι στατική με την ευρεία έννοια. Η μέση τιμή του τετραγώνου της $X(t)$ είναι

$$E[X^2(t)] = (1)^2 P(H) + (-1)^2 P(T) = 1$$

Θεωρούμε, τώρα, τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

Πρέπει να μελετήσουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Οι t_1 και t_2 ανήκουν στο ίδιο διάστημα ρίψης. Σε αυτήν την περίπτωση, $(n-1)T \leq t_1, t_2 \leq nT$. Συνεπώς,

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X^2(t)] = 1$$

Περίπτωση 2: Οι t_1 και t_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα ρίψης. Έχουμε $(j-1)T \leq t_1 \leq jT$ και $(k-1)T \leq t_2 \leq kT$ για $j \neq k$. Εφόσον οι διαδοχικές ρίψεις είναι στατιστικά ανεξάρτητες, οι $X(t_1)$ και $X(t_2)$ είναι επίσης στατιστικά ανεξάρτητες. Κατά συνέπεια,

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)]E[X(t_2)] = 0$$

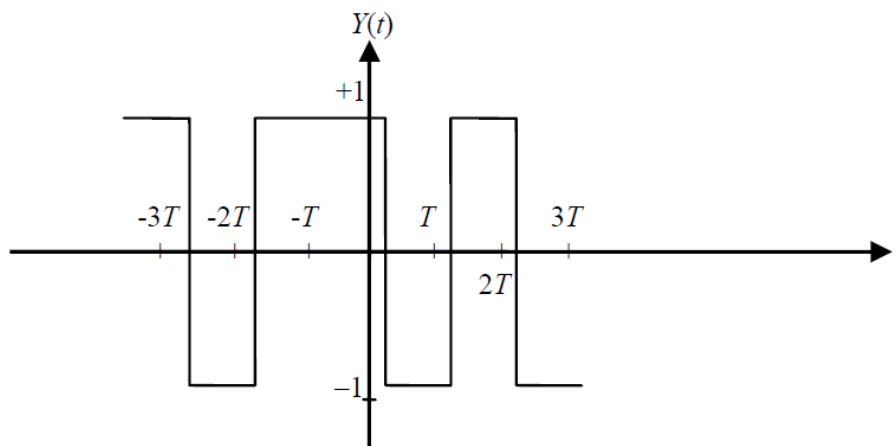
Δεδομένου ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής $\tau = t_1 - t_2$, η διαδικασία $X(t)$ δεν είναι στατική. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως ημι-τυχαία δυαδική μετάδοση.

Παράδειγμα 3.4

Θεωρήστε την τυχαία διαδικασία $Y(t) = X(t-\Theta)$, όπου $X(t)$ είναι η διαδικασία του παραδείγματος 3.3, και Θ είναι μία τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα από 0 έως T . Η Θ είναι στατιστικά ανεξάρτητη της $X(t)$. Είναι η $Y(t)$ στατική με την ευρεία έννοια;

Λύση

Μία συνάρτηση - δείγμα της $Y(t)$ φαίνεται στο διάγραμμα 3.9. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η μέση τιμή της $Y(t)$ είναι



Διάγραμμα 3.9 Συνάρτηση - δείγμα της $Y(t)$

$$E[Y(t)] = (1)P(H) + (-1)P(T) = 0$$

η οποία είναι μία σταθερά. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από τη σχέση

$$R_{yy}(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)]$$

Έχουμε μερικές πιθανές περιπτώσεις

Περίπτωση 1: $\tau = t_1 - t_2$ και $|\tau| > T$

Σε αυτήν την περίπτωση, οι t_1 και t_2 βρίσκονται σε διαφορετικά διαστήματα ρίψης για κάθε συνάρτηση - δείγμα, και συνεπώς, οι $Y(t_1)$ και $Y(t_2)$ είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Συνεπώς,

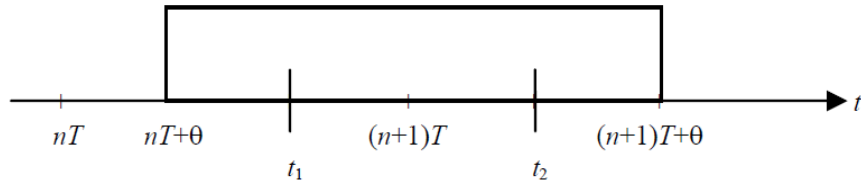
$$R_{yy}(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[Y(t_1)]E[Y(t_2)] = 0$$

Περίπτωση 2: $|\tau| \leq T$

Σε αυτήν την περίπτωση, οι t_1 και t_2 μπορεί να είναι ή μπορεί και να μην είναι στο ίδιο διάστημα ρίψης. Συμβολίζουμε με SI το γεγονός κατά το οποίο οι t_1 και t_2 συμβαίνουν στο ίδιο διάστημα, και SI^c (το συμπληρωματικό γεγονός του SI) το γεγονός κατά το οποίο οι t_1 και t_2 δε συμβαίνουν κατά το ίδιο διάστημα. Επομένως,

$$\begin{aligned} R_{yy}(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] \\ &= E[Y(t_1)Y(t_2) | SI]P(SI) + E[Y(t_1)Y(t_2) | SI^c]P(SI^c) \end{aligned}$$

Το Παράδειγμα 3.2 έδειξε ότι $E[Y(t_1)Y(t_2) | SI] = 1$ και $E[Y(t_1)Y(t_2) | SI^c] = 0$. Συνεπώς, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι απλά η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός SI .



Διάγραμμα 3.10 Ένα διάστημα για $-T \leq \tau \leq 0$

$$R_{yy}(t_1, t_2) = P(SI)$$

Όταν $t_1 < t_2$, $-T \leq \tau \leq 0$. Η περίπτωση περιγράφεται καλύτερα από το διάγραμμα 3.10 όπου αναπαρίσταται ένα διάστημα μόνο. Οι t_1 και t_2 είναι στο ίδιο διάστημα εάν $t_1 > nT + \theta$ και $t_2 < (n+1)T + \theta$, το οποίο ισοδυναμεί με

$$t_2 - (n+1)T < \theta < t_1 - nT$$

Εφόσον το θ είναι ομοιόμορφα κατανομημένο μεταξύ 0 και T , η πιθανότητα να είναι τα t_1 και t_2 στο ίδιο διάστημα, είναι

$$P(SI) = \int_{t_2 - (n+1)T}^{t_1 - nT} \frac{1}{T} d\theta = 1 + \frac{\tau}{T} \quad \text{for} \quad -T \leq \tau \leq 0$$

Παρόμοια, όταν $t_2 < t_1$ και τα t_1 και t_2 είναι στο ίδιο διάστημα, έχουμε $t_1 < (n+1)T + \theta$ και $t_2 > nT + \theta$, το οποίο οδηγεί στα

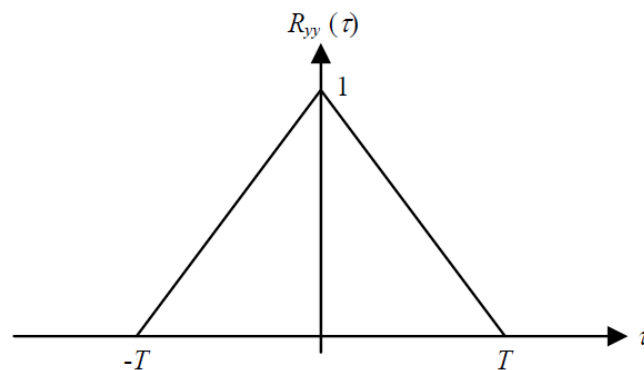
$$t_1 - (n+1)T < \theta < t_2 - nT$$

και

$$P(SI) = 1 - \frac{\tau}{T} \quad \text{for} \quad 0 \leq \tau \leq T$$

Συνεπώς, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $Y(t)$ είναι

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} & , \quad |\tau| \leq T \\ 0 & , \quad |\tau| > T \end{cases}$$



Διάγραμμα 3.11 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $Y(t)$.

και φαίνεται στο διάγραμμα 3.11. Επειδή ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες (η μέση τιμή είναι σταθερή και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι συνάρτηση του τ μόνο), η διαδικασία $Y(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια. Η $Y(t)$ είναι γνωστή και ως τυχαία δυαδική μετάδοση.

Παράδειγμα 3.5

Έστω $I(t)$ και $Q(t)$ δύο τυχαίες διαδικασίες τέτοιες ώστε

$$I(t) = X \cos \omega t + Y \sin \omega t \text{ και } Q(t) = Y \cos \omega t - X \sin \omega t$$

όπου X και Y ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή. Οι μέσες τιμές των τετραγώνων των X και Y είναι $E[X^2] = E[Y^2] = \sigma^2$. Βρείτε τη συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ των διαδικασιών $I(t)$ και $Q(t)$.

Λύση

Η συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ των $I(t)$ και $Q(t)$ είναι

$$\begin{aligned} R_{iq}(t + \tau, t) &= E[I(t + \tau)Q(t)] \\ &= E\{[X \cos(\omega t + \omega\tau) + Y \sin(\omega t + \omega\tau)][Y \cos \omega t - X \sin \omega t]\} \\ &= E[XY][\cos(\omega t + \omega\tau) \cos \omega t - \sin(\omega t + \omega\tau) \sin \omega t] \\ &\quad - E[X^2] \cos(\omega t + \omega\tau) \sin \omega t + E[Y^2] \sin(\omega t + \omega\tau) \cos \omega t \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ιδιότητες και το γεγονός ότι οι X και Y είναι ασυσχέτιστες και με μηδενική μέση τιμή ($E[XY] = E[X] E[Y] = 0$), προκύπτει

$$R_{iq}(t + \tau, t) = -\sigma^2 \sin \omega\tau$$

3.3 Ιδιότητες των συναρτήσεων συσχέτισης

Οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και διασυσχέτισης που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες ενότητες, είναι πολύ βασικές έννοιες για την κατανόηση των τυχαίων διαδικασιών. Σε αυτήν την ενότητα, μελετάμε κάποιες από τις ιδιότητές τους που μας αφορούν περισσότερο, χωρίς να δίνεται κάποια τυπική απόδειξη.

3.3.1 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

Μερικές από τις ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι

$$R_{xx}(t_2, t_1) = R_{xx}^*(t_1, t_2) \quad (3.17)$$

Αν η $X(t)$ είναι πραγματική, τότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι συμμετρική ως προς τη γραμμή $t_1 = t_2$ στο (t_1, t_2) επίπεδο, δηλαδή,

$$R_{xx}(t_2, t_1) = R_{xx}(t_1, t_2) \quad (3.18)$$

Η συνάρτηση μέσης τιμής του τετραγώνου μιας τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ είναι πάντα θετική, δηλαδή,

$$R_{xx}(t_1, t_1) = E[X(t_1)X^*(t_1)] = E[|X(t)|^2] \geq 0 \quad (3.19)$$

Εάν η $X(t)$ είναι πραγματική, η μέση τιμή του τετραγώνου $E[X^2(t)]$ είναι πάντα μη - αρνητική.

$$|R_{xy}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{R_{xx}(t_1, t_1)R_{yy}(t_2, t_2)} \quad (3.20)$$

Το γεγονός αυτό είναι γνωστό σαν *ανισότητα του Schwarz*, και μπορεί να γραφεί ως

$$|R_{xx}(t_1, t_2)|^2 \leq E[|X(t_1)|^2]E[|X(t_2)|^2] \quad (3.21)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i a_j^* R_{xx}(t_i, t_j) \geq 0 \quad (3.22)$$

Για οποιοδήποτε σύνολο σταθερών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, και οποιοδήποτε σύνολο σταθερών του χρόνου t_1, t_2, \dots, t_n . Συνεπώς η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι μία σαφώς μη αρνητική συνάρτηση.

3.3.2 Συνάρτηση διασυσχέτισης

Θεωρούμε δύο τυχαίες διαδικασίες $X(t)$ και $Y(t)$. Τότε,

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}^*(t_2, t_1) \quad (3.23)$$

Εάν οι τυχαίες διαδικασίες $X(t)$ και $Y(t)$ είναι πραγματικές,

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1) \quad (3.24)$$

Σε γενικές γραμμές οι $R_{xy}(t_1, t_2)$ και $R_{yx}(t_2, t_1)$ δεν είναι ίσες.

$$\begin{aligned} |R_{xy}(t_1, t_2)| &= |E[X(t_1)]E[Y(t_2)]| \\ &\leq \sqrt{R_{xx}(t_1, t_1)R_{yy}(t_2, t_2)} = \sqrt{E[|X(t_1)|^2]E[|Y(t_2)|^2]} \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.3.3 Στατικές με την ευρεία έννοια

Θεωρούμε δύο διαδικασίες $X(t)$ και $Y(t)$ πραγματικές και στατικές με την ευρεία έννοια. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι μια άρτια συνάρτηση του τ , δηλαδή,

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau) \quad (3.26)$$

$$R_{xx}(0) = E[|X|^2(t)] \quad (3.27)$$

Αφού η $X(t)$ είναι πραγματική,

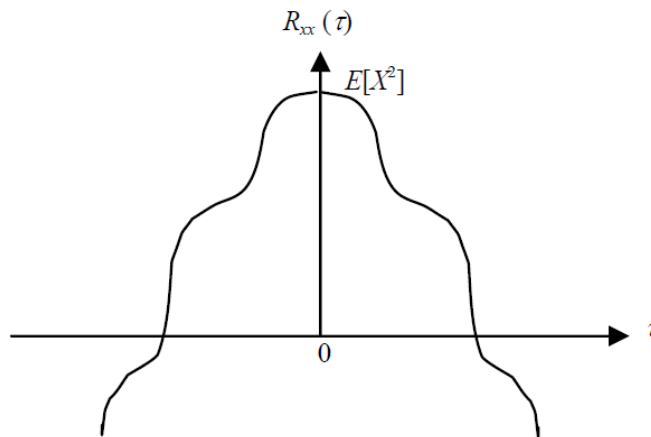
$$R_{xx}(0) = E[X^2(t)] = \sigma_x^2 + m_x^2 \geq 0 \quad (3.28)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης στο $\tau = 0$ είναι σταθερή και ίση με τη μέση τιμή του τετραγώνου.

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) \quad (3.29)$$

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης εμφανίζεται για $\tau = 0$ και είναι μη αρνητική, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.12. Όταν η $X(t)$ έχει μία dc συνιστώσα (ή

μη μηδενική μέση τιμή), τότε η $R_{xx}(\tau)$ έχει μία σταθερή συνιστώσα. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι δύο παρατηρήσεις μίας διαδικασίας στατικής με την ευρεία έννοια, μπορεί να γίνουν ασυσχέτιστες όσο το τ πλησιάζει στο άπειρο. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση συνδιακύμανσης τείνει στο μηδέν. Έχουμε,



Διάγραμμα 3.12 Μία πιθανή συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} C_{xx}(\tau) &= E\{[X(t+\tau) - m_x][X(t) - m_x]\} \\ &= R_{xx}(\tau) - m_x^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

ή

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = |m_x|^2 \quad (3.31)$$

Αν οι $X(t)$ και $Y(t)$ είναι από κοινού στατικές με την ευρεία έννοια, μπορούν να προκύψουν παρόμοιες ιδιότητες. Δηλαδή,

$$R_{xy}^*(-\tau) = R_{yx}(\tau) \quad (3.32)$$

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0)R_{yy}(0) \quad (3.33)$$

$$R_{xy}(0) = R_{yx}^*(0) \quad (3.34)$$

Αν οι $X(t)$ και $Y(t)$ είναι πραγματικές τυχαίες διαδικασίες, τότε

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \frac{R_{xx}(0) + R_{yy}(0)}{2} \quad (3.35)$$

3.4 Μερικές τυχαίες διαδικασίες

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε συγκεκριμένους τύπους τυχαίων διαδικασιών οι οποίοι μπορεί να χαρακτηρίζουν ορισμένες εφαρμογές.

3.4.1 Ένας παλμός γνωστού σχήματος αλλά τυχαίου πλάτους και χρόνου άφιξης

Σε εφαρμογές ραντάρ και σόναρ, ένα σήμα επιστροφής μπορεί να χαρακτηρίζεται σαν μια τυχαία διαδικασία που αποτελείται από έναν παλμό με γνωστό σχήμα, αλλά με τυχαίο πλάτος και χρόνο άφιξης. Ο παλμός μπορεί να εκφραστεί ως,

$$X(t) = A S(t - \Theta) \quad (3.36)$$

όπου τα A και Θ είναι στατιστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, και η s(t) είναι μία ντετερμινιστική συνάρτηση. Μία συνάρτηση - δείγμα μπορεί να αναπαρασταθεί όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.13. Η συνάρτηση μέσης τιμής αυτής της συγκεκριμένης τυχαίας διαδικασίας δίνεται από τον τύπο

$$E[X(t)] = E[A S(t - \Theta)] \quad (3.37)$$

Εφόσον οι A και Θ είναι στατιστικά ανεξάρτητες, έχουμε

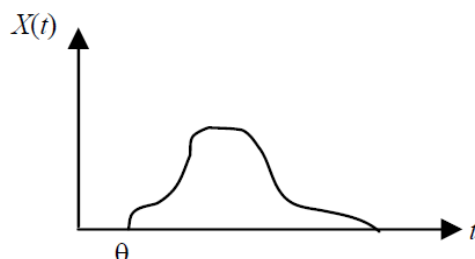
$$E[X(t)] = E[A] E[S(t - \Theta)] = E[A] \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta \quad (3.38)$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t - \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta$$

είναι απλά η συνέλιξη του παλμού s(t) με τη συνάρτηση πυκνότητας της Θ . Δηλαδή,

$$E[X(t)] = E[A] s(t) * f_{\Theta}(\theta) \quad (3.39)$$



Διάγραμμα 3.13 Παλμός X(t)

Ομοίως, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[A^2] \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1 - \theta) s(t_2 - \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta \quad (3.40)$$

Αν ο χρόνος άφιξης είναι γνωστό ότι είναι κάποια καθορισμένη τιμή θ_0 , οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μέσης τιμής της X(t) γίνονται

$$E[X(t)] = E[A] s(t - \theta_0) \quad (3.41)$$

και

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[A^2] s(t_1 - \theta_0) s(t_2 - \theta_0) \quad (3.42)$$

Μία άλλη ειδική περίπτωση είναι όταν ο χρόνος άφιξης μπορεί να είναι ομοιόμορφα κατανομημένος στο διάστημα από 0 έως T. Σε αυτήν την περίπτωση οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μέσης τιμής, είναι

$$E[X(t)] = \frac{E[A]}{T} \int_0^T s(t-\theta) d\theta \quad (3.43)$$

και

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \frac{E[A]^2}{T} \int_0^T s(t_1-\theta) s(t_2-\theta) d\theta \quad (3.44)$$

3.4.2 Πολλαπλοί παλμοί

Θεωρούμε, τώρα, ότι έχουμε μία κατάσταση πολλαπλών παλμών. Κάτι τέτοιο μπορεί να ισχύει σε εφαρμογές ραντάρ για ένα περιβάλλον πολλαπλών στόχων. Η τυχαία διαδικασία $X(t)$ μπορεί να εκφραστεί σαν

$$X(t) = \sum_{k=1}^n A_k S(t - \Theta_k) \quad (3.45)$$

Όπου οι $2n$ τυχαίες μεταβλητές A_k και Θ_k , $k=1,2,\dots,n$, είναι αμοιβαία και στατιστικά ανεξάρτητες. Επιπλέον, τα πλάτη είναι ανεξάρτητα των μετατοπίσεων φάσης, και υποθέτουμε ότι τα A_k είναι πανομοιότυπα κατανομημένα με τη συνάρτηση πυκνότητας $f_A(\alpha)$, ενώ τα Θ_k είναι πανομοιότυπα κατανομημένα με τη συνάρτηση πυκνότητας $f_\Theta(\theta)$. Μπορεί να προκύψει εύκολα ότι οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μέσης τιμής είναι

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E \left[\sum_{k=1}^n A_k S(t - \Theta_k) \right] = \sum_{k=1}^n E[A_k] E[S(t - \Theta_k)] \\ &= n E[A_k] \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\theta) f_\Theta(\theta) d\theta = n E[A_k] [s(t) * f_\Theta(\theta)] \end{aligned} \quad (3.46)$$

και

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= \left[E \sum_{k=1}^n A_k S(t_1 - \Theta_k) \sum_{j=1}^n A_j S(t_2 - \Theta_j) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n E[A_k A_j] E[S(t_1 - \Theta_k) S(t_2 - \Theta_j)] \\ &= n E[A_k^2] \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1 - \theta) s(t_2 - \theta) f_\Theta(\theta) d\theta \\ &\quad + (n^2 - n) (E[A_k])^2 \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1 - \theta) f_\Theta(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} s(t_2 - \theta) f_\Theta(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.47)$$

Αν η τυχαία μεταβλητή Θ είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $(0, T)$, οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μέσης τιμής της $X(t)$ γίνονται

$$E[X(t)] = nE[A_k] \frac{1}{T} \int_0^T s(t - \theta) d\theta \quad (3.48)$$

και

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= nE[A_k^2] \frac{1}{T} \int_0^T s(t_1 - \theta) s(t_2 - \theta) d\theta \\ &+ \frac{(n^2 - n)}{T^2} \int_0^T s(t_1 - \theta) d\theta \int_0^T s(t_2 - \theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.49)$$

3.4.3 Περιοδικές τυχαίες διαδικασίες

Η τυχαία διαδικασία $X(t)$ καλείται περιοδική με περίοδο T εάν όλες οι συναρτήσεις – δείγματά της, είναι περιοδικές με περίοδο T , εκτός από εκείνες τις συναρτήσεις – δείγματα που συμβαίνουν με μηδενική πιθανότητα.

Θεώρημα. Αν η τυχαία διαδικασία $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι περιοδική με περίοδο T , εάν και μόνο αν, η $X(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T , και το αντίστροφο.

Απόδειξη. Η πρώτη συνθήκη αναφέρει ότι $R_{xx}(t+nT) = R_{xx}(t)$ αν η $X(t)$ είναι περιοδική. Περιοδική $X(t)$ σημαίνει ότι $X(t+nT) = X(t)$. Τότε,

$$R_{xx}(t+nT) = E[X(t+nT)X(t)] = E[X(t)X(t)] = R_{xx}(t) \quad (3.50)$$

Η δεύτερη συνθήκη δηλώνει ότι αν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι περιοδική, τότε, $X(t+nT) = X(t)$, όπου η $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια. Θεωρήστε την *ανισότητα του Tchebycheff*, η οποία ορίζει

$$P[|Y(t) - m_y| > k] \leq \frac{\sigma_y^2}{k^2} \quad (3.51)$$

όπου m_y και σ_y^2 είναι η μέση τιμή και η διακύμανση της διαδικασίας $Y(t)$, αντίστοιχα, και το k είναι μια θετική σταθερά.

Έστω $Y(t) = X(t+T) - X(t)$. Τότε, η μέση τιμή και η διακύμανση της $Y(t)$ είναι

$$m_y = E[Y(t)] = E[X(t+T) - X(t)] = E[X(t+T)] - E[X(t)] = 0 \quad (3.52)$$

επειδή η $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια (η μέση τιμή είναι σταθερή). Επίσης,

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[Y^2(t)] = E\{[X(t+T) - X(t)]^2\} \\ &= E[X^2(t+T)] - 2E[X(t+T)X(t)] + E[X^2(t)] \\ &= R_{xx}(0) - 2R_{xx}(T) + R_{xx}(0) = 2[R_{xx}(0) - R_{xx}(T)] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Η διακύμανση σ_y^2 είναι μηδέν, λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι περιοδική με περίοδο T , και $R_{xx}(0)=R_{xx}(T)$. Συνεπώς, από την ανισότητα του Tchebycheff, έχουμε

$$P[|X(t+T) - X(t)| > k] = 0 \quad \text{for all } t \quad (3.54)$$

Συνεπώς, η $X(t)$ πρέπει να είναι περιοδική.

