

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΧΑΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ & ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ



Σπανοπ
ούλου
Εύα -
Καμπά
ς
Ιωάννη
ς

**Θέμα
πτυχια
κής**

εργασίας : Μελέτη γεωφυσικών μετρήσεων με τη χρήση ηλεκτρικής τομογραφίας στην περιοχή Γόρτυνα Ηρακλείου.

Νοέμβριος 2010

**TECHNOLOGICAL EDUCATIONAL INSTITUTE OF CRETE
BRANCH OF CHANIA
DEPARTMENT OF NATURAL RESOURCES AND ENVIRONMENT**



SPAN
OPOU
LOU
EVA –
KAMP
AS
GIAN
NIS

**GEOP
HYSI
CAL**

**MEASUREMENTS USING ELECTRICAL TOMOGRAPHY AT THE
AREA OF GORTYNA, HERAKLEION**

November 2010

Περιεχόμενα

Περίληψη

Abstract

1. Κεφάλαιο 1.....	2
1.1. Γενικά.....	8
1.2. Ανασκαφές στη Γόρτυνα.....	8
1.3. Οι αρχαιολογικοί χώροι στη Γόρτυνα.....	8
1.4. Το Μεγάλο θέατρο της Γόρτυνας – Περιγραφή του μνημείου... 17	
1.5. Υφιστάμενη κατάσταση – Παλαιότερες επεμβάσεις.....	19
1.6. Γεωφυσικές έρευνες.....	20
1.7. Αναγκαιότητα επεμβάσεων.....	20
2. Κεφάλαιο 2.....	21
Βασικές αρχές ηλεκτρικών διασκοπίσεων.....	21
2.1. Εισαγωγή.....	21
2.2. Διάδοση ηλεκτρικού ρεύματος.....	22
2.3. Ειδική ηλεκτρική αντίσταση.....	22
2.4. Φαινόμενη ηλεκτρική αντίσταση.....	24
2.5. Μεταβολές ηλεκτρικής αντίστασης.....	26
2.6. Διατάξεις ηλεκτροδίων.....	27
2.7. Ηλεκτρική τομογραφία.....	29
2.8. Ερμηνεία των μετρήσεων.....	30
2.9. Επίλυση του ευθέως προβλήματος.....	30
2.10. Υπολογισμός του ιακωβιανού πίνακα.....	31
2.10.1 Μη γραμμική αντιστροφή.....	34
2.10.2 Αστάθεια στην αντιστροφή του γενικευμένου ιακωβιανού....	36
2.10.3 Χρήση λογαριθμικής κλίμακας στην επίλυση συστημάτων... 37	
2.10.4 Κριτήρια σύγκλισης και ποιότητας – Ανάλυση σφαλμάτων... 37	
2.10.5 Πίνακας στατιστικών βαρών.....	39
2.10.6 Χρήση της svd στην επίλυση ασταθών συστημάτων.....	40
2.11. Μη γραμμική αντιστροφή με περιορισμούς.....	41
2.11.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης.....	41
2.11.2 Μέθοδος εξομαλυμένης αντιστροφής.....	46
2.11.3 Υβριδική μέθοδος αποσβενομένων τετραγώνων.....	49
2.12 Συμπεράσματα.....	53
2.13 Αστάθεια του συστήματος – προέλευση περιορισμών.....	53
2.14 Αντιμετώπιση του θορύβου –σφάλματα δεδομένων.....	54
2.15 Επιλογή αρχικού μοντέλου.....	54
2.16 Σαφήνεια στον προσδιορισμό των στρωμάτων.....	55

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία πραγματεύεται τη χρήση της γεωφυσικής μεθόδου ηλεκτρικής τομογραφίας σε αρχαιολογικό χώρο. Συγκεκριμένα, εκτελέστηκαν ηλεκτρικές τομογραφίες στην περιοχή Γόρτυνα Ηρακλείου, σε χώρο όπου υπάρχει επιφανειακή απόδειξη για την ύπαρξη αρχαίου θεάτρου. Στο παρόν κείμενο έχουμε κάνει μια ιστορική αναδρομή για τις διαθέσιμες πληροφορίες που υπάρχουν για την περιοχή, στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται συνοπτικά η μέθοδος ηλεκτρικών τομογραφιών και στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται η ανάλυση των δεδομένων και τα τελικά συμπεράσματα.

ABSTRACT

This thesis deals with the usage of electric tomography in archaeological areas. Electric tomographies have been conducted at the area of Gortyna, Herakleion, in an area where there is surface evidence of an ancient theatre. In this document we describe the available information till now about the area, second chapter describes the usage of electric tomography and at the last chapter we analyze the data and the final conclusions about the study.

Κεφάλαιο 1

1.1. Γενικά

Η Γόρτυνα είναι μια από τις σημαντικότερες πόλεις της Κρήτης, με αδιάκοπη ιστορία 6.000 χρόνων και ένας από τους μεγαλύτερους σε έκταση αρχαιολογικούς χώρους στην Ελλάδα. Βρίσκεται στο νότιο κεντρικό τμήμα της Κρήτης στην εύφορη πεδιάδα της Μεσαράς, η οποία φημίζεται για την πρώτη ανθρώπινη κατοίκηση στο νησί στο τέλος της Νεολιθικής περιόδου.

Η κατοίκηση συνεχίστηκε στα Μινωικά χρόνια και στα μέσα της 1^{ης} χιλιετίας η Γόρτυνα διαδέχεται την Φαιστό σαν η κυρίαρχη δύναμη στη Μεσαρά. Κατά τα ρωμαϊκά χρόνια η Γόρτυνα φτάνει στο απόγειο της όπου γίνεται η πρωτεύουσα της Κρήτης.

Το όνομα της το πήρε σύμφωνα με μια παράδοση από τον Γόρτυνα, γιό του Ραδάμανθου του βασιλιά της Φαιστού και αδερφού του Μίνωα ο οποίος και την ίδρυσε. Μια άλλη παράδοση θέλει ιδρυτή της τον Γόρτυνα, ο οποίος αυτή την φορά είχε καταγωγή από την Τεγέα της αρκαδικής Γορτυνίας.

