

**Α.Τ.Ε.Ι. ΚΡΗΤΗΣ – ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΡΕΘΥΜΝΟΥ  
ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ & ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:**

**«Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HILBERT ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ  
ΣΤΗ ΜΟΥΣΙΚΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ»**

**ΕΚΠΟΝΗΣΗ:**

**ΜΠΡΕΖΑΣ ΣΠΥΡΟΣ    Α.Μ. 133**

**ΕΠΙΒΛΕΨΗ:**

**Δρ. ΚΟΥΖΟΥΠΗΣ ΣΠΥΡΟΣ**

**ΡΕΘΥΜΝΟ  
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005**

Πριν την παράθεση της πτυχιακής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που συνέβαλαν σημαντικά στην υλοποίησή της.

Πρωταρχικά, το Δρ. Σπύρο Κουζούπη για την επίβλεψη της εργασίας καθώς και για την πολύτιμη συμβολή του στη μελέτη και στην εξαγωγή των συμπερασμάτων που απορρέουν από αυτή.

Το Δρ. Ευθύμιο Μπακαρέζο για την καθοδήγησή του στην αναζήτηση βιβλιογραφίας και άλλων πηγών πάνω στις οποίες στηρίχθηκε η πτυχιακή εργασία.

Όλους τους συναδέλφους που συνέβαλαν στην ηχογράφηση και συγκέντρωση των ήχων που χρησιμοποιήθηκαν στο πρακτικό μέρος της εργασίας.

## Περιεχόμενα

### Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Απλή επεξήγηση του μετασχηματισμού Hilbert.....	Σελ. 5
1.2 Πεδία εφαρμογών του μετασχηματισμού Hilbert.....	6
Αναφορές κεφαλαίου 1.....	10

### Κεφάλαιο 2: Μαθηματικές σχέσεις που διέπουν το μετασχηματισμό Hilbert

2.1 Μαθηματικές εκφράσεις του μετασχηματισμού Hilbert.....	12
2.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Hilbert.....	18
Αναφορές κεφαλαίου 2.....	23

### Κεφάλαιο 3: Ζευγάρια μετασχηματισμών Hilbert

3.1 Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Hilbert (ΔΜΗ).....	24
3.2 Ο μετασχηματισμός Hilbert μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων.....	26
3.3 Παραδείγματα μετασχηματισμών .....	30
Αναφορές κεφαλαίου 3.....	37

### Κεφάλαιο 4: Στιγμαία συχνότητα

4.1 Αρχικός προσδιορισμός της στιγμιαίας συχνότητας.....	38
4.2 Η έννοια της στιγμιαίας συχνότητας	
4.2.1 Η έννοια της συχνότητας.....	39
4.2.2 Γενίκευση της έννοιας της συχνότητας σε μη σταθερά σήματα.....	40
4.2.3 Μαθηματικός προσδιορισμός της στιγμιαίας συχνότητας.....	45
4.3 Ο μετασχηματισμός Hilbert και το αναλυτικό σήμα.....	50
4.4 Περιπτώσεις στις οποίες ο μετασχηματισμός Hilbert δημιουργεί το κατά $\pi/2$ μετατοπισμένο κομμάτι του αρχικού σήματος.....	51
4.5 Επεξήγηση του αναλυτικού σήματος που δημιουργείται με το μετασχηματισμό Hilbert.....	53
4.6 Παραδείγματα υπολογισμού στιγμιαίας συχνότητας.....	54
4.7 Η εύρεση της περιβάλλουσας μιας κυματομορφής.....	57
Αναφορές κεφαλαίου 4.....	62

## Κεφάλαιο 5: Μελέτη ήχων μουσικών οργάνων (φυσικών-τεχνητών)

5.1 Μελέτη γυναικείας φωνής.....	64
5.2 Μελέτη κλαρίνου.....	67
5.3 Μελέτη σαξόφωνου.....	73
5.4 Μελέτη τρομπέτας.....	77
5.5 Μελέτη φλάουτου.....	81
5.6 Μελέτη φλογέρας alto και φλογέρας soprano.....	84
5.7 Μελέτη βιολιού.....	86
5.8 Μελέτη πιάνου.....	92
5.9 Μελέτη νεί.....	93
5.10 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα στο αντικείμενο.....	95

## Παράρτημα Α

Βιογραφία του David Hilbert.....	96
----------------------------------	----

## **Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή**

### **1.1 Συνοπτική επεξήγηση του μετασχηματισμού Hilbert**

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία θα αναλυθεί και θα παρατεθεί με παραδείγματα ο μετασχηματισμός Hilbert. Ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός στηρίζεται σε μαθηματικές αρχές του ολοκληρωτικού λογισμού και βρίσκει εφαρμογή σε πολλούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας, μερικές από τις οποίες θα αναφερθούν επιγραμματικά σε επόμενη ενότητα.

Ο μετασχηματισμός Hilbert στηρίζεται στο γεγονός ότι όλες οι κανονικές θετικές συναρτήσεις στο πεδίο του χρόνου, όπως η συσχέτιση και η κρουστική απόκριση, είναι στην πραγματικότητα μιγαδικές συναρτήσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί στην ουσία το φανταστικό μέρος μιας τέτοιας συνάρτησης είναι ο μετασχηματισμός Hilbert του πραγματικού μέρους της ίδιας συνάρτησης.

Με βάση τα παραπάνω, οι προαναφερθείσες θετικές συναρτήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικά όπως οι συναρτήσεις στο πεδίο των συχνοτήτων. Σχεδιάζοντας δηλαδή το πραγματικό τους μέρος, το φανταστικό τους μέρος, το πλάτος ή τη φάση τους σε σχέση με το χρόνο. Επίσης μπορούν να αναπαρασταθούν με γραφήματα “Nyquist” και “Nichols” [1].

Όσον αφορά την εφαρμογή του μετασχηματισμού Hilbert στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος, πρέπει να αναφέρουμε δύο σημαντικά μεγέθη που απορρέουν από αυτό και καθιστούν το μετασχηματισμό άκρως σημαντικό και χρήσιμο: την περιβάλλουσα και τη στιγμιαία συχνότητα.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να διαχωρίσουμε το μετασχηματισμό Hilbert από το μετασχηματισμό Fourier με βάση μια πολύ σημαντική διαφορά τους. Ο μετασχηματισμός Fourier μεταφέρει την ανεξάρτητη μεταβλητή ενός σήματος από το πεδίο του χρόνου σε αυτό της συχνότητας και το αντίθετο, ενώ ο μετασχηματισμός Hilbert ενός σήματος στο πεδίο του χρόνου είναι ένα άλλο σήμα στο πεδίο του χρόνου ενώ ο ίδιος μετασχηματισμός ενός σήματος στο πεδίο της συχνότητας είναι ένα άλλο σήμα στο πεδίο της συχνότητας.

Ο απλούστερος μη μαθηματικός τρόπος για να περιγραφεί ο μετασχηματισμός Hilbert είναι να πει κανείς ότι ουσιαστικά προσδίδει σε όλες τις συχνότητες που αποτελούν ένα σήμα μια μετατόπιση φάσης ίση με  $-90^\circ$  ή ότι στη διάσταση του

χρόνου μετατοπίζει όλες τις επιμέρους αρμονικές ενός σήματος κατά  $\frac{1}{4}$  του μήκους κύματος. Χρησιμοποιώντας το σύμβολο  $H$  για να υποδηλώσουμε το μετασχηματισμό Hilbert μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$H(\cos 2\pi f t) = \sin(2\pi f t) \quad (1.1.1)$$

$$H(\sin 2\pi f t) = -\cos(2\pi f t) \quad (1.1.2)$$

Πρέπει εδώ να αναφερθεί ότι η μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου δεν είναι μια δεδομένη χρονική μετατόπιση αλλά εξαρτάται από το μήκος κύματος (ή τη συχνότητα) της συγκεκριμένης αρμονικής του σήματος που κάθε φορά εξετάζεται.

## **1.2 Πεδία εφαρμογών του μετασχηματισμού Hilbert**

Οι εφαρμογές που βρίσκει ο μετασχηματισμός Hilbert σε διάφορους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας είναι πάρα πολλές. Ακολουθώς αναφέρονται ορισμένες από αυτές.

Στη νευρολογία, χρησιμοποιώντας εγκεφαλογράμματα ορισμένοι επιστήμονες προσπαθούν να αναγνωρίσουν το πλάτος, τη φάση και τη συχνότητα των σημάτων που στέλνει ο εγκέφαλος στο υπόλοιπο σώμα. Όπως έχει αποδειχτεί από παλαιότερες έρευνες το συχνοτικό περιεχόμενο των ηλεκτρικών σημάτων που στέλνει ο ανθρώπινος εγκέφαλος εξαρτάται από την εκάστοτε κατάσταση στην οποία αυτός βρίσκεται. Στην περίπτωση που κάποιος θελήσει να κατηγοριοποιήσει τα παραπάνω σήματα πρέπει να καταφύγει στη χρησιμοποίηση της συχνοτικής ανάλυσής τους στο πεδίο του χρόνου. Ο μετασχηματισμός Hilbert καθώς και τα μεγέθη που απορρέουν από αυτόν βοηθά στην ανάλυση και μελέτη των υπό μελέτη σημάτων [2].

Στον εντοπισμό κοιτασμάτων πετρελαίου υπάρχει επίσης χρήση του μετασχηματισμού Hilbert. Σε αυτή την περίπτωση οι ερευνητές τοποθετούν στο μανδύα της γης έναν πομπό και ένα δέκτη σε απόσταση μεταξύ τους και στέλνουν μέσω του πομπού κάποια δεδομένα τα οποία εν συνεχεία συλλέγονται από το δέκτη. Μεταξύ πομπού και δέκτη παρεμβάλλονται κάποιοι σένσορες οι οποίοι πραγματοποιούν συγκεκριμένες μετρήσεις. Το πρόβλημα στην όλη διαδικασία έχει να κάνει με την απόσταση των παραπάνω τμημάτων που συνήθως έχει ως αποτέλεσμα

την παραμόρφωση λόγω θορύβου των σημάτων καθώς και με τις απώλειες ενέργειας τις οποίες παρουσιάζουν τα σήματα που τελικά φτάνουν στην επιφάνεια της γης. Για την αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων οι επιστήμονες χρησιμοποιούν μεθόδους αποθορυβοποίησης. Για αυτό ακριβώς το σκοπό σπουδαία χρησιμότητα παρουσιάζει ο μετασχηματισμός Hilbert διότι μέσω αυτού μπορεί να υπολογιστεί η στιγμιαία συχνότητα και να απαλειφθεί ο θόρυβος [3].

Στο πεδίο της οπτικής και συγκεκριμένα στην ολογραφία, όπου μελετώνται οι δονήσεις αντικειμένων μέσω της συμβολής δύο δεσμών laser, ο μετασχηματισμός Hilbert χρησιμοποιείται για την καλύτερη απεικόνιση των κροσσών που σχηματίζονται με τη συμβολή των δύο δεσμών. Μέσω του μετασχηματισμού οι κροσσοί συμβολής που αντιστοιχούν σε περιοχές του εξεταζόμενου αντικειμένου που ταλαντώνονται τονίζονται περισσότερο με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ποιότητα των εικόνων που λαμβάνονται. Η παραπάνω διαδικασία στηρίζεται στο γεγονός ότι ουσιαστικά ο μετασχηματισμός Hilbert ενός σήματος οδηγεί στη φασική του μετατόπιση αυτού του σήματος. Επεμβαίνοντας στις φάσεις των εικόνων που λαμβάνονται από τα πειράματα, οι ερευνητές είναι σε θέση να βελτιώνουν την ποιότητά τους και να οδηγούνται στην καλύτερη μελέτη τους [4].

Ακόμα, στηριζόμενοι στη στιγμιαία συχνότητα κάποιοι ερευνητές χρησιμοποιούν το μετασχηματισμό Hilbert για να εξετάσουν την εξέλιξη των αρμονικών μιας νότας ενός μουσικού οργάνου καθώς και το συσχετισμό αυτής της εξέλιξης με τον προσδιορισμό της συγκεκριμένης νότας από το ανθρώπινο αυτί. Για να το επιτύχουν αυτό είναι υποχρεωμένοι να αναλύσουν την κάθε νότα στη θεμέλιο συχνότητα και στους αρμονικούς της και να εξετάσουν ξεχωριστά κάθε ένα από τα σήματα που προκύπτουν από αυτή την ανάλυση. Μια ακόμη παράμετρος που μελετάνε είναι ο ρόλος που παίζουν τα χαρακτηριστικά κάθε αρμονικού (πλάτος, διάρκεια, συχνότητα) στη διαμόρφωση των αντίστοιχων χαρακτηριστικών της νότας και κατά συνέπεια στην αντίληψή της από το ανθρώπινο αυτί. Οι μεταβολές της συχνότητας της νότας λόγω των αρμονικών της πραγματοποιούνται με την υποβολή του κάθε εξεταζόμενου αρχικού σήματος στο μετασχηματισμό Hilbert [5].

Επίσης τυχούσες ρωγμές σε διάφορες μηχανές, όπως π.χ. σε κάποιον κινητήρα, γίνονται αντιληπτές με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Hilbert. Η διάγνωση τέτοιων προβλημάτων η οποία στηρίζεται στην ανάλυση των σημάτων που στέλνει η μηχανή βοηθά στον εντοπισμό συγκεκριμένων ατελειών. Για παράδειγμα, μία σχισμή στον άξονα του περιστροφικού μέρους μιας μηχανής επηρεάζει τις δονήσεις της

μηχανής και πιο συγκεκριμένα τον πρώτο, δεύτερο και τρίτο αρμονικό. Η μη γραμμικότητα στις δονήσεις τέτοιων μηχανών και η οποία συνηγορεί στην ύπαρξη ατελειών γίνεται αντιληπτή χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Hilbert. Με το μετασχηματισμό Hilbert εξετάζεται το συχνοτικό περιεχόμενο των δονήσεων και η επιμέρους μελέτη βοηθά στον εντοπισμό συγκεκριμένων προβλημάτων [6].

Ο μετασχηματισμός Hilbert βρίσκει ακόμα εφαρμογή στην εξέταση της γραμμικότητας της διάδοσης του ήχου δια μέσου του ανθρώπινου κρανίου. Η συγκεκριμένη εφαρμογή γίνεται με βάση τη συσχέτιση των σημάτων που εισέρχονται στο κρανίο με τα σήματα που εξέρχονται από αυτό. Με βάση το μετασχηματισμό Hilbert και κάποιων σχέσεων που το διέπουν γίνεται σύγκριση των παραπάνω σημάτων όσον αφορά το συχνοτικό τους περιεχόμενο και στη συνέχεια εξετάζεται η γραμμικότητα διάδοσης του ήχου δια μέσω του ανθρώπινου κρανίου [7].

Ο μετασχηματισμός Hilbert έχει εφαρμογές τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και σε αυτό της συχνότητας. Στηριζόμενοι σε αυτές τις εφαρμογές διάφοροι ερευνητές εξετάζουν με τη χρήση του συγκεκριμένου μετασχηματισμού τα συχνοτικά και τα χρονικά χαρακτηριστικά μη γραμμικών συστημάτων. Η απόκριση τέτοιων συστημάτων χρησιμοποιείται κατά κόρο για τον εντοπισμό ελαττωμάτων. Η μελέτη συγκεκριμένων μικρών κομματιών της απόκρισης είναι πάρα πολύ χρήσιμη στον εντοπισμό τέτοιων ελαττωμάτων. Σε αυτό το σημείο εισέρχεται η χρήση του μετασχηματισμού Hilbert ο οποίος έχει εφαρμογή σε πολύ μικρής διάρκειας σήματα με πάρα πολύ καλά και χρήσιμα αποτελέσματα [8].

Μια ακόμη εφαρμογή του μετασχηματισμού Hilbert βρίσκεται στη μελέτη των θαλάσσιων κυμάτων και στην ενέργεια που αυτά περικλείουν. Σε αυτό το πεδίο γίνονται στατιστικές αναλύσεις σχετικά με το ύψος των κυμάτων αυτών. Επειδή ο μετασχηματισμός Hilbert σχετίζεται με την εξέταση σημάτων με πολύ μικρή διάρκεια, βοηθά τους επιστήμονες στην εξέταση ενός συγκεκριμένου κύματος και όχι πολλών. Ένα μέγεθος πολύ χρήσιμο σε αυτές τις μελέτες είναι η περιβάλλουσα ενός σήματος και το οποίο μπορεί να εξαχθεί από τη χρήση του μετασχηματισμού Hilbert [9].

Χρήση του μετασχηματισμού βρίσκεται και σε εφαρμογές που έχουν να κάνουν με την ανάκτηση ενός σήματος από τις ανακλάσεις του. Η ανάκτηση ενός σήματος από ένα ανακλώμενο σήμα είναι σημαντική όχι μόνο για εφαρμογές που σχετίζονται με την επεξεργασία σημάτων ομιλίας για τη δημιουργία συστημάτων διάδοσης και ενίσχυσης της ομιλίας όπως για παράδειγμα στην κατασκευή ηχείων και συσκευών



βαρηκοΐας καθώς και για εφαρμογές που σχετίζονται με συστήματα αναγνώρισης της ομιλίας. Στην ανασύσταση ενός σήματος από ένα ανακλώμενο σπουδαίο ρόλο παίζει όπως είναι αναμενόμενο το συχνοτικό περιεχόμενο του ανακλώμενου σήματος. Πάνω σε αυτό το περιεχόμενο στηρίζεται η ανασύσταση του αρχικού σήματος. Ο μετασχηματισμός Hilbert χρησιμοποιείται για την εύρεση όλων των συχνοτήτων του ανακλώμενου σήματος. Η πιο σημαντική του όμως εφαρμογή του έχει να κάνει με τη χρονική πληροφορία που συνδέει την κάθε συχνότητα και η οποία συνδυαζόμενη με τη χρονική πληροφορία της ανάκλασης του σήματος οδηγεί στην πιο ακριβή ανασύσταση του αρχικού [10].

## Αναφορές Κεφαλαίου 1

[1]: Spiro Kouzoupis, *The Hilbert Transform in Signal Analysis*, Term Paper ACS 515, 1989

[2]: S. Blanco, C. E. D'Attellis, O. A. Rosso and R.O. Sirne, *Time-frequency analysis of electroencephalogram series. II. Gabor and wavelet transforms*, Phys. Rev. E, vol. 54, pp. 6661–6672, 1996

[3]: Jaideva C. Goswami, Albert E. Hoefel, *Algorithms for estimating instantaneous frequency*, Signal Process, vol. 84, pp. 1423–1427, 2004

[4]: W.O. Wong, K.T. Chan, *Quantitative vibration amplitude measurement with time-averaged digital speckle pattern interferometry*, Opt. Laser Technol., vol. 30, pp. 317–324, 1998

[5]: Akira Nashimura, Mitsumi Kato and Yoshinory Ando, *The relationship between the fluctuations of harmonics and the subjective quality of flute tone*, Acoust. Sci. & Tech., vol. 22, pp. 227-238, 2001

[6]: Michael Feldman, Susanne Seibold, *Damage Diagnosis of Rotors: Application of Hilbert Transform and Multihypothesis Testing*, J. Vib. Control, vol. 5, pp. 421-442, 1999

[7]: Bo Hakansson, Peder Carlsson, Anders Brandt and Stefan Stenfelt, *Linearity of sound transmission through the human skull in vivo*, J. Acoust. Soc. Am., vol.94, Pt. 1, pp. 2239-2243, 1996

[8]: S. Braun and M. Feldman, *Time-frequency characteristics of non-linear systems*, Mech. Syst. Signal Pr., vol. 11, pp. 421-442, 1999

[9]: A. Veltcheva, P. Cavaco, C. Guedes Soares, *Comparison of methods for calculation of the wave envelope*, Ocean Eng., vol. 30, pp. 937-948, 2003

[10]: Masashi Unoki, Masakazu Furukawa, Keigo Sakata and Massato Akagi, *An improved method based on the MTF concept for restoring the power envelope from a reverberant signal*, *Acoust. Sci. & Tech.*, vol. 25, pp. 232-242, 2004

## Κεφάλαιο 2: Μαθηματικές σχέσεις που διέπουν το μετασχηματισμό Hilbert

### 2.1 Μαθηματικές εκφράσεις του μετασχηματισμού Hilbert

Ο μετασχηματισμός Hilbert μπορεί να εκφραστεί με τρεις τρόπους:

1<sup>ος</sup> τρόπος: Προσδιορισμός του μετασχηματισμού μέσω ολοκληρώματος συνέλιξης

Αρχικά θα παραθέσουμε τις μαθηματικές εκφράσεις του θεωρήματος της συνέλιξης,

$$\alpha(t) * \beta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) \beta(t - \tau) d\tau \quad (2.1.1)$$

$$\alpha(t) * \beta(t) \Leftrightarrow A(f) \cdot B(f) \quad (2.1.2)$$

$$\alpha(t) \cdot \beta(t) \Leftrightarrow A(f) * B(f) \quad (2.1.3)$$

όπου το σύμβολο ‘ $\Leftrightarrow$ ’ υποδηλώνει μετασχηματισμό Fourier και το ‘ $*$ ’ συνέλιξη. Επίσης  $\alpha(t) \Leftrightarrow A(f)$  και  $\beta(t) \Leftrightarrow B(f)$ .

Ο μετασχηματισμός Hilbert μιας πραγματικής συνάρτησης  $x(t)$ , η οποία ορίζεται στο πεδίο τιμών  $-\infty < t < \infty$ , είναι μια επίσης πραγματική συνάρτηση  $\tilde{x}(t)$ , η οποία περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$\tilde{x}(t) = H[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(u)}{\pi(t-u)} du \quad (2.1.4)$$

Η σχέση (2.1.4) αποτελεί τη βασική μαθηματική έκφραση του μετασχηματισμού Hilbert.

Συμπερασματικά καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση  $\tilde{x}(t)$  είναι η συνέλιξη της συνάρτησης  $x(t)$  και της συνάρτησης  $(1/\pi t)$ , το οποίο γράφεται ως:

$$\tilde{x}(t) = x(t) * (1/\pi t) \quad (2.1.5)$$

Όπως και ο μετασχηματισμός Fourier έτσι και ο μετασχηματισμός Hilbert είναι γραμμικός τελεστής, οπότε ισχύει:

$$H[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 H[x_1(t)] + \alpha_2 H[x_2(t)] \quad (2.1.6)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιεσδήποτε σταθερές  $\alpha_1, \alpha_2$  και για οποιεσδήποτε συναρτήσεις  $x_1(t), x_2(t)$  [1].

2<sup>ος</sup> τρόπος: Παραλλαγή του προηγούμενου

Εάν στη σχέση (2.1.1) αντικαταστήσουμε τους όρους  $t$  και  $u$  με  $\tan \frac{\phi}{2}$  και  $\tan \frac{\psi}{2}$  αντίστοιχα και δηλώσουμε ότι  $x(t) = x\left(\tan \frac{\phi}{2}\right) = x_0(\phi)$ , τότε με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων η σχέση μετατρέπεται στο άθροισμα δύο όρων:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_0(\psi) \tan \frac{\psi}{2} d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_0(\psi) \cot\left(\frac{\psi - \phi}{2}\right) d\psi \quad (2.1.7)$$

Η σχέση (2.1.7) δηλώνει ότι επειδή ο πρώτος όρος είναι σταθερός, ο πραγματικός μετασχηματισμός Hilbert διαφέρει από το δεύτερο όρο κατά μία σταθερά. Επίσης παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει τη συνεφαπτομένη είναι στη μορφή συνέλιξης. Αυτό το γεγονός κάνει όλες τις απότομες μεταβολές που εμφανίζονται στο υπό εξέταση αρχικό σήμα, μετά το μετασχηματισμό, να αντιστοιχούν σε μεγάλες κορυφές [2].

3<sup>ος</sup> τρόπος: Προσδιορισμός ως σύστημα μετατόπισης της φάσης κατά  $\pi/2$

Ο συγκεκριμένος προσδιορισμός εφαρμόζεται στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος. Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση  $\tilde{X}(f)$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $\tilde{x}(t)$ , η παρακάτω σχέση περιγράφει τον τρόπο που συνδέονται οι δύο παραπάνω συναρτήσεις:

$$\tilde{X}(f) = F[\tilde{x}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.1.8)$$

Από τη σχέση (2.1.5) παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $\tilde{X}(f)$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $x(t)$  πολλαπλασιασμένος με το μετασχηματισμό Fourier της  $(1/\pi t)$ , ο οποίος δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$F[1/\pi t] = -j \operatorname{sgn} f = \begin{cases} -j & \text{για } f > 0 \\ j & \text{για } f < 0 \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Στο σημείο όπου ισχύει  $f=0$ , η συνάρτηση  $\operatorname{sgn} f$  έχει κι αυτή μηδενική τιμή. Από αυτό συνεπάγεται ότι η σχέση (2.1.5) είναι ισοδύναμη με το πέρασμα της συνάρτησης  $x(t)$  από ένα σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι η  $(-j \operatorname{sgn} f)$  ούτως ώστε να δώσει:

$$\tilde{X}(f) = (-j \operatorname{sgn} f) X(f) \quad (2.1.10)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η μιγαδική ποσότητα  $\tilde{X}(f)$  δεν είναι ο μετασχηματισμός Hilbert της επίσης μιγαδικής ποσότητας  $X(f)$ . Η σχέση της με τη συνάρτηση  $\tilde{x}(t)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(f) e^{j2\pi f t} df \quad (2.1.11)$$

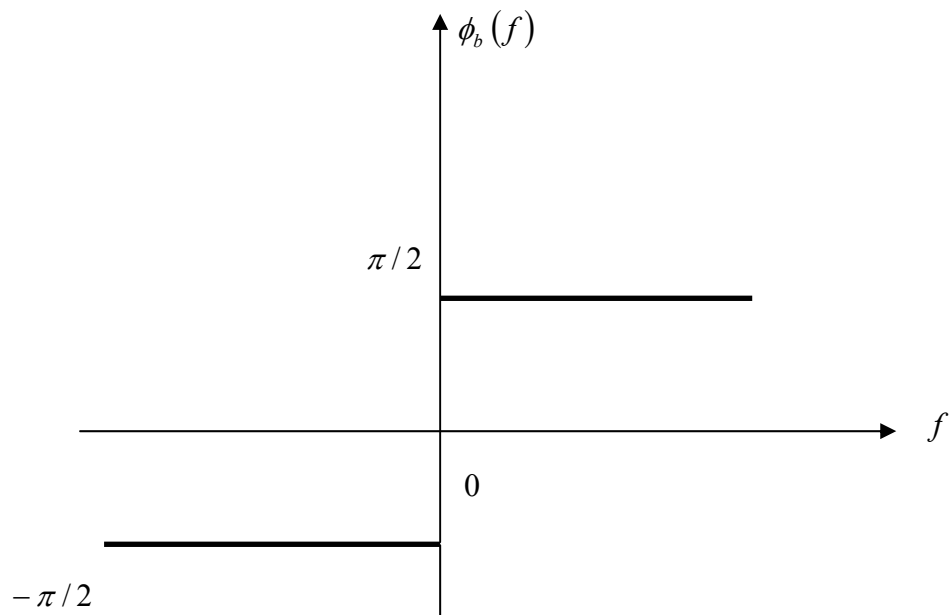
Με άλλα λόγια, η  $\tilde{x}(t)$  είναι το αποτέλεσμα του ανάστροφου μετασχηματισμού Fourier της  $\tilde{X}(f)$ .

Ο μετασχηματισμός Fourier της  $(-j \operatorname{sgn} f)$  μπορεί να αναπαρασταθεί από την:

$$B(f) = -j \operatorname{sgn} f = \begin{cases} e^{-j(\pi/2)} & f > 0 \\ e^{j(\pi/2)} & f < 0 \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Με  $B(0)=0$ . Επίσης:

$$B(f) = |B(f)| e^{j\phi_b(f)} \quad (2.1.13)$$



Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η συνάρτηση  $B(f)$  είναι ένα σύστημα μετατόπισης της φάσης κατά  $(\pi/2)$ , όπου:

$$|B(f)| = 1 \text{ για κάθε } f \neq 0 \quad (2.1.14)$$

$$\phi_b = \begin{cases} \pi/2 & \text{για } f > 0 \\ -\pi/2 & \text{για } f < 0 \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Εάν γράψουμε,

$$X(f) = |X(f)| e^{-j\phi_x(f)} \quad (2.1.16)$$

ακολουθώς μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\tilde{X}(f) = \tilde{X}(f) e^{-j\tilde{\phi}_x(f)} = |X(f)| e^{-j[\phi_x(f) + \phi_b(f)]} \quad (2.1.17)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο μετασχηματισμός Hilbert αποτελείται από το πέρασμα του αρχικού σήματος  $x(t)$  μέσω ενός συστήματος το οποίο αφήνει το πλάτος του σήματος  $X(f)$  ανεπηρέαστο, αλλά αλλάζει τη φάση του από  $\phi_x(f)$  σε  $\phi_x(f) + \phi_b(f)$  χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση  $\phi_b(f)$  που περιγράφεται από τη σχέση (2.1.15) και με βάση τις παρακάτω σχέσεις:

$$\phi_x(f) \rightarrow \phi_x(f) + (\pi/2) \quad \text{για } f > 0 \quad (2.1.18)$$

$$\phi_x(f) \rightarrow \phi_x(f) - (\pi/2) \quad \text{για } f < 0$$

Η σχέση (2.1.18) μας δείχνει ότι το προαναφερθέν σύστημα μετατοπίζει τη φάση του σήματος  $X(f)$  κατά  $(\pi/2)$  για θετικές συχνότητες και κατά  $(-\pi/2)$  για αρνητικές συχνότητες [1].

4<sup>ος</sup> τρόπος: Προσδιορισμός ως το φανταστικό μέρος ενός αναλυτικού σήματος

Ένας άλλος χρήσιμος τρόπος για να περιγράψουμε και να κατανοήσουμε το μετασχηματισμό Hilbert  $\tilde{x}(t)$  του σήματος  $x(t)$  είναι μέσω του αναλυτικού σήματος  $z(t)$ , το οποίο συνδέεται με το αρχικό σήμα  $x(t)$  μέσω της σχέσης:

$$z(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) \quad (2.1.19)$$

Επίσης μπορεί να γραφεί ότι,

$$z(t) = A(t)e^{j\theta(t)} \quad (2.1.20)$$

όπου το σήμα  $A(t)$  ονομάζεται σήμα περιβάλλουσας του  $x(t)$  και η συνάρτηση  $\theta(t)$  ονομάζεται στιγμιαία φάση του σήματος  $x(t)$ . Κάνοντας χρήση των  $x(t)$  και  $\tilde{x}(t)$  και χρησιμοποιώντας τη θεωρία της μιγαδικής ανάλυσης είναι φανερό ότι,

$$A(t) = [x^2(t) + \tilde{x}^2(t)]^{1/2} \quad (2.1.21)$$

και ότι:



$$\theta(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{\tilde{x}(t)}{x(t)} \right] = 2\pi f_0 t \quad (2.1.22)$$

Με βάση τη σχέση (2.1.22) ορίζεται μια καινούρια συνάρτηση που ονομάζεται στιγμιαία συχνότητα και υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$f_i(t) = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2.1.23)$$

Είναι φανερό ότι η στιγμιαία συχνότητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της φάσης [1]. Το ακόλουθο παράδειγμα βοηθά στην αποσαφήνιση των παραπάνω όρων.