Πόρισμα. Έστω $s(t)$ μια ντετερμινιστική συνάρτηση και περιοδική με περίοδο T . Η τυχαία διαδικασία $X(t)$, που ορίζεται ως $X(t)=S(t-\Theta)$, όπου Θ μία τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $(0, T)$, είναι στατική με την ευρεία έννοια.

Απόδειξη. Για να είναι η $X(t)$ στατική με την ευρεία έννοια, η μέση τιμή $E[X(t)]$ πρέπει να είναι σταθερή, και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης πρέπει να είναι συνάρτηση της διαφοράς του χρόνου, τ . Η συνάρτηση μέσης τιμής της $X(t)$ είναι

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \frac{1}{T} \int_0^T s(t-\theta) d\theta \quad (3.55)$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής και θέτοντας $u=t-\theta$, προκύπτει

$$E[X(t)] = -\frac{1}{T} \int_t^{t-T} s(u) du = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t s(u) du = \text{constant} \quad (3.56)$$

εφόσον ολοκληρώσουμε μία περιοδική συνάρτηση, $s(t)$, στην περίοδό της. Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι

$$R_{xx}(t+\tau, t) = R_{xx}(\tau).$$

Η διαδικασία $X(t)$ είναι περιοδικά στατική ή κυκλοστατική με περίοδο T εάν οι στατιστικές της δεν μεταβάλλονται με μετατόπιση nT , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, από την αρχή του χρόνου. Δηλαδή,

$$f_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m) = f_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m; t_1 + nT, \dots, t_m + nT) \quad (3.57)$$

για όλους τους ακέραιους n και m .

Η $X(t)$ είναι κυκλοστατική με την ευρεία έννοια με περίοδο T αν οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μέσης τιμής της, είναι περιοδικές με την ίδια περίοδο T . Δηλαδή,

$$m_x(t + kT) = m_x(t) \quad (3.58)$$

και

$$R_{xx}(t_1 + kT, t_2 + kT) = R_{xx}(t_1, t_2) \quad (3.59)$$

για όλα τα t, t_1, t_2 , και οποιονδήποτε ακέραιο k .

Θεώρημα. Αν η $X(t)$ είναι κυκλοστατική διαδικασία με την ευρεία έννοια με περίοδο T , τότε η διαδικασία $Y(t) = X(t - \Theta)$, όπου η Θ είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $(0, T)$, είναι στατική με την ευρεία έννοια.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι απλή και όμοια με αυτήν του προηγούμενου θεωρήματος.

3.4.4 Γκαουσιανές διαδικασίες

Μία τυχαία διαδικασία $X(t)$ είναι Γκαουσιανή εάν οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$, είναι από κοινού Γκαουσιανές για όλες τις πιθανές τιμές του n και των t_1, t_2, \dots, t_n . Αφού η πολυμεταβλητή Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή εξαρτάται μόνο από το μέσο διάνυσμα και ο πίνακας συνδιακύμανσης των n τυχαίων μεταβλητών, παρατηρούμε ότι αν η $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια, τότε είναι και στατική με την αυστηρή έννοια.

Αν η $X(t)$ είναι μία Γκαουσιανή τυχαία διαδικασία που εφαρμόζεται σε ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.14, τότε η διαδικασία εξόδου είναι

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (3.60)$$

είναι επίσης Γκαουσιανή. Ως εκ τούτου, η διαδικασία εξόδου $Y(t)$ θα προσδιοριστεί εξ' ολοκλήρου, δεδομένης της διαδικασίας εισόδου $X(t)$ και της κρουστικής απόκρισης $h(t)$.

Παράδειγμα 3.6

Έστω $X(t)$, μία στατική με την ευρεία έννοια, Γκαουσιανή τυχαία διαδικασία με μηδενική μέση τιμή, που δίνεται ως είσοδος σε έναν φωρατή τετραγωνικού νόμου, δηλαδή, ένα μη γραμμικό σύστημα χωρίς μνήμη.

(α) Αποδείξτε ότι το αποτέλεσμα δεν είναι πλέον Γκαουσιανό.

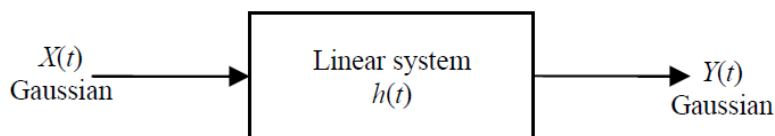
(β) Προσδιορίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{YY}(\tau)$ της εξόδου και τη διακύμανσή του.

Λύση

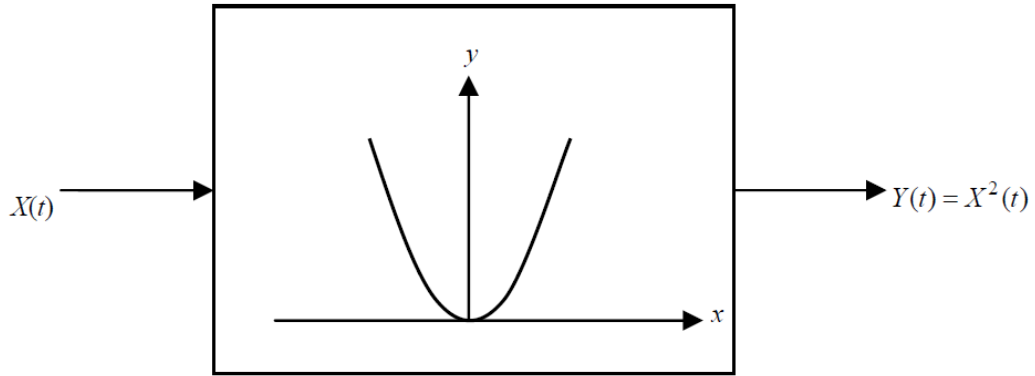
(α) Το σύστημα φαίνεται στο διάγραμμα 3.15. Η συνάρτηση πυκνότητας της εισόδου είναι

$$f_X(x; t) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα που δίνεται στο Παράδειγμα 1.19, η συνάρτηση πυκνότητας της εξόδου θα είναι



Διάγραμμα 3.14 κρουστική απόκριση $h(t)$.



Διάγραμμα 3.15 Φωρατής τετραγωνικού νόμου.

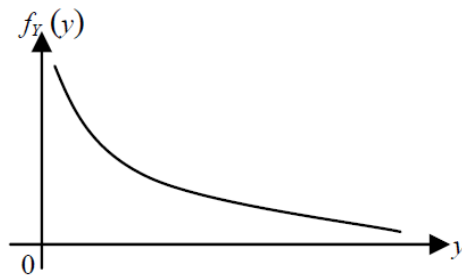
$$f_Y(y; t) = f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2\sigma^2}, & y \geq 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

και φαίνεται στο διάγραμμα 3.16. Παρατηρούμε ότι η έξοδος του μη γραμμικού συστήματος χωρίς μνήμη δεν είναι πλέον Γκαουσιανή.

(β) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου $Y(t) = X^2(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$R_{yy}(t + \tau, t) = E[Y(t + \tau)Y(t)] = E[X^2(t + \tau)X^2(t)] = E[X(t + \tau)X(t + \tau)X(t)X(t)]$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της (2.244), η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας εξόδου, γίνεται



Διάγραμμα 3.16 Συνάρτηση πυκνότητας της εξόδου.

Τότε η μέση τιμή του τετραγώνου της $Y(t)$ είναι

$$E[Y^2(t)] = R_{yy}(0) = 3\{E[X^2(t)]\}^2 = 3[R_{xx}(0)]^2,$$

αλλά επίσης $E[Y(t)] = E[X^2(t)] = R_{xx}(0) = \sigma^2$. Συνεπώς, η διακύμανση της $Y(t)$ είναι

$$\sigma^2_y = E[Y^2(t)] - \{E[Y(t)]\}^2 = 2[R_{xx}(0)]^2 = 2\sigma^4.$$

Έστω ότι οι διαδικασίες $Y_1(t)$ και $Y_2(t)$ είναι οι έξοδοι δύο γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων με αντίστοιχες εισόδους $X_1(t)$ και $X_2(t)$. Οι διαδικασίες $Y_1(t)$ και $Y_2(t)$ είναι από κοινού Γκαουσιανές, δεδομένου ότι οι $X_1(t)$ και $X_2(t)$ είναι συνδυασμένα Γκαουσιανές.

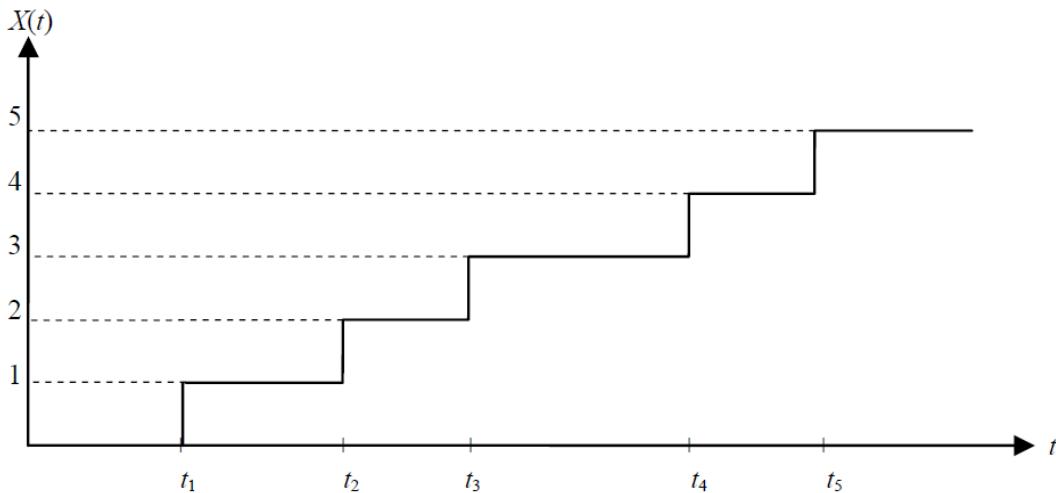
3.4.5 Η διαδικασία Poisson

Η διαδικασία Poisson χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση καταστάσεων όπως η εκπομπή σωματιδίων άλφα από ραδιενεργό υλικό, αριθμός της αποτυχίας των μερών ενός συστήματος, η εξυπηρέτηση πελατών σε ένα ταχυδρομείο, ή οι τηλεφωνικές κλήσεις που δέχεται ένα γραφείο. Αυτά τα γεγονότα μπορούν να περιγραφούν με μία συνάρτηση καταμέτρησης $X(t)$, $t > 0$, τέτοια ώστε σε μηδενικό χρόνο να ισχύει, $X(0)=0$. Μια τυπική συνάρτηση - δείγμα της διαδικασίας Poisson $X(t)$, $t > 0$, η οποία είναι διαδικασία διακριτού χρόνου και διακριτού πλάτους, φαίνεται στο διάγραμμα 3.17. Η διαδικασία $X(t)$ καλείται διαδικασία Poisson εάν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. η $X(t)$ είναι μία μη μειούμενη βηματική συνάρτηση, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.17, με μοναδιαία άλματα (που αναπαριστούν τα συμβάντα) σε κάθε χρονική στιγμή t_k , και το k είναι ένας πεπερασμένος και μετρήσιμος αριθμός.

2. για οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , $t_2 > t_1$, ο αριθμός των συμβάντων (ή αλμάτων) που συμβαίνουν στο διάστημα t_1 έως t_2 , ακολουθούν μία κατανομή Poisson, τέτοια ώστε

$$P[X(t_2) - X(t_1) = k] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} \exp[-\lambda(t_2 - t_1)], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.61)$$



Διάγραμμα 3.17 Συνάρτηση - δείγμα μιας διαδικασίας Poisson.

3. ο αριθμός των συμβάντων που παρατηρούνται σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα t είναι ανεξάρτητος του αριθμού των συμβάντων που παρατηρούνται σε οποιοδήποτε άλλο μη επικαλυπτόμενο διάστημα, δηλαδή, η $X(t)$ είναι μία ανεξάρτητη διαδικασία αύξησης. Συνεπώς,

$$P[X(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.62)$$

Η διαδικασία Poisson να οριστεί επίσης και με την έννοια των σημείων Poisson. Έστω ότι η στιγμή κατά την οποία συμβαίνουν τα γεγονότα, είναι όπως αποτυπώνεται στο διάγραμμα 3.18. Ξεκινάμε την παρατήρηση της διαδικασίας στο

χρονικό σημείο $t=0$. Λέμε ότι τα σημεία T_i είναι σημεία Poisson με παράμετρο λ_t , εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Ο αριθμός των σημείων T_i σε ένα διάστημα (t_1, t_2) , που συμβολίζεται $N(t_1, t_2)$, είναι μια τυχαία μεταβλητή Poisson. Δηλαδή, η πιθανότητα των k σημείων σε χρόνο $t = t_2 - t_1$ είναι

$$P[N(t_1, t_2) = k] = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \quad (3.63)$$

Το λ καλείται πυκνότητα ή μέσος ρυθμός άφιξης της διαδικασίας Poisson.

2. Αν τα διαστήματα (t_1, t_2) και (t_3, t_4) δεν είναι επικαλυπτόμενα, τότε οι αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές $N(t_1, t_2)$ και $N(t_3, t_4)$ είναι ανεξάρτητες.

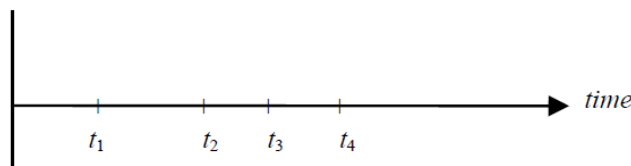
Ορίζουμε τη διαδικασία Poisson ως

$$X(t) = N(0, t) \quad (3.64)$$

τέτοια ώστε

$$X(0) = 0 \quad (3.65)$$

$$P[X(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.66)$$



Διάγραμμα 3.18 Πιθανές στιγμές εμφάνισης συγκεκριμένων γεγονότων .

Η πρώτου βαθμού κατανομή της $X(t)$ είναι

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x_1; t_1) &= P[X(t_1) \leq x_1] = P[\text{the number of points in interval } (0, t_1) \leq x_1] \\ &= \sum_{k=0}^{x_1} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^k}{k!} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Παράδειγμα 3.7

Έστω $X(t)=N(0,t)$ μια διαδικασία Poisson που αναπαριστά τον αριθμό των γεγονότων στο διάστημα $(0,t)$. Υποθέτουμε ότι το πρώτο γεγονός συμβαίνει στη χρονική στιγμή T_1 . Καθορίστε

(α) $f_{T_1}(t_1)$

(β) Τη μέση τιμή της T_1 και τη διακύμανση.

Λύση

Από την (3.65) έχουμε

$$P[X(t) = N(0, t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

(α) Το γεγονός $T_1 > t_1$ είναι ισοδύναμο με το $N(0, t_1) = 0$, αφού το πρώτο γεγονός συμβαίνει στη χρονική στιγμή t_1 . Άρα,

$$P(T_1 > t_1) = P[N(0, t_1) = 0] = e^{-\lambda t_1}, \quad t_1 > 0$$

Η συνάρτηση κατανομή τότε, είναι

$$F_{T_1}(t_1) = P(T_1 \leq t_1) = 1 - P(T_1 > t_1) = 1 - e^{-\lambda t_1}, \quad t_1 > 0$$

και η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f_{T_1}(t_1) = \frac{\partial F_{T_1}(t_1)}{\partial t_1} = \lambda e^{-\lambda t_1}, \quad t_1 > 0$$

Να σημειωθεί ότι αυτή είναι η εκθετική συνάρτηση πυκνότητας που περιγράφεται στη (2.88) για $\lambda = 1/\beta$.

(β) Η μέση τιμή της T_1 είναι

$$E[T_1] = \int_0^{\infty} t_1 \lambda e^{-\lambda t_1} dt_1 = \frac{1}{\lambda}$$

ενώ η διακύμανση είναι

$$\text{var}[T_1] = E[T_1^2] - (E[T_1])^2$$

με

$$E[T_1^2] = \int_0^{\infty} t_1^2 \lambda e^{-\lambda t_1} dt_1 = 2/\lambda^2.$$

Συνεπώς,

$$\text{var}[T_1] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

3.4.6 Οι διαδικασίες Bernoulli και οι Διωνυμικές διαδικασίες

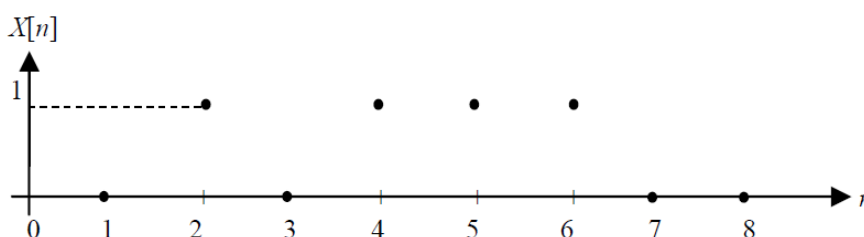
Στο Κεφάλαιο 2, ορίσαμε το πείραμα Bernoulli ως το “απλούστερο” με την έννοια ότι μόνο δύο αποτελέσματα είναι πιθανά: κορώνα ή γράμματα που αντιστοιχούν σε ένα (επιτυχία) ή μηδέν (αποτυχία), τα οποία συμβαίνουν με πιθανότητες p και $1-p = q$, αντίστοιχα. Λέμε ότι η $X[n]$, $n=1,2,\dots$, είναι μία διαδικασία Bernoulli με παράμετρο p εάν οι $X[1], X[2], \dots, X[n]$ είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli με παραμέτρους p . Σημειώστε ότι η διαδικασία Bernoulli είναι μία διαδικασία διακριτού χρόνου, όπως φαίνεται στη χαρακτηριστική συνάρτηση – δείγμα του διαγράμματος 3.19. Η συνάρτηση πυκνότητας της διαδικασίας Bernoulli δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X[n]}(x[n]) = q \delta(x[n]) + p \delta(x[n]-1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.68)$$

όπου $\delta(\cdot)$ είναι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση. Η συνάρτηση πυκνότητας δεύτερης τάξης δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
 f_{X[n_1]X[n_2]}(x[n_1], x[n_2]) &= q^2 \delta(x[n_1]) \delta(x[n_2]) \\
 &\quad + pq \delta(x[n_1]-1) \delta(x[n_2]) + qp \delta(x[n_1]) \delta(x[n_2]-1) \\
 &\quad + p^2 \delta(x[n_1]-1) \delta(x[n_2]-1) \quad \text{for } n_1, n_2 = 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.69}$$

Τα αντίστοιχα πιθανά ζεύγη αποτελεσμάτων είναι $(X[n_1]=0, X[n_2]=0)$, $(X[n_1]=1, X[n_2]=0)$, $(X[n_1]=0, X[n_2]=1)$, και $(X[n_1]=1, X[n_2]=1)$.



Διάγραμμα 3.19 Διαδικασία Bernoulli.

Σημειώστε επίσης ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι ένα, δηλαδή, $p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1$. Συναρτήσεις πυκνότητας υψηλότερων τάξεων, μπορούν να προκύψουν με τον ίδιο τρόπο.

Ορίζουμε τη *διωνυμική διαδικασία* (ή *διαδικασία απαρίθμησης*) ως το άθροισμα των διαδικασιών Bernoulli και είναι

$$S[n] = X[0] + X[1] + \dots + X[n], \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.70}$$

Μία τυπική συνάρτηση - δείγμα της διωνυμικής διαδικασίας φαίνεται στο διάγραμμα 3.20.

Παρατηρούμε ότι $S[n]=k$ σημαίνει ότι k από τις μεταβλητές Bernoulli ισούνται με ένα, ενώ οι υπόλοιπες $(n-k)$ ισούνται με μηδέν. Συνεπώς, η πιθανότητα του $S[n]=k$ δίνεται από τη σχέση

$$P(S[n]=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{3.71}$$

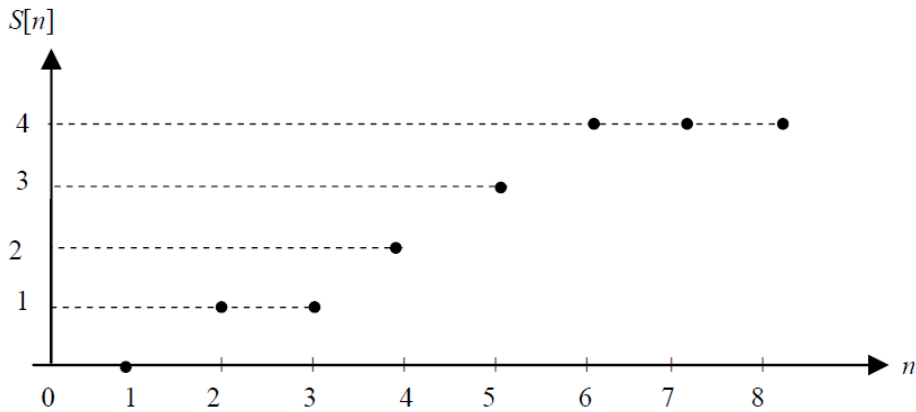
ενώ η συνάρτηση πυκνότητας πρώτης τάξης της διωνυμικής διαδικασίας δίνεται από τη σχέση

$$f_{S[n]}(s[n]) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta(s[n]-k) \tag{3.72}$$

Η διαδικασία Poisson, η οποία είναι διαδικασία συνεχούς χρόνου, μπορεί να παραχθεί από τη διαδικασία διακριτού χρόνου κάτω από ορισμένες συνθήκες:

1. Έστω ότι διαιρούμε το διάστημα $[0, t)$ σε n πολύ μικρά διαστήματα, με το n πολύ μεγάλο, μήκους Δt , έτσι ώστε $t = n\Delta t$ και μόνο ένα σημείο μπορεί να συμβεί στο Δt .
2. Κάθε διάστημα Δt είναι μία δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα να συμβεί ένα σημείο,

$$p = \lambda \Delta t .$$



Διάγραμμα 3.20 Διωνυμική διαδικασία.

3. Οι δοκιμές Bernoulli είναι ανεξάρτητες.

Τότε, η $X(t) = N(0, t)$ είναι ισοδύναμη με τη διωνυμική διαδικασία που δίνεται στην (3.70) με παραμέτρους $n = t/\Delta t$ και $p = \lambda \Delta t$. Οριακά, μπορεί να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} p[X(t) = N(0, t) = k] &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \binom{n}{k} (\Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{n-k} \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.73)$$

η οποία είναι η κατανομή Poisson, και άρα η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από την

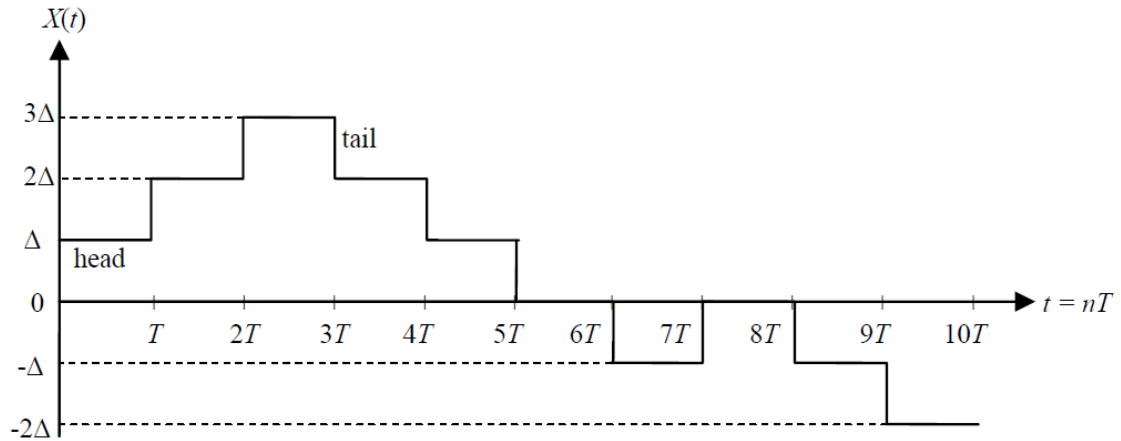
$$f_{N(0,t)}[n(0,t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \delta[n(0,t) = k] \quad (3.74)$$

3.4.7 Οι διαδικασίες “Τυχαίος Περίπατος” και Wiener

Θεωρούμε εκ νέου, το πείραμα της ρίψης ενός αμερόληπτου νομίσματος n φορές κάθε T δευτερόλεπτα, έτσι ώστε $t = nT$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Μετά από κάθε ρίψη, κάνουμε ένα βήμα προς τα δεξιά μήκους Δ εάν εμφανιστεί κορώνα, ή ένα βήμα προς τα αριστερά εάν εμφανιστούν γράμματα. Μία τυπική συνάρτηση - δείγμα φαίνεται στο διάγραμμα 3.21 Η $X(t)$ καλείται Τυχαίος Περίπατος.