Τρίτη παραλλαγή του μύθου κάνει αναφορά στην Γόρτυνα ως ιδρύτρια της πόλης, βασίλισσα της Κρήτης και μητέρα του βασιλιά Ταύρου.

1.2. Ανασκαφές στη Γόρτυνα

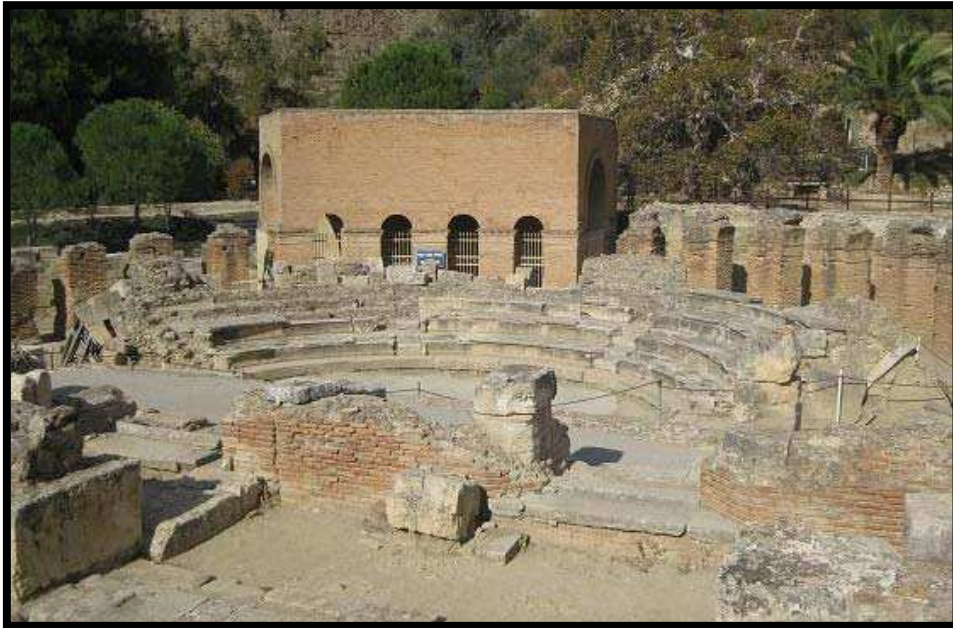
Η Γόρτυνα ήταν από τις πρώτες περιοχές της Κρήτης που προσέλκυαν το ενδιαφέρον των ερευνητών και των αρχαιολόγων ήδη από την περίοδο της τουρκοκρατίας στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, σε μια εποχή που κανείς δεν ήξερε ακόμα τίποτα για τον Μινωικό πολιτισμό. Το 1884 η ανεύρεση και η διάσωση της μεγάλης Επιγραφής από τους Ιωσήφ Χατζηδάκη, Στέφανο Ξανθουδίδη και τον Ιταλό Federico Halbherr στάθηκε αφορμή για ανασκαφική έρευνα της περιοχής της Γόρτυνας. Οι ανασκαφικές εργασίες ξεκίνησαν με την αυτονόμηση της Κρήτης μετά το 1898, από την Ιταλική Αρχαιολογική Αποστολή σε συνεργασία με την Αρχαιολογική Υπηρεσία. Οι εργασίες κράτησαν μέχρι και το 1940.

Οι ανασκαφές στην ευρύτερη περιοχή της Γόρτυνας έφεραν στο φως σπουδαία αρχιτεκτονικά σύνολα καθώς και ευρήματα ενώ μέχρι και σήμερα μεγάλο μέρος της Ρωμαϊκής πόλης δεν έχει ανασκαφεί. Τα σημαντικότερα ευρήματα εκτίθενται στο Αρχαιολογικό Μουσείο Ηρακλείου, ενώ αναμένεται στα επόμενα χρόνια η δημιουργία Αρχαιολογικού Μουσείου Μεσαράς, το οποίο θα τα στεγάσει.

1.3. Οι αρχαιολογικοί χώροι στη Γόρτυνα

Α. Το Ρωμαϊκό Ωδείο, μέσα στην αρχαία πόλη κοντά στην αγορά. Χρονολογείται στα μέσα του πρώτου αιώνα π.χ. Ανακατασκευάστηκε επί αυτοκράτορα Τραϊανού το 100 μ.χ. Οι λίθοι μαζί με την περίφημη επιγραφή της Γόρτυνας προέρχονται από κυκλικό οικοδόμημα του 5ου αιώνα. Η κατάσταση διατήρησης είναι μέτρια και απαιτούνται

συστηματικές και ολοκληρωμένες αναστηλωτικές εργασίες για να ολοκληρωθεί το υπέροχο αυτό μνημείο.



Β. Το Ρωμαϊκό θέατρο γνωστό και ως Μικρό Θέατρο μέσα στην αρχαία πόλη και αυτό. Πιθανότατα να ανήκει στο γειτονικό ιερό του Απόλλωνα. Ανασκάφτηκε στα τέλη του 19ου αιώνα, καθώς και στη δεκαετία του 1930. Κτισμένο σε επίπεδο έδαφος από ντόπιο ασβεστόλιθο. Το μνημείο αποκαλύπτεται σταδιακά από την Ιταλική Αρχαιολογική Σχολή με πραγματικά εντυπωσιακά αποτελέσματα. Απαιτείται επιτάχυνση των ανασκαφών και εν συνεχεία συστηματική δουλειά για την αναστύλωση του μνημείου.



Γ. Το Ρωμαϊκό Θέατρο εντός της πόλης. Το οικοδόμημα είχε ταυτιστεί λανθασμένα και για αιώνες ως αμφιθέατρο εξαιτίας των πληροφοριών που έδωσε ο Belli. Το κοίλον καλύπτεται από ελαιοχώραφα, αλλά είναι ορατά κάποια στοιχεία από το σκηνικό οικοδόμημα. Και γι αυτό το μνημείο απαιτούνται δοκιμαστικές και συστηματικές ανασκαφές για την αποκάλυψή του, προκειμένου να μας οδηγήσουν στα επόμενα βήματα.



