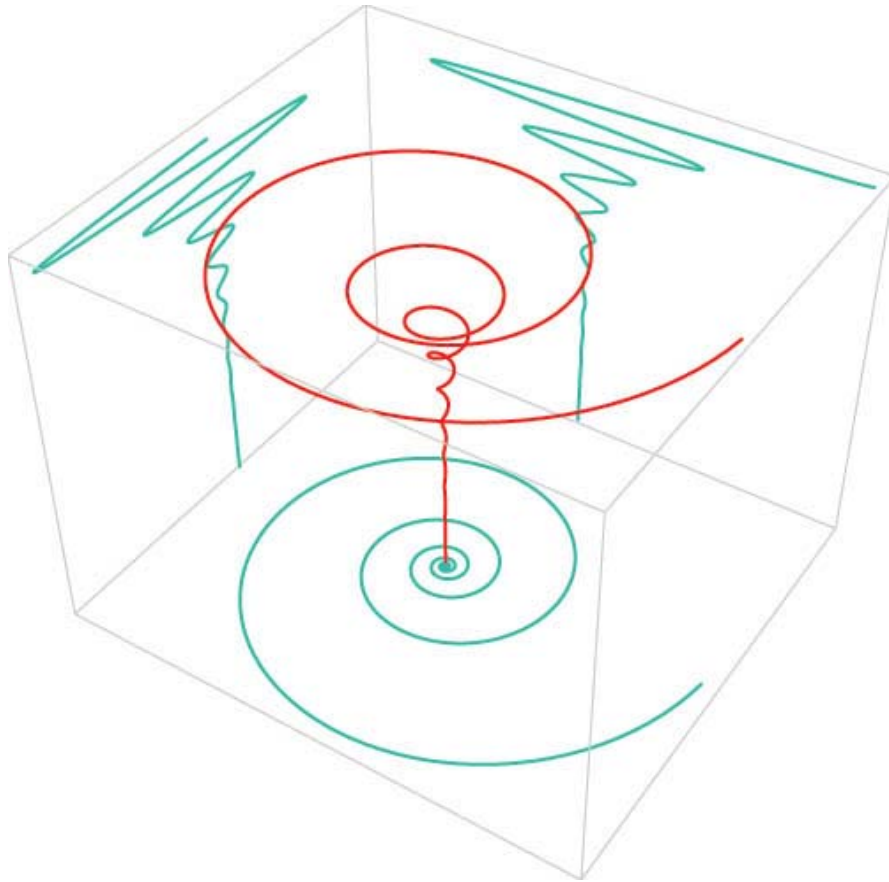


Νίκος Παλαμάρης
Πτυχιακή Εργασία

Σύνθεση αλγοριθμικής ηλεκτροακουστικής μουσικής με χρήση της
λογιστικής εξίσωσης διαφορών και του αριθμού Φ



Υπεύθυνη Καθηγήτρια: Κατερίνα Τζεδάκη
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ
Παράρτημα Ρεθύμνου
Τμήμα Μουσικής Τεχνολογίας και Ακουστικής
Ρέθυμνο
Ιούλιος 2007

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές Κ. Τζεδάκη και Ν. Βαλσαμάκη για τη συμβουλευτική τους συνδρομή και τους Α. Δενιόζο, Β. Σαρρηγιάννη, Σ. Βεργούλη, Μ.Αρβανιτάκη και Α. Λεβισιανό.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	4
Κεφάλαιο 1 – Θεωρητικό Μέρος	
1.1 Αλγοριθμική Σύνθεση.....	5
1.2 Μουσική των Ηχητικών Μαζών.....	8
1.3 Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα – Χaos.....	9
1.4 Λογιστική Εξίσωση.....	16
1.5 Ο Αριθμός «Φ».....	19
1.6 Η Λογαριθμική Σπείρα.....	21
1.7 Κοσμικός Πληθωρισμός.....	24
Κεφάλαιο 2 – Η σύνθεση του <i>TEOG</i>	
2.1 Φόρμα και Δομικά Στοιχεία.....	29
2.2 Μεθοδολογία Σύνθεσης.....	31
Program Notes του μουσικού έργου <i>TEOG</i>	40
Πίνακας εικόνων.....	41
Βιβλιογραφία – Αναφορές.....	42

Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της πτυχιακής εργασίας είναι η εφαρμογή των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων στη σύνθεση πρωτότυπου έργου ηλεκτροακουστικής μουσικής και η εφαρμογή εναλλακτικών δομών στη μουσική φόρμα όπως αυτή των γεωμετρικών σχημάτων. Η εργασία αποτελείται από δύο μέρη, ένα θεωρητικό και ένα πρακτικό και συνοδεύεται από το μουσικό έργο *TEOG*. Στο θεωρητικό μέρος της εργασίας παρουσιάζονται σε επτά υποκεφάλαια μια συνοπτική αναφορά στην ιστορία της αλγοριθμικής σύνθεσης και τους συνθέτες που ασχολήθηκαν με αυτή, οι επιστημονικές θεωρίες που σχετίζονται με το μουσικό έργο καθώς και οι μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν μαζί με την εκτενή αναλύση τους. Το θεωρητικό μέρος λειτουργεί ως εισαγωγή για τη κατανόηση των εννοιών που συσχετίζονται και χρησιμοποιούνται στη σύνθεση του μουσικού έργου.

Το πρακτικό μέρος περιλαμβάνει δύο υποκεφάλαια όπου γίνεται μία ανάλυση της δομής του κομματιού και παρουσιάζεται η μεθοδολογία σύνθεσης βήμα προς βήμα. Επίσης παραθέτονται παραδείγματα πάνω στη σύνθεση του ήχου και επεξηγηματικές εικόνες των μέσων που χρησιμοποιήθηκαν στην οργάνωση και τη σύνθεση του ηχητικού υλικού.

Κεφάλαιο 1 - Θεωρητικό Μέρος

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται μία θεωρητική εισαγωγή στις έννοιες και στις θεωρίες που σχετίζονται με τη συγκεκριμένη μουσική σύνθεση. Αναλυτικότερα, στα δύο πρώτα υποκεφάλαια αναλύεται η έννοια της αλγοριθμικής σύνθεσης και των διαφόρων κλάδων της και γίνεται μία ιστορική αναφορά στους συνθέτες που ασχολήθηκαν με αλγοριθμικές μεθόδους και στα αισθητικά ρεύματα που εγκαθίδρυσαν. Στο υποκεφάλαιο 1.3 παρουσιάζονται τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα και αναλύονται οι μαθηματικές τους ιδιότητες μέσα από παραδείγματα και στο 1.4 αναλύεται η συμπεριφορά της Λογιστικής εξίσωσης διαφορών η οποία χρησιμοποιείται στο πρακτικό μέρος της εργασίας. Στη συνέχεια στο υποκεφάλαιο 1.5 γίνεται αναφορά στον αριθμό «Φ», τις βασικές του ιδιότητες καθώς και μια σύνοψη της χρήσης του αριθμού σε επιστημονικές και καλλιτεχνικές εφαρμογές. Στο 1.6 αναλύονται οι ιδιότητες της λογαριθμικής σπείρας και δίνονται παραδείγματα που αποδεικνύουν το συσχετισμό της με πολλά φυσικά συστήματα. Τέλος στο υποκεφάλαιο 1.7 γίνεται μία αναφορά στη κοσμολογική θεωρία του Πληθωρισμού και στους λόγους για τους οποίους επικράτησε. Η συγκεκριμένη θεωρία αποτελεί κεντρικό θέμα της μουσικής σύνθεσης και ο συσχετισμός της με την υπόλοιπη θεωρία αναλύεται στο επόμενο κεφάλαιο.

1.1 Αλγοριθμική Σύνθεση

Η χρήση ενός συνόλου από κανόνες που υπαγορεύουν τη σύνθεση μουσικής είναι σε ένα γενικότερο πλαίσιο αυτό που αποκαλούμε αλγοριθμική σύνθεση. Οι αλγόριθμοι στα μαθηματικά και στις επιστήμες των υπολογιστικών συστημάτων είναι μία σειρά από εκτελέσιμες διαδικασίες οι οποίες δέχονται κάποιες αρχικές συνθήκες και αναλόγως εξάγουν συγκεκριμένα αποτελέσματα. Ειδικότερα στη Πληροφορική ένας αλγόριθμος ενδέχεται να είναι μία σειρά από συγκεκριμένα βήματα ή ένας βρόγχος από βήματα ή μία διαδικασία υπολογισμών βασισμένων στη λογική ή την σύγκριση ή και όλα τα παραπάνω μαζί. Στη μουσική δημιουργία οι αλγόριθμοι έκαναν από πολύ νωρίς την εμφάνισή τους. Ακόμη και οι αντιστικές μέθοδοι σύνθεσης στη Δυτική μουσική μπορούν να λογιστούν

ως ένα σύνολο από κανόνες που χρησιμοποιεί ο συνθέτης για να δώσει μορφή και εξέλιξη σε ένα έργο. Ωστόσο ο όρος «αλγοριθμική σύνθεση», χρησιμοποιείται κυρίως για να περιγράψει αυτοματοποιημένες διαδικασίες δημιουργίας μουσικής, χωρίς τη παρέμβαση του συνθέτη, σύμφωνα με τον Roads (1996, p.830). Ο ρόλος του συνθέτη περιορίζεται συνήθως στη λήψη αποφάσεων για την αρχική συνθήκη, αλλά και την ίδια τη φύση του μοντέλου που θα χρησιμοποιήσει. Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις που ο συνθέτης αναγκάζεται να κάνει παρεμβάσεις στον αλγόριθμο είτε λόγω προβλημάτων των υπολογιστικών μέσων που χρησιμοποιεί, είτε όταν το έργο απευθύνεται σε εκτελεστές και πρέπει να προσαρμόσει τα αποτελέσματα ώστε να μπορούν να παιχτούν από τα συμβατικά μουσικά όργανα. Μέχρι σήμερα έχει χρησιμοποιηθεί μία πληθώρα τέτοιων μοντέλων που προέρχονται είτε από τις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά, όπως, για παράδειγμα, γενετικοί αλγόριθμοι που βασίζονται στη διαδικασία της μετάλλαξης και της φυσικής επιλογής, είτε από την ανάπτυξη άλλων μεθόδων σύνθεσης όπως τα Learning Systems (συστήματα που μαθαίνουν μέσω μιας εξελικτικής διαδικασίας), Grammars και υβριδικά συστήματα που κάνουν χρήση πολλών αλγορίθμων μαζί με σκοπό ένα πιο ικανοποιητικό αισθητικό αποτέλεσμα.

Οι σειραϊκές μέθοδοι σύνθεσης που χρησιμοποιήθηκαν μέσα στο έργο του A.Schoenberg έδωσαν μία γενική κατεύθυνση που ακολουθήθηκε από μεταγενέστερους συνθέτες στην οργάνωση όχι μόνο των τόνων αλλά και άλλων μουσικών παραμέτρων όπως η διάρκεια, η ένταση και η χροιά. Ο Anton Webern και στη συνέχεια ο Olivier Messiaen ακολούθησαν αυτές τις τεχνικές και τις αξιοποίησαν στο μέγιστο βαθμό. Σύμφωνα με τον Ξενάκη (1955, p.54) σχεδόν τα πάντα επιτρέπονταν στο σειραϊκό συνθέτη. Όπως αναφέρει ο ίδιος: «Συνδυασμοί ανήκουστων ήχων, απειροελάχιστες ή άπειρες διάρκειες, εντάσεις πάσης φύσεως, απόλυτη συνέχεια ή ασυνέχεια κίνησης». Στη συνέχεια του άρθρου του ο Ξενάκης υποστηρίζει ότι όλη αυτή η οργάνωση δημιούργησε μία πολυπλοκότητα που δεν βοηθούσε ούτε το συνθέτη να δημιουργήσει άλλα ούτε και τον ακροατή να παρακολουθήσει. Έτσι συνθέτες σε Ευρώπη και Αμερική άρχισαν να υιοθετούν νέες μεθόδους σύνθεσης, εντελώς διαφορετικές από τις γνωστές φορμαλιστικές μεθόδους, όπως ο αλεατορισμός. Ο Pierre Boulez, ο Karlheinz Stockhausen, ο John Cage, ο Earle Brown και άλλοι συνέθεσαν έργα των οποίων η δομή βασίζονταν στην ελεύθερη βούληση των εκτελεστών ή στη ρίψη ζαριών. Από την άλλη

μεριά ο Ιάννης Ξενάκης, στα μέσα της δεκαετίας του '50, εισήγαγε μαθηματικούς νόμους πιθανοτήτων με προσδιορισμένες στατιστικές στάθμες, μία μέθοδο που ο ίδιος ονόμασε στοχαστική μουσική. Αυτή ίσως να ήταν η πρώτη προσέγγιση της αλγοριθμικής σύνθεσης.

Στο δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα ο Διδάκτωρ Χημείας Lejaren Hiller αποφάσισε να στραφεί προς τη μουσική και ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε αλγοριθμικές μεθόδους με ηλεκτρονικό υπολογιστή στη σύνθεση μουσικής όπως υποστηρίζει ο Roads (1996, p.830). Μέσα από διάφορες συνεργασίες με συνθέτες όπως ο Baker και ο Cage άνοιξε το δρόμο προς τη χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας στη μουσική και πολλοί άλλοι ακολούθησαν το παράδειγμά του όπως ο Herbert Brun, John Myhill, James Tenney, Pierre Barbaud, G.M. Koenig και άλλοι. Ένα μειονέκτημα που χαρακτηρίζει εκείνη την εποχή ήταν το μεγάλο μέγεθος των τότε υπολογιστών όπως ο Iliac Computer που χρησιμοποιούσε ο Hiller στο πανεπιστήμιο του Illinois. Το μέγεθος των συστημάτων όμως συνεχώς μειωνόταν και έτσι η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών εξαπλώθηκε και ιδιαίτερα μετά το τέλος της δεκαετίας του '60 που έγινε δυνατή η γραφική αναπαράσταση δεδομένων και ο πιο άμεσος έλεγχος χάρη στις ριζοσπαστικές ιδέες επιστημόνων όπως του Max Mathews. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές λόγω των υπολογιστικών τους δυνατοτήτων αποτελούν καταλληλότερα μέσα για τη διαχείριση μαθηματικών μοντέλων στη μεθοδολογία σύνθεσης. Οι καινοτομίες του Hiller βοήθησαν πολύ την εξέλιξη της αλγοριθμικής μουσικής δίνοντας λύσεις στους συνθέτες που ενδιαφέρονταν για την εφαρμογή τέτοιων μεθόδων.

Στη πορεία της εξέλιξης της αλγοριθμικής σύνθεσης, παρατηρήθηκαν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Όπως αναφέρει ο Roads (1996, p.881) η πρώτη προσέγγιση σχετίζεται με ντετερμινιστικές μεθόδους όπου η παραγωγή του ήχου γίνεται μέσω συγκεκριμένων αλλά περίπλοκων διαδικασιών χωρίς την ύπαρξη του στοιχείου της τύχης. Από την άλλη, οι στοχαστικές προσεγγίσεις εισάγουν την έννοια της πιθανότητας στη λήψη αποφάσεων ως προς την έκβαση του έργου. Η πιθανότητα μπορεί να διέπεται από μία γενική τάση χωρίς όμως το αποτέλεσμα να μπορεί να προβλεφθεί όπως θα μπορούσε σε ένα ντετερμινιστικό σύστημα, στο οποίο είναι γνωστές οι αρχικές συνθήκες. Η επιλογή του συνθέτη για το ποία μέθοδο θα χρησιμοποιήσει έχει να κάνει καθαρά με τις αισθητικές του επιλογές και τη φιλοσοφική του στάση.

