



**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Αναφορές στην διάσπαση του χρόνου και στην διασπορά για κάποια  
υπερβολικά προβλήματα**

**Επιμέλεια: ΡΑΚΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ (Α.Μ.: 4441)**

**Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. ΠΛΙΑΚΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ**

**ΧΑΝΙΑ ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2013**

# Αναφορές στην διάσπαση του χρόνου και στην διασπορά για κάποια υπερβολικά προβλήματα

CATHLEEN S. MORAWETZ

New York University

Περιφερειακό συνέδριο στα  
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Χρηματοδοτούμενο από το  
συνέδριο του διοικητικού  
συμβουλίου των μαθηματικών επιστημών.

Υποστηριζόμενο από το  
εθνικό Ίδρυμα.

# ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΑΣΚΕΨΗ ΜΕ ΘΕΜΑ ΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μια σειρά από διαλέξεις εστιασμένες στις τρέχουσες έρευνες πάνω στα εφαρμοσμένα μαθηματικά υπό την κατεύθυνση του Διοικητικού Συμβουλίου Διάσκεψης των Μαθηματικών Επιστημών, υποστηριζόμενες από το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών και δημοσιευμένο από το περιοδικό Siam.

## Συντελεστές.

GARRETT BIRKHOFF, αριθμητική επίλυση των ελλειπτικών εξισώσεων.

D. V. LINDLEY, στατιστική Bayesian –Αναθεώρηση.

R. S. VARGA, λειτουργική ανάλυση και προσεγγιστική θεωρία στην αριθμητική Ανάλυση.

R. R. BAHADUR, μερικά θεωρήματα ορίων στη Στατιστική.

PATRICK BILLINGSLEY, ασθενής σύγκλιση των μέτρων: Εφαρμογές Πιθανοτήτων.

J. L. LIONS, ορισμένες πτυχές του βέλτιστου ελέγχου των Κατανεμημένων Συστημάτων Παραμέτρων.

ROGER PENROSE, τεχνικές της διαφορικής τοπολογίας στη Σχετικότητα.

HERMAN CHERNOFF, διαδοχική ανάλυση και Βέλτιστος Σχεδιασμός.

J. DURBIN, Θεωρία διανομής για δοκιμές με βάση τη λειτουργία διανομής του δείγματος.

SOL J. RUBINOW, μαθηματικά προβλήματα στις βιολογικές επιστήμες.

PETER D. LAX, Hyperbolic συστήματα για τη διατήρηση των νόμων και τη μαθηματική Θεωρία των κρουστικών κυμάτων.

I. J. SCHOENBERG, Θεμελιώδης θεώρημα παρεμβολής.

IVAN SINGER, η θεωρία της βέλτιστης προσέγγισης και λειτουργικής ανάλυσης.

WERNER C. RHEINBOLDT, μέθοδοι για την επίλυση συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων.

HANS F. WEINBERGER, μεταβολικές μέθοδοι για την προσέγγιση ιδιοτίμων.

R. TYRRELL ROCKAFELLAR, συζευκτική δυαδικότητα και βελτιστοποίηση.

GERARD SALTON, θεωρία του διαιρέτη.

CATHLEEN S. MORAWETZ, Παρατηρήσεις στην διάσπαση του χρόνου και διασποράς για μερικά υπερβολικά προβλήματα.

Συντελεστές Προπαρασκευής Τίτλων.

FRANK HOPPENSTEADT, Μαθηματική θεωρία των πληθυσμών:  
Δημογραφικά στοιχεία, γενετική και επιδημιολογίες.

RICHARD ASKEY, Ορθογωνικά πολυώνυμα και ειδικές συναρτήσεις.

# Παρατηρήσεις στην διάσπαση του χρόνου και στην διασπορά για κάποια υπερβολικά προβλήματα

CATHLEEN S.MORAWETZ

Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης

Η κοινωνία για τη βιομηχανία και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά.

Φιλαδέλφεια, Πενσυλβάνια 19103

Πνευματικά δικαιώματα: Το 1975 για την κοινωνία  
των βιομηχανικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

\*Όλα τα δικαιώματα διατηρούνται.

---

Τυπώθηκε για την κοινωνία των Βιομηχανικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών από το:

J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol 3, England

## \* Περιεχόμενα:

Πρόλογος .....

### 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

#### ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΑ

1. Συνολική ενέργεια.....	1
2. Ευριστική επιχειρηματολογία για τη διάσπαση.....	3
3. Διάδοση της μοναδικότητας.....	6
4. Διασπορά.....	8

### 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

Παρουσίαση του ρυθμού διάσπασης και μέθοδοι διατήρησης.

1. Έυρεση ρυθμού διάσπασης από πολλαπλασιαστές .....	11
2. Εξισώσεις του Maxwell.....	14
3. Βελτιώσεις στις εκτιμήσεις.....	16
4. Διάσπαση για το πεδίο.....	18
5. Ρυθμός απόσβεσης για Ft.....	19
6. Άλλοι νόμοι διατήρησης και ρυθμοί διάσπασης.....	19
7. Διάσπαση ακόμη και για διαστάσεις για την κυματική εξίσωση...20	
8. Διάσπαση σε χαρακτηριστικές κατευθύνσεις.....	21

## 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

Εκθετική Διάσπαση.

1. Όριο Περιορισμένης επίδρασης.....23
2. διαταραγμένο σύστημα.....24
3. Παραδείγματα εκθετική φθοράς.....27

## 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

Διασπορά για την κυματική εξίσωση από ένα εμπόδιο.

1. Σφαιρικά συμμετρική περίπτωση.....29
2. Δομή των τρισδιάστατων διασποράς από την αντανάκλαση του σώματος.....32
3. Μετασχηματισμός Fourier.....33
4. Η συμπεριφορά του  $\xi$  για πολύπλοκο  $\lambda$  και η διάσπαση των επιλύσεων.....35
5. Μια ανισότητα για τα εξερχόμενα κύματα.....37

## 7<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

Η γενικευμένη αρχή Huyghens και τα γεωμετρικά οπτικά.

1. Προϊστορία.....55
2. Μετασχηματισμός Fourier.....58
3. Κατασκευή Ludwig για το ημίφως.....60
4. Διαθλώμενα πεδία.....61



## Περίληψη

Αυτές οι αναφορές αντιπροσωπεύουν το περιεχόμενο των δέκα διαλέξεων για την διάσπαση και την διασπορά από υπερβολικά συστήματα που δόθηκαν κατά την περιφερειακή διάσκεψη πάνω στο αρχικό όριο τιμών εξωτερικευμένων Προβλημάτων για Υπερβολικές Διαφορικές Εξισώσεις στο Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης στο Μπάφαλο από 3 - 7 Ιουνίου 1973. Η προέλευση του ενδιαφέροντος για αυτό το θέμα έγκειται στην πολύ γνωστή συμπεριφορά των κυματικών εξισώσεων ή των εξισώσεων Maxwell στον ελεύθερο χώρο: σε κάθε σημείο του χώρου, η επίδραση ενός σήματος χάνεται, αλλά η συνολική ενέργεια που μεταφέρεται με το σήμα διατηρείται, όπου στην πραγματικότητα μεταφέρεται στο άπειρο. Θα θέλαμε πραγματικά να ανακαλύψουμε και να αναλύσουμε τα ίδια φαινόμενα στα γενικώς υπερβολικά συστήματα σε γενικούς τομείς φτάνοντας μέχρι το άπειρο. Αλλά τα φαινόμενα στη πραγματικότητα είναι πολύ περίπλοκα και τα διευθετούμε για ειδικές περιπτώσεις. Το πιο γνωστό, το πιο μελετημένο από αυτά, είναι η κυματική εξίσωση. Ακόμη και αν η μελέτη απέχει πολύ από το να είναι πλήρης και εξακολουθεί να είναι λιγότερο γνωστή για χρήσιμα πράγματα, όπως εξισώσεις του Maxwell. Αυτές οι αναφορές, ως εκ τούτου, αντιπροσωπεύουν σε μια γενική εικόνα θραύσματα που ελπίζω ότι είναι πολύτιμες για να είναι γνωστό τι μπορεί να προσφερθεί. Αυτές οι αναπύφεκτες ιδιότητες αντιπροσωπεύουν τη δική μου ιδιαίτερη προσέγγιση της προσέγγισης και του ενδιαφέροντος στο θέμα. Τα περισσότερα από τα αποτελέσματα έχουν δημοσιευθεί τα τελευταία χρόνια. Μερικά αποτελέσματα είναι νέα και δεν έχουν ακόμη δημοσιευθεί, για παράδειγμα τα αποτελέσματα της εξίσωσης Maxwell και τα μη αστεροειδή αντανακλώμενα σχήματα.

---

\* Αυτές οι αναφορές καταρτίστηκαν στο Ινστιτούτο Courant των Μαθηματικών Επιστημών, Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης υπό την αιγίδα του Γραφείου Ναυτικών Ερευνών, Αρ. Συμβολαίου NOO014-67-A-0467-0024

# 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

## Εισαγωγή και Έρευνα

**1. Συνολική ενέργεια.** Οι στοιχειώδεις έννοιες της ενέργειας και της διάσπασης εμφανίζονται τόσο απλά στο πλαίσιο των γενικών υπερβολικών συστημάτων που αρχίζει με ένα γενικό τρόπο. Εξετάστε ένα πραγματικό γραμμικό σύστημα σε συμμετρική μορφή για το διανυσματικό  $Y(x, t)$ , όπου  $x$  είναι η θέση στον  $N$ -διάστατο διάστημα και  $t$  είναι ο χρόνος:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_n A_n \frac{\partial Y}{\partial x_n} + BY + C \quad \text{for } x \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0,$$

Όπου  $A_n$  είναι μια συμμετρική απεικόνιση, το  $\mathcal{E}$  είναι ένα κυρίαρχο γράμμα στο  $\mathbb{R}^n$  που περιέχει το σημείο του στο  $\infty$ . Η πυκνότητα ενέργειας είναι ένα βαθμωτό προϊόν  $Y \cdot Y$ , η ενέργεια σε  $\mathcal{D}$  είναι:

$$\int_{\mathcal{D}} Y \cdot Y |dx| = E(\mathcal{D}, Y, t)$$

Και η συνολική ενέργεια είναι:

$$\int_{\mathcal{E}} Y \cdot Y |dx| = E(\mathcal{E}, Y, t).$$

Η βασική ταυτότητα ενέργειας επιτυγχάνεται με τη λήψη του βαθμωτού παραγόμενου της εξίσωσης με το  $Y$ . Έτσι, χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του  $A_n$ ,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (Y \cdot Y) = \frac{1}{2} \operatorname{div} (Y \cdot A_n Y) + Y \cdot \left( B - \frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial A_n}{\partial x_n} \right) Y + Y \cdot C.$$

Ολοκληρωμένο,  $\mathcal{E} \times [0, t]$  λαμβάνει για το ρυθμό μεταβολής της συνολικής ενέργειας:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} E(\mathcal{E}, Y, t) &= \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{E}} Y A_n v_n Y d\sigma \\ &+ \int_{\mathcal{E}} Y \cdot \left( B - \frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial A_n}{\partial x_n} \right) Y |dx| - \int_{\mathcal{E}} Y \cdot C |dx|. \end{aligned}$$

Δεν υπάρχουν συμβολή από  $|x| = \infty$  εάν υποθέσουμε ότι τα αρχικά δεδομένα έχουν σύνθετη υποστήριξη. Τα τρία ολοκληρώματα στα δεξιά αντιπροσωπεύουν διαφορετικούς τρόπους για το ποια ενέργεια τροφοδοτείται ή διοχετεύεται έξω από το σύστημα. Η τελευταία είναι μια πηγή (ή που απορροφάται ανάλογα με το πρόσημο) και αντιπροσωπεύει το έργο που πραγματοποιείται από εξωτερικές δυνάμεις. Δεύτερον αντιπροσωπεύετε μια ενέργεια απορροφούμενη (ή με έγχυση), από το φορέα. Το πρώτο είναι μια ενέργεια απορροφούμενη (ή με έγχυση) από το όριο; Το φυσιολογικό είναι  $v_n$ .

Το σημείο εκκίνησης είναι η προϋπόθεση διατήρησης της ενέργειας  $E(\mathcal{E}, Y, t) = \text{const}$ , εάν δεν υπάρχουν πηγές ( $C = 0$ ). Αυτό απαιτεί την απουσία ενός ορίου με το  $\vec{B}$  το συμμετρικό μέρος του  $B$ :

$$\vec{B} - \frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial A_n}{\partial x_n} \equiv 0$$

και με ένα όριο, η οριακή συνθήκη επιπλέον

$$A_n v_n Y = 0.$$

Καλούμαι ένα σύστημα απορρόφησης υλικού, εάν  $\tilde{B} - \sum_n \partial A_n / \partial x_n < K < 0$ , και ένα όριο συνθήκης  $QY = 0$  στο  $\partial\mathcal{E}$ .

Αν μια οριακή συνθήκη είναι η διατήρηση ενέργειας η το υλικό απορρόφησης φορτίων και το σύστημα είναι απορροφητικό τότε η ενέργεια φθίνει εκθετικά με ρυθμό τουλάχιστον όπως η μεγαλύτερη τιμή.

$-\Lambda$  του  $\tilde{B} - \sum_n \partial A_n / \partial x_n$ . Για

$$\frac{dE}{dt} \leq -\Lambda E$$

συνεπώς

$$\frac{d}{dt}(E e^{\Lambda t}) < 0$$

η

$$E < E|_{t=0} e^{-\Lambda t}.$$

Ωστόσο, αυτό είναι συχνά μια ρεαλιστική φυσική κατάσταση, η τιμή μπορεί να είναι τόσο μικρή που οι εξισώσεις διατήρησης της ενέργειας

δίνουν μια καλύτερη εικόνα της φυσικής και στην πραγματικότητα, μπορεί να οδηγήσει σε μια τοπική εκθετικά διάσπαση της ενέργειας  $E$  ( $|\chi| < \alpha, Y, t$ ), όπου είναι ταχύτερη από εκείνη που παρέχει ο  $\Lambda$  εκθέτης.

Εάν το μέσο συμβάλλει στην ενέργεια,  $B - \partial A_n / \partial x_n > 0$ , η ενέργεια μεγαλώνει. Περιπτώσεις όπου η συνολική ενέργεια αυξάνεται, αλλά η τοπική ενέργεια σε μία πεπερασμένη περιοχή εξασθενεί, έχουν εξετασθεί από τον Bloom και τον Kazarinoff. Προβλήματα στην οποία η οριακή συνθήκη είναι υλικό απορρόφησης φορτίων έχουν αντιμετωπιστεί πρόσφατα από τον Lax και τον Phillips (1973). Υπάρχουν επίσης προβλήματα του ενδιαφέροντος στις οποίες το  $B -$

$\partial A_n / \partial x_n$  είναι αορίστου χρόνου. Εξετάστε τη μη γραμμική εξίσωση (δεν υπάρχει σημείο εδώ φτιάχνοντας το στο σύστημα):

$$u_{tt} - u_{xx} + u + u^3 = 0.$$

Έχει περιοδικές λύσεις  $u = U(at - bx)$ ,  $a^2 - b^2 > 0$ . Ας υποθέσουμε ότι κάποιος θέλει να εξετάσει τη σταθερότητα. Η διαταραχή  $w$  της λύσης απαντά στο παρακάτω ερώτημα.

$$w_{tt} - w_{xx} + w + 3u^2 w = 0$$

στην κατώτερη τάξη, ενώ η εξίσωση για το  $U$  έχει την παρακάτω μορφή διατήρησης

$$\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2)_t - (u_x u_t)_x + \frac{1}{2}(u^2)_t + \frac{1}{4}(u^4)_t = 0,$$

---

<sup>1</sup> Ωστόσο, το ποσοστό της ανάπτυξης περιορίζεται και αυτό είναι που κάποιος αποδεικνύει την ύπαρξη της αδύναμης λύσης. (Friedrichs το 1958).

έτσι ώστε η ενέργεια του ολοκληρώματος  $\int (u_t^2 + u_x^2 + u^2 + u^4) dx$  είναι διατηρημένη, η εξίσωση για  $w$  δεν εφαρμόζει. Στην πραγματικότητα, μπορεί να φαίνεται ότι έχει ομαλές επιλύσεις της σύνθετης αρχικής υποστήριξης όπου αυξάνεται γεωμετρικά και ότι άλλοι διασπώνται (βλ. Morawetz το 1974). Τόσο πολύ για τη συνολική ενέργεια. Εδώ θα εξετάσουμε μόνο τα ενεργειακά συστήματα διατήρησης οι εξισώσεις και θα διερευνήσουμε την τοπική διάσπαση της ενέργειας.

**2. Ευριστική επιχειρηματολογία για τη διάσπαση.** Το πρώτο μας μέλημα είναι να περιμένουμε για το πότε η λύση σε ένα σταθερό σημείο τείνει στο μηδεν με το χρόνο. Το βασικό επιχείρημα είναι ότι θα υπάρξει εξασθένηση αν δεν υπάρχουν στάσιμα κύματα πεπερασμένης ενέργειας, λύσεις της μορφής  $e^{i\omega t} y(x)$ , αλλιώς ονομάζεται δεσμευμένη κατάσταση. Αυτό, βέβαια ισχύει μόνο για την περίπτωση όπου οι εξισώσεις δεν έχουν καμία εξάρτηση από τον χρόνο. Είναι σαφές ότι δεν θα υπάρξει εξασθένηση εάν υπάρχουν στάσιμα κύματα αλλά είναι μια έμμεση και αρκετά λεπτή επιχειρηματολογία (βλέπε Lax και Philips το 1967), p. 14 et seq) για να αποδείξει το αντίθετο. Από ένα τέτοιο

επιχείρημα δεν μπορούν να παραχθούν πολλά περισσότερα από το δεδομένο της φθοράς.

Από την άλλη πλευρά, οι επιπτώσεις της κλιμάκωσης και της εξάπλωσης στο διάστημα παραγόμενο από τον αριθμό των διαστάσεων αποδίδουν δύο ενδείξεις στην τοπική ενέργεια υποβάθμισης που είναι αποκαλυπτικά.

Κλιμακωτά. Θεωρείστε ότι μια επίλυση  $U(x, t)$  της αρχικής αξίας προβλημάτων για:

$$\begin{aligned}\square U &= 0, \\ U(x, 0) &= \Phi(x), \\ U_t(x, 0) &= \Psi(x).\end{aligned}$$

Τότε το  $U_k = U(kx, kt)$  λύνει την αρχική αξία του προβλήματος.

$$\begin{aligned}U_k &= \Phi_k(x) = \Phi(kx), \\ U_{kt} &= \Psi_k(x) = k\Psi(kx),\end{aligned}$$

Για  $\square U = k^2 \square_k U_k = 0$ . Το  $\square_k$  αποδεικνύει ότι το επιχείρημα του d'Alembertian είναι το  $kx, kt$ .

Η επίλυση  $U$  στις ακτίνες  $x$ - κατά τη χρονική στιγμή  $T$  είναι η ίδια όπως στο  $U_k$  στη χρονική στιγμή  $T/K$ . Ως εκ τούτου, για να λάβετε τη συμπεριφορά του  $U_k$  για μεγάλες τιμές, θα έπρεπε να εξετάσουμε το  $U$

σε ένα καθορισμένο χρόνο με το  $k$  να είναι μικρό της τάξης του  $1/T$ . Τώρα σκεφτείτε μια διαταραχή η οποία να είναι συγκεντρωμένη σε μια πεπερασμένη περιοχή, δηλαδή είτε ένα σώμα με μία κατάλληλη οριακή συνθήκη, ή πιο απλά ένα δυνητικό προστιθέμενο σε πεπερασμένη περιοχή.

$$\square_1 U + V(x)U = 0.$$

Η ενέργεια διατηρείται ακόμα και αν διατηρήσουμε την ενεργειακή πυκνότητα, όπως  $U_t^2 + |\nabla U|^2 + V(x)U^2$  δεδομένου

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_t^2 + |\nabla U|^2 + V(x)U^2) - \operatorname{div} (U_t \nabla U) = 0.$$

Εάν αυξήσουμε την κλίμακα θα έχουμε για

$$U_k = U(kx, kt),$$

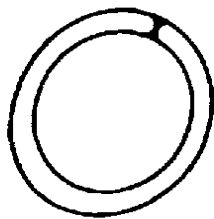
$$\square_1 U_k = k^2 \square_k U,$$

$$\square_1 U_k + k^2 V(kx)U = 0.$$

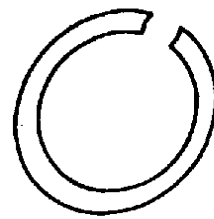
Ρυθμίζοντας το  $k = 1/T$  και αφήνοντας το  $T \rightarrow \infty$  ο δεύτερος όρος πηγαίνει στο μηδέν. Γι' αυτό το λόγο εμείς θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο εγχείρημα μας. Έτσι η επίλυση θα πρέπει να συμπεριφέρεται σε μεγάλες τιμές σαν να είναι η λύση σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα του ελεύθερου πεδίου κυματικών εξισώσεων της τάξης του  $1/t$ . Είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί αυτό το εγχείρημα με ακρίβεια, αλλά υπάρχουν παραδείγματα που το επιβεβαιώνουν αυτό, ιδίως οι εξισώσεις του Maxwell (βλ. Κεφ. 2.) και η κυματική εξίσωση στις δύο διαστάσεις του εξωτερικού ενός κυρτού σώματος. Ωστόσο, αυτό δεν είναι πάντοτε αληθές. Η επίλυση θα πρέπει να έχει ελεύθερη πρόσβαση στο άπειρο, όπου δεν υπάρχουν



δεσμευμένες καταστάσεις. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι έχουμε ένα κλειστό ανακλαστικό σώμα αντί για ένα δυνητικό (βλεπε σχήμα 1α. Θεωρούμε απτές λύσεις τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό. Στη συνέχεια, η ενέργεια που μπαίνει αρχικά μέσα στο εσωτερικό είναι παγιδευμένη στο εσωτερικό. Η λύση στο εσωτερικό αποτελείται από δεσμευμένα μέλη. Εάν ανοίξουμε το σώμα για λίγο (βλέπε σχήμα 1b) παίρνουμε το παρακάτω.



(a)



(b)

Αποκαλείται εκτονωτής Helmholtz και η ενέργεια του δεν μπορεί να παγιδευτεί, στην πραγματικότητα, υπάρχει διάσπαση της τάξης  $1/t$ , όπως η εξίσωση του ελεύθερου πεδίου. Στην πραγματικότητα, με το  $\mathcal{D}$  το εσωτερικό ενός κατάλληλου κατασκευασμένου τομέα αποδείχθηκε από τον Ralston το 1969, ότι δεν υπάρχει ρυθμός της διάσπασης με την εξής έννοια.

Ορισμοί.

$$E(\mathcal{D}, U, t) = \int_{\mathcal{D}} (U_t^2 + |\nabla U|^2) dx$$

Είναι η τοπική ενέργεια στο  $\mathcal{D}$ .

$f(t)$  είναι ο ρυθμός της φθοράς για  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{D}$  για

$$E(\mathcal{D}, U, t) < fE(\mathcal{E}, U, 0) < \infty,$$

Όπου το  $\mathcal{D}$  είναι ένα κλειστό υποσύνολο του  $E$ , το  $U$  είναι μια οποιαδήποτε επίλυση με σύνθετα αρχικά δεδομένα και το  $f \rightarrow 0$  όπως το  $t \rightarrow \infty$ . Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο θα αντλήσουμε ορισμένους ρυθμούς της διάσπασης συνδεδεμένης κλιμακωτά. Επίσης θα εξετάσουμε ορισμένες πιθανότητες. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός του πεδίου διαστάσεων είναι  $N$  και έχουμε ένα ομοιογενές σύστημα με σταθερούς συντελεστές.

$$Y_t = A_n Y_n.$$

Υποθέτουμε ότι οι χαρακτηριστικές ταχύτητες είναι όλες διαφορετικές; Τότε  $E(R^N, Y, t) = \int_{\mathcal{D}} (Y \cdot Y) |dx|$  είναι σταθερού ανεξαρτήτου χρόνου. Η επίλυση δεν μπορεί να διαδοθεί από την αρχική του υποστήριξη, δηλαδή  $|x| < R$ , γρηγορότερα από ό,τι στην γρηγορότερη χαρακτηριστική ταχύτητα  $c$ . Υποθέτουμε ότι ένα πεπερασμένο μέρος της ενέργειας επικεντρώνεται ακριβώς πίσω από την γρηγορότερη χαρακτηριστική εντός της απόστασης  $d$ .

Τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$$\int_0^d Y \cdot Y (ct + R - \xi)^{n-1} d\xi d\Omega \sim E(R^N, Y, t) < \infty,$$

Όπου το  $Y$  σε πολικές συντεταγμένες είναι  $ct + R - \xi, \Omega$ . Συνεπώς, εάν το  $Y$  είναι ομαλό.

$$Y \cdot Y \sim t^{n-1} \text{ οριοθετημένο}$$

η

$$Y \sim t^{1-n/2}.$$

Έτσι το  $Y$  πρέπει να διασπαστεί το λιγότερο όπως σε  $t^{1-n/2}$  κοντά στην ταχύτερη χαρακτηριστική του κώνου. Αυτό μας οδηγεί φυσικά στο αντίθετο ζήτημα της επάρκειας ρυθμού διάσπασης για να διασφαλιστεί ότι η επίλυση πρέπει να είναι ταυτόσημη με μηδέν, ένα είδος της κατάσταση Sommerfeld (βλ. Littman και Orazio το 1972 και Murray το 1971).

Για την κυματική εξίσωση αυτό χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά της επίλυσης στη χαρακτηριστική του κώνου εξέρχοντας από την υποστήριξη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όλες οι αεροπλανικές κυματομορφές ( $U=e^{i(t-k*x)}, |k|=1$ ) περιήγηση με χαρακτηριστική ταχύτητα. Σε αντίθεση, οι λύσεις για την τυπική εξίσωση της διασποράς.

$$U_{it} - \Delta U + m^2 U = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^N$$

Αυτό που μπορούμε να πούμε για τη διάσπαση είναι ότι απλώνεται με όσο πιο δυνατό τρόπο γίνεται: Δηλαδή, σε κάθε γραμμή  $x = at$ ,  $|U| \sim t^{-\alpha}$  ανεξάρτητα από την κατεύθυνση της  $a$ . Η ενέργεια η οποία διατηρείται είναι η εξής.

$$\int (U_t^2 + |\nabla U|^2 + m^2 U^2) |dx|.$$

Εάν  $U \sim t^{-\alpha}$  και επιπλέον τα παράγωγα, θα πρέπει να βρούμε από την ενέργεια ότι  $\int t^{-\alpha} r^{n-1}$  οριοθετείται μακριά από το μηδέν ή από  $\int r^{n-1} dr \sim t^n$  και βρίσκουμε  $\alpha = n/2$  και αυτό είναι, στην πραγματικότητα η περίπτωση. Πρέπει, όμως να αποδειχθεί με μετασχηματισμό Fourier και τη στατική φάση. Στη συνέχεια ας εξετάσουμε την περίπτωση ενός μη υλικού απορρόφησης φορτίου με εκθετικό ρυθμό της τοπικής διάσπασης. Δηλαδή, σε τοπικό επίπεδο η λύση συμπεριφέρεται σαν να υπήρχε ένα μη υλικό απορρόφησης φορτίου μηχανισμός. Αλλά δεδομένου ότι η συνολική ενέργεια διατηρείται πρέπει να μεταφέρεται

μακρυνά, η πίσω από τις χαρακτηριστικές, δεδομένου ότι δεν μπορεί να πάει πιο γρήγορα. Το

κλασσικό παράδειγμα μιας λύσης που μεταφέρεται στις χαρακτηριστικές είναι η κυματική εξίσωση σε περιέργες διαστάσεις, όπου η αρχή Huyghen διεξάγεται. Εάν έχουμε τα δεδομένα μιας σύνθετης υποστήριξης, η επίλυση είναι μηδέν στο εσωτερικό του μπροστινού φως και στο πίσω φως σαρωμένο έξω από τις ακτίνες του φωτός που απορρέεται από την υποστήριξη.

Υπάρχει μια ποικιλία από διαταραχές που οδηγούν από την αρχή Huyghen σε εκθετική φθορά. Το κεφάλαιο 3 εξετάζει περιπτώσεις στις οποίες αυτό συμβαίνει και βλέπουμε σε κάποιο βαθμό πόσο γενικά είναι αυτά, και τότε μπορούν να είναι αναμενόμενα. Η αξιολόγηση των εκθετικών συντελεστών για την κυματική εξίσωση παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 5.

**3. Διάδοση ιδιομορφιών.** Ενώ η αρχή Huyghen ισχύει μόνο για μια ειδική κατηγορία των εξισώσεων, η γενικευμένη αρχή του Huyghen ισχύει για όλα τα υπερβολικά συστήματα. Αυτή η αρχή μας λέει ότι το μοναδικό μέρος των αρχικών δεδομένων διαδίδεται κατά μήκος των χαρακτηριστικών κώνων σαρωμένων από την υποστήριξη των ατομικών δεδομένων.

Για παράδειγμα, με την κυματική εξίσωση σε τρεις διαστάσεις η λύση  $U$  με τα αρχικά δεδομένα

$$U = \phi = 0,$$
$$U_t = \psi = \delta_3(x)$$

είναι

$$U = \frac{\delta_1(t - r)}{r},$$

Πότε το  $\delta_i$  είναι μια συνάρτηση  $\delta$  στην προέλευση; Το  $i$  είναι η διάσταση. Τα δεδομένα είναι μοναδικά στην προέλευση μόνο; Η επίλυση έχει μια  $\delta$  γραμμική λειτουργία ιδιομορφίας στον κώνο,  $|x| = t$ .

Εξετάζεται σαν ένα πρόβλημα Cauchy ξεκινώντας από το  $T$ , ωστόσο αυτό που βλέπουμε εδώ είναι ότι έχουμε μόνο δεδομένα, μοναδική σε μία δωσμένη σφαίρα, όπου αργότερα θα επικεντρωθεί σε μια πιο υψηλή ιδιομορφία σε ένα σημείο. Δεδομένα τα οποία θα είναι μοναδικά, με μια πιο γενική καμπύλη στο πεδίο, θα επικεντρωθεί στο σχήμα των κώνων να αυξάνεται από την καμπύλη. Μπορούμε να ρωτήσουμε τι συμβαίνει μετά από μια τέτοια εμφάνιση εστίασης. Η απάντηση στην απλή περίπτωση ενός σημείου εστίασης είναι ότι η λύση περνά μέσα από αυτή την ιδιαιτερότητα χωρίς αποτέλεσμα. Για να δούμε τι θα συμβεί στη συνέχεια, σε γενικές γραμμές, θα εξετάσουμε το μετασχηματισμό Fourier στο διάστημα:

$$F(k, t) = \frac{1}{n\pi} \iiint e^{ik \cdot x} U \, dx.$$

Στη συνέχεια, η διαφορική εξίσωση είναι

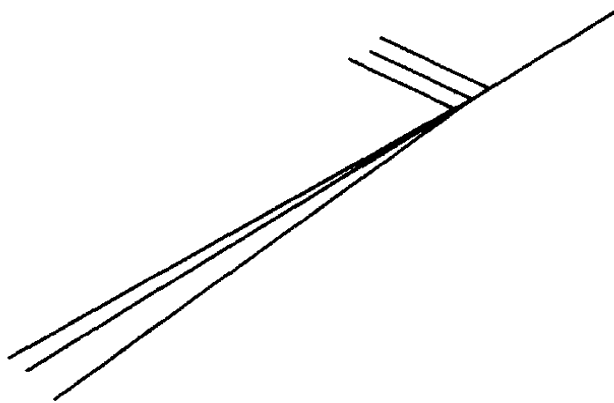
$$\frac{d^2}{dt^2} F + |k|^2 F = 0$$

Και τα αρχικά δεδομένα είναι  $F = F_0$ ,  $F = F_1$ . Οι ιδιαιτερότητες του  $U$  αντικατοπτρίζεται στη συμπεριφορά της  $F$  για  $|k|$  μεγάλο.

Υποθέστε ότι  $U$  και  $U_t$  είναι τα αρχικά  $C^n$  και  $C^{n-1}$  αντίστοιχα. Στη συνέχεια,  $F_0, F_1$  φθορά όπως  $|k|^{-n}$  και  $|k|^{-n+1}$ ,  $F$  φθορά όπως  $|k|^{-n}$  και παίρνουμε  $U$  σε  $C^n$  τη κάθε φορά. Στην πραγματικότητα,

$$U = \frac{1}{2\pi} \iiint e^{-ik \cdot x} \left[ e^{iki} \left( F_0 + \frac{1}{ik} F_1 \right) + e^{-iki} \left( F_0 - \frac{1}{ik} F_1 \right) \right] dk$$

Από την οποία η κίνηση του μονοδιάστατου μέρους του  $U$  μπορεί να προέρχεται από στατική φάση. Εξ' αρχής, θα μπορούσαμε να έχουμε φανταστεί ότι το επίκεντρο του χαρακτηριστικού κώνου που μεταφέρει ασυμπτωτικά ιδιομορφίες σε ένα σημείο καμπής στο εσωτερικό θα μπορούσε να παράξει δευτερεύουσες ιδιαιτερότητες πολλαπλασιαζοντας προς τα πίσω όπως αναφέρεται στο παρακάτω σχήμα. Ωστόσο, αυτή η δυνατότητα έχει εξαλειφθεί από το μετασχηματισμό Fourier.



Σχήμα 2

Αν είχαμε μια ιδιόμορφη εκκίνηση σε ένα οριακό σημείο της περιοχής θα μπορούσε να υπάρξει μια τόσο βοηθητική ιδιομορφία παραγόμενη και αυτή η πιθανότητα δεν θα έχει εξαλειφθεί ακόμα για την κυματική εξίσωση. Από την άλλη πλευρά, η τεχνική του μετασχηματισμού Fourier χρησιμοποιήθηκε από τον Ludwig το 1966 για να μελετηθεί η συμπεριφορά των ιδιομορφιών σε foci για υπερβολικά συστήματα. Μια πλήρης θεωρία ακολουθώντας αυτό το έργο και αποδίδοντας όλες τις

πτυχές της διάδοσης των ιδιομορφιών στο εσωτερικό της περιοχής δίνεται από τον Duistermaat (να εμφανιστεί) και Duistermaat και Hörmander το 1971.

Ωστόσο, εδώ θα επικεντρωθούμε στην κυματική εξίσωση με αντανακλώμενους φορείς όπου ο μετασχηματισμός Fourier στο χρόνο έχει μέχρι στιγμής αποδειχθεί πιο χρήσιμος, και αυτό επιβεβαιώνεται στο κεφάλαιο 7.

Το πρόβλημα μειώνεται αν πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier στο χρόνο παίρνουμε και τη μειωμένη ανομοιογενή κυματική εξίσωση για

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} U dt = u,$$

$$\Delta u + \lambda^2 u = g,$$

Όπου

$$g = i\lambda\phi - \psi$$

Εάν

$$U = \phi, \quad U_t = \psi \quad \text{for } t = 0.$$

Θα έπρεπε πρώτα να ανησυχήσουμε ότι το  $u$  υπάρχει, υποθέτουμε ότι αυτό προκύπτει από το θεώρημα της διάσπασης. Εδώ θα πάρουμε μια συνολική εικόνα.

Οι ιδιομορφίες των αρχικών δεδομένων απλά μεταφέρονται. Η προηγούμενη μας συνταγή μας λέει να βγάλουμε έξω τις ιδιομορφίες από το  $U$  με το να πάρει τη συμπεριφορά του  $u$  για μεγάλο  $\lambda$ . Αυτή είναι η θεωρία της γεωμετρικής οπτικής που θα συζητήσουμε στο Κεφάλαιο 7.

Παρακάτω δίνεται η λύση:

$$u = \int G(i\lambda\phi - \psi)|dy|,$$

Όπου  $G(x,y)$  είναι η κατάλληλη λειτουργία πρασίνου. Έπειτα.

$$U = \iint e^{-i\lambda t} G(i\lambda\phi - \psi) d\lambda|dy|.$$

Οι ιδιομορφίες στο  $U$  προκύπτουν από όπου η κοινή ιδιομορφία εμφανίζεται στο  $G$  και  $(i\lambda\phi - \psi)$  και στα σημεία όπου το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. Η κατάλληλη συνάρτηση του Green έχει μόνο μία ιδιομορφία από το θεμελιώδες μέρος της, την πηγή. Δίνεται.

$$G = G_S + G_R.$$

Για να λάβουμε την ιδέα, ας υποθέσουμε ότι είμαστε σε τρεις διαστάσεις.

$$G_S = \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|}.$$

Το ολοκλήρωμα θα συμπεριφέρεται άσχημα στα σημεία όπου το  $i\lambda\phi - \psi$  είναι μοναδιαίο (αυτό παράγει την τιμή του  $y$ ), όπου ο ταλαντευόμενος παράγοντα του  $\lambda$  εξαφανίζεται, για παράδειγμα  $t = |x-y|$ . Εάν  $G_R$ , το υπόλοιπο, έχει ένα ταλαντευόμενο παράγοντα  $e^{i\lambda x}$ , όπου θα συμβάλει επίσης στην ιδιομορφία στα σημεία όπου  $t = x$ . Επιπλέον, εάν το  $G$  έχει περιοχές στο διάστημα όπου έχει εκθετικά φθίνων συντελεστή, θα βρούμε τη λύση για να είναι τοπικά αναλυτική, αλλά αυτό ποτέ δεν δείχνει να συμβαίνει (όπως στο σχήμα 1 στο κεφάλαιο 7). Έτσι ο πολλαπλασιασμός των μοναδιαίων μειώνει το να μελετήσουμε τη συμπεριφορά για το μεγάλο  $\lambda$  της συνάρτησης του Green, δηλαδή το πρόβλημα της γεωμετρικής οπτικού πεδίου της



αντανεκλώμενης πηγής. Έτσι, για τα προβλήματα με τα όρια θα μπορούσαμε να εξαλείψουμε την πιθανότητα όπου οι ιδιομορφίες παράγονται γύρω από τα όρια με την κατάλληλη θεωρία της γεωμετρικής οπτικής.

**4. Διασπορά.** Τώρα γυρίζουμε σε μερικές απλές και φυσικές συνθήκες της διασποράς. Η διασπορά σχετίζεται με την πεπερασμένη διατάραξη ενός συστήματος για κάτι το οποίο θα μπορούσαμε να πούμε ότι όλα είναι γνωστά. Ειδικότερα, ασχολείται με την επίδραση των παρεμβολών σε μεγάλες τιμές. Για παράδειγμα, ένα σύστημα μεσταθερούς συντελεστές  $R''$  θα μπορούσε να είναι διαταραγμένο εξετάζοντας τον μεταβλητό συντελεστή, είτε περιορίζοντας το πεδίο στο εξωτερικό μιας πεπερασμένης περιοχής και επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη με την προσθήκη μη γραμμικών όρων. Φανταστείτε έναν παρατηρητή να κάθεται μακριά τόσο στο διάστημα όσο και στο χρόνο από τις παρεμβολές να επηρεάζουν και φανταστείτε ένα σήμα που έχει σταλθεί πριν από πολύ καιρό στο παρελθόν και σε μια περιοχή που είναι επίσης μακριά από την περιοχή που παρεμβάλλεται από παρεμβολές. Ας υποθέσουμε ότι η πληροφορία αντιπροσωπεύεται από μια επίλυση κάποιων συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Εάν δεν υπάρχει καμία παρεμβολή να επηρεάζει ας αναδείξουμε την επίλυση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t$  σχετίζεται με τη πληροφορία  $\sigma$  από:

$$U_0(t)\sigma,$$

μια συνάρτηση του χρόνου. Αυτό που βλέπει ο παρατηρητής είναι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_0(t)\sigma.$$

Εδώ το σήμα εκπέμφθηκε από  $t = -\infty$  όπου είναι  $\sigma$  μια και υποθέτουμε ότι το σήμα φθίνει τοπικά.

Υποθέτουμε ότι οι παρεμβολές είναι εισηγμένες. Ο παρατηρητής θα δει

μια διαφορετική λύση από το ίδιο σύστημα (δεδομένου ότι κάθεται σε μια φυσική περιοχή),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_0(t)\sigma_p$$

Από το οποίο κατασκευάζει  $U_0(t)\sigma_p$ . Αλλά αυτό που ο παρατηρητής θέλει να ξέρει είναι τι ήταν το αρχικό σήμα εάν παρατηρείται το  $\sigma_p$ .

Αναπαρσάται από το  $U_p(t)$  η επίτευξη λύσης λειτουργίας του παρεμβλλόμενου συστήματος; Τότε

$$U_p\sigma \rightarrow U_0\sigma_p \quad \text{as} \quad t \rightarrow \infty,$$

Σχετικά με το όριο  $\lim_{t \rightarrow -\infty} U_0\sigma_p$  όπως τα δεδομένα στο  $t = +\infty$  η οποία όταν λυθεί προς τα πίσω στο χρόνο με την παρουσία παρεμβολής οδηγεί σε  $\sigma$  στο  $-\infty$ , έχουμε

$$\sigma = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow \infty} U_p(-t_2)U_0(t_1)\sigma_p = \lim_{t \rightarrow \infty} U_p(-t)U_0(t)\sigma_p$$

και ομοίως

$$\sigma_p = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow \infty} U_0(-t_2)U_p(t_1)\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t)U_p(t)\sigma.$$

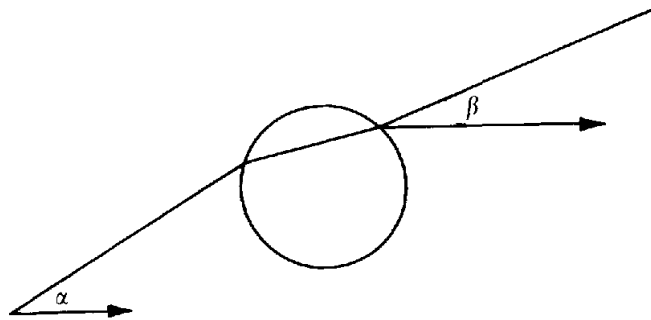
Εάν ορίσουμε την συνάρτηση διασποράς  $S_a$  ως λειτουργία που λαμβάνει το αρχικό σήμα στο παρατηρούμενο σήμα, τότε

$$S_a = \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t)U_p(t).$$

Εάν καθορίσουμε μια άλλη συνάρτηση διασποράς  $S$ , λαμβάνοντας την αρχική λύση  $U_0\sigma$  μέσα στην παρατηρούμενη λύση  $U_0\sigma_p$  έχουμε

$$S = U_0(t) \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t)U_p(t)U_0(-t).$$

Το απλούστερο μοντέλο για να εφαρμοστεί αυτό είναι ένα πρόβλημα γεωμετρικής διάθλασης πρόβλημα όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Η απόσταση παίζει το ρόλο του χρόνου. Η προσπίπτουσα ακτίνα διαθλάται και εκπέμπεται ως ακτίνα φωτός σε μια άλλη κατεύθυνση  $\beta$ .



Σχήμα 3

Έτσι,

$$\beta = S_a \alpha.$$

Επίσης,  $U_{0=1}$  (η ταυτότητα) και, ως εκ τούτου.

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} U_p(t) = S_a.$$

\*\*\* Θα διερευνήσουμε το φαινόμενο της διασποράς για την κυματική εξίσωση έξω από ένα ανακλαστικό σώμα στο κεφάλαιο 6 και με μια μη γραμμική εξίσωση διασποράς στο κεφάλαιο 8. Τέλος, θα πρέπει να εξετάσουμε στο κεφάλαιο 9, το αντίστροφο πρόβλημα σε διάφορες μορφές. Πώς μπορούμε να καθορίσουμε τη διαταραχή από την παρατηρούμενη λύση; Το κλασικό πρόβλημα είναι πώς θα καθοριστεί  $V(x)$  από τη συμπεριφορά του σε μεγάλες αποστάσεις των λύσεων με καλή συμπεριφορά της

$$\Delta u + \lambda^2 u + V(x)u = 0,$$

Όπου

$$u = e^{i\lambda\xi \cdot x} + u_R, \quad |\xi| = 1.$$

Αντί για το πιθανό πρόβλημα μπορούμε να ρωτήσουμε οποιαδήποτε πληροφορία για τη διασπορά όπου είναι απαραίτητο για να προσδιορίσουμε το σχήμα ενός σώματος υπό αντανάκλαση. Άλλο ένα πρόβλημα αντιστροφής εμφανίζεται σε μη γραμμικό φαινόμενο. Μπορεί κάποιος να προσδιορίσει από τη διασπορά λειτουργίας τη φύση της μη γραμμικότητας;

## 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Ρυθμοί διάσπασης και μέθοδοι διατήρησης.

Έχουν υπάρξει ουσιαστικά δύο μέθοδοι μελέτης της διάσπασης στην περίπτωση της σταθερής ενέργειας. Η μία είναι να αποδείξει αν η διάσπαση πραγματοποιείται, και η άλλη είναι να βρεθεί ένα σαφή ρυθμό της διάσπασης. Η πρώτη βασίζεται στην αρχή ότι, εάν δεν υπάρχει διάσπαση η λύση προσεγγίζει ένα στάσιμο κύμα, αλλά δεν υπάρχουν στάσιμα κύματα της πεπερασμένης πηγής ενέργειας. Οι αποδείξεις είναι λιτές. Το δεύτερο είναι δύσκολο, επειδή μπορεί να γίνει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Σε κάθε περίπτωση, η μελέτη εφαρμόζεται κυρίως στην κυματική εξίσωση, σε συστήματα όπως οι εξισώσεις του Maxwell που βασίζονται στην κυματική εξίσωση και στις εξισώσεις στις οποίες πρωταγωνιστικό ρόλο είναι η κυματική εξίσωση. Δεν εξετάζουμε το πρώτο πρόβλημα εδώ (βλέπε Lax και Phillips (1967), κεφ. 5, § 2), αλλά μόνο το δεύτερο.

### 1. Εύρεση ρυθμού διάσπασης από τους πολλαπλασιαστές.

Ξεκινάμε με τη διατύπωση του προβλήματος να βρεθεί ο ρυθμός της διάσπασης από τους πολλαπλασιαστές, εάν υπάρχει ένα για το γενικό σύστημα. Τότε θα δείξουμε ποια είναι τα βασικά εμπόδια και θα συζητηθούν κάποια νέα παραδείγματα όπου οι δυσκολίες μπορούν να ξεπεραστούν.