Εάν εμφανιστεί k φορές κορώνα στις πρώτες n ρίψεις, έχουμε k βήματα προς τα δεξιά και $(n - k)$ βήματα προς τα αριστερά, κάτι που οδηγεί στη σχέση

$$X(nT) = k\Delta - (n - k)\Delta = (2k - n)\Delta \quad (3.75)$$



Διάγραμμα 3.21 Τυχαίος Περίπατος.

Όσο μεταβάλλεται το k μεταξύ του 0 και του n , η $X(nT)$ παίρνει τιμές από $-n\Delta$ έως $+n\Delta$. Αφού το νόμισμα είναι αμερόληπτο, τότε $p=q=1/2$. Μπορούμε να ορίσουμε τη $X(nT)$ ως

$$X(nT) = X_1 + X_2 + \dots + X_k \quad (3.76)$$

όπου η X_k , $k=1,2,\dots,n$, καλείται *συμμετρική Bernoulli* τυχαία μεταβλητή, αφού θεωρεί βήματα $+\Delta$ με πιθανότητα $p=1/2$ και $-\Delta$ με πιθανότητα $q=1/2$. Συνεπώς,

$$P[X(nT) = (2k - n)\Delta] = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \quad (3.77)$$

και η συνάρτηση πυκνότητας του τυχαίου περιπάτου μετά από n βήματα είναι

$$f_{X(nT)}[x(nT)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \delta[x(nT) - (2k - n)\Delta] \quad (3.78)$$

Αν θεωρήσουμε, τώρα, το πείραμα της ανεξάρτητης ρίψης του ίδιου νομίσματος δύο φορές, την πρώτη φορά για n_1 ρίψεις και τη δεύτερη για n_2 ρίψεις, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της ακολουθίας του τυχαίου περιπάτου δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} R_{x_1 x_2}(n_1, n_2) &= E[X(n_1)X(n_2)] = E\{X(n_1)[X(n_2) + X(n_1) - X(n_1)]\} \\ &= E\{X^2(n_1) + X(n_1)[X(n_2) - X(n_1)]\} = E[X^2(n_1)] + E\{X(n_1)[X(n_2) - X(n_1)]\} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Υποθέτουμε $n_2 > n_1$, και τότε οι $X(n_1)$ και $[X(n_2) - X(n_1)]$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, επειδή ο αριθμός της κορώνας στις πρώτες n_1 ρίψεις είναι ανεξάρτητος του αριθμού της κορώνας στις (n_1+1) έως n_2 ρίψεις. Συνεπώς, αν $n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4$, οι προσαυξήσεις $X(n_1T) - X(n_3T)$ και $X(n_2T) - X(n_3T)$ είναι ανεξάρτητες. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μπορεί να γραφεί σαν

$$R_{x_1 x_2}(n_1, n_2) = E[X^2(n_1)] + E[X(n_1)]E[X(n_2) - X(n_1)] \quad (3.80)$$

αλλά

$$E[X(n_1)] = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2} (\Delta) + \frac{1}{2} (-\Delta) = 0 \quad (3.81)$$

και

$$E[X^2(n_1)] = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{2} (-\Delta)^2 = n_1 \Delta^2 \quad (3.82)$$

Συνεπώς

$$R_{x_1, x_2}(n_1, n_2) = n_1 \Delta^2 \quad (3.83)$$

Ομοίως αν $n_1 > n_2$, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι

$$R_{x_1, x_2}(n_1, n_2) = n_2 \Delta^2 \quad (3.84)$$

Συνδυάζοντας τις (3.83) και (3.84), προκύπτει

$$R_{x_1, x_2}(n_1, n_2) = \Delta^2 \min(n_1, n_2) \quad (3.85)$$

Η διαδικασία Wiener, που λέγεται και Wiener-Levy process ή Brownian motion, είναι μία οριακή μορφή του τυχαίου περιπάτου για $n \rightarrow \infty$ και $T \rightarrow 0$, έτσι ώστε

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0}} (nT) = t$$

και η διακύμανση παραμένει πεπερασμένη και μη μηδενική. Η διαδικασία Wiener $W(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$W(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0}} X(t) \quad (3.86)$$

Από το θεώρημα του κεντρικού ορίου, η πιθανότητα η X που περιγράφηκε στην (3.76), $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ με X_k μια συμμετρική διωνυμική, να κάνει k βήματα προς τα δεξιά, είναι

$$P[X(nT) = (2k - n)\Delta] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(2k - n)\Delta - m}{2\sigma^2}\right] \quad (3.87)$$

όπου η μέση τιμή m και η διακύμανση σ^2 είναι όπως περιγράφονται από τις (3.81) και (3.82), και προκύπτει $m = E[X] = 0$ και $\sigma^2 = \text{var}[X] = n\Delta^2$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των m και σ^2 στην (3.87), μετά από απλοποίηση, έχουμε

$$P[X(nT) = (2k - n)\Delta] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n\Delta}} \exp\left[-\frac{(2k - n)^2}{2n}\right] \quad (3.88)$$

Σε κάθε βήμα της οριακής διαδικασίας $nT = t$, και αφού θέσουμε $\Delta^2 = \alpha T$ για να διατηρηθεί η διακύμανση, πεπερασμένη και $w = (2k - n)\Delta$, καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση πυκνότητας πρώτης τάξης της διαδικασίας Wiener είναι

$$f_{W(t)}[w(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{w^2(t)}{2\alpha t}\right] \quad (3.89)$$

Μία συνάρτηση - δείγμα της διαδικασίας Wiener φαίνεται στο διάγραμμα 3.22.

Κατ' αναλογία με τη διαδικασία τυχαίου περιπάτου, η ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων διατηρείται για τη διαδικασία Wiener. Δηλαδή, εάν $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, οι προσαυξήσεις $w(t_4) - w(t_3)$ και $w(t_2) - w(t_1)$ είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 3.8

Προσδιορίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας Wiener

Λύση

Χρησιμοποιώντας την ίδια προσέγγιση με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε για να προσδιοριστεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας τυχαίου περιπάτου, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας Wiener είναι

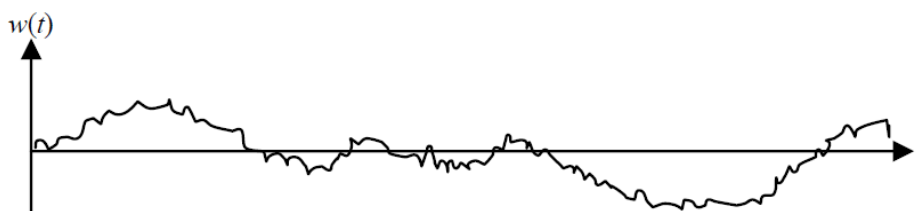
$$R_{ww}(t_1, t_2) = E[W(t_1)W(t_2)]$$

στην οποία έχουμε δύο περιπτώσεις, $t_1 < t_2$ και $t_2 < t_1$.

Περίπτωση 1: $t_1 < t_2$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} E\{W(t_1)[W(t_2) - W(t_1)]\} &= E[W(t_1)] E[W(t_2) - W(t_1)] \\ &= E[W(t_1)W(t_2)] - E[W^2(t_1)] \\ &= R_{ww}(t_1, t_2) - E[W^2(t_1)] \end{aligned} \quad (3.90)$$



Διάγραμμα 3.22 Συνάρτηση - δείγμα της Wiener διαδικασίας.

Από τη (3.89), η διαδικασία Wiener έχει Γκαουσιανή κατανομή με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση αt . Τότε, $E[W(t_1)] = 0$ και η (3.90) γίνεται

$$R_{ww}(t_1, t_2) = E[W^2(t_1)] = \alpha t_1$$

Περίπτωση 2: $t_2 < t_1$

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$R_{ww}(t_1, t_2) = \alpha t_2$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των περιπτώσεων 1 και 2, καταλήγουμε στην εξής μορφή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας Wiener

$$R_{ww}(t_1, t_2) = \alpha \min(t_1, t_2) = \begin{cases} \alpha t_1, & t_1 < t_2 \\ \alpha t_2, & t_2 < t_1 \end{cases} \quad (3.91)$$

3.4.8 Η διαδικασία Markov

Μία στοχαστική διαδικασία $X(t)$ λέμε ότι είναι απλή διαδικασία Markov (ή Markov πρώτης τάξης) αν για οποιοδήποτε n και μια ακολουθία αυξανόμενων χρόνων $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, έχουμε

$$P[X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}), \dots, X(t_1)] = P[X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1})] \quad (3.92)$$

ή ισοδύναμα

$$f_{X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1}(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = f_{X_n | X_{n-1}}(x_n | x_{n-1}) \quad (3.93)$$

Σημειώστε ότι χάριν απλότητας του συμβολισμού παραλείψαμε το δείκτη t_k .

Παρατηρούμε ότι η τιμή στο t_k εξαρτάται μόνο από την προηγούμενη τιμή στο t_{k-1} .

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1) \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f(x_1, x_2)} \dots \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} \\ &= f(x_1) f(x_2 | x_1) f(x_3 | x_2, x_1) \dots f(x_n | x_{n-1}, \dots, x_2, x_1) \end{aligned} \quad (3.94)$$

Ξαναγράφοντας την (3.94), εάν η $X(t)$ είναι μία διαδικασία Markov, τότε

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \prod_{k=2}^n f(x_k | x_{k-1}) \quad (3.95)$$

το οποίο σημαίνει ότι η διαδικασία προσδιορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση πυκνότητας πρώτης τάξης και τις υποθετικές συναρτήσεις πυκνότητας. Δεδομένου ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n, X_{n-1}, \dots, X_1 είναι Markov, εξάγεται από την (3.95) ότι

$$E[X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1] = E[X_n | X_{n-1}] \quad (3.96)$$

Ακόμα, η διαδικασία Markov, είναι Markov στον αντίστροφο χρόνο, δηλαδή,

$$f(x_n | x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}) = f(x_n | x_{n+1}) \quad (3.97)$$

Αν σε μία διαδικασία Markov το παρόν είναι γνωστό, τότε το παρελθόν και το μέλλον είναι ανεξάρτητα. Δηλαδή, για $m < k < n$, έχουμε

$$f(x_m, x_n | x_k) = f(x_m | x_k) f(x_n | x_k) \quad (3.98)$$

Μία διαδικασία Markov καλείται *ομογενής* αν η $f(X_n=x | X_{n-1}=y)$ είναι αμετάβλητη σε μία αλλαγή της αρχής, δηλαδή, εξαρτάται από το x και το y , αλλά όχι από το n . Ωστόσο, η συνάρτηση πυκνότητας πρώτης τάξης, $f_{X_n}(x_n)$, μπορεί να εξαρτάται από το n . Αν η συνάρτηση πυκνότητας πρώτης τάξης δεν εξαρτάται από το n , $f_{X_n}(x_n) = f_{X_n}(x)$, αλλά μόνο από το x , η διαδικασία Markov καλείται *στατική*. Σε αυτήν την περίπτωση, η $f(x_n | x_{n-1})$ είναι αμετάβλητη σε μία αλλαγή της αρχής λόγω της ομογένειας της διαδικασίας, και ως εκ τούτου, οι στατιστικές της διαδικασίας μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως, σε σχέση με τη συνάρτηση πυκνότητας δεύτερης τάξης, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$f(x_1, x_2) = f(x_2 | x_1) f(x_1) \quad (3.99)$$

Ισότητα Chapman-Kolmogorov Για $m < k < n$, η υπό όρους συνάρτηση πυκνότητας $f(x_n | x_m)$ μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με τις υποθετικές συναρτήσεις πυκνότητας $f(n | x_k)$ και $f(x_k | x_m)$ ως εξής

$$f(x_n | x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_n | x_k) f(x_k | x_m) dx_k, \quad m < k < n \quad (3.100)$$

Όταν η διαδικασία Markov παίρνει ένα μετρήσιμο και πεπερασμένο διακριτό σύνολο τιμών, αυτές καλούνται αλυσίδες Markov. Οι Markov chains θα αναλυθούν με περισσότερη λεπτομέρεια στο επόμενο κεφάλαιο.

3.5 Φασματική πυκνότητα ισχύος

Δεδομένου ενός ντετερμινιστικού σήματος $s(t)$, ο μετασχηματισμός (Fourier transform – “FT”) είναι

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.101)$$

και υπάρχει αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Η συνάρτηση $S(f)$ μερικές φορές καλείται το *φάσμα* της $s(t)$. Κατά τη μετάβαση από την περιγραφή στο πεδίο του χρόνου, $s(t)$, στην περιγραφή στο πεδίο των συχνοτήτων $S(f)$, δε χάνεται πληροφορία σχετικά με το σήμα. Με άλλα λόγια η $S(f)$ αποτελεί μία πλήρη περιγραφή της $s(t)$ και το αντίστροφο. Συνεπώς, το σήμα $s(t)$ μπορεί να παραχθεί από την $S(f)$ χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (Inverse Fourier Transform – “IFT”), δηλαδή,

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{+j2\pi ft} df \quad (3.102)$$

Κατά την ενασχόληση με τις τυχαίες διαδικασίες, υποθέτουμε ότι το *σύνολο* υπάρχει για όλο το χρόνο t . Σε γενικές γραμμές, οι συναρτήσεις – δείγματα δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες. Ωστόσο, αφού μας ενδιαφέρει η έννοια του φάσματος, προχωρούμε με τρόπο παρόμοιο με αυτόν των ντετερμινιστικών σημάτων με άπειρη ενέργεια. Ορίζουμε τη $x_T(t)$ σαν τη συνάρτηση - δείγμα $x(t)$, περιορισμένη στο διάστημα μεταξύ $-T$ και T , της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$. Δηλαδή,

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.103)$$

Ο περιορισμένος μετασχηματισμός Fourier της διαδικασίας $X(t)$ είναι

$$X_T(f) = \int_{-T}^T x_T(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.104)$$

Η μέση ισχύς της $x_T(t)$ είναι

$$P_{ave} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T^2(t) dt \quad (3.105)$$

Χρησιμοποιώντας το *θεώρημα του Parseval*, το οποίο λέει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df \quad (3.106)$$

η μέση ισχύς του $x_T(t)$ είναι

$$P_T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{2T} df \quad (3.107)$$

όπου ο όρος $|X_T(f)|^2/2T$ είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος της $x_T(t)$. Ο μέσος όρος συνόλου της P_T , δίνεται από τη σχέση

$$E[P_T] = \int_{-\infty}^{\infty} E \left[\frac{|X_T(f)|^2}{2T} \right] df \quad (3.108)$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ ορίζεται ως

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_T(f)|^2}{2T} \right] \quad (3.109)$$

Εάν η $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια, η φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{xx}(f)$ μπορεί να εκφραστεί σαν ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$, που σημαίνει

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (3.110)$$

Απόδειξη. Εξ ορισμού έχουμε

$$\begin{aligned} E \left[\frac{|X_T(f)|^2}{2T} \right] &= E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_T(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-T}^T X_T(t_2) e^{+j2\pi f t_2} dt_2 \right] \\ &= E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-T}^T X(t_2) e^{+j2\pi f t_2} dt_2 \right] \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[X(t_1)X(t_2)] e^{-j2\pi f(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.111)$$

όπου $E[X(t_1)X(t_2)] = R_{xx}(t_1, t_2)$. Εφόσον πρόκειται για μία διαδικασία στατική με την ευρεία έννοια, θέλουμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ως προς τη χρονική διαφορά $\tau = t_1 - t_2$, και επακόλουθα, να αντικαταστήσουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως προς t_1 και t_2 σε ένα ολοκλήρωμα ως προς τ . Έστω $t_2 = \tau$ και $t_1 = \tau + T$.

Η περιοχή ολοκλήρωσης στο επίπεδο $t_1 - t_2$ και στο επίπεδο $t - \tau$ φαίνονται στο διάγραμμα 3.23. Έστω ότι τα s_1, s_2, s_3 , και s_4 συμβολίζουν τις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου, στο διάγραμμα 3.23, βλέπουμε ότι η αλλαγή των μεταβλητών για τις τέσσερις πλευρές θα είναι

$$s_1 \rightarrow \tau = T - t_2, \quad s_2 \rightarrow \tau = t_1 - T, \quad s_3 \rightarrow \tau = -T - t_2, \quad s_4 \rightarrow \tau = t_1 + T$$

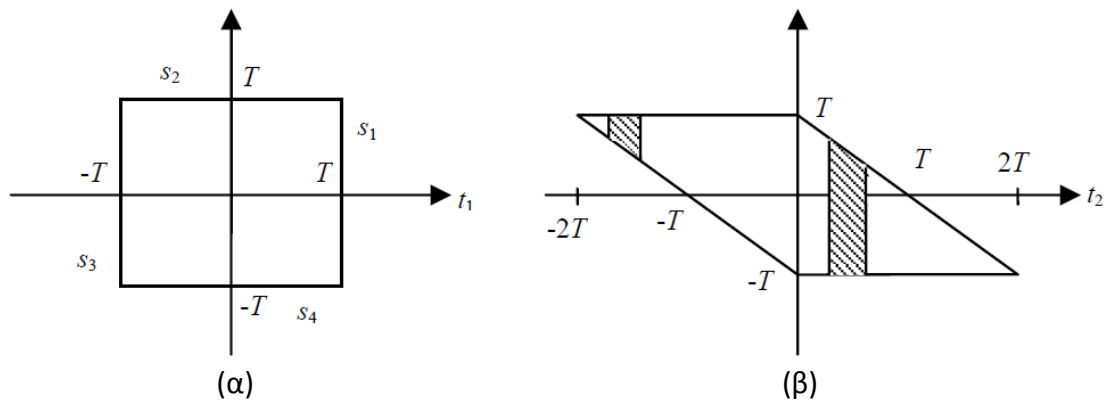
Συνοπάγεται ότι

$$\begin{aligned} E \left[\frac{|X_T(f)|^2}{2T} \right] &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left[\int_{-T}^{T-\tau} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} dt \right] d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2T} \int_{-2T}^0 R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left[\int_{-T-\tau}^T R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-2T}^{2T} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left[1 - \frac{|\tau|}{2T} \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.112)$$

Στο όριο, όσο το T τείνει στο άπειρο, καταλήγουμε στο

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (3.113)$$

δεδομένου ότι η $R_{xx}(\tau)$ πλησιάζει στο μηδέν με ρυθμό τουλάχιστον $1/|\tau|$, όσο αυξάνεται τ .



Διάγραμμα 3.23 Περιοχές ολοκλήρωσης για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης στο επίπεδο (α) $t_1 - t_2$ και (β) $t - \tau$.

Έτσι, η φασματική πυκνότητα ισχύος μιας στατικής με την ευρεία έννοια διαδικασίας, είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισής της. Η αντίστροφη σχέση, χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, είναι

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (3.114)$$

Οι (3.110) και (3.114) μερικές φορές καλούνται *σχέσεις Wiener-Khinchin*. Σημειώστε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι, εξ ορισμού, πραγματική, θετική, και μία άρτια συνάρτηση του f . Η αυτοσυσχέτιση είναι μία άρτια συνάρτηση του τ .

Παράδειγμα 3.9

Θεωρείστε την τυχαία διαδικασία $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$, όπου Θ είναι μία τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $(0, 2\pi)$, και οι A και ω_0 είναι σταθερές. Προσδιορίστε τη φασματική πυκνότητα ισχύος αυτής της διαδικασίας.

Λύση

Εφόσον η $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau) = (A^2/2) \cos(2\pi f_0 \tau)$ όπως φάνηκε στο παράδειγμα 3.2, χρησιμοποιώντας την (3.113), η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j2\pi(f-f_0)\tau} + e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}] d\tau \\ &= \frac{A^2}{4} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \end{aligned}$$

Διαφασματικές πυκνότητες ισχύος

Έστω $X(t)$ και $Y(t)$ δύο από κοινού στατικές διαδικασίες με την ευρεία έννοια. Οι διαφασματικές πυκνότητες ισχύος τους, ορίζονται ως

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.115)$$

και

$$S_{yx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.116)$$

Από τις σχέσεις Wiener-Khinchin, οι συναρτήσεις διασυσχέτισης $R_{xy}(\tau)$ και $R_{yx}(\tau)$ είναι απλά οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Fourier των $S_{xy}(f)$ και $S_{yx}(f)$. Από την ιδιότητα (4) της ενότητας 3.3.3, έχουμε

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau) \quad (3.117)$$

Επομένως, οι δύο διαφασματικές πυκνότητες ισχύος τους, συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$S_{yx}(f) = S_{xy}^*(f) \quad (3.118)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, ενώ οι φασματικές πυκνότητες ισχύος $S_{xx}(f)$ και $S_{yy}(f)$ των αντίστοιχων διαδικασιών $X(t)$ και $Y(t)$ είναι πάντα πραγματικές, οι διαφασματικές πυκνότητες ισχύος τους, $S_{xy}(f)$ και $S_{yx}(f)$, μπορεί να είναι μιγαδικές.

Παράδειγμα 3.10

Θεωρείστε τη διαδικασία $Y(t)=X(t-T)$, όπου η $X(t)$ είναι πραγματική, στατική με την ευρεία έννοια διαδικασία, με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$ και φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{xx}(f)$. Η T είναι μία σταθερά. Εκφράστε τη φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{yy}(f)$ της διαδικασίας $Y(t)$ σε σχέση με τη $S_{xx}(f)$.

Λύση

Η συνάρτηση διασυσχέτισης $R_{xy}(\tau)$ δίνεται από

$$R_{xy}(\tau) = E[X(t+\tau)Y(t)] = E[X(t+\tau)X(t-T)] = R_{xx}(\tau+T)$$

Συνεπώς,

$$S_{xy}(f) = S_{xx}(f)e^{j2\pi fT}$$

Δηλαδή, η καθυστέρηση T εμφανίζεται στον εκθέτη σαν μία γωνία φάσης κλιμακούμενη ως προς το $2\pi f$.