1.2 Μουσική των Ηχητικών Μαζών

Στην προσπάθειά του να βρει νέες συνθετικές μεθόδους, διαφορετικές από αυτές της σειραϊκής μουσικής στη δεκαετία του 1950, ο Ξενάκης στράφηκε στα μαθηματικά και στην αρχιτεκτονική. Προσπάθησε να εφαρμόσει στη μουσική τους φυσικούς νόμους που διέπουν διάφορα φαινόμενα, όπως π.χ. το θρόισμα των φύλλων ενός δέντρου, την οχλοβοή μιας διαδήλωσης, το τερέτισμα των τζιτζικιών κ.ά., δημιουργώντας μια μουσική «ηχητικών μαζών». Το πρώτο έργο που σηματοδοτεί την πρωτοποριακή αυτή κατεύθυνση, είναι οι Μεταστάσεις (1954) για 61 όργανα. Το έργο αυτό, με το οποίο έγινε ευρύτερα γνωστός, χρησιμοποιεί μαζικά glissandi, δημιουργώντας την αίσθηση κινούμενων ηχητικών μαζών. Βασίζεται σε μια γραφική παράσταση παραβολοειδών υπερβολών που αντιστοιχεί στα glissandi των εγχόρδων με άξονα “x” τον χρόνο (sec) και άξονα “y” τις συχνότητες των φθόγγων (Hz). Ακούγοντας το έργο αυτό δεν αντιλαμβάνεται κάποιος συγκεκριμένες μελωδικές γραμμές, αντίθετα ακούει ένα σύνολο από κινούμενες ηχητικές επιφάνειες. Η οργάνωση των επιμέρους φωνών των οργάνων δεν έχει καμία σχέση με τις αντιστικτικές διαδικασίες που χρησιμοποιεί η τονική, η ατονική ή και δωδεκαφθογγική / σειραϊκή μουσική. Σε παρόμοια ηχητικά αποτελέσματα αυτής της αισθητικής των «ηχητικών μαζών» έφτασαν, με εντελώς διαφορετική αφετηρία και φιλοσοφία, δύο σύγχρονοι συνθέτες του Ξενάκη λίγα χρόνια αργότερα, ο Gyorgy Ligeti, με το έργο του Ατμόσφαιρες (1961), καθώς και ο Krzysztof Penderecki, με το έργο του Θρηνωδία για τα θύματα της Χιροσίμα (1960). Τα συγκεκριμένα έργα, μαζί με τις Μεταστάσεις του Ξενάκη, που προηγήθηκε χρονολογικά (1954), είναι τα πρώτα αυτού του νέου μουσικού ακούσματος των «ηχητικών μαζών», αποτελώντας ταυτόχρονα τα έργα που έκαναν και τους τρεις συγκεκριμένους συνθέτες ευρύτερα γνωστούς. Το έργο Πιθοπρακτά που ακολούθησε ήταν η πρώτη απόπειρα του Ξενάκη να τυποποιήσει τη συνθετική τεχνική που είχε αρχίσει να εφαρμόζει με μαθηματικές θεωρίες. Στο έργο αυτό εφάρμοσε νόμους της θερμοδυναμικής που περιγράφουν τη συμπεριφορά ενός αερίου κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες (κατανομή Maxwell-

Boltzmann), αντιστοιχώντας παραμέτρους της μουσικής με τη συμπεριφορά των μορίων ενός αερίου.

Από το έργο του Ξενάκη «Μεταστάσεις» και μέχρι σήμερα έχουν χρησιμοποιηθεί από διάφορους συνθέτες μία μεγάλη γκάμα μαθηματικών αλγορίθμων άλλοτε στοχαστικών και άλλοτε ντετερμινιστικών (βλ. σελ. 7). Μία από αυτές τις τάσεις είναι η χρήση αλγορίθμων γεωμετρίας φράκταλ (fractal) και άλλων χαοτικών συστημάτων που βασίζονται στην έρευνα πάνω στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα.

1.3 Μη γραμμικά Δυναμικά Συστήματα – Χάος

Σε αυτή την ενότητα γίνεται μία σύντομη αναφορά στη έννοια του Χάους και μέσα από παραδείγματα παραθέτονται οι ιδιότητες των συστημάτων που σχετίζονται με αυτό. Το Χάος είναι ένας από τους κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών και αφορά στη κατανόηση της απρόβλεπτης και φαινομενικά τυχαίας συμπεριφοράς των πιο απλών δυναμικών συστημάτων. Το όνομα Χάος, δόθηκε από τον φυσικό και μαθηματικό James Yorke. Πριν όμως δοθεί όνομα σε αυτό το νέο τομέα των μαθηματικών ο ερευνητής μετεωρολογίας Edward Lorenz, αξιοποιώντας τις μαθηματικές του γνώσεις και μέσα από μία σειρά από έρευνες παρατήρησε μία αδυναμία μακροπρόθεσμης πρόβλεψης του καιρού. Αυτή η αδυναμία πρόβλεψης σχετίζεται με μία σημαντική ιδιότητα των χαοτικών συστημάτων που έχει να κάνει με την ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Ο Stephen Smale στις δικές του έρευνες πάνω σε προβλήματα τοπολογικού μετασχηματισμού του χώρου (το πέταλο του Σμέιλ) παρατήρησε την ίδια ιδιότητα. Αυτή η ιδιότητα κάποιων συστημάτων να έχουν ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες καθώς και η πολυπλοκότητα που παρουσίαζαν σε συνδυασμό με τη σταθερότητα κλίμακας, παρατηρήθηκε όχι μόνο από τους δύο προαναφερθέντες ερευνητές αλλά από μία σειρά επιστημόνων από διάφορους κλάδους, με διαφορετικές κατευθύνσεις, που χωρίς να το ξέρουν δούλευαν τελικά πάνω στο ίδιο πεδίο, που ήταν τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Η κατανόηση της πολυπλοκότητας της φύσης από το σχηματισμό των στροβιλισμών, το σχήμα των νεφών και των βουνών μέχρι την εξέλιξη των πληθυσμών απαιτούσε την υποψία, από τη μεριά των ερευνητών, ότι αυτή η

πολυπλοκότητα δεν ήταν κάτι τυχαίο, κάτι απρόβλεπτο. Αυτή η νέα αντιμετώπιση των πραγμάτων οδήγησε στη νέα επιστήμη του Χάους. Σύμφωνα με τον Gleick (1990, p.161) κάθε επιστήμονας που αναγνώριζε το Χάος ή το ανακάλυπτε για πρώτη φορά, ερχόταν αντιμέτωπος με μία αλήθεια που όχι μόνο δεν περιοριζόταν στα όρια της δικής του έρευνας αλλά αποτελούσε μία αλήθεια συμπαντική που περιγράφει και διέπει το κόσμο μας. Ο Benoit Mandelbrot ανακάλυψε την κλασματική διάσταση και τη γεωμετρία των φράκταλ που χρησιμοποίησε αργότερα σε μία σειρά από έρευνες πάνω σε διάφορους τομείς από την ανθρώπινη φυσιολογία μέχρι τη σεισμολογία. Ο Mitchell Feigenbaum αναζητήσε δομές με σταθερότητα κλίμακας για να δει μέσα στα χαοτικά συστήματα μία κανονικότητα, ένα σταθερό ρυθμό σύγκλισης των αποτελεσμάτων που τελικά αποτέλεσε το υπόβαθρο της θεωρίας της Παγκοσμιότητας (Universality).

Η παρατήρηση του φυσικού κόσμου μας οδηγεί σε μία σειρά από ερωτήματα σχετικά με την έλλειψη προβλεψιμότητας σε δύο καταστάσεις κανονικής συμπεριφοράς όταν αυτές ξεπεράσουν ένα «όριο» που σχετίζεται με την ενέργεια του συστήματος ή την ένταση των μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων. Μοντέλα που συναντούμε στη φύση μαρτυρούν την υπακοή σε μία αταξία και ακόμη και τα πιο απλά από αυτά μπορούν να εμφανίσουν απρόβλεπτη συμπεριφορά. Το παρακάτω παράδειγμα εξηγεί αυτή τη πρόταση και δείχνει πως αυτή η αταξία βασίζεται σε κάποιους κανόνες που σχετίζονται με τις ιδιότητες των μη γραμμικών συστημάτων.

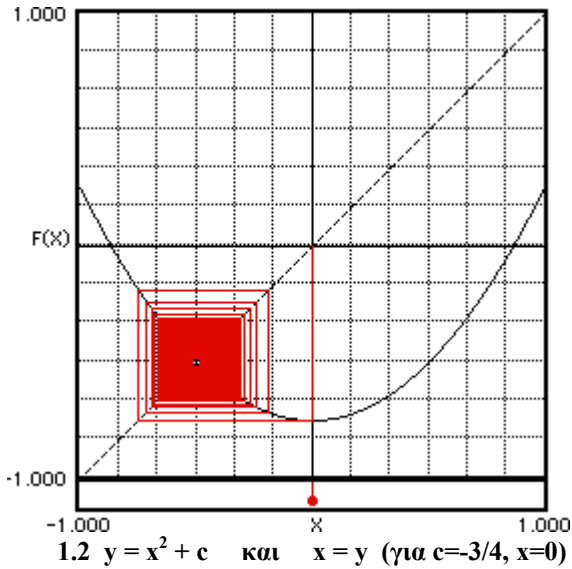
Ας πάρουμε δύο απλές εξισώσεις:

$$y = x^2 + c \quad \text{και} \quad x = y.$$

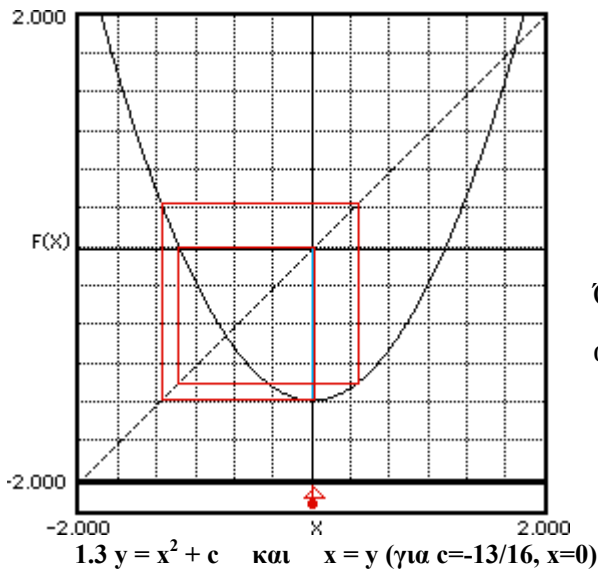
Αυτές είναι εξισώσεις που αντιστοιχούν σε μία παραβολή και μία ευθεία γραμμή αντίστοιχα. Για ένα x παίρνουμε το τετράγωνό του και προσθέτουμε σε αυτό τον αριθμό “ c ”. Στη συνέχεια το αποτέλεσμα το παίρνουμε ως “ x ” και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Αυτή η επαναληπτική διαδικασία μας δίνει μία ακολουθία αριθμών που ονομάζουμε «τροχιά» ενώ το “ x ” το ονομάζουμε «σπόρο» (Elert, 2005).

Μία μέθοδος προσέγγισης των τροχιακών η οποία σύμφωνα με τον Gleick εφαρμόστηκε πρώτη φορά από τον Feigenbaum είναι η γραφική τους αναπαράσταση με βάσει τους εξής κανόνες:

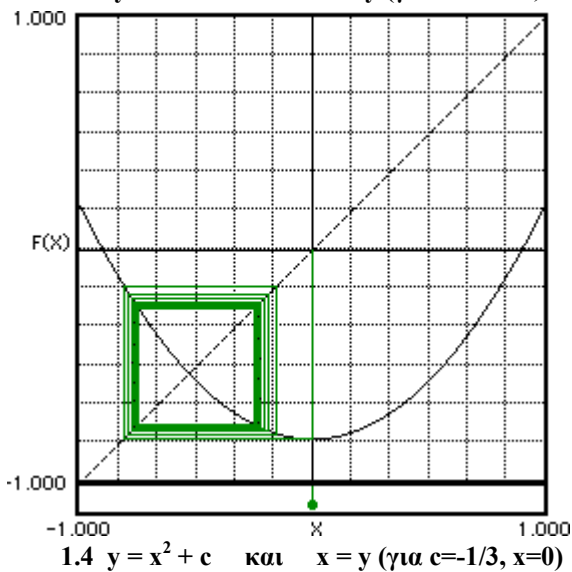
1. Σχεδιάζουμε τις δύο καμπύλες στους ίδιους άξονες και παίρνουμε ένα σημείο στον άξονα “ X ” που θα αντιπροσωπεύει τον «σπόρο» μας.



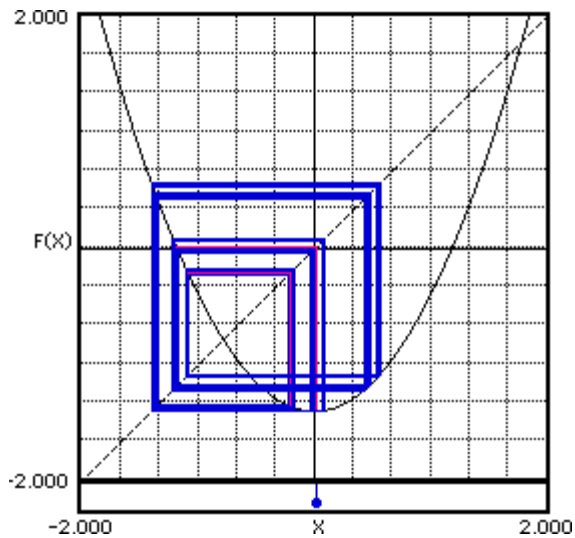
Σ' αυτό το διάγραμμα το $c = -3/4$ και παρατηρούμε πως οι τροχιές πλησιάζουν το σημείο έλξης και από τις δύο μεριές. Μετά από 1000 επαναλήψεις υπάρχει μία τρύπα που σημαίνει πως η τροχιά δεν έχει φτάσει στο τελικό της σημείο.



Όταν $c = -13/16$ η τροχιά ταλαντώνεται ανάμεσα στις τιμές $-3/4$ και $1/4$

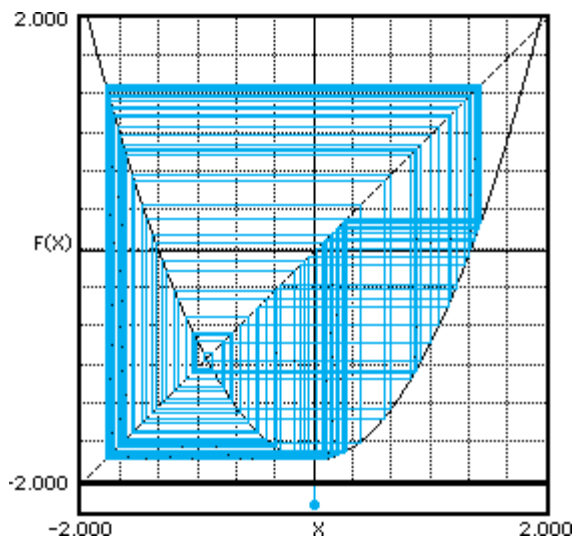


Για $c = -1.3$ η τροχιά εκτελεί μία ταλάντωση ανάμεσα σε τέσσερις τιμές ($-1.2996224637, 0.3890185483, -1.1486645691,$ και $0.0194302923.$)



1.5 $y = x^2 + c$ και $x = y$ για $(c=-1.4015, x=0)$ παρατηρείται ταλάντωση ανάμεσα σε 32 τιμές ενώ για -1.4015 όπως είδαμε η περίοδος της ταλάντωσης γίνεται άπειρη.