Δ. Το Ρωμαϊκό Θέατρο γνωστό και ως Μεγάλο Θέατρο μέσα στην αρχαία πόλη, στα πόδια της ακρόπολης. Κατασκευασμένο σε φυσική πλαγιά. Εντυπωσιακό το κοίλον που ακολουθεί τις φυσικές πτυχές του εδάφους με εμφανή τη θέση του διαζώματος. Γι αυτό το μνημείο απαιτούνται δοκιμαστικές και συστηματικές ανασκαφές για την αποκάλυψη του μνημείου, προκειμένου να μας οδηγήσουν στα επόμενα βήματα.



Στον αρχαιολογικό χώρο της Γόρτυνας συμπεριλαμβάνονται:

Ο πλάτανος της Γόρτυνας, η Μεγάλη Επιγραφή με τους νόμους της Γόρτυνας, ο ναός του Αγίου Τίτου, η μεγάλη βασιλική, οι ρωμαϊκές θέρμες, το Πραιτόριο της Γόρτυνας, το Νυμφαίο της Γόρτυνας, η Ακρόπολη της Γόρτυνας και το ιερό του Πύθιου Απόλλωνα.

Ο Πλάτανος της Γόρτυνας

Ο πλάτανος της Γόρτυνας βρίσκεται στο βάθος του αρχαιολογικού χώρου και είναι αειθαλής, δηλαδή δεν ρίχνει τα φύλλα του το χειμώνα. Κανονικά κάθε πλάτανος είναι φυλλοβόλος, αλλά εδώ έχουμε να κάνουμε με ένα εξαιρετικά σπάνιο υποείδος, που στην Κρήτη έχουν καταγραφεί 50 τέτοια δέντρα περίπου.

Ο πλάτανος είναι συνδεδεμένος με τον μύθο της αρπαγής της Ευρώπης από τον Δία. Η Πριγκίπισσα Ευρώπη, κόρη του βασιλιά της Φοινίκης έπαιζε με τις φίλες της σε μία παραλία της Ανατολικής Μεσογείου, όπως συνήθιζε, όταν την είδε ο Δίας, πατέρας και βασιλιάς των 12 Θεών του Ολύμπου, την ερωτεύτηκε και μεταμορφωμένος σε ταύρο εμφανίστηκε μπροστά τους.



Οι κοπέλες άρχισαν να παίζουν με τον ταύρο και η Ευρώπη τον πλησίασε, τον χάιδεψε και έκατσε πάνω του. Τότε ο Δίας έφυγε παίρνοντας μαζί του την πριγκιποπούλα.

Μαζί έφτασαν στη Γόρτυνα όπου ο Δίας της αποκαλύφθηκε σε όλη του τη μεγαλοπρέπεια, και όπως το θέλει η παράδοση, ζευγάρωσαν κάτω από αυτό τον πλάτανο, ο οποίος έκτοτε κρατάει τα φύλλα του σε όλη τη διάρκεια του χρόνου.

Το ζευγάρι του Δία με την Ευρώπη είχε ως αποτέλεσμα τη γέννηση των 3 μυθικών βασιλιάδων της Κρήτης, του Μίνωα, του Ραδάμανθυ και του Σαρπηδόνα. Κάποιοι μάλιστα πίστεψαν ότι ο πλάτανος της Γόρτυνας έχει "μαγικές" ιδιότητες και βοηθάει τα ζευγάρια να κάνουν γιούς, οπότε παλιότερα συνήθιζαν να παίρνουν μερικά φύλλα από τον πλάτανο μαζί τους.

Η Μεγάλη Επιγραφή

Η Μεγάλη Επιγραφή δεν βρέθηκε όλη μαζί. Ένα μικρό της κομμάτι που περιλάμβανε τους 15 πρώτους στίχους της 11ης στήλης το βρήκαν, στα μέσα περίπου του 19ου αιώνα, δύο Γάλλοι περιηγητές, ο Γ. Περρό και ο L. Thenon εντοιχισμένο σ' ένα νερόμυλο του χωριού 'γιοι Δέκα. Είκοσι χρόνια αργότερα, ο Γάλλος επίσης B. Haussoulier, βρήκε εντοιχισμένο σ' ένα σπίτι του ίδιου και πάλι χωριού, νέο τμήμα της επιγραφής: εκείνο που περιλαμβάνει τους 15 πρώτους στίχους από τους νόμους.



Η ουσιαστική όμως ανακάλυψη της επιγραφής οφείλεται στον F. Halbherr. Αυτός ανασκάψε συστηματικά την περιοχή και βρήκε, το 1884, τις τέσσερις πρώτες στήλες του Κώδικα της Γόρτυνας. Ο ίδιος δεν μπόρεσε να συνεχίσει ως το τέλος τις ανασκαφές, αλλά έδωσε οδηγίες στον Ern. Fabricius ο οποίος ανακάλυψε και τα υπόλοιπα τμήματα της Μεγάλης Επιγραφής, που όταν ανακαλύφθηκε θεωρήθηκε σαν η μεγαλύτερη αρχαιολογική ανακάλυψη του περασμένου αιώνα. Η Δωδεκάδελτος ή Μεγάλη Επιγραφή είναι γραμμένη σε βουστροφηδόν γραφή, με την κατεύθυνση των λέξεων να αλλάζει σε κάθε σειρά εναλλάξ από δεξιά προς αριστερά και αντίθετα, δηλαδή η 1η σειρά είναι γραμμένη από τα αριστερά προς τα δεξιά, η 2η συνεχίζει από τα δεξιά προς τα αριστερά, η 3η από τα αριστερά προς τα δεξιά κ.ο.κ.

Η Μεγάλη Επιγραφή αποτελείται από 12 στήλες ή δέλτους (Δωδεκάδελτος) και εκτεινόταν σε 630-640 στίχους, από τους οποίους σώζονται οι 605. Οι νόμοι της Γόρτυνας αφορούν ζητήματα αστικού δικαίου και δεν περιέχουν διατάξεις ποινικού ή εμπορικού δικαίου. Οι νόμοι της Γόρτυνας είναι υποδειγματικοί για το πνεύμα ελευθερίας που τους διέπει και για την προοδευτικότητά τους. Δεν είναι απλά οι νόμοι μιας Κρητικής πολιτείας, αλλά ο αρχαιότερος κώδικας ελληνικού δικαίου και θεωρούνται η μεγαλύτερη προσφορά της Κρήτης της κλασικής εποχής στον παγκόσμιο πνευματικό πολιτισμό.