3.6 Γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, σύστημα χαρακτηρίζεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$ του, ή από την συνάρτηση συστήματος $H(f)$ του, η οποία είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $h(t)$. Δηλαδή,

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.119)$$

και

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df \quad (3.120)$$

Αν το $x(t)$, το εφαρμοζόμενο σήμα εισόδου του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος, είναι ντετερμινιστικό όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.24, το σήμα εξόδου είναι η συνέλιξη των $x(t)$ και $h(t)$, παράγοντας την

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (3.121)$$

η οποία είναι μία συνάρτηση - δείγμα της τυχαίας διαδικασίας $Y(t)$ που αντιστοιχεί στη συνάρτηση δείγμα της διαδικασίας εισόδου $X(t)$. Η έκφραση στο πεδίο του χρόνου για τη διαδικασία εξόδου είναι

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (3.122)$$

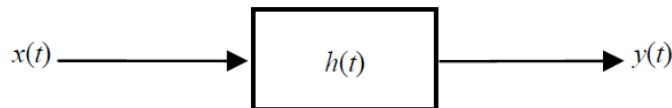
όπου οι $X(f)$ και $Y(f)$ είναι οι μετασχηματισμοί Fourier των $x(t)$ και $y(t)$ αντίστοιχα. Το σύστημα είναι πραγματοποιήσιμο, δεδομένου ότι η κρουστική απόκριση είναι αιτιατή, δηλαδή, $h(t)=0$ για $t<0$. Σε αυτήν την περίπτωση, το ολοκλήρωμα της συνέλιξης γίνεται

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3.123)$$

3.6.1 Στοχαστικά σήματα

Θεωρείστε το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα που φαίνεται στο διάγραμμα 3.24. Το σήμα εξόδου είναι

$$\begin{aligned} Y(t) &= h(t) * X(t) = X(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha \end{aligned} \quad (3.124)$$



Διάγραμμα 3.24 Κρουστική απόκριση $h(t)$

Συνάρτηση μέσης τιμής

Η συνάρτηση μέσης τιμής της διαδικασίας εξόδου δίνεται από τη σχέση

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t-\alpha)]h(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} m_x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha \quad (3.125)$$

όπου η $m_x(t)$ είναι η συνάρτηση μέσης τιμής της διαδικασίας $X(t)$. Αν η $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια,

$$m_x(t - \alpha) = m_x(t) = \text{constant} \quad (3.126)$$

Τότε, η συνάρτηση μέσης τιμής $m_y(t)$ της διαδικασίας $Y(t)$ είναι

$$m_y(t) = E[Y(t)] = m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) d\alpha \quad (3.127)$$

Από την (3.125), θυμόμαστε ότι η αποτίμηση της συνάρτησης συστήματος στο $f = 0$ είναι απλά η απόκριση dc, και

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) d\alpha = H(0).$$

Συνεπώς,

$$m_y = m_x H(0) \quad (3.128)$$

Η μέση τετραγωνική τιμή

Η μέση τετραγωνική τιμή του σήματος διαδικασίας εξόδου είναι

$$E[Y^2(t)] = E \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} X(t-t_1) X(t-t_2) h(t_1) h(t_2) dt_1 dt_2 \right] \quad (3.129)$$

Απλοποιώντας την (3.129), η συνάρτηση μέσης τετραγωνικής τιμής γίνεται

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t-t_1, t-t_2) h(t_1) h(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t_1, t_2) h(t-t_1) h(t-t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.130)$$

Υποθέτοντας ότι η $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια, και χρησιμοποιώντας αλλαγή μεταβλητών ως εξής, $\alpha = t - t_1$ και $\beta = t - t_2$, το παραπάνω αποτέλεσμα συμπυκνώνεται στο εξής:

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\alpha - \beta) h(\alpha) h(\beta) d\alpha d\beta \quad (3.131)$$

Το οποίο είναι ανεξάρτητο του χρόνου t .

Συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ εισόδου και εξόδου

Ας υποθέσουμε ότι η διαδικασία εισόδου $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια. Η συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου είναι

$$R_{yx}(t + \tau, t) = E[Y(t + \tau) X^*(t)] \quad (3.132)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.124) στην (3.132), και αλλάζοντας τις μεταβλητές, η συνάρτηση διασυσχέτισης μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$R_{yx}(t + \tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \alpha) h(\alpha) d\alpha = R_{xx}(\tau) * h(\tau) \quad (3.133)$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από το t , και ως εκ τούτου

$R_{yx}(t+\tau)=R_{yx}(\tau)$. Ομοίως, μπορεί να δειχθεί ότι η συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ των σημάτων των διαδικασιών εισόδου και εξόδου είναι

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(-\tau) \quad (3.134)$$

Εάν οι διαδικασίες $X(t)$ και $Y(t)$ είναι από κοινού στατικές με την ευρεία έννοια, η διαφασματική πυκνότητά τους, είναι ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων διασυσχέτισής τους. Εφόσον μία συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου είναι ισοδύναμη με έναν πολλαπλασιασμό στο πεδίο των συχνοτήτων, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier στις (3.133) και (3.134), παίρνουμε

$$S_{yx}(f) = S_{xx}(f) H(f) \quad (3.135)$$

και

$$S_{xy}(f) = S_{xx}(f) H^*(f) \quad (3.136)$$

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και Φάσμα Εξόδου

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας εξόδου είναι

$$R_{yy}(t + \tau, t) = E[Y(t + \tau)Y(t)] \quad (3.137)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$Y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t + \tau - \alpha)h(\alpha)d\alpha \quad (3.138)$$

και

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \beta)h(\beta)d\beta \quad (3.139)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.138) και (3.139) στην (3.137), και χρησιμοποιώντας αλλαγή μεταβλητών ($\alpha = -\beta$), παίρνουμε

$$R_{yy}(\tau) = R_{yx}(\tau) * h(-\tau) = R_{xy}(\tau) * h(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad (3.140)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier των παραπάνω ισοτήτων καταλήγει στην

$$\begin{aligned} S_{yy}(f) &= S_{yx}(f)H^*(f) = S_{xy}(f)H(f) = S_{xx}(f)H(f)H^*(f) \\ &= S_{xx}(f)|H(f)|^2 \end{aligned} \quad (3.141)$$

Παράδειγμα 3.11

Μία διαδικασία λευκού θορύβου με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)=(N_0/2)\delta(\tau)$ εφαρμόζεται σε ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \text{ and } \alpha > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Προσδιορίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, $R_{yy}(\tau)$, της διαδικασίας εξόδου

Λύση

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με δύο τρόπους. Μπορούμε να επιλύσουμε κατευθείαν το ολοκλήρωμα της συνέλιξης της (3.140), ή να βρούμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{yy}(f)$ χρησιμοποιώντας την (3.141), και μετά να βρούμε τον

αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $S_{yy}(f)$. Θα προχωρήσουμε στην επίλυση και με τους δύο τρόπους.

Μέθοδος 1: Για $\tau < 0$, έχουμε από το διάγραμμα 3.25,

$$h(\tau) * h(-\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \alpha e^{-\alpha(\tau-\lambda)} \alpha e^{+\alpha\lambda} d\lambda = \alpha^2 e^{-\alpha\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{2\alpha\lambda} d\lambda = \frac{\alpha}{2} e^{\alpha\tau}$$

Για $\tau > 0$, έχουμε

$$h(\tau) * h(-\tau) = \int_{-\infty}^0 \alpha e^{-\alpha(\tau-\lambda)} \alpha e^{\alpha\lambda} d\lambda = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\tau}$$

Συμπεπώς

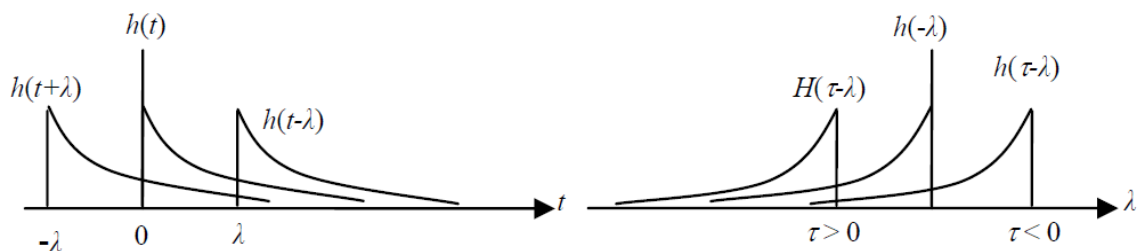
$$g(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} e^{\alpha\tau}, & \tau \leq 0 \\ \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\tau}, & \tau \geq 0 \end{cases}$$

Συμπερασματικά

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * g(\tau) = \begin{cases} \frac{N_0\alpha}{4} e^{\alpha\tau}, & \tau \leq 0 \\ \frac{N_0\alpha}{4} e^{-\alpha\tau}, & \tau \geq 0 \end{cases}$$

ή

$$R_{yy}(\tau) = \frac{N_0\alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|}$$



Διάγραμμα 3.25 Κρουστική απόκριση με παράμετρο το τ .

Μέθοδος 2: Από την (3.141), βλέπουμε ότι πρέπει πρώτα να καθορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier $H(f)$ της κρουστικής απόκρισης $h(t)$. Άρα,

$$H(f) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-(j2\pi f + \alpha)t} dt = \frac{\alpha}{j2\pi f + \alpha}$$

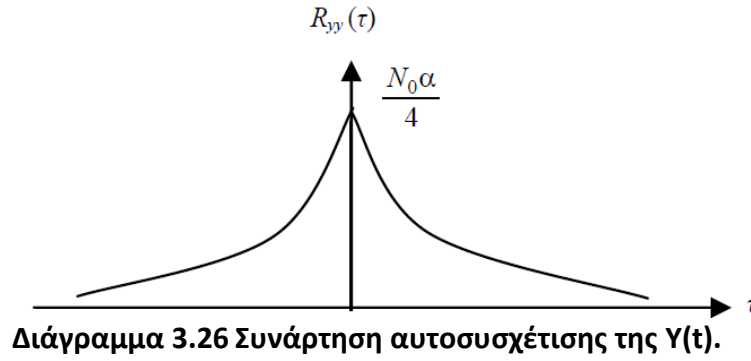
Το τετράγωνο της απόλυτης τιμής του $H(f)$ είναι

$$|H(f)|^2 = \frac{\alpha^2}{4\pi^2 f^2 + \alpha^2}$$

ενώ η φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου είναι

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0\alpha}{4} \frac{2\alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2}$$

όπου $\omega=2\pi f$. Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $S_{yy}(f)$, καταλήγουμε στην παρακάτω συνάρτηση αυτοσυσχέτισης που απεικονίζεται στο διάγραμμα 3.26



$$R_{yy}(\tau) = \frac{N_0\alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|}$$

Τα αποτελέσματα των μεθόδων 1 και 2, συμπίπτουν.

3.6.2 Συστήματα πολλαπλών τερματικών

Γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα μπορεί να έχουν παραπάνω από μία είσοδο ή/και έξοδο. Μία απλή περίπτωση είναι ένα σύστημα με μία είσοδο και δύο εξόδους, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.27. Η σχέση μεταξύ των διαδικασιών εξόδου $Y(t)$ και $Z(t)$, μπορεί να προκύψει από την (3.141) ότι είναι

$$S_{yy}(f) = |H_1(f)|^2 S_{xx}(f) \quad (3.142)$$

και

$$S_{zz}(f) = |H_2(f)|^2 S_{xx}(f) = S_{yy}(f) \left| \frac{H_2(f)}{H_1(f)} \right|^2, \quad H_1(f) \neq 0 \quad (3.143)$$

Με παρόμοιο τρόπο, βρίσκουμε ότι οι διαφασματικές πυκνότητες των τυχαίων διαδικασιών $Y(t)$ και $Z(t)$ είναι

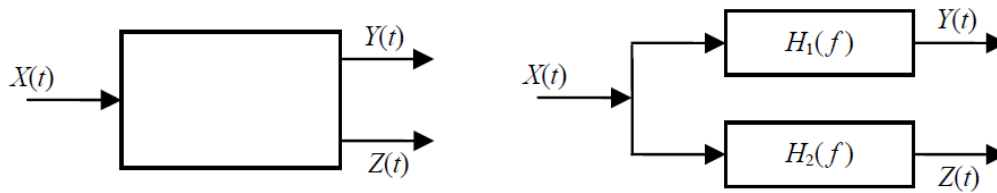
$$S_{zy}(f) = S_{xy}(f)H_2(f) = S_{xx}(f)H_1^*(f)H_2(f) \quad (3.144)$$

και

$$S_{yz}(f) = S_{yx}(f)H_2^*(f) = S_{xx}(f)H_1(f)H_2^*(f) \quad (3.145)$$

Στο πεδίο του χρόνου, έχουμε

$$R_{zy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h_1(-\tau) * h_2(\tau) \quad (3.146)$$



Διάγραμμα 3.27 Σύστημα πολλαπλών τερματικών.

και

$$R_{yz}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h_1(\tau) * h_2(-\tau) \quad (3.147)$$

Αν οι $Y(t)$ και $Z(t)$ είναι ορθογώνιες, τότε $R_{zy}(\tau) = R_{yz}(\tau) = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι το σύστημα είναι ασύνδετο επειδή οι συναρτήσεις μεταφοράς τους δεν επικαλύπτονται, δηλαδή, $H_1(f)H_2(f) = 0$.

3.7 Εργοδικότητα

Μία τυχαία διαδικασία $X(t)$ είναι εργοδική αν όλες οι στατιστικές της μπορούν να καθοριστούν (με πιθανότητα ίση με ένα) από μία συνάρτηση - δείγμα της διαδικασίας. Δηλαδή, οι μέσες τιμές του συνόλου ισούνται με τις αντίστοιχες χρονικές μέσες τιμές με πιθανότητα ένα. Αυτή είναι μία πιο περιοριστική διαδικασία, όπως φαίνεται στα διαγράμματα Venn του διαγράμματος 3.28.

Συνήθως, δε μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός όλων των μέσων τιμών συνόλου μιας τυχαίας διαδικασίας, αλλά μας ενδιαφέρουν ηπιότερες μορφές εργοδικότητας, όπως η εργοδικότητα της μέσης τιμής και η εργοδικότητα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

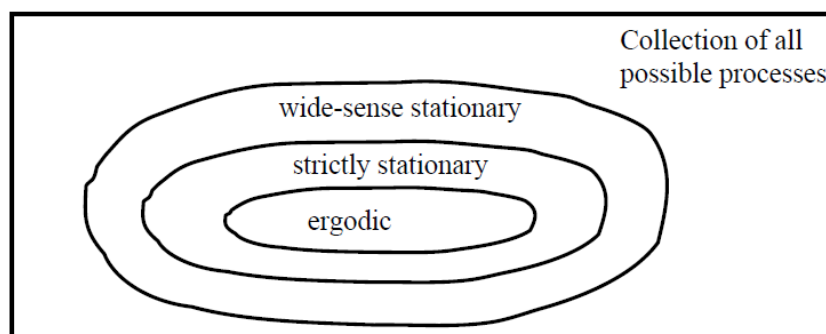
3.7.1 Εργοδικότητα της μέσης τιμής

Μια τυχαία διαδικασία $X(t)$ είναι εργοδική στη μέση τιμή αν η χρονική μέση τιμή μιας συνάρτησης - δείγμα $x(t)$ είναι ίση με τη συνάρτηση μέσης τιμής συνόλου. Δηλαδή,

$$E[X(t)] = \langle x(t) \rangle \quad (3.148)$$

όπου το σύμβολο $\langle \cdot \rangle$ συμβολίζει τη χρονική μέση τιμή, και το $\langle x(t) \rangle$ ορίζεται ως

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (3.149)$$



Διάγραμμα 3.28 Σύνολα διαδικασιών διαφορετικών κλάσεων.

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε να είναι η διαδικασία $X(t)$ εργοδική στη μέση τιμή είναι

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_{xx}(\tau) d\tau = m_x^2 \quad (3.150)$$

όπου $m_x = E[X(t)]$ είναι η μέση τιμή της $X(t)$.

3.7.2 Εργοδικότητα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

Η τυχαία διαδικασία $X(t)$ είναι εργοδική στη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αν

$$R_{xx}(\tau) = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle \quad (3.151)$$

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\langle x(t+\tau)x(t) \rangle$ για τη μέση τιμή στο χρόνο, της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της συνάρτησης – δείγμα $x(t)$, και ορίζεται ως

$$\langle x(t+\tau)x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t) dt \quad (3.152)$$

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την εργοδικότητα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι οι τυχαίες μεταβλητές $X(t+\tau)X(t)$ και $X(t+\tau+\alpha)X(t+\alpha)$ να γίνονται ασυσχέτιστες για κάθε τ όσο το α τείνει στο άπειρο.

Παράδειγμα 3.12

Έστω μία τυχαία διαδικασία $X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta)$, όπου A και f_c είναι σταθερές, και το θ είναι μία τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση

Αναφέρθηκε στο Παράδειγμα 3.2 ότι οι συναρτήσεις μέσης τιμής και αυτοσυσχέτισης της $X(t)$ είναι $E[X(t)] = 0$ και $R_{xx}(\tau) = (A^2/2) \cos(2\pi f_c \tau)$. Έστω ότι η συνάρτηση - δείγμα της διαδικασίας $X(t)$ είναι

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta)$$

Η χρονική μέση τιμή και μέση αυτοσυσχέτιση στο χρόνο είναι

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2T} \int_{-T}^T \cos(2\pi f_c t + \theta) dt = 0$$

και

$$\begin{aligned} \langle x(t+\tau)x(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^T \cos[2\pi f_c (t+\tau) + \theta] \cos(2\pi f_c t + \theta) dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η διαδικασία $X(t)$ είναι εργοδική στη μέση τιμή και στη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

3.7.3 Εργοδικότητα της κατανομής πρώτης τάξης

Έστω $X(t)$ μία στατική τυχαία διαδικασία. Ορίζουμε την τυχαία διαδικασία $Y(t)$ ως

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \leq x_t \\ 0, & X(t) > x_t \end{cases} \quad (3.153)$$

Λέμε ότι η τυχαία διαδικασία $X(t)$ είναι εργοδική στην κατανομή πρώτης τάξης αν

$$F_X(x; t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) dt \quad (3.154)$$

όπου $F_X(x, t) = P[X(t) \leq x(t)]$ και $y(t)$ μία συνάρτηση - δείγμα της διαδικασίας $Y(t)$.

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η διαδικασία εργοδική στην κατανομή πρώτης τάξης είναι να γίνονται οι $X(t+\tau)$ και $X(t)$ στατιστικά ανεξάρτητες όσο το τ τείνει στο άπειρο.

3.7.4 Εργοδικότητα της φασματικής πυκνότητας ισχύος

Μία στατική με την ευρεία έννοια διαδικασία $X(t)$ είναι εργοδική στη φασματική πυκνότητα ισχύος αν, για κάθε συνάρτηση - δείγμα $x(t)$, έχουμε,

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \quad (3.155)$$

εκτός από ένα σύνολο από συναρτήσεις - δείγματα που συμβαίνουν με μηδενική πιθανότητα.

3.8 Θεώρημα δειγματοληψίας

Πρώτα θα δώσουμε μία σύντομη περιγραφή του θεωρήματος δειγματοληψίας για ντετερμινιστικά σήματα. Έστω $g(t)$ ένα ζωνοπεριορισμένο σήμα σε μία συχνότητα f_m Hz, όπου f_m είναι η υψηλότερη συχνότητα τέτοια ώστε να ισχύει για το μετασχηματισμό Fourier της, $G(f) = 0$ για $|f| > f_m$, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.29. Ιδανικά, η λήψη δειγμάτων από το σήμα $g(t)$ είναι ο πολλαπλασιασμός του με το αλληλουχία παλμών $p(t)$, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.30, έχοντας τελικά

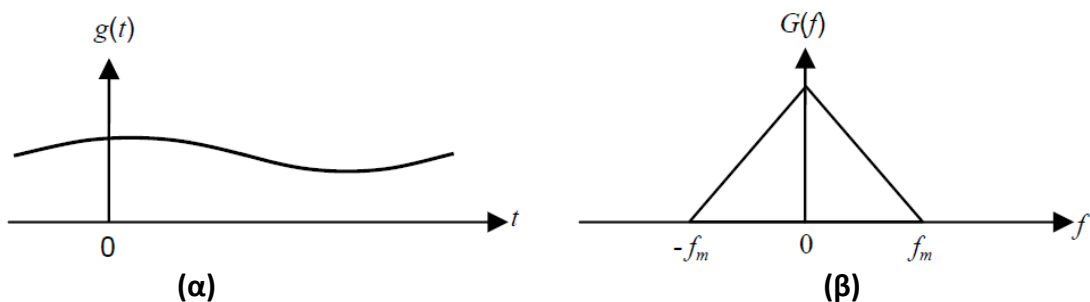
$$g_s(t) = g(t)p(t) \quad (3.156)$$

όπου $g_s(t)$ είναι το δειγματοληπτημένο σήμα, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.31. Εφόσον η συνάρτηση δειγματοληψίας $p(t)$ είναι περιοδική, μπορεί να αναπαρασταθεί από τη σειρά Fourier της, δίνοντας

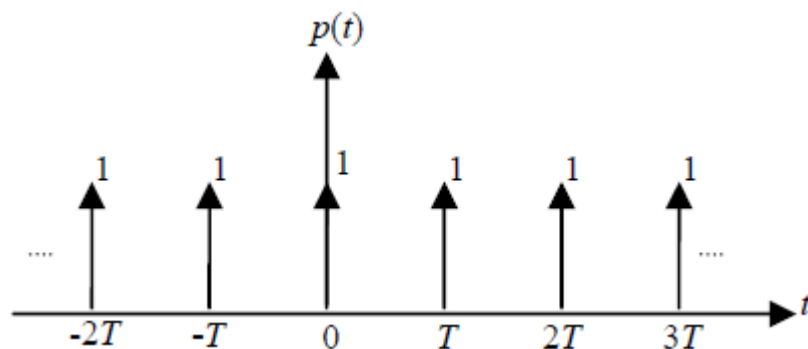
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{j2\pi nt}{T}} \quad (3.157)$$

όπου c_n είναι ο n -στός συντελεστής Fourier που ισούται με

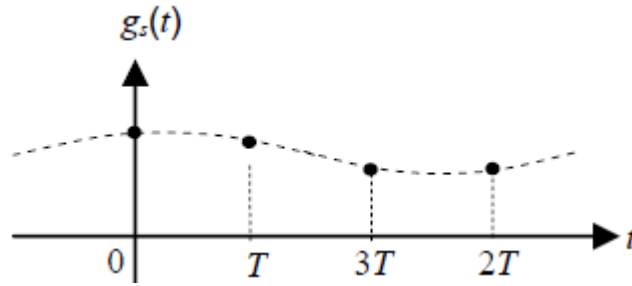
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt = \frac{1}{T} \quad (3.158)$$



Διάγραμμα 3.29 (α) Σήμα $g(t)$ (β) Φάσμα του $g(t)$.



Διάγραμμα 3.30 Συνάρτηση δειγματοληψίας.



Διάγραμμα 3.31 Δειγματοληπτημένο σήμα.