Αυτό το διάγραμμα σχεδιάστηκε με $c = -1.4015$ και αν και φαίνεται παρόμοιο με το προηγούμενο οι επαναλήψεις του δεν δίνουν ποτέ τα ίδια αποτελέσματα. Φαίνεται πως γίνεται μία ταλάντωση ανάμεσα σε τέσσερις περιοχές αλλά όχι συγκεκριμένα σημεία. Μικρές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες (c) δίνουν διαφορετικές τροχιές. Για παράδειγμα για $c = -1.4$



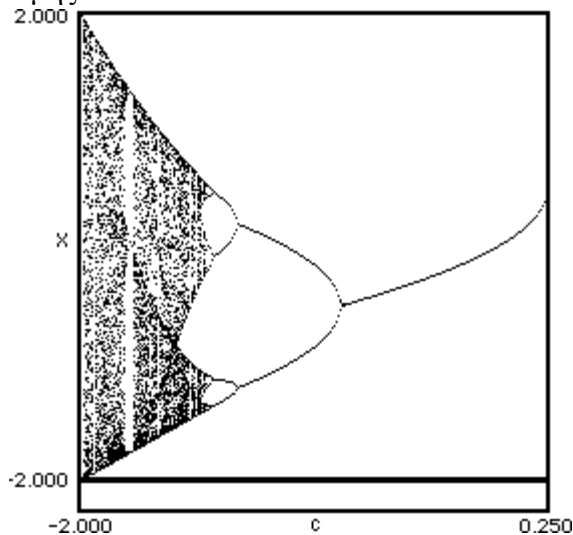
1.6 $y = x^2 + c$ και $x = y$ (για $c=-1/8, x=0$)

Για $c = -1.8$ η τροχιά καλύπτει κάθε περιοχή ανάμεσα στο διάστημα $[-2, 2]$. Στο διάγραμμα φαίνεται μόνο ένα μικρό μέρος από όλες τις περιοχές που θα καλύψει τελικά η τροχιά. (Χαοτική περιοχή – Chaotic Regime)

Όπως είδαμε λοιπόν στα παραπάνω διαγράμματα οι αρχικές συνθήκες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη συμπεριφορά ενός τέτοιου συστήματος. Αυτό είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του Χάους, η ευαίσθητη δηλαδή εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Ένας τρόπος για να δούμε τη γενική συμπεριφορά του συστήματος που μελετάμε είναι να σχεδιάσουμε τις τροχιές σε συνάρτηση με τις τιμές του “c”. Παίρνουμε τις τιμές κάθε τροχιάς που είναι πιο ενδεικτικές. Έτσι παραβλέπουμε τις 100 πρώτες επαναλήψεις και παίρνουμε την αμέσως επόμενη φάση των τροχιακών όπου έχουν κατασταλάξει σε μία χαρακτηριστική συμπεριφορά.

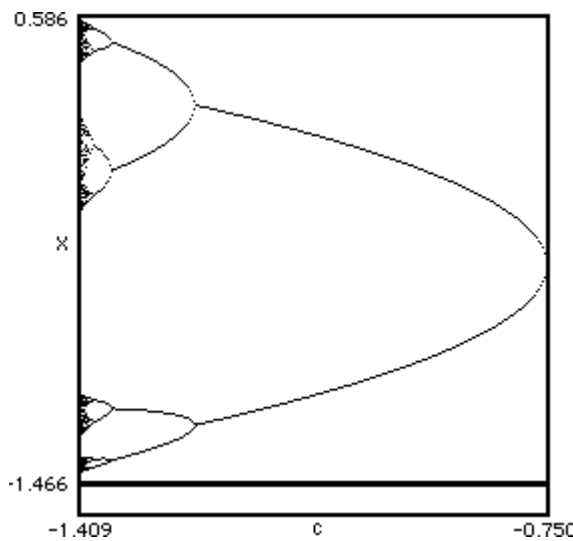
Το διάγραμμα που θα προκύψει ονομάζεται διάγραμμα διακλάδωσης καθώς δείχνει μεταξύ άλλων και τις διακλαδώσεις των τροχιακών που συμβαίνουν στις αλλαγές της τιμής του “c”.



1.7 Διάγραμμα Διακλάδωσης

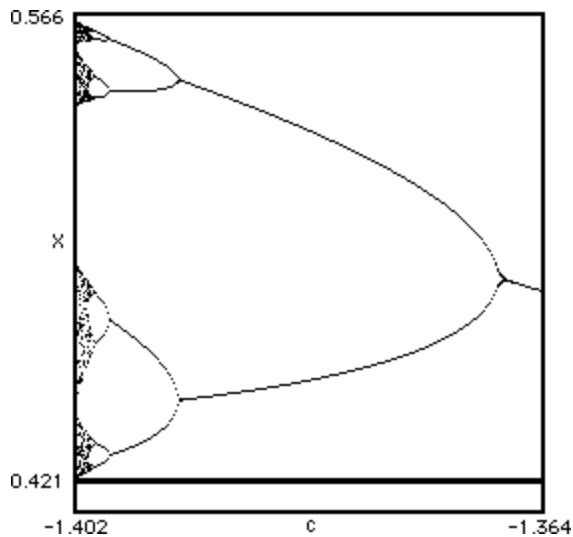
Στη διπλανή εικόνα βλέπουμε το διάγραμμα διακλάδωσης στο σύνολό του. Αυτό που παρατηρούμε είναι πως ένα σημείο έλξης διακλαδώνεται συνεχώς μέχρι να γίνει χαοτικό.

Ας αναλύσουμε όμως αυτό το διάγραμμα σε διάφορες κλίμακες



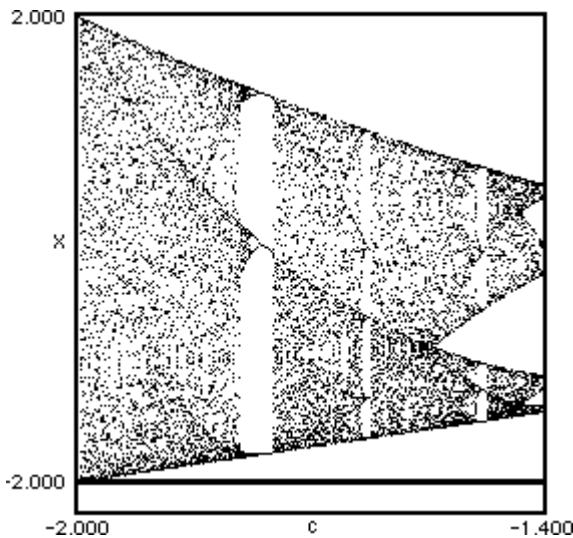
1.8 Διάγραμμα Διακλάδωσης – Μεγέθυνση 1^η

Εδώ παρατηρούμε μία κεντρική μεγέθυνση της περιοχής διπλασιασμού της περιόδου.



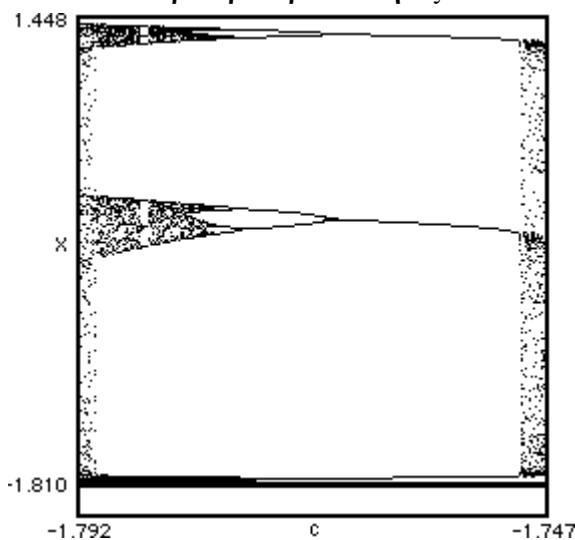
1.9 Λιάνοαααα Διακλάδωσας – Μεγέθωνση 2¹¹

Αυτή η εικόνα είναι μία μεγέθωνση της πάνω αριστερής γωνίας της προηγούμενης μεγέθωνσης. Εδώ φαίνεται μία σημαντική ιδιότητα, αυτή της **αυτο-ομοιότητας**. Μικρότερες σε κλίμακα περιοχές είναι ίδιες με περιοχές μεγαλύτερης κλίμακας. Αυτή η ιδιότητα είναι εμφανής σε όλο το διάγραμμα.



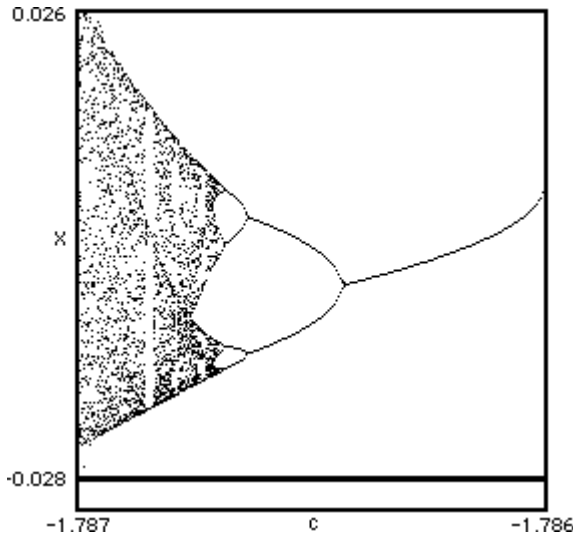
1.10 Διάγραμμα Διακλάδωσας – Μεγέθωνση στο παράθυρο περιοδικότητας

Εδώ βλέπουμε μία μεγέθωνση της χαοτικής περιοχής. Παρατηρούμε κάποια κενά ή μάλλον κάποιες περιοχές περιοδικότητας μέσα στο χάος.



1.11 Διάγραμμα Διακλάδωσας – Μεγέθωνση 2¹¹ στο παράθυρο περιοδικότητας

Η μεγέθωνση αυτής της περιοχής μέσα στο χάος αποκαλύπτει μία δομή παρόμοια με αυτή του συνολικού διαγράμματος. Η περιοχή διπλασιασμού της περιόδου είναι ίδια αλλά πολλαπλασιασμένη με το 3. Η όψη της δομής είναι κάπως συμπιεσμένη καθώς η περιοχή που καλύπτει είναι περισσότερο ψηλή παρά πλατιά.



1.12 Διάγραμμα Διακλάδωσης – 1000
Μεγεθύνσεις

Αυτή είναι μία μεγέθυνση της περιοχής του κεντρικού λοβού του διαγράμματος. Όπως φαίνεται και από τη κλίμακα, έχει γίνει μεγέθυνση 1000 φορές. Το σχήμα είναι ακριβώς το ίδιο με το αρχικό διάγραμμα. Παρατηρούμε λοιπόν πως όσο περισσότερο αλλάζουν τα πράγματα τόσο περισσότερο μένουν τα ίδια (Elert, 2005).

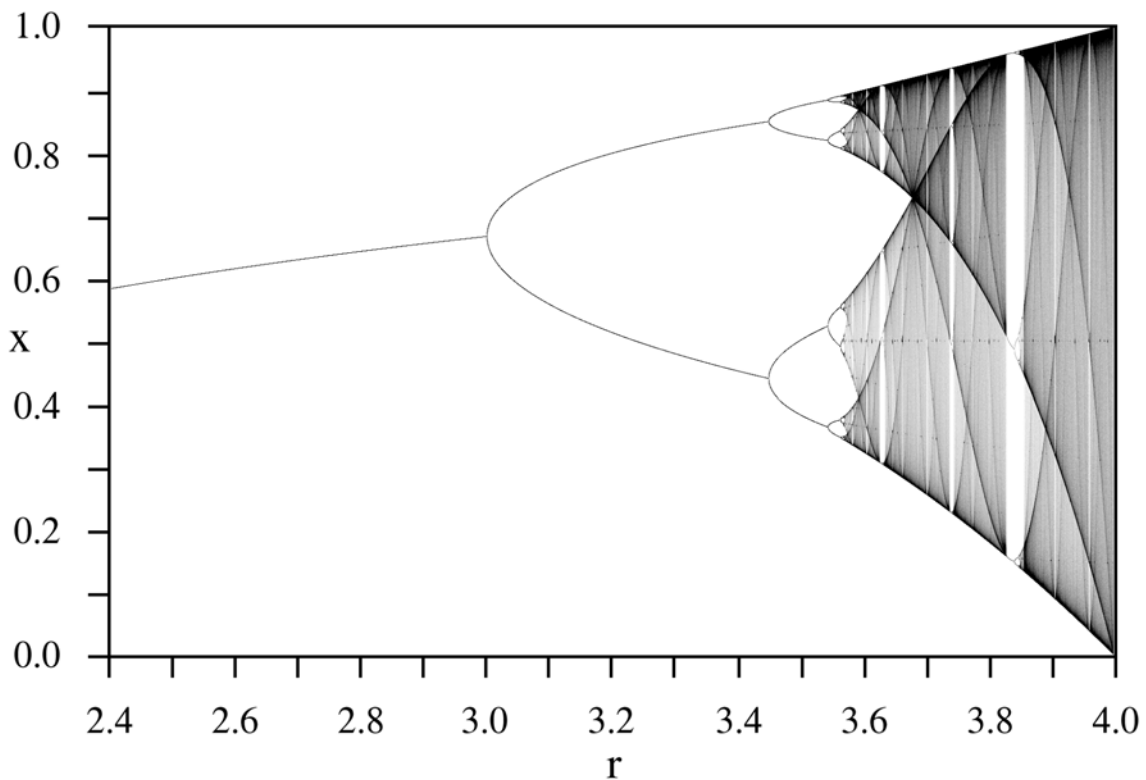
Ένα παρόμοιο διάγραμμα διακλάδωσης όπως του συστήματος του συγκεκριμένου παραδείγματος προκύπτει από την «χαρτογράφηση» της λογιστικής εξίσωσης διαφορών.

1.4 Λογιστική Εξίσωση

Σε αυτή την ενότητα αναλύεται το σύστημα της Λογιστικής εξίσωσης και των ιδιοτήτων της, όπως μελετήθηκε από τον Robert May. Ο Robert May ξεκίνησε ως θεωρητικός φυσικός στο Σίδνευ της Αυστραλίας και στη συνέχεια έκανε τη μεταδιδακτορική του διατριβή στα εφαρμοσμένα μαθηματικά στο Χάρβαρντ. Ακολούθησε το κλάδο της Βιολογίας μελετώντας αφηρημένα προβλήματα ευστάθειας και πολυπλοκότητας ενώ αργότερα καταπιάστηκε με πιο απλά οικολογικά ερωτήματα όπως η συμπεριφορά μεμονωμένων πληθυσμών στο πέρασμα του χρόνου. Ο May είχε αφιερώσει πολύ χρόνο στη μελέτη μιας παραλλαγής της Λογιστικής εξίσωσης διαφορών που είχε τη παρακάτω μορφή:

$$X_{n+1} = r X_n (1 - X_n)$$

Αυτή η απλή εξίσωση είναι ένα από τα πιο απλά μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Ένα μονοδιάστατο σύστημα που όταν επαναλαμβάνεται περιγράφει την εξέλιξη ενός πληθυσμού από γενιά σε γενιά κάτω από ορισμένες συνθήκες οι οποίες καθορίζονται από τη μη γραμμική παράμετρο “r”. Η Λογιστική Εξίσωση μελετήθηκε και από άλλους ερευνητές όπως οι Paul Stein και Stanislaw Ulam ενώ ήδη από το 1940 είχε χρησιμοποιηθεί από τον John von Neumann στη μορφή « $X_{n+1} = 4X_n(1-X_n)$ » σαν μέσο παραγωγής τυχαίων αριθμών (Weisstein, 1999). Όπως αναφέρει ο Gleick (1990, p.107) ο May πειραματίστηκε με διάφορες τιμές αυτής της μη γραμμικής παραμέτρου διαπιστώνοντας πως αυξάνοντας τη παράμετρο αυξανόταν και ο βαθμός «μη γραμμικότητας». Έτσι διαφορετικές τιμές του r επηρέαζαν όχι μόνο τον τελικό πληθυσμό ισορροπίας αλλά και το αν αυτός ο πληθυσμός θα έφτανε ποτέ σε μία ισορροπία. Κάνοντας μία χαρτογράφηση της λογιστικής εξίσωσης διαφορών θα πάρουμε ένα διάγραμμα όπως το παρακάτω σχήμα (εικόνα 1.1)².