Ο ναός του Αγίου Τίτου

Ο ναός του Αγίου Τίτου, ανήκει στα σημαντικότερα χριστιανικά μνημεία της Κρήτης. Βρίσκεται μέσα στον Αρχαιολογικό Χώρο της Γόρτυνας, πλησίον του Ρωμαϊκού Ωδείου και του μεγάλου αρχαίου θεάτρου και είναι επισκέψιμος. Ο ναός του Αγίου Τίτου θεωρούνταν παλαιότερα ως οικοδόμημα του 6ου αι. μ.Χ. (Αν. Ορλάνδος).



Ο P. Lemerle χρονολογεί το ναό στον 7ο ή 8ο αι. μ.Χ. Ο J. Christern πιστεύει ότι ο ναός οικοδομήθηκε μετά την απελευθέρωση της Κρήτης από τον Νικηφόρο Φωκά (961 μ.Χ), στα τέλη του 10ου αι. μ.Χ., στηριζόμενος, αφενός μεν στην ύπαρξη των δύο πλευρικών κογχών του μεσαίου τμήματος του Ιερού Βήματος, αφετέρου δε στη χρήση μαρμάρινων αρχιτεκτονικών μελών του τέλους του 10ου αι. μ.Χ.

Η μεγάλη βασιλική

Η μεγάλη βασιλική της Γόρτυνας βρίσκεται σε μικρή απόσταση από τον γνωστό αρχαιολογικό χώρο. Η μεγάλη βασιλική ανακαλύφθηκε το 1978 κατά τη διάρκεια εργασιών βελτίωσης του οδικού δικτύου.

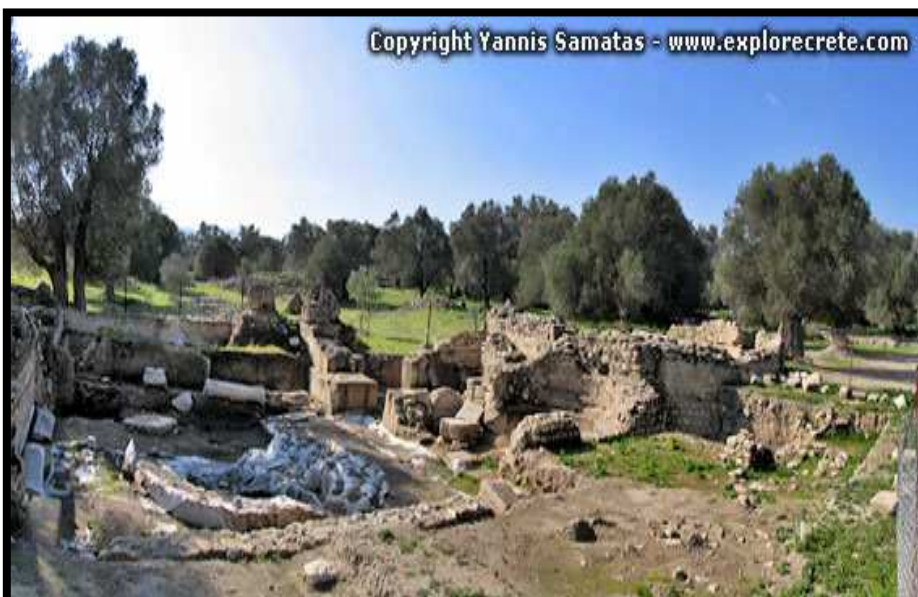
Είναι ένα οικοδόμημα πολύ μεγάλων διαστάσεων, το μεγαλύτερο αυτού του τύπου στην Κρήτη και από τα μεγαλύτερα στην Ελλάδα, το οποίο κάλυπτε μία έκταση ενός ολόκληρου οικοδομικού τετραγώνου, γεγονός που καταδεικνύει ότι πρόκειται για την



έδρα μίας
ιδιαίτερα
ανθηρής
μητρόπολης.

Οι Ρωμαϊκές θέρμες

Οι ρωμαϊκές θέρμες ήταν ένα μεγάλο συγκρότημα λουτρών με πολλούς βοηθητικούς και ψυχαγωγικούς χώρους. Η ύπαρξη βεσπασιανών, δηλαδή δημόσιων αποχωρητηρίων, ήταν απαραίτητη επίσης. Οι θέρμες αποτελούνται από τρία μέρη: το διαμέρισμα των θερμών λουτρών, το δωμάτιο των λουτρών ενδιάμεσης θερμοκρασίας και το δωμάτιο ψυχρών λουτρών.



Το Πραιτόριο της Γόρτυνας

Το Πραιτόριο χρησίμευε ως έδρα και κατοικία του ανθύπατου, διοικητή της ρωμαϊκής επαρχίας Κρήτης και Κυρηναϊκής. Ας μην ξεχνάμε ότι η Γόρτυνα ήταν πρωτεύουσα της Κρήτης επί Ρωμαίων. Το Πραιτόριο της Γόρτυνας μας εντυπωσιάζει ολόένα και περισσότερο από το μέγεθος του, τον αριθμό των κτιρίων και το μεγαλείο που

φανερώνουν τα ερείπια.



Το Νυμφαίο της Γόρτυνας

Το Νυμφαίο της Γόρτυνας βρίσκεται στο χώρο του Πραιτορίου, βόρεια της δικαστικής βασιλικής. Δυστυχώς ο επισκέπτης δεν έχει τη δυνατότητα να το θαυμάσει από κοντά λόγω της απαγόρευσης εισόδου στο κοινό.



Η Ακρόπολη της Γόρτυνας

Η Ακρόπολη της Γόρτυνας βρίσκεται πάνω στον λόφο του Αγίου Ιωάννη, στα βορειοδυτικά του αρχαιολογικού χώρου. Ακριβώς από κάτω φαίνεται ο αρχαιολογικός χώρος της Γόρτυνας.