Η $1/T$ είναι η θεμελιώδης συχνότητα του περιοδικού σήματος $p(t)$, η οποία είναι επίσης η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s=1/T$ Hz. Αντικαθιστώντας την (3.157) και (3.158) στην (3.156), προκύπτει

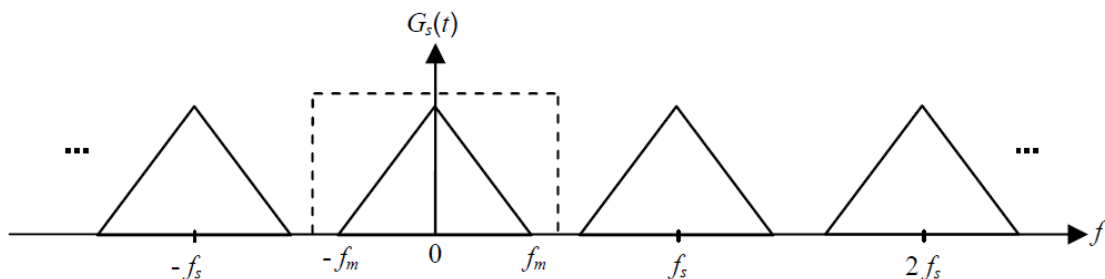
$$g_s(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t) e^{j2\pi n f_s t} \quad (3.159)$$

Το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος, από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, περιγράφεται από τη σχέση

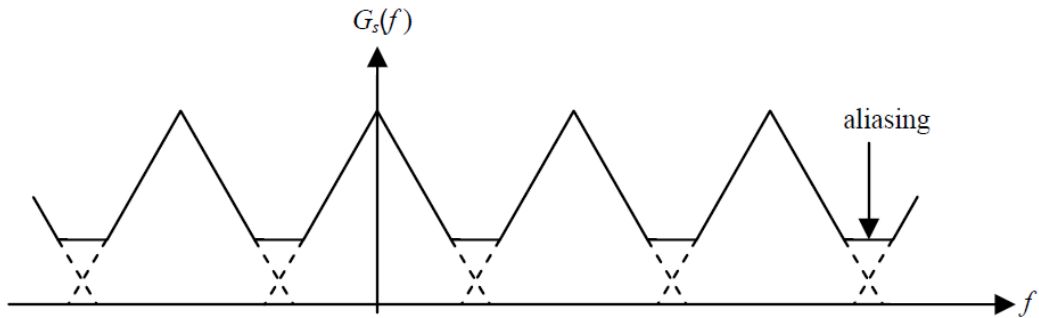
$$G_s = f_s \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi(f-f_s)t} dt = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - n f_s) \quad (3.160)$$

και φαίνεται στο διάγραμμα 3.32. Παρατηρούμε ότι το αρχικό σήμα μπορεί να ανακατασκευαστεί χρησιμοποιώντας απλά ένα χαμηλοπερατό φίλτρο όπως απεικονίζουν οι διακεκομμένες γραμμές. Παρατηρούμε, επίσης, ότι ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι τουλάχιστον $2f_m$ ανά δευτερόλεπτο. Η ελάχιστη συχνότητα, $f_s=2f_m$ δείγματα ανά δευτερόλεπτο, καλείται Nyquist rate. Sampling με συχνότητα μικρότερη από το ρυθμό Nyquist έχει αποτέλεσμα λάθος αναδίπλωσης όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.33, και το αρχικό σήμα δε μπορεί να ανακατασκευαστεί. Βλέπουμε από τη σχέση (3.157) ότι η δειγματοληψία παράγει μία κλιμακωτή σταθερά $of f_s=1/T$, και συνεπώς, για να την αφαιρέσουμε, επιλέγουμε το φίλτρο να είναι ύψους T . Υποθέτοντας ότι το εύρος του φίλτρου είναι το μισό της συχνότητας δειγματοληψίας, η κρουστική απόκριση του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου με απόκριση T είναι

$$h(t) = T \int_{-f_s/2}^{f_s/2} e^{j2\pi f t} df = \text{sinc } f_s t \quad (3.161)$$



Διάγραμμα 3.32 Φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος.



Διάγραμμα 3.33 Αναδίπλωση.

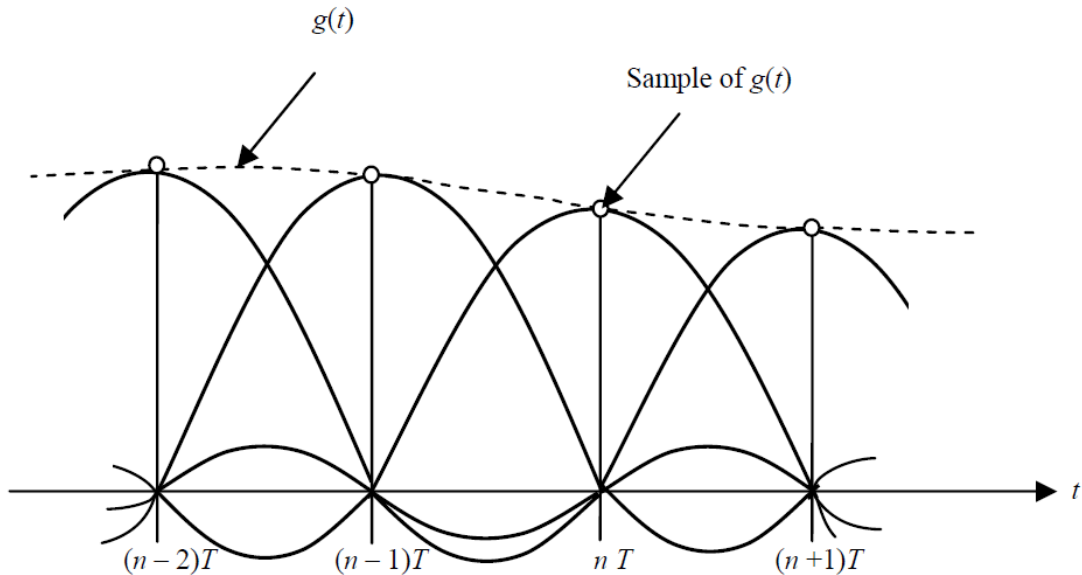
Η έξοδος του χαμηλοπερατού φίλτρου ανακατασκευής είναι το άθροισμα όλων των δειγμάτων εξόδου, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.34, δίνοντας

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{T} - n \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g \left(\frac{n}{2f_m} \right) \frac{\sin 2\pi f_m \left(t - \frac{n}{2f_m} \right)}{2\pi f_m \left(t - \frac{n}{2f_m} \right)} \quad (3.162)$$

όπου $\operatorname{sinc} x = \sin \pi x / \pi x$, $T=1/2f_m$, και $g(n/2f_m)$ είναι δείγματα της $g(t)$ επιλεγμένα σε $t=n/2f_m$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Θεώρημα. Ένα ζωνοπεριορισμένο σήμα πεπερασμένης ενέργειας με συχνότητα όχι μεγαλύτερη από f_m Hz μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα δείγματα που έχουν παρθεί με ρυθμό $2f_m$ ανά δευτερόλεπτο.

Εάν η $X(t)$ είναι μία στατική με την ευρεία έννοια τυχαία διαδικασία με μία ζωνοπεριορισμένη φασματική πυκνότητα ισχύος τέτοια ώστε $S_{xx}(f)=0$ για $|f|>f_m$, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier



Διάγραμμα 3.34 Ανακατασκευασμένο σήμα.

της $S_{xx}(f)$ είναι απλά η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$, και άρα, από την (3.162), η $R_{xx}(\tau)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}\left(\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin 2\pi f_m \left(\tau - \frac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m \left(\tau - \frac{n}{2f_m}\right)} \quad (3.163)$$

Όπου οι $R_{xx}(n/2f_m)$ είναι δείγματα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$ που είχαν παρθεί, $\tau = n/2f_m$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Η δειγματική αναπαράσταση της $R_{xx}(\tau - a)$, όπου a μία αυθαίρετη σταθερά, μπορεί να γραφτεί ως προς τη μετατοπισμένη δειγματική ακολουθία ως εξής

$$R_{xx}(\tau - a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}(nT - a) \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T} - n\right) \quad (3.164)$$

και με αλλαγή μεταβλητής από $\tau - a$ σε τ , έχουμε

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}(nT - a) \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau + a}{T} - n\right) \quad (3.165)$$

Ένα ανάλογο θεώρημα δειγματοληψίας μπορεί να διατυπωθεί για τυχαίες διαδικασίες.

Θεώρημα. Έστω $X(t)$ μία στατική με την ευρεία έννοια τυχαία διαδικασία ζωνοπεριορισμένη στη συχνότητα $(-f_m, f_m)$, δηλαδή, $S_{xx}(f) = 0$ για $|f| > f_m$. Τότε,

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin 2\pi f_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)} \quad (3.166)$$

όπου $T = 1/2f_m$ και είναι δείγματα της $X(t)$ που έχουν ληφθεί σε $t = n/2f_m$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Τα δείγματα $X(n/2f_m)$, σε αυτήν την περίπτωση είναι τυχαίες μεταβλητές, και η ισότητα της (3.166) ισχύει με την έννοια του μέσου τετραγώνου. Δηλαδή, η μέση τετραγωνική τιμή της διαφοράς των δύο πλευρών της ισότητας είναι μηδέν. Ως εκ τούτου, πρέπει να δείξουμε ότι, όσο $n \rightarrow \infty$,

$$E \left[\left| X(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin 2\pi f_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)} \right|^2 \right] = 0 \quad (3.167)$$

Έστω

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin 2\pi f_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)} \quad (3.168)$$

τότε,

$$E\left[|X(t) - \hat{X}(t)|^2\right] = E\{[X(t) - \hat{X}(t)][X^*(t) - \hat{X}^*(t)]\} \\ = E\{[X(t) - \hat{X}(t)]X^*(t)\} - E\{[X(t) - \hat{X}(t)]\hat{X}^*(t)\} \quad (3.169)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.168), ο πρώτος όρος της (3.169) μπορεί να γραφτεί ως

$$E\{[X(t) - \hat{X}(t)]X^*(t)\} = R_{xx}(0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}(nT - t) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right) \quad (3.170)$$

Επίσης, από την (3.165), για $\tau=0$ και $\alpha=t$,

$$R_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}(nT - t) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right) \quad (3.171)$$

Συνεπώς

$$E\{[X(t) - \hat{X}(t)]X^*(t)\} = 0 \quad (3.172)$$

Υπολογίζουμε τώρα το δεύτερο όρο της (3.169),

$$E\{[X(t) - \hat{X}(t)]\hat{X}^*(t)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{[X(t) - \hat{X}(t)]X(mT)\} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - m\right) \\ = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(t - mT) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(nT - mT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right) \right] \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - m\right) \quad (3.173)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.164) για $\tau=t$ και $\alpha=mT$, έχουμε

$$R_{xx}(t - mT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}(nT - mT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right) \quad (3.174)$$

και άρα, αντικαθιστώντας την (3.174) στην (3.173), έχουμε

$$E\{[X(t) - \hat{X}(t)]\hat{X}^*(t)\} = 0 \quad (3.175)$$

Τα αποτελέσματα των (3.172) και (3.175) δείχνουν ότι η ισότητα της (3.166) ισχύει με την έννοια του μέσου τετραγώνου.

3.9 Συνέχεια, Παραγωγισιμότητα και Ολοκλήρωση

3.9.1 Συνεχείς συναρτήσεις

Γνωρίζουμε από τα μαθηματικά, ότι μία συνάρτηση $f(x)$ καλείται συνεχής σε ένα σημείο $x=x_0$, αν η $f(x)$ ορίζεται στο x_0 , το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

είναι πραγματικός αριθμός και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Συνεπώς, λέμε ότι μία πραγματική ντετερμινιστική συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής σε ένα σημείο t_0 αν

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x(t_0) \quad (3.176)$$

Αν το t_0 παίρνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, $-\infty < t_0 < \infty$, τότε η συνάρτηση $x(t)$ λέγεται ότι είναι συνεχής.

Η έννοια της συνέχειας μπορεί να επεκταθεί στις τυχαίες διαδικασίες, αφού μία τυχαία διαδικασία είναι ένα σύνολο από συναρτήσεις-δείγματα με συσχετισμένες πιθανότητες, που ορίζουν το σύνολο της διαδικασίας. Επομένως, λέμε ότι η τυχαία διαδικασία $X(t)$ είναι συνεχής σε ένα δεδομένο σημείο t_0 αν όλες οι συναρτήσεις-δείγματα είναι συνεχής στο t_0 . Δηλαδή,

$$P[\lim_{t \rightarrow t_0} X(t) \neq X(t_0)] = 0 \quad (3.177)$$

ή

$$P[X(t) \text{ continuous at } t_0] = 1 \quad (3.178)$$

Αυτός ο τύπος της συνέχειας καλείται αυστηρή συνέχεια. Ωστόσο, σε πολλές εφαρμογές, ενδιαφερόμαστε για μία λιγότερο "ισχυρή συνέχεια" για πολλούς σκοπούς, η οποία είναι γνωστή σαν στοχαστική συνέχεια. Η πιο ενδιαφέρουσα στοχαστική συνέχεια είναι η συνέχεια με την έννοια του μέσου τετραγώνου.

Μία τυχαία διαδικασία $X(t)$ συνεχής μέσου τετραγώνου, ή συνεχής με την έννοια του μέσου τετραγώνου, εάν

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E[|X(t + \tau) - X(t)|^2] = 0 \quad (3.179)$$

Σημειώνουμε ότι

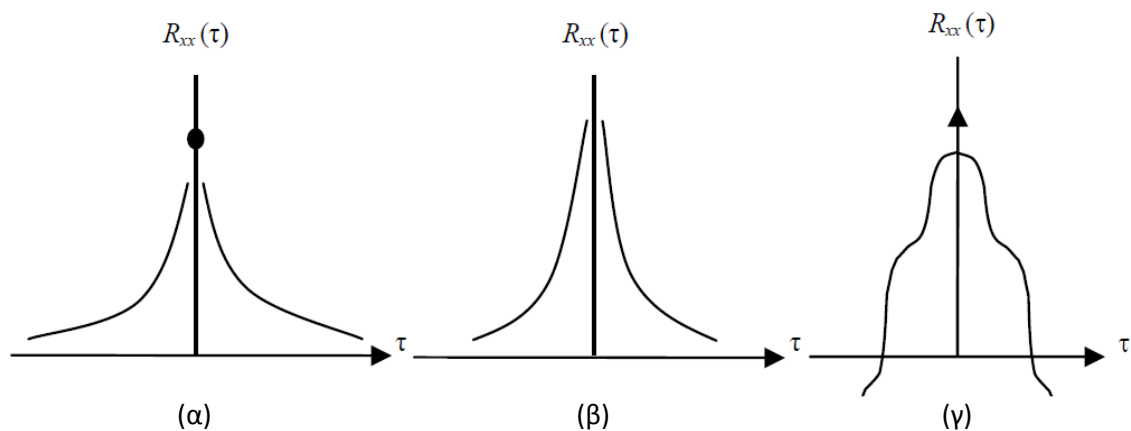
$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E[|X(t + \tau) - X(t)|^2] = \lim_{\tau \rightarrow 0} 2[R_{xx}(0) - R_{xx}(\tau)] \quad (3.180)$$

το οποίο ισούται με μηδέν αν

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} R_{xx}(\tau) = R_{xx}(0) \quad (3.181)$$

Συνεπώς, η $X(t)$ είναι συνεχής με την έννοια του μέσου τετραγώνου εάν και μόνο αν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $R_{xx}(\tau)$ είναι συνεχής στο $\tau=0$.

Σημειώστε ότι για πραγματικές, στατικές με την ευρεία έννοια διαδικασίες, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$ είναι μία άρτια συνάρτηση του τ όπως δόθηκε στην (3.26). Άρα, η συνέχεια στο $\tau=0$ για τις τρεις πιθανές περιπτώσεις του διαγράμματος 3.35



Διάγραμμα 3.35 Η $R_{xx}(\tau)$ δεν είναι συνεχής στο $\tau=0$: (α) μεμονωμένο σημείο, (β) κάθετη ασύμπτωτη, και (γ) κρούση.

Παράδειγμα 3.13

Δείξτε ότι αν η τυχαία διαδικασία $X(t)$ είναι συνεχής μέσου τετραγώνου, τότε η μέση τιμή $E[X(t)]$ είναι συνεχής.

Λύση

Γνωρίζοντας ότι η $X(t)$ είναι συνεχής μέσου τετραγώνου, μπορούμε να γράψουμε

$$E[|X(t+\tau) - X(t)|^2] \geq E^2[X(t+\tau) - X(t)]$$

Μόλις δείξαμε ότι η αριστερή πλευρά της παραπάνω ανισότητας, τείνει στο μηδέν όταν το $\tau \rightarrow 0$ για να είναι η $X(t)$ συνεχής μέσου τετραγώνου. Συνεπώς, το $E^2[X(t+\tau) - X(t)]$ τείνει στο μηδέν καθώς το $\tau \rightarrow 0$, δηλαδή,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E[X(t+\tau)] = E[X(t)] \quad (3.182)$$

και ολοκληρώθηκε η απόδειξη.

Μπορούμε, επίσης, να δείξουμε ότι αν η $X(t)$ είναι συνεχής μέσου τετραγώνου, τότε

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E[X(t+\tau)] = E[\lim_{\tau \rightarrow 0} X(t+\tau)] \quad (3.183)$$

που σημαίνει ότι μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τους όρους του ορίου και της μέσης τιμής.

3.9.2 Παραγωγισιμότητα

Επίσης, από τα μαθηματικά, εάν το

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_1 + \varepsilon) - f(x_1)] / \varepsilon$$

υπάρχει, τότε καλείται η παράγωγος της $f(x)$ στο $x=x_1$. Αν η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $x=x_1$, τότε είναι και συνεχής στο $x=x_1$. Ομοίως, η “τυπική παράγωγος” μιας τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$X'(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} \quad (3.184)$$

δεδομένου ότι όλες οι συναρτήσεις-δείγματα της $X(t)$ είναι παραγωγίσιμες, κάτι το οποίο είναι πολύ περιοριστικό. Συνεπώς, προτιμούμε να αναφερόμαστε στην παράγωγο μιας τυχαίας διαδικασίας με την έννοια του μέσου τετραγώνου. Λέμε ότι η $X(t)$ είναι παραγωγίσιμη με την έννοια του μέσου τετραγώνου εάν υπάρχει μια τυχαία διαδικασία $Y(t)$, τέτοια ώστε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} - Y(t) \right]^2 \right\} = 0 \quad (3.185)$$

για κάθε t . Η $Y(t)$ είναι η παραγωγίσιμη με την έννοια του μέσου τετραγώνου διαδικασία της $X(t)$ και συμβολίζεται $X'(t)$.

Υποθέτοντας ότι η $X'(t)$ υπάρχει, η συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ $X(t)$ και $X'(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
R_{xx'}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X'(t_2)] = E\left[X(t_1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{X(t_2 + \varepsilon) - X(t_2)}{\varepsilon}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E\left[\frac{X(t_1)X(t_2 + \varepsilon) - X(t_1)X(t_2)}{\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_{xx}(t_1, t_2 + \varepsilon) - R_{xx}(t_1, t_2)}{\varepsilon} \\
&= \frac{\partial R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_2} \quad (3.186)
\end{aligned}$$

Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε, ότι η συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ $X'(t)$ και $X(t)$ σχετίζεται άμεσα με τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $X(t)$, τέτοια ώστε

$$R_{x'x}(t_1, t_2) = \frac{\partial R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1} \quad (3.187)$$

Τώρα, μπορεί να προκύψει η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $X'(t)$,

$$\begin{aligned}
R_{x'x'}(t_1, t_2) &= E[X'(t_1)X'(t_2)] = E\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{X(t_1 + \varepsilon) - X(t_1)}{\varepsilon} X'(t_2)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E\left[\frac{X(t_1 + \varepsilon)X'(t_2) - X(t_1)X'(t_2)}{\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_{xx'}(t_1 + \varepsilon, t_2) - R_{xx'}(t_1, t_2)}{\varepsilon} \\
&= \frac{\partial R_{xx'}(t_1, t_2)}{\partial t_1} \quad (3.188)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της $R_{xx'}(t_1, t_2)$ που δόθηκε στην (3.186), βρίσκουμε ότι η $R_{x'x'}(t_1, t_2)$ ισούται με

$$R_{x'x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (3.189)$$

Αν η $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια, τότε η μέση τιμή είναι σταθερά και η μέση τιμή της $X'(t)$ είναι μηδέν, δηλαδή,

$$E[X'(t)] = 0 \quad (3.190)$$

Επίσης, $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau)$, όπου $\tau = t_1 - t_2$. Δεδομένου ότι $dt_1 = d\tau$ και $dt_2 = -d\tau$, οι (3.186), (3.187), και (3.189) μπορούν να γραφτούν και ως εξής

$$R_{xx'}(\tau) = -\frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau} = -R'_{xx}(\tau) \quad (3.191)$$

$$R_{x'x}(\tau) = \frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau} = R'_{xx}(\tau) \quad (3.192)$$

και

$$R_{x'x'}(\tau) = -\frac{d^2 R_{xx}(\tau)}{d\tau^2} = -R''_{xx}(\tau) \quad (3.193)$$

Στο $\tau=0$, έχουμε

$$R_{x'x'}(0) = E\{[X'(t)]^2\} = -R''_{xx}(\tau)\Big|_{\tau=0} \quad (3.194)$$

Η ισότητα (3.194) ισχύει υποθέτοντας ότι η $X(t)$ είναι παραγωγίσιμη με την έννοια του μέσου τετραγώνου. Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να γενικευθούν για παραγώγους μεγαλύτερης τάξης δίνοντας τους εξής τύπους

$$R_{x^{(n)}x^{(m)}}(t_1, t_2) = E \left[\frac{d^n X(t_1)}{dt_1^n} \frac{d^m X(t_2)}{dt_2^m} \right] = \frac{\partial^{n+m} R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m} \quad (3.195)$$

και

$$R_{x^{(n)}y^{(m)}}(t_1, t_2) = E \left[\frac{d^n X(t_1)}{dt_1^n} \frac{d^m Y(t_2)}{dt_2^m} \right] = \frac{\partial^{n+m} R_{xy}(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m} \quad (3.196)$$

όπου οι εκθέτες σε παρένθεση, (n) και (m), συμβολίζουν τις παραγώγους n ιοστής και m ιοστής τάξης, αντίστοιχα.

Αν οι X(t) και Y(t) είναι από κοινού στατικές με την ευρεία έννοια, τότε οι (3.195) και (3.196) γίνονται

$$R_{x^{(n)}x^{(m)}}(\tau) = E \left[\frac{d^n X(t+\tau)}{dt^n} \frac{d^m X(t)}{dt^m} \right] = (-1)^m \frac{d^{n+m} R_{xx}(\tau)}{d\tau^{n+m}} = (-1)^m R_{xx}^{(n+m)}(\tau) \quad (3.197)$$

και

$$R_{x^{(n)}y^{(m)}}(\tau) = E \left[\frac{d^n X(t+\tau)}{dt^n} \frac{d^m Y(t)}{dt^m} \right] = (-1)^m \frac{d^{n+m} R_{xy}(\tau)}{d\tau^{n+m}} = (-1)^m R_{xy}^{(n+m)}(\tau) \quad (3.198)$$

3.9.3 Ολοκληρώματα

Το ολοκλήρωμα *Riemann* μιας κοινής συνάρτησης f(x) ορίζεται ως

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \quad (3.199)$$

όπου x_k είναι ένα αυθαίρετο σημείο στο k ιοστό υποδιάστημα Δx_k, k=1, 2, ..., n.