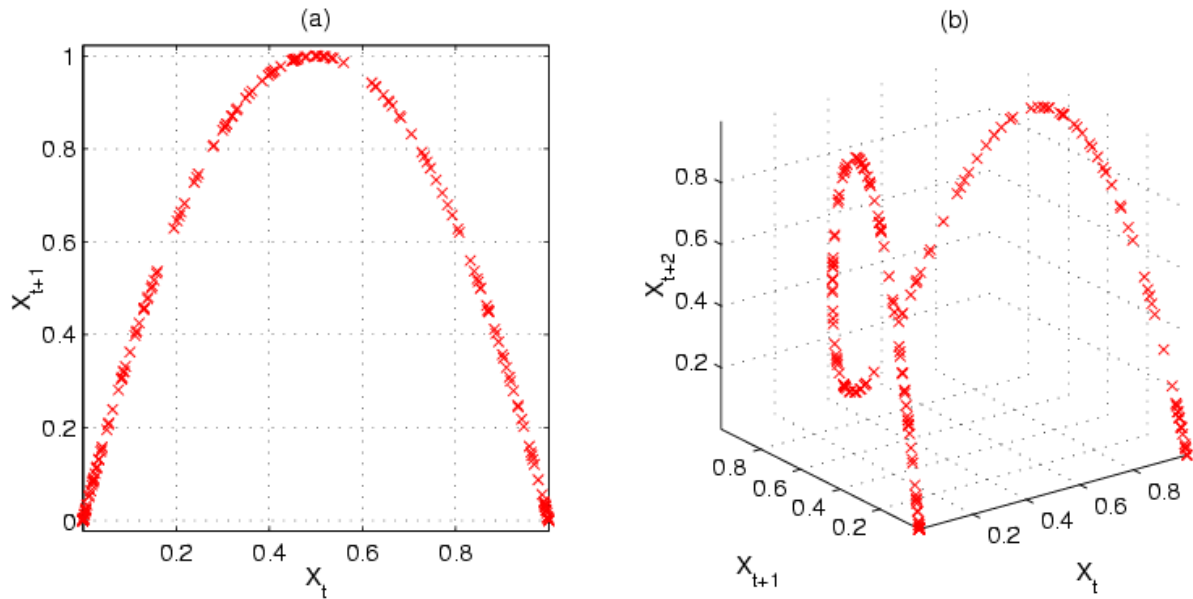
1.13 - Logistic Map

² http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map [cited 18/02/2007]

Οι κανόνες που διέπουν τη συμπεριφορά αυτού του συστήματος είναι παρόμοιοι με αυτούς του συστήματος στο παραπάνω παράδειγμα. Έτσι για τιμές του “r” μεταξύ 0-1 ο πληθυσμός θα μηδενιστεί ανεξάρτητα από την αρχική τιμή του πληθυσμού, για τιμές του “r” μεταξύ 1-2 ο πληθυσμός θα σταθεροποιηθεί στη τιμή $[(r-1)/r]$ ανεξάρτητα από την αρχική τιμή του. Για τιμές “r” μεταξύ 2-3 ο πληθυσμός θα σταθεροποιηθεί τελικά στη τιμή $[(r-1)/r]$ αφού πρώτα κάνει κάποιες περιοδικές κινήσεις γύρω από αυτή τη τιμή. Για τιμές του “r” μεταξύ 3 και $1+\sqrt{6}$ (σχεδόν 3.45) ο πληθυσμός ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο τιμές που εξαρτώνται από τη τιμή “r”, για πάντα. Όταν το “r” βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές 3.45 και 3.54 περίπου γίνεται μία ταλάντωση του πληθυσμού ανάμεσα σε 4 τιμές ενώ αν το “r” περάσει ελάχιστα τη τιμή 3.54 τότε ο πληθυσμός ταλαντώνεται ανάμεσα σε 8 μετά 16 και μετά 32 τιμές κ.ο.κ. Όταν το “r” πάρει τη τιμή 3.57 δεν παρατηρείται κάποια ταλάντωση του πληθυσμού καθώς ξεκινά η χαοτική περιοχή. Έτσι μικρές διαφοροποιήσεις στην αρχική τιμή του πληθυσμού δίνουν τελείως διαφορετικά αποτελέσματα κάτι που αποτελεί και κύριο χαρακτηριστικό του χάους. Για όλες τις τιμές του “r” από 3.57 και πάνω το σύστημα παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά με εξαίρεση κάποιες τιμές όπου παρατηρούνται οι λεγόμενοι «νήσοι σταθερότητας». Για παράδειγμα γύρω από τη τιμή 3.82 παρατηρείται μία ταλάντωση του πληθυσμού αρχικά σε 3 τιμές και όσο αυξάνει το “r”, σε 6 και μετά 12 κ.ο.κ. Αυτές είναι οι περιοχές περιοδικότητας που περιγράψαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Για τιμές πάνω από 4 η τιμή του πληθυσμού αφήνει το διάστημα [0.-1.] αποκλίνοντας δραματικά από την αρχική τιμή.

Η Λογιστική εξίσωση, ως ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα, συγκεντρώνει μία σειρά από ιδιότητες που μοιράζονται όλα αυτά τα συστήματα. Για παράδειγμα η ευαίσθητη εξάρτηση (για $3.57 < r < 4$), η ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας που είναι εμφανής στο διάγραμμα διακλάδωσης, όπως επίσης και η σταθερά του Feigenbaum “δ” = 4.669...(Universality) που παρατηρείται στο λόγο των μηκών των διακλαδώσεων.

Στο παρακάτω διάγραμμα (εικόνα 1.2)¹ φαίνεται η συμπεριφορά του συστήματος στο χρόνο. Το διάγραμμα αυτό ονομάζεται διάγραμμα φάσεων σε 2 και 3 διαστάσεις. Παρατηρείται στο διάγραμμα 3 διαστάσεων η ιδιότητα stretching and folding



1.14 - Διαγράμματα φάσεων της Λογιστικής Εξίσωσης σε 2 και 3 διαστάσεις

(τέντωμα και αναδίπλωση) που είχε πρώτος διακρίνει ο Smale ασχολούμενος με τις τοπολογικές ιδιότητες των μη γραμμικών συστημάτων.

1.5 Ο Αριθμός «Φ»

Ένας από τους αγαπημένους αριθμούς των μαθηματικών είναι ο αριθμός «Φ». Ο Χρυσός Λόγος όπως είναι επίσης γνωστός, ορίστηκε για πρώτη φορά γύρω στο 300 π.Χ. από τον πατέρα της γεωμετρίας, Ευκλείδη και εκφράζει μία αναλογία η οποία εξάγεται από μία απλή διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε «άκρο και μέσο λόγο». Σύμφωνα με τον Ευκλείδη (Livio, 2002, p.16 μετάφραση: Μαριάννα Σταυροπούλου):

Ένα ευθύγραμμο τμήμα λέγεται ότι κόβεται σε άκρο και μέσο λόγο όταν, όλο το ευθύγραμμο τμήμα είναι ανάλογο προς το μεγαλύτερο τμήμα όσο και το μεγαλύτερο προς το μικρότερο.

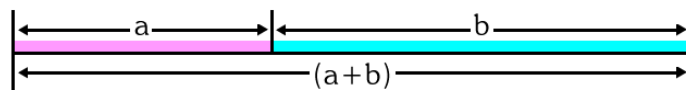


Figure 1

1.1 - Χρυσός Λόγος

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα (σχήμα 1.1)³ η αναλογία του “a” με το “b” είναι ίδια με την αναλογία του “b” με το “a+b”. Ο Χρυσός Λόγος είναι ένας άρρητος αριθμός (1,6180339...) και στην μαθηματική βιβλιογραφία συμβολίζεται με το γράμμα T από τη λέξη τομή. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα πήρε το συμβολισμό Φ από τον μαθηματικό Mark Barr προς τιμήν του Έλληνα γλύπτη Φειδία. Όπως αναφέρει ο καθηγητής φιλοσοφίας Mario Livio (2002, p. 19) ο αριθμός αυτός απασχόλησε τα μεγαλύτερα μυαλά όλων των εποχών, από το Πυθαγόρα και τον Ευκλείδη ως τον Ιταλό μαθηματικό του Μεσαίωνα, Λεονάρντο της Πίζας και τον αστρονόμο Ιωάννη Κέπλερ, έως σύγχρονες μαθηματικές μορφές όπως ο Roger Penrose καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Αλλά η γοητεία του Χρυσού Λόγου δεν περιορίζεται στους μαθηματικούς. Οι βιολόγοι, οι καλλιτέχνες, οι μουσικοί, οι ιστορικοί, οι αρχιτέκτονες, οι ψυχολόγοι, ακόμη και οι μυστικιστές έχουν μελετήσει και επιχειρηματολογήσει για τη βάση της πανταχού παρουσίας του.

Ο Χρυσός Λόγος εμφανίζεται σε μία πλειάδα φυσικών φαινομένων όπως στον αριθμό των νεογνών των κουνελιών (ως ακολουθία φιβονάτσι), στη φυλλοταξία (ως λόγος γωνιών που εμφανίζονται οι βλαστοί σε ένα κλώνο ή τα πέταλα σε ένα λουλούδι), στο μέσο ανθρώπινο σώμα (ως αναλογία μηκών), αλλά ακόμη και αν δεν εμφανίζεται ως αριθμός, παίρνει τη μορφή μίας λογαριθμικής σπείρας όπως αυτής που εμφανίζεται στους σπόρους των ηλίανθων και στους ανεμοστρόβιλους. Η παρουσία του μαρτυρά μία ιδιότητα των φυσικών συστημάτων να σταθεροποιούνται σε καταστάσεις που ελαχιστοποιούν την ενέργεια, και ο Χρυσός Λόγος παρέχει αυτή τη δυνατότητα λόγω της άρρητης φύσης του αριθμού, όπως αναφέρει ο Livio (2002, p. 164). Το γεγονός ότι το Φ

³ http://www.hypatia-lovers.com/geometry/Divine_Proportion.html [cited 15/02/2007]

είναι ένας άρρητος αριθμός, σημαίνει πως τα μεγέθη τα οποία εκφράζει δεν έχουν κάποιο κοινό μέτρο. Δεν υπάρχει δηλαδή μία κοινή ποσότητα που να μπορεί να περιέχεται για παράδειγμα 20 φορές στο ευθύγραμμο τμήμα “a” και 8 φορές στο “b”. Αυτό σημαίνει πως τα δύο αυτά τμήματα-μεγέθη είναι ασύμμετρα. Αυτή η ασυμμετρία για να διατηρηθεί σε ένα φυσικό σύστημα δε χρειάζεται τόση ενέργεια όσο θα χρειαζόταν για τη διατήρηση ενός συμμετρικού συστήματος.

Σε ένα παρόμοιο συμπέρασμα κατέληξαν, σύμφωνα με τον Livio (2002, p. 164), οι φυσικοί Stephan Douady και Yves Couder με ένα ιδιαίτερα εντυπωσιακό πείραμα. Κρατώντας ένα δίσκο γεμάτο με έλαιο σιλικόνης σε ένα μαγνητικό πεδίο που ήταν πιο ισχυρό στη περιφέρεια παρά στο κέντρο του δίσκου, έριχναν περιοδικά μικρές σταγόνες μαγνητικού υγρού ακριβώς στο κέντρο του δίσκου. Οι σταγόνες δρώντας σαν μικρές μαγνητικές βελόνες απωθούνται και ωθούνται ακτινωτά από την κλίση του μαγνητικού πεδίου. Οι Douady και Couder βρήκαν σχήματα που ταλαντεύονται, αλλά γενικά συγκλίνουν προς μία σπείρα στην οποία η «Χρυσή Γωνία» ($360/\Phi$) χώριζε τις διαδοχικές σταγόνες. Έτσι κατέληξαν στο ότι ο αριθμός Φ παρέχει τη κατάσταση ελάχιστου δυναμικού ενέργειας στην οποία τείνουν όλα τα φυσικά συστήματα.

Η έντονη παρουσία του Χρυσού Λόγου στη φύση, ενέπνευσε πολλούς καλλιτέχνες οι οποίοι τον χρησιμοποίησαν στη ζωγραφική όπως οι Ιταλοί Piero della Francesca, Leonardo Da Vinci και ο Luca Pacioli ο οποίος και συνέγραψε τη πραγματεία *Divina Proportione* όπου αναφέρεται στο Χρυσό Λόγο και τις «θεϊκές» του ιδιότητες, ονομάζοντάς τον Θεία Αναλογία. Ο Ελβετός αρχιτέκτων και ζωγράφος Charles-Edouard Jeanneret (1887-1965) γνωστός και ως «Le Corbusier» ήταν ένας από τους πιο ένθερμους υποστηρικτές της εφαρμογής του Χρυσού Λόγου στη τέχνη. Ο ενθουσιασμός για τον Χρυσό Λόγο προερχόταν, όπως αναφέρει ο Livio (2002, p.239) από το ενδιαφέρον του για τις βασικές μορφές και τις δομές που είναι η βάση των φυσικών συστημάτων, όπως επίσης και στη πίστη στις Πυθαγόρειες αρχές για μία αρμονία που επιτυγχάνεται με τους αριθμητικούς λόγους. Ο Le Corbusier βασιζόμενος στην περίφημη φράση του Πυθαγόρα «Πάντων μέτρον ο άνθρωπος», εισήγαγε ένα νέο αναλογικό σύστημα που ονόμασε Modulor το οποίο παρείχε «ένα αρμονικό μέτρο της ανθρώπινης κλίμακας, με ενιαία εφαρμογή στην αρχιτεκτονική και στη μηχανική». Οι αναλογίες που εντόπιζε ο Le Corbusier αποτύπωναν τον Χρυσό Λόγο και πρότεινε ότι η εφαρμογή του Modulor θα

έδινε αρμονία στα πάντα από το μέγεθος των καμπίνων μέχρι και των πόμολων στις πόρτες, έως τα κτίρια και τους αστικούς χώρους. Πολλοί μεταγενέστεροι καλλιτέχνες ενδιαφέρθηκαν για τη χρήση του αριθμού Φ περισσότερο για τις μαθηματικές-φιλοσοφικές ιδιότητές του, παρά για τις υποτιθέμενες αισθητικές ιδιότητες που πρότεινε ο Le Corbusier.