Έστω ότι έχουμε το αρχικό σήμα  $\alpha(t) = \cos 2\pi f_0 t$ . Με βάση τα όσα έχουν περιγραφεί ήδη στον τρίτο προσδιορισμό του μετασχηματισμού Hilbert έχουμε:

$$\tilde{\alpha}(t) = \sin 2\pi f_0 t$$

$$|A(t)| = 1$$

$$\theta(t) = 2\pi f_0 t$$

$$f_i(t) = f_0$$

Στηριζόμενοι σε αυτά τα αποτελέσματα μπορούμε να πούμε ότι το αναλυτικό σήμα έχει ελικοειδή μορφή η οποία περιστρέφεται ομοιόμορφα γύρω από τον άξονα του χρόνου. Το πραγματικό μέρος του αναλυτικού σήματος είναι ένα συνημίτονο, το φανταστικό μέρος είναι ένα ημίτονο και το γράφημα Nyquist (η προβολή των σημάτων στο επίπεδο που σχηματίζεται από τον άξονα των πραγματικών – φανταστικών τιμών με τον άξονα του χρόνου) είναι ένας κύκλος. Το πλάτος του είναι σταθερό και η φάση του είναι μια γραμμική συνάρτηση του χρόνου, η οποία αυξάνεται κατά  $2\pi$  ανά περίοδο, δηλαδή έχει μια σταθερή κλίση που αντιστοιχεί στη στιγμιαία (αλλά σταθερή) συχνότητα  $f_0$  [2].

Εάν  $Z(f)$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier του  $z(t)$ , τότε:

$$Z(f) = F[z(t)] = F[x(t) + j\tilde{x}(t)] = F[x(t)] + jF[\tilde{x}(t)] = X(f) + j\tilde{X}(f) \quad (2.1.24)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του  $Z(f)$  δίνει,

$$z(t) = F^{-1}[Z(f)] = x(t) + j\tilde{x}(t) \quad (2.1.25)$$

όπου:

$$\tilde{x}(t) = H[x(t)] = \text{Im}[z(t)] \quad (2.1.26)$$

## 2.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Hilbert

Αφού αναφερθήκαμε στις μαθηματικές εκφράσεις του μετασχηματισμού Hilbert στην προηγούμενη ενότητα, θα παραθέσουμε κάποιες ιδιότητες που διέπουν το συγκεκριμένο μετασχηματισμό. Θα δηλώσουμε  $\tilde{x}(t) = H[x(t)]$  και  $\tilde{y}(t) = H[y(t)]$  τους μετασχηματισμούς Hilbert των σημάτων  $x(t)$  και  $y(t)$  και τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Fourier ως  $X(f)$  και  $Y(f)$ .

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Hilbert είναι οι ακόλουθες:

### α) Ιδιότητα της γραμμικότητας

$$H[ax(t) + by(t)] = a\tilde{x}(t) + b\tilde{y}(t) \quad (2.2.1)$$

Η σχέση (2.2.1) ισχύει για όλες τις συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  και για όλες τις μεταβλητές  $a$ ,  $b$ .

### β) Ιδιότητα της μετατόπισης

$$H[x(t - a)] = \tilde{x}(t - a) \quad (2.2.2)$$

γ) Μετασχηματισμός Hilbert του μετασχηματισμού Hilbert

$$H[\tilde{x}(t)] = -x(t) \quad (2.2.3)$$

Μεταφράζοντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να πούμε ότι δύο διαδοχικοί μετασχηματισμοί Hilbert του ίδιου σήματος μας δίνουν το αντίθετο του αρχικού.

δ) Αντίστροφος μετασχηματισμός Hilbert

$$x(t) = H^{-1}[x(t)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(u)}{\pi(t-u)} du \quad (2.2.4)$$

Συμπερασματικά η συνάρτηση  $x(t)$  είναι η συνέλιξη της συνάρτησης  $\tilde{x}(t)$  με τον όρο  $(-1/\pi t)$ . Εναλλακτικά η  $x(t)$  μπορεί να οριστεί και από τη σχέση,

$$x(t) = F^{-1}[(j \operatorname{sgn} f) \tilde{X}(f)] \quad (2.2.5)$$

όπου

$$\tilde{X}(f) = F[\tilde{x}(t)] \quad (2.2.6)$$

ε) Ιδιότητες άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Εάν η  $x(t)$  είναι άρτια (περιττή) συνάρτηση του  $t$ , τότε η  $\tilde{x}(t)$  είναι περιττή (άρτια) συνάρτηση του  $t$ .

$$x(t) \text{ άρτια} \leftrightarrow \tilde{x}(t) \text{ περιττή} \quad (2.2.7)$$

$$x(t) \text{ περιττή} \leftrightarrow \tilde{x}(t) \text{ άρτια}$$

στ) Ιδιότητα της ομοιότητας

$$H[x(at)] = \tilde{x}(at) \quad (2.2.8)$$

όπου  $a$  μία σταθερά.

ζ) Ιδιότητα της ενέργειας

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}^2(t) dt \quad (2.2.9)$$

Η σχέση (2.2.9) δηλώνει ότι το αρχικό σήμα και το σήμα που προκύπτει από το μετασχηματισμό Hilbert περιέχουν το ίδιο ποσό ενέργειας.

Η παραπάνω ιδιότητα ακολουθεί το θεώρημα του Parseval κατά το οποίο ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.2.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{X}(f)|^2 df$$

καθώς και το γεγονός ότι:

$$|\tilde{X}(f)|^2 = |X(f)|^2 \quad (2.2.11)$$

η) Ιδιότητα της ορθογωνιότητας

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \tilde{x}(t) dt = 0 \quad (2.2.12)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει από το θεώρημα του Parseval, αφού ισχύει,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \tilde{x}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \tilde{X}(f) df \quad (2.2.13)$$

και από το γεγονός ότι η συνάρτηση,

$$X^*(f) \tilde{X}(f) = (-j \operatorname{sgn} f) |X(f)|^2 \quad (2.2.14)$$

είναι μια περιττή συνάρτηση της μεταβλητής  $f$  οπότε το δεξιό μέλος της σχέσης (2.2.14) είναι μηδέν.

#### θ) Ιδιότητα της διαμόρφωσης

$$H[x(t) \cos 2\pi f_0 t] = x(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (2.2.15)$$

Η σχέση (2.2.15) ισχύει στην περίπτωση που η συνάρτηση  $x(t)$  αντιστοιχεί σε ένα σήμα του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier  $X(f)$  είναι μια φραγμένη συνάρτηση, όταν ισχύει δηλαδή,

$$X(f) = \begin{cases} X(f) & \text{για } |f| \leq F \\ 0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (2.2.16)$$

δεδομένου ότι η συχνότητα  $f_0$  έχει τέτοια τιμή ώστε να ισχύει:  $f_0 > F$ . Επίσης:

$$H[x(t) \sin 2\pi f_0 t] = -x(t) \cos 2\pi f_0 t \quad (2.2.17)$$

#### ι) Ιδιότητα της συνέλιξης

$$H[x(t) * y(t)] = \tilde{x}(t) * y(t) = x(t) * \tilde{y}(t) \quad (2.2.18)$$

Η παραπάνω σχέση απορρέει από το γεγονός ότι,

$$F[x(t) * y(t)] = X(f)Y(f) \quad (2.2.19)$$

και στο ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} [(-j \operatorname{sgn} f)X(f)Y(f)] &= \tilde{X}(f)Y(f) = X(f)[(-j \operatorname{sgn} f)Y(f)] \\ &= X(f)\tilde{Y}(f) \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

ια) Έλλειψη Μεταθετικότητας

$$F\{H[x(t)]\} \neq H\{F[x(t)]\} \quad (2.2.21)$$

Με λόγια, ο μετασχηματισμός Hilbert και ο μετασχηματισμός Fourier δεν αντιμετατίθενται [1].

## **Αναφορές Κεφαλαίου 2**

[1]: Julius S. Bendat and Allan G. Piersol (1999), *Random Data: Analysis and Measurements Procedures* (John Wiley and Sons Ltd.)

[2]: Spiro Kouzoupis, *The Hilbert Transform in Signal Analysis*, Term Paper ACS 515, 1989

## Κεφάλαιο 3: Ζευγάρια μετασχηματισμών Hilbert

### 3.1: Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Hilbert (ΔΜΗ)

Θα εξηγηθεί ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΔΜF) μιας ακολουθίας και εν συνεχεία θα οριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Hilbert για την ίδια ακολουθία.

Έστω  $x_i$  με  $i = 0, 1, \dots, N-1$  μια ακολουθία  $N$  μιγαδικών πεπερασμένων αριθμών. Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier αυτής της ακολουθίας είναι μια ακολουθία  $X_\kappa$ ,  $\kappa = 0, 1, \dots, N-1$  που ορίζεται ως εξής [1]:

$$X_\kappa = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j i \kappa 2\pi / N} \quad (3.1.1)$$

Για τον αντίστροφο ΔΜF η ακολουθία  $x_i$  ορίζεται από τη σχέση:

$$x_i = \sum_{\kappa=0}^{N-1} X_\kappa e^{j i 2\pi \kappa / N} \quad (3.1.2)$$

Άρα έχουμε  $x_i \Leftrightarrow X_\kappa$ , όπου το ' $\Leftrightarrow$ ' δηλώνει ΔΜF.

Η σχέση,

$$F[\tilde{x}(t)] = X(f)(-j \operatorname{sgn} f) \quad (3.1.3)$$

μας δίνει το μετασχηματισμό Fourier ενός σήματος το οποίο έχει υποστεί ήδη ένα μετασχηματισμό Hilbert.

Με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω, εισάγουμε το διακριτό μετασχηματισμό Hilbert της ακολουθίας  $a_i$  ως τον αντίστροφο ΔΜF της ακολουθίας  $G_\kappa$

$$G_\kappa = A_\kappa \cdot H_\kappa \quad (3.1.4)$$



όπου η ακολουθία  $H_\kappa$  ορίζεται ως εξής:

$$H_\kappa = \begin{cases} -j, & \kappa = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ 0, & \kappa = 0, \frac{N}{2} \\ +j, & \kappa = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Η ακολουθία  $H_\kappa$  μπορεί να ερμηνευθεί ως η διακριτή αναπαράσταση της συνάρτησης  $-j \operatorname{sgn}(f)$ . Οι ιδιότητές της για τις τιμές  $\kappa=0$  και  $\kappa=\frac{N}{2}$  απορρέουν από τις γενικές ιδιότητες του ΔΜΦ για πραγματικές συναρτήσεις. Δηλαδή:

$$X_N = X_0 \quad (3.1.6)$$

$$X_\kappa = X_{-\kappa} = X_{N-\kappa} \quad (3.1.7)$$

Μετά από κάποιες μετατροπές των σειρών καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις για τη  $g_i$ , η οποία είναι ο μετασχηματισμός Hilbert της  $\alpha_i$  [2]:

$$g_i = \frac{2}{N} \sum_{u=0,2,4,\dots} \alpha_u \cot\left(i-u\right) \frac{\pi}{N} \quad \text{για } i \text{ περιττό} \quad (3.1.8)$$

και

$$g_i = \frac{2}{N} \sum_{u=1,3,5,\dots} \alpha_u \cot\left(i-u\right) \frac{\pi}{N} \quad \text{για } i \text{ άρτιο} \quad (3.1.9)$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι η διαδικασία που συνίσταται από ΔΜΦ, πολλαπλασιασμό και αντίστροφο ΔΜΦ αντιστοιχεί στην απλή έκφραση της διακριτής συνέλιξης. Αυτή η απλή έκφραση μπορεί να εκφραστεί με πολλούς τρόπους (π.χ. ως πολλαπλασιασμός πινάκων) [3].

### **3.2: Ο μετασχηματισμός Hilbert μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων**

Η παρούσα παράγραφος θα στηριχθεί σε όσα αναφέρθηκαν στο διακριτό μετασχηματισμό Hilbert και ιδιαίτερα στις σχέσεις (3.1.8) και (3.1.9).

Εάν  $\bar{g}$  είναι ο μετασχηματισμός Hilbert της ακολουθίας  $\bar{a}$ , τότε η εξίσωση που δίνει το ΔΜΗ της ακολουθίας  $\bar{a}$  σε μορφή πίνακα είναι:

$$\bar{g} = \bar{c} \cdot \bar{a} \quad (3.2.1)$$

Πριν δώσουμε τη σχέση που καθορίζει τις τιμές για τα στοιχεία του πίνακα – συντελεστή ( $\bar{c}$ ) πρέπει να παραθέσουμε κάποιες ιδιότητες, οι οποίες ισχύουν για το συγκεκριμένο πίνακα:

1<sup>η</sup> ιδιότητα: Τα στοιχεία του πίνακα – συντελεστή ( $\bar{c}$ ) είναι απόλυτα εξαρτώμενα από τα δείγματα  $N$  της ακολουθίας  $\bar{g}$ . Τα στοιχεία  $c_{u,i}$  του πίνακα  $\bar{c}$  εξαρτώνται από τη διαφορά  $u - i$ . Επίσης τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι 0, επειδή γι' αυτά τα στοιχεία ισχύει  $u = i$ , όπως θα γίνει φανερό από την έκφραση των στοιχείων του  $\bar{c}$ .

2<sup>η</sup> ιδιότητα: Ο πίνακας  $\bar{c}$  έχει αντίθετη συμμετρία ως προς την κύρια διαγώνιο, δηλαδή ισχύει:

$$c_{u,i} = -c_{i,u} \quad (3.2.2)$$

3<sup>η</sup> ιδιότητα: Κάθε γραμμή (στήλη) του  $\bar{c}$  περιέχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με την προηγούμενη σειρά (στήλη) και κάθε γραμμή (στήλη) σχηματίζεται μετατοπίζοντας κάθε στοιχείο της προηγούμενης σειράς (στήλης) κατά μία θέση προς τα δεξιά, με το τελευταίο στοιχείο της προηγούμενης σειράς (στήλης) να μετατοπίζεται στη θέση του πρώτου στοιχείου της σειράς (στήλης) που σχηματίζεται. Τα παραπάνω γράφονται με τη βοήθεια σχέσης ως εξής,

$$c_{u,i} = c_{u+1, i+1} \quad (3.2.3)$$

επίσης,

$$c_{0,i} = -c_{0,N-1} \quad (3.2.4)$$

Υπάρχουν επίσης κι άλλες ιδιότητες που έχουν να κάνουν με το αν το  $N$  είναι άρτιο ή περιττό [3].

Θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση όπου το  $N$  είναι άρτιο, όπου  $N$  είναι το πλήθος των δειγμάτων του σήματος. Πρέπει να σημειωθεί ότι σε αυτή την περίπτωση χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο  $\frac{N}{2}+1$  ξεχωριστά στοιχεία καθώς το  $\frac{N}{2}$  είναι άρτιο. Τα βήματα (ο αλγόριθμος) που ακολουθούνται για τη δημιουργία του πίνακα – συντελεστή ( $\bar{c}$ ) περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω:

1α) Βάζουμε 0 στην πρώτη γραμμή στις θέσεις  $c_{0,i}$  για  $i$  άρτιο, π.χ.  $c_{0,0}=0$ ,  $c_{0,2}=0$ ,  $c_{0,4}=0$ . Πρέπει να σημειωθεί ότι το τελευταίο στοιχείο της πρώτης σειράς που ισούται με 0 είναι το  $c_{0,N-2}$  και όχι το  $c_{0,N}$ .

β) Εάν το πηλίκο  $\frac{N}{2}$  είναι άρτιο, βάζουμε 0 και το στοιχείο στη θέση  $c_{0,\frac{N}{2}+1}$ .

2α) Εάν το πηλίκο  $\frac{N}{2}$  είναι άρτιο, βρίσκουμε τα πρώτα  $\frac{N}{4}$  μη μηδενικά στοιχεία της πρώτης γραμμής βάσει της σχέσης:

$$c_{u,i} = \frac{2}{N} \cot(i-u) \frac{\pi}{N} \quad (3.2.5)$$

β) Εάν το πηλίκο  $\frac{N}{2}$  είναι περιττό βρίσκουμε τα πρώτα  $\frac{N-2}{4}$  μη μηδενικά στοιχεία της πρώτης γραμμής πάλι από τη σχέση (3.2.5)

3) Τα υπόλοιπα μη μηδενικά στοιχεία της πρώτης γραμμής είναι τα αρνητικά από αυτά που υπολογίστηκαν στο βήμα 2 βάσει της σχέσης:

$$c_{0,i \bmod N} = -c_{0,(N-i) \bmod N} \quad (3.2.6)$$

4) Κάθε επόμενη γραμμή προκύπτει από την προηγούμενη με μία κυκλική ολίσθηση προς τα δεξιά κατά μία θέση.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) και (3.2.6) θα παραθέσουμε τη μορφή ενός τέτοιου πίνακα και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις τιμές των στοιχείων του για  $N = 10$ . Σημειώνουμε ότι το πρώτο στοιχείο του πίνακα είναι το  $c_{0,0}$ . Σύμφωνα λοιπόν με τα βήματα 1α) και 1β) θέτουμε:

$$c_{0,0} = c_{0,2} = c_{0,4} = c_{0,5} = c_{0,6} = c_{0,8} = 0 \quad (3.2.7)$$

Αφού το πηλίκο  $\frac{N}{2}$  είναι περιττό (=5) υπολογίζουμε τα  $\frac{N-2}{4} = 2$  πρώτα μη μηδενικά στοιχεία της πρώτης γραμμής από τη σχέση (3.2.5), δηλαδή,

$$c_{0,1} = \frac{2}{10} \cot(1-0) \frac{\pi}{10} = 0.6155 \quad (3.2.8)$$

και

$$c_{0,3} = \frac{2}{10} \cot(3-0) \frac{\pi}{10} = 0.1453 \quad (3.2.9)$$

Τα υπόλοιπα μη μηδενικά στοιχεία υπολογίζονται με βάση τη σχέση (3.2.6). Άρα έχουμε:

$$c_{0,10} = -0.6155 \quad \text{και} \quad c_{0,7} = -0.1453 \quad (3.2.10)$$

Το βήμα 4 μας βοηθά να συμπληρώσουμε τα στοιχεία των υπόλοιπων γραμμών του πίνακα συντελεστή.

Η γενική μορφή του πίνακα θα είναι η:

0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$C_{0,7}$	0	$C_{0,9}$
$C_{0,9}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$C_{0,7}$	0
0	$C_{0,9}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$C_{0,7}$
$C_{0,7}$	0	$C_{0,9}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0
0	$C_{0,7}$	0	$C_{0,9}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$
$C_{0,5}$	0	$C_{0,7}$	0	$C_{0,9}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0
0	$C_{0,5}$	0	$C_{0,7}$	0	$C_{0,9}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$
$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$C_{0,7}$	0	$C_{0,9}$	0	$C_{0,1}$	0
0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$C_{0,7}$	0	$C_{0,9}$	0	$C_{0,1}$
$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$C_{0,7}$	0	$C_{0,9}$	0

Πίνακας 3.2.1: Η γενική μορφή του πίνακα-συντελεστή

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.2), (3.2.3) και (3.2.4) παραθέτουμε τον ακόλουθο πίνακα όπου φαίνονται οι σχέσεις των στοιχείων από τα οποία αποτελείται:

0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$-C_{0,3}$	0	$-C_{0,1}$
$-C_{0,1}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$-C_{0,3}$	0
0	$-C_{0,1}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$-C_{0,3}$
$-C_{0,3}$	0	$-C_{0,1}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0
0	$-C_{0,3}$	0	$-C_{0,1}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$
$C_{0,5}$	0	$-C_{0,3}$	0	$-C_{0,1}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0
0	$C_{0,5}$	0	$-C_{0,3}$	0	$-C_{0,1}$	0	$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$
$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$-C_{0,3}$	0	$-C_{0,1}$	0	$C_{0,1}$	0
0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$-C_{0,3}$	0	$-C_{0,1}$	0	$C_{0,1}$
$C_{0,1}$	0	$C_{0,3}$	0	$C_{0,5}$	0	$-C_{0,3}$	0	$-C_{0,1}$	0

Πίνακας 3.2.2: Ο πίνακας-συντελεστής σε απλοποιημένη μορφή

Όπως είναι εύκολο να παρατηρηθεί, οι πράξεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα-συντελεστή περιορίζονται μόνο σε αυτές που αφορούν τα στοιχεία  $C_{0,1}$   $C_{0,3}$   $C_{0,5}$

Τα υπόλοιπα στοιχεία της πρώτης γραμμής προκύπτουν από τη χρησιμοποίηση των αντίθετων τιμών των προαναφερθέντων στοιχείων. Επίσης οι υπόλοιπες γραμμές προκύπτουν από μία ολίσθηση της πρώτης γραμμής κατά μία θέση προς τα δεξιά με το πρώτο στοιχείο κάθε νέας γραμμής να είναι το τελευταίο στοιχείο της προηγούμενης.

Θα παραθέσουμε και τον πίνακα συντελεστή στην πλήρη μορφή του, με τα στοιχεία του να είναι αυτά που προέκυψαν από τις πράξεις (3.2.7), (3.2.8), (3.2.9) και (3.2.10):

0	0.6155	0	0.1453	0	0	0	-0.1453	0	-0.6155
-0.6155	0	0.6155	0	0.1453	0	0	0	-0.1453	0
0	-0.6155	0	0.6155	0	0.1453	0	0	0	-0.1453
-0.1453	0	-0.6155	0	0.6155	0	0.1453	0	0	0
0	-0.1453	0	-0.6155	0	0.6155	0	0.1453	0	0
0	0	-0.1453	0	-0.6155	0	0.6155	0	0.1453	0
0	0	0	-0.1453	0	-0.6155	0	0.6155	0	0.1453
0.1453	0	0	0	-0.1453	0	-0.6155	0	0.6155	0
0	0.1453	0	0	0	-0.1453	0	-0.6155	0	0.6155
0.6155	0	0.1453	0	0	0	-0.1453	0	-0.6155	0

Πίνακας 3.2.3: Ο πίνακας-συντελεστής για  $N = 10$

Το πρόγραμμα Matlab στηρίζει όλες του τις λειτουργίες σε πράξεις πινάκων. Για παράδειγμα για κάθε μεταβλητή που του ορίζει ο εκάστοτε προγραμματιστής, το πρόγραμμα δημιουργεί έναν μονοδιάστατο πίνακα που αντιστοιχεί στη μεταβλητή αυτή.

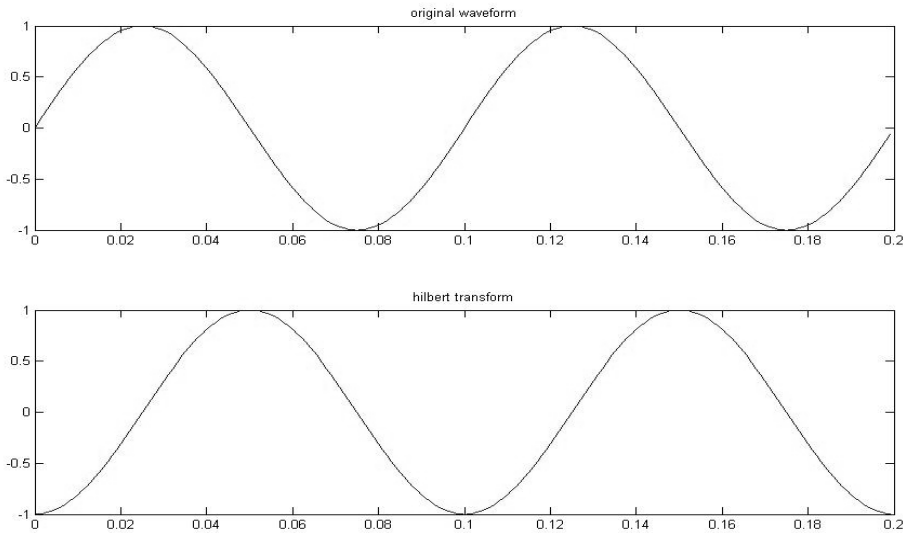
Συνδέοντας τα παραπάνω με τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Hilbert με τη χρήση πινάκων υλοποιήσαμε στο Matlab τον αλγόριθμο ο οποίος κατασκευάζει τον πίνακα – συντελεστή του διακριτού μετασχηματισμού Hilbert για κάθε τιμή του  $N$  που ο χρήστης κάθε φορά του ορίζει. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι ο πίνακας δημιουργείται μόνο για άρτιες τιμές του  $N$  για την εξοικονόμηση χώρου στην εργασία. Η πλήρης δομή αυτού του αλγόριθμου βρίσκεται στο αρχείο hil.m που υπάρχει στο cd που παρατίθεται μαζί με την παρούσα πτυχιακή εργασία.

### **3.3 Παραδείγματα μετασχηματισμών**

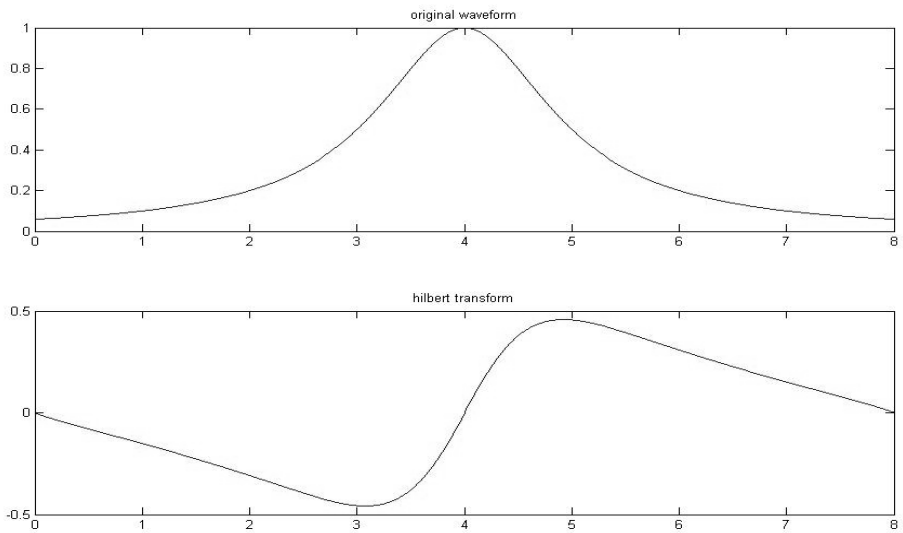
Θα χρησιμοποιήσουμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Hilbert διακριτών σημάτων. Τα σήματα αυτά είναι τα ακόλουθα:

$$\alpha) \sin 2\pi f_0 t, \quad \beta) \frac{1}{1+t^2} \quad \text{και} \quad \gamma) e^{-e|t|} \cos 2\pi f_0 t$$

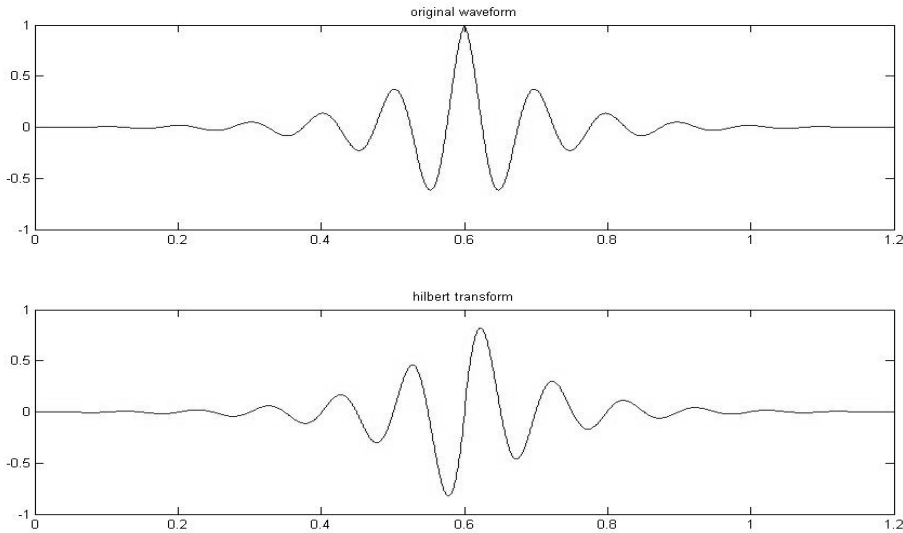
Ακολουθούν τα σχήματα που περιέχουν τα ζευγάρια των μετασχηματισμών Hilbert που αντιστοιχούν στα σήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω.



Σχήμα 3.3.1α: Το σήμα  $\sin 2\pi f_0 t$  (πάνω) και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Hilbert (κάτω) που προέκυψε μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων.



Σχήμα 3.3.1β: Το σήμα  $\frac{1}{1+t^2}$  (πάνω) και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Hilbert (κάτω) που προέκυψε μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων.



Σχήμα 3.3.1γ: Το σήμα  $\frac{1}{1+t^2}$  (πάνω) και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Hilbert (κάτω) που προέκυψε μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων.

Ο μετασχηματισμός Hilbert ενός σήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί και με τη χρήση της υπάρχουσας εντολής του MATLAB που είναι σχεδιασμένη για το σκοπό αυτό. Η λειτουργία της στηρίζεται στην ακόλουθη θεωρία.

Εάν τα σήματα  $X(f)$ ,  $\tilde{X}(f)$  και  $Z(f)$  είναι οι μετασχηματισμοί Fourier των σημάτων  $x(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$  και  $z(t)$  αντίστοιχα, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\tilde{X}(f) = \begin{cases} -jX(f) & \text{για } f > 0 \\ 0 & \text{για } f = 0 \\ jX(f) & \text{για } f < 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

και ακολούθως:

$$Z(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{για } f > 0 \\ X(f) & \text{για } f = 0 \\ 0 & \text{για } f < 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Η σύνταξή της είναι η εξής:

$$y = \text{hilbert}(x)$$

όπου  $x$  το σήμα εισόδου και  $y$  το σήμα εξόδου. Ο αλγόριθμος της συγκεκριμένης εντολής περιλαμβάνει την εφαρμογή ενός FFT στο σήμα εισόδου και εν συνεχεία την

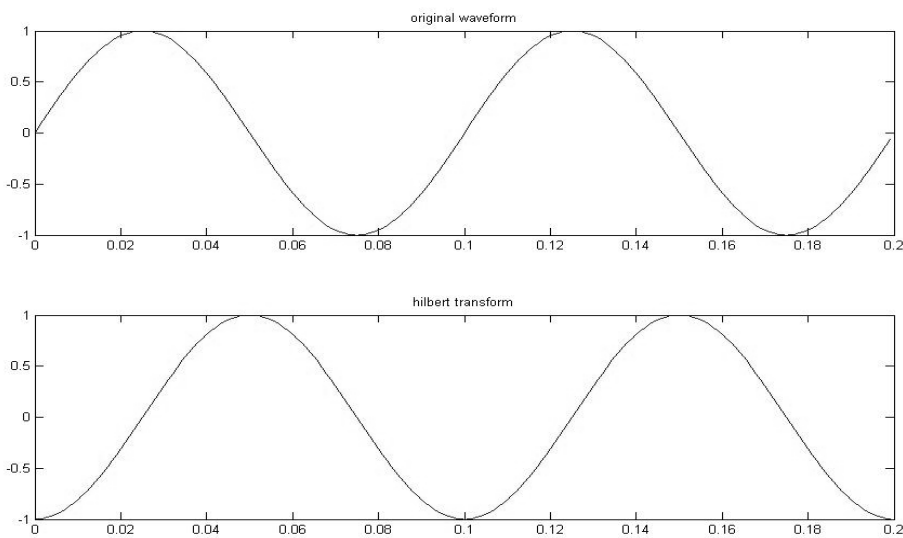


εφαρμογή ενός αντίστροφου FFT, ο οποίος στηρίζεται στη σχέση (3.3.2), στο σήμα που προκύπτει από τον προηγούμενο FFT. Το προϊόν του αντίστροφου FFT είναι ο μετασχηματισμός Hilbert του σήματος εισόδου [5].