Υποθέτουμε  $Y$  ικανοποιεί ένα υπερβολικό σύστημα,

$$(1) \quad \begin{aligned} Y_t &= \sum A_n Y_n + BY \quad \text{in } \mathcal{E}, \\ QY &= 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{E} \end{aligned}$$

όπου είναι η εξοικονομήσιμη ενέργεια. Οι μητρικές  $A_n$ , είναι

$$\frac{\partial Y}{\partial x_n}$$

ανεξάρτητες του χρόνου.  $Y_n = \frac{\partial Y}{\partial x_n}$ . Η ιδέα είναι να βρεθεί ο ρυθμός της διάσπασης βελτιώνοντας στη μέθοδο των πολλαπλασιαστών όπου ο Friedrich χρησιμοποιούσε για την ύπαρξη επέκτασης μακριά από υπερβολικά συστήματα. Αναζητούμε μια συμμετρική απεικόνιση  $M$  με ορισμένες ιδιότητες. Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο του (1) με  $MY$  θα θέλαμε να είμαστε σε θέση να συλλέξουμε όλα τα παράγωγα σε μια απόκλιση έκφρασης που μπορεί να ερμηνευθεί ως,

$$(2) \quad (MY \cdot Y)_t - (M_t Y \cdot Y) = \sum (Y \cdot A_n Y)_n - (Y \cdot CY).$$

Η αρχική ιδέα η οποία ζητούσε μόνο την ύπαρξη ήταν να καταλήξει μετά από την ολοκλήρωση αυτής της εξίσωση σε μια περιοχή με κάποια σαφή θετική τετραγωνική μορφή που θα μπορούσε να εκτιμηθεί όσον αφορά τα δεδομένα στοιχεία οριοθέτησης. Από μια τέτοια οριστική μορφή εξάγετε ένα αδύναμο θεώρημα ύπαρξης από το θεώρημα προβολής. Για συμμετρικά υπερβολικά συστήματα, αν όλη η ύπαρξή θέλει μόνο  $M = I$  είναι αρκετή. Για να προσδιορίσουμε πότε υπάρχει ένα  $M$  που παράγει ρυθμό διάσπασης είναι πολύ πιο

ευαίσθητο. Στην πραγματικότητα, είναι αδύνατο γενικά να πάρουμε για  $M$  κάτι, αλλά το γινόμενο του πολλαπλασιασμού της ταυτότητας είναι απλό και μόνο επειδή δεν μπορούμε να εξαλείψουμε τα παράγωγα. Η ταυτότητα ενέργειας συνεπάγεται ότι  $M = I$  αποδόσεις (2) με  $C = 0$ . Μια άλλη όπως το  $M$  θα απαιτούσε ότι  $MA_n$  ο είναι αυτοσυζυγείς για κάθε  $A_n$ . Επίσης είναι δυνατόν να κατασκευαστούν τέτοια συστήματα σε αντιστοιχία με  $M$ , κανένα από αυτό δεν φαίνεται καθόλου χρήσιμο στην εύρεση διάσπασης. Η κατάσταση είναι κάπως καλύτερη, και αν κοιτάξουμε μια μόνο διαφορική εξίσωση και προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε έναν πολλαπλασιαστή για την ανάκτηση φθοράς.

Υποθέτουμε ότι το  $L$  είναι διαφορικός τελεστής της  $k$  τάξης και εξετάζουμε την έκφραση  $Mu \cdot Lu$ , όπου το  $M$  είναι διαφορικής λειτουργίας της τάξης  $k - 1$ . Με  $t = x_0$  μια τυπικά υψηλή της τάξης  $Mu \cdot Lu$  θα είναι της μορφής  $u_{x11} \dots u_{xik-1} u_{xj1} \dots u_{xjk}$  και με το σωστό μίγμα των παραγώγων αυτό μπορεί να γραφτεί ως  $\text{div } Qu + Ru$ , όπου  $Qu$  και  $Ru$  είναι τετραγωνικές εκφράσεις στα παράγωγα της τάξης  $k - 1$ . Στην περίπτωση αυτή,  $MM \cdot Lu$  το ίδιο μπορεί να γραφτεί ως διαφορικός  $Qu + Ru$ . Αλλά αυτό δεν θα λειτουργήσει, για παράδειγμα, για  $u_x \cdot u_{yz}$ .

Ξεχωρίζοντας μία από τις μεταβλητές ως χρόνο  $t$  και την ολοκλήρωση πάνω στη  $\mathcal{E} \times [0, t]$  έχουμε

$$(3) \quad \int (Qu)_0 |dx'| \Big|_0^t + \int_0^t \int_{\partial \mathcal{E}} \sum (Qu)_k n_k d\sigma dt + \int_0^t \int_{\mathcal{E}} Ru |dx'| dt = 0$$

Εάν  $Lu = 0$ .

Μπορούμε να αποκτήσουμε ρυθμό διάσπασης, αν μπορούμε να επιλέξουμε το  $M$  έτσι ώστε:

(o)  $(Qu)_1 \wedge$  είναι θετικό,

(i)  $(Qu)_1 > g(t)Au$   $|\chi| < k$ , όπου  $Au$  είναι θετικό,  $g(t) > 0$  και ως

$t$ ,  $g(t)/t^\alpha$  για ορισμένα  $\alpha \geq 0$ ,

(ii)  $Ru > -\alpha(Qu)_1/t + \beta$ ,

(iii)  $(Qu)_k n_k > 0$  στο  $\partial\mathcal{E}$ .

Αυτό προκύπτει από την εξίσωση (3), από (ii) και (iii),

$$\int (Qu)_1 |dx| - \alpha \int \frac{(Qu)_1}{t + \beta} |dx| dt < \int (Qu)_1 |dx| \Big|_{t=0}$$

η με

$$\int \frac{1}{t + \beta} \int (Qu)_1 |dx| dt = G,$$
$$(t + \beta) \frac{dG}{dt} - \alpha G < \int (Qu)_1 |dx| \Big|_{t=0}$$

(4)

Από τα οποία χρησιμοποιώντας (ο) βρίσκουμε

$$G < \frac{1}{\alpha} \beta^{-\alpha} (t + \beta)^\alpha \int (Qu)_1 |dx| \Big|_{t=0}$$

η

$$(t + \beta) \frac{dG}{dt} = \int (Qu)_1 |dx| < \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \beta^{-\alpha} (t + \beta)^\alpha \right) \int (Qu)_1 |dx| \Big|_{t=0}$$

Αλλά από (i),

$$\int_{|x| < k} Au dx < \frac{1}{g(t)} \int (Qu)_1 |dx|$$

και συνεπώς

$$\int_{|x| < k} Au \, dx \rightarrow 0 \quad \text{since} \quad g(t)/t^2 \rightarrow \infty.$$

Για πολλούς λόγους πρέπει να εκφραστεί ο ρυθμός της φθοράς(κεφάλαιο 3) υπό τη μορφή

$$(5) \quad \int_{|x| < k} Au \, dx \Big|_t < f(t) \int_{|x| < k} Au \, dx \Big|_{t=0},$$

Όπου  $f(t) \neq 0$  ως  $t \rightarrow \infty$ . Αυτό προκύπτει από την προηγούμενη ταυτότητα εάν  $Au$  με όριο  $Q$ . Αλλά για να γυρίσουμε πίσω στις απαιτήσεις μας στο  $Q$  και συνεπώς, στο  $M$ , λαμβάνουμε  $\alpha = 0$ . Υποθέτουμε επίσης ότι έχουμε κάποια άλλη μέθοδο υπολογισμού των χαμηλών παραγώγων του  $U$  από την άποψη του  $(k - 1)$ st παράγωγα του  $u$ . Υποθέτουμε  $Lu$  είναι  $k$  τάξης και ας πούμε  $n + 1$  μεταβλητές υποθέτοντας ότι εξετάζουμε ένα πρόβλημα σε ελεύθερο χώρο, έτσι ώστε να μην χρειάζεται να ανησυχήσουμε για το περιοριστικούς όρους. Είμαστε ελεύθεροι στο να επιλέξουμε  $N$  συντελεστές για την υψηλότερη κατά τάξη είδους μερικών διαφορικών λειτουργιών σε  $n + 1$  μεταβλητές και της τάξης  $k - 1$ . Για να ικανοποιηθεί η (ii) που θέλουμε να διορθώσουμε την υπογραφή μιας τετραγωνικής μορφής σε  $N$  υψηλότερα κατά τάξη παράγωγα (συμπεριλαμβανομένης της μηδενικής τάξης) με συντελεστές που εξαρτώνται στην αρχική επιλογή. Αυτό προϋποθέτει ότι οι αυτοσυζυγείς  $N \times N$  απεικονιζόμενοι έχουν  $N$  θετικές ιδιοτιμές. Η μέτρηση στην καλύτερη περίπτωση είναι δικαίωμα, αλλά ακόμη τότε οι συνθήκες είναι απίστευτα μη γραμμικές. Επιπλέον, ορισμένοι συνδυασμοί δεν μπορούν να εκφραστούν με τη σωστή μορφή. Στην πραγματικότητα, Bloom και Kazarinoff το 1972, έχουν δημιουργήσει μια κατηγορία των εξισώσεων για τους



πολλαπλασιασμούς με  $M$  που μπορούν να βρεθούν που οδηγούν στην διάσπαση με την κατάλληλη οριακή συνθήκη. Αποδεικνύεται ωστόσο ότι με την κυματική εξίσωση εάν χρειαζόμαστε  $R = 0$ , I.e., δηλαδή εάν ψάχνουμε ένα νόμο για τη διατήρηση, τότε υπάρχουν διάφοροι κατάλληλοι πολλαπλασιαστές  $M$ . Κάθε τέτοιος νόμος διατήρησης συνδέεται με την αλλαγή των μεταβλητών που αφήνει το Lagrangian αμετάβλητο και συνεπώς τις εξισώσεις (βλέπε Noether το 1918). Κάποιος μπορεί να ξεκινήσει με την εξέταση των νόμων διατήρησης που αποδίδει τη φθορά στον ελεύθερο χώρο και στη συνέχεια να εξετάσουν την επίδραση ενός ορίου ή μιας άλλης διαταραχής.

Μπορούμε μάλιστα να επιστρέψουμε στο σύστημα

$$Y_t = A_t Y_l.$$

Αυτό είναι αμετάβλητο από την αλλαγή κλίμακας  $x_l \rightarrow \lambda x$ ,  $t \rightarrow \lambda t$  και συνεπώς,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} Y(\lambda x, \lambda t)$$

είναι μια λύση για όλα τα  $\lambda$ , ή κυρίως, για  $\lambda = 1$ ,

$$\sum x_l \cdot Y_{x_l} + t Y_t = x \cdot Y_x + t Y_t$$

είναι μια λύση και κατά συνέπεια η ενέργεια της διατηρείται. Έτσι σε ελεύθερο πεδίο

$$\int |x \cdot Y_x + t Y_t|^2 dx = \int |x \cdot Y_x|^2 dx \Big|_{t=0}.$$

Στην επόμενη ενότητα, χρησιμοποιούμε αυτή τη μέθοδο και τη παρουσιάζουμε ως νέο παράδειγμα διατήρησης νόμων για τις εξισώσεις

Maxwell, η οποία οδηγεί σε ένα θεώρημα διάσπασης για μια σημαντική εκ του ασφαλούς οριακή τιμή.

2. Εξισώσεις του Maxwell . Εξισώσεις του Maxwell στο κενό μπορούν να γραφτούν με  $E + iB = F$ , όπου  $E$  είναι το ηλεκτρικό πεδίο και  $B$  το μαγνητικό πεδίο, καθώς

$$(6) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -i \operatorname{curl} F, \quad \operatorname{div} F = 0$$

και η διατήρηση της μορφής ενέργειας λαμβάνεται από αυτήν την εξίσωση, λαμβάνοντας το γινόμενο με  $\bar{F}$ :

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{F} \cdot F) - i \operatorname{div} (\bar{F} \times F) = 0.$$

Οι οριακές συνθήκες που αντιστοιχούν σε τέλεια αγωγιμότητα είναι: Η εφαπτόμενη συνιστώσα των  $E$  και το φυσιολογικό συστατικό του  $B$  εξαφανίζονται. (Το τελευταίο ακολουθεί την αρχική κατάσταση  $\operatorname{div} B = 0$ ). Έτσι, από την 7 σχέση ολοκληρωμένη στο ελεύθερο πεδίο ή έξω από ένα όριο που διεξάγει τις αποδόσεις:  $\int \bar{F} \cdot F \, dx$  είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Χρησιμοποιούμε το νόμο διατήρησης πρόσθετων που λαμβάνονται χρησιμοποιώντας την σταθερότητα υπό κλιμάκωση.

Υποθέτουμε ότι  $F$  είναι μια λύση του (6) στην  $\mathcal{E}$  και  $\partial\mathcal{E}$ ,

$$(8) \quad \operatorname{Re} F_T = E_T = \operatorname{Im} F_n = B_n = 0,$$

όπου το  $T$  υποδηλώνει εφαπτομενική συνιστώσα.

Εφαρμόζοντας την σχέση 7 στο  $\chi \cdot F_x + tF_t$  και την ολοκλήρωση πάνω στο  $\mathcal{E} \times [0, t_1]$  έχουμε

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \int_{\mathcal{E}, t=t_1} (x \cdot \bar{F}_x + t\bar{F}_t) \cdot (x \cdot F_x + tF_t) |dx| - i \int_0^{t_1} \int_{\partial \mathcal{E}} (x \cdot \bar{F}_x + t\bar{F}_t) \\
 & \times (x \cdot F_x + tF_t) \cdot n \, d\sigma \, dt \\
 & = \int_{\mathcal{E}, t=0} (x \cdot \bar{F}_x) \cdot (x \cdot F_x) |dx|.
 \end{aligned}$$

Όπου  $\chi \cdot F_x = \chi \cdot \nabla F$  και  $n$  σημεία έξω από το  $\mathcal{E}$ . Η αριστερή πλευρά έχει την επιθυμητή ιδιότητα όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Η ολοκλήρωση αυξάνεται στο χρόνο δευτεροβάθμια για πεπερασμένη τιμή  $x$ . Το  $F_t$  παίζει το ρόλο του  $Y$  στην προ ώρας επιχειρηματολογία μας. Το οριακό ολοκλήρωμα μπορεί να απλοποιηθεί δεδομένου ότι οι οριακές συνθήκες είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Αυτό συνεπάγεται ότι η  $F_t$  είναι μια λύση των οριακών συνθηκών και ως εκ τούτου,  $(\bar{F}_t \times F_t) \cdot n = i(E_t \times B_t - B_t \times E_t) \cdot n = 0$ . Έτσι, ο συντελεστής του  $t^2$  στο όριο του ολοκληρώματος εξαφανίζεται. Ο συντελεστής του  $t$  στην αριστερή πλευρά της σχέσης (9) μπορεί να αλλοιωθεί σε μια εκτιμητέα μορφή. Είναι

$$(10) \quad -it(x \cdot \bar{F}_x \times F_t + \bar{F}_t \times x \cdot F_x) \cdot n = -2 \operatorname{Im} t(x \cdot \bar{F}_x \times F_t) \cdot n.$$

Για το υπόλοιπο της απόδειξης εισάγουμε δείκτες για να πάρουμε τα σημάδια δικαιώματος, το οποίο είναι ζωτικής σημασίας. Έτσι με  $\epsilon_{ijk}$  συνήθης μετάλλαξης σταθεράς,  $\epsilon_{ijk} = 0$  αν  $j = i$  και  $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji}$

$$(11) \quad -2 \operatorname{Im} t(x \cdot \bar{F}_x \times F_t) \cdot n = -2 \operatorname{Im} t \epsilon_{ijk} x_l \bar{F}_{j,l} F_{k,t} n_i.$$

Από τη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$\varepsilon_{ijk}\bar{F}_{j,k} = -i\bar{F}_{i,t}$$

ή

$$\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk}\bar{F}_{j,k} = -i\varepsilon_{imn}\bar{F}_{i,t}$$

ή

$$(\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj})\bar{F}_{j,k} = -i\varepsilon_{imn}\bar{F}_{i,t}.$$

Έτσι, έχουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα. 
$$\bar{F}_{m,n} - \bar{F}_{n,m} = -i\varepsilon_{imn}\bar{F}_{i,t}.$$

Αντικαθιστώντας στην (11) έχουμε

$$\begin{aligned} & -2 \operatorname{Im} t \varepsilon_{ijk} x_l (\bar{F}_{l,j} - i \varepsilon_{rjl} \bar{F}_{r,t}) F_{k,t} n_i \\ & = -2 \operatorname{Im} t (\varepsilon_{ijk} x_l \bar{F}_{l,j} F_{k,t} n_i) + 2 \operatorname{Re} t (x_l \varepsilon_{jik} \varepsilon_{jrl} \bar{F}_{r,t} F_{k,t} n_i) \\ & = -2 \operatorname{Im} t (\varepsilon_{ijk} x_l \bar{F}_{l,j} F_{k,t} n_i) + 2 \operatorname{Re} t (x_l (\delta_{ir} \delta_{kl} - \delta_{kr} \delta_{il}) \bar{F}_{r,t} F_{k,t} n_i) \\ & = -2 \operatorname{Im} t (\varepsilon_{ijk} x_l \bar{F}_{l,j} F_{k,t} n_i) + 2 \operatorname{Re} t (x_l \bar{F}_{i,t} F_{l,t} n_i - x_i F_{k,t} \bar{F}_{k,t} n_i) \\ & = -2 \operatorname{Im} t (\varepsilon_{ijk} x_l \bar{F}_{l,j} F_{k,t} n_i) - 2 \operatorname{Re} t (x \cdot n) |B_t|^2, \end{aligned}$$

Δεδομένου το όριο από την συνθήκη 8, οι εφαπτομενικές συνιστώσες του  $F_t$  είναι φανταστικές και ισούνται με  $iB_t$ , ενώ η κανονική συνιστώσα είναι πραγματική και ισούται με  $E_t$ .

Ο πρώτος όρος μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}
 & -2t \operatorname{Im} \{ \varepsilon_{ijk} (x_l \bar{F}_l)_{,j} F_{k,t} n_i - \varepsilon_{ijk} \delta_{lj} \bar{F}_l F_{k,t} n_i \} \\
 & = -2t \operatorname{Im} [\operatorname{curl} ((x \cdot \bar{F}) F_t) \cdot n - x \cdot \bar{F} \operatorname{curl} F_t \cdot n - (\bar{F} \times F_t) \cdot n].
 \end{aligned}$$

Στην παρένθεση  $(\bar{F} \times F_t) \cdot n$  εξαφανίζεται από τις οριακές συνθήκες  $\operatorname{Re} F \times n = 0, \operatorname{Im} F \cdot n = 0$ . Ο πρώτος όρος εξαφανίζεται από το θεώρημα του Stokes, όταν αυτή είναι ολοκληρωμένη πάνω στο  $\partial E$ . Ο μόνος όρος συμβολής είναι από τις εξισώσεις του Maxwell, (6):

$$\begin{aligned}
 2t \operatorname{Im} (x \cdot \bar{F}) \operatorname{curl} F_t \cdot n &= 2 \operatorname{Im} t x_l \bar{F}_l i F_{n,tt} \\
 &= 2 \operatorname{Re} t x_l \bar{F}_l F_{n,tt} = 2 \operatorname{Re} (t x_n \bar{F}_n F_{n,t})_t \\
 &\quad + 2 \operatorname{Re} t (x_l \bar{F}_l - x_n \bar{F}_n) F_{n,tt} \\
 &\quad - 2 \operatorname{Re} t x_n |\bar{F}_n|^2 - 2 \operatorname{Re} x_n \bar{F}_n F_{nt}.
 \end{aligned}$$

Για λόγους ευκολίας, αν και αυτό μπορεί εύκολα να δικαιολογηθεί ή ακόμα και να αποφευχθεί, υποθέτουμε ότι οριοθετούνται όλα τα παράγωγα της  $F$ . Έτσι, όταν έχουμε ολοκληρώσει

$$(t x_n \bar{F}_n F_{nt})_t$$

έχουμε αποκτήσει έναν ολοκληρωμένο όρο της  $t$  τάξης.

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} (x_l \bar{F}_l - x_n \bar{F}_n) F_{ntt} \\
 & \quad \bar{F}
 \end{aligned}$$

εξαφανίζεται από όταν το  $\operatorname{Re} (x_l \bar{F}_l - x_n \bar{F}_n)$  περιλαμβάνει μόνο τις εφαπτομενικές συνιστώσες του  $\operatorname{Re} \bar{F} = E$  το οποίο εξαφανίζει το

$\partial \mathcal{E}$  από την (8) και η φυσιολογική συνιστώσα του  $F_{it}$  είναι πραγματική (πάλι στην 8).

Συλλέγοντας όρους βρίσκουμε για την επιφάνεια του ολοκληρώματος στην 9 με τον συντελεστή  $t$ :

$$-2 \operatorname{Im} \int_0^{t_1} t \int_{\partial \mathcal{E}} (x \bar{F}_x \times F_t) \cdot n \, d\sigma \, dt = -2 \operatorname{Re} \int t |F_t|^2 (x \cdot n) \, d\sigma \, dt + O(t).$$

Αντικαθιστώντας στην 9 έχουμε:

$$(12) \quad \int_{\mathcal{E}, t=t_1} |xF_x + tF_t|^2 |dx| \leq O(t)$$

Το όριο  $\partial \mathcal{E}$  έχει σχήμα αστεριού,  $\chi \cdot n \geq 0$  για  $n$  την κανονική έξοδο του  $\mathcal{E}$ . Δεδομένου ότι

$$\begin{aligned} t^2 \int_{|x| < R} |F_t|^2 \, dx &< \operatorname{const.} \int_{|x| < R} |xF_x + tF_t|^2 |dx| + O(t) \\ &< \operatorname{const.} \int_{\mathcal{E}} |xF_x + tF_t|^2 |dx| + O(t) \end{aligned}$$

Έχουμε

$$t_1^2 \int_{\substack{|x| < R \\ t=t_1}} |F_t|^2 |dx| + \int_0^{t_1} \int_{\partial \mathcal{E}} t |F_t|^2 |dx| < O(t_1)$$

ή (13)

$$\int_{\substack{|x| < R \\ t=t_1}} |F_t|^2 |dx| + \int_0^{t_1} \int_{\partial \mathcal{E}} t^{-1} |F_t|^2 |dx| < O\left(\frac{1}{t_1}\right).$$

Αυτό μας λέει ότι τα παράγωγα του χρόνου των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων είναι διασπασμένα σε ποσοστό τουλάχιστον όπως  $1/\sqrt{t}$ . Στην πραγματικότητα δεν έχουμε οριοθετημένη την τοπική ενέργεια  $\int_{|x|<k}(E^2+B^2)|dx|$  by  $f(t)\int_{t=0}(E^2+B^2) dx$ , όπου  $f(t)$  ο ρυθμός της διάσπασης τείνει στο 0 ως  $t \rightarrow \infty$ . Αλλά μερικές βελτιώσεις θα μας δώσουν έναν ρυθμό διάσπασης για  $\int(E_t^2 + B_t^2)|dx|$

**3. Βελτιώσεις στις εκτιμήσεις.** Με μια πιο απλή μορφή βρίσκουμε ότι η (9) μειώνεται σε

$$(14) \quad \int_{\mathcal{E}} |x \cdot F_x + tF_t|^2 |dx| \Big|_{t=t_1} + 2 \int_0^{t_1} \int_{\partial \mathcal{E}} t(x \cdot n)(|B_t|^2 + |E_t|^2) d\sigma dt \\ + \int_{\partial \mathcal{E}} (E \cdot n)^2 d\sigma \Big|_{t=t_1} = \int |x \cdot F_x|^2 |dx| \Big|_{t=0} + \int_{\partial \mathcal{E}} (E \cdot n)^2 d\sigma \Big|_{t=0} + J,$$

Όπου χρησιμοποιεί  $F = E + iB$ ,

$$J = -2t_1 \int_{\partial \mathcal{E}} (x \cdot n)(E \cdot n)_t^2 d\sigma + 2 \int_0^{t_1} \int_{\partial \mathcal{E}} (x \cdot B_x \times x \cdot E_x) \cdot n d\sigma dt.$$

Για την απλοποίηση ή μάλλον για την εκτίμηση  $J$  το γράφουμε ως

$$J = -t_1 \int_{\partial \mathcal{E}} (PE)E_t \cdot n d\sigma + 2 \operatorname{Im} \int_0^{t_1} \int_{\partial \mathcal{E}} (Q \cdot F_x \times Q \cdot \bar{F}_x) \cdot n d\sigma dt,$$

Όπου  $P = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}(x \cdot \mathbf{n})$ ,  $Q = x$  σε  $\partial \mathcal{E}$  και  $P, Q$  ομαλά στο μηδέν μέσα στο  $|x| = \rho$ . Στη συνέχεια, με  $\mathcal{D} = \{|x| \leq \rho\}$ ,

$$J = -t_1 \int_0^{t_1} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} (PE)E_t |dx| + 2 \operatorname{Im} \int_0^{t_1} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} (Q \cdot F_x) \times (Q \cdot \bar{F}_x) |dx| dt \\ = -t_1 \int_0^{t_1} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} (PE)E_t |dx| + 2 \operatorname{Im} \int_0^{t_1} \int_{\mathcal{D}} QF_x \cdot \operatorname{curl} (Q \cdot \bar{F}_x) |dx| dt.$$

Χρησιμοποιώντας  $\operatorname{div} E_t = 0$  και  $\operatorname{curl} (\partial F / \partial x_i) = i\partial^2 F / \partial x_i \partial t$  έχουμε

$$J = -t_1 \int_0^{t_1} \int_{\mathcal{D}} E_t \cdot \nabla(PE) |dx| + \int_{\mathcal{D}} |Q \cdot F_x|^2 |dx| + K_1,$$

Όπου

$$K_1 \leq k \int_0^{t_1} \int_{\mathcal{D}} |\nabla F|^2 |dx| dt$$

ή πιο απλά

$$(15) \quad J \leq k \left[ t_1 \int_{\mathcal{D}} (|F_t|^2 + |\nabla F|^2 + |F|^2) |dx| + \int_0^{t_1} \int_{\mathcal{D}} |\nabla F|^2 |dx| dt \right].$$

Το J είναι της τάξης του  $t_1$ , αν κατέχει το παρακάτω λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 1.