Το ιερό του Πύθιου Απόλλωνα

Είναι από τα σημαντικότερα μνημεία της Γόρτυνας και υπήρξε μέχρι την καθιέρωση του Χριστιανισμού το θρησκευτικό κέντρο της πόλης. Το αρχικό οικοδόμημα χρονολογείται στον 7ο π.Χ. αιώνα. Από αυτή τη φάση του ναού έχουν σωθεί και επιγραφές, οι οποίες ήταν εντοιχισμένες στους εξωτερικούς του τοίχους. Εντυπωσιακός είναι ο βωμός ανατολικά, μπροστά από την είσοδο του οικοδομήματος, ο οποίος αποτελείται από βαθμίδες και σώζεται σε ικανοποιητικό βαθμό.



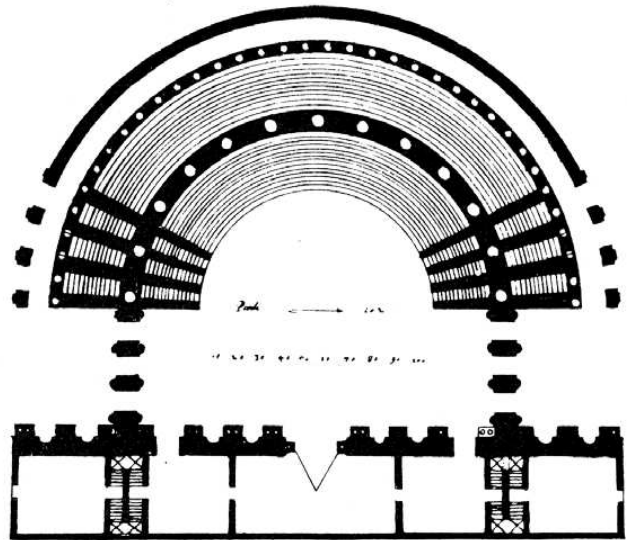
1.4. Το Μεγάλο θέατρο της Γόρτυνας- Περιγραφή του μνημείου

Το μεγάλο θέατρο της Γόρτυνας είχε λαξευτεί στη ΝΑ πλαγιά του λόφου της Ακρόπολης στην απέναντι πλευρά του Ληθαίου ποταμού όπου βρισκόταν το Ωδείο και η Αγορά. Σύμφωνα με τον Belli δεν υπήρχε προπύλαιο, γεγονός που μάλλον επιβεβαιώνεται, καθώς το θέατρο βρίσκεται πολύ κοντά στο Ληθαίο ποταμό.



Το μεγάλο θέατρο της Γόρτυνας (αεροφωτογραφία)

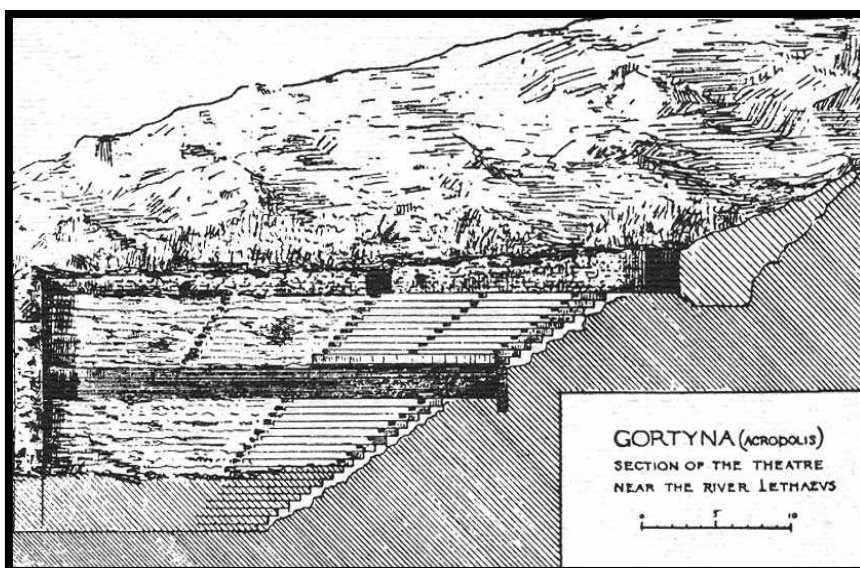
Το κοίλο του θεάτρου με περίμετρο 140μ., εσωτερική διάμετρο 40μ. περίπου και εξωτερική 88μ., είχε λαξευμένο κανάλι στην πίσω πλευρά του, το οποίο χρησίμευε και ως κανάλι απορροής των ομβρίων υδάτων κατά τη διάρκεια του χειμώνα, αλλά και για την πρόσβαση του κοινού στο ανώτερο διάζωμα μέσω πέντε ανοιγμάτων στον 2,2μ. πάχους εξωτερικό τοίχο. Τα δύο άκρα του κοίλου δεν ήταν λαξευμένα στο βράχο του λόφου αλλά στηρίζονταν από θολωτές κατασκευές οι οποίες είχαν τις συνήθεις τοξωτές εξωτερικές όψεις. Εντός του εξωτερικού τοίχου και πάνω από την ανώτερη κερκίδα με κιονοστοιχία πλάτους 2μ., και ένας πλατύτερος διάδρομος πλάτους (3,60μ.) χωρίζει το ανώτερο διάζωμα με το κατώτερο.



Μεγάλο θέατρο της Γόρτυνας (σχέδιο Ο. Belli)

Το κατώτερο διάζωμα ήταν μεγαλύτερο πιθανότατα με 18 σειρές καθισμάτων σε αντίθεση με τις 11 σειρές του ανώτερου διαζώματος.

Σύμφωνα με τον Sanders το μεγαλύτερο μέρος της κατασκευής που περιγράφεται παραπάνω σώζεται αν και σε κακή κατάσταση και καλυμμένη με βλάστηση. Όπου δεν είχε χρησιμοποιηθεί ο βράχος, το θέατρο είχε κατασκευαστεί με σύνθετο σκυρόδεμα και πλίνθινες εξωτερικές όψεις, ενώ στη βάση τους μεγάλα τμήματα κιώνων έχουν χρησιμοποιηθεί για περισσότερη σταθερότητα. Το κτίριο της σκηνής ήταν μήκους 120μ., ενώ η πρόσοψη της σκηνής κάλυπτε μόλις τα 70μ.