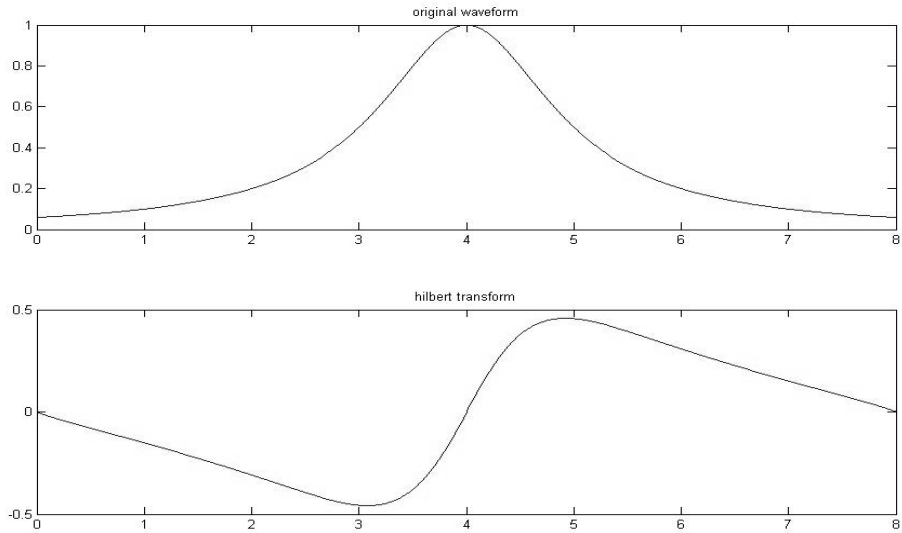
Στα σχήματα που παρατίθενται παρακάτω φαίνονται τα αρχικά σήματα

α)  $\sin 2\pi f_0 t$ , β)  $\frac{1}{1+t^2}$  και γ)  $e^{-e|t|} \cos 2\pi f_0 t$

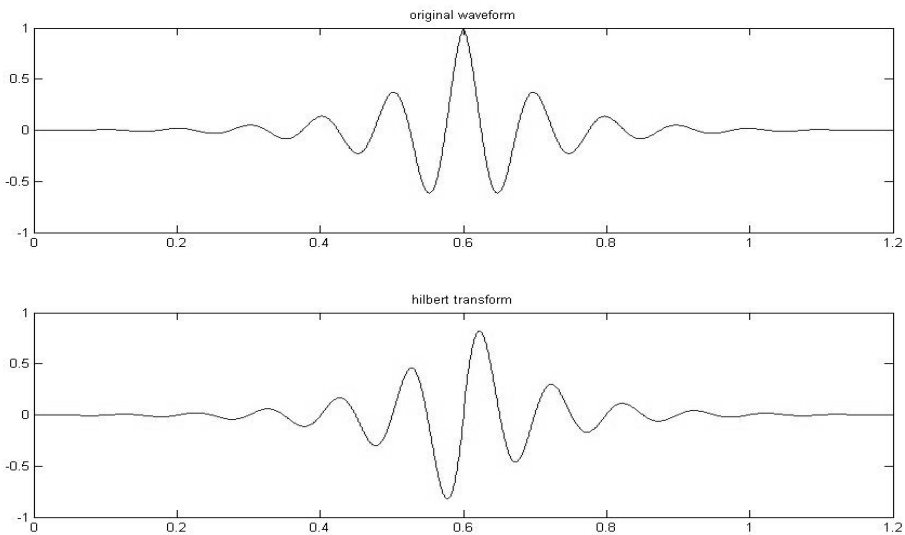
και οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Hilbert, οι οποίοι υπολογίστηκαν με την εντολή του MATLAB που περιγράψαμε παραπάνω.



Σχήμα 3.3.2α: Το σήμα  $\sin 2\pi f_0 t$  (πάνω) και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Hilbert (κάτω) που προέκυψε με τη χρήση της εντολής του MATLAB.



Σχήμα 3.3.2β: Το σήμα  $\frac{1}{1+t^2}$  (πάνω) και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Hilbert (κάτω) που προέκυψε με τη χρήση της εντολής του MATLAB.



Σχήμα 3.3.2γ: Το σήμα  $\frac{1}{1+t^2}$  (πάνω) και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Hilbert (κάτω) που προέκυψε με τη χρήση της εντολής του MATLAB.

Η σύγκριση των σχημάτων 3.3.1 και 3.3.2 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι δύο αλγόριθμοι που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Hilbert των σημάτων εισόδου που επιλέξαμε δίνουν τα ίδια αποτελέσματα, αφού δεν υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στα αντίστοιχα γραφήματα που προκύπτουν με τη χρήση κάθε ενός αλγορίθμου. Μας δίνεται λοιπόν η δυνατότητα να χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του πολλαπλασιασμού πινάκων για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Hilbert ενός σήματος αντί να γίνεται χρήση της αντίστοιχης εντολής του MATLAB.

Για μια πιο εμπεριστατωμένη σύγκριση των δύο παραπάνω αλγορίθμων μετρήσαμε το χρόνο που απαιτείται για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Hilbert και στις δύο περιπτώσεις. Οι μετρήσεις γίνανε για πέντε διαφορετικές τιμές δειγμάτων που αποτέλεσαν το σήμα εισόδου  $\frac{1}{1+t^2}$ . Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται οι χρόνοι υπολογισμού που προέκυψαν:

Χρόνοι υπολογισμού του μετασχηματισμού Hilbert		
	Με πολλαπλασιασμό πινάκων	Με τη χρήση της εντολής του MATLAB
Αριθμός δειγμάτων σήματος εισόδου	Χρόνος σε sec	Χρόνος σε sec
200	0.016	0.062
400	0.016	0.062
800	0.031	0.078
1000	0.046	0.141
1500	0.062	0.234

Πίνακας 3.3: Οι χρόνοι υπολογισμού του μετασχηματισμού Hilbert με πολλαπλασιασμό πινάκων και τη χρήση της εντολής του MATLAB.

Πριν προβούμε στην εξαγωγή συμπερασμάτων πρέπει να αναφέρουμε ότι οι χρόνοι που φαίνονται στον πίνακα 3.3 υπολογίστηκαν κάθε φορά μετά από τη διαγραφή από τη μνήμη του MATLAB όλων των υπάρχουσων σε αυτή μεταβλητών, διότι σε αντίθετη περίπτωση έχουμε χρησιμοποίηση μέρους της μνήμης του

προγράμματος από αυτές τις μεταβλητές πράγμα που έχει αντίκτυπο στον υπολογιζόμενο χρόνο του μετασχηματισμού Hilbert.

Από την παρατήρηση του πίνακα 3.3 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέθοδος του πολλαπλασιασμού πινάκων δίνει σε μικρότερο χρονικό διάστημα το μετασχηματισμό Hilbert του σήματος εισόδου από ότι η χρήση της εντολής του MATLAB. Στην περίπτωση δηλαδή που δημιουργηθεί ένας αλγόριθμος στη γλώσσα προγραμματισμού που είναι σχεδιασμένο το MATLAB, ο οποίος να πραγματοποιεί το μετασχηματισμό Hilbert μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων, τα αποτελέσματα θα είναι ίδια με αυτά που προκύπτουν από την ήδη υπάρχουσα εντολή αλλά θα υπολογίζονται και θα εμφανίζονται στην οθόνη του υπολογιστή πιο γρήγορα από αυτά που δίνει η χρήση της εντολής hilbert.

Στις εφαρμογές που ακολουθούν σε επόμενα κεφάλαια, για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Hilbert χρησιμοποιήθηκε η εντολή hilbert του MATLAB.

### **Αναφορές Κεφαλαίου 3**

[1]: Spiro Kouzoupis, *The Hilbert Transform in Signal Analysis*, Term Paper ACS 515, 1989

[2]: Vaclav Cizek, *Discrete Hilbert Transform*, IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-18, pp. 340-343, 1970

[3]: Jean Laroche, *The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 94, pp.1958-1965, 1993

[4]: David G. Long, *Comments on Hilbert Transform Based Signal Analysis*, Brigham Young University, Department of Electrical and Computer Engineering, 2004

[5]: L. Rossi and G. Girolami, *Instantaneous frequency and short time term Fourier transforms: Application to piano sounds*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 110, pp. 2412-2420, 2001.

## **Κεφάλαιο 4: Προσδιορισμός και ερμηνεία της στιγμιαίας συχνότητας**

Η έννοια του μεγέθους της συχνότητας ενός ημιτονοειδούς σήματος είναι γενικά πλήρως κατανοητή. Στην πράξη, παρατηρούμε ότι τα σήματα που συναντάμε δεν είναι τελείως ημιτονοειδή ούτε αναλύονται πλήρως από επιμέρους ημιτονοειδή σήματα.

Η παραπάνω ανάγκη οδήγησε στην ιδέα της στιγμιαίας συχνότητας (ΣΣ). Η ΣΣ είναι μια πολύ σημαντική παράμετρος με εξέχουσα πρακτική χρήση. Έχει εκτεταμένη χρήση στην περιγραφή φυσικών φαινομένων και συναντάται στην περιγραφή σεισμικών σημάτων, σημάτων radar και sonar καθώς και σημάτων από ιατρικές εφαρμογές.

Παρακάτω θα παρατεθεί μια ιστορική αναδρομή των μαθηματικών τύπων που χρησιμοποιήθηκαν για την περιγραφή της ΣΣ καθώς και η σύνδεσή της με τα αναλυτικά σήματα και κατ' επέκταση με το μετασχηματισμό Hilbert.

### **4.1: Αρχικός προσδιορισμός της στιγμιαίας συχνότητας**

Το μέγεθος της ΣΣ αρχικά εισήχθη στην περιγραφή της διαμόρφωσης συχνότητας (FM). Η ιδιαιτερότητα αυτού του μεγέθους έχει να κάνει με το γεγονός ότι το σήμα του φορέα συνδυάζεται με σήματα, στα οποία το συχνοτικό περιεχόμενο (και κυρίως οι συχνότητες στις οποίες παρουσιάζονται οι κορυφές του φάσματος) είναι χρονικά μεταβαλλόμενο. Τα σήματα αυτά είναι πιο γνωστά ως μη σταθερά και ένα παράδειγμα ενός τέτοιου σήματος είναι το κελάηδημα ενός πουλιού. Ένα τέτοιο σήμα μπορεί να προσδιοριστεί ως ένα ημίτονο του οποίου η συχνότητα σαρώνει το συχνοτικό φάσμα από τις χαμηλές προς τις υψηλές συχνότητες.

Για τέτοιου είδους σήματα, η ΣΣ είναι ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό, διότι είναι μια χρονικά μεταβαλλόμενη παράμετρος η οποία προσδιορίζει τη θέση των συχνοτικών κορυφώσεων ενός σήματος καθώς αυτό μεταβάλλεται χρονικά. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να πούμε ότι η ΣΣ είναι η συχνότητα ενός ημίτονου το οποίο ταιριάζει τοπικά με το υπό εξέταση σήμα.

Πρέπει να αναφέρουμε ότι η ΣΣ περιγράφει μόνο σήματα που αποτελούνται από ένα επιμέρους σήμα, δηλαδή εκεί που υπάρχει μόνο μία συχνότητα ή μία στενή μπάντα συχνοτήτων η οποία μεταβάλλεται χρονικά. Σε αντίθετη περίπτωση, σε αυτή

δηλαδή που έχουμε σήματα που αποτελούνται από πολλά μέρη, η εφαρμογή της ΣΣ γίνεται άχρηστη εάν δε γίνει πρώτα ο διαχωρισμός του αρχικού σήματος στα συστατικά του μέρη.

## **4.2: Η έννοια της στιγμιαίας συχνότητας**

### **4.2.1: Η έννοια της συχνότητας**

Στη μηχανική, η συχνότητα ενός ταλαντούμενου συστήματος ορίζεται ως ο αριθμός των ταλαντώσεων που πραγματοποιεί το σύστημα στη μονάδα του χρόνου. Κατά τη διάρκεια μιας ταλάντωσης το σύστημα ξεκινά από τη θέση ισορροπίας, φτάνει στις θέσεις μέγιστου και ελάχιστου πλάτους και καταλήγει ξανά στη θέση ισορροπίας. Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε είδους ταλάντωση.

Ένας ειδικός τύπος ταλάντωσης είναι η απλή αρμονική ταλάντωση στην οποία η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και έχει πάντα διεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας. Όταν ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα και διαγράφει κυκλική τροχιά, η προβολή της θέσης του κινητού πάνω στη διάμετρο του κύκλου μας δίνει την έννοια της απλής αρμονικής κίνησης. Σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , η προβολή  $P$  έχει μια μετατόπιση, μια ταχύτητα και μια επιτάχυνση, οι οποίες δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$s(t) = \alpha_0 \cos \theta = \alpha_0 \cos \omega t \quad (4.2.1)$$

$$s'(t) = -\alpha_0 \omega \sin \omega t \quad (4.2.2)$$

$$s''(t) = -\alpha_0 \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 s(t) \quad (4.2.3)$$

όπου το σύμβολο ‘’’ δείχνει την τάξη της παραγώγισης. Μπορούμε να συνδέσουμε τη συχνότητα  $f = 2\pi / \omega$  με τη μετατόπιση λύνοντας τη διαφορική εξίσωση (4.2.3). Η λύση της είναι η:

$$z(t) = \alpha e^{j2\pi f t} \quad (4.2.4)$$

όπου  $\omega = 2\pi f$  είναι μια σταθερή γωνιακή ταχύτητα και  $\alpha$  μια σταθερά. Οι σχέσεις (4.2.1)-(4.2.4) συνδέουν την έννοια της συχνότητας με ένα πρακτικό παράδειγμα.

Σε πολλές εφαρμογές συναντάμε οδεύοντα κύματα σε διάφορα υλικά (στερεά, αέρια κτλ.) και στα οποία η κίνηση ενός μορίου σε ένα συγκεκριμένο σημείο μπορεί να περιγραφεί από μια απλή αρμονική κίνηση. Η συχνότητα  $f$  της κίνησης του κύματος ορίζεται ως ο αριθμός των κυμάτων που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο στη μονάδα του χρόνου. Αντίστοιχα, η συχνότητα  $f$  του ηλεκτρικού ρεύματος σε ένα κύκλωμα ορίζεται ως ο αριθμός των κύκλων στη μονάδα του χρόνου.

Έστω ότι έχουμε ένα σήμα  $s(t)$  το οποίο αποτελείται από ένα άθροισμα αρμονικών ταλαντώσεων. Για να βρούμε το πλήρες συχνοτικό περιεχόμενο του συγκεκριμένου σήματος χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Fourier:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (4.2.5a)$$

Οι τιμές της συνάρτησης  $S(f)$  χαρακτηρίζουν πλήρως το σήμα  $s(t)$  με αποτέλεσμα αυτό να μπορεί επανακτηθεί με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df \quad (4.2.5b)$$

Οι εξισώσεις (4.2.5a) και (4.2.5b) έχουν εφαρμογή μόνο σε σταθερά σήματα, δηλαδή σε σήματα των οποίων το συχνοτικό φάσμα  $S(f)$  είναι χρονικά σταθερό. Κάθε τέτοιο σήμα γνωρίζουμε από τη θεωρία Fourier ότι μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από ένα άθροισμα ημίτονων και συνημίτονων με ξεχωριστές τιμές πλάτους ταλάντωσης, συχνότητας και φάσης. Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι για μια συγκεκριμένη τιμή  $f$  της συχνότητας, το πλάτος ταλάντωσης και η φάση ενός ημίτονου και ενός συνημίτονου παραμένουν σταθερά [1].



Οι παραπάνω συλλογισμοί δεν καλύπτουν πλήρως την έννοια της συχνότητας. Η κατάσταση περιπλέκεται όταν εισάγουμε την έννοια του μη σταθερού σήματος.

#### **4.2.2: Γενίκευση της έννοιας της συχνότητας σε μη σταθερά σήματα**

Στις προηγούμενες παραγράφους ορίσαμε τη συχνότητα ως τον αριθμό των κύκλων ή των ταλαντώσεων που πραγματοποιεί ένα σώμα κατά την περιοδική κίνησή του στη μονάδα του χρόνου. Ο ορισμός όμως αυτός δημιουργεί την εξής ασάφεια: πώς μπορούμε να συνδέσουμε τις λέξεις στιγμιαία και συχνότητα; Για το λόγο αυτό ο ορισμός IF είναι αντιφατικός, στηρίζεται σε διάφορες πρακτικές εφαρμογές και στην εμπειρία που απορρέει από αυτές. Για την αποσαφήνιση του όρου θα κάνουμε μια ιστορική αναδρομή στους λόγους που οδήγησαν στην εισαγωγή του όρου της ΣΣ.

Το 1937 οι Carson και Fry [2] ανέπτυξαν μια θεωρία ενός ηλεκτρικού κυκλώματος με ρεύμα μεταβλητής συχνότητας και στη συνέχεια εφάρμοσαν την ίδια θεωρία σε FM σήματα.

Όρισαν ένα FM κύμα με βάση τον τύπο:

$$w(t) = \exp\left(j\left(\omega_0 t + \lambda \int_0^t m(t) dt\right)\right) \quad (4.2.6)$$

όπου  $\omega_0 = 2\pi f_0$  είναι η σταθερή συχνότητα του σήματος-φορέα,  $\lambda$  είναι ο συντελεστής διαμόρφωσης και  $m(t)$  είναι ένα σήμα χαμηλής συχνότητας που πρόκειται να εκπεμφθεί ( $|m(t)| \leq 1$ ). Με βάση τον τύπο (4.2.6) όρισαν τη στιγμιαία γωνιακή συχνότητα ως:

$$\Omega(t) = \omega_0 + \lambda m(t) \quad (4.2.7)$$

όπου ο όρος  $m(t)$  έχει τις διαστάσεις της συχνότητας και τη στιγμιαία κυκλική συχνότητα ως:

$$f_i(t) = f_0 + \frac{\lambda}{2\pi} m(t) \quad (4.2.8)$$

Στηριζόμενοι στα παραπάνω συμπεράναν ότι η έννοια της  $\Sigma\Sigma$  είναι μια γενίκευση του ορισμού της σταθερής συχνότητας, π.χ. ότι εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της γωνίας της φάσης στο χρόνο  $t$ .

Το 1946 ο Van der Pol [3] προσέγγισε το πρόβλημα του προσδιορισμού της IF αναλύοντας τον τύπο μιας απλής αρμονικής κίνησης,

$$s(t) = \alpha \cos(2\pi f t + \theta) \quad (4.2.9)$$

όπου  $\alpha$  είναι το πλάτος της ταλάντωσης,  $f$  η συχνότητα ταλάντωσης,  $\theta$  μια σταθερά φάσης και το όρισμα του συνημίτονου  $(2\pi f t + \theta)$  είναι η φάση  $\phi(t)$ . Όρισε τη διαμόρφωση του πλάτους κάνοντας το πλάτος  $\alpha$  να μεταβάλλεται χρονικά με βάση τον τύπο,

$$\alpha(t) = \alpha_0 [1 + \mu g(t)] \quad (4.2.10)$$

όπου  $g(t)$  είναι το διαμορφούμενο σήμα. Παρομοίως όρισε και τη διαμόρφωση φάσης:

$$\theta(t) = \theta_0 [1 + \mu g(t)] \quad (4.2.11)$$

με αποτέλεσμα η φάση, η οποία είναι το όρισμα του συνημίτονου στη σχέση (4.2.9) να γίνει:

$$\phi(t) = 2\pi f t + \theta(t) \quad (4.2.12)$$

Έχοντας ως σκοπό την εξαγωγή ενός παρόμοιου τύπου για τη διαμόρφωση συχνότητας, παρατήρησε ότι θα ήταν λάθος απλώς να αντικαταστήσει τη συχνότητα  $f$  στη σχέση (4.2.9) και γράφοντας:

$$f_i(t) = f_0 [1 + \mu g(t)] \quad (4.2.13)$$

διότι θα δημιουργούνταν φυσικές ασυνέχειες, διότι αντικαθιστώντας τη (4.2.13) στην (4.2.9) δεν παίρνουμε την (4.2.11). Πρότεινε ότι η σχέση (4.2.9) για απλές αρμονικές ταλαντώσεις πρέπει να γραφεί ως:

$$s(t) = \alpha \cos \left[ \int_0^t 2\pi f_i(t) dt + \theta \right] \quad (4.2.14)$$

Στον τύπο (4.2.14) όλο το όρισμα του συνημίτονου είναι η φάση  $\phi(t)$ . Με βάση αυτό τον τύπο όρισε την  $\Sigma\Sigma$  ως:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (4.2.15)$$

Με τον τρόπο αυτό, χρησιμοποιώντας δηλαδή μια πραγματική αναπαράσταση του σήματος, έφτασε σε έναν ορισμό της  $\Sigma\Sigma$  παρόμοιο με αυτόν των Carson και Fry [2], οι οποίοι χρησιμοποίησαν μια φανταστική αναπαράσταση του σήματος.

Το επόμενο σημαντικό βήμα στη μελέτη της  $\Sigma\Sigma$  το έκανε ο Gabor [4], οποίος πρότεινε μία μέθοδο για τη δημιουργία ενός μοναδικού μιγαδικού σήματος από ένα πραγματικό. Η μεθοδός του περιλάμβανε πρώτα την εύρεση του μετασχηματισμού Fourier ενός πραγματικού σήματος και στη συνέχεια την απομάκρυνση πλατών που αντιστοιχούν σε αρνητικές συχνότητες και τον πολλαπλασιασμό των πλατών που ανήκουν σε θετικές συχνότητες επί δύο. Επίσης έδειξε ότι η παραπάνω διαδικασία είναι παρόμοια με την ακόλουθη διαδικασία στη διάσταση του χρόνου:

$$z(t) = s(t) + jH[s(t)] = \alpha(t)e^{j\phi(t)} \quad (4.2.16)$$

όπου  $z(t)$  είναι το μιγαδικό σήμα του Gabor,  $s(t)$  είναι το πραγματικό σήμα και  $H$  είναι ο μετασχηματισμός Hilbert, ο οποίος έχει οριστεί στο κεφάλαιο 3. Τα σήματα  $s(t)$  και  $H[s(t)]$  συχνά αναφέρεται ότι έχουν διαφορά φάσης  $\pi/2$ .

Ο Ville [5] συνδύασε τις μελέτες των Gabor [4], Carson και Fry [2] και όρισε την  $\Sigma\Sigma$  ενός σήματος που περιγράφεται από τη σχέση:

$$s(t) = \alpha(t) \cos \phi(t) \quad (4.2.17)$$

ως:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\arg z(t)] \quad (4.2.18)$$

όπου  $z(t)$  είναι το αναλυτικό σήμα όπως αυτό ορίζεται από τη σχέση (4.2.16). Ο Ville [5] προχώρησε περαιτέρω και παρατήρησε ότι εφ' όσον η  $\Sigma\Sigma$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενη, θα έπρεπε να υπάρχει και κάποιο στιγμιαίο συχνοτικό φάσμα που να σχετίζεται με αυτή και μάλιστα με τη μικρότερη συχνότητα από αυτές του φάσματος να είναι η  $\Sigma\Sigma$ . Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις για την εξαγωγή του Μ.Ο. του Gabor [4], απέδειξε ότι η μέση συχνότητα του φάσματος ενός σήματος είναι ίση με τη μέση χρονικά τιμή της  $\Sigma\Sigma$ :

$$\langle f \rangle = \langle f_i \rangle \quad (4.2.19)$$

όπου:

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f |Z(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2 df} \quad (4.2.20\alpha)$$

$$\langle f_i \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) |z(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |Z(t)|^2 dt} \quad (4.2.20\beta)$$

Η σχέση (4.2.20α) και η (4.2.20β) είναι μια μέση τιμή συχνοτικά και μία μέση τιμή χρονικά αντιστοίχως. Χρησιμοποιώντας αυτά τα αποτελέσματα δημιούργησε μία

κατανομή του σήματος στο χρόνο και τη συχνότητα, η οποία είναι γνωστή ως κατανομή Winger-Ville:

$$W(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t + \tau/2) z^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (4.2.21)$$

Πρέπει να προσέξουμε ότι η συνάρτηση  $W(t, f)$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier κατά  $\tau$  του γινομένου  $z(t + \tau/2) z^*(t - \tau/2)$  και υπολογίζεται αριθμητικά χρησιμοποιώντας αλγορίθμους FFT.

Ο Ville [5] απέδειξε ότι η πρώτη στιγμή του WVD όσον αφορά τη συχνότητα δίνει την  $\Sigma\Sigma$ :

$$f_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f W(t, f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} W(t, f) df} \quad (4.2.22)$$

### **4.2.3: Μαθηματικός προσδιορισμός της στιγμιαίας συχνότητας**

Για να εξηγήσουμε καλύτερα την έννοια της  $\Sigma\Sigma$ , θέτουμε το ακόλουθο πρόβλημα: έστω ότι θέλουμε να μεταφέρουμε το σήμα  $s(t)$  στο πεδίο των συχνοτήτων. Με βάση τα προαναφερθέντα και τη σχέση (4.2.15) κατασκευάζουμε το αναλυτικό σήμα  $z(t) = \alpha(t) e^{j\phi(t)}$ , του οποίου το συχνοτικό φάσμα δίνεται από τη:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (4.2.23)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) e^{j[\phi(t) - 2\pi f t]} dt \quad (4.2.24)$$

Σε αυτό το σημείο για να αναλύσουμε τη χρησιμότητα των ολοκληρωμάτων στις σχέσεις (4.2.24) και (4.2.25) πρέπει να αναφέρουμε την Αρχή της Σταθερής Φάσης.

Η Αρχή της Σταθερής Φάσης χρησιμοποιήθηκε από τους Carson και Fry [2] για τον υπολογισμό των ορίων μέσα στα οποία μεταβάλλεται η ΣΣ σε FM σήματα και από τον Rihaczek, ο οποίος απέδειξε ότι υπάρχει συγκέντρωση της ενέργειας του σήματος στην περιοχή γύρω από την ΣΣ [6]. Επίσης χρησιμοποιήθηκε από τον Vakman για την εξήγηση μιας παράδοξης κατάστασης γύρω από την ΣΣ [7]: παρ' όλο που η ΣΣ έχει τοπικό χαρακτήρα (όπως υποδεικνύεται από τον όρο στιγμιαία) για τον υπολογισμό της είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Hilbert του αρχικού σήματος, πράγμα που σημαίνει ότι μας ενδιαφέρει όλη η εξέλιξη του σήματος στη διάσταση του χρόνου.

Για τον υπολογισμό της Αρχής της Σταθερής Φάσης χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$I_{\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} U(x) \cos \phi_{\alpha}(x) dx \quad (A1)$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} U(x) e^{j \phi_{\alpha}(x)} dx \right\} \quad (A2)$$

Η σχέση  $\phi_{\alpha}(x) = \phi(\alpha, x)$  έχει παραμετροποιηθεί κατά  $\alpha$ . Εάν η συνάρτηση  $U(x)$  μεταβάλλεται με αργό ρυθμό, ενώ η  $\phi_{\alpha}(x)$  μεταβάλλεται κατά  $2\pi$ , τότε όλες οι θετικές τιμές του  $\cos \phi_{\alpha}(x)$  τείνουν να εξισορροπήσουν τις αρνητικές τιμές του, με αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα στη σχέση (A1) να γίνεται πολύ μικρό. Στην περίπτωση όμως που η  $\phi_{\alpha}(x)$  έχει σταθερές τιμές για τις οποίες ισχύει  $d\phi_{\alpha}(x)/dx = 0$  τότε για αυτές τις τιμές το ολοκλήρωμα γίνεται πολύ μεγάλο. Αυτές οι μεγάλες τιμές του ολοκληρώματος  $I_{\alpha}$  μπορούν να παρθούν από τις τιμές του  $\alpha$  για τις οποίες η φάση  $\phi(\alpha, x)$  γίνεται σταθερή, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{d}{dx}(\phi(x, \alpha)) = 0 \quad (A3)$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω Αρχή με τις σχέσεις (4.2.24) και (4.2.25) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα αντίστοιχα ολοκληρώματα παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους για τις συχνότητες  $f_s$ , οι οποίες κάνουν τη φάση σταθερή, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{d}{dt}[\phi(t) - 2\pi f_s t] = 0 \quad (4.2.26)$$

Η σχέση (4.2.26) οδηγεί στην:

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (4.2.27)$$

Από τη σχέση (4.2.27) απορρέει ότι εάν η συχνότητα  $f_s$  είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$ , τότε η συνάρτηση  $f_s(t)$  παρέχει τη μέτρηση της συγκέντρωσης της ενέργειας του σήματος στη διάσταση των συχνοτήτων ως συνάρτησης του χρόνου. Αυτή η μέτρηση ισοδυναμεί με τον υπολογισμό της ΣΣ του σήματος. Έτσι, με τη βοήθεια της συνάρτησης  $f_s(t)$  κατανοούμε το πόσο σημαντική είναι η ΣΣ στην αναγνώριση, στον εντοπισμό, στον υπολογισμό και στη μοντελοποίηση ενός σήματος.

Παρ' όλα αυτά ο προσδιορισμός της ΣΣ οδηγεί και σε διάφορες συγκρούσεις. Για παράδειγμα, ο Shekel [8] υποστήριξε ότι η ΣΣ υπολογιζόμενη από τη σχέση:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (4.2.28)$$

δεν είναι μια μοναδική συνάρτηση μεταβαλλόμενη χρονικά καθώς κάθε κύμα διαμορφωμένο κατά AM και γραμμένο σε μιγαδική μορφή μπορεί να εκφραστεί είτε με το γινόμενο  $m(t)e^{j2\pi f t}$  είτε με το γινόμενο  $m_0 e^{j\phi(t)}$ . Η δεύτερη έκφραση αναπαριστά ένα κύμα με σταθερό πλάτος αλλά πολύπλοκη έκφραση της ΣΣ ενώ η πρώτη ένα κύμα με σταθερή ΣΣ αλλά πολύπλοκη έκφραση του πλάτους. Το συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι να κατασκευαστεί ένα μιγαδικό σήμα από ένα πραγματικό. Ο τρόπος που οδηγεί στη μοναδική

δημιουργία ενός μιγαδικού σήματος είναι χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Hilbert, σύμφωνα με τη θεωρία του Gabor [4] και του Ville [5] που αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο. Το αν όμως ένα τέτοιο σήμα μπορεί να συναντηθεί στην πραγματικότητα είναι ένα άλλο ζήτημα.

Προσπάθεια στην επεξήγηση της ΣΣ από φυσικής σκοπιάς επιχείρησε και ο Mandel [9], ο οποίος εξέτασε τη σχέση της ΣΣ με τις συχνότητες που αποτελούν ένα σήμα και οι οποίες λαμβάνονται κατά το μετασχηματισμό Fourier του σήματος. Ισχυρίστηκε ότι δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των δύο αυτών ειδών συχνοτήτων και χρησιμοποίησε παραδείγματα σημάτων για να το αποδείξει. Επίσης υποστήριξε ότι η μοναδική ομοιότητα που μπορεί να παρατηρηθεί είναι ότι η μέση συχνότητα που προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier ισούται με τη χρονική μέση τιμή της ΣΣ. Αυτό όμως παρατηρείται για τα αρχικά στάδια του σήματος. Παρακάτω θα παρατεθεί το σήμα που χρησιμοποίησε ο Mandel για να αποδείξει τον ισχυρισμό του:

$$z(t) = \alpha_1 e^{j(\omega_0 - \Delta\omega/2)t} + \alpha_2 e^{j(\omega_0 + \Delta\omega/2)t} \quad (4.2.29)$$

Εάν εκφράσουμε το  $z(t)$  σε σχέση με την περιβάλλουσα και τη φάση  $\alpha(t)e^{j\phi(t)}$ , παίρνουμε τη σχέση:

$$\phi(t) = \tan^{-1} \frac{(-\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\Delta\omega/2)t}{(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\Delta\omega/2)t} \quad (4.2.30)$$

Η ΣΣ με βάση την παραπάνω σχέση και τη σχέση (4.2.19) δίνεται από την:

$$f_i(t) = f_0 + \frac{\Delta f}{2} \frac{-\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos \Delta\omega t} \quad (4.2.31)$$

Το συχνοτικό φάσμα που προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier του  $z(t)$  είναι φανερό από την (4.2.29) ότι αποτελείται από δύο μέρη τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τη  $f_0$ . Η ΣΣ με βάση την (4.2.31) μεταβάλλεται χρονικά, αλλά οι μεταβολές της  $f_i(t)$  γύρω από την  $f_0$  δεν είναι συμμετρικές. Μπορούν να είναι εξ' ολοκλήρου πάνω από την  $f_0$  στην περίπτωση που ισχύει  $\alpha_2 > \alpha_1$  ή κάτω από την  $f_0$



εάν  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Πρέπει να αναφερθεί ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα το αναλυτικό σήμα αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό σήμα με δύο μέρη:  $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ . Αυτό σημαίνει ότι η ΣΣ έχει νόημα για το σήμα  $s(t)$  μόνο στην περίπτωση που τα δύο του μέρη εξετάζονται ξεχωριστά.