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla F|^2 |dx| \leq j \left[ \int_{\mathcal{E}} |F_t|^2 |dx| + \int_{\mathcal{E}} |F|^2 |dx| \right]$$

για κάποια j που εξαρτώνται στο  $\mathcal{E}$  μόνο.

Από το νόμο περί διατήρησης της ενέργειας σχέση 5 είναι ολοκληρωμένη πάνω στο  $\mathcal{E} \times [0, t]$  και η οριακή συνθήκη της 8 εφαρμόζεται

$$\int_{\mathcal{E}} |F|^2 |dx| = \int_{\mathcal{E}} |F|^2 |dx| \Big|_{t=0}$$

και ομοίως



$$\int_{\mathcal{E}} |F_t|^2 dx = \int_{\mathcal{E}} |\operatorname{curl} F|^2 dx \Big|_{t=0}$$

Λήμμα 1, το οποίο είναι στάνταρ, αποδεικνύεται γράφοντας  $|F_t|^2 = |\operatorname{curl} F|^2 + |\operatorname{div} F|^2$  ως  $|DF|^2 + \operatorname{div} R$ , όπου  $|DF|^2$  αντιπροσωπεύει  $\sum_{k,l} \bar{F}_{k,l} F_{k,l}$ . Ολοκληρώνοντας  $\operatorname{div} R$  πάνω στο  $\mathcal{E}$ . Θα αποκτήσουμε ένα όριο ολοκληρώματος που υπό τις οριακές συνθήκες της (8),  $\operatorname{div} F = 0$  και συνεπώς οι οριακές συνθήκες  $F \cdot n = 0$ ,  $(\operatorname{curl} B) \times n = 0$  είναι εύκολα να φαίνεται οριοθετημένο από μια σταθερή τιμή  $\int_{\partial\mathcal{E}} |F|^2 d\sigma$ . Αυτό το ολοκλήρωμα, με τη σειρά οριοθετείται στους όρους της  $(1/\varepsilon) \int |F|^2 dx + \varepsilon \int |DF|^2 dx$ . Έτσι για την ολοκλήρωση της  $|F_t|^2$  πάνω στο  $\mathcal{E}$  βρίσκουμε ότι

$$(16) \quad \int_{\mathcal{E}} |DF|^2 dx (1 - k_2\varepsilon) \leq \int_{\mathcal{E}} |F_t|^2 dx + k_3\varepsilon^{-1} \int |F|^2 dx$$

και το λήμμα ακολουθεί.

Τελικά έχουμε βρει ένα όριο στους όρους που αφορά τα αρχικά δεδομένα για τον όρο  $0(t)$ , στην (14) και έτσι:

$$(17) \quad \int_{\mathcal{E}} |x \cdot F_x + tF_t|^2 dx \Big|_{t=t_1} \leq \int_{\mathcal{E}} |x \cdot G_x|^2 dx + l_1 t_1 \int_{\mathcal{E}} |\nabla G|^2 dx + l_2 t_1 \int |G|^2 dx,$$

Όπου  $F = G$  για  $t = 0$  και  $l_1, l_2$  είναι σταθερές εξαρτώμενες μόνο στο κυρίαρχο  $\mathcal{E}$ .

**4. Η διάσπαση για το πεδίο.** Για να υπάρχει φθορά για το πεδίο από μόνη της θα πρέπει να εισάγουμε τη λειτουργία

$$(18) \quad F^* = \int_0^t (E + iB) dx + g(x).$$

Η συνάρτηση  $g$  είναι επιλεγμένη έτσι ώστε  $F_i^* + i \operatorname{curl} F^* = 0$ ,  $\operatorname{div} F^* = 0$ . Από αυτό βρίσκουμε

$$(19) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} g &= 0, \\ \operatorname{curl} g &= -iG. \end{aligned}$$

Από τη συμβατότητα των αρχικών όρων έχουμε  $\operatorname{div} G = 0$ . Ως εκ τούτου, εμείς μπορούμε να λύσουμε για  $g$  και στην πραγματικότητα να πληρούνται επίσης οι οριακές συνθήκες στο  $D$ ,  $\operatorname{Re}(g \times n) = 0$ ,  $\operatorname{Im} g \cdot n = 0$ . Είναι εύκολο να δούμε ότι η λύση είναι μοναδική. Απαιτεί την ύπαρξη ενός σύνθετου επιχείρημα.

Έτσι το  $F^*$  ικανοποιεί την σχέση 6 και τις οριακές συνθήκες (8),  $\operatorname{Re} F^* \times n = 0$ ,  $\operatorname{Im} F^* \cdot n = 0$ .

Έξω από την υποστήριξη της  $G$  θα έχουμε  $g = \nabla \Phi$ ,  $\Delta \Phi = 0$ . Επιπλέον,  $x \cdot g_x$  θα είναι επίσης η κλίση μιας αρμονικής λειτουργίας. Ως εκ τούτου,  $\int_{\varepsilon, D} (x \cdot g_x) dx$  μπορεί να είναι εκτιμώμενη στους όρους από την άποψη ορισμένων δεδομένων στη σφαίρα  $|x| = \rho$ . Για να αποκτήσουμε το θεώρημα της διάσπασης εφαρμόζουμε το νόμο για τη διατήρηση στο  $F^*$  σε κυρίαρχο στο  $x, t$  - εξωτερικό χώρο στο  $\partial \varepsilon$  και οριοθετείται από  $t = 0$ ,  $\partial \varepsilon \times [0, t_1]$ ,  $t = t_1$  και ο κώνος  $t = 2t_1 + \rho - |x|$ .

Ένα βρίσκεται στη συνέχεια με ακριβώς την ίδια διαδικασία όπως πριν όπου

$$(20) \quad \int_{\mathcal{D}} (E^2 + B^2) dx = O\left(\frac{1}{t_1}\right),$$

όπου οι σταθερές που εμπλέκονται, εξαρτώνται σε αυτή την απόδειξη στη συνάρτηση  $g$  και συνεπώς στα αρχικά δεδομένα.

Εμείς δεν πρέπει να προσπαθήσουμε να μειώσουμε αυτές τις σταθερές, έτσι ώστε μόνο η εξάρτηση της αρχικής ενέργειας

$$\int (E^2 + B^2) dx$$

να αναδύεται. Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι αυτό θα δώσει εκθετική διάσπαση σε τρεις διαστάσεις. Αντ' αυτού θα επανέλθει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις για τα παράγωγα χρόνου τα οποία είναι ευκολότερα και επαρκή.

**5. Ένας ρυθμός της διάσπασης για  $F_t$ .** Η δική μας εκτίμηση της διάσπασης δίνει μικρή ένδειξη του τι είναι η καλύτερη σχέση μεταξύ  $\int_D |F_t|^2 dx$  ανά πάσα στιγμή και τα αρχικά δεδομένα της. Όμως μπορούμε να επιτύχουμε τα εξής.

Θεώρημα ρυθμού διάσπασης.

$$\int_{\mathcal{D}} |F_t|^2 dx \Big|_{t=0} \leq \frac{l}{t} \int_{\mathcal{D}} |F_t|^2 dx \Big|_{t=0}$$

Όπου το  $l$  εξαρτάται στην αρχική υποστήριξη και στο  $\mathcal{E}$ .

Αυτό προκύπτει από την σχέση 17 με το ακόλουθο λήμμα .

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} |DF|^2 dx \Big|_{t=0} &= \int_{\mathcal{E}} |DG|^2 dx \\ &\leq k \int_{\mathcal{E}} |\operatorname{curl} G|^2 dx = k \int_{\mathcal{E}} |F_t|^2 dx \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

για κάποια  $k$ .

Το λήμμα με τη σειρά του αποδεικνύεται με έμμεσο επιχειρήματα χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 και την ταυτότητα

$$\int |DG|^2 dx = \int |\operatorname{curl} G|^2 dx + \int |\operatorname{div} G|^2 dx + Q,$$

όπου  $Q$  είναι ένα αναπόσπαστο όριο που μηδενίζεται στην (8). Ο αναγνώστης μπορεί να παρέχει τις λεπτομέρειες με υπολογισμούς. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3, ένας τέτοιος ρυθμός διάσπασης σε τρεις διαστάσεις συνεπάγεται εκθετική φθορά για  $F_t$  από  $F \rightarrow 0$  ως  $t \rightarrow \infty$  (από Lax και Phillips γενικό θεώρημα διάσπασης) μπορεί να οριστεί  $F = \int_t^{\infty} F_t dt$  από την οποία η εκθετική φθορά για  $F$  προκύπτει από τη σχέση 13 αμέσως.

**6. Άλλοι νόμοι διατήρησης και ρυθμοί διάσπασης.** Τέλος, θα αναφέρουμε εν συντομία άλλους νόμους διατήρησης που να οδηγούν στο ρυθμό διάσπασης.

Το αναλλοίωτο της κυματικής εξίσωσης σε ένα μετασχηματισμό Helmholtz οδηγεί στη φθορά ενέργειας για την κυματική εξίσωση όπως  $1/t^2$  με τις Dirichlet συνθήκες στο όριο του αστεροειδούς σχήματος ή με ένα κατάλληλο δυναμικό ή και τα δύο (Morawetz το 1966, Strauss το 1968). Έπειτα, υπάρχουν και άλλα προβλήματα, όπου οι ρυθμοί διάσπασης μπορεί να είναι καθορισμένα:

(i) Η μη γραμμική Klein-Gordon εξίσωση με τους κατάλληλους μη γραμμικούς όρους (βλέπε κεφάλαιο 9, Morawetz και Strauss 1972).

(ii) Γενικές εξισώσεις όπου υπάρχουν περιορισμοί σχετικά με τους συντελεστές. Αυτό είναι ένα είδος του αντιστρόφου προβλήματος για την ανάλυση εξισώσεων όπου η φθορά έχει διερευνηθεί από τον Bloom και τον Kazarinoff το 1972. Μπορούν πλέον να μην απαιτούν καμία διατήρηση της ενέργειας.

Τέλος, επιτρέψτε μου να αναφέρω τα προβλήματα διάσπασης που συνδέονται με κινούμενα σώματα. Φανταστείται μια σφεντόνα να αιωρείται γύρω γύρω αργά από ό,τι ο ήχος ταξιδεύει. Η ενέργεια θα πρέπει να εξακολουθεί να τρέχει στο άπειρο σε περιπτώσεις όπου οι ακτίνες δεν μπορούν να είναι παγιδευμένες. Οι σημερινές μέθοδοι καλύπτουν ορισμένα από αυτά τα προβλήματα (βλ. Kazarinoff το 1971, Kazarinoff και Rogak το 1969 και Cooper το 1971). Από την άλλη

πλευρά της ενεργειακής κατάστασης μπορεί να κρατηθεί αυθαίρετα για μεγάλο χρονικό διάστημα αν το σώμα μπορεί να παγιδεύσει ακτίνες και εάν οι λύσεις μπορούν να γίνουν πολύ κοντά σε φωτεινούς παλμούς που ταξιδεύουν σε ακτίνες. Αυτή ήταν η πρώτη εικασία από τους Lax και Phillips το 1967 και καθορίστηκε από τον Ralston το 1969.

Το θεώρημα του Ralston μας δείχνει: υπάρχουν σώματα  $B$  και σύνθετα αρχικά δεδομένα  $U = \Phi$ ,  $U_t = \psi$  για λύσεις της κυματικής εξίσωσης, έτσι ώστε  $\int (|\nabla \Phi|^2 + \Psi^2) dx < M$ , αλλά για μια ακολουθία  $t_n \rightarrow \infty$

$$\int_{|x| < R} (U_t^2 + |\nabla U|^2) dx \Big|_{t=t_n} > f(t_n) \int (|\nabla \phi|^2 + \psi^2) dx$$

για κάθε  $f(t) \rightarrow 0$  ως  $t \rightarrow \infty$  εάν  $U$  ή  $\partial U / \partial n = 0$  στο  $\partial E$ .

Τέλος, θα ήθελα στο έργο του Walker (να εμφανιστεί) που δείχνει την ύπαρξη του ρυθμού της φθοράς ακόμη και στην περίπτωση των παγιδευμένων ακτίνων, δηλαδή μια ατελής πρόσβαση στο άπειρο.

Το θεώρημα του Walker αναφέρει ότι για την ίδια εξίσωση και του σώματος θα υπάρξει μια συνάρτηση  $f(t) \rightarrow 0$  ως  $t \rightarrow \infty$ , έτσι ώστε

$$\int_{|x| < R} (U_t^2 + |\nabla U|^2) dx < f(t) \|u\|^2,$$

όπου  $\|\cdot\|$  συμβολίζει κάποιο κατάλληλο κανόνα ενέργειας, για παράδειγμα η ενέργεια των δεύτερων παραγώγων.

Ο Lax και ο Phillips συμπλήρωσαν την εικασία τους, ωστόσο, αυτός ο κανόνας θα είναι ο στάνταρ ενεργειακός κανόνας, αν οι ακτίνες δεν είναι παγιδευμένες.

**7. Διάσπαση η ακόμη και διαστάσεις για την κυματική εξίσωση.** Η διάσπαση της ενέργειας στο εξωτερικό ενός σώματος ή μία διαταραχή

δύσκολα αναμένεται να είναι ταχύτερη από ό, τι στον ελεύθερο χώρο. Στις δύο διαστάσεις η λύση διάσπασης του ελεύθερου χώρου όπως  $1/t$  έτσι και η τοπική ενέργεια σαν  $1/t^2$ . Αυτή είναι η εκτίμηση που δίνεται για κύρια αστεροειδή σχήματα από την ανισότητα της ενέργειας (βλ. Κεφάλαιο 2). Το παράδειγμα του Ralston μεταφέρεται για πολλαπλές αντανakλάσεις και έτσι υπάρχουν πεδία ορισμού χωρίς ρυθμό φθοράς σε δύο διαστάσεις.

Ωστόσο, σε αντίθεση με την τρισδιάστατη περίπτωση, η κατάσταση εδώ μπορεί να είναι εντελώς αναλυτική είτε ως φορέας παραδεχόμενο άπειρες αντανakλάσεις (δεν διαθέτει ρυθμό διάσπασης) ή αλλιώς η διάσπαση ενέργειας όπως ( $1/t^2$ ). Ωστόσο, η απόδειξη είναι περίπλοκη και δεν θα δοθεί εδώ (βλέπε Morawetz το 1975 και Strauss το 1975 για δύο διαφορετικές αποδείξεις). Αυτή η διάσπαση ρυθμού, θα πρέπει να προστεθεί η να επεκταθεί σε ένα κατάλληλα άπειρο σώμα, σε διάφορες διαστάσεις (βλέπε Zachmanoglou το 1963).

**8. Διάσπαση σε χαρακτηριστικές κατευθύνσεις.** Εκτιμήσεις της διάσπασης σε κατευθύνσεις άλλες από  $x = \text{const.}$ ,  $t \rightarrow \infty$ , μπορεί συχνά να γίνει με την εφαρμογή τετραγωνικής ταυτότητας. Ωστόσο, για να βρεθεί η συμπεριφορά καθώς κινούμαστε μακριά με τη μέγιστη χαρακτηριστική ταχύτητα, η συνάρτηση του Riemann είναι το καλύτερο εργαλείο.

Για παράδειγμα, σκεφτείτε ξανά το σύστημα με τον κανόνα άθροισης,

$$Y_i = A_n Y_{x_n} \quad \text{in } \mathcal{E}$$

και αφήστε το  $R$  να είναι η συνάρτηση Riemann. Έτσι

$$\frac{d}{dt} \int RY dx = \int (R \cdot A_n Y)_{x_n} dx$$

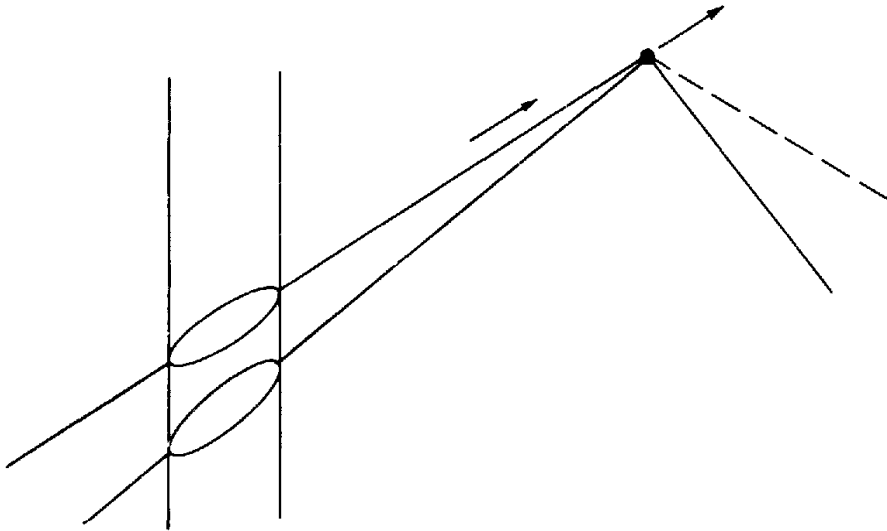
και με την ολοκλήρωση πάνω στο  $\mathcal{E} \times [0, t]$ ,

$$\int RY dx \Big|_0^t = \int RY dx \Big|_0 + \int_0^t \int_{\partial \mathcal{E}} RA_n \cdot nY d\sigma dt.$$

Στη συνέχεια με  $R = 0$ ,  $R_t = \delta(y)j$  σε  $t = s$ , όπου το  $J$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα με όλα τα συστατικά, αλλά ένα ίσο με μηδέν, έχουμε

$$Y(y, s) = \int RY dx \Big|_0 + \int_0^t \int_{\partial \mathcal{E}} (RA_n \cdot nY) d\sigma dt.$$

Η συνάρτηση Riemann έχει την υποστήριξη της εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του ταχύτερα καθυστερημένου κώνου (βλέπε Σχ. 1). Για να βρείτε τη συμπεριφορά σε μεγάλες αποστάσεις και τους χρόνους κατά μήκος μιας ταχείας



Σχ. 1

Βλέπουμε από το σχήμα ότι θα έπρεπε να διερευνήσουμε το  $R$  με  $y = \xi s + \text{const}$ , όπου  $|\xi| = C_f$  η γρήγορη ταχύτητα και  $s \rightarrow \infty$ . Δηλαδή τραβάμε την συνολική υποστήριξη μακριά προς το άπειρο στην κατεύθυνση που υποδεικνύεται. Είναι σαφές ότι η επίδραση της διαταραχής στο σώμα περιορίζεται κοντά στη βάση της στήριξης του  $R$ . Η τομή του χαρακτηριστικού κώνου μετατοπίζεται δύσκολα και η συμπεριφορά θα καταλήξει έξω σαν να είναι συμπεριφορά ελεύθερου χώρου.

Τυπική συμπεριφορά για την κυματική εξίσωση δίχως διασπορά,  $\square U = 0$ , σε τρεις διαστάσεις είναι

$$U \rightarrow \frac{f^\pm(t \pm r, \Omega)}{r} \quad \text{as} \quad t \rightarrow \pm \infty,$$

Όπου  $r = |\chi|$  και  $\Omega$  αντιπροσωπεύει τη γωνιακή μεταβλητή.

Για την εξίσωση διασποράς  $\square U + m^2 U = 0$  η συμπεριφορά δεν μπορεί να χαρακτηριστεί από μια ενιαία λειτουργία για την κάθε



χρονική κατεύθυνση. Μπορεί να είναι εντελώς αναπτυγμένη με τη χρήση στατικής φάσης.

### 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

#### Εκθετική φθορά

Αν και η αρχή του Huyghen είναι μια πολύ εξαιρετική περιουσία του διαφορικού συστήματος, αφήνει ωστόσο πολλές γνώσεις σε γενικά προβλήματα διότι απλοποιεί τη συνολική εικόνα. Σε ελεύθερο χώρο μας λέει ότι ένα σήμα περνά και από εκεί που περνάει δεν αφήνει κανένα υπόλειμμα. Αν υπάρχει μια διαταραχή στο σύστημα Huyghensian το σήμα δεν περνάει χωρίς να αφήνει υπόλειμμα, αλλά αφήνει συχνά ένα εκθετικά αλλοιωμένο υπόλειμμα που μπορεί να αγνοηθεί, και πάλι η φυσική κατάσταση μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από την συμπεριφορά του σήματος. Η βασική ιδέα είναι ότι αν υπάρχει η αρχή Huyghen, η επίδραση της διαταραχής μπορεί να είναι βραχύβια. Εδώ έχουμε διαμορφώσει μια κατηγορία nondissipative προβλήματα για τα οποία η εκθετική διάσπαση μπορεί να είναι αναμενόμενη. Ο Lax και ο Phillips το 1973 έχουν περιγράψει μερικά παραδείγματα της εκθετικής διάσπασης σε ό,τι θα μπορούσε να ονομαστεί μερικώς διασκορπισμένα συστήματα. Ωστόσο, μια πλήρης θεωρία διασποράς για διασκορπισμένα συστήματα δεν υπάρχει.

**1. Περιορισμένη επίδραση ορίου.** Για να διορθώσετε τις ιδέες μας, ας υποθέσουμε ότι έχουμε να κάνουμε με ένα σύστημα το οποίο

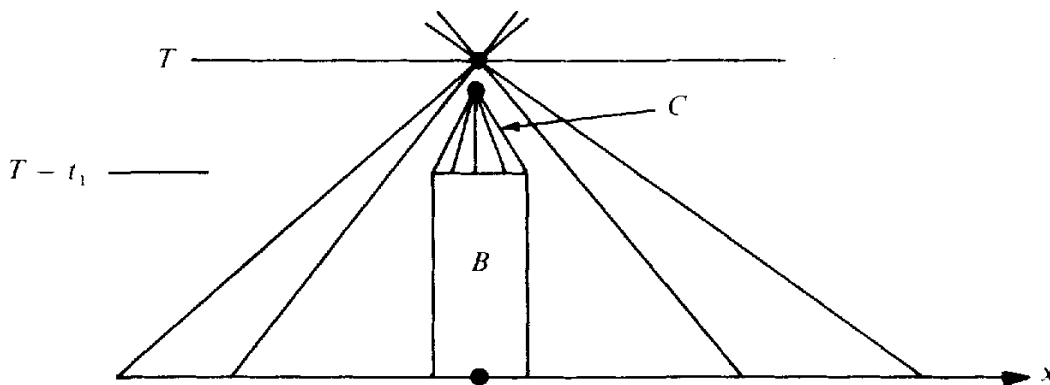
μειώνει για  $|x| > d$  είτε σε εξισώσεις του Maxwell ή ένα σύστημα που ισοδυναμεί με την κυματική εξίσωση.

Η αρχή Huyghen μπορεί να αναφέρεται σε έναν από τους δύο τρόπους:

i) Η λειτουργία του Riemann για το σύστημα έχει την υποστήριξη μόνο στην επιφάνεια του κώνου.

ii) Η λύση ικανοποιεί ένα σύστημα που περιλαμβάνει διαφοροποίηση πάνω στις επιφάνειες των χαρακτηριστικών κώνων.

Σημειώστε σε ό,τι προκύπτει ότι θα αρκούσε εάν η υποστήριξη βρισκόταν έξω από έναν κώνο και ως εκ τούτου αυτή η θεωρία λειτουργεί για ένα σύστημα με ένα επίκεντρο κενό πίσω από τον βραδύτερο χαρακτηριστικό κώνο.