1.6 Η Λογαριθμική Σπείρα

Η λογαριθμική σπείρα είναι ένα από τα πιο αναγνωρίσιμα σχήματα στη φύση. Το σχήμα της συναντάται από τους μονοκύτταρους οργανισμούς γνωστούς ως τρηματοφόρα, τα σχήματα των κοχυλιών έως τις δίνες και το σχήμα των γαλαξιών (εικόνα 1.1⁴). Περιγράφηκε αρχικά από τον Rene Descartes και μελετήθηκε εκτεταμένα από τον μαθηματικό Jacob Bernoulli. Ο Bernoulli αφιέρωσε μία ολόκληρη πραγματεία με τίτλο «Spira Mirabilis» (θαυματουργή σπείρα) στη λογαριθμική σπείρα και μάλιστα ζήτησε να χαρακτεί στο τάφο του το σχήμα της μαζί με την λατινική επιγραφή «Eadem mutato resurgo» που σημαίνει : «Αν και αλλαγμένος, ανυψώνομαι πάλι ίδιος». Όπως αναφέρει ο Livio (2002, p.166) αυτή η φράση περιγράφει μία βασική ιδιότητα του σχήματος, την ιδιότητα της αυτομοιότητας. Όσο αλλάζει το μέγεθός της, το σχήμα της παραμένει το ίδιο. Σε αυτήν ακριβώς την ιδιότητα οφείλεται η τόσο συχνή παρουσία της στη φύση. Για παράδειγμα, όσο μεγαλώνει σε μέγεθος το μαλάκιο μέσα στο κοχύλι του ναυτίλου, κατασκευάζει όλο και μεγαλύτερους θαλάμους, αποκλείοντας τους μικρότερους που δε χρησιμοποιούνται πια. Κάθε τμήμα κατά μήκος του κοχυλιού συνοδεύεται από μία



1.1 - Η Λογαριθμική σπείρα στη φύση

⁴ Στην εικόνα 1.1 παρατηρούμε μια σειρά από σπειροειδείς μορφές στη φύση. Στη πρώτη εικόνα φαίνεται ένα κοχύλι, στη δεύτερη ένας σπειροειδής γαλαξίας, στη τρίτη μία περιοχή χαμηλής ατμοσφαιρικής πίεσης (κυκλώνας) και στη τέταρτη μία σπειροειδή διάταξη των κελύφων ενός καρπού ανανά. Πηγή: <http://ddrive.cs.dal.ca:9999/page/lvl3/11> [cited 04/02/2007]

αναλογική αύξηση της ακτίνας του, έτσι ώστε το σχήμα να παραμένει αναλλοίωτο. Επομένως, ο ναυτίλος βλέπει σε όλη τη διάρκεια της ζωής του ένα ίδιο «σπίτι» και δε χρειάζεται, για παράδειγμα να προσαρμόσει την ισορροπία του καθώς ωριμάζει.

Αρχικά η λογαριθμική σπείρα ονομάστηκε από τον Rene Descartes ως ισογώνια σπείρα (equiangular spiral) εξαιτίας μιας ακόμη μοναδικής της ιδιότητας. Εάν χαράξουμε μία ευθεία από το πόλο της σπείρας προς οποιοδήποτε σημείο πάνω στη καμπύλη, η ευθεία τέμνει τη καμπύλη στην ίδια γωνία. Αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται από τα γεράκια όταν επιτίθενται στο θήραμά τους και σύμφωνα με τον Livio (2002, p. 171) εξηγήθηκε από τον βιολόγο Vance A. Tucker. Ο Tucker βρήκε μέσω πειραμάτων σε αεροδυναμική σήραγγα ότι επειδή τα μάτια των γερακιών βρίσκονται στις δύο πλευρές του κεφαλιού, αντί να γυρίζουν το κεφάλι και να χάνουν ταχύτητα εξαιτίας της αεροδυναμικής, εντοπίζουν το θήραμά τους και στη συνέχεια διαγράφουν μία σπειροειδή τροχιά προς αυτό. Με αυτό το τρόπο διατηρούν τη λεία τους στο οπτικό τους πεδίο ενώ μεγιστοποιούν τη ταχύτητά τους.

Η πολική εξίσωση της λογαριθμικής σπείρας δίνεται από το τύπο:

$$r = ae^{b\theta}$$

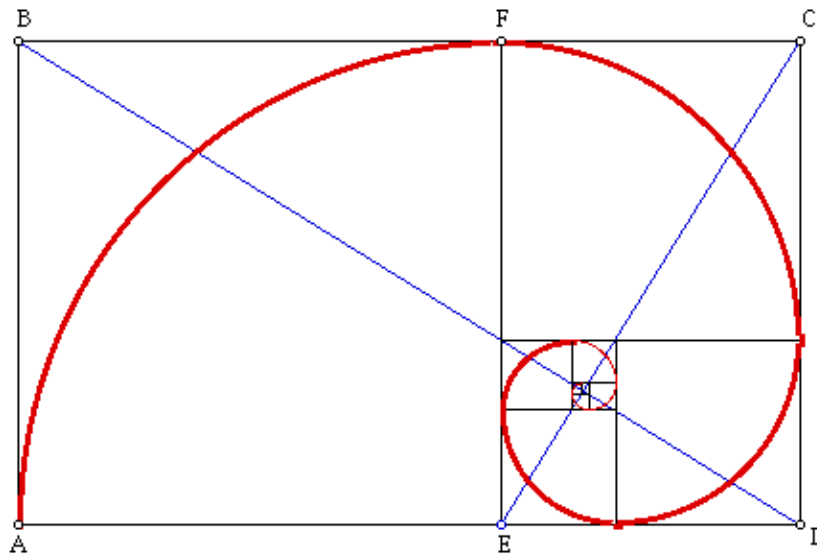
Όπου “r” η απόσταση από τον πόλο της σπείρας, “θ” η γωνία από τον άξονα X και “a”, “b” οι αρχικές σταθερές (Weisstein,1999). Όπως μπορούμε να καταλάβουμε και από τον τύπο, η σπείρα γυρίζοντας σε ίσες γωνίες αυξάνει την απόσταση από τον πόλο σε ίσους λόγους. Ο λόγος αύξησης της απόστασης σχετίζεται με τον αριθμό “b”.

Ένας τύπος λογαριθμικής σπείρας ονομάζεται Χρυσή σπείρα (Weisstein,1999) και σχετίζεται όπως φανερώνει και το όνομά του με τον αριθμό Φ. Σε αυτή τη περίπτωση ο αριθμός “b” παίρνει τιμές που δίνονται από τον τύπο:

$$b = \frac{\ln \varphi}{\theta_{\text{right}}}$$

Έτσι ο λόγος αύξησης σε αυτή τη περίπτωση αντιστοιχεί στον Χρυσό Λόγο.

Ένας εύκολος τρόπος για τη κατασκευή μιας Χρυσής σπείρας είναι με τη μέθοδο των Χρυσών Ορθογωνίων. Χρυσό Ορθογώνιο ονομάζεται το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του σε λόγο Φ . Όπως αναφέρει ο Livio (2002, p. 126) μπορούμε να κατασκευάσουμε μία σειρά από Χρυσά Ορθογώνια όπως στο σχήμα, παίρνοντας αρχικά ένα ορθογώνιο που οι πλευρές του βρίσκονται σε λόγο Φ και «κόβοντας» από αυτό ένα τετράγωνο. Αυτό που θα απομείνει είναι ένα μικρότερο ορθογώνιο που είναι και αυτό ένα Χρυσό Ορθογώνιο. Οι διαστάσεις του «θυγατρικού ορθογωνίου σε σχέση με το «μητρικό» είναι μικρότερες ακριβώς κατά παράγοντα Φ . Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία θα παίρνουμε επ'άπειρον όλο και μικρότερα (κατά παράγοντα Φ) Χρυσά Ορθογώνια. Αν χαράξουμε δύο διαγώνιους σε οποιοδήποτε ζεύγος μητρικού-θυγατρικού ορθογωνίου, θα διασταυρωθούν όλες στο ίδιο σημείο (σχήμα 1.2)⁵. Η σειρά των συνεχώς ελαττωμένων ορθογωνίων συγκλίνει προς αυτό το σημείο που δε μπορεί να προσεγγιστεί ποτέ. Σύμφωνα με τον Livio (2002, p. 126) ο μαθηματικός Clifford A. Pickover πρότεινε να αναφερόμαστε σε αυτό το σημείο ως το «Μάτι του Θεού».



1.2 - Χρυσά Ορθογώνια

Παίρνοντας στη συνέχεια το σχήμα των Χρυσών Ορθογωνίων και ενώνοντας τα σημεία που χωρίζουν τα Χρυσά Ορθογώνια σε τετράγωνα, διαγράφεται μία λογαριθμική σπείρα.

⁵

<http://jwilson.coe.uga.edu/EMT669/Student.Folders/Frietag.Mark/Homepage/Goldenratio/goldenratio.html>
[cited 15/03/2007]

Πιο συγκεκριμένα για κάθε στροφή 90 μοιρών η ακτίνα της σπείρας αυξάνεται κατά παράγοντα Φ .

1.4 Κοσμικός Πληθωρισμός

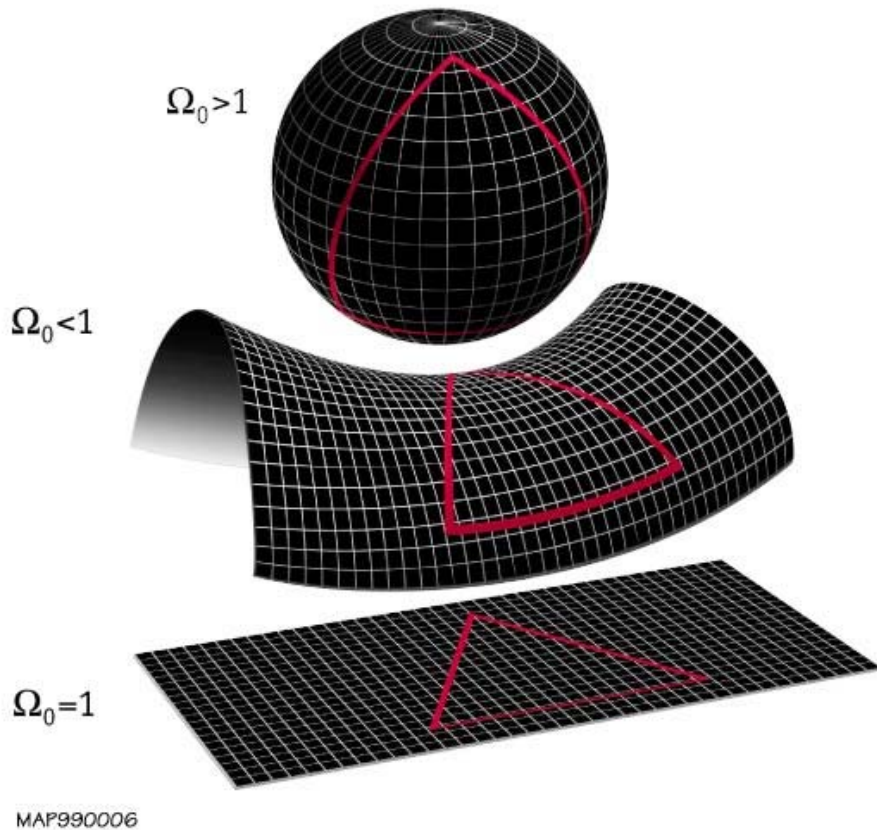
Το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης προβλέπει ένα δυναμικό και εξελισσόμενο σύμπαν προερχόμενο από την έκρηξη ενός αρχέγονου ατόμου όπως το ονόμασε ο Lemaitre που εξερράγη και διεστάλη. Στην αρχική κοσμοθεώρηση του Friedman και του Lemaitre ήρθαν να προστεθούν μία σειρά από ανακαλύψεις από επιστήμονες που είτε ήταν ουδέτεροι απέναντι στη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης, όπως ο αστρονόμος Edwin Hubble, είτε υπέρμαχοι όπως οι φυσικοί Gamow και Alpher, είτε αυστηροί επικριτές όπως ο Fred Hoyle. Ο Simon Singh στο βιβλίο του “Big Bang” ονομάζει αυτή τη κοσμολογική θεωρία ως μία από τις πιο σημαντικές και αν μη τι άλλο πιο συλλογικές προσπάθειες της παγκόσμιας επιστημονικής κοινότητας.

Ωστόσο, ενώ αυτή η θεώρηση φαινόταν σωστή, υπήρχαν διάφορα προβλήματα που δεν είχαν απαντηθεί και άλλα που δεν συνηγορούσαν με τη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης. Ένα από αυτά ήταν «το πρόβλημα του ορίζοντα» το οποίο διαπραγματεύεται το λόγο που το σημερινό σύμπαν φαίνεται να είναι ισότροπο και ομοιογενές προς όλες τις κατευθύνσεις. Αφού κανένα σήμα δεν μπορεί να ταξιδέψει γρηγορότερα από το φως, δύο περιοχές του σύμπαντος μπορούν να «επικοινωνήσουν» με φωτεινά σήματα, και να αποκαταστήσουν συνθήκες ισορροπίας όσον αφορά τη θερμοκρασία και την πυκνότητα τους, μόνο αν η μία βρίσκεται μέσα στον ορίζοντα της άλλης (Gribbin, 1996). Έτσι, για παράδειγμα, σε μια περιοχή του σύμπαντος που βρίσκεται στα όρια του σημερινού ορίζοντα ενός γήινου παρατηρητή αναμένεται ότι θα επικρατούν πολύ διαφορετικές συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης από αυτές που υπάρχουν στην περιοχή του σύμπαντος κοντά στη Γη. Κι' αυτό διότι οι δύο περιοχές στις πρώτες φάσεις της κοσμικής εξέλιξης, όταν η θερμοκρασία και η πίεση του σύμπαντος έπαιρναν τις τελικές τιμές τους, δεν είχαν τη δυνατότητα να «επικοινωνήσουν» εφόσον η μία βρισκόταν έξω από τον ορίζοντα της άλλης. Με άλλα λόγια, πολύ απομακρυσμένες μεταξύ τους περιοχές, που στο παρελθόν, όταν ο ορίζοντας ήταν μικρότερος, δεν μπορούσαν να «επικοινωνήσουν» με φωτεινά σήματα, αναμένεται να εμφανίζουν ανομοιογένεια

πυκνότητας και θερμοκρασίας. Τα στοιχεία όμως των παρατηρήσεων δείχνουν ακριβώς το αντίθετο. Στις μεγαλύτερες δυνατές κλίμακες αποστάσεων από αυτές που μπορούμε να παρατηρήσουμε, η θερμοκρασία και η πυκνότητα του σύμπαντος παρουσιάζουν εξαιρετική ομοιογένεια. Αυτό λοιπόν είναι γνωστό ως πρόβλημα του ορίζοντα, κι αποτελεί έναν από τους δυσκολότερους σύγχρονους κοσμολογικούς γρίφους.

Αφετέρου, υπάρχει κι ένα δεύτερο κοσμολογικό πρόβλημα που σχετίζεται με την κατανομή της μάζας και της ενεργείας στο σύμπαν. Τα στοιχεία αποδεικνύουν ότι η πυκνότητα της ύλης-ενέργειας του σύμπαντος είναι πολύ κοντά στην κρίσιμη τιμή. Η κρίσιμη τιμή είναι αυτή που δείχνει αν το σύμπαν θα είναι ανοικτό και συνεχώς διαστελλόμενο ή ένα κλειστό σύμπαν το οποίο περνά από μία φάση διαστολής, στη συνέχεια συστέλλεται και τελικά καταρρέει σε μία ανωμαλία (Guth, 1997). Το σύμπαν μας διαστέλλεται εδώ και 14 δισεκατομμύρια χρόνια και αυτή η επέκταση όπως είναι αναμενόμενο οδηγεί σε μία συνεχόμενη απόκλιση από τη κρίσιμη τιμή. Έτσι ενώ αυτή η παράμετρος πυκνότητας (Ω) είναι σήμερα κοντά στη τιμή 1, αυτό σημαίνει ότι στην αρχή της δημιουργίας θα πρέπει να ήταν μικρότερη από 1. Κάτι τέτοιο όμως δε συνάδει με τις παρατηρήσεις αφού εάν η τιμή της παραμέτρου ήταν μικρότερη από 1 θα έπρεπε το σύμπαν μας να συστέλλεται και όχι να διαστέλλεται. Αυτό είναι γνωστό ως «πρόβλημα επιπεδότητας του σύμπαντος». Η λέξη "επίπεδο" από αυτή την άποψη δεν σημαίνει δισδιάστατο και ομαλό σύμπαν. Σημαίνει ότι το σύμπαν δεν περιέχει καμία σημαντική καμπύλη ή κανένα κυματισμό, ούτε κάμπτεται γύρω από τον εαυτό του (δεν μοιάζει σαν σέλα ή δεν είναι σαν μια σφαίρα)⁶ (σχήμα 1.3).