Ο Mandel [9] υποστήριξε ότι η ΣΣ και οι συχνότητες του μετασχηματισμού Fourier είναι διαφορετικές ποσότητες και η πηγή της σύγχυσής τους είναι ο κοινός όρος της ονομασίας τους. Στην ερώτηση ποια από τις δύο μετρήσεις είναι πιο κοντά στις μετρήσεις, ο Mandel [9] απάντησε ότι εξαρτάται από τη φύση του πειράματος.

Ο Priestley [10] υποστήριξε ότι μια συνεχώς μεταβαλλόμενη διαδικασία δεν μπορεί να αναλυθεί σωστά με το μετασχηματισμό Fourier. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το μεταβαλλόμενο σήμα:

$$y(t) = A e^{-t^2/\alpha^2} \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) \quad (4.2.32)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του παραπάνω σήματος αποτελείται από δύο Gaussian συναρτήσεις με κεντρικές συχνότητες  $f_0$  και  $-f_0$  καθώς και από μέρη του μετασχηματισμού σε όλες τις συχνότητες. Υπάρχει δυνατότητα να αναπαρασταθεί το σήμα με έναν εναλλακτικό τρόπο: αποτελείται από δύο ‘συχνοτικά’ μέρη ( $f_0$  και  $-f_0$ ), κάθε ένα από τα οποία έχει χρονικά μεταβαλλόμενο πλάτος  $A e^{-t^2/\alpha^2}$ . Αυτές οι δύο μορφές του σήματος είναι ισοδύναμες. Κάθε μία αντιστοιχεί σε διαφορετική ‘οικογένεια’ βασικών ορθογώνιων συναρτήσεων. Στην πρώτη περίπτωση, η ‘οικογένεια’ αποτελείται από ημίτονα και συνημίτονα με σταθερά πλάτη, ενώ στη δεύτερη περίπτωση αποτελείται από ημίτονα και συνημίτονα με χρονικά μεταβαλλόμενα πλάτη.

Σύμφωνα με το συμβατικό ορισμό, ο όρος ‘συχνότητα’ έχει να κάνει με ημίτονα και συνημίτονα. Με σκοπό να εισάγουμε τον όρο της συχνότητας σε μεταβαλλόμενα σήματα πρέπει να δημιουργήσουμε μία νέα ‘οικογένεια’ συναρτήσεων, η οποία πρέπει να είναι μεταβαλλόμενη και να έχει την έννοια της ταλάντωσης ούτως ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αυτή ο όρος ‘συχνότητα’. Ο Priestley [10] υποστήριξε ότι ένα αυθαίρετο μεταβαλλόμενο σήμα μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_t(f) S(f) df \quad (4.2.33)$$

όπου:

$$\gamma_t(f) = A_t(f) e^{j2\pi f t} \quad (4.2.34)$$

Η προσέγγιση του Priestley [10] οδηγεί σε ένα μοντέλο όπου τα σήματα αναπαρίστανται τοπικά από μια συχνότητα και ορισμένες παράπλευρες συχνότητες. Στην προσέγγιση του Ville [5] η συχνότητα περιγράφεται πάντα ως η πρώτη παράγωγος της φάσης ανεξάρτητα με το αν το σήμα είναι σταθερό ή μεταβαλλόμενο. Τα δύο μοντέλα σχετίζονται, αλλά αυτό του Priestley [10] έχει εφαρμογή σύνθετα σήματα ενώ αυτό του Ville έχει εφαρμογή μόνο σε απλά σήματα.

Άλλη μια προσέγγιση για την κατανόηση της ΣΣ έγινε από τον Cohen [11]. Αυτός ανέπτυξε μιας γενικευμένη μορφή για την αναπαράσταση της κατανομής της ενέργειας στη διάσταση του χρόνου και των συχνοτήτων. Σε αυτή την περίπτωση η ΣΣ μπορεί να θεωρηθεί ως ο μέσος όρος όλων των συχνοτήτων που υπάρχουν στο γράφημα συχνότητας-χρόνου σε δεδομένο χρονικό διάστημα. Αυτό μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\langle f_i \rangle_t = \frac{\phi'(t)}{2\pi} \quad (4.2.35)$$

Μελέτες για την ΣΣ έγιναν κι από άλλους επιστήμονες. Ο Rihaczek [6] ερεύνησε τα σημεία στο πεδίο χρόνου-συχνότητας και στα οποία υπήρχε κατανομή ενέργειας του μιγαδικού σήματος που εξέταζε και απέδειξε ότι η ενέργεια συγκεντρώνεται συχνοτικά γύρω από την ΣΣ. Ο Ackroyd [12] συνέχισε τα παραπάνω αποτελέσματα και απέδειξε ότι το σημείο στο οποίο ξεκινά η κατανομή ενέργειας του Rihaczek [6] μας δίνει την ΣΣ ανεξάρτητα με το ρυθμό μεταβολής της.

### **4.3: Ο μετασχηματισμός Hilbert και το αναλυτικό σήμα**

Παρ' όλο που ο Gabor [4] έδωσε έναν ικανοποιητικό ορισμό για το αναλυτικό σήμα που προέρχεται από το μετασχηματισμό Hilbert, πρέπει να πούμε ότι υπάρχουν

κι άλλο τρόποι δημιουργίας ενός μιγαδικού σήματος από ένα πραγματικό. Ένας από αυτούς είναι παίρνοντας το συστατικό του σήματος  $s(t)$  το οποίο έχει διαφορά φάσης με το αρχικό σήμα  $\pi/2$  ως το φανταστικό μέρος του μιγαδικού σήματος. Αυτός ο τρόπος οδηγεί σε ένα σήμα διαφορετικό από αυτό που περιέγραψαν οι Gabor [4] και Ville [5]. Εάν εστιάσουμε στις διαφορές θα παρατηρήσουμε ότι έχοντας κάποια πραγματικά δεδομένα που παρουσιάζονται ως μία συνάρτηση του χρόνου, θέλουμε να ορίσουμε δύο χρονικά εξαρτώμενες συναρτήσεις που να χαρακτηρίζουν τα δεδομένα. Αυτές οι δύο συναρτήσεις μπορούν να αντιστοιχούν είτε στην περιβάλλουσα και τη φάση είτε στο πραγματικό και φανταστικό μέρος των σημάτων. Η μη μοναδικότητα αυτού του μετασχηματισμού μπορεί να φανεί εάν θεωρήσουμε το ακόλουθο σήμα:

$$s(t) = \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t) \quad f_1 > f_2 \quad (4.3.1)$$

Η φάση μπορεί να καθοριστεί ως  $2\pi f_1 t$  με διαμόρφωση πλάτους  $\alpha(t) = \cos 2\pi f_2 t$  ή ως  $2\pi f_2 t$  με διαμόρφωση πλάτους  $\alpha(t) = \cos 2\pi f_1 t$ .

Παρατηρούμε ότι το αναλυτικό σήμα δεν αντιστοιχεί συνέχεια σε ένα σήμα και το κατά  $\pi/2$  μετατοπισμένο συστατικό του, πράγμα που είναι πολύ σημαντικό, δεδομένης της ευρείας του χρήσης στη θεωρία των τηλεπικοινωνιών. Ο λόγος της μη αντιστοιχίας είναι ότι η δημιουργία του αναλυτικού σήματος μέσω του μετασχηματισμού Hilbert είναι ισοδύναμη με την εξάλειψη των αρνητικών συχνοτήτων από το φάσμα του σήματος. Στην περίπτωση που έχουμε μετατόπιση θετικών συχνοτήτων στον αρνητικό άξονα, ο μετασχηματισμός Hilbert δε δίνει το μετατοπισμένο κατά  $\pi/2$  κομμάτι του αρχικού σήματος. Ως συνέπεια οποιαδήποτε απρόσεκτη χρήση της ΣΣ μπορεί να οδηγήσει σε αμφισβητούμενα αποτελέσματα.

#### **4.4: Περιπτώσεις στις οποίες ο μετασχηματισμός Hilbert δημιουργεί το κατά $\pi/2$ μετατοπισμένο κομμάτι του αρχικού σήματος**

Ας θεωρήσουμε το FM σήμα  $\alpha(t) \cos \phi(t)$  και ας δούμε για ποιες συνθήκες επαληθεύεται η ακόλουθη σχέση:

$$\alpha(t) \cos \phi(t) + j \mathcal{H}[\alpha(t) \cos \phi(t)] = \alpha(t) e^{j\phi(t)} \quad (4.4.1)$$

Το πρόβλημα εξετάζει μιγαδικά σήματα με πεπερασμένη ενέργεια. Η λύση του βρίσκεται με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος γινομένου του Bedrosian [1].

Σε αυτό το σημείο πρέπει να παραθέσουμε το θεώρημα του Bedrosian [1] για μιγαδικά σήματα:

Έστω τα μιγαδικά σήματα  $x(t)$  και  $y(t)$  με πεπερασμένη ενέργεια και πραγματική μεταβλητή την  $t$ . Ο μετασχηματισμός Fourier για το καθένα αντίστοιχα είναι  $X(f) = F\{x(t)\}$  και  $Y(f) = F\{y(t)\}$ . Εάν:

$$\begin{aligned} \text{i) } X(f) &= 0 \text{ για } |f| > \alpha \text{ και} \\ Y(f) &= 0 \text{ για } |f| < \beta, \text{ όπου } \beta \geq \alpha \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

ή

$$\begin{aligned} \text{ii) } X(f) &= 0 \text{ για } f < -\alpha \text{ και} \\ Y(f) &= 0 \text{ για } f < \beta, \text{ όπου } \beta \geq \alpha \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

τότε:

$$\mathcal{H}\{x(t)y(t)\} = x(t)\mathcal{H}\{y(t)\} \quad (\text{B3})$$

Η σχέση (4.4.1) ισχύει εάν το φάσμα  $A(f) = F\{\alpha(t)\}$  βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στην περιοχή  $|f| < f_0$  και το φάσμα  $F\{\cos \phi(t)\}$  βρίσκεται εκτός αυτής.

Απόδειξη:

Εάν εκπληρώνεται η πρώτη συνθήκη του BPT, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} &\alpha(t) \cos \phi(t) + j \mathcal{H}\{\alpha(t) \cos \phi(t)\} \\ &= \alpha(t) \cos \phi(t) + j \alpha(t) \mathcal{H}\{\cos \phi(t)\} \\ &= \alpha(t) \cos \phi(t) + j \alpha(t) \sin \phi(t) \end{aligned}$$

$$= \alpha(t)e^{j\phi(t)}$$

Από αυτές τις σχέσεις μπορούμε να δούμε ότι το αναλυτικό σήμα που προέρχεται από το μετασχηματισμό Hilbert είναι μια μέθοδος επιλογής υψηλών συχνοτήτων καθώς το ισχυρό μέρος του αρχικού σήματος που περικλείει τις υψηλές συχνότητες γίνεται ο μιγαδικός όρος της φάσης. Αυτό μπορεί να γίνει πιο αντιληπτό αναθεωρώντας το σήμα της σχέσης (4.3.1). Το αναλυτικό σήμα που προκύπτει μετά από το μετασχηματισμό Hilbert του σήματος είναι της μορφής:

$$z(t) = \cos(2\pi f_1 t)e^{j2\pi f_2 t} \quad (4.4.2)$$

Άρα η μέθοδος του μετασχηματισμού Hilbert με βάση τη θεωρία της διαλέγει το μεγαλύτερο συνημίτονο της συχνότητας και το αντικαθιστά με έναν εκθετικό όρο.

#### **4.5 Επεξήγηση του αναλυτικού σήματος που δημιουργείται με το μετασχηματισμό Hilbert**

Ο μετασχηματισμός Hilbert και το αναλυτικό δεν μπορούνε συνέχεια να εξηγούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να δίνουν πλήρη περιγραφή φυσικών φαινομένων. Όπως εξηγήθηκε προηγουμένως, εάν είχαμε ένα διαμορφωμένο σήμα της μορφής  $\alpha(t)e^{j\phi(t)}$ , όπου οι όροι  $\alpha(t)$  και  $\phi(t)$  έχουν φυσική σημασία και τα φάσματά τους δεν ήταν ξεχωριστά, τότε ο μετασχηματισμός Hilbert θα ήταν ένα αποτέλεσμα επικάλυψης και παραμόρφωσης της φάσης κάποιων συναρτήσεων. Παρ' όλα αυτά το αναλυτικό σήμα θα έχει τη μορφή:

$$\alpha_z(t)e^{j\phi_z(t)} \quad (4.5.1)$$

θα είναι μοναδικό και οι όροι  $\alpha_z(t)$  και  $\phi_z(t)$  θα έχουν αμφισβητούμενη πρακτική σημασία. Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο ισχυρισμό:

Το πλάτος  $\alpha(t)$  και η φάση  $\phi(t)$  ενός σήματος μπορούν να θεωρηθούν ξεχωριστά μόνο εάν το φάσμα του  $\alpha(t)$  και του  $\cos\phi(t)$  δεν έχουν κοινές συχνότητες.

Συνεπώς, όσο πιο στενό συχνοτικό εύρος έχει ένα σήμα, τόσο πιο πολύ πλησιάζει το σήμα του μετασχηματισμού Hilbert να έχει διαφορά φάσης από το αρχικό  $\pi/2$  και τόσο πιο πιθανό είναι το αναλυτικό σήμα να παρέχει ένα ακριβές μοντέλο ενός πραγματικού συστήματος με μια συγκεκριμένη ΣΣ. Επίσης τόσο καλύτερος θα είναι και ο υπολογισμός της ΣΣ [1].

#### **4.6 Παραδείγματα υπολογισμού στιγμιαίας συχνότητας**

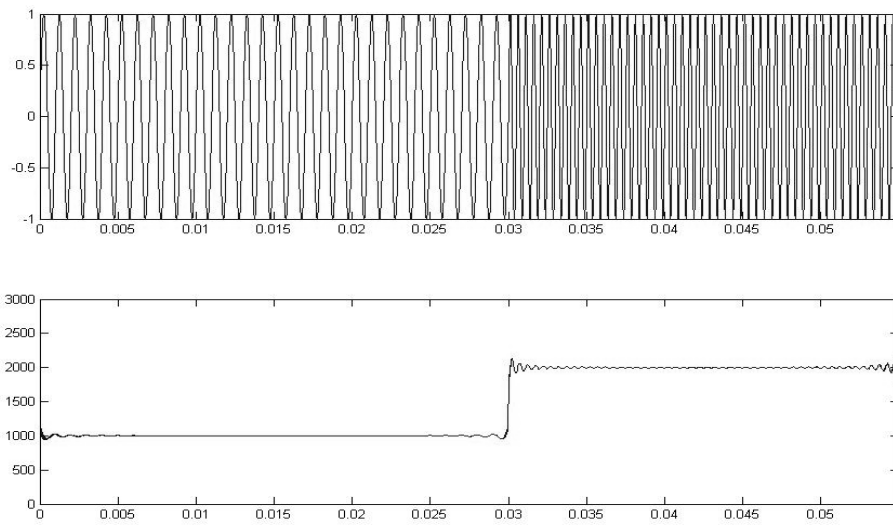
Όπως αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο ο μετασχηματισμός Hilbert μας δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού της στιγμιαίας συχνότητας ενός σήματος. Η δυνατότητα αυτή παρουσιάζει μεγάλη χρησιμότητα στην ανάλυση ήχων μουσικών οργάνων, διότι αντίθετα με άλλες υπάρχουσες τεχνικές (π.χ. FFT), δε χάνεται η χρονική πληροφορία. Επίσης ο μετασχηματισμός Hilbert βρίσκει εφαρμογή και σε μη σταθερά σήματα, στα οποία εντάσσονται και τα σήματα μουσικών οργάνων που θα εξετάσουμε [13].

Για την καλύτερη παρουσίαση των αποτελεσμάτων της στιγμιαίας συχνότητας χρησιμοποιήσαμε ένα απλό ημιτονικό σήμα ελέγχου του οποίου η συχνότητα αλλάζει απότομα. Το σήμα έχει διάρκεια  $t = 0.055 \text{ sec}$ . Η συχνότητα του σήματος ελέγχου για τα πρώτα  $0.03 \text{ sec}$  της διάρκειάς του είναι  $f_1 = 1000 \text{ Hz}$  και για τα υπόλοιπα  $0.025 \text{ sec}$  η τιμή της συχνότητας γίνεται  $f_2 = 2000 \text{ Hz}$ . Υπολογίσαμε τη στιγμιαία συχνότητα μέσω του μετασχηματισμού Hilbert για το σήμα αυτό. Στο σχήμα 4.6.1 φαίνονται τα αποτελέσματα του παραπάνω υπολογισμού.

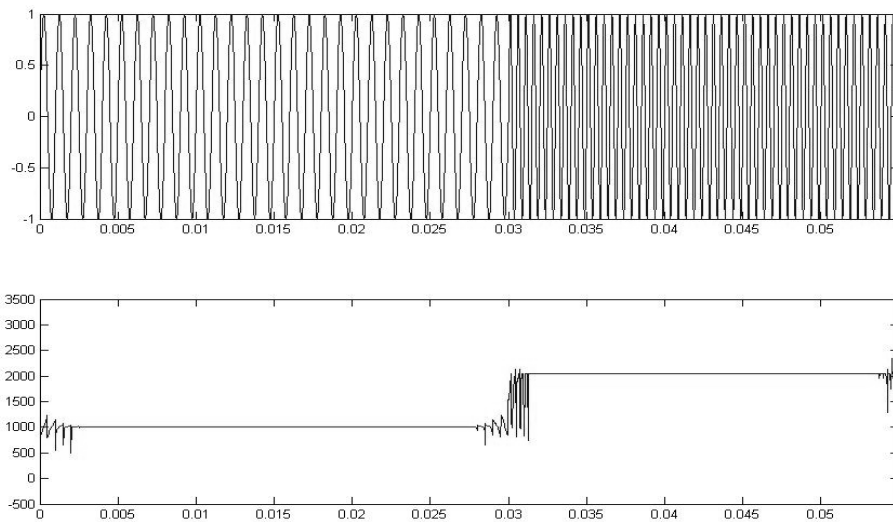
Τα τελευταία χρόνια βρίσκει εφαρμογή στην εύρεση της στιγμιαίας συχνότητας ενός σήματος μέσω του μετασχηματισμού κυματιδίων (wavelets) [14]. Για την εύρεση της στιγμιαίας συχνότητας, θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του μετασχηματισμού Hilbert με αυτά που προκύπτουν από τη χρήση του μετασχηματισμού κυματιδίων.

Εδώ θα κάνουμε απλή χρήση του μετασχηματισμού κυματιδίων (της διακριτής του μορφής), χωρίς να κάνουμε καμία εισαγωγή στο θέμα, διότι αυτό θα απαιτούσε αρκετές σελίδες. Για μία εισαγωγή στο θέμα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία: [15], [16] και [17]. Στο σχήμα 4.6.2 φαίνεται η στιγμιαία συχνότητα του ίδιου σήματος ελέγχου που περιγράψαμε παραπάνω, η οποία υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό κυματιδίων.

Η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος ελέγχου και στις δύο περιπτώσεις έχει την ίδια τιμή.



Σχήμα 4.6.1: Το ημιτονικό σήμα ελέγχου (πάνω) και η στιγμιαία συχνότητά του (κάτω), όπως προκύπτει από το μετασχηματισμό Hilbert του σήματος ελέγχου.



Σχήμα 4.6.2: Το ημιτονικό σήμα ελέγχου (πάνω) και η στιγμιαία του συχνότητα (κάτω), όπως προκύπτει από το μετασχηματισμό με τη χρήση κυματιδίων του σήματος ελέγχου.

Συγκρίνοντας τα γραφήματα της στιγμιαίας συχνότητας των σχημάτων 4.6.1 και 4.6.2 μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις: α) στα σημεία της στιγμιαίας συχνότητας, τα οποία αντιστοιχούν σε σημεία του σήματος ελέγχου όπου η τιμή της συχνότητας παραμένει σταθερή, ο μετασχηματισμός με τη χρήση κυματιδίων παρέχει καλύτερα αποτελέσματα και β) στα σημεία όπου η συχνότητα του σήματος είναι είτε μηδενική είτε αλλάζει τιμή και οι δύο μετασχηματισμοί προσδίδουν κυματώσεις στο γράφημα της στιγμιαίας συχνότητας, με το μετασχηματισμό Hilbert να προσδίδει λιγότερες κυματώσεις.

Η ποιότητα των γραφημάτων της στιγμιαίας συχνότητας που προκύπτει μετά από μετασχηματισμό με τη χρήση σωματιδίων εξαρτάται από τη συχνότητα δειγματοληψίας του εκάστοτε σήματος που μετασχηματίζουμε. Αυτό σημαίνει ότι άλλοτε τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου μετασχηματισμού είναι καλύτερα και άλλοτε χειρότερα. Το γεγονός αυτό καθιστά ακατάλληλη αυτή την τεχνική για την εργασία που θα ακολουθήσει αφού τα σήματα που θα μελετηθούν έχουν συγκεκριμένη τιμή συχνότητας δειγματοληψίας.

Έχοντας απορρίψει το μετασχηματισμό με τη χρήση κυματιδίων, στις εφαρμογές που ακολουθούν και απαιτούν την εξαγωγή της στιγμιαίας συχνότητας σημάτων χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Hilbert.

Ακολουθώς θα παραθέσουμε ακόμη ένα παράδειγμα υπολογισμού της στιγμιαίας συχνότητας ενός σήματος ελέγχου με τη χρήση του μετασχηματισμού Hilbert.

Το σήμα που θα μελετήσουμε είναι της μορφής:

$$x(t) = A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + A_2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t + \phi) \quad (4.6.1)$$

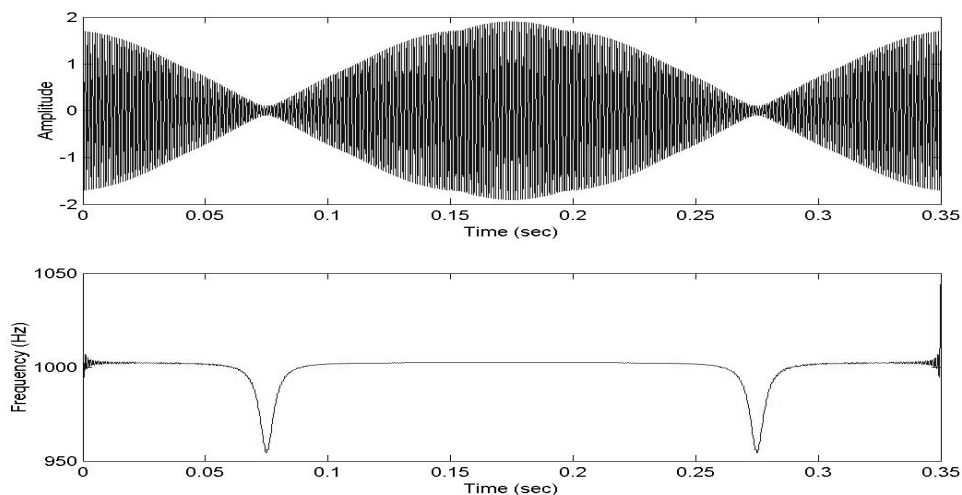
με τιμές:  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.9$ ,  $f_1 = 1000 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 1005 \text{ Hz}$  και  $\phi = \frac{\pi}{4}$ .

Οι εκφράσεις που δίνουν τις μέγιστες τιμές της στιγμιαίας συχνότητας είναι οι ακόλουθες [13]:

$$f_{\max} = \frac{f_1 A_1 + f_2 A_2}{A_1 + A_2} = 1002.4 \text{ Hz} \quad \text{και} \quad f_{\min} = \frac{f_1 A_1 - f_2 A_2}{A_1 - A_2} = 955 \text{ Hz}$$



Στο σχήμα 4.6.3 που ακολουθεί φαίνεται το σήμα ελέγχου και η στιγμιαία συχνότητά του.



Σχήμα 4.6.5: Το σήμα ελέγχου (πάνω γράφημα) και η στιγμιαία του συχνότητα (κάτω γράφημα), η οποία προκύπτει από το μετασχηματισμό Hilbert του σήματος ελέγχου.

Όπως ήταν αναμενόμενο υπάρχουν κυματώσεις στο διάγραμμα της στιγμιαίας συχνότητας στις χρονικές στιγμές που ξεκινά και τελειώνει το αρχικό σήμα. Παραβλέποντας τις παραπάνω κυματώσεις παρατηρούμε ότι το γράφημα της στιγμιαίας συχνότητας δείχνει ξεκάθαρα ότι υπάρχουν δύο σημεία στο αρχικό σήμα όπου το πλάτος του γίνεται ελάχιστο και μάλιστα η χρονική τους απόσταση είναι όση και η διαφορά στη συχνότητα των δύο συνημιτόνων, δηλαδή  $T = 1/5 = 0.2 \text{ sec}$ . Επίσης είναι φανερό ότι η στιγμιαία συχνότητα λαμβάνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της όπως αυτή έχει υπολογιστεί καθώς ακόμα και ότι κατά τη μεγαλύτερη διάρκεια του σήματος έχει τιμή κοντινή σε αυτή του αρχικού σήματος.

#### **4.7 Η εύρεση της περιβάλλουσας μιας κυματομορφής**

Μετά την ανάλυση και την επεξήγηση της χρήσης της στιγμιαίας συχνότητας όπως προκύπτει μέσω του μετασχηματισμού Hilbert θα αναφερθούμε και στη έννοια της περιβάλλουσας, η οποία προκύπτει μέσω του ίδιου μετασχηματισμού.

Ο μαθηματικός ορισμός της περιβάλλουσας είναι αυτός που περιγράφεται από τη σχέση (2.1.21). Το συγκεκριμένο μέγεθος είναι χρήσιμο σε πολλές εφαρμογές.

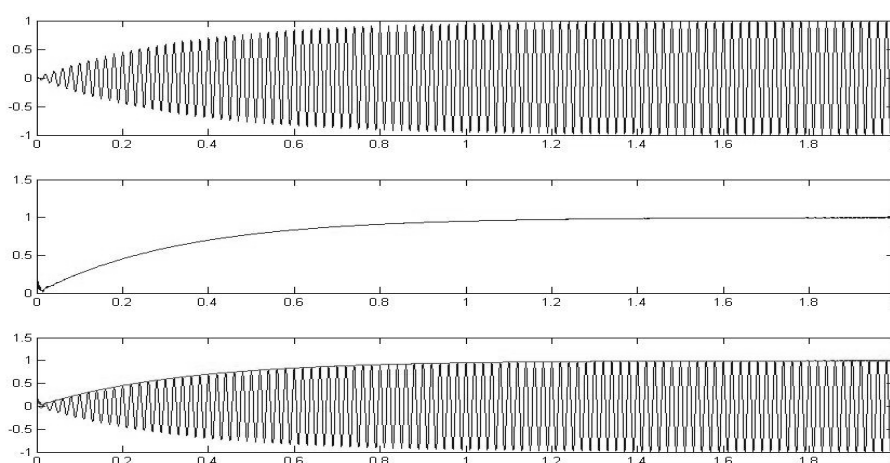
Στην πτυχιακή εργασία θα δούμε την εφαρμογή του στον τομέα της ακουστικής και ειδικότερα στον τομέα της ακουστικής μουσικών οργάνων.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου εξετάζεται και ο ρόλος που παίζουν οι σχέσεις των πλατών όλων των αρμονικών ενός ήχου στην αντίληψη του ήχου από το ανθρώπινο αυτί και σε ποιο βαθμό μπορούμε να αλλάξουμε τις σχέσεις αυτές ούτως ώστε να μην επηρεάζεται η αντίληψη του ακροατή [18].

Έχει επίσης μελετηθεί και η στατιστική διακύμανση συναρτήσεων του χρόνου, των φασματικών συνιστωσών των ήχων μουσικών οργάνων, [19].

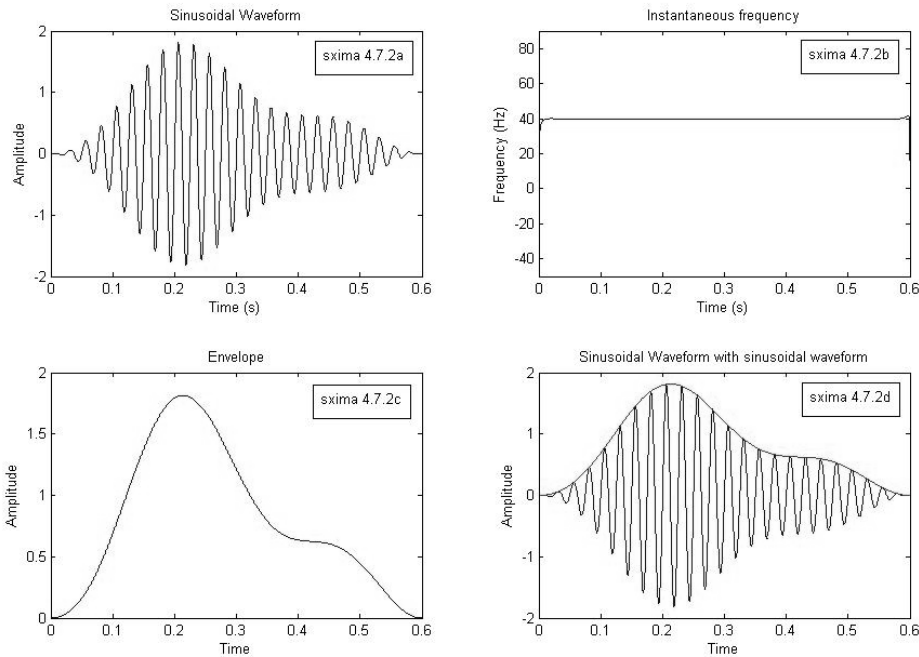
Εικάζουμε ότι οι διακυμάνσεις με το χρόνο, των φασματικών συνιστωσών ενός ήχου μουσικού οργάνου, παίζουν σημαντικό ρόλο στην αντίληψη του ήχου αυτού από τον ακροατή και ειδικότερα κατά το αρχικό στάδιο του ήχου. Γι' αυτό θα αρχίσουμε γενικά με τον υπολογισμό της περιβάλλουσας απλών και περισσότερο σύνθετων ήχων.

Όπως και στην περίπτωση της στιγμιαίας συχνότητας, θα μελετήσουμε την περιβάλλουσα ορισμένων σημάτων ελέγχου, όπως αυτή υπολογίζεται, μέσω του μετασχηματισμού Hilbert. Στο σχήμα 4.7.1 παρατίθεται το πρώτο παράδειγμα ενός σήματος ελέγχου (απλό ημιτόνο με εκθετική αύξηση του πλάτους του), μαζί με την περιβάλλουσά του. Για το σήμα αυτό, μπορούμε να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις: Η προκύπτουσα περιβάλλουσα ακολουθεί πιστά την άνοδο του πλάτους του σήματος. Παρατηρούμε επίσης και κάποιες ατέλειες στη περιβάλλουσα που παρουσιάζονται στην αρχή και στο τέλος του σήματος.