Σχήμα 1

Έστω  $L$  είναι μιας πρώτης τάξης μερική λειτουργία του οποίου η συνάρτηση του Riemann είναι το  $R$ . Ας υποθέσουμε ότι το  $L$  ικανοποιεί την αρχή του Huyghen στον ελεύθερο χώρο. Το  $U_T$  είναι η λύση του

$$(1) \quad LU_T = 0$$

Όπου το  $D$  τίθεται,

$$D = \mathbb{R}^N \times [0 \leq t \leq \infty] - P,$$

$$P = B \times [0 \leq t \leq T] + C$$

και το  $C$  είναι το εσωτερικό του περιβλήματος από όλους τους καθυστερημένους χαρακτηριστικούς κώνους με τη βάση του να βρίσκεται στη  $B$ . Από την 1 σχέση έχουμε

$$(2) \quad U_T = R\Phi$$

για κάθε  $x, t$  έτσι ώστε το πιο καθυστερημένο πιο αργό (στενότερο) χαρακτηριστικό κωνοειδές δεν τέμνεται στο  $B$  εάν  $U_T = \Phi$  για  $t = 0$ . Με άλλα λόγια, το όριο δεν συμβάλλει.

Έτσι, το αποτέλεσμα μιας διαταραχής που βρισκόταν στο  $B$  μέχρι το χρόνο του  $T - t_1$ , έχει παει σε χρόνο  $T$  εάν  $t_1$  είναι το μέγιστο ύψος του περιβλήματος των κώνων βασισμένο στο  $B$ .

### 1. Το διαραγμένο σύστημα.

Υποθέσεις. Έστω  $P$  μια κατώτερη διαταραγμένη λειτουργία εξαρτώμενο στο  $x$  μόνο, και αφήνουμε να ικανοποιείται μόνο το  $U$ , σε ένα εξωτερικό κύριο  $\mathcal{E}$ ,

$$(3) \quad (L + P)U = 0 \quad \text{in } \mathcal{E}$$

με τα αρχικά δεδομένα  $U = \Phi$  υποστηρίζοντας  $\rho_1$  και μια οριακή συνθήκη στο  $\partial\mathcal{E}$ . Η υποστήριξη του  $\partial\mathcal{E}$  και το  $P$  είναι λιγότερο από το  $\rho_1$ . Υπάρχει μια ταυτότητα απόκλισης(ενέργεια)

$$(4) \quad (UMU)_t + \text{div } UQU = 0$$

και στο όριο  $\partial\mathcal{E}$  ως αποτέλεσμα της οριακής συνθήκης,

$$(5) \quad UQU \cdot x_n = 0$$

Για  $\partial E$  με  $\chi_n$  η κανονική μονάδα στο χώρο. Επιπλέον, για την καθυστερημένη χαρακτηριστική κώνου με  $t_n > 0$ ,  $|t_n| = C_f^{-1}$ ,  $C_f$  η ταχύτητα, έχουμε

$$(6) \quad UMUt_n + UQUx_n \geq 0.$$

Και επιπλέον, για ορισμένες  $k_1, k_2$  με  $0 < k_1 < k_2$

$$(7) \quad k_1 FM_0 F < FMF < k_2 FM_0 F,$$

όπου  $M_0$  αντιστοιχεί στο πρόβλημα ελεύθερου χώρου.

Θα δείξουμε ότι κάτω από αυτές τις υποθέσεις το  $U$  διασπάται εκθετικά. Έστω  $B$  η σφαίρα της ακτίνας  $\rho_1$ .  $T - t_1$  είναι τέτοια ώστε ο βραδύτερος χαρακτηριστικός κώνος εκδίδεται από το  $B$  στο χρόνο  $T - t_1$  και τέμνεται  $t = 0$  με  $|x| > 2\rho_1$ ,

$$U = U_0 + U_1,$$

### ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΔΙΑΣΠΑΣΗ

Όπου

$$(8) \quad \begin{aligned} U_0 &= U \quad \text{for } t \leq T - t_1, \quad x \notin B, \\ LU_0 &= 0 \quad \text{for } t \geq T - t_1, \quad \text{in } R^N \end{aligned}$$

και τα δεδομένα που λείπουν στο  $B$  που καθορίζουν το  $U_0$  μπορεί να παρέχεται αυθαίρετα, αλλά εμείς παίρνουμε  $U_0 = 0$  στο  $B$

ΛΗΜΜΑ 1. Τότε

$$(9) \quad \begin{aligned} U_0 &= R\Phi \quad \text{for } t > T \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

για τα σημεία  $(x, t)$  τέτοια ώστε τα βραδύτερα καθυστερημένα χαρακτηριστικά κωνοειδή με την κορυφή στο  $(x, t)$  πληροί το επίπεδο  $t = 0$  έξω από την  $\rho_1$  υποστήριξη.

Αυτό προκύπτει από το (i) ή (ii) στην § 1. Καθορίστε την τοπική ενέργεια μιας συνάρτησης  $F$  ως

$$(10) \quad E(D, F, t) = \int_{x \in D} (FMF)|dx|,$$

$$(11) \quad E_0(D, F, t) = \int_{x \in D} (FM_0F)|dx|$$

για κάθε κύριο  $D$ .

Το σύστημά μας είναι η διατήρηση της ενέργειας έτσι ώστε για παράδειγμα,  $E_0(\mathbb{R}^N, U_0, t) = \text{const}$ , για  $t > T$ .

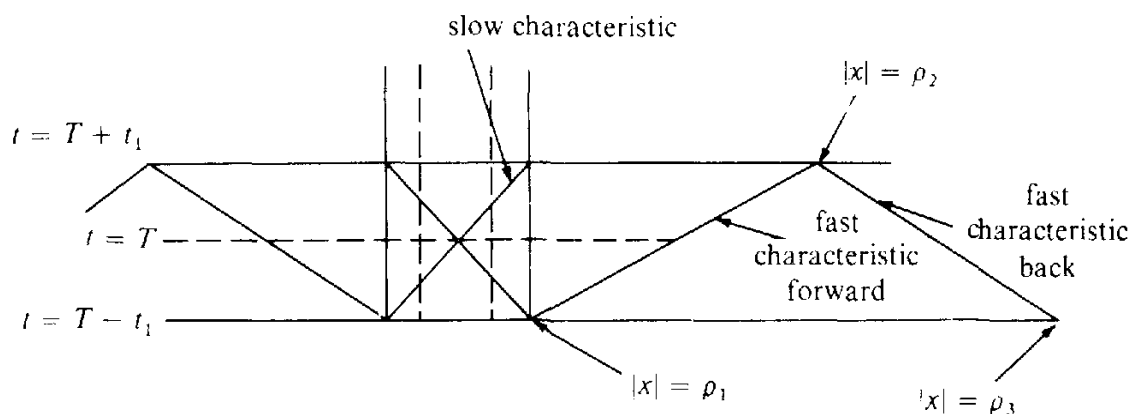
Θα δείξουμε ότι το ακόλουθο λήμμα κατέχει (βλέπε σχήμα 2).  
Λήμμα 2 .

$$(i) \quad \begin{aligned} (L + P)U_I &= -PU_0 \quad \text{for } T - t_1 \leq t \leq T + t_1 \\ &= 0 \quad \text{for } T + t_1 \leq t. \end{aligned}$$

(ii)  $E(\mathcal{E}, U_I, T + t_1) < KE(D, U_I, T - t_1)$ , όπου  $D = \{|x| < \rho_3\}$ , όπου το  $\rho_3$  εξαρτάται μόνο στην υποστήριξη του  $P$ .

(iii)  $U_I$  έχει σύνθετη υποστήριξη φορέα λιγότερο από  $\rho_2$  στο  $t = T + t_1$ , όπου  $\rho_2 = \rho_1 + 2C_f t_1$ .

Έτσι, για κάποια  $t > T + t_1$ , έχουμε για το  $U_I$ , μια επανάληψη της αξίας του ορίου Cauchy



Σχήμα 2

πρόβλημα για το  $U$ , η ίδια η εξίσωση, η ίδια η διαταραχή, η ίδια η υποστήριξη των αρχικών δεδομένων και εάν το  $K$  είναι μικρότερο από ένα, τότε το  $U_I$  έχει μικρότερη ενέργεια. Διαιρούμε το  $U_I$ , με τον ίδιο τρόπο σε χρόνο  $2T - t_1$ , ας πούμε ,

$$U_I = U_{1I} + U_{10}$$

και  $U_{1I}$  ακόμα αργότερα,

$$U_{1I} = U_{2I} + U_{20}, \text{ etc.}$$

Βλέπουμε από την κατασκευή ότι κοντά στο  $B$  έχουμε ρίξει όλες τις λύσεις  $U_{10}$ , όλα με την υποστήριξη εκτός των κατάλληλου κώνου από το πρώτο μέρος του Λήμματος 1. Έτσι, κατά το χρόνο  $t = n(T + t_1)$ ,

$$U = U_{nI} \text{ for } D = \{|x| < ct\} \cap \mathcal{E}$$

για κάποια σταθερά  $c$  και

$$\begin{aligned}
E(D, U, t) &= E(D, U_{nI}, t) \\
&\leq K^n E(R^N, U, 0) \\
&\leq K^{(t-t_1)/T} E(R^N, U, 0) \\
&\leq \exp(\log K(t-t_1)/T) E(R^N, U, 0).
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, έχουμε μια εκθετική φθορά, εάν  $K < 1$ . Εάν υπάρχει ένας οποιοδήποτε ρυθμό της φθοράς μπορούμε να βρούμε τόσο ότι το  $K$  έχει αποκτήσει εκθετική διάσπαση.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο και για τα αποτελέσματα του Walker (βλ. Κεφ. 2) και να αποκτήσουμε

$$E(D, U, t) \leq k e^{-\alpha t} \|U\|_{[t]}^2, \quad t = 0, \text{ Όπου}$$

$$\|U\|_{[t]}^2 = \int_{t=0}^t |D^{[t/T]} u|^2 dx,$$

όπου  $[t/T]$  υποδηλώνει τον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό σε  $[t/T]$  και αναφέρεται στη διάταξη των παραγώγων.

Τέλος, αποδεικνύουμε το Λήμμα 2.

Απόδειξη (i) και (iii). Σαφώς και  $(L + P) U_I = -P U_0$  και όπου  $U_0$  είναι μηδέν στο εσωτερικό του, η κωνική περιοχή που αναθεωρείται στην (9) είναι  $P U_0$  μιας και η υποστήριξη του  $P$  περιέχεται σε αυτή την περιοχή. Τα δεδομένα του Cauchy του  $U_I$ , σε  $t = T - t_1$ , είναι 0 και η επίδραση του  $P$  και  $\partial \mathcal{E}$  μπορεί να εξαπλωθεί μόνο με τη μέγιστη χαρακτηριστική ταχύτητα  $C_f$ . Συνεπώς το  $U_I$  έχει την υποστήριξη στο  $|x| < \rho_1 + 2C_f t_1$  σε  $t = T + t_1$ . (Υπενθυμίζουμε ότι το  $\rho_1$  η υποστήριξη του  $B$  είναι μεγαλύτερη από εκείνη του  $P$  και  $\partial \mathcal{E}$ ). Για  $T$  αρκετά μεγάλο αυτό είναι σαφώς μικρότερο από  $\rho_2$ .

Απόδειξη της (iii). Προφανώς η ενέργεια του  $U_I$  οριοθετείται με κάποιο τρόπο από την ενέργεια που μεταφέρθηκε από το  $PU_0$  αλλά για να αποδειχθεί το (ii) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της μορφής απόκλισης (4) για το σύστημά μας.

$$E_I = E(\mathcal{E}, U_I, T + t_1).$$

Τότε

$$E_I \leq E(\mathcal{E} \cap \{|x| < \rho_2\}, U_I, T + t_1)$$

από (iii). Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τον ορισμό,  $U_I = U - U_0$  και την ανισότητα Schwarz, (7), (10), (11), και με μια ματιά στο σχήμα 2 βρίσκουμε

$$E_I < kE(\mathcal{E} \cap \{|x| < \rho_2\}, U, T + t_1) + kE(|x| < \rho_2, U_0, T - t_1).$$

Στη συνέχεια με το νόμο της διατήρησης της ενέργειας που εφαρμόζεται στον ταχύτερο καθυστερημένο κώνο,

$$E_I \leq kE(|x| < \rho_2 + 2C_f t_1, U, T - t_1).$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τα δεδομένα  $U = U_0$  στο  $\mathcal{E}$ ,  $U_0 = 0$  στο εσωτερικό του  $\partial\mathcal{E}$  για  $t = T$  όπου μπορέσαμε και εφαρμόσαμε επίσης την σχέση 7 που αφορά τις ενέργειες. Η  $k$  είναι μια σταθερά που σχετίζεται με τη  $k_1$  και  $k_2$ . Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα 2.

**3. Παραδείγματα για την εκθετική διάσπαση.** Καταλήγουμε στο συμπέρασμα, χρησιμοποιώντας τις περιπτώσεις όπου έχουμε την αρχή του Huyghen και τον ρυθμό διάσπασης, ότι η ενέργεια σε μια πεπερασμένη περιοχή διάσπασης εκθετικά για :



(1) Το πρόβλημα για την κυματική εξίσωση στο εξωτερικό ενός αστεροειδούς φορέα<sup>1</sup> (βλ. Morawetz το 1966) ή για μια σχετιζόμενη γενική μέθοδος της απόδειξης ότι γεωμετρικά δεν είναι τόσο απλό, βλ. Lax, Morawetz και Phillips το 1963) .

(2) Η κυματική εξίσωση με ορισμένα μη γραμμικά δυναμικά (βλέπε Strauss το 1973) .

(3) Οι εξισώσεις του Maxwell για έναν τέλειο αγωγό (βλέπε Κεφ. 2, § 2). Στο κεφάλαιο 5, συζητάμε για την απόδειξη χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier στο χρόνο. Τα παραδείγματα είναι ουσιαστικά τα ίδια εκτός από το ότι η μέθοδος λειτουργεί επίσης για τα Neumann πρόβλημα για τα κυρτά σώματα.

---

<sup>1</sup> Τα καλύτερα οργανικά σχήματα που έχουν συγκεντρωθεί μέχρι σήμερα έχουν αποδοθεί στον Strauss (1975) ή στον Morawetz (1975).

## 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Διασπορά για την κυματική εξίσωση από ένα εμπόδιο

Ας εξετάσουμε την τρισδιάστατη δίχως διασπορά κυματική εξίσωση  $\square U = 0$ . Θέλουμε να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα διασποράς με διαφορετικούς τρόπους. Μεγάλο μέρος αυτής της περιγραφής μπορούν να μεταφερθούν σε συστήματα δίχως διασπορά με ίσες και αντίθετα ζεύγη των χαρακτηριστικών ταχυτήτων, λόγω της συμπεριφοράς κατά μήκος των χαρακτηριστικών ακτινών που περιγράφεται στο κεφάλαιο 2, § 8.

**1. Σφαιρικά συμμετρική περίπτωση.** Στην πραγματικότητα, πρώτα πρέπει να εξετάσουμε το πολύ απλό πρόβλημα μιας σφαιρικά συμμετρικής λύσης της κυματικής εξίσωσης στον ελεύθερο χώρο. Σε αυτήν την περίπτωση, γράφοντας  $rU = W_0$ , έχουμε στον ελεύθερο χώρο:

$$W_{0tt} - W_{0rr} = 0,$$

$$W_0 = 0 \quad \text{for} \quad r = 0$$

Συνεπώς

$$W_0 = f(t + r) - f(t - r).$$

Υποθέτουμε ότι ρωτάμε τι σήμα μπορεί να προγεδιαγράφεται για μεγάλες αρνητικές φορές. Το απλούστερο είναι να προγεδιαγράφεται το  $W_0$  σε μεγάλες αρνητικές τιμές στο χαρακτηριστικό  $t - r = \text{Const.}$  Για να υπάρχει νόημα τότε ο πρώτος όρος  $f(t + r) \sim f(2t)$  ως  $t \rightarrow +\infty$  πρέπει να εκμηδενίζεται. Έτσι υποθέτουμε ότι το  $f$  είναι προγεδιαγραμμένο σαν το όριο των σύνθετων λειτουργιών υποστήριξης στο  $t - r = -\infty$ . Έτσι έχουμε

$$W_0 \sim f(t + r) \quad \text{as} \quad t + r \rightarrow -\infty, \quad t - r = \text{const.}$$

και  $f(s)$  είναι τα προδιαγεγραμμένα στοιχεία.

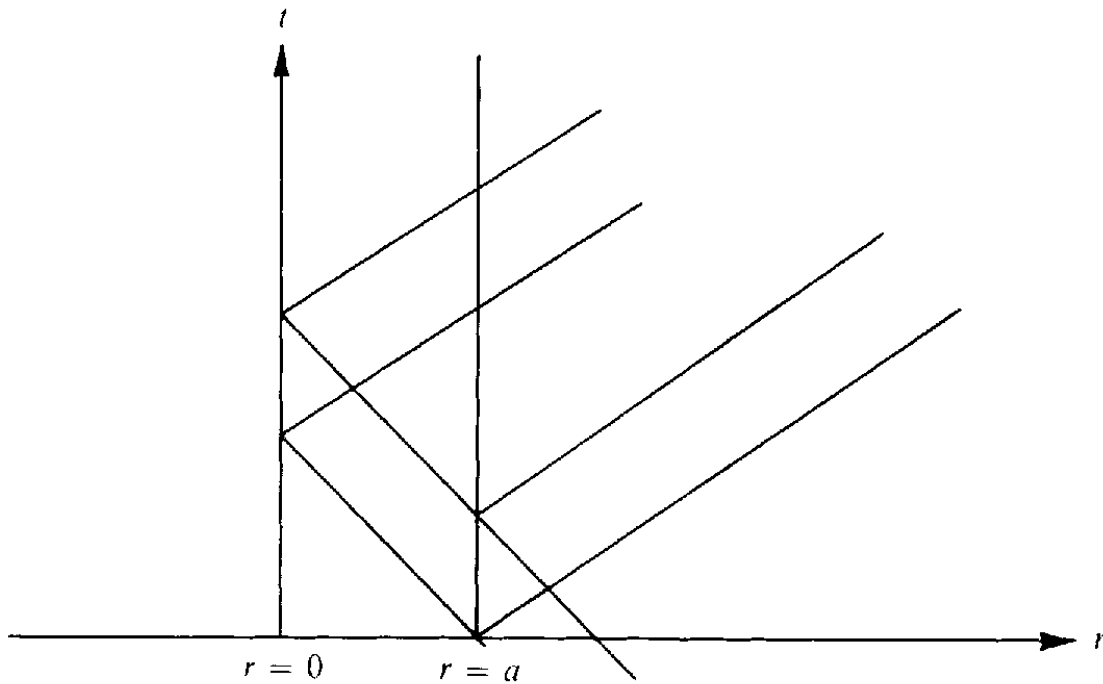
Υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα εμπόδιο, μια σφαίρα ακτίνας  $a$  στο οποίο το  $W = 0$  και χαρακτηρίζει τη λύση με το  $W_a$ . Στη συνέχεια εάν το  $W_a$  έχει την ίδια συμπεριφορά σαν το  $W_0$  για  $t = -\infty$ ,

$$W_a = f(t + r) - f(t - r + 2a).$$

Για τις μεγάλες θετικές τιμές παρατηρούμε

$$W_0 \sim -f(t - r),$$

$$W_a \sim -f(t - r + 2a).$$



Σχήμα 1

Με άλλα λόγια, έχουμε μετατόπιση (όπου δεν προκαλεί έκπληξη στη θέα του σχήματος 1). Ως εκ τούτου, στην ορολογία της πρώτης διάλεξης

$$\sigma = f(t + r) = f(\xi),$$

ας πούμε,

$$U_0 \sigma = f(t + r) - f(t - r),$$

$$U \sigma = f(t + r) - f(t - r + 2a).$$

Ο παρατηρητής βλέπει

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} U\sigma &= -f(t - r + 2a) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} U_0\sigma_p, \end{aligned}$$

Όπου

$$\sigma_p = f(t + r + 2a) = f(\xi + 2a).$$

Ο τελεστής  $S_\alpha$  ο οποίος λαμβάνει  $\sigma_p$  μέσα στο  $\sigma$  είναι η μετατόπιση του ορίσματος κατά  $-2a$ .

Η επιλογή των προσδιορισμένων δεδομένων οπουδήποτε είτε για λύση και σχεδίαση, η μέσα σε άλλες προσδιοριζόμενες λειτουργίες οι οποίες ονομάζονται και ως λειτουργίες διασποράς. Έχουμε εξετάσει τη σχεδίαση από το χαρακτηριστικό  $t - r = -\infty$ , για  $t + r = +\infty$  via the perturbed λύση και στη συνέχεια πίσω στη λύση ελεύθερου χώρου στο χαρακτηριστικό  $t - r = -\infty$ .

Η κατάσταση στα δεδομένα σε αυτό το χαρακτηριστικό στο  $-\infty$  μπορούν να διαμορφωθούν ως δήλωση ότι  $W_0$  πρέπει να είναι ένα εισερχόμενο κύμα για  $t - \infty$ , δηλαδή  $W_{or} - W_{or} \rightarrow -\infty$  και αυτό που ακολουθεί τότε είναι

$$W_{at} + W_{ar} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \rightarrow +\infty,$$

η οποία ανταποκρίνεται στην εντολή ότι  $W_a$  είναι εξερχόμενη ως  $t \rightarrow \infty$ . Ορίζουμε τον τελεστή διασποράς στη συνέχεια

$$SW_0 = W_a;$$

ως  $S$  αντίστοιχη επίλυση της κυματικής εξίσωσης στον ελεύθερο χώρο μέσα στην επίλυση της κυματικής εξίσωσης στον ελεύθερο χώρο για μεγάλες τιμές (όπως επίσης και στο εξωτερικό του σώματος).

Αλλά μπορεί να εκπροσωπείται από  $\mathfrak{S}$  όπου  $\mathfrak{S}$  είναι ο τελεστής μετατόπισης που αντιστοιχεί τα απλά δεδομένα  $f(t+r)$  ή  $\sigma$  στους χαρακτηριστικούς κώνους  $-\infty$  στο  $f(t+r+2a)$  ή  $\sigma_p$ .  
 Ενέργεια. Από τη στιγμή που περιοριζόμαστε παντού σε λύσεις της πεπερασμένης ενέργειας αυτό σημαίνει ότι

$$\int_0^x (|\nabla W_0|^2 + |W_{0t}|^2) dr$$

ανά πάσα στιγμή είναι πεπερασμένη ή χρησιμοποιώντας την διατήρηση της ενέργειας πάνω από την περιοχή που οριοθετείται από μια χαρακτηριστική  $r-t = \text{const.}$ ,  $r=0$ ,  $t = \text{const.}$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\sigma)|^2 d\sigma$$

οριοθετείται. Σημειώστε ότι αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία ισομετρική απεικόνιση από μια χαρακτηριστική επιφάνεια στην άλλη. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι έχουμε εισαγάγει το μετασχηματισμό Fourier ως προς το χρόνο:

$$\begin{aligned} \hat{W}_0(\lambda, r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} [f(t+r) - f(t-r)] dt \\ &= e^{-i\lambda r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t+r)} f(t+r) d(t+r) \\ &\quad - e^{i\lambda r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-r)} f(t-r) d(t-r) \\ &= e^{-i\lambda r} \hat{f}(\lambda) - e^{i\lambda r} \hat{f}(\lambda), \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\hat{W}_a(\lambda, r) &= e^{-i\lambda r} \hat{f}(\lambda) - e^{i\lambda r} (\hat{f}(\lambda) e^{-2i\lambda a}), \\ e^{2i\lambda a} \hat{W}_a(\lambda r) &= e^{-i\lambda r} \hat{f}(\lambda) e^{2i\lambda a} - e^{i\lambda r} \hat{f}(\lambda).\end{aligned}$$

Οι πρώτοι όροι είναι το εισερχόμενο μέρος, και οι δεύτεροι όροι το εξερχόμενο μέρος.