Για μία πραγματική τυχαία διαδικασία X(t), η ύπαρξη του ολοκληρώματος

$$I = \int_a^b X(t)dt \quad (3.200)$$

με την αυστηρή έννοια σημαίνει ύπαρξη του ολοκληρώματος *Riemann* για κάθε συνάρτηση - δείγμα x(t). Σε αυτήν την περίπτωση, το I είναι μία τυχαία μεταβλητή με δειγματικές τιμές

$$i = \int_a^b x(t)dt \quad (3.201)$$

όπου x(t) είναι μία συνάρτηση - δείγμα της X(t), και συνεπώς το (3.201) μπορεί να μην υπάρχει απαραίτητα για κάθε συνάρτηση - δείγμα. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα μέσου τετραγώνου της τυχαίας διαδικασίας X(t) ως

$$I = \int_a^b X(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X(t_k) \Delta t_k \quad (3.202)$$

Το ολοκλήρωμα υπάρχει όταν

$$\lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} E \left[\left| I - \sum_{k=1}^n X(t_k) \Delta t_k \right|^2 \right] = 0 \quad (3.203)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η μέση τιμή της I δίνεται από τη σχέση

$$E[I] = E \left[\int_a^b X(t) dt \right] = \int_a^b E[X(t)] dt = \int_a^b m_x(t) dt \quad (3.204)$$

η μέση τετραγωνική τιμή είναι

$$E[I^2] = E \left[\int_a^b \int_a^b X(t_1) X^*(t_2) dt_1 dt_2 \right] = \int_a^b \int_a^b R_{xx}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (3.205)$$

και η διακύμανση είναι

$$\text{var}[I] = \sigma_i^2 = \int_a^b \int_a^b C_{xx}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_a^b \int_a^b R_{xx}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - m_x(t_1) m_x(t_2) \quad (3.206)$$

Αν η $X(t)$ είναι στατική, και ορίσουμε εκ νέου το I σαν χρονική μέση τιμή να είναι

$$I = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad (3.207)$$

Τότε, η διακύμανση I είναι

$$\text{var}[I] = \sigma_i^2 = \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C_{xx}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \quad (3.208)$$

Θέτοντας $\tau = t_1 - t_2$, και μετατρέποντας το διπλό ολοκλήρωμα ως προς t_1 και t_2 σε μονό ολοκλήρωμα ως προς τ όπως κάναμε στην Ενότητα 3.3, έχουμε

$$\int_{-T}^T \int_{-T}^T C_{xx}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|) C_{xx}(\tau) d\tau \quad (3.209)$$

Έτσι, η διακύμανση γίνεται

$$\text{var}[I] = \sigma_i^2 = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) C_{xx}(\tau) d\tau = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) [R_{xx}(\tau) - m_x^2] d\tau \quad (3.210)$$

3.10 Μετασχηματισμός Hilbert και αναλυτικά σήματα

Θεωρήστε ένα γραμμικό σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τον τύπο

$$H(f) = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ j, & f < 0 \end{cases} \quad (3.211)$$

Σημειώστε ότι $|H(jf)|=1$ για όλες τις συχνότητες, δηλαδή έχουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο. Η φάση δίνεται από τη σχέση

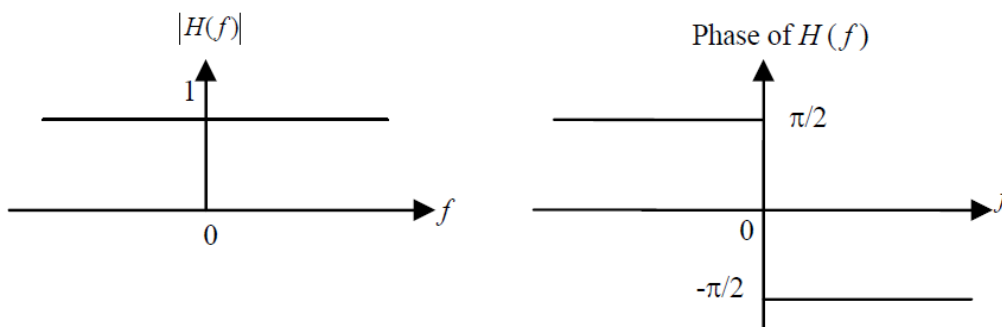
$$\arg [H(jf)] = \angle H(jf) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases} \quad (3.212)$$

Οι αποκρίσεις πλάτους και φάσης ενός τέτοιου συστήματος, που ονομάζεται φίλτρο τετραγωνισμού, φαίνονται στο διάγραμμα 3.36. Η κρουστική απόκριση αυτού του φίλτρου, φαίνεται στο διάγραμμα 3.37, και δίνεται από τη σχέση

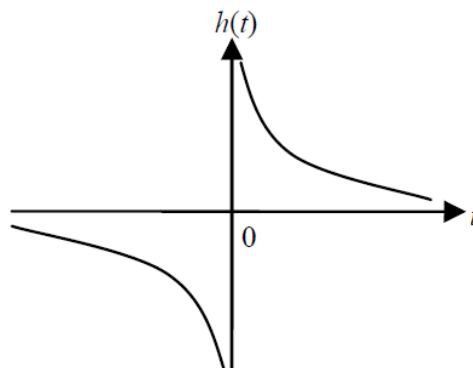
$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (3.213)$$

Αν η $x(t)$ είναι η είσοδος στο φίλτρο τετραγωνισμού όπως απεικονίζεται στο διάγραμμα 3.38, η έξοδος $y(t)$ καλείται *Μετασχηματισμός Hilbert* της $x(t)$, $\mathcal{H}\{x(t)\}$, και περιγράφεται από τη σχέση

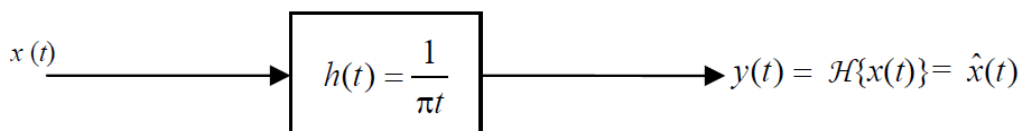
$$y(t) = \hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = x(t) * h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3.214)$$



Διάγραμμα 3.36 Κρουστική απόκριση ενός φίλτρου τετραγωνισμού.



Διάγραμμα 3.37 Απόκριση πλάτους και φάσης ενός φίλτρου τετραγωνισμού.



Διάγραμμα 3.38 Μετασχηματισμός Hilbert της $x(t)$.

Αν, τώρα, η $X(t)$, μία στατική με την ευρεία έννοια τυχαία διαδικασία, είναι η είσοδος ενός φίλτρο υετραγωνισμού με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$ και φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{xx}(f)$, τότε η έξοδος $Y(t)$ είναι ο μετασχηματισμός Hilbert της $X(t)$ που ορίζεται ως

$$Y(t) = \hat{X}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3.215)$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του μετασχηματισμού Hilbert της $X(t)$ είναι

$$S_{yy}(f) = S_{\hat{x}\hat{x}}(f) = S_{xx}(f) |H(f)|^2 = S_{xx}(f) \quad (3.216)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του μετασχηματισμού Hilbert είναι

$$R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = R_{xx}(\tau) \quad (3.217)$$

Από την (3.135), η διαφασματική πυκνότητα είναι

$$S_{\hat{x}\hat{x}}(f) = S_{xx}(f)H(f) = \begin{cases} -jS_{xx}(f), & f > 0 \\ jS_{xx}(f), & f < 0 \end{cases} \quad (3.218)$$

η οποία είναι αμιγώς φανταστική. Άρα, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση διασυσχέτισης, έχουμε εξ' ορισμού

$$S_{\hat{x}\hat{x}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.219)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) \sin 2\pi f\tau d\tau \quad (3.220)$$

Αφού η $S_{\hat{x}\hat{x}}(f)$ είναι αμιγώς φανταστική, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau = 0 \quad (3.221)$$

Το συνημίτονο είναι μία άρτια συνάρτηση, άρα η $R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau)$ είναι περιττή, δίνοντας

$$R_{\hat{x}\hat{x}}(-\tau) = -R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) \quad (3.222)$$

και

$$R_{\hat{x}\hat{x}}(0) = 0 \quad (3.223)$$

Αφού $S_{\hat{x}\hat{x}}(f) = S_{xx}(f)H(f)$ και $S_{xx}(f)S_{xx}(f)H(f)$, συνεπάγεται ότι

$$R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_{xx}(\tau) \quad (3.224)$$

και

$$R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_{xx}(-\tau) = -\hat{R}_{xx}(\tau) \quad (3.225)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι $H(jf)H(jf) = -1$. Αυτό υποδεικνύει ότι ο μετασχηματισμός Hilbert ενός μετασχηματισμού Hilbert είναι η αρνητική τιμή του αρχικού σήματος, δηλαδή,

$$\hat{\hat{X}}(t) = -X(t) \quad (3.226)$$

Από τις (3.217) και (3.225), μπορούμε να γράψουμε

$$R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = R_{xx}(\tau) = -\hat{R}_{xx}(\tau) \quad (3.227)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(f) = \begin{cases} 2, & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (3.228)$$

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.39. Η κρουστική απόκριση αυτού του συστήματος είναι

$$h(t) = \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \quad (3.229)$$

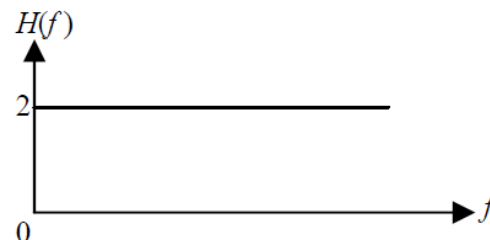
Ένα τέτοιο σύστημα, μετατρέπει ένα πραγματικό σήμα σε μιγαδικό. Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφτεί εκ νέου ως

$$H(f) = 1 + jQ(f) \quad (3.230)$$

όπου $Q(f)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου τετραγωνισμού. Αν ένα σήμα $x(t)$ εφαρμοστεί σε αυτό το σύστημα, όπως δείχνει το διάγραμμα 3.40, η έξοδος $y(t)$ καλείται το αναλυτικό σήμα που σχετίζεται με το $x(t)$.

Ομοίως, η αναλυτική διαδικασία που σχετίζεται με το $X(t)$ ορίζεται ως

$$Y(t) = \tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t) \quad (3.231)$$



Διάγραμμα 3.39 Συνάρτηση μεταφοράς.



Διάγραμμα 3.40 Σύστημα για αναλυτικό σήμα.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $Y(t)$ είναι

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= E[Y(t+\tau)Y^*(t)] = E\{[X(t+\tau) + j\hat{X}(t)] [X(t) - j\hat{X}(t)]\} \\ &= R_{xx}(\tau) + R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) + j[R_{\hat{x}x}(\tau) - R_{x\hat{x}}(\tau)] \end{aligned} \quad (3.232)$$

Γνωρίζοντας ότι $R_{xx}(\tau) = R_{x^*x^*}(\tau)$ και $R_{x^*x}(\tau) = -R_{xx^*}(\tau) = R_{x\hat{x}}(\tau)$, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του αναλυτικού σήματος γίνεται

$$R_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) = R_{yy}(\tau) = 2[R_{xx}(\tau) + jR_{\hat{x}x}(\tau)] = 2[R_{xx}(\tau) + j\hat{R}_{xx}(\tau)] \quad (3.233)$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier της (3.233), έχουμε

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = S_{yy}(f) = 2[S_{xx}(\tau) + jS_{\hat{x}x}(\tau)] \quad (3.234)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.218), παίρνουμε

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = S_{xx}(f) = \begin{cases} 4S_{xx}(f) & , f > 0 \\ 0 & , f < 0 \end{cases} \quad (3.235)$$

Παρατηρούμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος ενός αναλυτικού σήματος είναι μηδέν για αρνητικές συχνότητες, και από την (3.231)

$$X(t) = \Re \{ \tilde{X}(t) \} \quad (3.236)$$

δηλαδή, η $X(t)$ είναι το πραγματικό μέρος του αναλυτικού σήματος. Από την (3.233),

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \Re \{ R_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) \} \quad (3.237)$$

3.11 Θερμικός θόρυβος

Ο ηλεκτρικός θόρυβος που προέρχεται από την τυχαία κίνηση των ηλεκτρονίων σε αγωγούς, αναφέρεται σαν *θερμικός θόρυβος*. Έχει αποδειχθεί ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος της τάσης θερμικού θορύβου στα άκρα ενός αντιστάτη R δίνεται από τον τύπο

$$S_{mm}(f) = 2kTR \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (3.238)$$

όπου $k=1.38 \times 10^{-23}$ J/K είναι η σταθερά του Boltzmann, και T είναι η απόλυτη θερμοκρασία σε K. Μία απεικόνιση της φασματικής πυκνότητας ισχύος του θερμικού θορύβου δίνεται στο διάγραμμα 3.41. Όμως, το α είναι της τάξης των 1014 rad/s ή

1013 Hz = 104 GHz, το οποίο είναι μεγαλύτερο από τις περισσότερες συχνότητες που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές ηλεκτρονικών κυκλωμάτων. Όμως, $(\alpha^2 + \omega^2)/\omega^2 \rightarrow 1$, και ο θερμικός θόρυβος μοντελοποιείται σαν διαδικασία λευκού θορύβου με ένα οριζόντιο φάσμα τιμής $2kTR$ V²/Hz όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.42.

Επιπρόσθετα, αφού ο αριθμός των ηλεκτρονίων στην αντίσταση είναι πολύ μεγάλος, με στατιστικά ανεξάρτητες τυχαίες κινήσεις, από το θεώρημα του κεντρικού ορίου, ο θερμικός θόρυβος μοντελοποιείται σαν Γκαουσιανός με μηδενική μέση τιμή. Συνεπώς, η τάση του θερμικού θορύβου είναι μία λευκή Γκαουσιανή διαδικασία με μηδενική μέση τιμή. Η αντίσταση μπορεί να μοντελοποιηθεί από το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin, αποτελούμενο από έναν αθόρυβο αντιστάτη σε σειρά με μία πηγή τάσης θορύβου, όπως δείχνει το διάγραμμα 3.43(α) μέσης τετραγωνικής τιμής

$$E[V_n^2(t)] = 4kTR \quad (3.239)$$

ή από το ισοδύναμο κύκλωμα Norton, που αποτελείται από έναν αθόρυβο αντιστάτη παράλληλα με μία πηγή ρεύματος θορύβου, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.43(β), μέσης τετραγωνικής τιμής

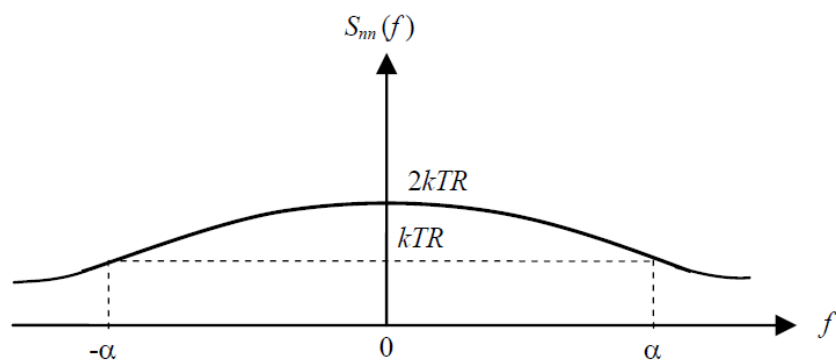
$$E[I_n^2(t)] = 4kTG \quad (3.240)$$

όπου $G=1/R$ είναι η αγωγιμότητα. Η φασματική πυκνότητα ισχύος της πηγής τάσης θορύβου πηγής ρεύματος θορύβου είναι, αντίστοιχα,

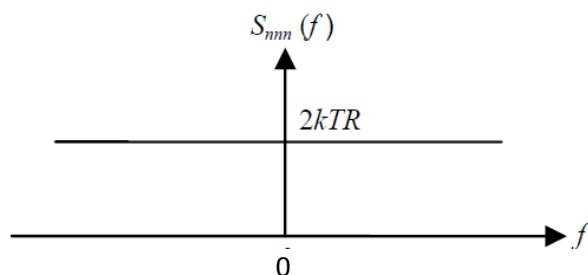
$$S_{v_n v_n}(f) = 2kTR \quad \text{V}^2/\text{Hz} \quad (3.241)$$

και

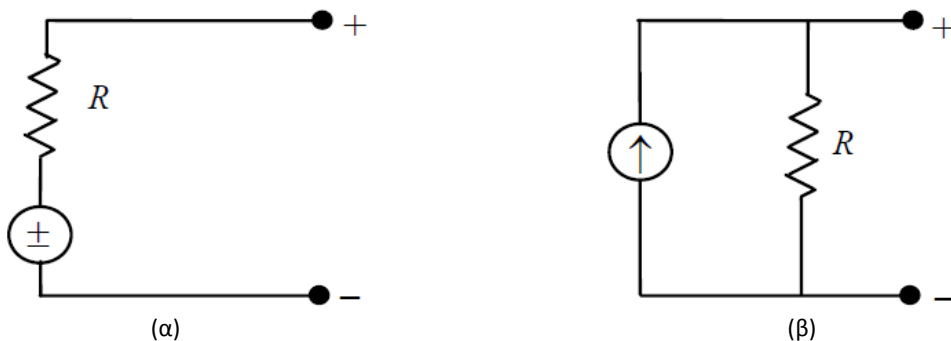
$$S_{i_n i_n}(f) = 2kTG \quad \text{A}^2/\text{Hz} \quad (3.242)$$



Διάγραμμα 3.41 Φασματική πυκνότητα ισχύος του θερμικού θορύβου.



Διάγραμμα 3.42 Φάσμα του λευκού θορύβου.



Διάγραμμα 3.43 Αντιστάτες με θόρυβο: (α) Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin, και (β) Ισοδύναμο κύκλωμα Norton.

Θεώρημα του Nyquist. Θεωρήστε ένα παθητικό δίκτυο RLC μίας θύρας όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.44. Η τάση στο τερματικό ζεύγος των $v(t)$ και $Z(j\omega)$ είναι η αντίσταση στη θύρα. Τότε, η φασματική πυκνότητα ισχύος της τάσης θορύβου ανοιχτού κυκλώματος στο τερματικό ζεύγος λόγω όλων των πηγών θερμικού θορύβου δίνεται από τη σχέση

$$S_{v_n v_n}(f) = 2kT \Re\{Z(j\omega)\} \quad (3.243)$$

ή, η φασματική πυκνότητα ισχύος ρεύματος θορύβου βραχυκυκλώματος δίνεται από

$$S_{v_i v_i}(f) = 2kT \operatorname{Re}\{Y(j\omega)\} \quad (3.244)$$

όπου $Y(j\omega)=1/Z(j\omega)$ είναι η αποδοχή εισόδου του δικτύου, και $\omega=2\pi f$.

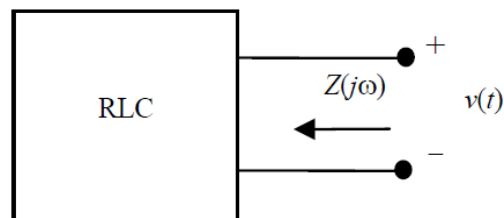
Παράδειγμα 3.14

Προσδιορίστε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της τάσης $v(t)$ στο τερματικό ζεύγος του δικτύου RC που φαίνεται στο διάγραμμα 3.45 λόγω του θερμικού θορύβου που δημιουργείται στην R, χρησιμοποιώντας τα εξής:

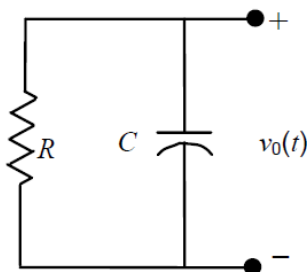
(α) Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.

(β) Ισοδύναμο κύκλωμα Norton.

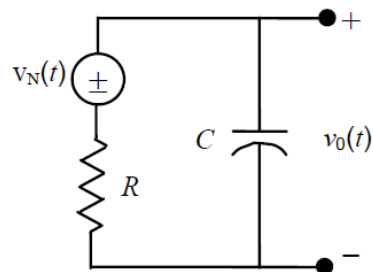
(γ) Θεώρημα του Nyquist.



Διάγραμμα 3.44 Παθητικό δίκτυο RLC.



Διάγραμμα 3.45 Δίκτυο RC.



Διάγραμμα 3.46 Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.

Λύση

Χρησιμοποιώντας (α) το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin, το παραγόμενο κύκλωμα φαίνεται στο διάγραμμα 3.46. Η συνάρτηση μεταφοράς από την πηγή θορύβου είναι, με διαιρέτη τάσης,

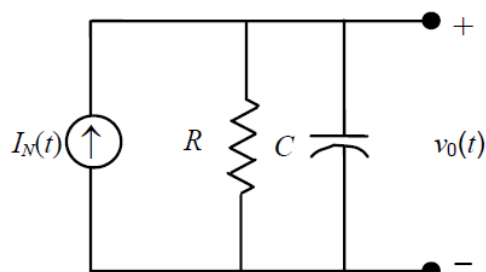
$$H(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Συνεπάγεται ότι

$$S_{v_0 v_0}(f) = S_{v_n v_n}(\omega) |H(j\omega)|^2 = \frac{2kTR}{1 + (\omega RC)^2}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το ισοδύναμο κύκλωμα Norton, το παραγόμενο κύκλωμα φαίνεται στο διάγραμμα 3.47. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι σε αυτήν την περίπτωση

$$H(j\omega) = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$



Διάγραμμα 3.47 Ισοδύναμο κύκλωμα Norton.

Τότε, η φασματική πυκνότητα ισχύος της τάσης εξόδου είναι

$$S_{v_0 v_0}(\omega) = S_{i_n i_n}(\omega) |H(j\omega)|^2 = \frac{2kT}{R} \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{2kTR}{1 + (\omega RC)^2}$$

(γ) Η αντίσταση στο τερματικό ζεύγος του δικτύου, είναι

$$H(j\omega) = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

Από το θεώρημα του Nyquist, η φασματική πυκνότητα ισχύος της πηγής τάσης θορύβου του αντιστάτη είναι

$$S_{v_0 v_0}(\omega) = 2kT \Re \{Z(j\omega)\} = \frac{2kTR}{1 + (\omega RC)^2}$$

Παρατηρούμε ότι τα τρία αποτελέσματα των (α), (β), και (γ) συμφωνούν.

Συνήθως, η φασματική πυκνότητα ισχύος μίας διαδικασίας λευκού θορύβου συμβολίζεται

$$S_{mm}(f) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < f < \infty \quad (3.245)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι

$$R_{nn}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (3.246)$$

Εφόσον το εύρος ζώνης των πραγματικών συστημάτων είναι πεπερασμένο, η ολοκλήρωση (3.245) ως προς μία πεπερασμένη ζώνη συχνοτήτων έχει σαν αποτέλεσμα μία πεπερασμένη μέση ισχύ.

Παράδειγμα 3.15 (Εύρος ζώνης ισοδύναμου θορύβου)

Υποθέστε ότι η λευκή Γκαουσιανή διαδικασία θορύβου με μηδενική μέση τιμή και με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{nn}(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ εφαρμόζεται σε ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Προσδιορίστε τη μέση ισχύ θορύβου της διαδικασίας εξόδου.