Σχήμα 4.7.1: Το σήμα ελέγχου (πάνω), η περιβάλλουσά του (κέντρο) και το σήμα ελέγχου μαζί με την περιβάλλουσα (κάτω).

Στο σχήμα 4.7.2a βλέπουμε το αρχικό σήμα το οποίο είναι ένα απλό ημιτονοειδές σήμα με μία αυθαίρετη περιβάλλουσα. Στο 4.7.2b φαίνεται η στιγμιαία συχνότητα της κυματομορφής, στο 4.7.2c μόνο η περιβάλλουσα και στο 4.7.2d βλέπουμε το αρχικό με την περιβάλλουσα όπως προέκυψε μέσω του μετασχηματισμού Hilbert.

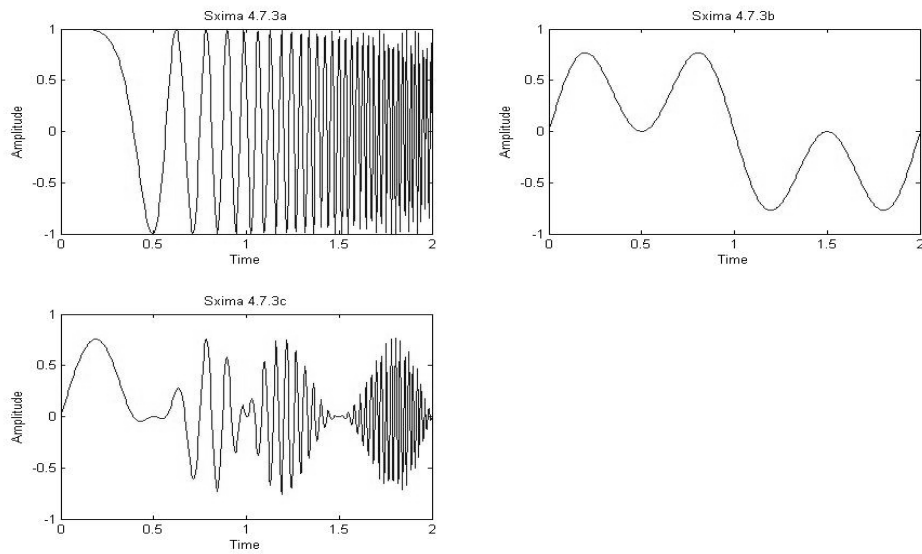


Σχήμα 4.7.2: a) το αρχικό σήμα, b) η στιγμιαία συχνότητα του αρχικού σήματος, c) η περιβάλλουσα του αρχικού σήματος και d) το αρχικό σήμα με την περιβάλλουσά του.

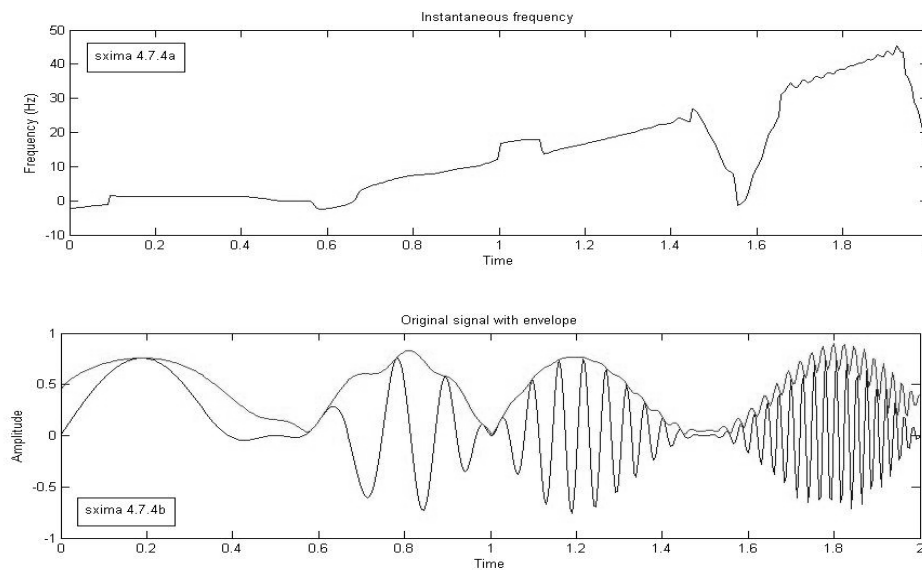
Από το γράφημα του σήματος ελέγχου και της περιβάλλουσας (πάνω αριστερά) παρατηρούμε ότι η περιβάλλουσα παρουσιάζει πολύ καλά χαρακτηριστικά δίχως να παρουσιάζει ασυνέχειες.

Στα σχήματα 4.7.3 και 4.7.4 φαίνονται ένα άλλο σήμα ελέγχου με πιο απότομες μεταβολές στις τιμές του πλάτους του πράγμα που έχει αντίκτυπο και στο γράφημα της περιβάλλουσάς του. Το σήμα αποτελείται από ένα αρχικό σήμα chirp (4.7.3a) του οποίου το πλάτος διαμορφώνεται από ένα άλλο σήμα (φαίνεται στο 4.7.3b). Στο 4.7.3c βλέπουμε το αποτέλεσμα που προκύπτει. Σε αυτό το σήμα εφαρμόζοντας τις μεθόδους που αναφέραμε παραπάνω, βλέπουμε στο σχήμα 4.7.4a τη στιγμιαία συχνότητα του σήματος και στο 4.7.4b το σήμα με την περιβάλλουσα του. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι οι κάπως μεγάλες αποκλίσεις στην περιβάλλουσα, που βλέπουμε

στην αρχή και στο τέλος του σήματος, οφείλεται στις παραμορφώσεις που δημιουργούνται συνήθως κατά τον μετασχηματισμό Hilbert.



Σχήμα 4.7.3: a) το αρχικό chirp, b) το διαμόρφον σήμα και c) το σήμα ελέγχου που προκύπτει.



Σχήμα 4.7.4: a) η στιγμιαία συχνότητα του σήματος ελέγχου και b) το σήμα ελέγχου με την περιβάλλουσά του.

Από το σήμα 4.7.4 παρατηρούμε ότι οι μεταβολές στο πλάτος του αρχικού σήματος έχουν αντίκτυπο και στο γράφημα της περιβάλλουσας του ίδιου σήματος.

Όσο πιο έντονες γίνονται οι κυματώσεις του αρχικού σήματος τόσο πιο πολλές γίνονται και οι κυματώσεις της περιβάλλουσας. Επακόλουθο των κυματώσεων της περιβάλλουσας είναι και οι κυματώσεις της στιγμιαίας συχνότητας. Επίσης μια σημαντική εξάρτηση του γραφήματος της στιγμιαίας συχνότητας και της περιβάλλουσας έχει να κάνει με τις τιμές του πλάτους της περιβάλλουσας. Στα χρονικά σημεία που η περιβάλλουσα λαμβάνει μηδενικές τιμές η στιγμιαία συχνότητα λαμβάνει αρνητικές τιμές.

#### Αναφορές Κεφαλαίου 4

- [1]: B. Boashash, *Estimating and Interpreting The Instantaneous Frequency of a Signal – Part 1: Fundamentals*, Proc. IEEE, vol. 80, pp. 520-538, 1999.
- [2]: J. Carson and T. Fry, *Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency modulation*, Bell System Tech. J., vol. 16, pp 513-540, 1937.
- [3]: B. Van Der Pol, *The fundamental principles of frequency modulation*, Proc. IEEE, vol. 93 (III), pp. 153-158, 1946.
- [4]: D. Gabor, *Theory of communication*, Proc. IEEE, vol. 93 (III), pp. 429-457, 1946.
- [5]: J. Ville, *Thoerie et application de la notion de signal analytic*, Cables and Transmissions, vol. 2A(1), pp. 61-74, Paris, France, 1948. Translation by I. Selin, *Theory and applications of the notion of complex signal*, Report T-92, RAND Cooperation, Santa Monica, CA.
- [6]: A. Richaczek, *Hilbert transforms and the complex representation of signals*, Proc. IEEE, vol. 54, pp. 434-435, 1966.
- [7]: D. E. Vakman and L. A. Vainstein, *Amplitude, phase, frequency – Fundamental concepts of oscillation theory*, in Sov. Phys. Usp., vol. 20, pp. 1002-1016, 1977.
- [8]: J. Shekel, *Instantaneous frequency*, Proc. IRE, vol. 41, pp. 548, 1953.
- [9]: L. Mandel, *Interpretation of instantaneous frequency*, Amer. J. Phys., vol. 42, pp. 840-846, 1974.
- [10]: M. B. Priestley, *Non-linear and Non-stationary Time-series Analysis*. London, UK: Academic Press, 1972.

- [11]: L. Cohen, *Generalised phase-space distributions*, J. Math. Phys., vol. 7, pp. 781-786, 1966.
- [12]: M. H. Ackroyd, *Instantaneous and time varying spectra-An introduction*, J. Radio and Electron. Eng., vol.39, 1970.
- [13]: L. Rossi and G. Girolami, *Instantaneous frequency and short time term Fourier transforms: Application to piano sounds*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 110, pp. 2412-2420, 2001.
- [14]: D. W. Guillaume, *A comparison of peak frequency-time plots produced with Hilbert and wavelet transform*, Rev. Sci. Instrum., vol. 73, pp. 98-101, 2002.
- [15]: Eugenio Hernandez, Guido L. Weiss (1996), *A First Course on Wavelets* (CRC Press).
- [16]: Gerald Kaiser (1994), *A Friendly Guide to Wavelets* (Birkhauser-Boston).
- [17]: Ingrid Daubenchies (1992), *Ten Lectures on Wavelets* (SIAM).
- [18]: Stephen Mc Adams, James W. Beauchamp, Suzanna Meneguzzi, *Discrimination of musical instrument sounds resynthesized with simplified spectrotemporal parameters*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 105, pp. 882-897, 1999.
- [19]: Shigeo Ando, Kiminori Yamaguchi, *Statistical study of spectral parameters in musical instrument tone*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 94, pp. 37-45, 1993.

## **Κεφάλαιο 5: Μελέτη ήχων από μουσικά όργανα και φωνή**

Στις ενότητες που ακολουθούν θα μελετηθούν ήχοι φωνής και μουσικών οργάνων, οι οποίοι είναι είτε από φυσικά όργανα είτε είναι από συνθετητές (synthesizers). Τα βήματα που ακολουθήθηκαν για αυτή τη μελέτη είναι κοινά για όλους τους ήχους. Η μελέτη εστιάζεται στην παρατήρηση και την εξαγωγή συμπερασμάτων αναφορικά με την περιβάλλουσα και τη στιγμιαία συχνότητα των αρμονικών του κάθε ήχου και γίνονται και συγκρίσεις μεταξύ των οργάνων.

Η εφαρμογή όλων των αλγορίθμων που περιγράφηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια καθώς και όλα τα σχήματα που εμφανίζονται στην εργασία αυτή έγιναν χρησιμοποιώντας το MATLAB. Όλοι οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν παρατίθενται στο συνοδευτικό cd της πτυχιακής εργασίας.

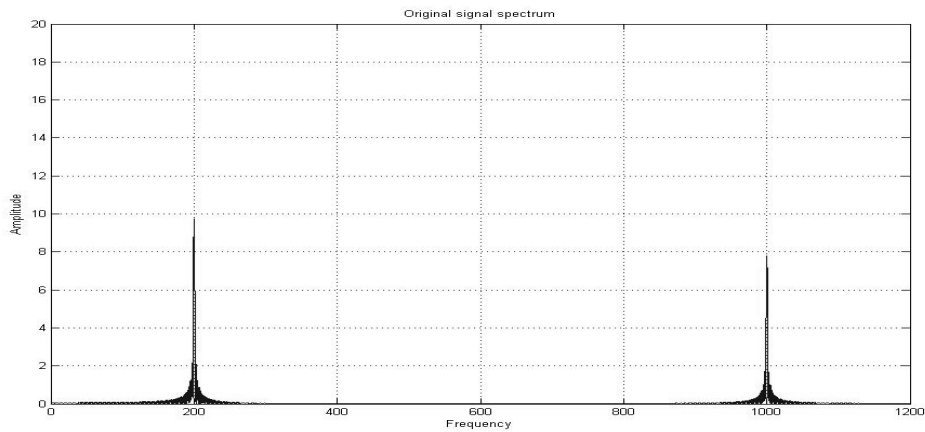
Ακολουθούν τα βήματα της μελέτης των ήχων:

Εύρεση του φασματικού περιεχομένου κάθε εξεταζόμενου ήχου (ήχου μουσικού οργάνου ή φωνής), ώστε να προσδιοριστούν επακριβώς οι περιοχές που βρίσκονται οι φασματικές συνιστώσες (στα περισσότερα παραδείγματα εδώ είναι αρμονικές).

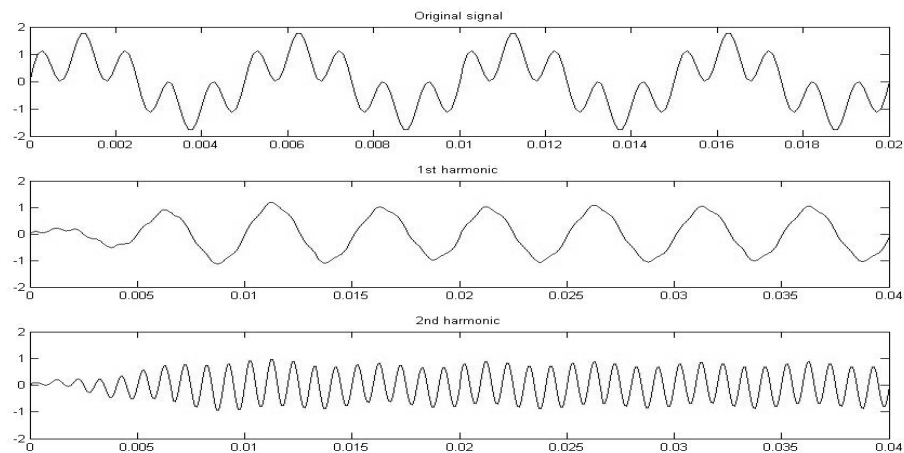
Επειδή η μελέτη κάθε ήχου που μας ενδιαφέρει βασίζεται στην επιμέρους ανάλυση των αρμονικών του, έπρεπε να γίνει ο διαχωρισμός των αρμονικών αυτών. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού υλοποιήσαμε στο Matlab ένα ζωνοπερατό φίλτρο με τη χρήση του οποίου εξάγεται κάθε φορά ο υπό μελέτη αρμονικός του αρχικού σήματος. Επιλέχθηκε ένα ελλειπτικό ψηφιακό φίλτρο 4<sup>ης</sup> τάξης, διότι παρουσιάζει ικανοποιητικά χαρακτηριστικά (π.χ. λιγότερες κυματώσεις στην περιοχή διέλευσης, σε σχέση με άλλα φίλτρα που υλοποιήσαμε και δοκιμάσαμε. Οι κυματώσεις (peak to peak) σε dB, στην περιοχή λειτουργίας, είναι της τάξης του 0.001 και η ελάχιστη μείωση που δημιουργεί στη ζώνη αποκοπής είναι 40 dB. Η περιοχή και το εύρος λειτουργίας του φίλτρου καθορίζεται κατά περίπτωση ανάλογα με το εκάστοτε εξεταζόμενο σήμα και τη συγκεκριμένη αρμονική. Πρέπει να τονίσουμε ότι στις περιπτώσεις όπου αναγκαστικά πρέπει να έχουμε μικρό εύρος διέλευσης του φίλτρου (συνήθως σε χαμηλές συχνότητες και στις πρώτες αρμονικές), οι κυματώσεις στην περιοχή λειτουργίας του φίλτρου γίνονται μεγαλύτερες, ενώ οι κυματώσεις στη περιοχή αποκοπής εκτείνονται σε μεγαλύτερο εύρος, εκατέρωθεν. Άρα, οι παράμετροι του φίλτρου είναι αλληλένδετες μεταξύ τους και η επιλογή τους πρέπει να γίνεται πολύ προσεκτικά.



Επίσης πριν την εφαρμογή του φίλτρου στους ήχους των μουσικών οργάνων, εισαγάγαμε ένα σήμα ελέγχου στο φίλτρο για να εξετάσουμε αν υπάρχει αλλαγή στη φάση στο σήμα εξόδου. Στο σχήμα 5.1 φαίνεται το συχνοτικό φάσμα του σήματος ελέγχου το οποίο αποτελείται από δύο συχνότητες και στο σχήμα 5.2 οι κυματομορφές του σήματος ελέγχου πριν το φιλτράρισμα και των δύο αρμονικών όπως αυτές λαμβάνονται στην έξοδο του φίλτρου. Όπως διαπιστώθηκε, το φίλτρο δεν επηρεάζει σημαντικά τη φάση του σήματος.



Σχήμα 5.1: Το φάσμα του σήματος ελέγχου πριν το φιλτράρισμα

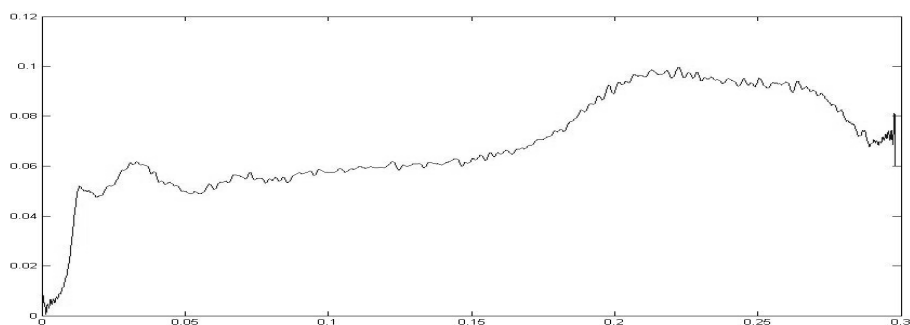


Σχήμα 5.2: Η κυματομορφή του σήματος ελέγχου πριν το φιλτράρισμα (πάνω) και οι κυματομορφές του πρώτου αρμονικού (κέντρο) και του δεύτερου αρμονικού (κάτω) του σήματος ελέγχου μετά το φιλτράρισμα.

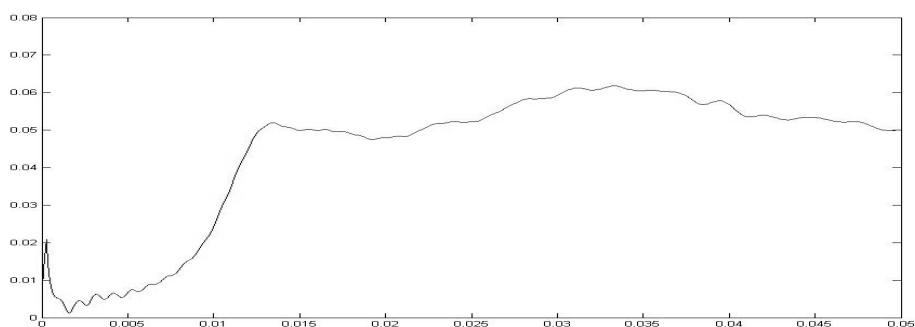
Σε κάθε ένα αρμονικό που προκύπτει από το φιλτράρισμα του αρχικού ήχου εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Hilbert με σκοπό την εξαγωγή του γραφήματος της περιβάλλουσας και της στιγμιαίας συχνότητας. Εν συνεχεία πραγματοποιείται και

υπολογισμός του χρόνου ανόδου, για κάθε φασματική συνιστώσα (αρμονική). Ο χρόνος ανόδου ορίζεται ως το χρονικό διάστημα που οριοθετείται από το χρονικό σημείο που η τιμή του πλάτους είναι το 10% της μέγιστης του τιμής, μέχρι το χρονικό σημείο που η τιμή του φτάνει το 90% της μέγιστης τιμής του.

Εξετάζεται επίσης η (χρονική) σχέση κάθε αρμονικής (μέχρι και την 6<sup>η</sup>), με τη θεμέλια. Για το λόγο αυτό παρατίθενται και γραφήματα με συγκεντρωμένα τα αποτελέσματα των αρμονικών κάθε εξεταζόμενου ήχου. Επειδή στη τελική μορφή της περιβάλλουσας κάθε αρμονικής υπήρχαν μικρές διακυμάνσεις του πλάτους, χρησιμοποιήθηκε ένα φίλτρο μετατόπισης μέσης τιμής, ώστε να εξομαλυνθούν οι κυματομορφές. Ένα παράδειγμα όπου φαίνεται η μεταβολή μίας αρμονικής πριν και μετά την εξομάλυνση, φαίνεται στα σχήματα 5.3α και 5.3β.



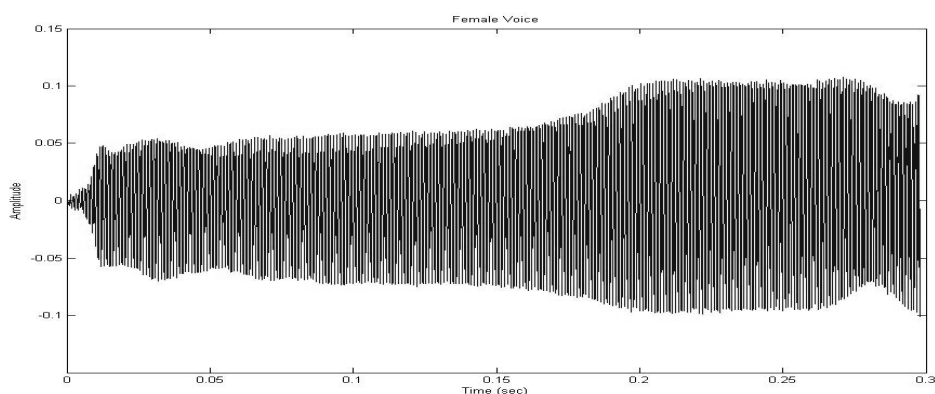
Σχήμα 5.3α: Μία αρμονική πριν την εξομάλυνση



Σχήμα 5.3β: Η αρμονική του σχήματος 5.3α μετά την εξομάλυνση

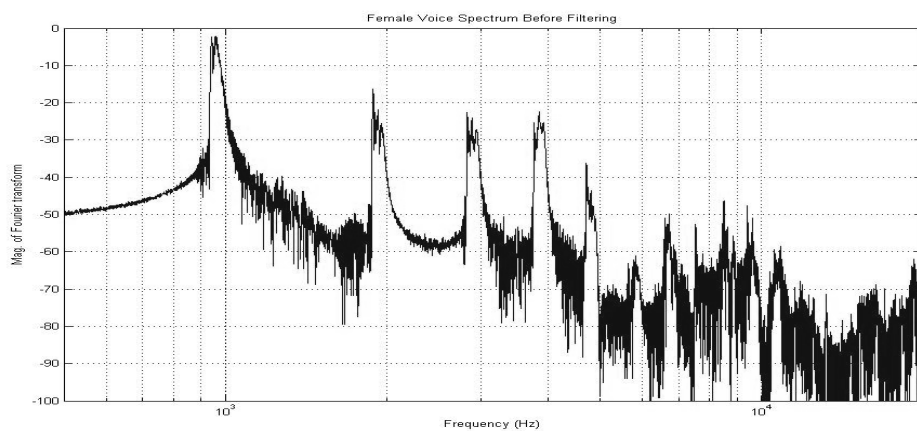
## 5.1 Μελέτη γυναικείας φωνής (soprano)

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε τον ήχο μιας γυναικείας φωνής soprano. Το σήμα που εξετάζουμε είναι το αρχικό στάδιο (0.29 s) από μία νότα (B5), η οποία έχει αποκοπεί από κάποια τραγουδισμένη φράση. Στο σχήμα 5.1.1 φαίνεται το αρχικό σήμα που θα εξετάσουμε. Η ηχογράφηση της φωνής έγινε στο studio του τμήματος Μουσικής Τεχνολογίας και Ακουστικής.



Σχήμα 5.1.1: Αρχικό στάδιο νότας από γυναικεία φωνή (βλέπε κείμενο)

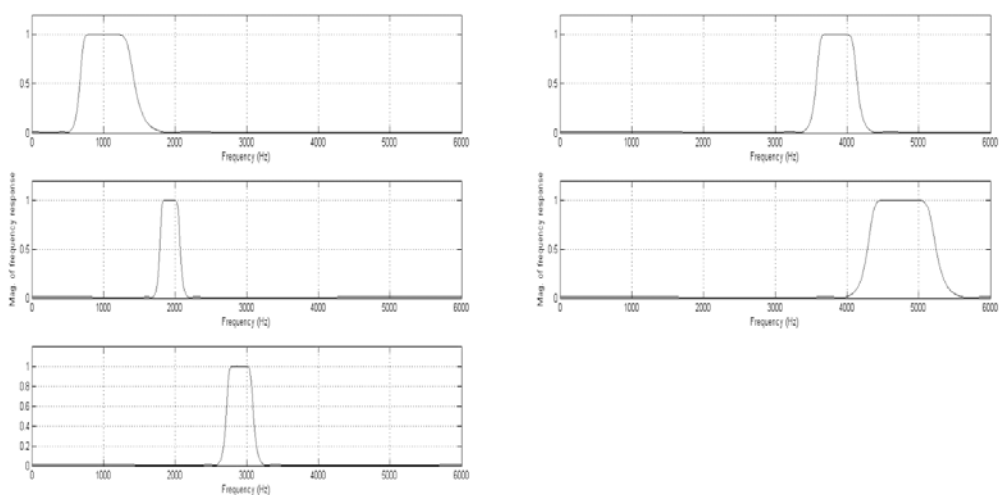
Στο σχήμα 5.1.2 φαίνονται οι φωνοσυχρότητες που αποτελούν το σήμα του σχήματος 5.1.1 όπως προκύπτουν μετά από φασματική ανάλυση του αρχικού σήματος φωνής.



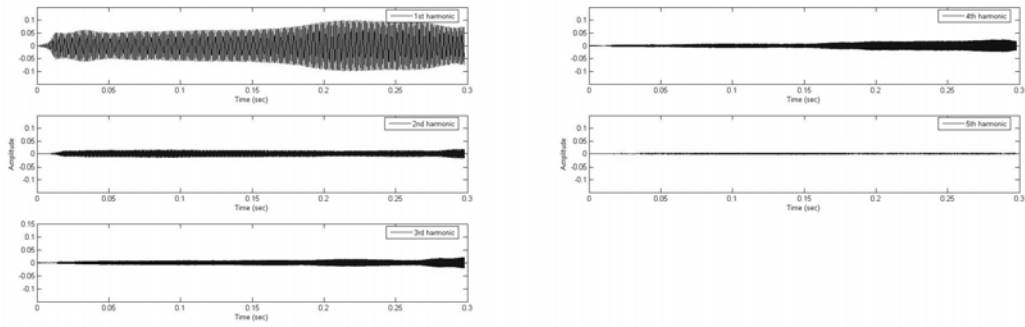
Σχήμα 5.2.2: Η φασματική ανάλυση της τραγουδισμένης νότας.

Παρατηρούμε την πρώτη φωνοσυχνότητα η οποία έχει μεγαλύτερο πλάτος από τις υπόλοιπες. Επίσης παρατηρούμε σε κάθε φωνοσυχνότητα και επί μέρους μέγιστα. Αυτό οφείλεται στις ιδιαιτερότητες της τραγουδιστικής φωνής και τις ιδιαιτερότητες της συγκεκριμένης τραγουδίστριας. Αυτό εξ άλλου απεικονίζεται και στα γραφήματα της στιγμιαίας συχνότητας που παρατίθενται παρακάτω (Σχήμα 5.1.5).

Στο σχήμα 5.1.3 που ακολουθεί φαίνονται οι συναρτήσεις μεταφοράς του ελλειπτικού φίλτρου που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των πέντε πρώτων αρμονικών του αρχικού σήματος. Αντίστοιχα φίλτρα με παρόμοιες συναρτήσεις μεταφοράς χρησιμοποιήθηκαν και για τα άλλα όργανα, οπότε παρατίθενται μόνο εδώ. Στο σχήμα 5.1.4 παρατίθενται οι κυματομορφές για τις πέντε πρώτες φωνοσυχνότητες, μετά από το φιλτράρισμα του αρχικού σήματος.

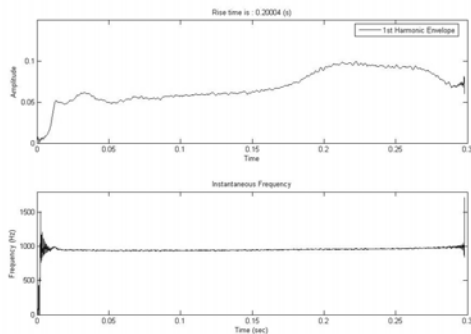


Σχήμα 5.1.3: Οι συναρτήσεις μεταφοράς του ελλειπτικού φίλτρου για την εξαγωγή της πρώτης (πάνω αριστερά), της δεύτερης (κέντρο αριστερά), της τρίτης (κάτω αριστερά), της τέταρτης (πάνω δεξιά) και της πέμπτης φωνοσυχνότητας (κάτω δεξιά) του σήματος της τραγουδισμένης νότας (βλέπε σχήμα 5.1.1).

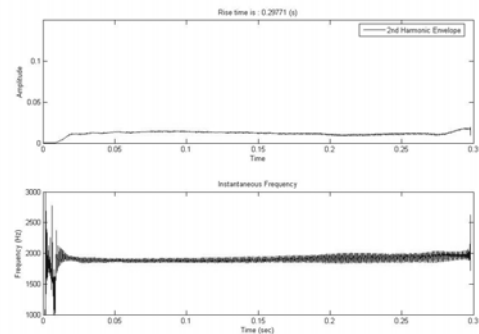


Σχήμα 5.1.4: Οι κυματομορφές της πρώτης (πάνω αριστερά), της δεύτερης (κέντρο αριστερά), της τρίτης (κάτω αριστερά), της τέταρτης (πάνω δεξιά) και της πέμπτης φωνοσυχνότητας (κάτω δεξιά) του αρχικού σταδίου του σήματος, όπως προκύπτουν μετά το φιλτράρισμα του αρχικού σήματος.

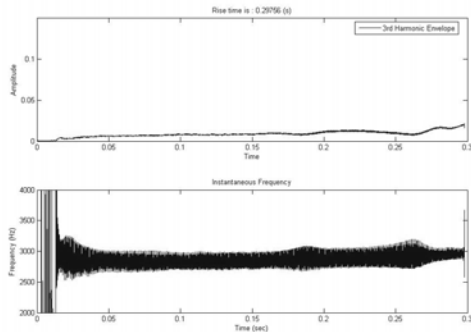
Στα σχήματα που ακολουθούν παρατίθενται η χρονική εξέλιξη για τις πέντε πρώτες φωνοσυχνότητες (πάνω γράφημα), η στιγμιαία της συχνότητα (κάτω γράφημα) και ο χρόνος ανόδου της, όπως υπολογίστηκε για κάθε φωνοσυχνότητα.