Ο τελεστής  $\hat{S}$  είναι ο τελεστής που αντιστοιχεί το εισερχόμενο μέρος  $e^{-i\lambda r} \hat{f}(\lambda)$  μιας ελεύθερης επίλυσης του  $\bar{W}_0$  πάνω στο εισερχόμενο τμήμα μιας διαταραγμένης επίλυσης  $\bar{W}_a$  κατά τέτοιο τρόπο όπου τα εξερχόμενα μέρη είναι τα ίδια. Έτσι το  $\hat{S}$  είναι απλά ο πολλαπλασιασμός με το  $e^{+2i\lambda a}$  το οποίο είναι φυσικά. Ο μετασχηματισμός Fourier του τελεστή που μετατοπίζει το εισερχόμενο μέρος του  $W_0$  στο εισερχόμενο μέρος του  $W_a$ . Επιπλέον, το  $\bar{W}_0$  και το  $\bar{W}_a$  είναι λύσεις της μειωμένης κυματικής εξίσωσης. Τα εξερχόμενα και τα εισερχόμενα μέρη καθορίζονται από την κατάσταση της ακτινοβολίας του Sommerfeld ή ίσως θα πρέπει να θέσει τον άλλο τρόπο σαν επιλογή. Η συμπεριφορά για μεγάλα  $r$  καθορίζει την επίλυση. Ως εκ τούτου, η διασπορά μπορεί να περιγραφεί σε αυτούς τους όρους πάλι με πολλαπλασιασμό του  $e^{+2i\lambda a}$ .

Ποιο είναι το λάθος με αυτό το μοντέλο; Η αρχή Huyghen ισχύει για το διαταραγμένο μοντέλο όπως και το μη διαταραγμένο το οποίο είναι πάρα πολύ για να περιμένουμε γενικώς και γι 'αυτό θα πρέπει να το εξετάσουμε πιο εκτενές στο δισδιάστατο και τρισδιάστατο μοντέλο. Ωστόσο, με το τρισδιάστατο μοντέλο που μπορούμε να το εκμεταλλευτούμε όταν έχουμε την εκθετική διάσπαση και έτσι θα στραφούμε τώρα σε αυτό το πρόβλημα.

**2. Δομή της τρισδιάστατης διασποράς από ένα αντανακλώμενο σώμα.** Από το θεώρημα του Friedlander το 1964, επεκτείνοντας

κάποιος μέρος από την εργασία του Karp το 1961, έχουμε: Εάν  $U_0$  είναι μια λύση ενός ελεύθερου πεδίου

$$U_{0tt} - \Delta U_0 = 0$$

Ικανοποιούν

$$\left. \begin{array}{l} U_0 = \phi \\ U_{0t} = \psi \end{array} \right\} \text{ for } t = 0,$$

Όπου  $\phi, \psi$  είναι η σύνθετη υποστήριξη, τότε η ασυμπτωτική συμπεριφορά των  $U_0$  για  $t - r \rightarrow -\infty$ , δίνεται από

$$U_0 \sim \frac{f(t + r, \Omega)}{r},$$

όπου το  $\Omega$  αντιπροσωπεύει τις γωνιακές μεταβλητές. Για  $t + r \rightarrow +\infty$ ,

$$U_0 \sim \frac{g(t - r, \Omega)}{r}.$$

Η μέθοδος της μονοδιάστατης περίπτωση μας μεταφέρει. Μπορούμε να θεωρήσουμε την αντιστοίχιση του  $f \rightarrow g$  με τον ακόλουθο τρόπο. Πάρτε τα Goursat δεδομένα  $f$  σε έναν "χαρακτηριστικό κώνο στο  $+\infty$ ", λύση για  $U_0$ . Η οριακή τιμή του  $U_0$  σχετικά με τον "χαρακτηριστικό κώνο στο  $+\infty$ " είναι το  $g$ . Ο ρόλος του σήματος είναι έτσι όπως παίζεται από το  $f$  και μπορούμε να το γράψουμε χωρίς σύγκυση με την επαναχρησιμοποίηση του  $U_0$  ως τον τελεστή δεδομένων κατά  $-\infty$ .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U_0 f = g.$$

Παρόμοια συμπεριφορά κατέχετε στην παρουσία μίας διαταραχής (στην περίπτωση μας ένα αντανακλώμενο σώμα). ενεργοποιώντας στο σήμα  $f$  να είναι και  $Uf = g$ , έτσι ώστε  $\lim_{t \rightarrow \infty} Uf = \lim_{t \rightarrow \infty} U_0 f_p$  για κάποιο  $f_p$ .  $U_0 f_p$  είναι μια λύση ελευθέρου χώρου που έχει παραχθεί από τη λύση ελευθέρου πεδίου  $U_0 f$  έτσι ώστε ο τελεστής διασποράς  $S$  να δίνεται από

$$SU_0 f = U_0 f_p.$$

Θέλουμε επίσης να εξετάσουμε τον τελεστή  $U_0^{-1} = U_0(-t)$ , δηλαδή την επίλυση λειτουργίας καθυστερημένη στο χρόνο. Θα λειτουργήσει σε δεδομένα σε ένα φωτεινό κώνο στο  $+\infty$ . Έτσι

$$f_p = \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t) \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)f$$

έτσι γράφοντας  $f$  ως  $\lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t) U_0(t)f$ ,

$$SU_0 f = U_0 \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t) \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)f = U_0 \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t) \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t)U_0(t)f,$$

Έχουμε

$$S = U_0 \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t) \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t).$$

Επιχειρώντας στα δεδομένα  $f$  για να αποκτήσουμε τα δεδομένα  $f_p$  έχουμε

$$\tilde{S} = \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t) \lim_{t \rightarrow \infty} U(t).$$

Όλα τα αντίστροφα μπορούν να ληφθούν όσο είμαστε στο χώρο των δεδομένων των πεπερασμένων ενεργειών που σημαίνει:

Το  $U_0 f$  έχει πεπερασμένη πηγή ενέργειας ή χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της ενέργειας σε ένα καθυστερημένο κώνο και σπρώχνοντας το πίσω αφήνοντας  $t - r \rightarrow -\infty$ ,



$$\int (2|f_s|^2 + |\nabla_{\Omega} f|^2) d\Omega ds = E(U_0 f) = E(Uf),$$

όπου  $f = f(s, \Omega)$  και το  $\Omega$  αντιπροσωπεύει τη γωνία και το  $\nabla_{\Omega}$  την εφαπτομένη του σε μια μεγάλη σφαίρα. Επιπλέον, από την διατήρηση της ενέργειας μεταξύ των δύο κώνων  $r - t = \text{const.}$  και  $r + t = \text{const.}$

Έχουμε

$$\begin{aligned} & \int 2|(Uf)_s|^2 + |\nabla_{\Omega}(Uf)|^2 ds d\Omega \\ &= \int (2|f_s|^2 + |\nabla_{\Omega} f|^2) ds d\Omega = E(Uf) = E(U_0 f). \end{aligned}$$

Έτσι η αντιστοίχιση είναι μια ισομετρία.

Θα πρέπει να σημειωθεί το εξής γεγονός:

Αν το  $f$  έχει σύνθετη υποστήριξη τότε το  $U_0 f$  έχει σύνθετη υποστήριξη, ακτίνας  $d$ , σε  $t = 0$ .

Συνεπώς από την αρχή Huyghen

$$U_0 f \equiv 0 \quad \text{for} \quad t - |x| > d.$$

**3. Μετασχηματισμός Fourier.** Όσο το πρόβλημα διαταραχής της επιλύσεως  $U_0$  ή  $U$  διάσπαση τοπικά και οι μετασχηματισμοί Fourier των  $U_0$  και  $U$  στο χρόνο υπάρχουν στην ανίχνευση κατανομής και ως εκ τούτου, δεδομένου ότι ικανοποιούν τη μειωμένη κυματική εξίσωση που είναι ελλειπτική, είναι υπαρκτές στην ισχυρή ανίχνευση.

Ικανοποιούν την οριακή κατάσταση και μπορούν να γραφτούν ως

$$u_0 = u_{0O} + u_{0I},$$

$$u = u_O + u_I,$$

όπου 0 και I στέκονται για εξερχόμενες και εισερχόμενες, στις οποίες από την αρχή του Sommerfeld κατάσταση ακτινοβολίας, σημαίνει

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r u_{0I} e^{-i\lambda r} = \hat{f}(\lambda, \Omega),$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r u_{0O} e^{i\lambda r} = -\hat{g}_0(\lambda, \Omega)$$

αλλά μπορούμε εύκολα να δούμε από το ίδιο επιχείρημα όπως και στην σφαιρική περίπτωση,

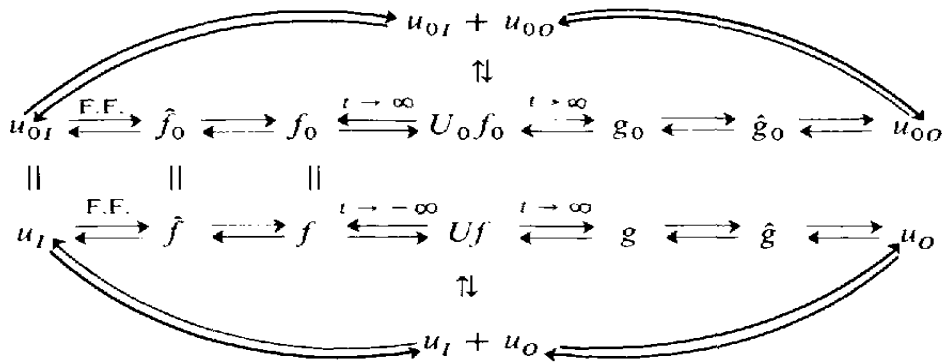
$$\hat{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda s} f(s, \Omega) ds d\Omega,$$

$$\hat{g}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda s} (U_0 f)(s, \Omega) ds d\Omega.$$

Από την ταυτότητα Parseval χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της ενέργειας στους κώνους έχουμε

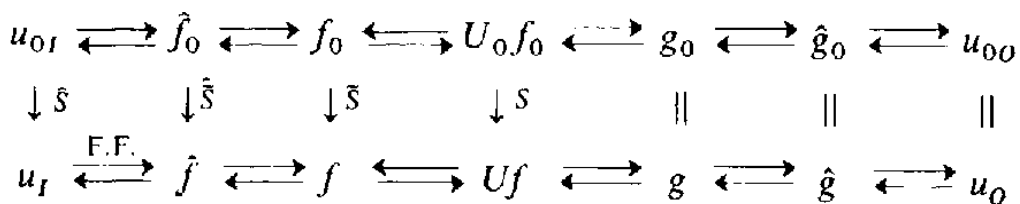
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda^2 |\hat{g}_0|^2 + |\nabla_{\Omega} \hat{g}_0|^2) d\lambda d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda^2 |\hat{f}|^2 + |\nabla_{\Omega} \hat{f}|^2) d\lambda d\Omega.$$

Ο τελεστής  $\tilde{S}$  και ο  $S$  που ενήργησαν στα δεδομένα των λύσεων επηρέασαν τους τελεστές  $\tilde{S}$  και  $\tilde{S}$  στο μετασχηματισμό Fourier και, αν τα δεδομένα στο  $-\infty$  δίνονται, καταλήγουμε στο σχήμα 2, όπου οι αντιστοιχίσεις μπορούν όλες να ερμηνευθούν ως ισομετρίες των κατάλληλων χώρων του Hilbert.



Σχήμα 2

Το F.F. αντιστοιχεί στο πεδίο επέκτασης. Σταχυολογώντας το  $I$  η το  $O$  σημαίνουν τα συστατικά με το δικαίωμα εξερχόμενης ή εισερχόμενης ιδιότητας. Το αμαρκάριστο βέλος υποδεικνύει το μετασχηματισμό Fourier. Το κυκλικό βέλος μας δείχνει τη διάσπαση.



Σχήμα 3

Η διασπορά εμφανίζεται όταν εντοπίζουμε το αποτέλεσμα δηλαδή,  $g_0 = g$ , κλπ. (όπως το σχήμα 3). Είναι προφανές ότι αν θέλουμε να μάθουμε περισσότερα για το  $S$  πρέπει να μελετήσουμε το  $\tilde{S}$ . Αλλά έχουμε μία ακόμη ταύτιση που έχει δοθεί από το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα.

$$u_I = \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} Uf dt,$$

$$u_O = \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} Uf dt.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r e^{-i\lambda r} \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} Uf dt &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{i\lambda(t-r)} g(t-r, \Omega) dt \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{\infty} e^{i\lambda s} g(s, \Omega) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} g(s, \Omega) ds = \hat{g}. \end{aligned}$$

Από τότε που το  $g$  καθορίζει το  $u_o$ , μοναδικά, το λήμμα ακολουθεί για  $f$  λείο και σύνθετη υποστήριξη και συνεπώς στο όριο για άλλα  $f$ . Πόσο από αυτή τη θεωρία διασποράς εμπλέκεται και σε άλλες περιπτώσεις; Σίγουρα κανένα στη μη γραμμική θεωρία της διασποράς (βλέπε Κεφ. 8). Αλλά ένα μεγάλο μέρος των προβλημάτων όπου έχουν διαταραχές στην κυματική εξίσωση Maxwell. Δεδομένου ότι τυχόν ιδιότητες της μειωμένης κυματικής εξίσωση είναι ιδιότητες των εξισώσεων Schrodinger, υπάρχουν επίσης ερμηνείες της σκέδασης στους αυτής της εξίσωσης, ιδίως σημαντικά όχι για τους αντανακλώμενους φορείς αλλά για τις δυνατότητες.

**3. Η συμπεριφορά του  $\bar{S}$  για πολύπλοκα  $\lambda$  και η διάσπαση των επιλύσεων.** Σημειώνουμε ότι το  $u_o$  και το  $u_I$  είναι επιλύσεις της μειωμένης κυματικής εξίσωση με ένα ανομοιογενές όρο. Αυτός ο όρος

είναι μια αυθαίρετη λειτουργία, δεδομένου ότι φαίνεται εύκολα ότι αντιστοιχεί με τα αρχικά δεδομένα. Επιπλέον, από το προηγούμενο λήμμα,  $u_1$  και  $u_2$  ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες.

Υποθέτουμε τώρα ότι το  $U$  φθίνει εκθετικά. Μετά από το λήμμα έχουμε

$$|u_0| \leq \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} e^{-\beta t} M dt$$

$$\leq \frac{M}{\text{Im } \lambda - \beta}.$$

Συνεπώς το  $u_0$  μπορεί να συνεχιστεί αναλυτικά στη γραμμή  $0 < \text{Im } \lambda < \beta$ .

Μελετώντας το  $\tilde{S}$  για  $\text{Im } \lambda > 0$  θα πρέπει να αποφασίσουμε σχετικά με την αναλυτική συνέχιση του  $u_{01}$  ή από την αλυσίδα μας όπως στο σχήμα 3, του  $u_0$ . Στην περίπτωση της εκθετικής διάσπασης έχουμε δει ότι μπορούμε να συνεχίσουμε σε μια διαδρομή. Σε γενικές διαδρομές, γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχουν πόλοι ή σημεία συσσώρευσης στον πραγματικό άξονα διότι διαφορετικά το θεώρημα μοναδικότητας Rellich θα έπρεπε να παραβιαστεί. Ο απλούστερος τρόπος για να συνεχίσουμε το  $\tilde{S}$  αναλυτικά είναι να συνεχιστεί το  $u_0$  αναλυτικά. Αλλά θα πρέπει να καθορίσουμε τη συνέχιση την κατάσταση ακτινοβολίας του Sommerfeld. Ζητούμε, όπως επισημαίνεται στο Lax και Phillips (1967), ότι το  $u$  είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των εξερχόμενων θεμελιωδων επιλύσεων.  $u$  είναι μια εξερχόμενη επίλυση αν

$$(1) \quad u = \int_{R^N} \frac{e^{-i\lambda\rho}}{\rho} h(y, \lambda) dy, \quad \rho = |x - y|$$

για κάποιο  $h$ . Η συνάρτηση  $h$  πρέπει να βρίσκεται σε κάποιο κατάλληλο χώρο για να γίνει το επιχείρημα, διεργασία. Μια παρόμοια ταυτότητα κατέχετε σε δύο διαστάσεις.

Αυτή είναι αλήθεια εάν το  $u$  ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld για το πραγματικό  $\lambda$ .

Συνεπάγεται ότι

$$(2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-i\lambda\rho}}{\rho} \cdot u - \frac{e^{-i\lambda\rho}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial r} \right] r^2 d\Omega = 0.$$

Για,  $e^{i\lambda\rho}/\rho$  ικανοποιεί

$$\Delta v + \lambda^2 v = \delta(y)$$

και εάν το  $u$  ικανοποιεί την (1)  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\Delta u + \lambda^2 u = h(y, \lambda)$$

για κάποια  $h$ .

Ολοκλήρωση μέσα σε μια μεγάλη σφαίρα, η έκφραση  $u\Delta u - u\Delta u$ , παίρνουμε την (1) μόνο εάν η (2) είναι κάτοχος.

Έτσι η (1) συνεπάγεται με τη (2).

Εάν η (2) διατηρείται, από την αντίθετη άποψη λαμβάνονται

$$u = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{i\lambda\rho}}{\rho} (\Delta u + \lambda^2 u) dy$$

η οποία είναι η (1).

Υπάρχουν ωστόσο άλλες ισοδύναμες συνθήκες. Αν πάρουμε σαν αρχικά δεδομένα για μια εξίσωση ελεύθερου χώρου

$$U_0 = u \quad \text{and} \quad U_{0t} = i\lambda u \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{E}$$

και συνεχίζει ομαλά μέσα σε όλα τα  $\mathbb{R}^3$ , έπειτα το  $u$  είναι εξερχόμενη εάν και μόνο εάν

(3)  $U_0 = 0$  για  $\chi, t$  τέτοια ώστε ο καθυστερημένος κώνος δεν τέμνει το κυρτό κάλλυμα του  $\partial\mathcal{E}$ .

Σημείωση. Τέτοιες εξισώσεις ελεύθερων πεδίων ονομάζεται επίσης εξερχόμενες. Μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Riemann και τη σφαιρική έννοια ότι η (3) ακολουθείται από την (2).

Για να λάβουμε την (1) από την (3) αναπαριστάμε την εξίσωση χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Riemann και παρατηρούμε ότι η (3) εξίσωση δεν μπορεί να κρατήσει εκτός της (2) και ως εκ τούτου και της (1) που κατέχει.

**5. Μια ανισότητα για τα εξερχόμενα κύματα.** Έχουμε λάβει σήμερα ακόμα μια άλλη απαραίτητη προϋπόθεση για το πώς ένα κύμα να είναι εξερχόμενο στο  $\mathbb{R}^3$  (βλέπε Morawetz 1972). Αυτό είναι ένα εύχρηστο όπλο, όπως είναι στη μορφή μιας ανισότητας που τη καθιστά δυνατή να συνενωθεί με άλλες εκτιμήσεις.

**Θεώρημα.** Εάν  $u e^{i\lambda(t-r)}$  είναι μια εξερχόμενη επίλυση των  $\square U = 0$  στο διάστημα  $[0, \infty]$  για  $t \geq 0$ , τότε

$$\int_{\mathcal{E}} \frac{1}{r} |(rv)_r|^2 |dx| \leq \frac{3}{2} d \int_{\mathcal{E}} |\nabla v|^2 |dx|,$$

όπου  $d$  είναι η υποστήριξη του  $\partial\mathcal{E}$ .

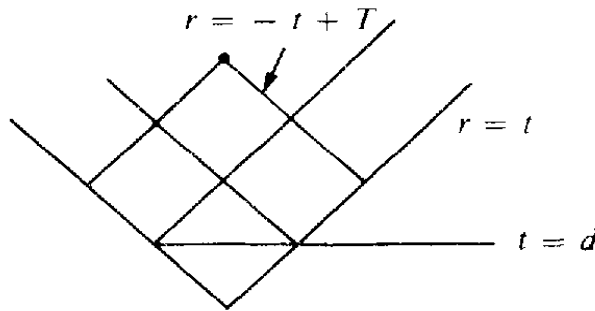
Θα σκιαγραφηθεί η απόδειξη: Χρησιμοποιούμε ένα νόμο διατήρησης λόγω Protter που μπορεί να απορρέει από το νόμο διατήρησης Lax και Phillips το 1967, σελ. 262 (8), σημειώνοντας ότι η κυματική εξίσωση

είναι αναλλοίωτη υπό την μετάφραση στην  $t$ . Ο νόμος έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\operatorname{div} p + q_t = 0,$$

όπου, με  $U_0$  ελευθέρου πεδίου εξίσωσης,

$$\begin{aligned} p &= -U_{0t}^2 x - 2(x \cdot \nabla U_0) \nabla U_0 + |\nabla U_0|^2 x \\ &\quad - 2t U_{0t} \nabla U_0 - 2U_0 \nabla U_0 - (r^{-2} t U_0^2)_t x, \\ q &= 2(x \cdot \nabla U_0) U_{0t} + 2t(|\nabla U_0|^2 + U_{0t}^2) + 2U_0 U_{0t} \\ &\quad + 2r^{-2} t (U_0 \nabla U_0 \cdot x + \frac{1}{2} U_0^2). \end{aligned}$$



Σχήμα 4

Αυτό ερμηνεύεται πάνω από την οριοθετημένη περιοχή από  $t = d$ ,  $r = t$ ,  $r = -t + T$  (βλ. Σχήμα 4). Αυτό δίνει μια εκτίμηση της ολοκλήρωσης

$$\int_{r=t} [(t+r)|U_{0t} + U_{0r}|^2 + 2 \operatorname{Re} U_0 (U_{0t} + U_{0r}) + \text{positive}] d\sigma$$

κατά μήκος του χαρακτηριστικού κώνου  $r = t$  στους όρους από το ολοκλήρωμα

$$(t-r)|U_{0t} - U_{0r}|^2 + 2 \operatorname{Re} \bar{U}_0 (U_{0t} - U_{0r})$$



Πάνω στον καθυστερημένο κώνο  $r = t + T$ . Αλλά  $U_0 \neq 0$  μόνο σε ένα πεπερασμένο μέρος αυτού του κώνου κατά συνθήκη (3), δεδομένου ότι είναι εξερχόμενοι όροι και ότι αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να εκτιμηθεί στους όρους της ενέργειας που διασχίζουν τον κώνο  $r = t$ . Αλλά για  $r = t$ ,  $U_0 = u$  και  $U_{0t} + U_{0r} = u_r$  έτσι

$$\int_{r \geq d} (2r|v_r|^2 + 2 \operatorname{Re} \bar{v}v_r)r^2 dr d\Omega$$

είναι οριοθετημένο από τη συνολική ενέργεια της εξίσωσης διασχίζοντας τη σφαίρα  $r = t$  και στο εσωτερικό αυτό σε  $t = d$ .

Ουσιαστικά αυτό είναι  $\int |\nabla u|^2 dx$ . Χρησιμοποιούμε

$$\begin{aligned} |v_r|^2 + \operatorname{Re} \bar{v}v_r &= \left( \frac{1}{r} |(rv)_r|^2 - \operatorname{Re} \bar{v}v_r - \frac{1}{r} |v|^2 \right) \\ &= \left( \frac{1}{r} |(rv)_r|^2 - 2r^2 \operatorname{Re} (r\bar{v})(rv)_r + \frac{1}{r} |v|^2 \right) \end{aligned}$$

και παρατηρούμε ότι  $v \rightarrow 0$  όπως  $1/r$ . Με την ολοκλήρωση και τη χρήση της οριακή συνθήκης  $u = 0$  στο  $\partial E$  βρίσκουμε

$$\int_{r \geq d} \frac{1}{r} |(rv)_r|^2 dx$$

Είναι οριοθετημένο από τη σταθερά  $\int |\nabla u|^2 dx$ .