⁶ Η Γεωμετρία του Σύμπαντος καθορίζεται από τη σταθερά Ω που είναι ο παράγοντας πυκνότητας. Σύμφωνα με τις εξισώσεις του Friedman (The Density Parameter – Wikipedia, n.d.), αν το Ω είναι κάτω από τη τιμή 1 τότε το σύμπαν επεκτείνεται προς τα έξω αποκτώντας σχήμα σέλας. Αν το Ω είναι πάνω από 1 τότε συγκλίνει προς τα μέσα τείνοντας σε σχήμα σφαίρας ενώ αν είναι ακριβώς 1 οι χωρικές διαστάσεις εξισώνονται και το σύμπαν έχει επίπεδο χαρακτήρα. Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Shape_of_the_universe [cited 11/2/2007]



1.3 - Η Γεωμετρία του Σύμπαντος

Προβλήματα όπως αυτά που προαναφέρθηκαν αλλά και μία σειρά από άλλα ερωτήματα που έψαχναν να βρουν απάντηση απαιτούσαν μία νέα θεωρία που θα συμπλήρωνε το καθιερωμένο κοσμολογικό μοντέλο χωρίς να ακυρώνει τις επιτυχίες που είχε ήδη σημειώσει. Γύρω στα τέλη του 1979 ο καθηγητής σωματιδιακής φυσικής του MIT, Alan Guth συνέλαβε τη **θεωρία του πληθωρισμού** η οποία αποτέλεσε σταθμό στη σύγχρονη κοσμολογία, υιοθετήθηκε και παραλάχθηκε από πολλούς επιστήμονες, όχι απαραίτητα κοσμολόγους, όπως ο Ρώσος Andrei Linde (1981) και ο Paul Steinhardt.

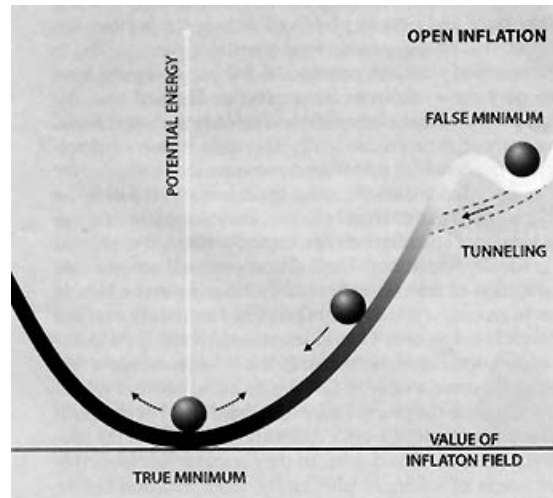
Υπάρχουν πολλές εκδοχές του πληθωρισμού, αλλά ουσιαστικά η θεωρία προτείνει μία σύντομη και γιγαντιαία φάση διαστολής κατά τις πολύ πρώιμες στιγμές του σύμπαντος η οποία έληξε μετά από 10^{-35} δευτερόλεπτα. Όπως αναφέρει ο Singh (2005, p. 547) Στη διάρκεια αυτής της πληθωριστικής περιόδου το σύμπαν διπλασιαζόταν σε μέγεθος κάθε 10^{-37} δευτερόλεπτα, δηλαδή υλοποίησε σχεδόν 100 διπλασιασμούς. Κάτι τέτοιο μπορεί να μην ακούγεται πολύ αλλά στη πραγματικότητα αυτή η εκθετική

επέκταση ξεπερνά τη ταχύτητα του φωτός. Η κατάσταση αυτή στην οποία περιήλθε το πρώιμο σύμπαν ονομάζεται «ψευδές κενό» και σύμφωνα με τη κβαντική θεωρία μπορεί να προέλθει από τις ελάχιστες διακυμάνσεις του κενού που στην ουσία είναι δημιουργία σωματιδίων που γρήγορα εξαφανίζονται. Το βαθμωτό πεδίο που ευθύνεται γι' αυτή τη διαστολή του χωροχρόνου ονομάζεται πεδίο inflaton (Cosmic Inflation-Wikipedia n.d.). Το πεδίο inflaton μετά τη διόγκωση απελευθέρωσε το ενεργειακό του δυναμικό και τελικά όλη η ενέργεια που είχε συγκεντρώσει υποβλήθηκε σε μία φασική μεταβολή δημιουργώντας ακτινοβολία και στη συνέχεια τις πρώτες μορφές ύλης που παρατηρούμε στο σημερινό σύμπαν μέσω της νουκλεοσύνθεσης. Το πρόβλημα των οριζόντων, γιατί δηλαδή πολύ απομακρυσμένα μέρη του σύμπαντος -περιοχές τόσο μακριά η μια με την άλλη που καμιά επικοινωνία μεταξύ τους δεν είναι δυνατή - μοιάζουν εν τούτοις τόσο παρόμοιες σαν να ήταν οι πλησιέστεροι γείτονες εξηγείται από τη θεωρία του πληθωρισμού αφού προτείνει ότι όταν ξεκίνησε ο κόσμος, αυτές οι περιοχές ήταν πράγματι γείτονες και έπειτα διαχωρίστηκαν πολύ γρήγορα σε μεγάλες αποστάσεις. Επίσης επιλύει το πρόβλημα της επιπεδότητας του χωροχρόνου, κάνοντας το σύμπαν επίπεδο. Οποιαδήποτε καμπυλότητα του χωροχρόνου θα είχε απαλειφθεί από την ταχύτερη εκείνη διαστολή του σύμπαντος. Επιπλέον, η πληθωριστική διαστολή θα είχε παράσχει έναν τρόπο για τις τυχαίες υποατομικές διακυμάνσεις στο αρχικό σύμπαν να διογκωθούν σε μακροσκοπικές αναλογίες. Κατά τη διάρκεια του χρόνου, η βαρύτητα θα μπορούσε έπειτα να σχηματοποιήσει αυτές τις παραλλαγές στο αραχνοειδές δίκτυο των γαλαξιών και των κενών μεταξύ τους που φαίνονται στο σύμπαν σήμερα.

Ο τρόπος με τον οποίο το πεδίο inflaton απελευθέρωσε το ενεργειακό του δυναμικό μπορεί να αναπαραστεί με μία μπάλα που κυλά σε μία πλαγιά.(σχήμα 1.4)⁷. Σε αυτή την εκδοχή του πληθωρισμού (ανοικτός πληθωρισμός) το πεδίο αναζητούσε το ελάχιστο δυναμικό του το οποίο ήταν υψηλό στην έναρξη του χρόνου λόγω των κβαντικών διαδικασιών. Ενώ είχε παγιδευτεί σε ένα «τοπικό ελάχιστο» βρισκόταν στη κατάσταση ψευδούς κενού. Έτσι ο πληθωρισμός συνεχιζόταν σε όλη την έκταση του σύμπαντος. Κάποιες όμως τυχερές περιοχές, μέσω του κβαντικού φαινομένου σήραγγας, κατάφεραν να ξεφύγουν από το τοπικό ελάχιστο και ολοκλήρωσαν την κάθοδό τους προς

⁷ <http://www.fas.org/irp/imint/docs/rst/Sect20/> [10/02/2007]

το πραγματικό ελάχιστο, αφού πρώτα πραγματοποίησαν κάποιες ταλαντώσεις γύρω από το τελικό σημείο ισορροπίας. Μια τέτοια περιοχή έγινε τελικά η φυσαλίδα μέσα στην οποία ζούμε, μία περιοχή μέσα στο χωροχρονικό άπειρο που ψύχθηκε και δημιούργησε το σύμπαν που ξέρουμε σήμερα.



1.4 - Πτώση και αναθέρμανση της ενέργειας του πεδίου inflaton

Η χαρακτηριστική κίνηση που χαρακτηρίζει τη πτώση της ενέργειας είναι ένα βασικό στοιχείο που χρησιμοποιείται στη σύνθεση του έργου *TEOG*, η ανάλυση του οποίου γίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

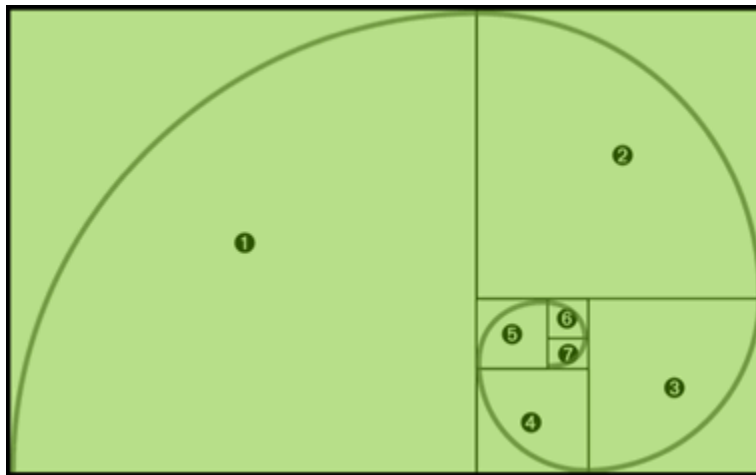
Κεφάλαιο 2 – Η σύνθεση του *TEOG*

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μία αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου σύνθεσης του έργου και των μέσων που χρησιμοποιήθηκαν. Στο πρώτο υποκεφάλαιο γίνεται ο συσχετισμός της θεωρίας του πληθωρισμού με τον αριθμό Φ και τις γεωμετρικές του επεκτάσεις και δηλώνεται ο τρόπος δόμησης του έργου σε μακροδομικό επίπεδο. Ο συσχετισμός που γίνεται και οι επιλογές παραμετροποίησης έχουν υποκειμενικό χαρακτήρα και αποτελούν μία από τις ενδεχόμενες λύσεις που θα μπορούσε να δώσει ένας συνθέτης. Στο δεύτερο υποκεφάλαιο αναλύεται το patch της Max/MSP που υλοποιήθηκε και χρησιμοποιήθηκε για την εφαρμογή του αλγόριθμου της Λογιστικής εξίσωσης καθώς και τα στάδια που ακολουθήθηκαν για τη σύνθεση. Επίσης περιγράφεται ο τρόπος οργάνωσης και σύνθεσης του ήχου και οι μεταβολές στις παραμέτρους του.

2.1 Φόρμα και Δομικά Στοιχεία

Παίρνοντας ως αφετηρία την ιδέα του κοσμικού πληθωρισμού ξεκίνησα τη σύνθεση ενός μουσικού έργου με στοιχεία σχετικά με αυτή τη θεωρία. Πιο συγκεκριμένα, κύριο θέμα αυτής της σύνθεσης αποτελεί η ενεργειακή ταλάντωση του πεδίου inflaton αμέσως μετά τη εκρηκτική επέκταση του κενού χώρου. Οι ταλαντώσεις αυτές όπως περιγράφηκε και παραπάνω οδήγησαν σε φασικές μεταβολές της ενέργειας η οποία σταδιακά με τη πτώση της θερμοκρασίας και με τη βοήθεια της βαρύτητας μετατράπηκε σε ακτινοβολία και στη συνέχεια σε ύλη δημιουργώντας τους γαλαξίες και τους πλανήτες που ξέρουμε σήμερα. Με ανάλογο τρόπο οργάνωσα το μουσικό υλικό το οποίο ξεκινώντας από μία δεδομένη κατάσταση περνά από κάποιες «φασικές μεταβολές» και μεταβάλλει συνεχώς το περιεχόμενό του. Ηχητικές μάζες, που βρίσκονται σε συνεχή κίνηση, μεταλλάσσονται «ακολουθώντας» τις ενεργειακές ταλαντώσεις του πεδίου. Όπως προβλέπει και η θεωρία οι ταλαντώσεις που πραγματοποιεί το πεδίο μέχρι να φτάσει στο πραγματικό ελάχιστο δυναμικό του, ακολουθούν μία φθίνουσα πορεία.

Ανάλογη λοιπόν θα πρέπει να είναι και η μορφή του κομματιού. Πιο συγκεκριμένα κάθε ταλάντωση του πεδίου, κάθε ολίσθηση της μπάλας δηλαδή όπως στο σχήμα παραπάνω (εικόνα 1.7), αντιστοιχεί σε ένα μόνο μέρος της συνολικής σύνθεσης, όπου οι ηχητικές μάζες ακολουθούν μία συγκεκριμένη κίνηση και υπόκεινται σε μία συγκεκριμένη μετάλλαξη. Συμπερασματικά, η μουσική φόρμα είναι ένα σύνολο από μέρη με διαφορετικές διάρκειες, οι οποίες μειώνονται σταδιακά.



2.1 - διαδοχικά τετράγωνα σε κλίμακες με παράγοντα Φ

Η παραπάνω εικόνα (σχήμα 2.1)⁸ είναι μία σχηματική αναπαράσταση της φόρμας του συγκεκριμένου έργου. Ξεκινώντας από κάτω αριστερά ακολουθούμε τη πορεία της σπείρας που διαγράφεται, περνώντας από μέρος σε μέρος μέχρι να φτάσουμε στο κέντρο της σπείρας. Το κέντρο της σπείρας αναπαριστά το πραγματικό ελάχιστο δυναμικό όπου καταλήγει η φθίνουσα ενέργεια. Το συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο ονομάζεται «Χρυσά Ορθογώνια» και μέσα από αυτά περνά μια λογαριθμική σπείρα.

Η επιλογή του σχήματος της σπείρας έγκειται στη παρουσία της σε πολλά φυσικά συστήματα αλλά και στο συσχετισμό της με τους στροβιλισμούς που λαμβάνουν χώρα στις αλλαγές φάσεων. Για τις αλλαγές φάσης του πεδίου inflaton, ως ένα ιδιαίτερο φυσικό σύστημα, και κυρίως για το τρόπο και το χρόνο που αυτές πραγματοποιήθηκαν λίγα είναι γνωστά. Η φύση των ταλαντώσεων της ενέργειας ωστόσο όπως αναφέρεται στη θεωρία υποδεικνύουν ένα απλό δυναμικό σύστημα με μεταβαλλόμενη ενέργεια. Η ενέργεια αυτή τείνει προς το ελάχιστο δυναμικό της και όπως αναφέρθηκε σε

⁸ http://www.stevegagne.com/more.php?id=24_0_1_0_M [cited 15/03/2007]

προηγούμενο κεφάλαιο αυτή η τάση σε καταστάσεις χαμηλού δυναμικού χαρακτηρίζεται από τον αριθμό Φ .

Μέσα σε κάθε τετράγωνο τα γεγονότα που εκτυλίσσονται είναι τα ίδια, απλά σε διαφορετικές κλίμακες. Οι ηχητικές μάζες είναι προϊόντα της λογιστικής εξίσωσης διαφορών και σχηματοποιούνται σε κάθε μουσικό μέρος ανάλογα με τη θέση τους σε σχέση με το συνολικό έργο. Έτσι για παράδειγμα στο δεύτερο μέρος έχουμε ήχους μεγαλύτερης διάρκειας απ'ότι στο τρίτο μέρος. Η τιμή της μη γραμμικής παραμέτρου της εξίσωσης ακολουθεί και αυτή μία ανοδική πορεία, αυξανόμενη από τη αρχική τιμή 3 στη τελική τιμή 3.99. Για κάθε μέρος η μη γραμμική παράμετρος έχει μία μοναδική τιμή έτσι ώστε κατά την μετάβαση από ένα μέρος στο επόμενο να μεταπηδούμε στην επόμενη κλίμακα της κλασματικής διάστασης.(Fractal dimension). Επιπροσθέτως, μέχρι το τέλος κάποιου μέρους οι ήχοι έχουν υποστεί τις απαραίτητες μεταλλάξεις ώστε να οδηγηθούν στην επόμενη κατάσταση. Αυτές οι μεταλλάξεις σχετίζονται θεματικά με τις φασικές μεταβολές της ενέργειας του πεδίου inflaton όπως προαναφέρθηκε και δεν είναι γραμμικές.