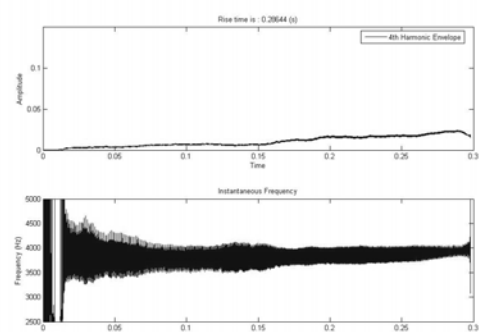
α) 1<sup>η</sup> φωνοσυχνότητα



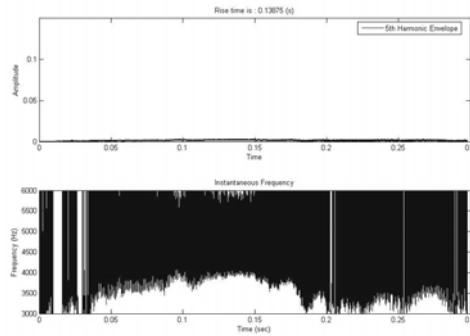
β) 2<sup>η</sup> φωνοσυχνότητα



γ) 3<sup>η</sup> φωνοσυχνότητα



δ) 4<sup>η</sup> φωνοσυχνότητα



ε) 5<sup>η</sup> φωνοσυχνότητα

Σχήμα 5.1.5: Η περιβάλλουσα, η στιγμιαία συχνότητα και ο χρόνος ανόδου των πέντε πρώτων φωνοσυχνοτήτων της τραγουδισμένης νότας.

Από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος 5.1.5 προκύπτουν διάφορες σχέσεις ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις της περιβάλλουσας και της στιγμιαίας συχνότητας. Παρατηρούμε ότι στα σημεία που το πλάτος της περιβάλλουσας (της κάθε φωνοσυχνότητας) είναι μηδενικό ή πολύ μικρό, η στιγμιαία συχνότητα παρουσιάζει μεγάλες κυματώσεις. Αυτό φαίνεται καθαρά στο γράφημα της πέμπτης φωνοσυχνότητας και οφείλεται στο γεγονός ότι η στιγμιαία συχνότητα υπολογίζεται μέσω της κλίσης που έχει η φάση του αναλυτικού σήματος και κοντά στο μηδέν αυτή παρουσιάζει αυξομειώσεις.

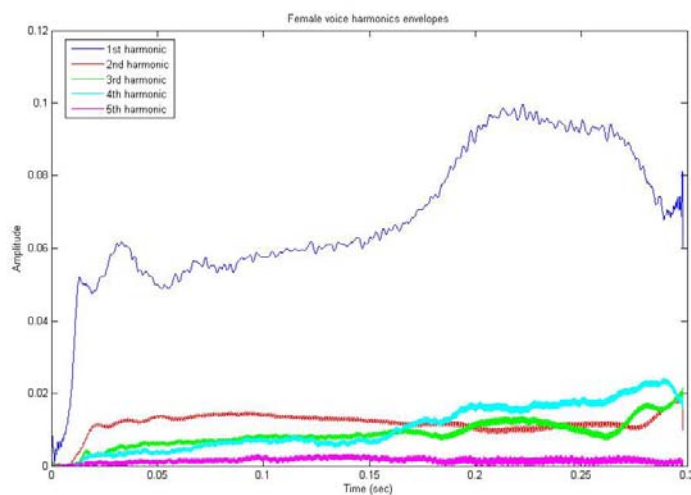
Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται οι χρόνοι ανόδου των πέντε φωνοσυχνοτήτων που εξετάσαμε.

Χρόνος ανόδου των φωνοσυχνοτήτων του σήματος γυναικείας φωνής	
Τάξη φωνοσυχνότητας	Χρόνος ανόδου (sec)
1 <sup>η</sup>	0.20004
2 <sup>η</sup>	0.29771
3 <sup>η</sup>	0.29756
4 <sup>η</sup>	0.28644
5 <sup>η</sup>	0.13875

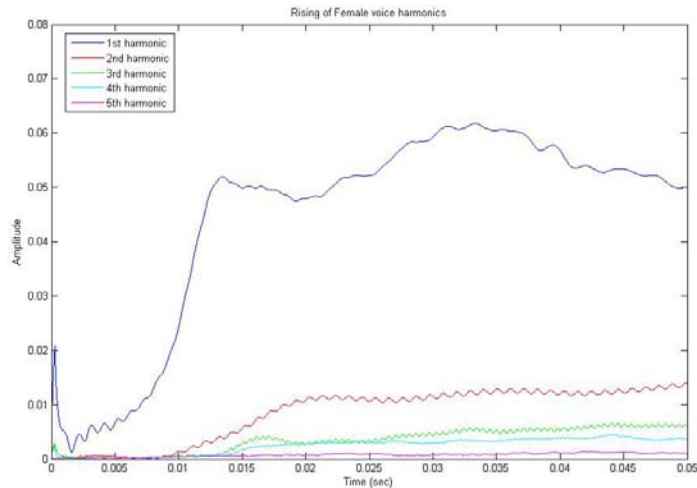
Πίνακας 5.1: Οι χρόνοι ανόδου των πέντε πρώτων φωνοσυχνοτήτων της γυναικείας φωνής

Σύμφωνα με τον πίνακα 5.1 οι φωνοσυχνότητες του εξεταζόμενου σήματος παρουσιάζουν διαφορές μεταξύ τους όσον αφορά το χρόνο ανόδου. Η μικρότερη τιμή αντιστοιχεί στην πέμπτη φωνοσυχνότητα και η αμέσως μεγαλύτερη τιμή στην πρώτη. Οι χρόνοι ανόδου της τρίτης και τέταρτης φωνοσυχνότητας έχουν πολύ κοντινές τιμές, οι οποίες διαφέρουν ανεπαίσθητα από την τιμή του χρόνου ανόδου της τέταρτης φωνοσυχνότητας.

Για μια πιο διεξοδική μελέτη της χρονικής εξέλιξης των φωνοσυχνοτήτων του σήματος της γυναικείας φωνής soprano είναι χρήσιμη σύγκριση των γραφικών παραστάσεων των περιβάλλουσων όλων των αρμονικών. Στο σχήμα 5.1.6 είναι συγκεντρωμένες οι περιβάλλουσες των πέντε πρώτων φωνοσυχνοτήτων του αρχικού μας σήματος. Ακόμα για να συνδυάσουμε τα αποτελέσματα των χρόνων ανόδου που απεικονίζονται στον πίνακα 5.1 παραθέτουμε στο σχήμα 5.1.7 τη χρονική εξέλιξη του αρχικού σταδίου του σήματος. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει τα τμήματα αυτά έχουν εξομαλυνθεί με τη χρήση ενός φίλτρου μετατόπισης μέσης τιμής.



Σχήμα 5.1.6: Οι περιβάλλουσες των πέντε πρώτων φωνοσυχνοτήτων του σήματος γυναικείας φωνής soprano.



Σχήμα 5.1.7: Εστίαση στην αρχή της νότας (αρχή του σήματος 5.1.6).

Θα εστιάσουμε την προσοχή μας στο σχήμα 5.1.7, δηλαδή στα πρώτα στάδια της χρονικής εξέλιξης των πέντε πρώτων φωνοσυχνοτήτων. Η πρώτη φωνοσυχνότητα έχει συγκριτικά με τις υπόλοιπες τέσσερις αρμονικές το μεγαλύτερο πλάτος περιβάλλουσας. Επίσης η ίδια αρμονική αρχίζει να εξελίσσεται από τη χρονική στιγμή  $t = 0 \text{ sec}$ , τη στιγμή που οι υπόλοιπες για χρονικό διάστημα  $t = 0.01 \text{ sec}$  έχουν μηδενικό ή σχεδόν μηδενικό πλάτος και αρχίζουν να εξελίσσονται μετά την πάροδο αυτού του χρονικού διαστήματος με την περιβάλλουσα της δεύτερης φωνοσυχνότητας να εξελίσσεται πιο πριν από αυτές της τρίτης, τέταρτης και πέμπτης φωνοσυχνότητας. Υπάρχει διαφορά στον τρόπο μετάβασης των περιβάλλουσων από τις κοντινές στο μηδέν τιμές πλάτους σε αυτές με μεγαλύτερες τιμές. Η περιβάλλουσα της πρώτης φωνοσυχνότητας τη χρονική στιγμή  $t = 0.01 \text{ sec}$  παρουσιάζει μια απότομη μετάβαση σε μεγαλύτερες τιμές πλάτους, ενώ οι περιβάλλουσες των τριών επόμενων φωνοσυχνοτήτων μεταβαίνουν σε τέτοιες τιμές με πιο ομαλό τρόπο. Εν αντιθέσει με τις τέσσερις πρώτες φωνοσυχνότητες, το γράφημα της πέμπτης δεν παρουσιάζει μεγάλες διαφορές στις τιμές του πλάτους του για το αρχικό στάδιο της εξέλιξης της συγκεκριμένης φωνοσυχνότητας. Ακόμα παρατηρούνται και αυξομειώσεις στις τιμές πλάτους κάθε περιβάλλουσας. Οι αυξομειώσεις της πρώτης φωνοσυχνότητας κυμαίνονται σε μεγαλύτερο εύρος τιμών σε σχέση με τις αυξομειώσεις που παρουσιάζουν τα πλάτη των υπόλοιπων τεσσάρων. Το γράφημα της περιβάλλουσας της τρίτης και της τέταρτης εμφανίζει μία ιδιαιτερότητα που δεν



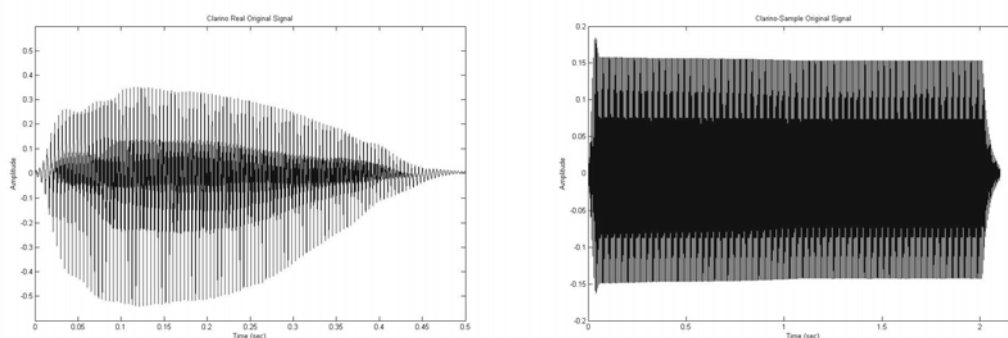
εμφανίζεται στα υπόλοιπα γραφήματα. Για το χρονικό διάστημα  $0.02 \text{ sec} < t < 0.025 \text{ sec}$  οι τιμές πλάτους των δύο αυτών γραφημάτων είναι ίδιες.

Οι κώδικες του MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των γραφημάτων καθώς και όλης της ανάλυσης της ενότητας μαζί με το αρχείο ήχου (wav) του σήματος της γυναικείας φωνής soprano βρίσκονται στο συνοδευτικό cd της πτυχιακής εργασίας στο φάκελο *female voice*.

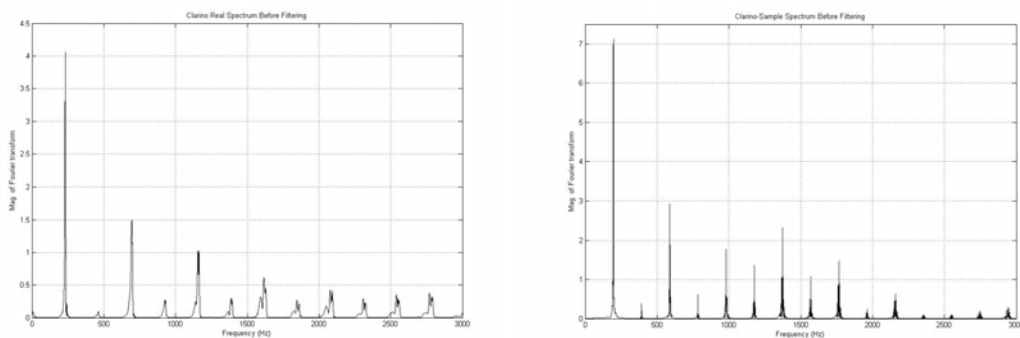
## 5.2 Μελέτη κλαρίνου

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ήχους δύο ήχους κλαρίνου. Ο πρώτος αντιστοιχεί στον ήχο που ηχογραφήθηκε από ένα φυσικό όργανο κλαρίνου και ο δεύτερος αντιστοιχεί σε ήχο που δημιουργήθηκε με τη βοήθεια ενός συνθετητή. Ο πρώτος ήχος ηχογραφήθηκε με μικρόφωνο Shure SM 58 σε κάρτα ήχου EMU 1828m ενώ ο δεύτερος δημιουργήθηκε από το συνθετητή μιας κάρτας ήχου Sound Blaster Audigy.

Οι δύο εξεταζόμενοι ήχοι αντιστοιχούν στη νότα A2. Στο σχήμα 5.2 παρατίθενται οι κυματομορφές των δύο αυτών ήχων και στο σχήμα 5.2 οι αρμονικοί που προκύπτουν μετά από φασματική ανάλυση των δύο αρχικών σημάτων. Η ανάλυση των ήχων περιλαμβάνει τα ίδια βήματα με αυτή της ενότητας 5.1.



Σχήμα 5.2.1: Οι κυματομορφές του φυσικού ήχου κλαρίνου (αριστερά) και του συνθετημένου ήχου κλαρίνου (δεξιά).



Σχήμα 5.2.2: Οι αρμονικές του φυσικού ήχου (αριστερά) και του συνθετημένου ήχου κλαρίνου (αριστερά).

Από τη σύγκριση των γραφημάτων του σχήματος 5.2.1 προκύπτει μία αρχική διαφορά των δύο σημάτων. Το φυσικό σήμα λόγω του ότι παράχθηκε με την εφαρμογή πίεσης αέρα στο επιστόμιο του κλαρίνου από τα χείλη του οργανοπαίχτη έχει απότομες μεταβολές στις τιμές του πλάτους της κυματομορφής του, ενώ το συνθετημένο σήμα δεν έχει τόσο απότομες μεταβολές στο πλάτος του.. Ακόμα υπάρχουν και διαφορές στις αρμονικές που απαρτίζουν το κάθε σήμα. Στο φυσικό σήμα οι αρμονικές ακολουθούν τη θεωρία της ακουστικής των μουσικών οργάνων με αποτέλεσμα οι περιττές αρμονικές να έχουν μεγαλύτερο πλάτος από τις άρτιες και μάλιστα όσο η τάξη των περιττών αρμονικών αυξάνει το πλάτος να μειώνεται, ενώ αντίστοιχα όσο αυξάνεται η τάξη των άρτιων αρμονικών το πλάτος τους αυξάνεται. Στο συνθετημένο σήμα δε συμβαίνει κάτι τέτοιο. Σύμφωνα με τη θεωρία η έβδομη αρμονική θα έπρεπε να έχει μικρότερο πλάτος από την πέμπτη, κάτι που στην πράξη δε συμβαίνει. Ακόμα οι αρμονικές του φυσικού ήχου διαθέτουν επιμέρους μέγιστα σε μεγαλύτερο βαθμό από αυτές του συνθετημένου ήχου. Επίσης οι αρμονικές του φυσικού ήχου περικλείουν πιο ευρείες συχνοτικές περιοχές από αυτές του συνθετημένου ήχου.

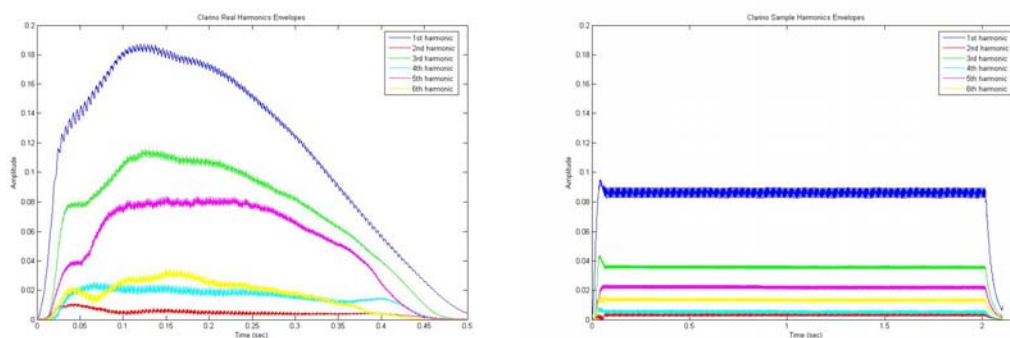
Η ανάλυση των ήχων που ακολουθεί περιλαμβάνει τη χρησιμοποίηση των έξι πρώτων αρμονικών κάθε σήματος. Στον πίνακα 5.2 παρατίθενται οι χρόνοι ανόδου των έξι πρώτων αρμονικών για κάθε ένα σήμα που μελετάμε.

Χρόνος ανόδου των αρμονικών των σημάτων κλαρίνου σε sec		
	Συνθετημένο σήμα	Φυσικό σήμα
1 <sup>η</sup> αρμονική	0.026871	0.076485
2 <sup>η</sup> αρμονική	0.062562	0.030726
3 <sup>η</sup> αρμονική	0.015488	0.083492
4 <sup>η</sup> αρμονική	0.025556	0.045193
5 <sup>η</sup> αρμονική	0.047188	0.11744
6 <sup>η</sup> αρμονική	0.021587	0.14834

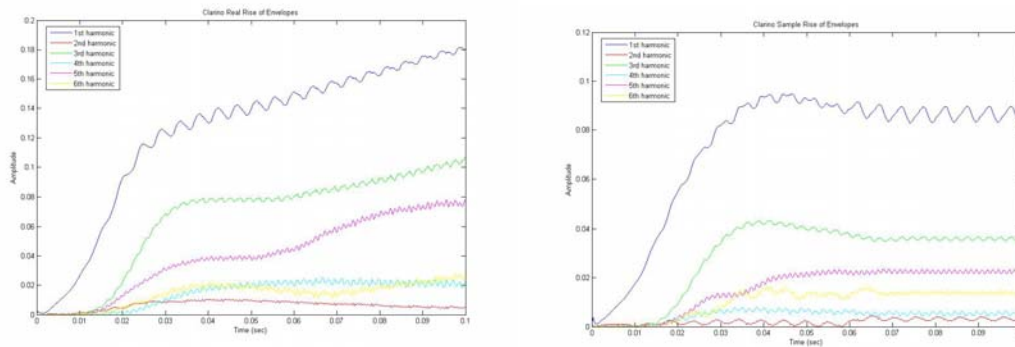
Πίνακας 5.2: Οι χρόνοι ανόδου των έξι πρώτων αρμονικών των σημάτων κλαρίνου

Από τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα προκύπτουν διαφορές ανάμεσα στους χρόνους ανόδου των δύο σημάτων. Ο μικρότερος χρόνος ανόδου για το συνθετημένο σήμα αντιστοιχεί στην τρίτη αρμονική ενώ για το φυσικό σήμα στη δεύτερη. Οι τιμές των χρόνων ανόδου του συνθετημένου σήματος είναι της τάξης εκατοστών του δευτερολέπτου για όλες τις αρμονικές, ενώ για το φυσικό σήμα της τάξης εκατοστών του δευτερολέπτου για τις τέσσερις πρώτες αρμονικές και δεκάτων του δευτερολέπτου για την πέμπτη και την έκτη. Δεν παρατηρείται αντιστοιχία στις διαφορές του χρόνου ανόδου για δύο συνεχόμενες αρμονικές ανάμεσα στα δύο σήματα. Για παράδειγμα, στο συνθετημένο σήμα ο χρόνος ανόδου της δεύτερης αρμονικής είναι περίπου τριπλάσιος από αυτόν της πρώτης, ενώ στο φυσικό σήμα η δεύτερη αρμονική έχει χρόνο ανόδου με τιμή σχεδόν υποδιπλάσια από αυτή της πρώτης αρμονικής.

Στο σχήμα 5.2.3 φαίνονται οι περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονιών για κάθε ένα εξεταζόμενο σήμα και στο σχήμα 5.2.4 τα αρχικά τμήματα των γραφημάτων του σχήματος 5.2.3.



Σχήμα 5.2.3: Οι περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονικών του φυσικού σήματος (αριστερά) και του συνθετημένου σήματος κλαρίνου (δεξιά).



Σχήμα 5.2.4: Τα αρχικά τμήματα της χρονικής εξέλιξης των έξι πρώτων αρμονικών του φυσικού σήματος (αριστερά) και του συνθετημένου σήματος (δεξιά).

Στο σχήμα 5.2.3 φαίνεται μια πολύ βασική διαφορά ανάμεσα στις περιβάλλουσες των δύο σημάτων. Οι περιβάλλουσες των αρμονικών του φυσικού σήματος δεν έχουν καθορισμένη μορφή, ενώ αυτές του συνθετημένου σήματος προσομοιάζουν ευθείες γραμμές παράλληλες μεταξύ τους. Στην αρχή καθεμιάς περιβάλλουσας του δεύτερου σήματος υπάρχει μια απότομη κορύφωση, η οποία εικάζουμε οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο διεγείραμε το συνθετητή της κάρτας ήχου για την παραγωγή του ήχου του κλαρίνου, δηλαδή το κλικ του ποντικιού του υπολογιστή που χρησιμοποιήσαμε.

Από την παρατήρηση του σχήματος 5.2.4 απορρέουν κάποιες ιδιαιτερότητες όσον αφορά τη χρονική εξέλιξη των αρμονικών κάθε σήματος ξεχωριστά. Όσον αφορά τις αρμονικές του φυσικού σήματος, η πρώτη είναι αυτή που ξεκινά την εξέλιξή της γρηγορότερα από τις υπόλοιπες και μάλιστα με αφετηρία το χρονικό σημείο που αρχίζει να εξελίσσεται και το ίδιο το σήμα. Το ίδιο παρατηρείται και στο συνθετημένο σήμα. Και στα δύο σήματα την εξέλιξη της πρώτης αρμονικής ακολουθεί η τρίτη. Η χρονική εξέλιξη της πρώτης αρμονικής του συνθετημένου σήματος έχει την ίδια μορφή για την εξέλιξη της τρίτης αρμονικής του ίδιου σήματος, πράγμα που φαίνεται από την ίδια κλίση που παρουσιάζεται στην αρχή των γραφικών παραστάσεων των περιβαλλουσών τους. Στο φυσικό σήμα η περιβάλλουσα της πρώτης αρμονικής εξελίσσεται χρονικά με τον ίδιο τρόπο που εξελίσσεται και αυτή της τρίτης αρμονικής, αλλά μόνο μέχρι το χρονικό σημείο  $t = 0.03 \text{ sec}$ .

Όσον αφορά τις υπόλοιπες αρμονικές του φυσικού σήματος μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες επισημάνσεις. Τρίτη σε χρονική σειρά εξέλιξης βρίσκεται η πέμπτη αρμονική, η δεύτερη και η έκτη ακολουθούν και μάλιστα με την εξέλιξή τους

να είναι σχεδόν ταυτόχρονη και τελευταία έπεται η τέταρτη αρμονική. Τα πιο απότομα χαρακτηριστικά εξέλιξης παρουσιάζει η πέμπτη αρμονική συγκριτικά με αυτά της δεύτερης, τέταρτης και έκτης αρμονικής. Η δεύτερη, τέταρτη και έκτη αρμονική έχουν πλάτη των οποίων οι τιμές εναλλάσσονται με την πάροδο του χρόνου και μάλιστα η δεύτερη με την έκτη αρμονική για το χρονικό διάστημα  $0.01 \text{ sec} < t < 0.025 \text{ sec}$  έχουν τις ίδιες τιμές πλάτους περιβάλλουσας. Η αρμονική που έχει τις μικρότερες τιμές πλάτους περιβάλλουσας από τις έξι πρώτες αρμονικές του φυσικού σήματος κλαρίνου είναι η δεύτερη. Από μια γενικότερη παρατήρηση όλων των πλατών των έξι πρώτων αρμονικών του ίδιου σήματος προκύπτει ότι οι περιττές αρμονικές έχουν μεγαλύτερες διαφορές σε τιμές πλάτους μεταξύ τους από τις διαφορές πλάτους που παρουσιάζουν οι άρτιες αρμονικές.

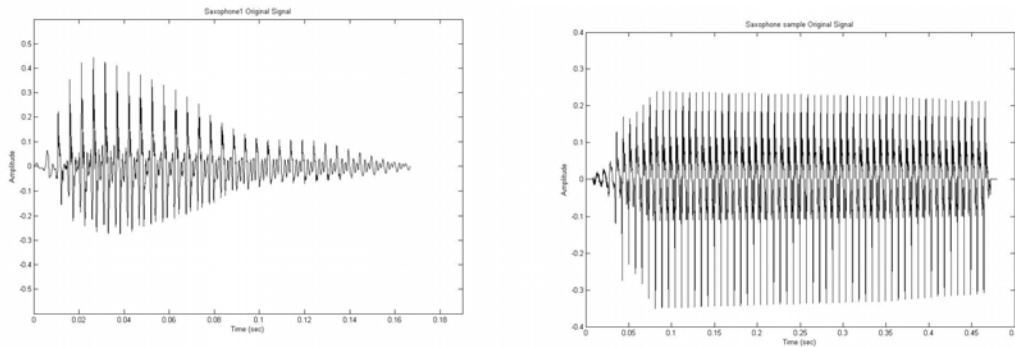
Αντίστοιχες παρατηρήσεις με αυτές της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να κάνουμε και για το συνθετημένο ήχο κλαρίνου. Η δεύτερη, τέταρτη, πέμπτη και έκτη αρμονική ξεκινάνε να εξελίσσονται ταυτόχρονα. Και για αυτόν τον ήχο η δεύτερη αρμονική είναι αυτή με τις μικρότερες τιμές πλάτους περιβάλλουσας. Η μόνη εναλλαγή τιμών περιβάλλουσας που παρατηρείται αφορά τις περιβάλλουσας της πέμπτης και της έκτης αρμονικής και μάλιστα το φαινόμενο αυτό έχει περιορισμένη χρονική διάρκεια. Ακόμα τα χαρακτηριστικά της χρονικής εξέλιξης της πέμπτης αρμονικής είναι απότομα, ενώ οι άρτιες αρμονικές εξελίσσονται ομαλότερα από τις περιττές. Τέλος, ενώ οι υπόλοιπες αρμονικές δεν έχουν μεγάλες μεταβολές στις τιμές του πλάτους περιβάλλουσάς τους, η έκτη αρμονική έχει τις περισσότερες μεταβολές στο πλάτος της περιβάλλουσάς της.

Οι κώδικες του MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν για την παραπάνω ανάλυση καθώς και τα αρχικά αρχεία ήχου (wav) βρίσκονται στο φάκελο *clarino* του συνοδευτικού cd της πτυχιακής εργασίας.

### **5.3 Μελέτη σαξόφωνου**

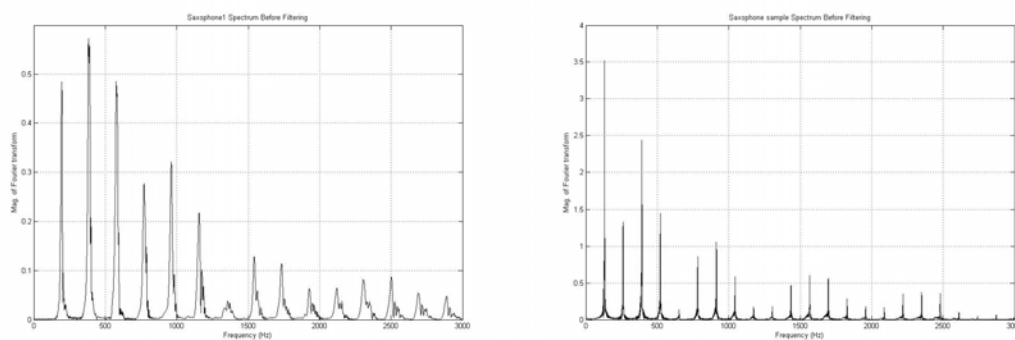
Παρόμοια μελέτη με αυτή των ήχων του κλαρίνου θα πραγματοποιήσουμε για ήχους σαξόφωνου. Και σε αυτή την περίπτωση έχουμε έναν ήχο που προέρχεται από ένα σαξόφωνο και έναν ήχο ενός συνθετητή. Η καταγραφή του φυσικού σήματος έγινε στο studio του τμήματος Μουσικής Τεχνολογίας και Ακουστικής ενώ το τεχνητό σήμα παράχθηκε από συνθετητή και καταγράφηκε σε PC μέσω κάρτας ήχου

EMU 1828m. Η νότα του φυσικού οργάνου είναι η G2 και αποτελεί μέρος ενός τραγουδιού ενώ αυτή του συνθετητή είναι η C2. Η τελευταία νότα καταγράφηκε για τους σκοπούς της πτυχιακής εργασίας και δεν αποτελεί κομμάτι κάποιου τραγουδιού. Στο σχήμα 5.3.1 φαίνονται τα αρχικά σήματα που θα εξετάσουμε.



Σχήμα 5.3.1: Η νότα G2 (αριστερά) και η νότα C2 (δεξιά) του φυσικού και του συνθετημένου ήχου σαξόφωνου αντίστοιχα.

Μετά από φασματική ανάλυση των ήχων του σχήματος 5.3.1 προκύπτουν οι αρμονικές συχνότητες που δίνονται μέσω του σχήματος 5.3.2.



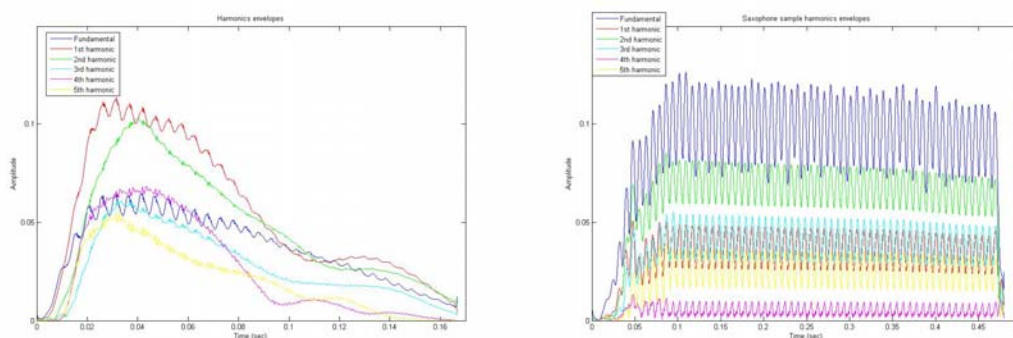
Σχήμα 5.3.2: Οι αρμονικές των νοτών του φυσικού ήχου σαξόφωνου (αριστερά) και οι αρμονικές του συνθετημένου ήχου σαξοφώνου (δεξιά).

Όπως προκύπτει από τα συχνοτικά φάσματα του σχήματος 5.3.2, η πρώτη αρμονική του συνθετημένο σήματος είναι αυτή με το μεγαλύτερο πλάτος από τις υπόλοιπες τη στιγμή που στο φυσικό σήμα ο δεύτερη αρμονική είναι αυτή με το

μεγαλύτερο πλάτος από τις υπόλοιπες. Επίσης παρατηρούμε ότι για το ίδιο εύρος συχνοτήτων η συνθετημένη νότα αποτελείται από περισσότερες αρμονικές, καθεμιά από τις οποίες καταλαμβάνει μικρή περιοχή συχνοτήτων, ενώ ο φυσική νότα περιέχει λιγότερες αρμονικές που καθεμιά καταλαμβάνει μεγαλύτερη περιοχή συχνοτήτων και μάλιστα διαθέτει και επιμέρους μέγιστα.

Στο σχήμα 5.3.3 παρατίθενται οι περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονικών για τις νότες σαξοφώνου του σχήματος 5.3.1.