Λύση

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του λευκού Γκαουσιανού θορύβου της εισόδου δίνεται στην (3.245) ότι είναι $S_{nn}(f) = N_0/2, -\infty < f < \infty$. Χρησιμοποιώντας την (3.141), η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου εξόδου $S(f) = (N_0/2)|H(f)|^2$, όπου $H(f)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Η μέση ισχύς θα είναι τότε

$$P_{ave} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (3.247)$$

η οποία είναι πεπερασμένη αν το

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

συγκλίνει. Σε μία τέτοια περίπτωση, χρησιμοποιείται η έννοια του εύρους ζώνης ισοδύναμου θορύβου. Για να προσδιοριστεί το εύρος ζώνης ισοδύναμου θορύβου, θεωρούμε το ίδιο πρόβλημα με αυτό του Παραδείγματος 3.15, αλλά η συνάρτηση του συστήματος είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με εύρος ζώνης B και απόκριση μηδενικής συχνότητας $H(0)$. Η μέση ισχύς θορύβου στην έξοδο θα είναι

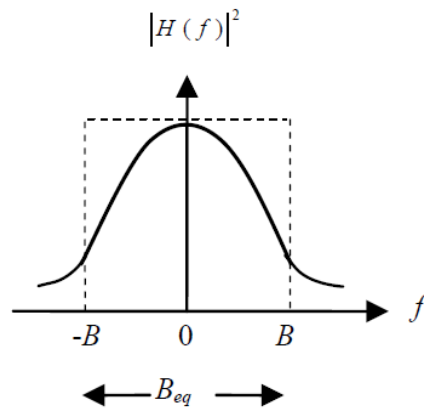
$$P_0 = N_0 H^2(0) B \quad (3.248)$$

Εξισώνοντας τις (3.247) και (3.248), παίρνουμε το εύρος ζώνης ισοδύναμου θορύβου, B_{eq} , το οποίο ορίζεται ως

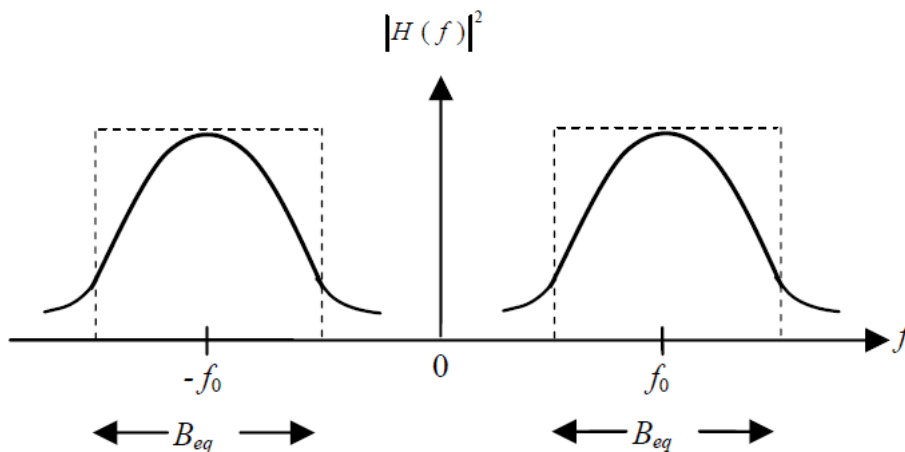
$$B_{eq} = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{H^2(0)} \quad (3.249)$$

Συνεπώς, η μέση ισχύς θορύβου στην έξοδο του γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου, συστήματος, με ένα εύρος ζώνης ισοδύναμου θορύβου B_{eq} , και τη διαδικασία εισόδου, λευκού θορύβου, με φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$, δίνεται από τον τύπο

$$P_{ave} = N_0 B_{eq} H^2(0) \quad (3.250)$$



Διάγραμμα 3.48 Εύρος ζώνης ισοδύναμου θορύβου ενός χαμηλοπερατού συστήματος.



Διάγραμμα 3.49 Εύρος ζώνης ισοδύναμου θορύβου ενός ζωνοπερατού συστήματος.

Να σημειωθεί ότι το εύρος ζώνης B_{eq} μπορεί να ερμηνευθεί σαν το εύρος ζώνης ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος με μία ορθογώνια συνάρτηση μεταφοράς, απόκρισης μηδενικής συχνότητας $H(0)$ και εύρους ζώνης B , όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.48. Αν το σύστημα είναι ζωνοπερατό, το εύρος ζώνης ισοδύναμου θορύβου απεικονίζεται στο διάγραμμα 3.49

3.12 Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό, καλύψαμε τις βασικές έννοιες των τυχαίων διαδικασιών. Αφού ορίσαμε την τυχαία διαδικασία, η οποία θεωρήθηκε ως μία τυχαία μεταβλητή (Κεφάλαια 1 και 2) με το χρόνο σαν μεταβαλλόμενη παράμετρο, δώσαμε τις διάφορες ιδιότητες των συσχετίσεων και των φασματικών πυκνοτήτων ισχύος. Παρουσιάσαμε τον διαφορετικό τύπο των τυχαίων διαδικασιών, συγκεκριμένα, τη Γκαουσιανή διαδικασία, τη διαδικασία Poisson, τις διαδικασίες Bernoulli και Διωνυμική, τις διαδικασίες τυχαίου περίπατου και Wiener, και μία σύντομη περιγραφή της διαδικασίας Markov. Οι διαδικασίες Markov θα αναπτυχθούν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στο επόμενο κεφάλαιο των διαδικασιών διακριτού

χρόνου. Το θεώρημα δειγματοληψίας και οι έννοιες της συνέχειας, της παραγωγισιμότητας, και της ολοκλήρωσης, οι οποίες είναι όλες γνωστές για τα ντετερμινιστικά σήματα, αναπτύχθηκαν για τις στοχαστικές διαδικασίες. Στη συνέχεια, ορίσαμε το μετασχηματισμό Hilbert των στοχαστικών διαδικασιών και τα αντίστοιχα σήματα αναλυτικών διαδικασιών. Ολοκληρώσαμε το κεφάλαιο με μία συζήτηση πάνω στο θερμικό θόρυβο και το εύρος ζώνης ισοδύναμου θορύβου. Επιπλέον, επιλύθηκαν πολλά παραδείγματα λεπτομερώς, έτσι ώστε να διευκρινιστούν ασάφειες που πιθανόν να είχαν προκύψει.

Επιλεγμένη Βιβλιογραφία

Benedetto S., E. Biglieri, and V. Castellani, Digital Transmission Theory, Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall, 1987.

Gray, R. M., and L. D. Davisson, Random Processes: A Mathematical Approach for Engineers, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1986.

Haykin, S., Communications Systems, New York: John Wiley and Sons, 1983.

Papoulis, A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, New York: McGraw-Hill, 1991.

Peebles, P. Z., Probability, Random Variables, and Random Signal Principles, New York: McGraw-Hill, 1980.

Proakis, J. G., Digital Communications, New York: McGraw-Hill, 1995.

Shanmugan, K. S., and A. M. Breipohl, Random Signals: Detection, Estimation, and Data Analysis, New York: John Wiley and Sons, 1988.

Srinath, M. D., and P. K. Rajasekaran, An Introduction to Statistical Signal Processing with Applications, New York: John Wiley and Sons, 1979.

Stark, H., and J. W. Woods, Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1986.

Urkowitz, H., Signal Theory and Random Processes, Dedham, MA: Artech House, 1983.

Whalen, A. D., Detection of Signals in Noise, New York: Academic Press, 1971.

Wozencraft, J. M., and I. M. Jacobs, Principles of Communication Engineering, New York: John Wiley and Sons, 1965.

Κεφάλαιο 4

Τυχαίες διαδικασίες διακριτού χρόνου

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο 3 αναπτύξαμε τις έννοιες των συναρτήσεων συνεχούς χρόνου και περιγράψαμε συνοπτικά τις Μαρκοβιανές διαδικασίες. Σε αυτό το κεφάλαιο, θεωρούμε ένα άλλο σύνολο των τυχαίων διαδικασιών: συγκεκριμένα, τις στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου. Μια διακριτή τυχαία διαδικασία μπορεί να είναι μια ομοιόμορφα δειγματοληπτημένη εκδοχή μιας διαδικασίας συνεχούς χρόνου. Μια διακριτή τυχαία διαδικασία είναι η αντιστοιχία που συνδέει τον δειγματοχωρο με έναν διακριτού εύρους δειγματοχώρο. Αυτό σημαίνει ένα σύνολο του οποίου οι συναρτήσεις-μέλη ορίζονται σε ένα διακριτό σύνολο (δείγματα χρόνου). Ως εκ τούτου, είναι μια συλλογή ή ένα σύνολο πραγματικών ή σύμπλεγμα διακριτών χρονικών ακολουθιών, οι οποίες επίσης καλούνται πραγματώσεις και συμβολίζονται ως $X(n)$. Πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τον συμβολισμό $\tilde{x}[n]$. Στην περίπτωση μας, κρατάμε το $X(n)$ για να συνάδει με τον συμβολισμό $X(t)$ μιας τυχαίας διαδικασίας συνεχούς χρόνου. Σημειώνουμε ότι για ευκολία στον συμβολισμό εξομαλύνουμε τον χρόνο ως προς την περίοδο δειγματοληψίας. Ένα συγκεκριμένο σύνολο λέμε ότι είναι οι διακριτές χρονοσειρές ή απλά χρονοσειρές, όπου, για παράδειγμα, η ακολουθία $X(n), X(n-1), \dots, X(n-M+1)$, η οποία αναπαριστά μια χρονοσειρά απαρτίζεται από την τρέχουσα παρατήρηση $X(n)$ και τις προηγούμενες $(M-1)$ παρατηρήσεις τις χρονικές στιγμές $n-1, n-2, \dots, n-M+1$. Για την ακρίβεια πολλές τυχαίες διαδικασίες διακριτού χρόνου προσεγγίζονται καλύτερα με το μοντέλο των χρονοσειρών. Σε αυτή την περίπτωση η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι μια συνάρτηση των παραμέτρων μοντελοποίησης, και έτσι η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου και η εκτίμηση των παραμέτρων μοντελοποίησης είναι απαραίτητες. Μια τέτοια προσέγγιση καλείται παραμετρική. Εάν $U(n)$ είναι μια οδηγός ακολουθία εισόδου και $X(n)$ είναι η ακολουθία εξόδου τότε το γενικό μοντέλο των δεδομένων μπορεί να δοθεί από την παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση

$$X(n) = -\sum_{k=1}^p a(k)X(n-k) + \sum_{k=0}^q b(k)U(n-k) \quad (4.1)$$

Ο υπολογισμός του φάσματος χρησιμοποιώντας τις λαμβανόμενες παραμέτρους μοντελοποίησης είναι μια διαδικασία γνωστή ως παραμετρική εκτίμηση φάσματος. Ο τομέας της εκτίμησης φάσματος είναι ευρύς, και δεν είναι στα περιθώρια αυτού του βιβλίου. Ωστόσο, μιλώντας για τυχαίες διαδικασίες διακριτού χρόνου και για τις εφαρμογές αυτών πρέπει να εισάγουμε τις αυτοπαλινδρομούμενες (AR) διαδικασίες, τις διαδικασίες κινητού μέσου (MA), και τις διαδικασίες αυτοπαλινδρομούμενου κινητού μέσου (ARMA). Για να έχουμε μια καλή αίσθηση αυτών των διακριτών διαδικασιών και για τις εφαρμογές τους για εκτίμηση φάσματος, οι θεμελιώδεις έννοιες των πράξεων πινάκων και της γραμμικής άλγεβρας είναι απαραίτητες, και έτσι θα περιγραφούν στην ενότητα 4.2. Κλείνουμε το κεφάλαιο με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι ειδικές

περιπτώσεις Μαρκοβιανών διαδικασιών με διακριτές καταστάσεις, όμως και με διακριτού και με συνεχούς χρόνου. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου, σε συνέχεια της παρουσίασης των Μαρκοβιανών διακριτού χρόνου. Αυτή η σειρά δόθηκε καθώς κατά την παρουσίαση των Μαρκοβιανών διακριτού χρόνου, παρουσιάστηκαν έννοιες σημαντικές για την κατανόηση και των Μαρκοβιανών συνεχούς χρόνου.

4.2 Πίνακες και γραμμική άλγεβρα

Στο κεφάλαιο 2 χρησιμοποιήσαμε επιγραμματικά κάποιες έννοιες των πινάκων για να εκτελέσουμε κάποιες ενέργειες. Τώρα θα δώσουμε, σε αυτή την ενότητα, μια σύνοψη των θεμελιωδών εννοιών στους πίνακες και την γραμμική άλγεβρα.

4.2.1 Αλγεβρικές πράξεις πινάκων

Ος πίνακες ορίζονται οι ορθογώνιες συστοιχίες από πραγματικά ή σύνθετα στοιχεία. Οι πίνακες συνήθως συμβολίζονται με κεφαλαία έντονα γράμματα ενώ τα στοιχεία ενός πίνακα συμβολίζονται με πεζά. Ένας $m \times n$ πίνακας \mathbf{A} με στοιχεία a_{ij} , $i=1,2,\dots,m$, και $j=1,2,\dots,n$, είναι ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες, όπως φαίνεται στην (4.2).

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Μια σύντομη αναφορά που κάποιες φορές χρησιμοποιείτε για την περιγραφή πινάκων είναι η

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \quad (4.3)$$

όταν $m=n$, ο πίνακας καλείται τετραγωνικός. Εάν $m=1$ τότε ο $m \times n$ πίνακας γίνεται ένας $1 \times n$ πίνακας και καλείται διάνυσμα γραμμής, και δίδεται από

$$\mathbf{a} = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}] \quad (4.4)$$

ενώ, εάν $n=1$, ο $m \times n$ πίνακας γίνεται ένας $m \times 1$ πίνακας ο οποίος καλείται διάνυσμα στήλης και δίδεται από

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Δύο πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{B} λέμε ότι είναι ίσοι εάν ισχυει ότι $a_{ij}=b_{ij}$, για κάθε $i=1,2,\dots,m$ και $j=1,2,\dots,n$. Το άθροισμα και η διαφορά δύο $m \times n$ πινάκων εφαρμόζεται ανά στοιχείο. Έτσι έχουμε ότι εάν

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (4.6)$$

και

$$D = A - B = -B + A \quad (4.7)$$

τότε,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (4.8)$$

και

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (4.9)$$

Σημειώνουμε ότι **A** και **B** πρέπει να είναι ίδιων διαστάσεων. Εάν το α είναι μονοδιάστατο, το γινόμενο οποιουδήποτε $m \times n$ πίνακα **A** με ένα μονοδιάστατο στοιχείο ισούται με το γινόμενο κάθε στοιχείου του **A** πίνακα με α το οποίο μας κάνει

$$\alpha A = A\alpha = \alpha a_{ij} \quad (4.10)$$

Εάν **A** είναι ένας $m \times n$ πίνακας και **B** είναι ένας $p \times q$ πίνακας τότε το γινόμενο

$$AB = C \quad (4.11)$$

ορίζεται όταν οι **A** και **B** είναι ομοιόμορφοι, το οποίο συμβαίνει όταν ο αριθμός των στηλών n του **A** ισούται με τον αριθμό των στηλών p του **B**, $n=p$. Το γινόμενο τότε δίδεται από

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (4.12)$$

ο **C** είναι ένας $m \times q$ πίνακας. Ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται ως μη αντιμεταθετικός, το οποίο σημαίνει

$$AB \neq BA \quad (4.13)$$

Σε αντίθεση με την μονοδιάστατη άλγεβρα, όπου το γινόμενο $ab=0$, σημαίνει ότι $a=0$ ή $b=0$ ή και τα δύο, το γινόμενο πινάκων $AB=0$ δεν σημαίνει απαραίτητα ότι $A=0$ ή $B=0$, όπου το μηδέν είναι ο μηδένικος πίνακας. Ωστόσο πολλές πράξεις οι οποίες σχετίζονται στη συσχέτιση και στους κανόνες διανομής, ισχύουν για την άλγεβρα πινάκων και συγκεκριμένα

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \quad (4.14)$$

$$A+(B+C) = (A+B)+C \quad (4.15)$$

$$A(BC) = (AB)C \quad (4.16)$$

$$A(B+C) = AB+AC \quad (4.17)$$

και

$$(B+C)A = BA+CA \quad (4.18)$$

Ο ταυτοτικός ή μοναδιαίος πίνακας **I** είναι ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά, εκτός από τα στοιχεία a_{ij} , $i=j$, της κύριας διαγωνίου τα οποία είναι άσσοι.

Ο αντιμεταθετικός ενός πίνακα $m \times n$ **A** είναι ένας $n \times m$ ο οποίος βρίσκεται αντιμεταθέτοντας κάθε γραμμή με την στήλη του **A** με τον ίδιο δείκτη έτσι ώστε

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{A}^T = [a_{ji}] \quad (4.20)$$

Ο εκθέτης T δείχνει ότι ο πίνακας είναι αντιμεταθετικός. Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad (4.21)$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (4.22)$$

και

$$(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (4.23)$$

Ο συζυγής του \mathbf{A} , συμβολίζεται ως $\bar{\mathbf{A}}$ ή \mathbf{A}^* , είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από το \mathbf{A} , αλλάζοντας όλα του τα στοιχεία με τα συζυγή τους, έτσι ώστε

$$\mathbf{A}^* = [a_{ij}^*] \quad (4.24)$$

Εάν όλα τα στοιχεία του \mathbf{A} είναι πραγματικά, τότε $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$. Εάν όλα τα στοιχεία είναι φανταστικά, τότε $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$. Εάν ο αντιμεταθετικός του συζυγή του \mathbf{A} ισούται με \mathbf{A} τότε ο \mathbf{A} θεωρείται ένας Ερμιτιανός πίνακας. Η σειρά των δύο πράξεων δεν έχει σημασία. Έχουμε

$$\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^* \quad (4.25)$$

ή

$$\mathbf{A}^H = [a_{ji}^*] \quad (4.26)$$

ή

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{m1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{m2}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Ο εκθέτης H δηλώνει τον Ερμιτιανό. Εάν ο \mathbf{A} είναι πραγματικός τότε ο $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T$ και ο \mathbf{A} θεωρείται συμμετρικός. Μπορεί επίσης να δειχθεί ότι

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H \quad (4.28)$$

και

$$(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H \mathbf{A}^H \quad (4.29)$$

Θα δείξουμε τώρα πως γίνεται ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα. Θέλοντας να γράψουμε τους γενικούς κανόνες θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τους υπό πίνακες και τους παράγοντες. Εάν $n=1, \mathbf{A}=[a_{11}]$ και η ορίζουσα του \mathbf{A} , συμβολιζόμενη ως $|\mathbf{A}|$ ή $\det(\mathbf{A})$, θα είναι $\det(\mathbf{A})=a_{11}$. Εάν $n=2$ τότε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

και

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Εάν $n=3$, τότε

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Εάν τώρα ο A είναι ένας $n \times n$ πίνακας, ο υπό πίνακας M_{ij} είναι η ορίζουσα του $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα, ο οποίος σχηματίζεται από τον πίνακα A διαγράφοντας την i -οστή γραμμή και την j -οστή στήλη. Για παράδειγμα οι υπό πίνακες M_{12}, M_{22} και M_{32} του 3×3 πίνακα που περιγράφηκε παραπάνω είναι κάθε

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ and } M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Κάθε στοιχείο a_{ij} ενός $n \times n$ πίνακα A έχει έναν παράγοντα C_{ij} ο οποίος διαφέρει από τον υπό πίνακα M_{ij} τουλάχιστον μια αλλαγή προσήμου έτσι ώστε

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (4.30)$$

Η γενική έκφραση της ορίζουσας ενός $n \times n$ πίνακα A δίδεται από

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad (4.31)$$

Σημειώνεται ότι οποιαδήποτε επιλογή $i, i=1,2,\dots$, οδηγεί στην ίδια τιμή της ορίζουσας του A . Αυτός ο τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας του A , αξιολογώντας μια ακολουθία από ορίζουσες $(n-1) \times (n-1)$, καλείται ανάπτυγμα Laplace.

Ο ανάστροφος ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα A είναι ο A^{-1} , για τον οποίο ισχύει

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (4.32)$$

Ο ανάστροφος του A υπάρχει εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, το οποίο σημαίνει ότι η ορίζουσα του A είναι μη μηδενική. Ο πίνακας A θεωρείται μοναδικός εάν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$. Ο ανάστροφος του A μπορεί να δοθεί από

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)} \quad (4.33)$$

όπου C είναι ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας των παραγόντων του $A \cdot C^T$ καλείται ο συζυγής πίνακας του A και συμβολίζεται ως $\text{Adj}(A)$ τυπος. Εάν A, B και το γινόμενο τους AB είναι όλα αντιστρέψιμα, μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (4.34)$$

και

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad (4.35)$$

Τώρα θα ορίσουμε την τάξη του \mathbf{A} η οποία συμβολίζεται ως r_A ή τάξη(\mathbf{A}), ως το μέγεθος της μεγαλύτερης μη μηδενικής ορίζουσας η οποία μπορεί να σχηματιστεί από τον πίνακα \mathbf{A} . Ως εκ τούτου, εάν ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, η τάξη του είναι n . Η τάξη του γινομένου δύο ή περισσότερων πινάκων είναι μικρότερη ή ίση από την μικρότερη τάξη των πινάκων που απαρτίζουν το γινόμενο, το οποίο σημαίνει ότι εάν r_A και r_B είναι οι αντίστοιχες τάξεις των \mathbf{A} και \mathbf{B} , τότε η τάξη του \mathbf{C} , όπου $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$, θα είναι

$$0 \leq r_C \leq \min(r_A, r_B) \quad (4.36)$$

Εάν \mathbf{A} είναι ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας, τότε η προβολή του \mathbf{A} , συμβολιζόμενη ως $\text{tr}(\mathbf{A})$, είναι το άθροισμα όλων των διαγωνίων του \mathbf{A} και δίδεται από

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (4.37)$$

Εάν \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι ομοιόμορφοι τετραγωνικοί πίνακες, τότε

$$\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B}) \quad (4.38)$$

και

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}) \quad (4.39)$$

Κάποιοι ακόμα χρήσιμοι τύποι σχετικά με την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα και τον ανάστροφο του είναι

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (4.40)$$

$$(\mathbf{A}^H)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^H \quad (4.41)$$

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}) \quad (4.42)$$

$$\det(\mathbf{A}^H) = \det^*(\mathbf{A}) \quad (4.43)$$

$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A}) \quad (4.44)$$

όπου α είναι μια σταθερά και

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \quad (4.45)$$

Ένας ακόμα τύπος που χρησιμοποιείτε συχνά στην ανάλυση φάσματος είναι το λήμμα του επαυξημένου ανάστροφου πίνακα το οποίο μας δίνει ότι

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1})^{-1} \mathbf{DA}^{-1} \quad (4.46)$$

όπου ο πίνακας \mathbf{A} είναι $n \times n$, ο \mathbf{B} είναι $n \times m$, ο \mathbf{C} είναι $m \times m$, και ο \mathbf{D} είναι $m \times n$.

Ο ανάστροφος του επαυξημένου πίνακα $(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})$ και ο ανάστροφος του $\mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}$, θεωρούμε ότι υπάρχει. Μια ειδική περίπτωση του λήμματος γνωστή και ως ταυτότητα Woodbury, είναι όταν ο \mathbf{B} είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα στήλης και συμβολίζεται ως \mathbf{u} , το \mathbf{C} είναι ο μοναδιαίος μονοδιάστατος πίνακας (1×1) και \mathbf{D} ένα συζυγή $1 \times n$ διάνυσμα γραμμής και συμβολίζεται ως \mathbf{u}^H . Τότε ο ανάστροφος του πίνακα \mathbf{A} επαυξημένου κατά \mathbf{uu}^H (πίνακας τάξεως 1) είναι

$$(A + \mathbf{u} \mathbf{u}^H)^{-1} = A^{-1} - \frac{(A^{-1} \mathbf{u})(\mathbf{u}^H A^{-1})}{1 + \mathbf{u}^H A^{-1} \mathbf{u}} \quad (4.47)$$

Η τετραγωνική μορφή Q που σχετίζεται με έναν πίνακα \mathbf{A} είναι μια πραγματική μονοδιάστατη ποσότητα που ορίζεται ως

$$Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (4.48)$$

όπου $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ και \mathbf{A} είναι ένας $n \times n$ πίνακας με $a_{ij} = a_{ji}$. Εάν ο \mathbf{A} είναι Ερμιτιανός τότε

$$Q = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^* x_j \quad (4.49)$$

με $a_{ji} = a_{ij}^*$

Για \mathbf{A} Ερμιτιανό είναι θετικά ημιορισμένος εάν και μόνο αν

$$\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{x} \neq 0 \quad (4.50)$$

Είναι θετικά ορισμένος εάν

$$\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \quad \mathbf{x} \neq 0 \quad (4.51)$$

Ο \mathbf{A} είναι αρνητικά ημιορισμένος εάν και μόνο αν

$$\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0 \quad (4.52)$$

Είναι αρνητικά ορισμένος εάν

$$\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \quad (4.53)$$

Ωστόσο, εάν $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, για κάποιο \mathbf{x} , και $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$, για κάποιο άλλο \mathbf{x} , τότε ο \mathbf{A} θεωρείται απροσδιόριστος.