Ακολουθώντας τη πορεία που διαγράφει η λογαριθμική σπείρα, η κίνηση από τη μία γωνία του τετραγώνου στην απέναντι του, δεν είναι γραμμική αλλά εκθετική. Έτσι με την είσοδο σε ένα νέο μουσικό μέρος-τετράγωνο ξεκινά μία επιταχυνόμενη κίνηση που εκφράζεται ηχητικά με αύξηση της ταχύτητας παραγωγής δειγμάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι ηχητικές μάζες να είναι πιο πυκνές προς το τέλος του κάθε μέρους. Επίσης η ταχύτητα παραγωγής δειγμάτων αυξάνεται όχι μόνο κατά τη διάρκεια ενός μέρους αλλά συνολικά, ακολουθώντας πορεία αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας της λογαριθμικής σπείρας. Έτσι όσο κατευθυνόμαστε προς το κέντρο της σπείρας η ταχύτητα γίνεται μεγαλύτερη και αυτό γίνεται αντιληπτό από την αλλαγή του μουσικού μέτρου όσο το έργο οδεύει προς το τέλος του.

2.2 Μεθοδολογία Σύνθεσης

Η σύνθεση του έργου πραγματοποιείται σε 2 βασικά στάδια. Στο πρώτο στάδιο γίνεται χρήση του αλγόριθμου της λογιστικής εξίσωσης με σκοπό τη παραγωγή της ακολουθίας αριθμών που θα αντιστοιχούν στα τονικά ύψη ή κεντρικές συχνότητες. Πιο συγκεκριμένα στο περιβάλλον της Max/MSP γίνεται χρήση του external “a-logistic” της συλλογής “a-chaos-lib” του Andre Sier. Το συγκεκριμένο object έχει δημιουργηθεί σε γλώσσα προγραμματισμού C και είναι έτοιμο να λειτουργήσει σε περιβάλλον Max/MSP. Γύρω από το συγκεκριμένο object υλοποιήθηκε ένα νέο patch το οποίο αξιοποιεί τα αποτελέσματα της Λογιστικής εξίσωσης, μετατρέποντάς τα σε MIDI μηνύματα. Έτσι για παράδειγμα ορίζοντας τις αρχικές συνθήκες της λογιστικής εξίσωσης παράγουμε μία ακολουθία αριθμών (συγκεκριμένου μήκους-ανάλογα με τη διάρκεια του μέρους) η οποία θα μετατραπεί σε μία σειρά από note-on και note-off μηνύματα, που στη συνέχεια θα αποθηκευτούν σε ένα MIDI αρχείο. (εικόνα 2.2)

Το external object “a-logistic” δέχεται ως είσοδο, bang. Με κάθε bang που δέχεται παράγει μία τιμή της Λογιστικής εξίσωσης. Δηλαδή τη τιμή που θα έχει κάθε νέα «γενιά». Τα bang παράγονται από έναν μετρονόμο (το object metro) ο οποίος έχει μία μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Η ταχύτητα του μετρονόμου ρυθμίζεται από το object “line” το οποίο ουσιαστικά παράγει τη κίνηση από μία τιμή σε μία άλλη. Επίσης μαζί με την αρχική και τελική τιμή της ταχύτητας στο object “line” ορίζεται και η διάρκεια αυτής της κίνησης. Η κίνηση αυτή μετατρέπεται από γραμμική σε εκθετική μέσω μιας συνάρτησης μεταφοράς που παρέχει το object “scale”. Κάθε τιμή που παράγεται από τη Λογιστική εξίσωση είναι μέσα στο εύρος 0 έως 1. Το εύρος αυτό μετατρέπεται μέσω μιας άλλης συνάρτησης μεταφοράς σε ένα εύρος τιμών που αντιστοιχεί στο εύρος του MIDI πρωτοκόλλου (0-127). Στη συνέχεια αυτές οι τιμές θα αποτελέσουν τις νότες που θα δημιουργηθούν από το object “makenote”, όπου θα δοθούν οι τιμές για τη διάρκεια και την ένταση των νότων. Το “makenote” δημιουργεί στην ουσία μία σειρά από note-on και note-off μηνύματα. Αυτά τα μηνύματα αποθηκεύονται στη συνέχεια στο object “detonate” ως μία ακολουθία μηνυμάτων. Τέλος με την εντολή export στο “detonate” αυτή η ακολουθία γίνεται ένα MIDI μήνυμα .

Οι αρχικές συνθήκες της εξίσωσης είναι το μόνο δεδομένο που δεν αλλάζει καθ'όλη τη διάρκεια του έργου. Ορίζεται η τιμή 0.3666 η οποία βάσει της συνάρτησης μεταφοράς που χρησιμοποιήθηκε, αντιστοιχεί στη νότα **Bb** (Σι ύφεση) κάτω από τη μεσαία οκτάβα. Οι νότες B και Bb εμφανίζονται συχνά μέσα στο έργο ως ήχος υπόβαθρου συμπληρώνοντας τη δράση του αλγόριθμου.

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο (Φόρμα και Δομικά στοιχεία) κάθε μέρος του κομματιού έχει διαφορετική διάρκεια που ορίζεται από τη διάρκεια του προηγούμενου μέρους προς Φ .

$$Dur_n = Dur_{n-1} / \Phi^n$$

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη διάρκεια του κάθε μέρους ως το μήκος της διαγωνίου που ενώνει τις γωνίες απ'όπου περνά η λογαριθμική σπείρα σε κάθε τετράγωνο. Έτσι ορίζοντας ως πρώτο χρόνο τα 3 λεπτά (180 sec), το δεύτερο μέρος θα έχει διάρκεια 111 sec κ.ο.κ.

Επίσης ορίζεται μία διαφορετική τιμή της μη γραμμικής παραμέτρου για κάθε μέρος. Η επιλογή των τιμών δεν γίνεται τυχαία αλλά επιλέγονται οι τιμές για τις οποίες η Λογιστική εξίσωση παρουσιάζει μία χαρακτηριστική συμπεριφορά. Πιο συγκεκριμένα, στα 3 πρώτα λεπτά η τιμή της μη γραμμική παραμέτρου “r” διατηρείται κάτω από τη τιμή 3.55, και με το ξεκίνημα του δεύτερου μέρους ξεκινά και η χαοτική συμπεριφορά του συστήματος με $r = 3.64$. Στη συνέχεια η παράμετρος παίρνει διαδοχικά τις τιμές του παρακάτω πίνακα (πίνακας 2.1):

Πίνακας 2.1

Μέρος	Τιμή της παραμέτρου “r”	Διάρκεια Μέρους (sec)
1	3.0 / 3.3 / 3.55	180
2	3.64	111
3	3.78	68
4	3.82	42
5	3.95	26
6	3.99	16
7	3.99	10

Η πυκνότητα των ηχητικών μαζών σχετίζεται με τη ταχύτητα παραγωγής τιμών της Λογιστικής εξίσωσης. Η πυκνότητα αυτή σχετίζεται επίσης με το χρόνο και ο χρόνος με τη λογαριθμική σπείρα. Έτσι, προς το τέλος κάθε μέρους η πυκνότητα αυξάνεται εκθετικά, ακολουθώντας τις καμπύλες της σπείρας. Αυτή η εκθετική μεταβολή δίνει την αίσθηση μιας συνεχόμενης επιτάχυνσης η οποία μεγιστοποιείται στο τέλος του έργου. Στο πρώτο μέρος δεν υπάρχει συγκεκριμένο μουσικό μέτρο. Από το δεύτερο μέρος και μετά ξεκινά η επιταχυνόμενη κίνηση των ηχητικών μαζών με αρχική ταχύτητα: **1 δείγμα ανά 1 sec**. Μέχρι το τέλος του συγκεκριμένου μέρους η ταχύτητα αυτή θα έχει διπλασιαστεί ακολουθώντας μία εκθετική ανάπτυξη. Με ανάλογο τρόπο αυτή η κίνηση συνεχίζεται και στα υπόλοιπα μέρη έως ότου η ταχύτητα φτάσει στη τελική τιμή: **1 δείγμα ανά 10 msec**.

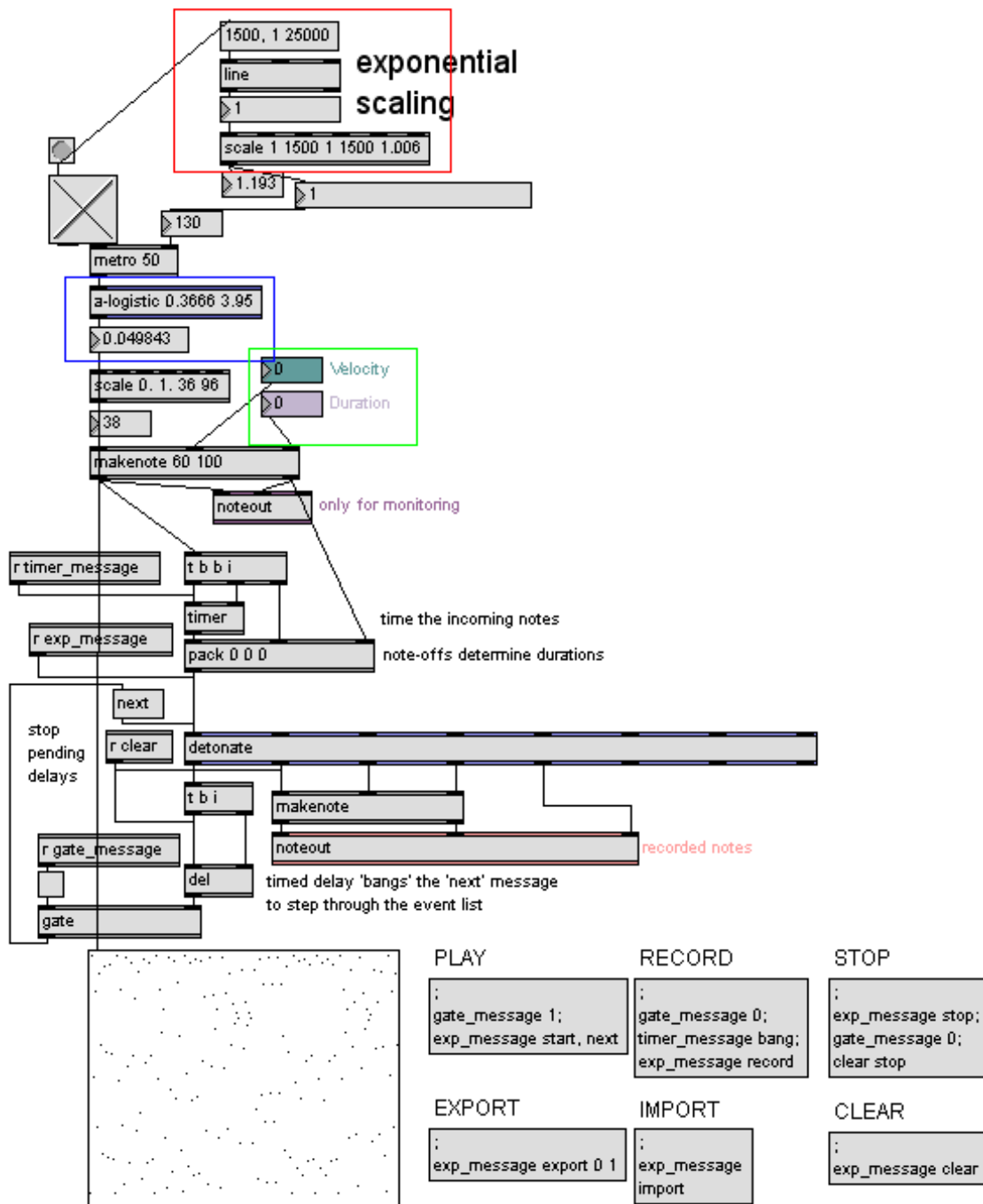
Στο δεύτερο στάδιο της σύνθεσης, μετά τη δημιουργία και την αποθήκευσή τους, τα MIDI μηνύματα εισάγονται σε ένα Audio/MIDI Sequencer όπου τοποθετούνται στη σειρά και εκτελούνται από το software synthesizer της Native Instruments, STEAMPIPE (εικόνα 2.3) που χρησιμοποιεί τεχνικές σύνθεσης ήχου με Physical Modeling. Η πηγή ήχου του συγκεκριμένου synthesizer είναι μία γεννήτρια λευκού θορύβου η οποία αφού περάσει από ένα Amplitude Envelope και ένα φίλτρο Low Pass, οδηγείται σε μία μηχανή καθυστέρησης (DELAY) όπου αποκτά τονικότητα (Tune) μέσω τεχνητών συντονισμών. Η παράμετρος Tune σχετίζεται με το χρόνο καθυστέρησης ενώ η παράμετρος RT με το χρόνο ανάδρασης (Feedback). Όσο πιο μικρός ο χρόνος καθυστέρησης, τόσο πιο οξύς ο ήχος και όσο πιο μεγάλος ο χρόνος ανάδρασης, τόσο πιο μεγάλος σε διάρκεια και ο συντονισμός. Η χρονική καθυστέρηση σε αυτή τη περίπτωση είναι της τάξης μερικών msec δημιουργώντας στην ουσία ταλαντώσεις ανάμεσα στον «dry ήχο» και στο σήμα που επιστρέφει μέσω της ανάδρασης. Στο παράδειγμα 2 από τα ηχητικά παραδείγματα ακούμε την ίδια νότα να παίζει ενώ αυξάνεται η παράμετρος Tune. Αύξηση της παραμέτρου Tune σημαίνει μείωση του χρόνου καθυστέρησης. Στο 3^ο παράδειγμα ακούγεται πάλι μία αύξηση του Tune αυτή τη φορά με χρόνο ανάδρασης μεγαλύτερο από το μηδέν. Ο χρόνος ανάδρασης σχετίζεται με τη διάρκεια των επαναλήψεων, γι' αυτό και η παράμετρος του synthesizer ονομάζεται RT (reverberation time). Στα ηχητικά παραδείγματα 4 και 5 ακούμε μία αύξηση της παραμέτρου RT. Στο 5^ο παράδειγμα

ακούγεται αύξηση του χρόνου ανάδρασης διατηρώντας σταθερό ένα μικρότερο χρόνο καθυστέρησης (δηλαδή μεγαλύτερο Tune).

Αυτοί οι παράμετροι μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια του έργου αλλάζοντας το ηχόχρωμα των ηχητικών μαζών. Οι μεταβολές αυτές σε γενικές γραμμές υπαγορεύονται από τη θέση των ηχητικών μαζών μέσα στο συνολικό έργο και δημιουργούνται με προγραμματιζόμενες περιβάλλουσες (automation) που παρέχει το sequencer (εικόνα 2.4). Έτσι για παράδειγμα, πλησιάζοντας προς το τέλος, ακούμε ήχους με όλο και μικρότερη διάρκεια, μεγαλύτερη οξύτητα και πιο μακρούς συντονισμούς. Ωστόσο χρειάστηκαν αρκετές φορές διορθωτικές επεμβάσεις στις τιμές των παραμέτρων είτε για την αποφυγή φαινομένων ανάδρασης είτε για την επίτευξη καλύτερου αισθητικού αποτελέσματος.