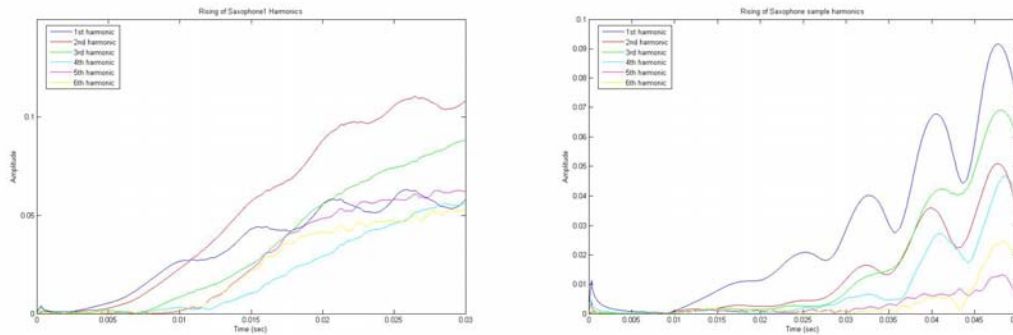
Από την παρατήρηση του σχήματος 5.3.3 μπορούμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα αναφορικά με τις διαφορές των αρμονικών κάθε νότας που εξετάζουμε. Οι περιβάλλουσες των αρμονικών του συνθετημένου σήματος μετά την αρχή της χρονικής τους εξέλιξης παρουσιάζουν μια περιοδικότητα στις αποκλίσεις του πλάτους τους που αντιστοιχεί σε *vibrato* κατά τη δημιουργία της, ενώ οι αντίστοιχες περιβάλλουσες του φυσικού σήματος ακολουθούν μια πορεία εξέλιξης που δεν παρουσιάζει χαρακτηριστικά περιοδικότητας.



Σχήμα 5.3.3.: Οι περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονικών της φυσικής νότας (αριστερά) και της συνθετημένης νότας σαξοφώνου (δεξιά).

Ξέχωρα από τα περιοδικά χαρακτηριστικά, οι περιβάλλουσες των αρμονικών του συνθετημένου σήματος έχουν γενικότερη μορφή η οποία είναι παράλληλη μεταξύ τους. Ακόμα οι κυματώσεις των ίδιων αρμονικών κυμαίνονται σε μεγαλύτερες τιμές πλάτους από αυτές των αρμονικών της φυσικής νότας.

Στο σχήμα 5.3.4 εστιάζουμε την προσοχή μας στην αρχή της χρονικής εξέλιξης κάθε νότας.



Σχήμα 5.3.4: Η αρχή της εξέλιξης των έξι πρώτων αρμονικών της φυσικής νότας (αριστερά) και της συνθετημένης νότας σαξόφωνου (δεξιά).

Υπάρχουν σημαντικές διαφορές καθώς και κάποιες ομοιότητες ανάμεσα στις σχέσεις των αρμονικών κάθε νότας. Και για τις δύο νότες η αρμονική που ξεκινά πρώτη την εξέλιξή της είναι η πρώτη. Για τη φυσική νότα ακολουθεί η δεύτερη αρμονική με μικρή χρονική διαφορά από την πρώτη και ακολούθως οι υπόλοιπες. Στη συνθετημένη νότα η δεύτερη, τρίτη, και τέταρτη αρμονική ξεκινούν ταυτόχρονα την εξέλιξή τους, μετά βέβαια από την αρχή της εξέλιξης της πρώτης αρμονικής και τελευταίες εξελίσσονται η πέμπτη και έκτη αρμονική. Το πλάτος της πρώτης αρμονικής του φυσικού ήχου είναι αρχικά μεγαλύτερο από τα υπόλοιπα πλάτη, αλλά μετά τη χρονική στιγμή  $t = 0.02 \text{ sec}$ , η δεύτερη αρμονική είναι αυτή με το μεγαλύτερο πλάτος περιβάλλουσας. Επίσης το πλάτος της πρώτης αρμονικής του φυσικού σήματος εναλλάσσεται με τα πλάτη της τέταρτης και της πέμπτης αρμονικής. Για τις αρμονικές της συνθετημένης νότας, η πρώτη αρμονική είναι αυτή με το μεγαλύτερο πλάτος το οποίο διατηρείται για όλη τη χρονική διάρκεια που μελετάται στο σχήμα 5.3.4. Ο τρόπος που η πρώτη, δεύτερη, πέμπτη και έκτη αρμονική του φυσικού σήματος μεταβαίνουν από τα σημεία που η περιβάλλουσα έχει κοντινές στο μηδέν τιμές (αρχή της χρονικής εξέλιξης του σήματος) σε αυτά με μεγαλύτερες τιμές πλάτους είναι ο ίδιος για όλες. Αυτό εξάγεται από την κλίση του γραφήματος της περιβάλλουσας για κάθε αρμονική για τη χρονική περίοδο που αναφέραμε. Η αντίστοιχη μετάβαση των τιμών της περιβάλλουσας της τρίτης και της τέταρτης αρμονικής γίνεται σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα (μικρότερη κλίση του γραφήματος της περιβάλλουσας). Μία ακόμη διαφορά στον τρόπο εξέλιξης των αρμονικών του φυσικού σήματος παρατηρούμε ανάμεσα στην τέταρτη και τις υπόλοιπες αρμονικές. Η τέταρτη αρμονική αρχίζει να εξελίσσεται ομαλά, στη συνέχεια πιο απότομα και καταλήγει πάλι σε ομαλό τρόπο εξέλιξης. Οι υπόλοιπες



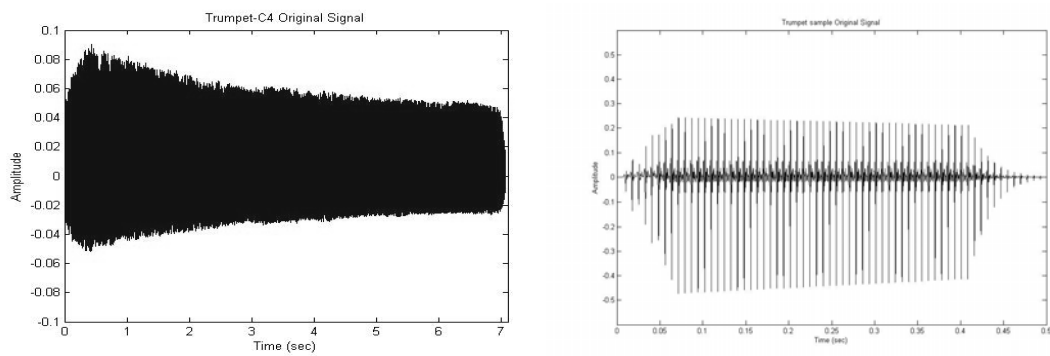
αρμονικές ξεκινούν απότομα την εξέλιξή τους και καταλήγουν σε ομαλή εξέλιξη, δηλαδή έχουν δύο στάδια εξέλιξης εν αντιθέσει με την τέταρτη που έχει τρία στάδια εξέλιξης. Επίσης η τέταρτη αρμονική είναι αυτή που έχει μικρότερες τιμές πλάτους περιβάλλουσας αρχικά, αλλά μετά τη χρονική στιγμή  $t = 0.02 \text{ sec}$ , οι μικρότερες τιμές πλάτους αντιστοιχούν στην έκτη αρμονική.

Στο συνθετημένο σήμα η αρμονική με την πιο απότομη μετάβαση σε μεγαλύτερες τιμές πλάτους είναι η τέταρτη. Για το χρονικό διάστημα  $0.035 < t < 0.04 \text{ sec}$  η δεύτερη και η τρίτη αρμονική έχουν το ίδιο πλάτος περιβάλλουσας, το οποίο είναι μεγαλύτερο από αυτό των υπόλοιπων αρμονικών. Μετά την πάροδο αυτού του διαστήματος η τρίτη αρμονική αποκτά τις μεγαλύτερες τιμές πλάτους περιβάλλουσας. Στην αντίπερα όχθη, το μικρότερο πλάτος για την αρχή της εξέλιξης της νότας διαθέτει η έκτη αρμονική, αλλά μετά το χρονικό σημείο  $t = 0.044 \text{ sec}$  το μικρότερο πλάτος περιβάλλουσας αντιστοιχεί στην πέμπτη αρμονική. Τέλος, υπάρχει ένα φαινόμενο στην εξέλιξη των αρμονικών του συνθετημένου σήματος που δεν παρατηρείται στο φυσικό σήμα. Στο χρονικό διάστημα  $0.045 < t < 0.05 \text{ sec}$ , οι περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονικών του συνθετημένου σήματος παρουσιάζουν μέγιστα τα οποία δεν απέχουν, χρονικά, μακριά μεταξύ τους.

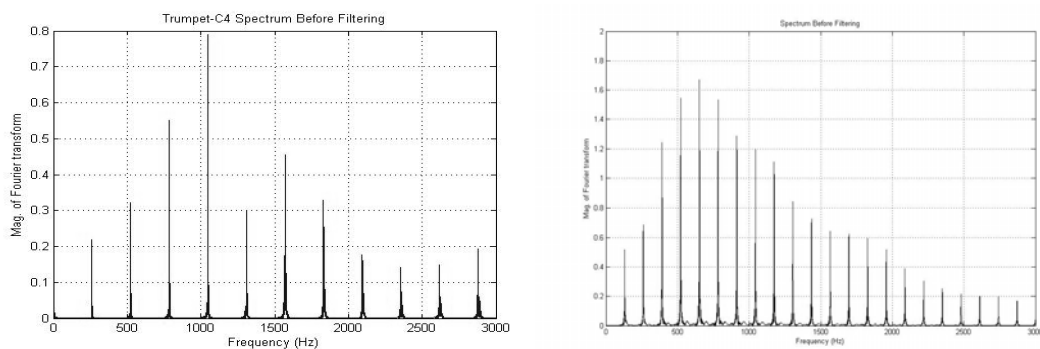
Οι κώδικες του MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν για την παραπάνω ανάλυση καθώς και τα αρχικά αρχεία ήχου (wav) βρίσκονται στο φάκελο *saxophone* του συνοδευτικού cd της πτυχιακής εργασίας.

#### **5.4 Μελέτη τρομπέτας**

Αφήνοντας τους ήχους ξύλινων πνευστών οργάνων θα μελετήσουμε πνευστά όργανα που ανήκουν στην κατηγορία των χάλκινων. Ένα τέτοιο όργανο είναι η τρομπέτα. Όπως και στις δύο προηγούμενες ενότητες, θα εξετάσουμε ένα φυσικό ήχο τρομπέτας που βρήκαμε στο διαδίκτυο [1] κι έναν ήχο που δημιουργήθηκε με τη βοήθεια ενός συνθετητή. Οι ήχοι που θα μελετήσουμε αντιστοιχούν στη νότα C4. Στο σχήμα 5.4.1 παρατίθενται οι νότες των δύο οργάνων και στο σχήμα 5.4.2 οι αρμονικές κάθε νότας, όπως προέκυψαν μετά από φασματική ανάλυση του κάθε αρχικού σήματος.



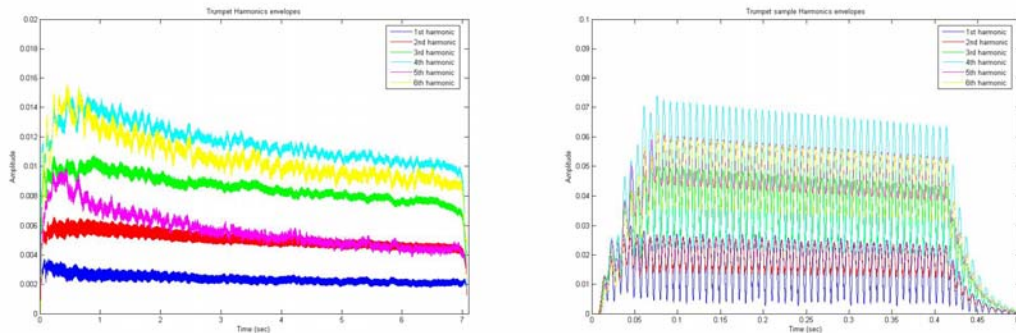
Σχήμα 5.4.1: Η φυσική νότα C4 (αριστερά) και η συνθετημένη νότα (δεξιά) της τρομπέτας



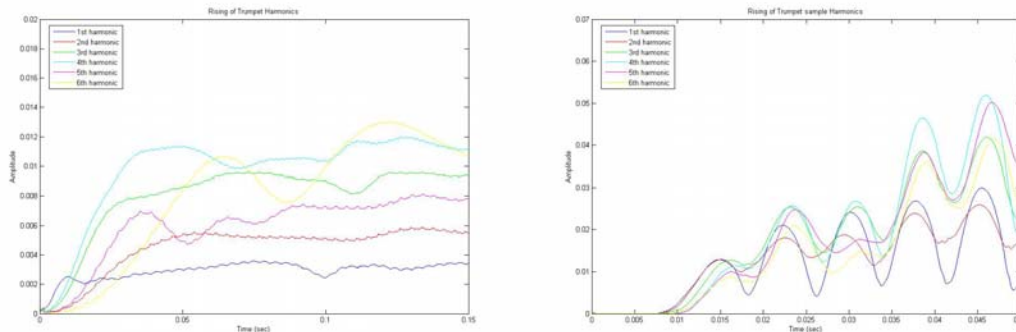
Σχήμα 5.4.2: Οι αρμονικές της φυσικής (αριστερά) και της συνθετημένης (δεξιά) νότας C4 τρομπέτας.

Από μία αρχική παρατήρηση των γραφημάτων του σχήματος 5.4.2 προκύπτει ότι όπως και στην περίπτωση των ήχων σαξοφώνου, οι οποίοι αναλύθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, η συνθετημένη νότα περιέχει περισσότερες αρμονικές από τη φυσική νότα για το ίδιο εύρος συχνοτήτων. Μία ακόμη διαφορά ανάμεσα στα δύο εξεταζόμενα σήματα είναι ότι στο φυσικό, η μεγαλύτερη σε πλάτος αρμονική είναι η τέταρτη, ενώ στο συνθετημένο σήμα η πέμπτη. Επίσης για τη συνθετημένη νότα οι αρμονικές πριν την πέμπτη έχουν πλάτος το οποίο αυξάνεται καθώς αυξάνεται και η τάξη των αρμονικών και αυτές μετά την πέμπτη πλάτος του οποίου η τιμή μειώνεται καθώς αυξάνεται η τάξη των αρμονικών. Οι αρμονικές της φυσικής νότας που είναι μεγαλύτερης της τέταρτης τάξης έχουν πλάτος το οποίο δε μειώνεται όσο αυξάνεται τη τάξη των αρμονικών.

Στο σχήμα 5.4.3 παρατίθενται οι περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονικών για κάθε νότα και στο σχήμα 5.4.4 τα αρχικά τμήματα της εξέλιξης των αρμονικών αυτών.



Σχήμα 5.4.3: Οι περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονικών της φυσικής (αριστερά) και της συνθετημένης νότας (δεξιά) τρομπέτας.



Σχήμα 5.4.4: Τα αρχικά στάδια της χρονικής εξέλιξης των έξι πρώτων αρμονικών της φυσικής νότας (αριστερά) και της συνθετημένης νότας (δεξιά) τρομπέτας.

Οι περιβάλλουσες και των δύο ήχων έχουν κυματώσεις με αυτές του φυσικού σήματος να είναι πιο έντονες. Ακόμα στην περίπτωση του συνθετημένου σήματος είναι έντονο το φαινόμενο όπου οι τιμές της περιβάλλουσας κάποιας αρμονικής συμπίπτουν με αυτές κάποιας άλλης περιβάλλουσας, ενώ σε αυτή του φυσικού σήματος οι επικαλύψεις τιμών περιβάλλουσας μεταξύ αρμονικών δεν είναι τόσο συχνές.

Από την παρατήρηση του σχήματος 5.4.4 μπορούμε να αποφανθούμε ότι οι περιβάλλουσες του τεχνητού σήματος παρουσιάζουν κυματώσεις που εμφανίζονται με κάποια περιοδικότητα. Από την παρατήρηση επίσης του ίδιου γραφήματος και ιδιαίτερα του τμήματος που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα  $0.01 \leq t \leq 0.015$  sec μπορούμε να πούμε ότι η χρονική εξέλιξη των έξι πρώτων αρμονικών είναι σχεδόν πανομοιότυπη για όλες και μάλιστα έχει κοινό σημείο αφετηρίας και για τις έξι. Αντίθετα, για τη φυσική νότα, η πρώτη αρμονική είναι αυτή που αρχίζει να

εξελίσσεται πιο πριν από τις υπόλοιπες. Ακολουθούν η τρίτη και η τέταρτη αρμονική σε σειρά εξέλιξης και μάλιστα ταυτόχρονη. Στη συνέχεια εξελίσσονται η πέμπτη, η δεύτερη και τελευταία η έκτη αρμονική. Μάλιστα η έκτη αρμονική είναι αυτή της οποίας η περιβάλλουσα παρουσιάζει τις μεγαλύτερες αποκλίσεις στις τιμές πλάτους από τις υπόλοιπες. Οι τιμές του πλάτους περιβάλλουσας της ίδιας αρμονικής καθώς και της τέταρτης είναι οι μεγαλύτερες συγκριτικά με τις τιμές των άλλων τεσσάρων αρμονικών. Όπως ακόμα φαίνεται υπάρχει εναλλαγή των μέγιστων πλατών ανάμεσα στην έκτη και την τέταρτη αρμονική. Τις μικρότερες τιμές πλάτους παρουσιάζει η πρώτη αρμονική, πράγμα που συμβαίνει και για το συνθετημένο σήμα. Η αύξηση των τιμών της περιβάλλουσας στα πρώιμα στάδια της χρονικής εξέλιξης των έξι πρώτων αρμονικών του φυσικού σήματος είναι ίδια για όλες τις αρμονικές εξαιρουμένης της δεύτερης, της οποίας το πλάτος αυξάνεται με μικρότερο ρυθμό.

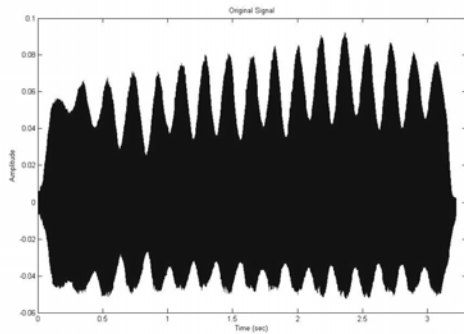
Για τη συνθετημένη νότα οι παρατηρήσεις είναι οι ακόλουθες. Το μεγαλύτερο πλάτος παρουσιάζει η περιβάλλουσα της τέταρτης αρμονικής και το μικρότερο αυτή της πρώτης αρμονικής. Όπως προέκυψε και από το σχήμα 5.4.3 έχουμε περιβάλλουσας των οποίων τα πλάτη έχουν κοντινές τιμές. Αυτές είναι οι πρώτη με τη δεύτερη και η τρίτη με την πέμπτη και τη έκτη. Αυτό που πρέπει να προσεχθεί ιδιαίτερα είναι ότι οι έξι πρώτες αρμονικές της συνθετημένης νότας τρομπέτας μετά τη χρονική στιγμή  $t = 0.035 \text{ sec}$  παρουσιάζουν μέγιστα και ελάχιστα που συμπίπτουν χρονικά μεταξύ τους ή σε αντίθετη περίπτωση δεν απέχουν χρονικά πολύ μεταξύ τους.

Οι κώδικες του MATLAB που αντιστοιχούν στην ανάλυση της παρούσας ενότητας παρατίθενται στο φάκελο *trumpet* του cd που συνοδεύει την πτυχιακή εργασία.

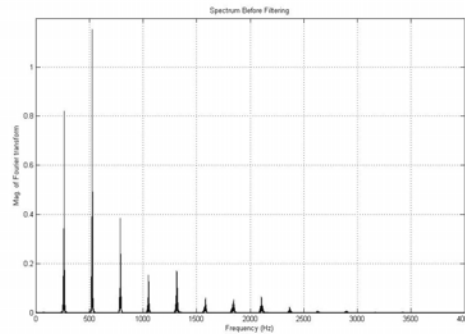
## **5.5 Μελέτη φλάουτου**

Συνεχίζοντας τη μελέτη των χάλκινων πνευστών θα μελετήσουμε τον ήχο της νότας C4 ενός φλάουτου. Η διαφορά αυτού οργάνου με την τρομπέτα είναι ότι κατά την παραγωγή του ήχου ο οργανοπαίχτης δεν ακουμπά τα χείλη του σε κάποιο επιστόμιο, αλλά τα χείλη του είναι αυτά που δημιουργούν ένα εικονικό επιστόμιο. Στο σχήμα 5.5.1 παρατίθεται η νότα C4 που θα εξετάσουμε και στο σχήμα 5.5.2 οι αρμονικές της ίδιας νότας, όπως αυτό προκύπτει από την εφαρμογή FFT στο σήμα

του σχήματος 5.5.1. Το αρχικό σήμα της νότας βρέθηκε μετά από αναζήτηση στο διαδίκτυο. Οι κώδικες που πραγματοποιήθηκαν για την προαναφερθείσα επεξεργασία της νότας του φλάουτου βρίσκονται στο φάκελο *flute* του συνοδευτικού cd της πτυχιακής εργασίας.



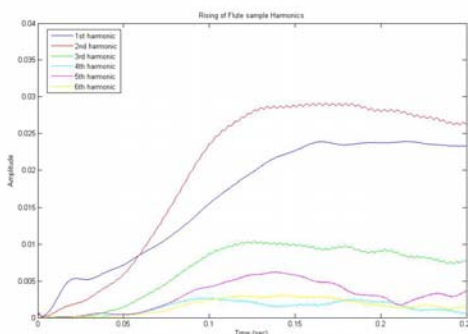
Σχήμα 5.5.1: Το σήμα της νότας C4 του φλάουτου.



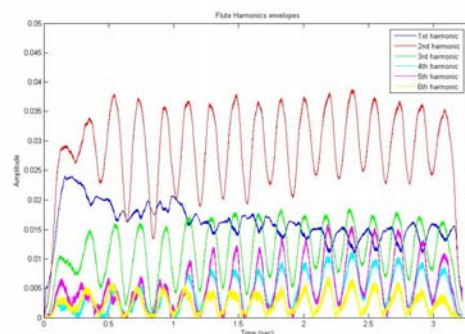
Σχήμα 5.5.2: Οι αρμονικές του σήματος που φαίνεται στο σχήμα 5.5.1.

Από το σχήμα 5.5.1 προκύπτει ότι το αρχικό σήμα περιέχει την πληροφορία του *vibrato* ενώ από το σχήμα 5.5.2 προκύπτει, όπως αναμενόταν από τη θεωρία της φυσικής ακουστικής των μουσικών οργάνων, ότι η δεύτερη αρμονική είναι μεγαλύτερη σε πλάτος ένταση από τις υπόλοιπες.

Στο σχήμα 5.5.3 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της περιβάλλουσας για τις έξι πρώτες αρμονικές της νότας C4 και στο σχήμα 5.5.4 τα αρχικά τμήματα της χρονικής εξέλιξης κάθε αρμονικής.



Σχήμα 5.5.3: Οι περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονικών της νότας C4 του φλάουτου



Σχήμα 5.5.4: Η αρχή της χρονικής εξέλιξης για τις έξι πρώτες αρμονικές της νότας C4

Στο σχήμα 5.5.3 είναι φανερό το vibrato στον ήχο της νότας που εξετάζουμε. Αυτό έχει ως συνέπεια να υπάρχουν κυματώσεις στις τιμές του πλάτους για κάθε περιβάλλουσα. Το εύρος των κυματώσεων αυτών είναι διαφορετικό για κάθε αρμονική. Για παράδειγμα, η πρώτη αρμονική παρουσιάζει μικρότερες κυματώσεις στο πλάτος της από τη δεύτερη αρμονική. Όπως ήταν αναμενόμενο η δεύτερη αρμονική διαθέτει τις μεγαλύτερες τιμές πλάτους από τις υπόλοιπες, ενώ η έκτη αρμονική είναι αυτή με τις μικρότερες τιμές πλάτους. Για όλες τις αρμονικές, πλην της πρώτης, παρατηρούμε ότι τα μέγιστα και τα ελάχιστα των πλατών τους λαμβάνονται σε ίδιες χρονικές στιγμές. Για τη χρονική διάρκεια  $0 < t < 1 \text{ sec}$  οι πέντε υψηλότερες από τις εξεταζόμενες αρμονικές έχουν τιμές πλάτους κοντινές μεταξύ τους, ενώ μετά την πάροδο του παραπάνω χρονικού διαστήματος τα πλάτη τους αρχίζουν να διαχωρίζονται αφού καθένα λαμβάνει διαφορετικές τιμές.

Από το σχήμα 5.5.4 προκύπτει ότι η πρώτη αρμονική ξεκινά να εξελίσσεται ταυτόχρονα με τη δεύτερη αρμονική. Μέχρι το χρονικό σημείο  $t = 0.02 \text{ sec}$  ο τρόπος της εξέλιξης της πρώτης αρμονικής έχει τα πιο απότομα χαρακτηριστικά συγκριτικά με τους τρόπους εξέλιξης των άλλων αρμονικών, αλλά μετά από αυτό το σημείο τα πιο απότομα χαρακτηριστικά παρουσιάζει η δεύτερη αρμονική.

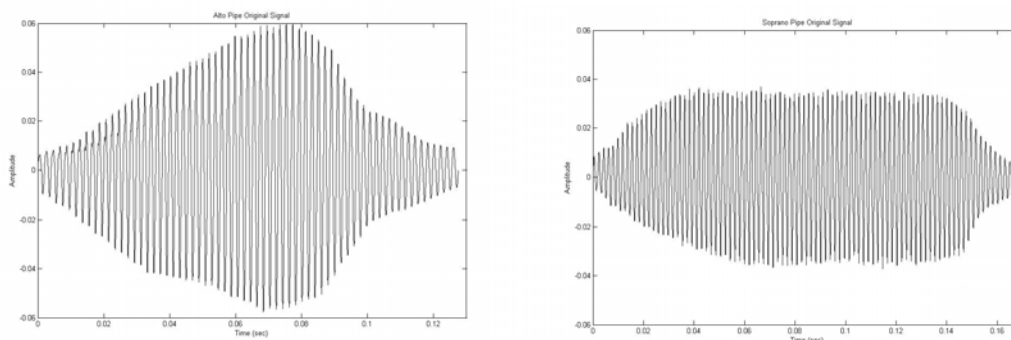
Η τρίτη αρμονική είναι τρίτη σε σειρά χρονικής εξέλιξης και την ακολουθούν οι τρεις υψηλότερες αρμονικές, οι οποίες έχουν κοινό χρονικό σημείο έναρξης της χρονικής τους εξέλιξης. Επίσης η τρίτη και η πέμπτη αρμονική έχουν πιο απότομη μετάβαση στις τιμές του πλάτους τους σχετικά με αυτή της τέταρτης και έκτης αρμονικής. Τέλος, μέχρι το χρονικό σημείο  $t = 0.075 \text{ sec}$ , οι τρεις υψηλότερες αρμονικές έχουν κοινές τιμές πλάτους οι οποίες μετά από αυτό το χρονικό σημείο αρχίζουν να διαφοροποιούνται.

## **5.6 Μελέτη φλογέρας alto και φλογέρας soprano**

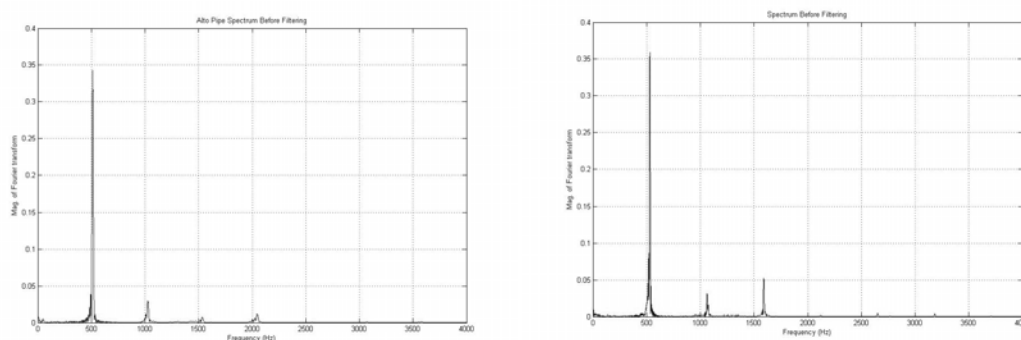
Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε ήχους φλογέρας, οι οποίοι προέρχονται από μία φλογέρα soprano και σε μία alto. Οι δύο ήχοι αντιστοιχούν στη νότα C5 και η ηχογράφησής του έγινε στο studio του τμήματος Μουσικής Τεχνολογίας και Ακουστικής.

Στο σχήμα 5.6.1 παρατίθεται οι νότες που θα μελετήσουμε και στο σχήμα 5.6.2 οι αρμονικές κάθε νότας όπως λαμβάνονται μετά από την εφαρμογή FFT στους

αρχικούς ήχους. Οι κώδικες που πραγματοποιήθηκαν για την προαναφερθείσα ανάλυση του ήχου φλάουτου βρίσκονται στο φάκελο *pipe* του συνοδευτικού cd της πτυχιακής εργασίας. Για κάθε σήμα φλογέρας επιλέχθηκαν για μελέτη οι αρμονικές που έχουν αρκετά μεγάλο πλάτος. Στην περίπτωση της alto φλογέρας θα εξεταστούν οι τέσσερις πρώτοι αρμονικοί όπως και στην περίπτωση της soprano φλογέρας.



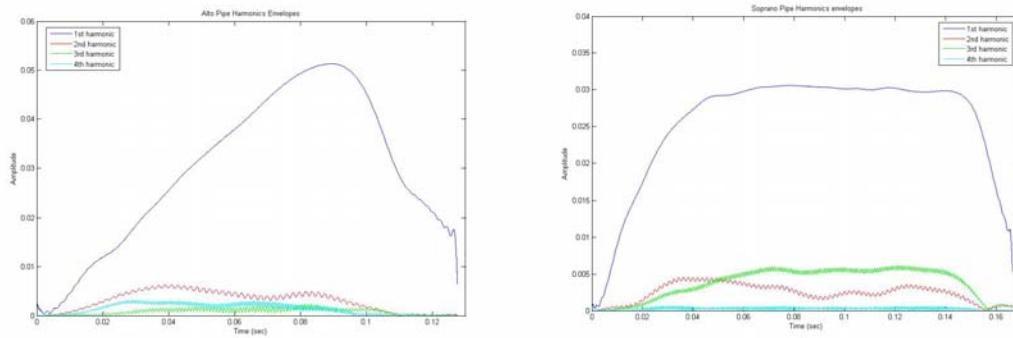
Σχήμα 5.6.1: Η νότα C5 της φλογέρας alto (αριστερά) και της φλογέρας soprano (δεξιά).



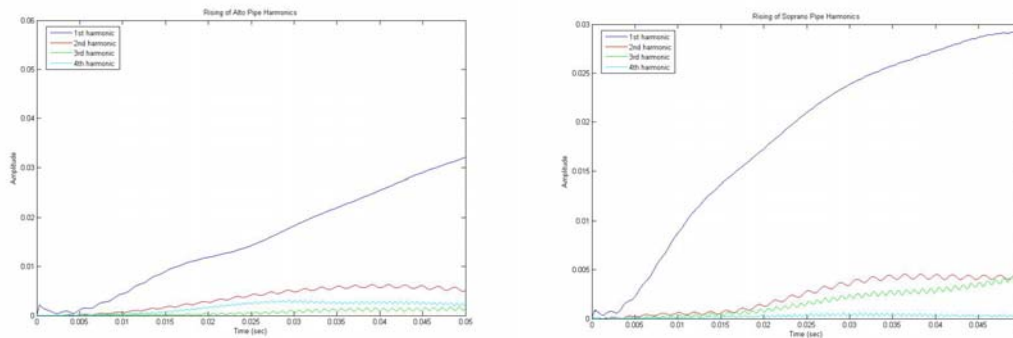
Σχήμα 5.6.2: Οι αρμονικοί της νότας C5 της φλογέρας alto (αριστερά) και της φλογέρας soprano (δεξιά).