Γνωρίζουμε για αυτήν μόνο από τις περιγραφές του Onorio Belli τον 15ο αι. και πιθανότατα καταστράφηκε κατά τον 19ο αι. Η πρόσοψη ήταν ενιαία και το μοτίβο συνέχιζε ομοιόμορφα και στις παρόδους: ορθογώνιες εξέδρες με καμπύλη κόγχη στην πίσω τους πλευρά. Κάθε εξέδρα χωριζόταν από ένα ζευγάρι κίονες πάνω σε βάσεις από τις γειτονικές εξέδρες. Υπήρχαν τρεις θύρες στο χώρο πίσω από τη σκηνή, οι κεντρικές πλαισιώνονται από κίονες. Σύμφωνα με τον Belli η θύρα πίσω από τη σκηνή είχε πέντε σειρές κίωνων ύψους (πιθανόν των χαμηλότερων) 5,4μ. και διαμέτρου 0,53μ. (ο Sanders θεωρεί τον αριθμό των σειρών των κίωνων υπερβολικό). Ήταν από λευκό μάρμαρο και ιωνικού ρυθμού. Υπήρχε στην θύρα πίσω από τη σκηνή εντοιχισμένη επιγραφή στην

Ιουλία Αυγουστά (αβέβαιο σε ποια από τις αυτοκρατορικές Ιουλίες αναφερόταν η επιγραφή).

Σύμφωνα πάντως με τον Belli, η επιγραφή βρισκόταν σε δεύτερη χρήση.



1.5. Υφιστάμενη κατάσταση – Παλαιότερες επεμβάσεις

Το μνημείο δεν έχει διερευνηθεί ποτέ συστηματικά ούτε έχουν γίνει εργασίες συντήρησης. Παρουσιάζει εικόνα εγκατάλειψης και ερήμωσης και σώζεται αποσπασματικά. Λόγω τόσο της γεωμορφολογίας (πλαγιά λόφου) όσο και των υλικών κατασκευής του, διαχρονικά έχει υποστεί μεγάλες φθορές και υπάρχει διάσπαρτος μεγάλος όγκος δομικού υλικού, πράγμα που εμποδίζει στο να έχει κανείς με την πρώτη ματιά σαφή εικόνα του τι σώζεται. Η άγρια βλάστηση επίσης εμποδίζει στο να έχουμε εικόνα του μνημείου. Δεν υπάρχει διαμορφωμένη πρόσβαση ούτε πινακίδες σήμανσης, ή πινακίδες πληροφόρησης του μνημείου. Η πρόσβαση γίνεται μόνο από στενό αδιαμόρφωτο μονοπάτι, παράλληλο με το Ληθαίο ποταμό.



1.6. Γεωφυσικές έρευνες

Το 2009 πραγματοποιήθηκε από το ΙΤΕ γεωφυσική έρευνα και χαρτογράφηση του αρχαίου θεάτρου ύστερα από μνημόνιο συνεργασίας της Νομαρχιακής Αυτοδιοίκησης Ηρακλείου και της ΚΓ' ΕΠΚΑ με χρηματοδότηση της πρώτης. Οι γεωφυσικές έρευνες πραγματοποιήθηκαν σε έκταση πάνω από 5000τμ. με τις μεθόδους του γεωραντάρ, μαγνητικών μετρήσεων, ηλεκτρομαγνητικών



μετρήσεων και της ηλεκτρικής αντίστασης του εδάφους / ηλεκτρικής

τομογραφίας. Τα αποτελέσματα ήταν ενθαρρυντικά και θεωρείται ότι υπάρχει μια σχετικά καλή συσχέτιση ανάμεσα στα αποτελέσματα των μετρήσεων και της σχεδιαστικής αποτύπωσης του Ο. Belli (16ος αιώνας) ο οποίος μας διασώζει τη μόνη σχεδίαση του θεάτρου. Παράλληλα ο ίδιος μάς δίνει ενδιαφέρουσες πληροφορίες σε σχετική επιστολή του σε εποχή που το θέατρο βρισκόταν ακόμη σε καλή κατάσταση. Δεν έχει γίνει σε νεότερους χώρους λεπτομερής αποτύπωση του μνημείου ώστε να έχουμε ακριβές υπό κλίμακα αρχιτεκτονικό σχέδιο αυτού.

1.7. Αναγκαιότητα επεμβάσεων

Η επέμβαση στο μνημείο είναι επιτακτικά αναγκαία διότι:

- 1) Το μνημείο δεν είναι ανασκαμμένο, δεν υπάρχει λεπτομερής αποτύπωση.
- 2) Το μνημείο λόγω της κατωφέρειας και των υλικών δόμησης υφίστανται φθορές που εγκυμονούν κινδύνους παντελούς αφάνισης του μνημείου εάν δεν γίνουν στερεωτικές εργασίες.
- 3) Το διάσπαρτο δομικό υλικό δημιουργεί σύγχυση στον επισκέπτη.
- 4) Δεν υπάρχει διαμορφωμένη πρόσβαση ή πινακίδες σήμανσης – πληροφόρησης.
- 5) Η φυσική βλάστηση καλύπτει μέρος του μνημείου και προξενεί φθορά
- 6) Η υφιστάμενη περίφραξη δεν είναι επαρκής καθώς τμήμα του θεάτρου εκτείνεται εκτός αυτής.
- 7) Θα υπάρξει δυνατότητα σύνδεσης – ενοποίησης με τον υφιστάμενο επισκέψιμο αρχ/κό χώρο, κατασκευάζοντας συνδετήρια γέφυρα πάνω από

το Ληθαίο ποταμό.



2. Κεφάλαιο 2

Βασικές αρχές ηλεκτρικών διασκοπίσεων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα γενικά χαρακτηριστικά της ηλεκτρικής διασκόπισης. Εν συντομία αναλύεται το φυσικό υπόβαθρο της μεθόδου. Παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους υλοποιούνται οι διατάξεις μέτρησης, τα όργανα που χρησιμοποιούνται και ο σχεδιασμός για την πραγματοποίηση της γεωφυσικής έρευνας.