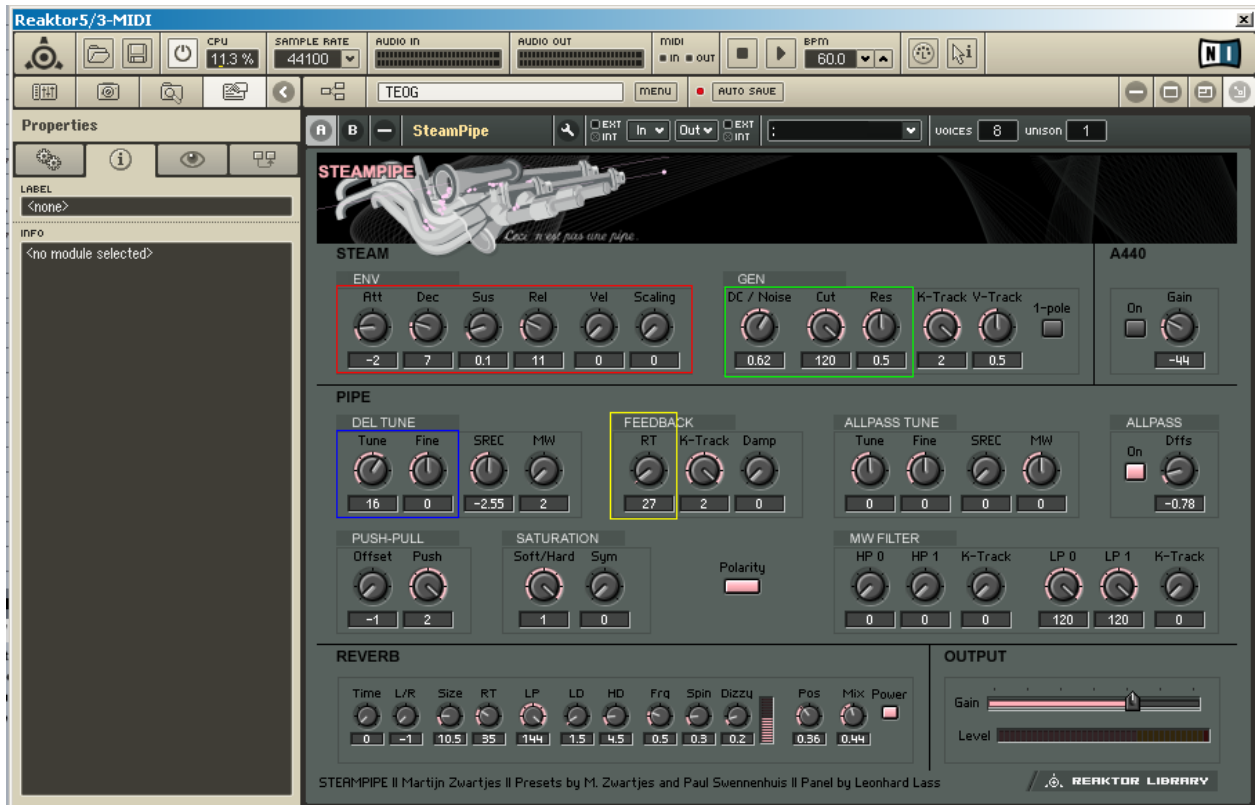
Εκτός του synthesizer Steampipe χρησιμοποιήθηκε και μία σειρά ακουστικών δειγμάτων όπως ήχοι κυμβάλων που παίζονται με δοξάρι και ήχοι χορωδίας καθώς επίσης και 1 συνθετικό pad. Όλα αυτά τα στοιχεία ακούγονται κατά τη διάρκεια του έργου και εμφανίζονται σε τονικότητες B και Bb. Σκοπός είναι η συνεχής αναφορά στην αρχική συνθήκη, δηλαδή στη τιμή 0.3666 της παραμέτρου “r” της Λογιστικής εξίσωσης, που βρίσκεται κάπου ανάμεσα σε αυτές τις νότες

Στο τέλος του έργου οι ήχοι έχοντας υποστεί τη μέγιστη επιτάχυνσή τους καταλήγουν σε μία συγχορδία-cluster που υποδηλώνει αφενός την αρχική συνθήκη του έργου και αφετέρου τη fractal δομή που παρουσιάζει το έργο στο σύνολό του, αφού ο τελικός παραγόμενος ήχος μοιάζει ακουστικά με τους ήχους κυμβάλων που ακούγονται στην αρχή του κομματιού.



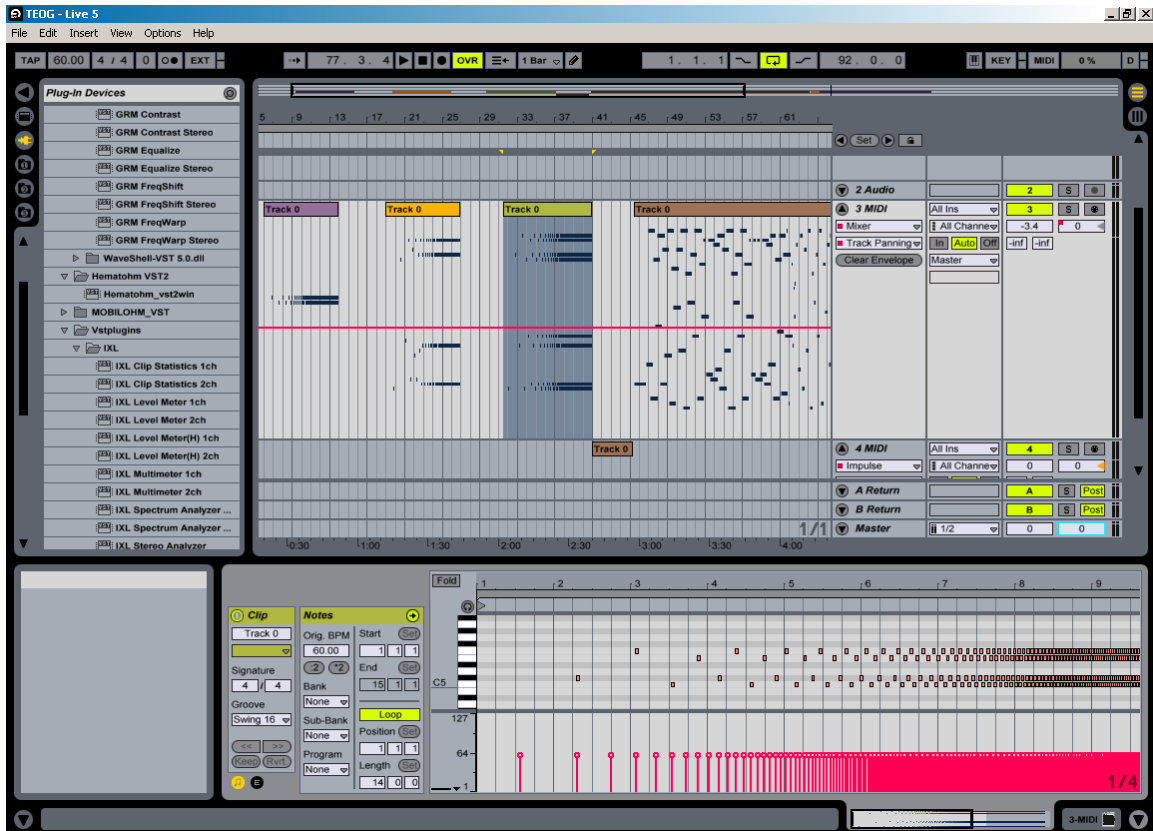
2.2 – Μετατροπή Αλγόριθμου σε MIDI αρχεία⁹

⁹ Το Patch σε Max/MSP. Στη περιοχή μέσα στο κόκκινο περίγραμμα δίνονται οι τιμές για αρχική και τελική ταχύτητα παραγωγής νοτών όπως επίσης και ο παράγοντας «καμπύλωσης» της ταχύτητας. Στο μπλε περίγραμμα εντοπίζεται το external object που παρέχει στο patch τον αλγόριθμο της Λογιστικής εξίσωσης. Στο πράσινο περίγραμμα δίνονται οι τιμές για την ένταση και τη διάρκεια κάθε παραγόμενης νότας.



2.3 – STEAMPIPE Synthesizer¹⁰

¹⁰ Steampipe. Οι παράμετροι για τη περιβάλλουσα δυναμικής (Amplitude Envelope) όπως Attack, Decay, Sustain, Release εντοπίζονται μέσα στο κόκκινο περίγραμμα. Μέσα στο πράσινο περίγραμμα παρατηρούμε τις παραμέτρους DC/Noise για το ποσοστό του λευκού θορύβου Cut και Res για τη συχνότητα αποκοπής και το slope του Low Pass φίλτρου. Στο μπλε περίγραμμα διακρίνονται οι παράμετροι Tune και Fine για τη παράμετρο της χρονικής καθυστέρησης και στο κίτρινο περίγραμμα η παράμετρος του χρόνου ανάδρασης.



2.4 – Ableton Live 5 Sequencer¹¹

¹¹ Το Sequencer που χρησιμοποιήθηκε για τη διευθέτηση των MIDI αρχείων και την αυτοματοποίηση των παραμέτρων του Steampire. Στην εικόνα διακρίνονται κάποιες χαρακτηριστικές καταστάσεις του συστήματος της Λογιστικής Εξίσωσης όπως επίσης και η μεταβολή της πυκνότητας των ηχητικών μαζών.

Program Notes για το μουσικό έργο *TEOG*

Η σύνθεση βασίζεται στην ιδέα του κοσμικού πληθωρισμού. Μία αρχική «ιδιομορφία» μεταμορφώνεται σε μία πολύπλοκη οντότητα αξιοποιώντας μία φθίνουσα ενέργεια και δημιουργώντας ένα βάθος υποσυστημάτων που σχηματοποιούνται μέσω του αλγόριθμου της λογιστικής εξίσωσης. Η φθίνουσα ενέργεια δημιουργεί όλο και μικρότερα συστήματα και ο αλγόριθμος, δομές σχετικές μεταξύ τους, με fractal ιδιότητες. Το σύνολο του έργου ακολουθεί τη πορεία μιας λογαριθμικής σπείρας η οποία «τραβά» προς το κέντρο της τις ηχητικές μάζες και τις μεταλλάσσει.

Πίνακας Διαγραμμάτων

1.1 $y = x^2 + c$ και $x = y$ (για $c=1/4, x=0$).....	11
1.2 $y = x^2 + c$ και $x = y$ (για $c=-3/4, x=0$).....	11
1.3 $y = x^2 + c$ και $x = y$ (για $c=-13/16, x=0$).....	12
1.4 $y = x^2 + c$ και $x = y$ (για $c=-1/3, x=0$).....	12
1.5 $y = x^2 + c$ και $x = y$ για $(c=-1.4015, x=0)$	13
1.6 $y = x^2 + c$ και $x = y$ (για $c=-1/8, x=0$).....	13
1.7 Διάγραμμα Διακλάδωσης.....	14
1.8 Διάγραμμα Διακλάδωσης – Μεγέθυνση 1^{η}	14
1.9 Διάγραμμα Διακλάδωσης – Μεγέθυνση 2^{η}	15
1.10 Διάγραμμα Διακλάδωσης – Μεγέθυνση στο παράθυρο περιοδικότητας.....	15
1.11 Διάγραμμα Διακλάδωσης – Μεγέθυνση 2^{η} στο παράθυρο περιοδικότητας.....	15
1.12 Διάγραμμα Διακλάδωσης – 1000 Μεγεθύνσεις.....	16
1.13 Logistic Map.....	17
1.14 Διαγράμματα φάσεων της Λογιστικής Εξίσωσης σε 2 και 3 διαστάσεις.....	19

Πίνακας Σχημάτων

1.1 Χρυσός Λόγος.....	20
1.2 Χρυσά Ορθογώνια.....	24
1.3 Η Γεωμετρία του Σύμπαντος.....	27
1.4 Πτώση και αναθέρμανση της ενέργειας του πεδίου inflaton.....	29

Πίνακας Εικόνων

1.1 Η Λογαριθμική σπείρα στη φύση.....	22
2.1 διαδοχικά τετράγωνα σε κλίμακες με παράγοντα Φ	31
2.2 Μετατροπή Αλγόριθμου σε MIDI αρχεία.....	36
2.3 STEAMPIPE Synthesizer.....	37
2.4 Ableton Live 5 Sequencer.....	38

Πίνακας Πινάκων

2.1 Πίνακας Τιμών.....	34
------------------------	----

Βιβλιογραφία – Αναφορές

Elert, G 2005, The Chaos Hypertextbook: Bifurcation, Retrieved February 8, 2007, from <http://www.hypertextbook.com/chaos/>

Gleick, J. 1990, 'Μία γεωμετρία της φύσης', Χάος -Μία Νέα Επιστήμη, εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα, pp.160-164

Gleick, J. 1990, 'Τα πάνω και τα κάτω της ζωής', Χάος -Μία Νέα Επιστήμη, εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα, pp.105-113

Gribbin, J 1996, Smoot Group Cosmology: Inflation for Beginners, Retrieved March 3, 2007, from http://aether.lbl.gov/cosmic_inflation.html

Guth A. 1997, Was Cosmic Inflation The 'Bang' Of The Big Bang? , Retrieved March 3, 2007, from http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5/Guth/Guth_contents.html

Livio, M. 2003, 'Καθώς το ηλιοτρόπιο στρέφεται προς το Θεό του', Ο Χρυσός Λόγος: Η ιστορία του Φ, του εκπληκτικότερου αριθμού, εκδόσεις Ενάλιος, Αθήνα, pp. 156-164

Livio, M. 2003, 'Αν και αλλαγμένος, ανυψώνομαι πάλι ίδιος', Ο Χρυσός Λόγος: Η ιστορία του Φ, του εκπληκτικότερου αριθμού, εκδόσεις Ενάλιος, Αθήνα, pp. 165-175

Livio, M. 2003, 'Φράκταλς', Ο Χρυσός Λόγος: Η ιστορία του Φ, του εκπληκτικότερου αριθμού, εκδόσεις Ενάλιος, Αθήνα, pp. 303-306

Roads, C. 1996, 'Algorithmic Composition Systems', The Computer Music Tutorial, MIT Press, pp. 830-836

Roads, C. 1996, 'Aesthetic Motivations behind Algorithmic Music', The Computer Music Tutorial, MIT Press, pp. 880-889

Sier A. Chaos Library, Retrieved March 18, 2007, from <http://www.maxobjects.com/>

Singh, S. 2005, 'Επίλογος', Big Bang, Εκδοτικός οίκος Τραυλός, Αθήνα, pp. 546-549

Symmetry Dimensions of Particle Physics: The Growth of Inflation 2004. Retrieved March 18, 2007, from <http://www.symmetrymag.org/cms/?pid=1000045>

Weisstein, E. W. 1999, "Logistic Map." MathWorld--A Wolfram Web Resource Retrieved February 20 2007, from <http://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html>

Weisstein, E. W. 1999, "Logarithmic Spiral." MathWorld--A Wolfram Web Resource Retrieved February 10 2007, from <http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html>

Wikipedia: Cosmic Inflation, Retrieved March 1, 2007, from http://en.wikipedia.org/wiki/Cosmic_inflation

Wikipedia: Logarithmic Spiral, Retrieved February 10, 2007, from http://en.wikipedia.org/wiki/Spira_mirabilis

Ξενάκης, Ι. 2001, 'Η κρίση της σειραϊκής μουσικής' (1955), Κείμενα περί μουσικής και αρχιτεκτονικής, εκδόσεις Ψυχογιός, Αθήνα, pp. 53-56

Ξενάκης, Ι. 2001, 'Στοχαστική μουσική' (1962), Κείμενα περί μουσικής και αρχιτεκτονικής, εκδόσεις Ψυχογιός, Αθήνα, pp. 71-76

Ξενάκης, Ι. 2001, 'Το σύμπαν είναι μία σπείρα' (1984), Κείμενα περί μουσικής και αρχιτεκτονικής, εκδόσεις Ψυχογιός, Αθήνα, pp. 215-217