Και στις δύο νότες της φλογέρας η πρώτη αρμονική έχει το μεγαλύτερο πλάτος από τις υπόλοιπες. Στην περίπτωση της φλογέρας soprano η τρίτη αρμονική έχει μεγαλύτερο πλάτος από τη δεύτερη κάτι που δε συμβαίνει στη φλογέρα alto όπου η τέταρτη αρμονική έχει μεγαλύτερο πλάτος από την τρίτη. Και για τις δύο φλογέρες η πρώτη αρμονική έχει πλάτος κατά πολύ μεγαλύτερο από τις υπόλοιπες.

Στο σχήμα 5.6.3 φαίνονται οι περιβάλλουσες των τεσσάρων πρώτων αρμονικών για κάθε νότα φλογέρας και στο σχήμα 5.6.4 εστιάζουμε στα αρχικά στάδια των περιβάλλουσων του σχήματος 5.4.3.



Σχήμα 5.4.3: Οι περιβάλλουσες των τεσσάρων πρώτων αρμονικών της νότας C5 της φλογέρας alto (αριστερά) και της φλογέρας soprano (δεξιά).



Σχήμα 5.6.4: Τα αρχικά στάδια εξέλιξης των γραφικών παραστάσεων του σχήματος 5.6.3.

Από τα σχήματα 5.6.3 και 5.6.4 παρατηρούμε ότι η πρώτη αρμονική και για τις δύο νότες φλογέρας έχει μεγαλύτερο πλάτος από τις υπόλοιπες. Στην περίπτωση της φλογέρας alto η πρώτη αρμονική λαμβάνει τη μέγιστη τιμή πλάτους μετά από την πάροδο μεγαλύτερου χρονικού διαστήματος σε σχέση με την πρώτη αρμονική της φλογέρας soprano. Εκτός από αυτή τη διαφορά, η πρώτη αρμονική της φλογέρας alto διατηρεί τη μέγιστη τιμή πλάτους για μικρή χρονική διάρκεια τη στιγμή που η αντίστοιχη αρμονική της φλογέρας soprano διατηρεί τη μέγιστη τιμή πλάτους για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Από την παρατήρηση του σχήματος 5.6.4 μπορούμε να αποφανθούμε ότι στην περίπτωση και των δύο οργάνων οι τρεις υψηλότερες αρμονικές αρχίζουν να εξελίσσονται την ίδια χρονική στιγμή. Για τη φλογέρα alto η δεύτερη αρμονική έχει τις μεγαλύτερες τιμές πλάτους μετά την πρώτη. Διακρίνουμε και την εναλλαγή των τιμών πλάτους για την τρίτη και την τέταρτη αρμονική. Μέχρι το σημείο όπου είναι

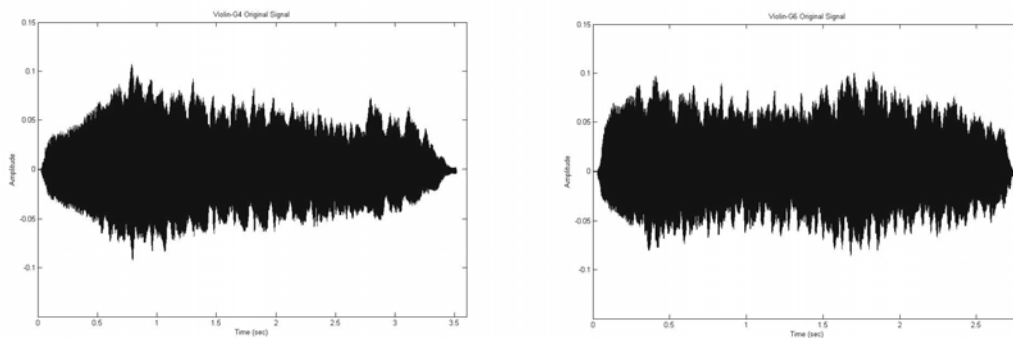


$t < 0.08 \text{ sec}$ , οι τιμές του πλάτους της τέταρτης είναι μεγαλύτερες από τις τιμές του πλάτους της τρίτης, για τη χρονική διάρκεια  $0.08 < t < 0.09 \text{ sec}$  τα πλάτη των δύο αυτών αρμονικών έχουν την ίδια τιμή και μετά την πάροδο αυτής της διάρκειας η τρίτη αρμονική παρουσιάζει πλάτος μεγαλύτερο της τέταρτης αρμονικής. Από αντίστοιχη σύγκριση των πλατών των τριών υψηλότερων αρμονικών της φλογέρας soprano προκύπτει ότι το μεγαλύτερο πλάτος μέχρι το χρονικό σημείο  $t = 0.05 \text{ sec}$  είναι αυτό της δεύτερης αρμονικής, μετά από αυτό το σημείο το μέγιστο πλάτος αντιστοιχεί στην τρίτη αρμονική. Για όλη τη διάρκεια της νότας η τέταρτη αρμονική έχει το μικρότερο πλάτος από όλες τις υπόλοιπες. Τέλος, στην περίπτωση της φλογέρας soprano, η αρχική εξέλιξη της δεύτερης και της τρίτης αρμονικής έχει παρόμοια χαρακτηριστικά, ενώ σε αυτή της φλογέρας alto οι τρεις υψηλότερες αρμονικές παρουσιάζουν ίδια χαρακτηριστικά μεταβολής στην εξέλιξη των πλατών τους.

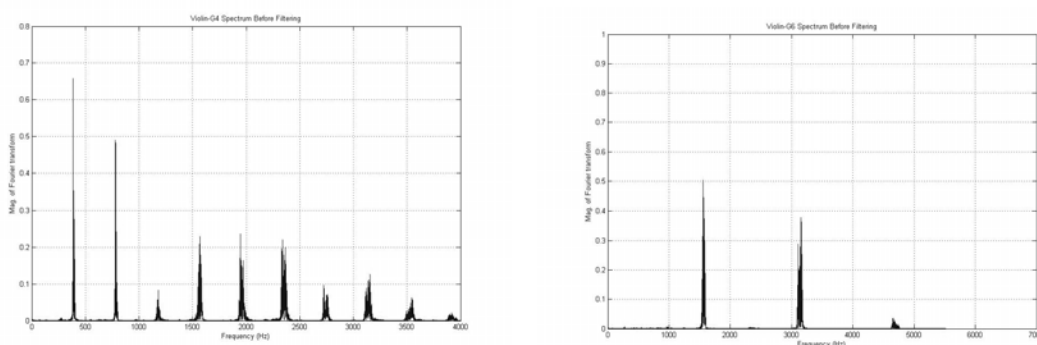
### **5.7 Μελέτη βιολιού**

Επεκτείνοντας την έρευνα σχετικά με τους ήχους μουσικών οργάνων θα μελετήσουμε τον ήχο έγχορδων μουσικών οργάνων ξεκινώντας με τον ήχο βιολιού. Αρχικά πρέπει να σημειώσουμε ότι το βιολί είναι τοξωτό έγχορδο όργανο, δηλαδή η παραγωγή του ήχου γίνεται με τη διέγερση των χορδών από δοξάρι. Θα μελετήσουμε δύο νότες, τη G4 και τη G6, οι οποίες πάρθηκαν από σελίδα του διαδικτύου [1]. Οι κώδικες του MATLAB που χρησιμοποιήσαμε βρίσκονται στο φάκελο *violin* στο cd που παρατίθεται μαζί με την πτυχιακή εργασία. Στο σχήμα 5.7.1 φαίνονται οι νότες που θα μελετήσουμε και στο σχήμα 5.7.2 οι αρμονικές που αποτελούν τις παραπάνω νότες, οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή FFT στα σήματα του σχήματος 5.7.1.

Στο σχήμα 5.7.2 βλέπουμε ότι οι αρμονικές της νότας G4, πλην των δύο πρώτων, παρουσιάζουν επιμέρους μέγιστα πράγμα που συμβαίνει για τις αρμονικές, πλην της πρώτης, της νότας G6. Επίσης παρατηρούμε ότι οι αρμονικές της νότας G4 απέχουν μεταξύ τους λιγότερες συχνότητες από ότι απέχουν οι αρμονικές της νότας G6.

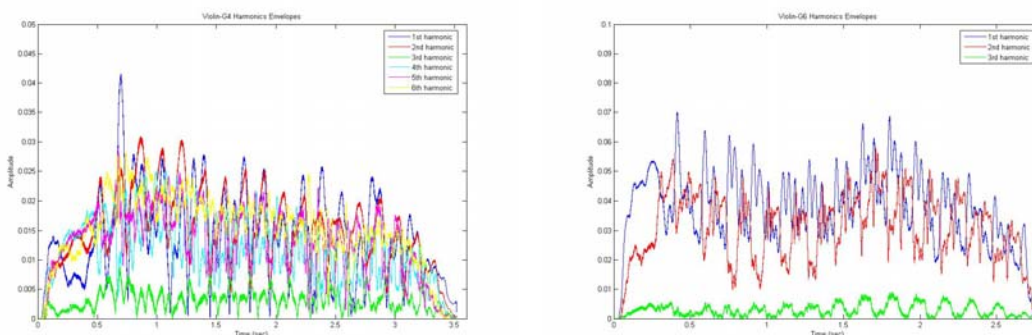


Σχήμα 5.7.1: Η νότα G4 (αριστερά) και η νότα G6 (δεξιά) του βιολιού.

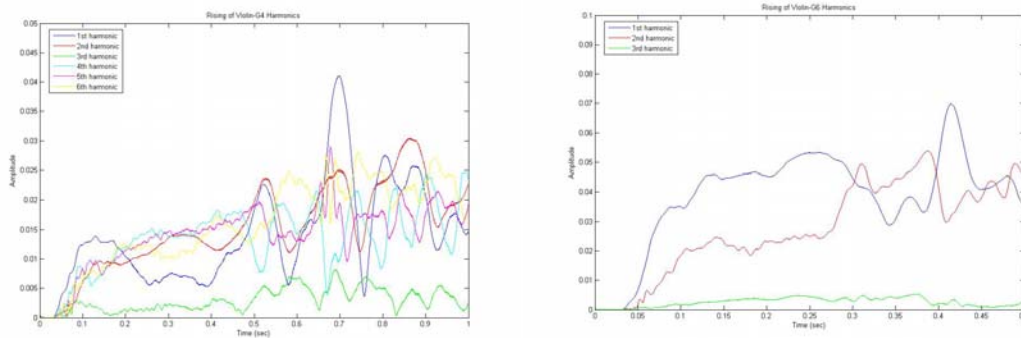


Σχήμα 5.7.2: Οι αρμονικές της νότας G4 (αριστερά) και της νότας G6 (δεξιά) του βιολιού.

Ακολουθούν τα σχήματα 5.7.3 και 5.7.4 όπου παραθέτουμε τις περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονικών για τη νότα G4 και των τριών πρώτων αρμονικών για τη νότα G6 καθώς και τα αρχικά στάδια της χρονικής εξέλιξης των προαναφερθέντων αρμονικών αντίστοιχα.



Σχήμα 5.7.3: Οι περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονικών της νότας G4 (αριστερά) και των τριών πρώτων αρμονικών της νότας G6 (δεξιά) του βιολιού.



Σχήμα 5.7.4: Τα αρχικά στάδια της εξέλιξης των γραφικών παραστάσεων του σχήματος 5.7.3.

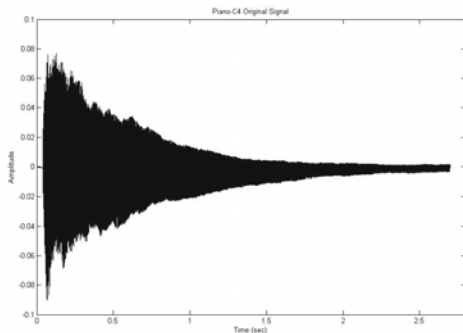
Οι αρμονικές της νότας G4, εκτός της τρίτης έχουν πλάτη των οποίων οι τιμές συμπίπτουν μεταξύ τους, όπως γίνεται και με τα πλάτη των δύο πρώτων αρμονικών της νότας G6. Μια κοινή παρατήρηση όσον αφορά τα πλάτη των αρμονικών είναι ότι και για τις δύο νότες η τρίτη αρμονική είναι αυτή με τις μικρότερες τιμές πλάτους. Συγκρίνοντας συνολικά τα πλάτη όλων των αρμονικών και για τις δύο νότες συμπεραίνουμε ότι η πρώτη αρμονική και στις δύο περιπτώσεις είναι αυτή με τη μεγαλύτερη τιμή πλάτους. Για την περίπτωση της νότας G4, ενώ σχεδόν σε όλη την αρχή της εξέλιξης των έξι πρώτων αρμονικών, έχουμε πλάτη με μικρές διαφορές στις τιμές τους, τη χρονική στιγμή  $t = 0.7 \text{ sec}$ , η πρώτη αρμονική λαμβάνει τιμή πλάτους κατά πολύ μεγαλύτερη από τις τιμές των υπόλοιπων αρμονικών.

Συγκρίνοντας την εξέλιξη των αρμονικών της νότας G4, βλέπουμε ότι αρχικά εξελίσσεται η πρώτη αρμονική και μετά από ένα σύντομο χρονικό διάστημα ξεκινούν την εξέλιξή τους ταυτόχρονα οι άλλες πέντε αρμονικές. Βέβαια δεν παρατηρείται ίδιος τρόπος στη μεταπήδηση του πλάτους των αρμονικών από τις αρχικές κοντά στο μηδέν τιμές σε αυτές με μεγαλύτερη τιμή. Την πιο απότομη μετάβαση παρουσιάζει η πέμπτη αρμονική, την πιο ομαλή μετάβαση η τρίτη αρμονική, ενώ η πρώτη, δεύτερη, τέταρτη και έκτη αρμονική μεταβαίνουν σε μεγαλύτερες τιμές πλάτους με πανομοιότυπο τρόπο.

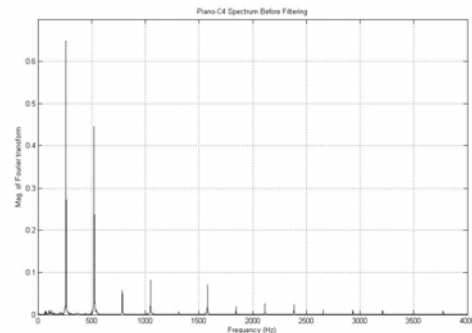
Για τη νότα G6 μπορούμε να πούμε ότι πρώτη εξελίσσεται η πρώτη αρμονική και μετά την πάροδο χρόνου ίσου με  $0.01 \text{ sec}$ , οι δύο άλλες σχεδόν ταυτόχρονα. Επίσης την πιο απότομη μεταβολή στις αρχικές τιμές πλάτους έχει η πρώτη αρμονική, ακολουθεί η δεύτερη και τελευταία η τρίτη.

## 5.8 Μελέτη πιάνου

Συνεχίζοντας τη μελέτη των έγχορδων μουσικών οργάνων θα εξετάσουμε τον ήχο της νότας C4 ενός πιάνου, που βρήκαμε στο διαδίκτυο [1]. Στο σχήμα 5.8.1 φαίνεται η προαναφερθείσα νότα και στο σχήμα 5.8.2 οι αρμονικοί από τους οποίους αποτελείται. Οι κώδικες του MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση του ήχου του πιάνου βρίσκονται στο φάκελο *piano* στο ένθετο cd της πτυχιακής εργασίας.

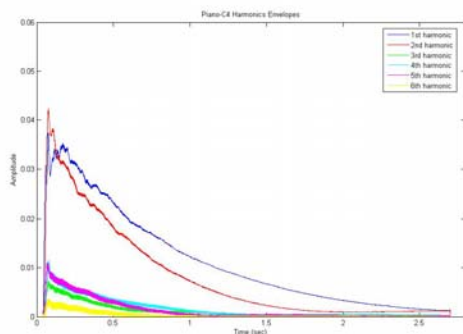


Σχήμα 5.8.1: Η νότα C4 του πιάνου

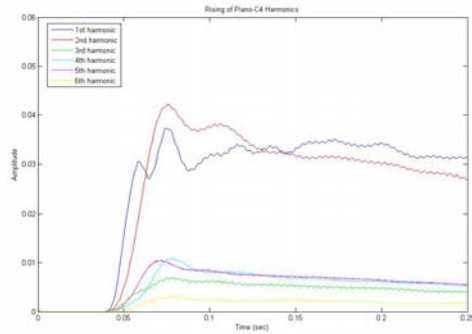


Σχήμα 5.8.2: Οι αρμονικοί της νότας του σχήματος 5.8.2.

Στο σχήμα 5.8.3 φαίνονται οι περιβάλλουσες των έξι πρώτων αρμονικών της νότας C4 του πιάνου και στο σχήμα 5.8.4 τα αρχικά στάδια της χρονικής εξέλιξης των ίδιων αρμονικών.



Σχήμα 5.8.3: Οι εξέλιξη των έξι πρώτων αρμονικών της νότας C4 του πιάνου.



Σχήμα 5.8.4: Τα αρχικά στάδια εξέλιξης των αρμονικών του σχήματος 5.8.3.

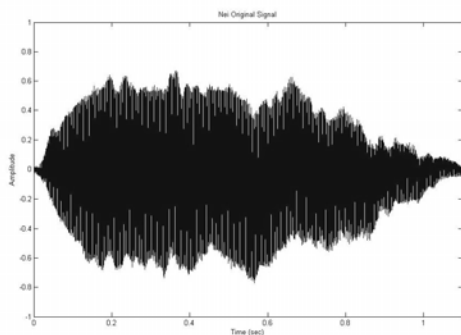
Από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος 5.8.3 παρατηρούμε ότι κάθε αρμονική λαμβάνει τη μέγιστη τιμή πλάτους της στην αρχή της νότας. Αυτό οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο παράγεται ο ήχος του πιάνου, δηλαδή στο κτύπημα των χορδών με σφυράκι. Επίσης από την παρατήρηση των σχημάτων 5.8.3 και 5.8.4 προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή πλάτους αντιστοιχεί στο δεύτερο αρμονικό. Οι αρμονικές που εξετάζουμε μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο ομάδες ανάλογα με τις τιμές των πλατών τους. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τις δύο πρώτες αρμονικές και η δεύτερη τις τέσσερις άλλες. Όλες οι αρμονικές έχουν κοινό χρονικό σημείο από το οποίο αρχίζουν να εξελίσσονται με διαφορετικό τρόπο όμως η καθεμιά όπως προκύπτει από την παρατήρηση του σχήματος 5.8.4. Η πιο απότομη εξέλιξη αντιστοιχεί στην πρώτη αρμονική και ακολούθως στη δεύτερη. Η τέταρτη και η πέμπτη αρμονική έχουν πλάτη με κοντινές τιμές για τη μεγαλύτερη διάρκεια της νότας ενώ τα χαμηλότερα πλάτη αντιστοιχούν στην τρίτη και την τέταρτη αρμονική. Ακόμα από το σχήμα 5.8.4 μπορούμε να αποφανθούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των πλατών της πρώτης και της δεύτερης αρμονικής περιέχουν κυματώσεις, ενώ οι τέσσερις υψηλότερες αρμονικές έχουν πλάτη των οποίων οι τιμές δεν παρουσιάζουν σημαντικές μεταβολές. Τέλος, όλες οι αρμονικές έχουν πλάτη που μειώνονται μέχρι την πλήρη εξασθένηση του ήχου της νότας C4 με εκθετικό τρόπο και όχι απότομα όπως είδαμε σε περιπτώσεις οργάνων που εξετάσαμε σε προηγούμενες ενότητες.

## **5.9 Μελέτη νέι**

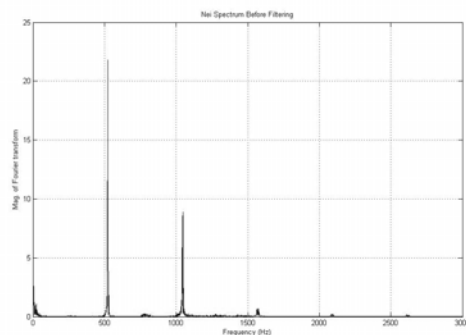
Αφήνοντας τη μελέτη οργάνων γνωστών στο ευρύ κοινό, περνάμε στη μελέτη οργάνων που δεν έχουν μελετηθεί από την επιστημονική κοινότητα. Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε τη νότα C4 ενός νέι, το οποίο είναι πνευστό μουσικό όργανο του αραβικού πολιτισμού. Η παραγωγή του ήχου στο νέι γίνεται με παρόμοια τεχνική με αυτή που περιγράψαμε στην ενότητα που μελετήσαμε ήχους φλάουτου.

Στο σχήμα 5.9.1 φαίνεται η νότα C4 που επιλέχθηκε για μελέτη και στο σχήμα 5.9.2 οι αρμονικές που αποτελούν την ίδια νότα.

Από το σχήμα 5.9.2 προκύπτει ότι μόνο η πρώτη και η τρίτη έχουν τιμές πλάτους αρκετά μεγάλες.



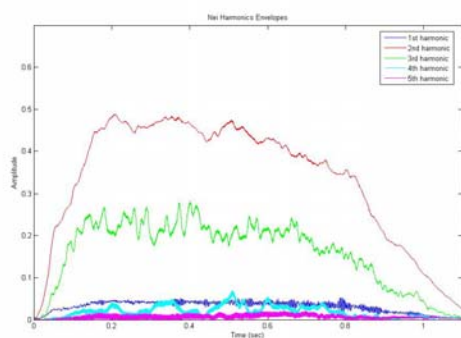
Σχήμα 5.9.1: Η νότα C4 του νέι .



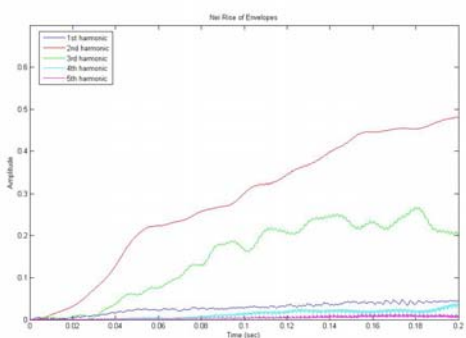
Σχήμα 5.9.2: Οι αρμονικές της νότας C4 του σχήματος 5.9.1.

Οι κώδικες του MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση της νότας του νέι βρίσκονται στο φάκελο *nei* στο ένθετο cd της πτυχιακής εργασίας.

Στο σχήμα 5.9.3 φαίνεται η χρονική εξέλιξη των πέντε πρώτων αρμονικών της νότας C4 του νέι και στο σχήμα 5.9.4 τα αρχικά στάδια της προαναφερθείσας εξέλιξης.



Σχήμα 5.9.3: Η χρονική εξέλιξη των πέντε πρώτων αρμονικών της νότας C4 του νέι.



Σχήμα 5.9.4: Τα αρχικά στάδια της εξέλιξης του σχήματος 5.9.4.

Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, οι τιμές του πλάτους της δεύτερης αρμονικής της νότας είναι οι μεγαλύτερες συγκριτικά με τις αντίστοιχες τιμές των άλλων αρμονικών. Η επόμενη κατά σειρά πλάτους αρμονική είναι η τρίτη και ακολουθούν η πρώτη, η τέταρτη και η πέμπτη. Οι τιμές των πλατών των τριών τελευταίων αρμονικών δε διαφέρουν κατά πολύ μεταξύ τους για όλη τη διάρκεια της νότας. Επίσης υπάρχουν κυματώσεις των πλατών των αρμονικών που μελετάμε, των οποίων τα μέγιστα και τα ελάχιστα διαφέρουν από αρμονικό σε αρμονικό. Οι μεγαλύτερες κυματώσεις παρατηρούνται στη γραφική της περιβάλλουσας της τρίτης αρμονικής. Μικρότερες μεταβολές πλάτους έχει η δεύτερη και η τέταρτη αρμονική,

ενώ οι μεταβολές στα πλάτη της πρώτης και της πέμπτης αρμονικής είναι μικρότερου βαθμού.

Από το σχήμα 5.8.4 παρατηρούμε ότι η δεύτερη αρμονική έχει τιμές πλάτους που αρχίζουν να μεταβάλλονται από την αρχή της νότας, ενώ οι υπόλοιπες αρμονικές ξεκινάνε την αντίστοιχη εξέλιξη μετά το σημείο όπου είναι  $t = 0.02 \text{ sec}$ . Η αύξηση του πλάτους για τη δεύτερη αρμονική γίνεται πιο απότομα από τις άλλες αρμονικές, ακολουθεί η τρίτη αρμονική, ενώ οι τρεις υπόλοιπες αρμονικές έχουν ομαλή μεταβολή πλάτους. Τέλος, για τη χρονική διάρκεια  $0.08 < t < 0.2 \text{ sec}$  κάθε αρμονική έχει τιμές πλάτους που δεν συμπίπτουν με τις τιμές του πλάτους κάποιας άλλης αρμονικής.

### **5.10 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα στο αντικείμενο**

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό η έρευνα στην οποία στηρίχτηκε η παρούσα πτυχιακή εργασία μπορεί να διευρυνθεί και να αποτελέσει το έναυσμα για παρόμοιες μελέτες. Τέτοιου είδους μελέτες μπορούν να περικλείουν την εξέταση κι άλλων μουσικών οργάνων τα οποία να παρουσιάζουν ιδιάζοντα χαρακτηριστικά όσον αφορά τον ήχο που παράγουν. Επίσης στηριζόμενος κάποιος στα αποτελέσματα που αφορούν στις αρμονικές των ήχων που μελετήθηκαν παραπάνω μπορεί να προβεί στην υποβολή ψυχοακουστικών tests σε ακροατές. Σκοπός αυτών των tests θα είναι η σύγκριση της επίδρασης του χρόνου ανόδου των συνιστωσών της αρχής και του τέλους ήχων, είτε φυσικών είτε συνθετημένων, στην αντίληψή τους από τον ακροατή. Ακόμα μία μελέτη που μπορεί να πραγματοποιηθεί είναι να ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία με αυτή της πτυχιακής εργασίας στηριζόμενη όμως στη θεωρία των κυματιδίων και εν συνεχεία να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν με αυτά της πτυχιακής. Μία άλλη συναφή μελέτη μπορεί να αποτελέσει η διεύρυνση άλλων τεχνικών που ενδεχομένως αποδειχτούν εφαρμόσιμες όσον αφορά στην εύρεση των μεταβατικών σταδίων των αρμονικών στην αρχή, στο τέλος και στη μετάβαση από τη μία νότα στην άλλη. Επεκτείνοντας την εφαρμογή αυτού του είδους των τεχνικών μπορεί κανείς να μελετήσει το vibrato ήχων από μουσικά όργανα και από φωνή. Τέλος, μία πιο εξεζητημένη εφαρμογή είναι δυνατό να αποτελέσει η χρήση των προαναφερθέντων τεχνικών για την αναγνώριση των μεταβάσεων ήχων κρουστών μουσικών οργάνων με σκοπό την εύρεση του ρυθμού.

## Παράρτημα Α: Βιογραφία του David Hilbert



David Hilbert

23 Ιανουαρίου 1862 – 14 Φεβρουαρίου 1943

Ο David Hilbert αποφοίτησε από το γυμνάσιο της γενέτειρας πόλης του, το Königsberg της τότε Πρωσίας και νυν της Ρωσίας και στη συνέχεια φοίτησε στο πανεπιστήμιο της ίδιας πόλης όπου και απέκτησε το διδακτορικό του δίπλωμα, το 1885. Το 1884 στο ίδιο πανεπιστήμιο διορίστηκε ο καθηγητής ο Hurwitz, ο οποίος έπαιξε σημαντικό ρόλο στη μαθηματική αναζήτηση του Hilbert. Ο Hilbert ανήκε στο διδακτικό προσωπικό του πανεπιστημίου από το 1886 έως το 1895, κατέχοντας την ανώτατη βαθμίδα ως καθηγητής από το 1893. Το 1892 προτάθηκε στο Hilbert θέση στο πανεπιστήμιο Göttingen του Βερολίνου και το 1895 έγινε καθηγητής μαθηματικών στο εν λόγω πανεπιστήμιο.

Η πρώτη γνωστή επιστημονική έρευνα του Hilbert έγινε το 1888 πάνω στη θεωρία της σταθερότητας (invariant theory) αποδεικνύοντας το γνωστό Θεώρημα της Βάσης (Basis Theorem). Με βάση το παραπάνω θεώρημα έγραψε ένα επιστημονικό άρθρο, αλλά οι καινοτόμες ιδέες του ήταν δύσκολο να γίνουν αποδεκτές. Το 1893 ξεκίνησε μια εργασία στη πάνω στη θεωρία αλγεβρικών αριθμών. Επίσης η έρευνά του στη γεωμετρία τον οδήγησε να προτείνει 21 αξιώματα και να ανάλυση τη σημαντικότητά τους.

Το 1899 στο δεύτερο παγκόσμιο συνέδριο Μαθηματικών που έγινε στο Παρίσι έδωσε μια διάλεξη με τίτλο «Τα προβλήματα των μαθηματικών». Ήταν μια αναφορά στους μαθηματικούς του επερχόμενου 20<sup>ου</sup> αιώνα γεμάτη αισιοδοξία νιώθοντας ότι τα τότε υπάρχοντα ανοικτά μαθηματικά προβλήματα ήταν ένα σημάδι ζωντάνιας για τους μαθηματικούς.



Τα προβλήματα του Hilbert περιελάμβαναν την υπόθεση της συνέχειας, το σωστό προσδιορισμό των πραγματικών αριθμών, την υπόθεση του Goldbach, την υπέρβαση των δυνάμεων των αλγεβρικών αριθμών και την επέκταση των αρχών του Dirichlet. Σήμερα το όνομα του Hilbert είναι περισσότερο συνδεδεμένο με την ιδέα του χώρου του Hilbert.

Πολλοί υποστηρίζουν ότι το 1915 ο Hilbert ανακάλυψε τις σωστές χωρικές εξισώσεις για τη γενική σχετικότητα πριν τον Einstein, αλλά ποτέ ο ίδιος δε διεκδίκησε αυτή την ανακάλυψη. Στην πραγματικότητα όμως, το άρθρο του Hilbert στο αντίστοιχο αντικείμενο δεν περιείχε τις χωρικές εξισώσεις της θεωρίας της σχετικότητας, εν αντιθέσει με αυτό του Einstein που τις περιείχε.

Ο Hilbert είχε σημαντική συμβολή σε πολλά πεδία των μαθηματικών όπως στα πεδία των αλγεβρικών αριθμών, στη μαθηματική ανάλυση, τις εξισώσεις των ακέραιων αριθμών, στα μαθηματικά της φυσικής και στην ανάλυση των μεταβλητών.

Ανάμεσα στους πολλούς μαθητές του Hilbert είναι και ο Hermann Weyl, ο παγκόσμιος πρωταθλητής στο σκάκι Lasker και ο Zermelo.

Στη μακρόχρονη μαθηματική του σταδιοδρομία ο Hilbert κέρδισε πολλές διακρίσεις. Το 1905 η ουγγρική ακαδημία επιστημών έπλεξε ένα ιδιαίτερο εγκώμιο για το Hilbert. Το 1930 ο Hilbert αποσύρθηκε και η πόλη του Königsberg τον ανακήρυξε επίτιμο πολίτη της πόλης. Κατά τη διάρκεια αυτής της τελετής και συγκεκριμένα στο τέλος της ομιλίας του είπε πέντε λέξεις μέσα από τις οποίες αντικατοπτριζόταν ο ενθουσιασμός του για τα μαθηματικά καθώς και η αφοσίωση όλης του της ζωής στη λύση μαθηματικών προβλημάτων:

*Πρέπει να ζέρουμε, θα ζέρουμε.*