2.1. Εισαγωγή

Η γεωηλεκτρική μέθοδος παρουσιάζει μια ποικιλία έναντι των άλλων γεωφυσικών μεθόδων όπως η βαρυτική, η μαγνητική, η σεισμική και η ραδιομετρική. Μετριοούνται συνήθως δυναμικά, ρεύματα (εντάσεις και πυκνότητες) και ηλεκτρομαγνητικά πεδία που παράγονται είτε από φυσικές είτε από τεχνητές πηγές. Με την εφαρμογή των ηλεκτρικών μεθόδων γεωφυσικής διασκόπισης επιδιώκεται ο καθορισμός της κατανομής των ηλεκτρικών ιδιοτήτων των πετρωμάτων των επιφανειακών στρωμάτων του φλοιού της Γης, με μετρήσεις ηλεκτρικών ποσοτήτων στην επιφάνεια της Γης. Σκοπός της γεωηλεκτρικής μεθόδου διασκόπισης είναι να μετρηθεί η διαφορά δυναμικού που προκαλείται από την εισαγωγή ηλεκτρικού ρεύματος μέσα στην γη. Η μετρούμενη διαφορά δυναμικού αντικατοπτρίζει τη δυσκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μέσα στο υπέδαφος, δίνοντας έτσι μια ένδειξη για την ηλεκτρική αντίσταση του υπεδάφους. Διαφορετικοί γεωλογικοί σχηματισμοί παρουσιάζουν και διαφορετικές ηλεκτρικές αντιστάσεις. Η γνώση της γεωηλεκτρικής δομής του υπεδάφους μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την έμμεση εύρεση της γεωλογικής δομής και δομών ενδιαφέροντος.

Οι ηλεκτρικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται κυρίως στη χαρτογράφηση γεωλογικών στρωμάτων (Vandenberghe, 1982 Olesen et al., 1992 Griffiths and Barker, 1993), στην ανεύρεση και χαρτογράφηση υδάτινων πόρων (Van dam, 1976

Rijo et al., 1977 Aubert et al., 1984 Olayinka and Barker, 1990), στην τεχνική γεωλογία για την εύρεση του βάθους του μητρικού πετρώματος σε τοποθεσίες κατασκευής τεχνητών φραγμάτων (Habberjam, 1975 Smith, 1986 Butler and Llopis, 1990 Dahlin et al., 1994), στην ανίχνευση γεωθερμικών πεδίων (Wright et al., 1985 Thanassoulas and Tsokas, 1987), στην περιβαλλοντική γεωλογία για τον εντοπισμό μολυσμένων υπόγειων υδάτων (Rodgers and Kean, 1980) και διαρροών αποβλήτων (Van et al., 1992) καθώς και στην εύρεση στόχων αρχαιολογικού ενδιαφέροντος (Aitken, 1974 Hesse et al., 1986 Roka and Tsokas, 1987 Orlando et al., 1987 Szymanski et al., 1992).

2.2. Διάδοση ηλεκτρικού ρεύματος

Οι μέθοδοι που εφαρμόζονται ανήκουν στην κατηγορία του τεχνητά παραγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος, το οποίο διαβιβάζεται στο έδαφος δια μέσου ενός ζεύγους ηλεκτροδίων και σε ένα δεύτερο ζεύγος ηλεκτροδίων όπου μετράτε η πτώση τάσης που προκαλείται (Σχήμα 2.1). Η διάδοση του ηλεκτρικού ρεύματος στην γη γίνεται με τους εξής τρεις τρόπους.

1. Ηλεκτρολυτική αγωγιμότητα

Το ηλεκτρικό ρεύμα διαδίδεται μέσω των ιόντων αλάτων και ορυκτών που είναι διαλυμένα μέσα στο νερό που γεμίζει τους πόρους των γεωλογικών σχηματισμών.

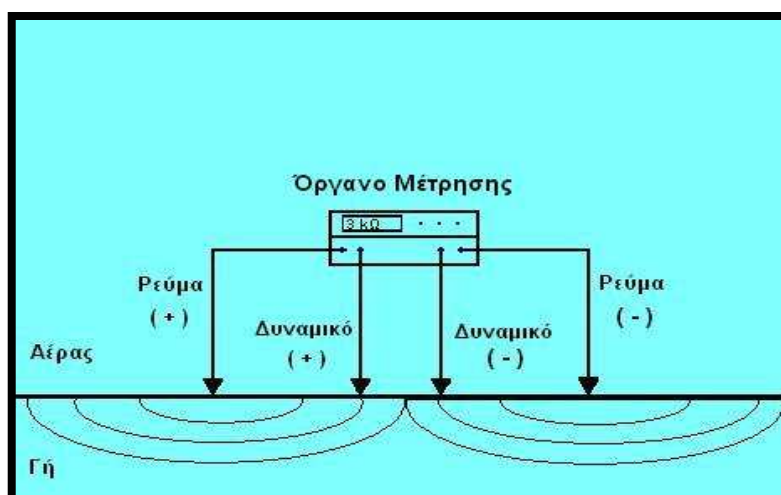
2. **Ηλεκτρονική αγωγιμότητα** Το ηλεκτρικό ρεύμα διαδίδεται μέσω των ελεύθερων ηλεκτρονίων που βρίσκονται στην κρυσταλλική δομή πετρωμάτων και ορυκτών (κυρίως μεταλλικών)

3. Διηλεκτρική αγωγιμότητα

Το εναλλασσόμενο ηλεκτρικό ρεύμα προκαλεί κυκλική κίνηση στα ιόντα της κρυσταλλικής δομής κάποιων μονωτών. Η κίνηση αυτή προκαλεί δευτερεύων εναλλασσόμενο ρεύμα.

2.3. Ειδική ηλεκτρική αντίσταση

Η ηλεκτρική αντίσταση που υπολογίζεται σαν το πηλίκο των δύο αυτών μεγεθών χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης ρ .

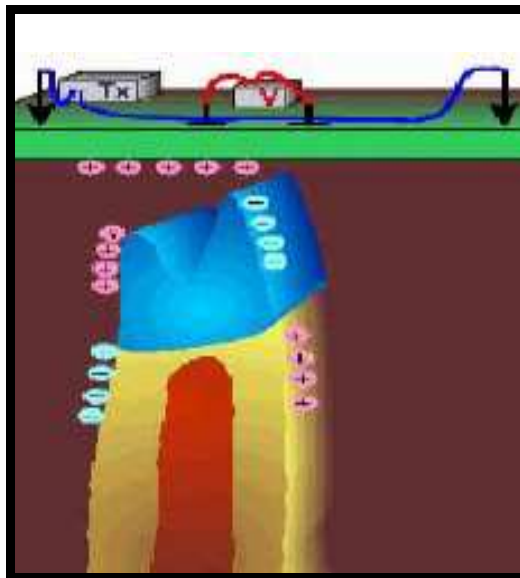


Σχήμα 2.1.: Η βασική διάταξη γεωηλεκτρικών μετρήσεων.