Υπάρχει ένα δίκαιο περιθώριο εκτιμήσεως σε αυτή την κατάσταση και θα μπορούσε να τροποποιηθεί σημαντικά προκειμένου να το χρησιμοποιηθεί. Για παράδειγμα, μπορεί να αποκτηθεί

$$\int_{\mathcal{E}} \frac{1}{r^2} |(rv)_r|^2 |dx| \leq \text{const.} \int_{\mathcal{E}} \frac{1}{r} |\nabla v|^2 |dx|.$$

Αλλά δεν λειτουργεί σε δύο διαστάσεις.

Παρατήρηση αυτή η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί γενικά. Για παράδειγμα, σε οποιοδήποτε νόμο διατήρησης που βγαίνει από την ενέργεια από την αμεταβλητότητα του ολοκληρώματος σε ένα πεδίο που μοιάζει με καμπύλη είναι οριστικό θετικό. Το ολοκλήρωμα σε μια χαρακτηριστική επιφάνεια είναι επίσης θετικά αριστικό αλλά πρέπει να περιέχει μόνο χαρακτηριστικά παράγωγα. Όταν εφαρμόζεται στο  $u e^{i\lambda t}$  <sup>-r)</sup> θα μας δώσει μια εκτίμηση για το  $u$  εάν το  $u$  είναι εξερχόμενο.

## 7<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

Η γενικευμένη αρχή Huyghen και η Γεωμετρική του Οπτική

**1. Φόντο.** Ξεκινάμε συνοψίζοντας ορισμένα από το φόντο.

Υποθέτουμε ότι το  $Y$  είναι μια επίλυση του

$$Y_l = A_k Y_k + B Y \quad \text{in } \mathcal{E},$$

$$Y = Y_0(x) \quad \text{for } t = 0$$

Ικανοποιώντας  $QY = 0$  στο  $\partial\mathcal{E}$ . Στη συνέχεια:

(1) Είναι το  $Y(t, x)$  ομαλότερο από το  $Y_0(x)$  για κάποιο χρονικό διάστημα και ορισμένα σημεία και αν ναι πώς μπορεί κάποιος να εκτιμήσει το χρόνο και την ομαλότητα για κάθε συγκεκριμένο  $x$ ;

(2) Εάν το  $Y_0(x)$  έχει ένα μοναδικό μέρος σε κάποιες χαμηλότερες διαστάσεις του  $\mathcal{E}$ , ειδικότερα αν το  $Y_0(x)$  είναι μια συνάρτηση Riemann, που αυτές οι ιδιομορφίες διαδίδονται;

Η εικασία της της γενικευμένης αρχής Huyghen είναι ότι στη δεύτερη περίπτωση όλες οι ιδιομορφίες διαδίδονται κατά μήκος των φακέλων των χαρακτηριστικών κώνων απορρέοντας από την υποστήριξη των ιδιομορφων δεδομένων και τις κατάλληλες αντανάκλασεις τους.

Στην περίπτωση της συνάρτησης του Riemann η απάντηση δίνεται αρκετά πλήρως για:

(1) Η κυματική εξίσωση και η οριακή συνθήκη Dirichlet σε κυρτά όρια σε δύο ή τρεις διαστάσεις ( Ludwig και Morawetz το 1969 και Phillips το 1969).

(2) Η κυματική εξίσωση και η κατάσταση Neumann σε δύο διαστάσεις (Μπάμπιτς το 1971, Γκρίμσο το 1966).

Η εικασία είναι:

ΕΙΚΑΣΙΑ. Η απεικόνιση της συνάρτησης Riemann  $R(t, 0, x, x_0)$ , η

$$R_t = (RA_k)_k - RB \quad \text{in } \mathcal{E},$$

οποία ικανοποιεί  $R = I\delta(x - x_0)$  for  $t = 0$ ,  $I$  μια διαγώνια μονάδα,

και

$$QR = 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{E},$$

είναι μοναδική μόνο από τις χαρακτηριστικές επιφάνειες απορρέοντας από το  $x_0$  και οι αντανάκλασεις τους δίνονται από την γεωμετρική οπτική από  $\partial\mathcal{E}$ , δηλαδή οπουδήποτε αλλού το  $R$  είναι  $C^\infty$ .

Οι χαρακτηριστικές επιφάνειες δίνονται από τις εξισώσεις του

$$\det(\chi_t - \chi_k A_k) = 0$$

με  $x = 0$  στο  $(x_0, 0)$  και οι αντανάκλασεις των επιφανειών αυτών πρέπει να πληρούν τις ίδιες διαφορικές εξισώσεις και μια αντίστοιχη γεωμετρική αρχή της αντανάκλασης. Αυτή η εικασία είναι πραγματικά για το τι πίστευε ο Huyghen ότι ήταν η περίπτωση. Ήταν ο Hadamard ο οποίος έθεσε το ερώτημα σχετικά με το κενό στη συνάρτηση Riemann το οποίο για τον πλήρη κενό είναι γνωστό ως η αρχή Huyghen. (Για μια μελέτη του πότε το κενό εμφανίστηκε το οποίο, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3, § 1, είναι σημαντική για την εκθετική διάσπαση, όπως ο Atiyah et al. το 1970). Υποθέτουμε τώρα ότι η εικασία όπως διατυπώθηκε παραπάνω είναι σωστή. Έχουμε

$$Y(t, x) = \int RY_0 dx_0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το  $R(t, 0, \chi, x_0)$  είναι  $C^\infty$  για  $x \in \mathcal{D}$ ,  $t > T$ . Αυτή θα είναι μια περίπτωση εάν μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός της αντανάκλασης λάβει μέρος. Στην περίπτωση αυτή,

$$Y(t, x) \subset C^\infty \quad \text{for } x \in \mathcal{D},$$

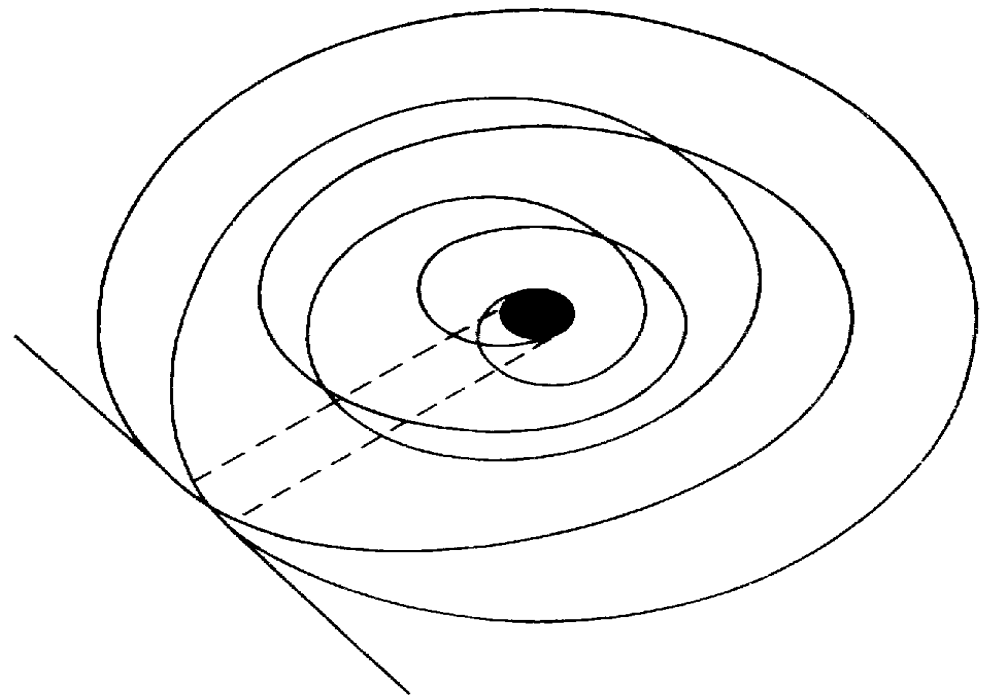
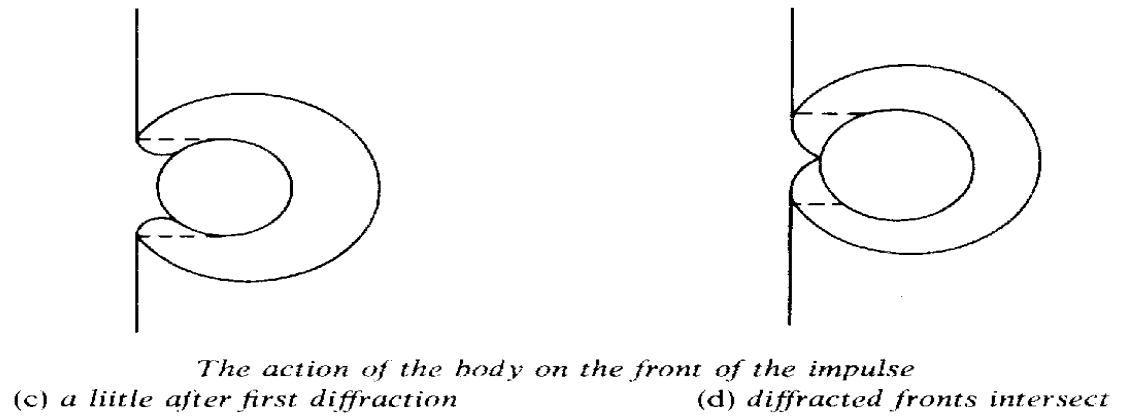
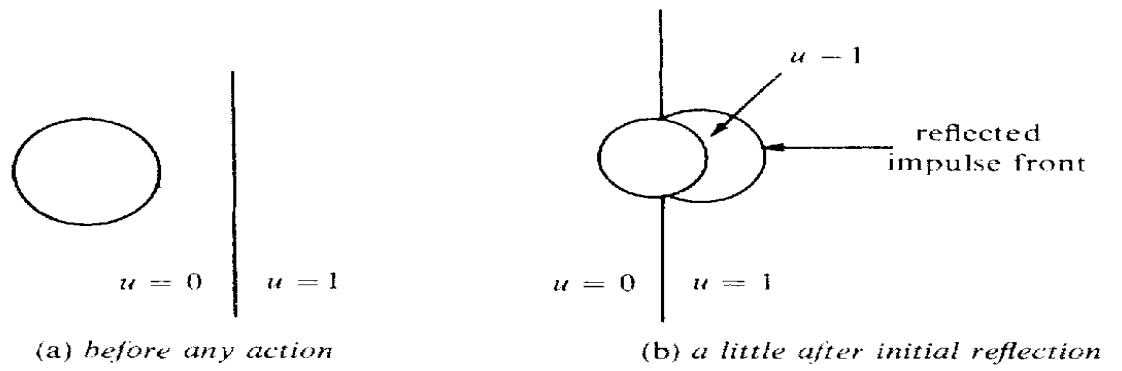
Στην πραγματικότητα, το  $Y$  είναι όσο ομαλό όσο το  $R$  για  $\chi \in \mathcal{D}$ ,  $t > T$ . Η τοπική ομαλότητα του  $Y$  συνεπάγεται, εάν κατασκευάζαμε ένα κατάλληλο πεδίο λειτουργίας, πολύ περισσότερο σχετικά με την συνάρτηση διασποράς από ό,τι θα έχουμε χρόνο να το εξερευνήσουμε. Για παράδειγμα στην περίπτωση της κυματικής εξίσωσης μπορούμε να επιτύχουμε το απαιτούμενο αποτέλεσμα του Lax και του Phillips (1967), μια ασυμπτωτική επέκταση για μια εξίσωση  $U$  της μορφής

$$U \sim \sum_{k=1}^{\infty} \exp(i\lambda_k t)$$

όπου  $\lambda_k$  είναι είδος της διάσπασης,  $u_k$  είναι εξερχόμενη επίλυση των μειωμένων εξισώσεων που εκμηδενίζονται στο  $\partial\Omega$ . Δεν θα ασχοληθούμε εδώ με την ανάπτυξη αυτής της πτυχής, αλλά αντ'αυτού θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε τη συνάρτηση Riemann για τον εαυτό της. Θέλουμε να αποφύγουμε τις δυσκολίες των πτυχώσεων στην ιδιόμορφη επιφάνεια στο ελεύθερο πεδίο του προβλήματος έτσι θα υποθέσουμε ότι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι σταθερές.

Στην πραγματικότητα, εάν κάποιος πιστεύει ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης Riemann είναι ένα εντελώς τοπικό πρόβλημα και ότι η περίπτωση του σταθερού συντελεστή περιγράφει τυπική συμπεριφορά. Αυτό θα είναι έτσι εάν θα έχουμε  $\mathbb{R}^N$ . Συνεπώς, είναι πιθανόν αλήθεια ότι θα αρκούσε να μελετηθεί η συμπεριφορά των αντανακλαστικών των ιδιόμορφων ανωμαλιών αποκλειστικά και μόνο σε μια γειτονιά από το σημείο των αντανακλάσεων. Εξάλλου, κάθε συγκεκριμένο σημείο στο όριο ρίχνει την ενέργεια μακριά από το φορέα, όπου γνωρίζουμε πώς οι ιδιομορφίες συμπεριφέρονται. Αυτό που χρειάζεται κάποιος είναι ένα είδος παγκόσμιας θεωρίας για την εξάλειψη της δυνατότητας από ορισμένες δευτερεύουσες ιδιομορφίες τρέχοντας γύρω από το σώμα και με αποτέλεσμα να κολλήσει σε αυτό. Στην πραγματικότητα, η ίδια η τοπική φύση είναι ένα μέρος της εικασίας του Huyghen. Αλλά ακόμα και αν έχουμε ομαλότητα, κοντά στο σώμα εξακολουθεί να υπάρχει κάποια παθολογία.

Ας φανταστούμε μια  $u$  ώθηση ενός αεροπλάνου πλησιάζοντας έναν κύλινδρο με αρχικά δεδομένα να επιλέγονται έτσι ώστε η ακολουθία μας να αντικατοπτρίζει το σχήμα 1. Περιγράφει την ακολουθία του χρόνου. Μερικές περαιτέρω εξηγήσεις δίνονται στην § 4. Οι γραμμές (εκτός για το σώμα) αντιπροσωπεύουν σημεία



Σχήμα 1

της μετάβασης, όπου η λύση δεν είναι σίγουρα αναλυτική. Μετά από ένα χρονικό διάστημα, μπορεί κάποιος να δει ότι η γεωμετρία είναι πολύ περίπλοκη και ότι ενώ η επίλυση μπορεί να είναι  $C_\infty$  σε μια περιοχή γύρω από το σώμα, δεν είναι αναλυτική, και είναι ακόμα χειρότερη, το μέτωπο μετάβασης είναι κατά κάποιο τρόπο όλο και πιο πυκνό. (Πριν από τις καμπύλες προς τα αριστερά η επίλυση είναι πανομοιότυπη με 0.)

**2. Ο μετασχηματισμός Fourier.** Δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, εάν υπάρχουν καλά θεωρήματα διάσπασης, στην μετάβαση από τη μελέτη  $R$  στη μελέτη του μετασχηματισμού Fourier, η τη συνάρτηση του Green. Αυτή είναι απεικόνιση επίλυσης  $\hat{R}$  του

$$\delta(x - x') + i\lambda \hat{R} = \hat{R}_k A_k + \hat{R} B \quad \text{in } \mathcal{E}.$$

Υπάρχει μια πηγή στο  $x = x'$  και το  $\delta$  είναι ένα κατάλληλος μαθηματικός πίνακας με  $\delta$  συναρτήσεις στο διαγώνιο. Επιπλέον,  $\hat{R}Q = 0$  στο  $\partial\mathcal{E}$  και το  $R$  ικανοποιούν την κατάλληλη εξερχόμενη κατάσταση ακτινοβολίας. Η συμπεριφορά της  $\hat{R}$  για μεγάλες  $\lambda$  καθορίζει την ομαλότητα του  $R$ :

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \hat{R} d\lambda = \frac{e^{-i\lambda t}}{it} \hat{R} \int_{-\infty}^{\infty} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Κάποια ιδέα για τις δυσκολίες της επίλυσης αυτού του προβλήματος προέρχεται από τη διερεύνηση της απλής περίπτωσης της υπόθεσης της κυματικής εξίσωσης στο εξωτερικό του κυλίνδρου τον οποίο θα εξετάσουμε έπειτα. Δεν περιγράφουμε το έργο των δύο διαστάσεων του Grimshaw στο πρόβλημα του Neumann, το οποίο βασίστηκε στις μεθόδους του Ursell για τα κύματα του νερού, αλλά η προσέγγιση που

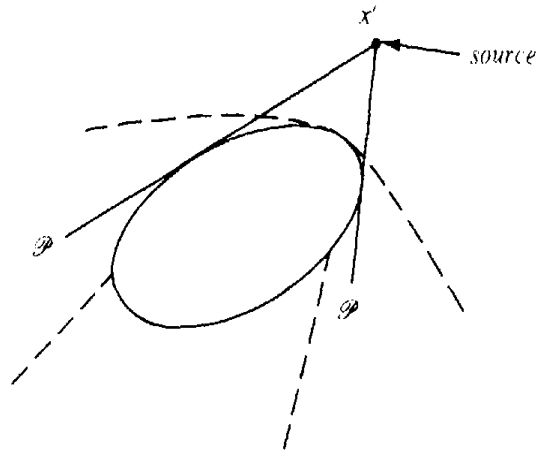
χρησιμοποιείται από τον Ludwig το 1967 που ακολούθησε το έργο του Keller και του Rubinow το 196, καθώς επίσης και το Nussenzweig το 1965 επί ενός κυκλικού κυλίνδρου. Πολυάριθμες ειδικές περιπτώσεις έχουν επεξεργαστεί, τα οποία οδήγησαν στη θεωρία του Keller της διάθλασης περιγράφοντας τα κύματα τα οποία κινούνται γύρω από το σώμα και το αντίστροφο Fourier το οποίο έχει απεικονισθεί στην προηγούμενη ενότητα.

Για πάνω από εκατό χρόνια κάποιος έχει μάθει πώς να περιγράψει γεωμετρικά τα οπτικά στην φλέγον περιοχή. Κάποιος προχωρά μεθοδικά ψάχνοντας για μια λύση της μορφής  $\tilde{R}_0 + e^{i\lambda x} (V_0 + \lambda^{-1} V_1 + \dots)$  με  $\tilde{R}_0$  η συνάρτηση Riemann του ελεύθερου πεδίου. Το υπόλοιπο είναι το ανακλώμενο κύμα. Οι καμπύλες εφαπτομένης στο  $\nabla \chi$  είναι οι ακτίνες. Στα σκοτεινά πεδία αυτή η επίλυση είναι τυπικά μηδέν. Η πλήρης επίδραση υπάρχει μόνο της εκθετικής τάξης και βρίσκεται μεθοδικά κατασκευάζοντας τις ακτίνες που είναι ευθείες γραμμές εφαπτόμενες στο σώμα και μεταφέρουν ένα προσεκτικά επιλεγμένο εύρος. Αυτό είναι το διάγραμμα διάθλασης του Keller. Αλλά η συμπεριφορά στην άκρη της φωτεινής - σκιάς έχει παραμείνει ένα πρόβλημα και στην πραγματικότητα οι λεπτομερείς του ιδιότητες εξακολουθούν να μην αποδυναμώνονται. Για να διορθώσετε τις ιδέες μας, ας εξετάσουμε τη λειτουργία της εξερχόμενης συνάρτησης Green για μια κυρτή αντανάκλαση σώματος  $\partial E$  όπως στο σχήμα 2 και της μειωμένης κυματικής εξίσωσης με την Dirichlet κατάσταση:

$$\begin{aligned} \Delta G + \lambda^2 G &= \delta(x - x') \quad \text{in } \mathcal{E}, \\ G &= 0 \quad \text{on } \partial \mathcal{E}, \quad x' \notin \partial \mathcal{E}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Δείτε επίσης τον Rauch και Taylor για γενικευμένα αποτελέσματα.





Σχήμα 2

(Δεν πιστεύω ότι υπάρχουν κάποια αποτελέσματα στα οποία  $x' \in \partial\Omega$ .)  
 Θα μπορούσαμε επίσης να εξετάσουμε μια πηγή στο  $\infty$  (μια στάθμη κύματος), αλλά αυτό οδηγεί σε άλλες δυσκολίες. Γράφουμε

$$G = G_0 + G_R,$$

Όπου

$$G_0 = \frac{e^{i\lambda|x-x'|}}{|x-x'|}.$$

Έπειτα το  $G_R$  είναι μια επίλυση του

$$\Delta G_R + \lambda^2 G_R = 0 \quad \text{in } \mathcal{O},$$

$$G_R = -\frac{e^{i\lambda|x-x'|}}{|x-x'|} \quad \text{on } \partial\mathcal{O}.$$

Η επίσημη ασυμπτωτική διεύρυνση για  $G_R$  είναι έπειτα το  $G_{GO} = e^{i\lambda\chi}[G_{RO} + (\lambda)G_1 + \dots]$  με  $|\nabla\chi|^2 = 1$ . Η φάση  $\chi$  είναι η απόσταση από το  $\chi'$  που μετράται κατά μήκος μιας γραμμής στο σώμα και πίσω στην αντανακλώμενη ακτίνα σε μία γωνία ίση με την κανονική. Πίσω από το σώμα έχουμε

$$G_{GO} = -G_0.$$

Αυτό μας ικανοποιεί τμηματικά ομαλά προς την επίλυση, αν πάρουμε έναν πεπερασμένο αριθμό όρων,

$$\Delta G_{GO} + \lambda^2 G_{GO} = M\lambda^{-N},$$

$$G_{GO} = -\frac{e^{i\lambda|x-x'|}}{|x-x'|} \text{ on } \partial\mathcal{G}'$$

και οι πρόσφατες εκτιμήσεις μας (βλέπε κεφ. 6, § 2) θα μας δώσει

$$G_R - G_{GO} = O(\lambda^{-N})$$

Εκτός του ότι το  $M$  είναι  $\infty$  στην κάθε αντανακλώμενη ακτίνα που χωρίζει τη σκιά και το φως. Μια ιδέα αυτής της δυνατότητας προκύπτει εάν παρατηρήσουμε ότι αυτά που έρχονται προς το σημείο αυτό, η ανακλώμενη ακτίνα πρέπει να ταλαντεύεται μέσα από μια ευρύτερη και πιο ευρύτερη γωνία. Στην πραγματικότητα, το  $M$  είναι πολύ περισσότερο μοναδιαίο όσο και  $N \rightarrow \infty$ . Έτσι ώστε να φαίνεται απίθανο ότι θα μπορούσε κανείς να δημιουργήσει την ισχύ των γεωμετρικών οπτικών οπουδήποτε χωρίς να γνωρίζει τη συμπεριφορά στο ημίφως, δηλαδή η γειτονιά των ανακλώμενων ακτινών. Έτσι είμαστε πάλι με ένα παγκόσμιο πρόβλημα.

Ας υποθέσουμε αντίθετα, ότι έχουμε μια κατά προσέγγιση επίλυση του  $G_L$  με την ακόλουθη ιδιότητα (το  $K$  θα είναι παντού μια σταθερή

ανάλογα με το

$$N \quad |G_L - G_{GO}| < K\lambda^{-N}$$

στο  $\mathcal{E} - \mathcal{P}$ , όπου  $\mathcal{P}$  (penumbra=ημιφώς) είναι μια γειτονιά των ανακλώμενων ακτινών όπως σχήμα 2. Υποθέστε

$$\begin{aligned} |\Delta G_L + \lambda^2 G_L| &\leq K\lambda^{-N}/|x|^2 \quad \text{in } \mathcal{E}, \\ |G_L - G_R| &< K\lambda^{-N} \quad \text{on } \partial\mathcal{E}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, από τις εκτιμήσεις του κεφαλαίου 6, § 2 έχουμε

$$|G_L - G_R| < K\lambda^{-N} \quad \text{in } \mathcal{E}$$

και ως εκ τούτου

$$|G_{GO} - G_R| < K\lambda^{-N} \quad \text{in } \mathcal{E} - \mathcal{P}.$$

(Βλέπε επίσης Ludwig και Morawetz (1968) για περισσότερες λεπτομέρειες).