4.2.2 Πίνακες ειδικών μορφών

Συχνά συναντάμε σε αρκετές εφαρμογές ειδικούς πίνακες. Ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας λέγεται ότι είναι διαγώνιος εάν όλα του τα στοιχεία για τα οποία $i \neq j$ είναι μηδέν, ενώ τα στοιχεία a_{ij} για τα οποία $i=j$, στην κύρια διαγώνιο είναι μη μηδενικά. Έτσι γράφουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}] \quad (4.54)$$

Παρατηρούμε ότι ο μοναδιαίος πίνακας είναι μια ειδική περίπτωση διαγώνιου πίνακα με $a_{ij}=1$, $i=1,2,\dots,n$. Ο \mathbf{A}^{-1} είναι επίσης διαγώνιος πίνακας ο οποίος δίδεται από

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} = \text{diag} \left[\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}} \right] \quad (4.55)$$

Ένας τμηματικά διαγώνιος τετραγωνικός πίνακας είναι ένας πίνακας ο οποίος μπορεί να χωριστεί σε μη μηδενικούς τετραγωνικούς υποπίνακες κατά μήκος της κύριας διαγωνίου, ενώ οι υπόλοιποι υποπίνακες είναι μηδενικοί.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix} = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_k] \quad (4.56)$$

Εάν όλοι οι $A_i, i=1,2,\dots,k$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε

$$\det(A) = \prod_{i=1}^k \det(A_i) \quad (4.57)$$

και

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k^{-1} \end{bmatrix} = \text{diag}[A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_k^{-1}] \quad (4.58)$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας με όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο ίσα με το μηδέν καλείται κάτω τριγωνικός πίνακας και δίδεται από

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Η ορίζουσα οποιουδήποτε τριγωνικού πίνακα είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του και δίδεται από

$$\det(L) = \prod_{i=1}^n a_{ii} \quad (4.60)$$

ο ανάστροφος ενός κάτω τριγωνικού πίνακα είναι επίσης ένας κάτω τριγωνικός πίνακας. Εάν όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά, τότε έχουμε έναν πάνω διαγώνιο πίνακα και δίδεται από

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

με ορίζουσα όπως δόθηκε στην (4.60). Ο ανάστροφος είναι επίσης ένας τριγωνικός πίνακας.

Ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A καλείται ορθογώνιος εάν

$$A^{-1} = A^T \quad (4.62)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες (και οι γραμμές) πρέπει να είναι ορθοκανονικές. Εάν \mathbf{a}_i είναι i -οστή στήλη (ή γραμμή) τότε η ορθογωνιότητα σημαίνει ότι είναι

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (4.63)$$

Εάν

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^H \quad (4.64)$$

τότε ο σύνθετος $n \times n$ πίνακας \mathbf{A} θεωρείται μοναδιαίος. Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (4.65)$$

Εάν

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \quad (4.66)$$

τότε ο \mathbf{A} θεωρείται ενελκτικός πίνακας. Ένας απορροφητικός πίνακας είναι μια ειδική περίπτωση περιοδικού πίνακα. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε έναν τετραγωνικό πίνακα τέτοιο ώστε υψωμένο σε δύναμη να μας δίνει

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k+1}, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (4.67)$$

Ο πίνακας θεωρείται ότι έχει περίοδο k εάν ο k είναι ο μικρότερος δυνατός ακέραιος. Εάν $k=1$, τότε $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$, και ο πίνακας καλείται απορροφητικός.

Ένας περισυμμετρικός πίνακας είναι ένας πίνακας ο οποίος είναι συμμετρικός σε σχέση με την δευτερεύουσα διαγώνιο. Για να αντιληφθούμε αυτόν τον ορισμό ξεκάθαρα, έστω \mathbf{R} ένας 5×5 πίνακας, και τότε

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{51} & a_{41} & a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας \mathbf{A} είναι κυκλοτερής εάν όλες οι γραμμές συμπληρώνονται από τις n γραμμές $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, ολισθαίνοντας προς τα δεξιά την προηγούμενη γραμμή ώστε να έχουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Ένας πίνακας ο οποίος έχει τα ίδια στοιχεία σε οποιαδήποτε διαγώνιο έτσι ώστε $a_{ij}=\alpha_{j-1}$, για κάθε i και j καλείται Toeplitz. Εάν ο \mathbf{A} είναι $n \times n$ τότε

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_{-2} & a_{-3} & \cdots & a_{-n} \\ a_2 & a_1 & a_{-2} & \cdots & \vdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ddots & a_{-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-2} \\ a_n & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Για παράδειγμα, εάν $n=4$, έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_{-2} & a_{-3} & a_4 \\ a_{-1} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_1 & a_2 \\ a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_1 \end{bmatrix}$$

Επί πρόσθετα, $\alpha_k = \alpha_k^*$, τότε ο A θεωρείται ότι είναι Ερμιτιανός Toeplitz. Εάν ο πίνακας είναι πραγματικός, τότε $\alpha_k = \alpha_k$, και ο A θεωρείται συμμετρικός Toeplitz.

Μια ακόμα ειδική περίπτωση πίνακα που μπορεί να συναντήσουμε είναι ο $m \times n$ Vandermonde πίνακας ο οποίος έχει την μορφή

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_n^{m-1} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

4.2.3 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Σε αυτή την ενότητα ορίζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα. Παρουσιάζουμε μεθόδους εύρεσης αυτών και κάποιες σχετικές ιδιότητες. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα είναι εξαιρετικά χρήσιμα σε πολλές εφαρμογές επεξεργασίας σήματος και σύγχρονης θεωρίας έλεγχου. Στα πλαίσια ,οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα θα χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν στοχαστικές διαδικασίες.

Ορίζουμε γραμμικό μετασχηματισμό ή γραμμική διεργασία ή γραμμική σχεδίαση T από ένα διανυσματικό χώρο χ , ο οποίος καλείται πεδίο ορισμού, σε ένα διανυσματικό χώρο γ ο οποίος καλείται εύρος (ή πεδίο τιμών), σαν μια αντιστοίχιση που αναθέτει κάθε διάνυσμα \mathbf{x} στο χ ένα διάνυσμα $T(\mathbf{x})$ στο γ , τέτοιο ώστε

$$T: \chi \rightarrow \gamma \quad (4.72)$$

Ο μετασχηματισμός T θεωρείται γραμμικός εάν

$$T(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) = \alpha T(\mathbf{x}_1) + \beta T(\mathbf{x}_2) \quad (4.73)$$

όπου α και β είναι σταθερές, \mathbf{x}_1 και \mathbf{x}_2 είναι διανύσματα στο χ .

Μπορεί να δειχθεί ότι οποιαδήποτε εξίσωση που εμπλέκει έναν γραμμικό τελεστή σε έναν χώρο πεπερασμένων διαστάσεων μπορεί να μετατραπεί σε μια πράξη ισότιμη πράξη πινάκων. Εάν ο μετασχηματισμός $T: v \rightarrow v$, αντιστοιχεί στοιχεία του v

σε αλλά στοιχεία του v , τότε μπορούμε να ορίσουμε το T χρησιμοποιώντας έναν πίνακα A . Χρησιμοποιώντας την παραπάνω έννοια του γραμμικού μετασχηματισμού, είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε τις έννοιες των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων. Μια ιδιοτιμή (ή χαρακτηριστική τιμή) ενός γραμμικού τελεστή T σε ένα διανυσματικό χώρο χ είναι ένα βαθμωτό λ , τέτοιο ώστε

$$A x = \lambda x \quad (4.74)$$

για ένα μη μηδενικό διάνυσμα x στο v . Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα x που ικανοποιεί την σχέση $Ax = \lambda x$ καλείται ιδιοδιάνυσμα του A που σχετίζεται με την ιδιοτιμή λ . Η αναπαράσταση με πίνακα της (4.74) είναι

$$(A - I\lambda)x = 0 \quad (4.75)$$

όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Εάν ο τελεστής T έχει έναν χώρο λειτουργίας, τότε τα ιδιοδιανύσματα που σχετίζονται με τις ιδιοτιμές καλούνται ιδιοσυναρτήσεις.

Ιδιοτιμές

Εάν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας, μια απαραίτητη συνθήκη ώστε οι n ομογενείς εξισώσεις της (4.75) να οδηγούν σε μη μηδενικές λύσεις είναι η τάξη του πίνακα $(A - I\lambda)$ να είναι μικρότερη του n . Αυτό σημαίνει ότι η ορίζουσα

$$|A - I\lambda| = 0 \quad (4.76)$$

Η εξίσωση (4.76) καλείται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A (ή του τελεστή T που αναπαριστάται από τον A). Αναπτύσσοντας την ορίζουσα, $(A - I\lambda)$, περνούμε ένα πολυώνυμο n -οστού βαθμού ως προς λ , καλείται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και δίδεται από

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= |\lambda I - A| = (-1)^n |A - I\lambda| \\ &= \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_1\lambda + c_0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

Λύνοντας ως προς λ την χαρακτηριστική εξίσωση οδηγούμαστε σε n ρίζες $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, εάν όλες οι ρίζες είναι μοναδικές. Σαν αποτέλεσμα, η $c(\lambda)$ μπορεί να γράφει ως

$$c(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (4.78)$$

ωστόσο εάν οι ρίζες είναι μη μηδενικές, τότε η λ_1 έχει πολυπλοκότητα m_1 , η λ_2 έχει πολυπλοκότητα m_2 και ούτω κάθε εξής. Έτσι έχουμε την

$$c(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p} \quad (4.79)$$

όπου $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε περίπτωση που όλες οι ρίζες είναι μοναδικές, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = c_0 \quad (4.80)$$

και

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = (-1)^{n+1} c_{n-1} \quad (4.81)$$

Ιδιοδιανύσματα

Όταν βρεθούν οι ιδιοτιμές από τις χαρακτηριστικές εξισώσεις αντικαθιστούμε τα λ στην (4.74) ή (4.75) και λύνουμε ως προς το αντίστοιχο διάνυσμα x .

Ωστόσο υπολογίζοντας το λ , δύο είναι οι βασικές περιπτώσεις:

(1) όλες οι ιδιοτιμές είναι μοναδικές και

(2) κάποιες ιδιοτιμές έχουν πολυπλοκότητα μεγαλύτερη του ενός.

Περίπτωση 1: όλες οι ιδιοτιμές είναι διακριτές

Τα ιδιοδιανύσματα λύνονται απευθείας από την (4.74) ή (4.75). Εάν \mathbf{x}_k είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές λ_k , τότε $\alpha \mathbf{x}_k$ είναι επίσης ένα ιδιοδιάνυσμα για οποιοδήποτε μη μηδενικό βαθμωτό α . Εφόσον όλες οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \lambda_2 \mathbf{x}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_n &= \lambda_n \mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (4.82)$$

μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda} \quad (4.83)$$

όπου ο $n \times n$ πίνακας \mathbf{M} καλείται συνδυαστικός πίνακας και ορίζεται από την

$$\mathbf{M} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_n] \quad (4.84)$$

η τάξη του πίνακα \mathbf{M} είναι n , εφόσον τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ο $\mathbf{\Lambda}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας ο οποίος ορίζεται από

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \quad (4.85)$$

Λύνοντας ως προς $\mathbf{\Lambda}$ την (4.83), έχουμε

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} \quad (4.86)$$

όπου \mathbf{M}^{-1} είναι ο ανάστροφος πίνακας \mathbf{M} . Η εξίσωση (4.86) είναι γνωστή ως μετασχηματισμός ομοιότητας. Εάν τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια τότε $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$, όπου T δηλώνει αντιμετάθεση και ο πίνακας \mathbf{A} έχει διαγωνιοποιηθεί με χρήση του ορθογωνίου μετασχηματισμού

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M} \quad (4.87)$$

Παράδειγμα 4.1

(α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(β) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του \mathbf{A} .

(γ) Διαγωνιοποιήστε τον \mathbf{A} χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό ομοιότητας

Λύση

(α) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \rightarrow$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ -5 & 2-\lambda & 0 \\ -5 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$$

έτσι οι ιδιοτιμές είναι όλες μοναδικές, με $\lambda_1=-3, \lambda_2=2$ και $\lambda_3=1$. Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και \mathbf{x}_3 λαμβάνονται λύνοντας τις εξισώσεις $\mathbf{A}\mathbf{x}_1=\lambda_1\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2=\lambda_2\mathbf{x}_2$ και $\mathbf{A}\mathbf{x}_3=\lambda_3\mathbf{x}_3$. Για $\lambda=3$, έχουμε

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{x}^T = [a \ b \ c]$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις άγνωστους το οποίο είναι

$$\begin{aligned} -3a &= -3a \\ -5a + 2b &= -3b \\ -5a + b + c &= -3c \end{aligned}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις, βρίσκουμε $a=b=c$. Έτσι έχουμε $\mathbf{x}_1^T = a[1 \ 1 \ 1]$, το οποίο είναι το ιδιοδιάνυσμα και a είναι μια οποιαδήποτε σταθερά.

Ομοίως, λύνουμε για \mathbf{x}_2 και \mathbf{x}_3 και έχουμε $\mathbf{x}_2^T = [0 \ 0 \ 1]$ και $\mathbf{x}_3^T = [0 \ 1 \ 1]$

(β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του \mathbf{A} είναι $c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \rightarrow$

$$c(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ -5 & \lambda-2 & 0 \\ -5 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό ομοιότητας, $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$, έχουμε

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

2 Περίπτωση: Όλες οι ιδιοτιμές δεν είναι μοναδικές.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα μπορεί είτε να είναι είτε να μην είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εάν m_i είναι η τάξη μιας ιδιοτιμής, η οποία καλείται αλγεβρική πολυπλοκότητα, τότε ο αντίστοιχος αριθμός ανεξάρτητων διανυσμάτων, $q_i, q_i \leq m_i$, καλείται γεωμετρική πολυπλοκότητα ή εκφυλισμός. Η τιμή του q_i δίδεται από

$$q_i = n - \text{rank}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}), \quad 1 \leq q_i \leq m_i \quad (4.88)$$

Εάν $q_i=m_i$, όλα τα ιδιοδιανύσματα που σχετίζονται με την λ_i είναι ανεξάρτητα και μπορούν να επιλυθούν όπως στην περίπτωση 1.

Εάν $q_i=1, (m_i>1)$ τότε υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα συσχετιζόμενο με την λ_i . Τα υπόλοιπα (m_i-1) διανύσματα καλούνται γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Εάν γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξεως k είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα για το οποίο ισχύει

$$(A - \lambda_i I)^k \mathbf{x}_k = 0 \quad (4.89)$$

και

$$(A - \lambda_i I)^{k-1} \mathbf{x}_{k-1} \neq 0 \quad (4.90)$$

Το ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x}_1 βρίσκεται όπως και παραπάνω, έτσι έχουμε

$$(A - \lambda_i I) \mathbf{x}_1 = 0 \quad (4.91)$$

ενώ τα υπόλοιπα (m_i-1) γενικευμένα ιδιοδιανύσματα βρίσκονται από

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I) \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 \\ (A - \lambda_i I) \mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_2 \\ &\vdots \\ (A - \lambda_i I) \mathbf{x}_j &= \mathbf{x}_{j-1} \\ &\vdots \\ (A - \lambda_i I) \mathbf{x}_{m_i} &= \mathbf{x}_{m_i-1} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Εάν ο συνδυαστικός πίνακας \mathbf{M} σχηματίζεται όπως προηγουμένως τότε τα m_i-1 ιδιοδιανύσματα συμπεριλαμβάνονται, και ο μετασχηματισμός ομοιότητας γίνεται

$$\mathbf{AM} = \mathbf{MJ} \quad (4.93)$$

ή

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{AM} \quad (4.94)$$

\mathbf{J} είναι ένας $n \times n$ διαγώνιος πίνακας, ο οποίος ονομάζεται μορφή Jordan, τέτοιος ώστε

$$\mathbf{J} = \text{diag}[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_p] \quad (4.95)$$

και

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, p \quad (4.96)$$

Η εξίσωση (4.96) μας λέει ότι κάθε υποπίνακας $\mathbf{J}_i, i=1, 2, \dots, p$, έχει την ίδια ιδιοτιμή κατά μήκος της κύριας διαγωνίου: άσσοι για όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο και μηδενικά για όλα τα υπόλοιπα στοιχεία.

Εάν $1 \leq q_i \leq m_i$ τότε μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα σύνολο στοιχείων Jordan για κάθε ιδιοδιάνυσμα. Θεωρούμε ότι έχουμε έναν 6×6 τετραγωνικό πίνακα, τέτοιο ώστε να έχουμε δύο ιδιοτιμές λ_1 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$) τάξεως πέντε, και λ_6 τάξεως ένα, και $q_1=2$. Έτσι, έχουμε δύο ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και τρία γενικευμένα ιδιοδιανύσματα για λ_1 , και ένα ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x}_6 για λ_6 . Τα γενικευμένα

ιδιοδιανύσματα μπορεί να συσχετίζονται με το \mathbf{x}_1 ή με το \mathbf{x}_2 , ή και με το \mathbf{x}_1 και με το \mathbf{x}_2 . Έτσι, μπορεί αν έχουμε δύο σύνολα Jordan της μορφής

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

ή

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = [\lambda_1] \quad (4.98)$$

ή το αντίστροφο. Η προσέγγιση για να εντοπίσουμε τα σύνολα Jordan θα παρουσιαστεί με ένα παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι έχουμε την περίπτωση (4.97). Τότε, οι αντίστοιχες γενικευμένες ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ορίζονται από

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)\mathbf{x}_{13} &= \mathbf{x}_{12} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)\mathbf{x}_{12} &= \mathbf{x}_1 \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)\mathbf{x}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)\mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_{21} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)\mathbf{x}_2 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_6)\mathbf{x}_6 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.99)$$

Ο συνδυαστικός \mathbf{M} είναι

$$\mathbf{M} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_{12} \mid \mathbf{x}_{13} \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_{21} \mid \mathbf{x}_6] \quad (4.100)$$

Ο μετασχηματισμός ομοιότητας είναι όπως δίνεται στην (4.94), όπου \mathbf{J} είναι

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array} \right] \quad (4.101)$$

Εάν έχουμε την περίπτωση της (4.98), τότε η αντίστοιχες γενικευμένες ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα δίδονται από

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)\mathbf{x}_{14} &= \mathbf{x}_{13} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)\mathbf{x}_{13} &= \mathbf{x}_{12} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)\mathbf{x}_{12} &= \mathbf{x}_1 \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)\mathbf{x}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)\mathbf{x}_2 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_6)\mathbf{x}_6 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.102)$$

Οι συνδυαστικοί και οι Jordan πίνακες δίδονται από

$$\mathbf{M} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_{12} \mid \mathbf{x}_{13} \mid \mathbf{x}_{14} \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_6] \quad (4.103)$$

και

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|cc}
 \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6
 \end{array} \right] \quad (4.104)$$

Από την (4.50) στη (4.53), ορίσαμε μια μέθοδο για εύρεση της καθοριστικότητας ενός Ερμιτιανού πίνακα. Δίδουμε τώρα μια εναλλακτική μέθοδο με χρήση ιδιοτιμών. Εάν όλες οι μοναδικές ιδιοτιμές $\lambda_i > 0$, τότε ο πίνακας θεωρείται ως αυστηρά θετικός. Θεωρείται ημιαυστηρά θετικός εάν όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i \geq 0$. Εάν όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i < 0$, τότε ο πίνακας θεωρείται αυστηρά αρνητικός, και τέλος ο πίνακας είναι ημιαυστηρά αρνητικός εάν $\lambda_i \leq 0$. Ωστόσο εάν μερικές $\lambda_i > 0$ και άλλες $\lambda_i < 0$ ιδιοτιμές, τότε ο πίνακας είναι απροσδιόριστος.

Παράδειγμα 4.2

(α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(β) Βρείτε την μορφή Jordan με τον μετασχηματισμό $\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}$

Λύση

(α) Η χαρακτηριστική εξίσωση δίδεται από την $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ και

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(3-\lambda) = 0$$

Ως εκ τούτου δύο ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ με αλγεβρική πολυπλοκότητα $m_1 = 3$, και $\lambda_2 = 3$ με πολυπλοκότητα $m_2 = 1$. Θέλουμε να βρούμε τον αριθμό των ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων και γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων που συσχετίζονται με την λ_1 . Η τάξη της $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|_{\lambda=2} = 2 = r$. Έτσι, $q_1 = n - r = 4 - 2 = 2$, το οποίο σημαίνει ότι έχουμε δύο ιδιοδιανύσματα. Εφόσον $m_1 = 3$, υπάρχει μόνο ένα $m_1 - q = 1$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα. Λύνοντας ως προς \mathbf{x}_1 , χρησιμοποιώντας τις τέσσερις εξισώσεις της $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 2\mathbf{x}_1$, όπου $\mathbf{x}_1 = [\alpha \ b \ c \ d]^T$, εξάγουμε $\alpha = -d$ και $b = -c$. Εφόσον έχουμε δύο ιδιοδιανύσματα συσχετιζόμενα με το $\lambda = 2$, τότε θέτουμε $(\alpha = 1, b = 0)$ για να πάρουμε $\mathbf{x}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ -1]^T$, και $(\alpha = 0, b = 1)$ για να πάρουμε $\mathbf{x}_2 = [0 \ 1 \ -1 \ 0]^T$. Το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x}_{12} δίδεται από την $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_1$ η οποία παράγει $\mathbf{x}_{12} = [0 \ 0 \ -1 \ -1]^T$. Ομοίως, λύνουμε ως προς \mathbf{x}_4 χρησιμοποιώντας $\mathbf{A}\mathbf{x}_4 = 3\mathbf{x}_4$ για να πάρουμε

$$\mathbf{x}_4 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T.$$

(β) Σχηματίζουμε τον συσχετιζόμενο πίνακα \mathbf{M} ως εξής

$$\mathbf{M} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_{12} \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

εκτελώντας τις πράξεις $\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}$ καταλήγουμε όπως αναμενόταν στο

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ο ανάστροφος του \mathbf{M} είναι

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 Σύνοψη

Στο παρόν κεφάλαιο δόθηκε μια σύνοψη των στοιχειωδών πράξεων πινάκων και γραμμικής άλγεβρας, εργαλεία τα οποία είναι πάρα πολύ χρήσιμα για τις στοχαστικές διεργασίες, για υπολογισμό φάσματος ισχύος και παραμετρική εκτίμηση φάσματος.

Επιλεγμένη Βιβλιογραφία

Brogan, W. L., Modern Control Theory, New York: Quantum Publishing, 1974.

Dorny, C. N., A Vector Space Approach to Models and Optimization, Huntington, NY: Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.

Gallagher, R. G., Information Theory and Reliable Communications, New York: John Wiley and Sons, 1968.

Grimmett, G. R., and D. R. Stirzaker, Probability and Random Process, Oxford, England: Clarendon Press, 1982.

Grinstead, C. M., and J. L. Snell, Introduction to Probability, Providence, RI: American Mathematical Society, 1997, and on-line textbook 2004.

Haykin, S., Adaptive Filter Theory, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1986.

Kay, S. M., Modern Spectral Estimation; Theory and Application, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.

Madisetti, V. K., and D. B. Williams, (eds.), Digital Signal Processing, Boca Raton, FL: CRC Press, 1999.

Marple, Jr., S. L., Digital Spectral Analysis, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.

Papoulis, A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, New York: McGraw-Hill, 1991.

Shanmugan, K. S., and A. M. Breipohl, Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis, New York: John Wiley and Sons, 1988.

Stark, H., and J. W. Woods, Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1986.

Ziemer, R. E., W. H. Trander, and D. R. Fannin, Signal and Systems: Continuous and Discrete, New York: Macmillan, 1983.