**3. Η Κατασκευή του Ludwig για το ημίφως.** Ας δούμε το πρόβλημα του κυκλικού κυλίνδρου και υποθέτουμε, για χάρη της απλότητας για μια πρόσκρουση η ένα συμβάν αεροπλανικού κύματος,  $u_i = -\varepsilon^{i\lambda}$ . Θα μπορούσαμε να αθροίσουμε τα αεροπλανικά κύματα για να αντιπροσωπεύουν μια πεπερασμένη πηγή. Έτσι, μετά από κάποια παραποίηση στο μιγαδικό επίπεδο:

$$\begin{aligned}
u_i &= -e^{i\lambda x} = e^{i\lambda r \cos \theta} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma[-\theta + (\pi/2) + 2\pi m]} J_{\gamma}(\lambda r) d\gamma \\
&= \lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\beta[-\theta + (\pi/2) + 2\pi m]} J_{\lambda\beta}(\lambda r) d\beta.
\end{aligned}$$

Η ιδέα είναι ότι ενώ η κατασκευή της γεωμετρικής οπτικής των ανακλώμενων ακτίνων από  $u_i$  Θα έχουμε μια ιδιομορφία, οι επιμέρους όροι στη δεξιά πλευρά μπορεί να είναι μεμονωμένα συνδυαζόμενα από ανακλώμενες ακτίνες αντανακλώνται τα οποία δεν έχουν μια μοναδικότητα σε όλα. Κάθε όρος σχετικά με το δικαίωμα έχει μια « γεωμετρική οπτική επέκταση», όπως

$$e^{i\lambda\chi_1} A_1 + e^{i\lambda\chi_2} A_2$$

Με  $|\nabla_{\chi_1}|^2 = 1$ ,  $|\nabla_{\chi_2}|^2 = 1$ . Το ολοκλήρωμα στη συνέχεια αποτιμάτε από στατική φάση και μόνο ένας όρος στο άθροισμα είναι σημαντικό να μας δώσει πίσω το συμβάν της κυματομορφής για μια ειδική τιμή του  $m$ . Η άλλη είναι ασυμπτωτικά μηδαμινή οπότε χρειαζόμαστε μόνο ότι ταιριάζει σε αυτό τον όρο. Τώρα, εάν το σημείο στο όριο δεν είναι στο ημίφως, αυτό θα μπορούσε να είναι γίνεται από μια γεωμετρική αντιστία χρησιμοποιώντας την προηγούμενη επέκταση, και τα παλιά γεωμετρικά οπτικά αποτέλεσμα θα πρέπει να επαναπροσδιορίσουν. Για να έχει το ημίφως αποτέλεσμα θα πρέπει να ταιριάζει περισσότερο. Αυτό αποδίδει, αφότου το  $m$  σχετίζεται με  $\lambda$  από τη στατική φάση που αναφέρεται παραπάνω:

$$u_s = u - u_i = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi m i \lambda \beta} H_{\lambda\beta}^{(1)}(\lambda r) e^{i\lambda\beta[(\pi/2) - \theta]} \frac{J_{\lambda\beta}(\lambda a)}{H_{\lambda\beta}^{(1)}(\lambda a)} d\beta.$$

Παρατηρείστε ότι στο σώμα  $r = a$ ,  $H_{\lambda\beta}^{(1)}(\lambda r) J_{\lambda\beta}(\lambda a) / H_{\lambda\beta}^{(1)}(\lambda a) = J_{\lambda\beta}(\lambda r)$  όπως είναι επιθυμητό να δίνει η αντανακλώμενη κατάσταση και

ότι το  $u_s$  είναι εξερχόμενη από τότε που είναι και το  $H_{\lambda\beta}^{(1)}(\lambda r)$ . Εάν το σώμα δεν είναι κυλινδρικό δεν μπορούμε να το βελτιώσουμε αυτό παίρνοντας μόνο τα σφάλματα ως απόκλιση, αλλά πρέπει να τροποποιηθούν οι συναρτήσεις του Hankel και του Bessel να αντιστοιχούν, αρχίζοντας ήδη στην επέκταση του συμβάντος του πεδίου. Μετά από αυτό είναι τεχνικά πολύ δύσκολο, αλλά ουσιαστικά απλό να εκτελέσει κάποιος την κατασκευή του Ludwig. Ο αναγνώστης αναφέρεται στην αρχική περιγραφή του Ludwig το 1967.

**4. Διαθλούμενα πεδία.** Η κατασκευή του Ludwig είναι ένας σκληρός τρόπος για να πάρουμε το πεδίο διάθλασης, έτσι ας ξεκινήσω δίνοντας τις οδηγίες για την εύρεση του ασυμπτωτικού διαθλώμενου πεδίου για μια πηγή στο  $x = z$  και ένα ανακλαστικό σώμα.

(i) Εφιστά την ανακλώμενη ακτινοβολία στο σώμα. Καλέστε τη διασταύρωση της ανακλώμενης ακτίνας και το σώμα του ανακλώμενου πεδίου (βλέπε σχήμα 3).

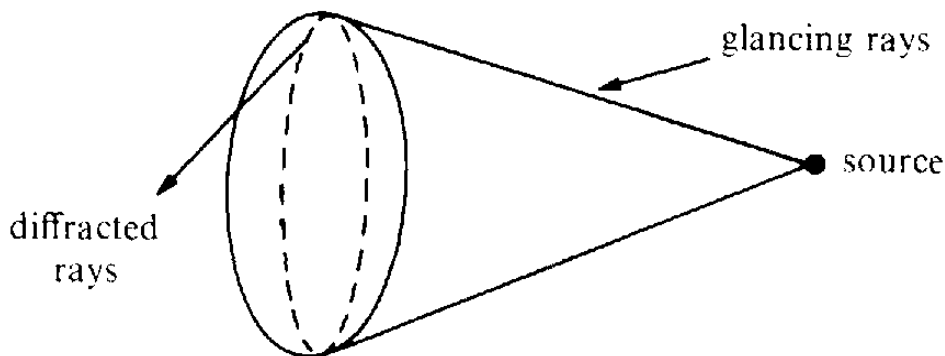
(ii) Από ένα φοβερό σημείο σχεδιάζουμε μια γεωδαισιακή μορφή στο σώμα σε κάποιο άλλο σημείο και από εκείνο το σημείο να προχωρήσει μακριά από το σώμα σε ευθεία γραμμή που εφάπτεται στη γεωδαισιακή. Αυτό είναι μια ακτίνα διάθλασης.

(iii) σε κάθε διάθλαση ακτίνων αποδίδεται μια φάση  $\chi_d$  που δίνεται με την απόσταση από την πηγή κατά μήκος της ανακλώμενης ακτίνας, η γεωδαισιακή μορφή στο σώμα και η διάθλαση ακτινών.

(iv) Για κάθε διάθλαση ακτίνων και γεωδαισιακή μορφή επισυνάπτεται ένα πλάτος  $a_d$  διασπαζόμενο σύμφωνα με τη θεωρία

των ακτίνων και με μια "αρχική τιμή" που δίνεται στο ανακλώμενο

σημείο από το γνωστό εύρος διάθλασης για το αντίστοιχο ελλειψοειδές που ταιριάζει το το σώμα β 'βαθμού στο ανακλώμενο σημείο. Το άθροισμα (ή το ολοκλήρωμα) του συνόλου των κατά προσέγγιση διαθλώμενων επιλύσεων  $u_d = a_d e^{i\lambda x d}$  είναι η διάθλαση πεδίου και μπορεί να φανεί ότι αυτό που έχει κατασκευαστεί από τις οδηγίες είναι



<sup>3</sup>Οι ίδιες αρχές εφαρμόζονται στο χρόνο - εξαρτώμενων περιπτώσεων με  $z = \infty$  δίνει το σχήμα του § 1.

Τι θα παίρναμε με τη χρήση όλων των εκφράσεων ολοκλήρωσης της § 3. Παρατηρείται ότι το συνολικό διαθλώμενο πλάτος σε ένα σημείο είναι εκθετικά μικρό στη συχνότητα. Για να διαπιστωθεί η εγκυρότητα της κατασκευής, εάν χρησιμοποιήσουμε την επίσημη μορφή του Ludwig που τα περιγράφει αυτά, συνεχίζουμε να έχουμε στις διαφορικές εξισώσεις  $O(\lambda^{-N})$  και το εκτιμώμενο θεώρημα μας (βλέπε κεφάλαιο 5) δεν μπορεί ποτέ να δημιουργήσει την ισχύ των

διαθλώμενων πεδίων.

Ωστόσο, χρησιμοποιώντας τη βοηθητικά τη συνάρτηση Green, Bloom (1972) έδειξε ότι θα μπορούσε κάποιος να αναπαραστήσει την διάθλαση πεδίου από μια πηγή μέσω μιας εξίσωσης ολοκλήρωσης όπου εκτιμούμε ότι θα μπορούσαν να γίνουν τα σφάλματα και να εκτιμηθούν στα διαθλώμενα πεδία παρέχοντας το σώμα να συνεπέσει με έναν κύλινδρο σε μια γειτονιά των σημείων επαφής των ανακλώμενων ακτινών.

Η κύρια ιδέα δίδεται στην ακόλουθη απλή υπόθεση.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο σώματα A και B και μια πηγή στο z. Καταρχάς, επιτρέπουμε το B να είναι μια σφαίρα και το A διόφορο του B μόνο μέσα στη σκιά του B. Στη συνέχεια, σε οποιοδήποτε σημείο  $x \neq z$ , οι δύο συναρτήσεις του Green  $G_A$  και  $G_B$  ικανοποιούν:

$$G_A(x, z, \lambda) = G_B(x, z, \lambda) + I_A - I_B,$$

$$I_A = \int_{\mathcal{E}} G_B(x, y, \lambda) \frac{\partial G_A}{\partial n}(y, z, \lambda) d\sigma,$$

$$I_B = \int_{\mathcal{E}} G_A(y, z, \lambda) \frac{\partial G_B}{\partial n}(x, y, \lambda) d\sigma,$$

όπου το  $\mathcal{E}$  είναι μια αυθαίρετη επιφάνεια. Υποθέτουμε το  $\mathcal{E}$  είναι το B με το A να βρίσκεται μέσα στο B. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη στη συνάρτηση Green:

$$G_A(x, z, \lambda) - G_B(x, z, \lambda) = \int_{B-A \cap B} G_A(y, z, \lambda) \frac{\partial G_B}{\partial n}(x, y, \lambda) d\sigma.$$

Δεδομένου ότι το B είναι μια σφαίρα  $\partial G_B / \partial n$  είναι εκθετικά μικρό στο  $\lambda$  για  $B - A \cap B$  και συνεπώς η διαφορά μεταξύ των δύο συναρτήσεων του Green είναι εκθετικά μικρές.

## Αναφορές

A.A. ARSENEV (1972) Όσον αφορά τις ιδιομορφίες της αναλυτικής συνέχισης και τις ιδιότητες συντονισμού των επιλύσεων του προβλήματος διασποράς για την εξίσωση Helmholtz, Zh. Vichysl. Mat. i Mat. Fiz., 12. pp. 112-138; Soviet Math. Dokl., 12 (1971), pp. 476 - 477.

M. F. ATIYAH, R. BOTT AND L. CARDING (1970) κενών για υπερβολικές διαφορικές λειτουργίες με σταθερούς συντελεστές I, Acta Math., pp. 109-189 .

V. M. BABIC (1971) Στην ασυμπτωτική της συνάρτησης Green, ορισμένων προβλημάτων κύματος, Soviet Math. Dokl . , 12 , no. 4, pp. 1138-1142.

J. THOMAS BEALE (1973) Συχνότητες σκέδασης των συντονιστών, Comm. Pure Appl. Math., 25, pp. 549 - 563.

C. O. Bloom (1972) Στην ισχύ της γεωμετρικής θεωρίας της διάθλασης από κύλινδρο σε αστεροειδή σχήμα, J. Math. Αναλ. Αρρί., 40, σελ. 107-121.

C. O. Bloom και N.D KAZARINOFF (1972) Διάσπαση ενέργειας σε μη ομογενές μέσο, Proc. συμπόσιο για την ανάλυση, Ρίο ντε Τζανέιρο, Αύγουστος 15-24, L. Nachbin, ed., Hermann, Παρίσι. (1973) Η ενέργεια διασπάται σε τοπικό επίπεδο, ακόμη και εάν η συνολική



ενέργεια αυξάνεται αλγεβρικά με το χρόνο, Bull. Amer. Math. Soc., 79, pp. 969-972 (για να εμφανιστεί στο J. Διαφορικές Εξισώσεις). (να εμφανιστεί) Τοπική διάσπαση ενέργειας για μια κατηγορία των σωμάτων μη αστεροειδών σχημάτων. Arch. Ορθολογική Mech. Αναλ.

J. M. CHADAM ΚΑΙ R. T. Glassey (1974) Ιδιότητες των επιλύσεων του προβλήματος Cauchy για το κλασσικό ζευγάρι Maxwell - Dirac εξισώσεις σε ένα διάστημα χώρου, Proc. Amer. Math. Soc., 43. pp. 373-378 .

C. CHING (1971) Ψευδο – διαφορικές λειτουργίες με μη κανονικά σύμβολα και την ύπαρξη και μοναδικότητα της επίλυσης του προβλήματος ακτινοβολίας, N.Y.U. διατριβή.

J. COOPER (1973) Τοπική διάσπαση των επιλύσεων των κυματικών εξισώσεων στο εξωτερικό ενός κινούμενο σώματος, Rep. Dept. Math., πανεπιστήμιο της βραζιλίας (βλέπε επίσης αναφορές σε αυτό).

J. J. DUISTERMAAT (1974) Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities, Comm. Pure App. Math., 27, σελ.207 - 281.

J. J. DUISTERMAAT AND L. Hörmander (1972) Ολακλήρωμα Fourier φορείς //. Acta Math, 128, pp. 183 - 269.

L. D. Fadeev (1959) Το αντίστροφο πρόβλημα στην κβαντική θεωρία της σκέδασης, Uspechi Mat. Nauk.. 14, no. 4 (88). pp. 57 - 119.

F. G. FRIEDLANDER (1964) Στην ακτινοβολία πεδίου παλμικών επιλύσεων των κυματικών εξισώσεων, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 279, pp 386 394.

K. O. FRIEDRICHS (1958) Συμμετρικά θετική γραμμική διαφορική εξίσωση, Comm. Pure Appl. Math., 11, no. 3, pp. 333 - 418.

R. T. GLASSEY (1973) θεωρήματα για τις μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις, Math. Zeit., 132, pp. 183-203. (1973) στην ασυμπτωτική

συμπεριφορά των μη γραμμικών κυματικών εξισώσεων, Trans. Amer. Math. Soc., 182, σελ. 187-200.

J. Glimm AND A. JAFFE (1972) Μποζόνιο, Μοντέλο Κβαντικού Πεδίου, Μαθηματικά, στη σύγχρονη Φυσική. R. Shester. ed.. Ακαδημαϊκός τύπος. New York, pp. 77, 143.

ROGER H. GRIMSHAW (1966) Υψηλής συχνότητας διασποράς μέσω πεπερασμένης κυρτής περιοχής, Comm. Pure Appl. Math., 19, σελ. 167-198.

&&& J. JORGENS (1961) Το πρόβλημα των αρχικών τιμών στην κατηγορία των μη γραμμικών κυμάτων. Math. 77. pp. 295 308 .

S. N. KARP (1961) Μια συγκλίνουσα εξεζητημένη επέκταση για δύο διαστάσεις συναρτήσεων ακτινοβολίας, Comm. Pure Appl. Math., 14, σελ. 427-434.

N. D. KAZARINOFF AND E. D. ROGAK (1969) Εξωτερικά αρχική οριακή τιμή για υπερβολικές εξισώσεις σε χρονικά - εξαρτωμένους τομείς, J. Math. Anal. Appl., 1, pp. 116-126 .

N. D. KAZARINOFF (1971) Αρχικές οριακές τιμές προβλημάτων και κινούμενα όρια, Anal. Θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, Παράδοση Διαλέξεων στα Μαθηματικά., Springer Verlag , Νέα Υόρκη , σελ. 195-199.

J. B. KELLER (1956) Προσδιορισμός του δυναμικού από την διασπορά των δεδομένων, Phys . Rev., 102, pp. 557-559.

J. B. KELLER AND S. I. RUBINOW (1961) Μετατόπιση του ορίου σκιάς και διατομής διασποράς ενός αδιαφανούς αντικειμένου, J. Appl. Phys., 32, σελ. 814 - 820.

RICHARD B. LAVINE (1971-1972) Μεταγωγές και διασπορά θεωρίας II. Η τάξη ενός σώματος προβλημάτων, Πανεπιστήμιο της Indiana. Math. J., 21, pp. 643 - 656.

P. D. LAX (1957) Ασυμπτωτικές λύσεις των προβλημάτων ταλάντωσης αρχικών τιμών, Duke Math. J., 24, pp. 627 - 646.

P. D. LAX, C. S. MORAWETZ AND R. S. PHILLIPS (1963) εκθετική διάσπαση των επιλύσεων των κυματικών εξισώσεων στο εξωτερικό του σχήματος αστεριού σε εμπόδιο, Comm. θετικά εφαρμοσμένα μαθηματικά., 16, σελ. 477- 486.

P. D. LAX AND R. S. PHILLIPS (1967), Θεωρία διάσπασης, Θετικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών., Vol. 26, Academic Press, Νέα Υόρκη.

- (1972) Στη διασπορά συχνοτήτων του τελεστή Laplace για εξωτερικούς τομείς, Comm. Θετικά εφαρμοσμένα μαθηματικά. 25, pp. 85-101 .

- (1972) θεωρία διασποράς για την ακουστική εξίσωση σε έναν αριθμό διαστάσεων του χώρου, Indiana Univ. Math. J. 22, pp. 101 έως 134.

- (1973) θεωρία διασποράς για υλικά απορρόφησης υπερβολικών συστημάτων, J. Λειτουργική Ανάλυση, 14, pp. 172 - 235.

W. LITTMAN AND O. ARENA (1972) Εξεζητημένη συμπεριφορά των επιλύσεων στις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Ασυμπτωτικές επεκτάσεις και μέγιστος ρυθμός της διάσπασης κατά μήκος μιας ακτίνας, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 26, no. 4, pp. 215-250 .

D. LUDWIG (1966) Ενιαία ασυμπτωτική επέκταση σε μια καυστική, Comm. Θετικά εφαρμοσμένα Μαθηματικά, 19, σελ. 215 - 250.

- (1967) Ενιαία ασυμπτωτική επέκταση του πεδίου διασποράς από ένα κυρτό αντικείμενο σε υψηλές συχνότητες, Ibid. 20, pp. 103-138.

D. LUDWIG AND C.S. MORAWETZ (1968) Μια ανισότητα για τη μειωμένη κυματική λειτουργία και η αιτιολόγηση της γεωμετρικής οπτικής, ibid. 21, pp. 187-203 .

- (1969) Η γενικευμένη αρχή Huyghen για τα ανακλαστικά σώματα φορε, *Ibid.* 22, pp. 189-205.

R. C. MACCAMY (1965) Χαμηλές συχνότητες ακουστικής ταλάντωσης. *Quart. Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* 23, pp. 247-255.

C.S. MORAWETZ (1962) Η περιοριστική αρχή πλάτους, *Comm. Θετικά Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* 15, pp. 349-362.

- (1966) Ταυτότητες ενέργειας για την κυματική εξίσωση, *N. Y. U, Rep. IMM - 346.*

- (1966) Εκθετική διάσπαση για επιλύσεις της κυματικής εξίσωσης, *Comm. Θετικά εφαρμοσμένα μαθηματικά,* 19, pp. 439-444.

- (1968) Χρόνος διάσπασης για τη μη γραμμική Klein - Gordon εξίσωση, *Proc. Roy. Soc. A,* 306, pp. 291-296.

- (1970) Η ροή της ενέργειας: Κυματική και γεωμετρική οπτική. *Bull. Amer. Math. Soc,* 76, pp. 661 - 674.

C. S. MORAWETZ AND W. A. STRAUSS (1972) Διάσπαση και διασπορά των επιλύσεων μιας μη γραμμικής σχετικιστικής κυματικής εξίσωσης, *Comm . Θετικά Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* 25, pp. 1-31.

C. S. MORAWETZ (1972) Σχετικά με τους τρόπους διάσπασης για την κυματική εξίσωση στο εξωτερικό ενός αντανακλώμενου σώματος, *Proc. Roy. Irish Acad.* 72, no. 9, pp. 113-120.

C. S. MORAWETZ AND W. A. STRAUSS (1973) Σε ένα μη γραμμικό φορέα διάσπασης, *Comm . Θετικά Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* 26, σελ. 47-54.

C. S. MORAWETZ (1974) Εκτιμήσεις για αργές μεταβαλλόμενες κυματικές εξισώσεις με ένα περιοδικό δυναμικό. *Ibid.* 26, no. 5, σελ. 805 - 817.

– (1974) Το θεώρημα διάσπασης για τις εξισώσεις του Maxwell, *Uspechi Mat. Nauk*, 29, no. 2, pp. 233-240.

– (1975) Διάσπαση για επιλύσεις Dirichlet εξωτερικού προβλήματος για την κυματική εξίσωση, *Comm. Θετικά Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*.

A. MURRAY (1971) ασυμπτωτική συμπεριφορά των επιλύσεων των υπερβολικών ανισοτήτων, *Trans. Amer. Math. Soc.* 157, σελ. 279-296.

E. NOETHER (1918) Σταθερό μεταβλητό πρόβλημα, *Nachr. Ges. Gottingen Math. Phys. Kl.* pp. 235 - 257.

H. M. NUSSENSVEIG (1965) Υψηλής συχνότητας διασπορά μέσω μιας αδιαπέραστης σφαίρας, *Ann. Physics*, 34, pp. 23-95.

R. S. PHILLIPS (1969) Μια υποσημείωση σχετικά με τις προηγούμενες αναφορές του C. S. Morawetz και D. Ludwig, *Comm. Θεωρητικά Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* 22, pp. 207-211.

JAMES V. RALSTON (1969) Οι επιλύσεις της κυματικής εξίσωσης με περιορισμένη ενέργεια, *Ibid.* 22, pp. 807-824.

– (1971) Παγιδευμένες ακτίνες μέσα σε συμμετρική σφαιρική και οι πόλοι της διασποράς. *Ibid.* 24, pp. 571 - 582.

JAMES V. RALCH AND MICHAEL E. TAYLOR (1972) Διεισδύσεις μέσα σε σκοτεινές περιοχές και η μοναδική ιδιότητα συνέχισης σε υπερβολικά ανάμικτα προβλήματα, *Indiana Univ. Math. J.* 22, pp. 277 - 285.

E. H. ROFFMAN (1970) Περιορισμένες επιλύσεις της μη γραμμικής κυματικής εξίσωσης, *Bull. Amer. Math. Soc.* 76, pp 70-71.

I. E. SEGAL (1968) Διασπορά των μη γραμμικών εξισώσεων, II, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4), I, pp 459 - 497.

W. A. STRAUSS (1968) Διάσπαση και ασυμπτωτικές για  $\square u = F(u)$ , *J. Functional Anal.* 2, pp. 409 - 457.

- (1973) θεωρία μη γραμμική διασποράς, Denver Conf. Θεωρία διασποράς στη Μαθηματική Φυσική. LaVita and Marchand, eds. Reidel , Dordrecht. Holland.
- (1975) Διασπορά της κυματικής φυγής στο όριο του εξωτερικού τομέα. Comm. Θεωρητικά Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

F. URSELL (1957) Στη σύντομη κυματική ασυμπτωτική θεωρία της κυματικής εξίσωσης  $(\Delta^2 + k^2) \Phi = 0$ , Proc. Cambridge Phil. Soc. 53, pp. 115 - 133.

H. WALKER: Ορισμένες υποσημειώσεις σχετικά με την τοπική διάσπαση της ενέργειας των επιλύσεων των αρχικών οριακών προβληματικών τιμών για την κυματική εξίσωση, J. Διαφορικές Εξισώσεις.

E. K. ZACHMANOGLU (1963) Η διάσπαση των επιλύσεων των αρχικών προβληματικών οριακών τιμών για την κυματική εξίσωση στις απεριόριστες περιοχές. Arch. Rational Mech. Anal. 14, pp. 212 – 325.