Η ειδική ηλεκτρική αντίσταση ρ ενός στερεού σώματος κυλινδρικού σχήματος, διατομής S και μήκους L , που έχει ηλεκτρική αντίσταση R , ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{RS}{L} \quad (2.1.)$$

και αντικατοπτρίζει την δυσκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μέσα στο υπέδαφος στο σύστημα SI. Το R μετράται σε Ohms, το L σε μέτρα (m) και το S σε τετραγωνικά μέτρα (m^2). Μονάδα μέτρησης της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης είναι το $Ohm \cdot m$.



Σχήμα 2.2: Ειδική ηλεκτρική αντίσταση

Ένας άλλος όρος, που περιγράφει τη συμπεριφορά της Γης στη διέλευση του ρεύματος είναι η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα σ , η οποία αποτελεί το αντίστροφο της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης

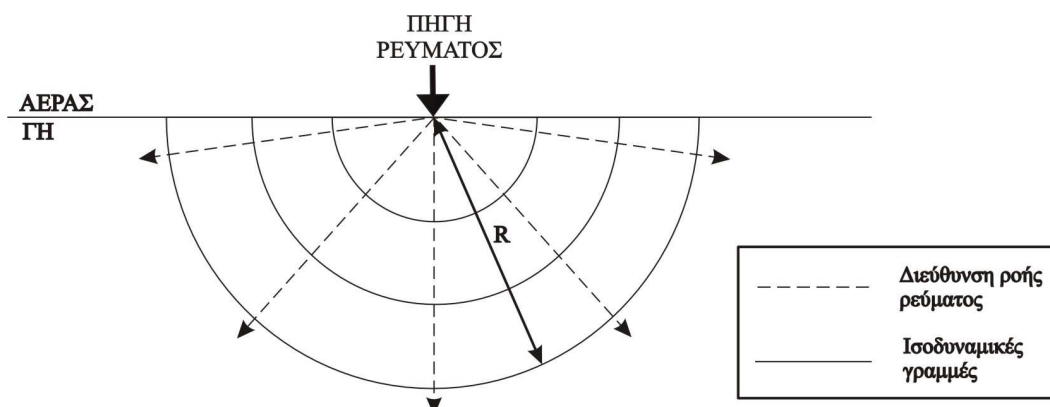
$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (2.2.)$$

και αντικατοπτρίζει την ευκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μέσα στο υπέδαφος. Η μονάδα μέτρησης της ειδικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας είναι το **siemens** ανά μέτρο (S/m).

2.4. Φαινόμενη ηλεκτρική αντίσταση

Στην απλή περίπτωση, όπου το έδαφος είναι ομογενές και ισότροπο, το ρεύμα που εισέρχεται σε αυτό μέσω μιας σημειακής πηγής (ηλεκτροδίου), ρέει ακτινικά διερχόμενο από ένα ημισφαίριο εμβαδού $S = 2\pi r^2$, όπου r είναι η απόσταση της περιφέρειας του ημισφαιρίου από το σημείο εισαγωγής του ρεύματος. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες έχουν σχήμα ημισφαιρίου και οι γραμμές του ρεύματος είναι κάθετες στις ισοδυναμικές επιφάνειες (σχήμα 2.2.). Σε αυτή την περίπτωση το δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{\rho i}{2\pi r} \quad (2.3.)$$



Σχήμα 2.3.: Οι ισοδυναμικές γραμμές και η κατεύθυνση του ρεύματος για μια σημειακή πηγή.

Στην πράξη χρειάζονται τέσσερα ηλεκτρόδια για να γίνει μέτρηση της αντίστασης ενός ημιχώρου. Τα δύο από αυτά χρησιμεύουν στην εισαγωγή και κυκλοφορία του ρεύματος και τα ονομάζουμε A και B, ενώ με τη βοήθεια των άλλων μετράμε τη διαφορά δυναμικού στα αντίστοιχα σημεία και τα ονομάζουμε M και N. Έστω ότι AM είναι η απόσταση του M από το θετικό ηλεκτρόδιο A, BM από το αρνητικό B και AN και BN οι αντίστοιχες αποστάσεις του N από τα ηλεκτρόδια του ρεύματος (σχήμα 2.3.). Τότε, σύμφωνα με τη σχέση (2.3.), η διαφορά δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων A και B για έναν ομογενή ημιχώρο με αντίσταση ρ και για μια διάταξη τεσσάρων ηλεκτροδίων, είναι:

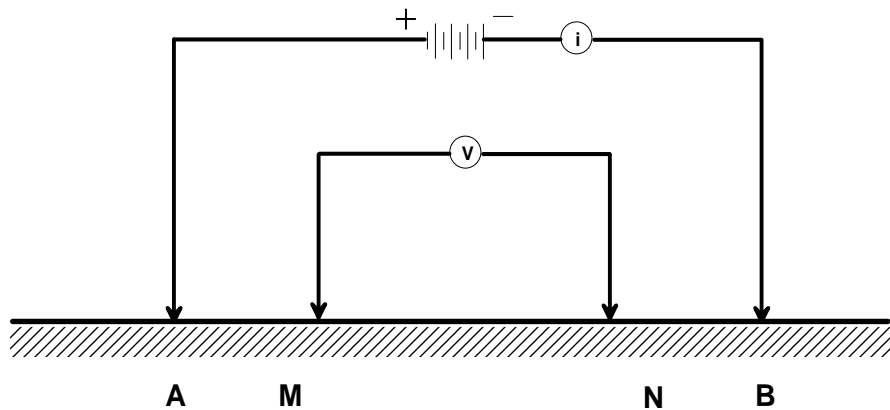
$$\Delta V = \frac{\rho i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right) \quad (2.4.)$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται για τη μελέτη των διαφόρων διατάξεων.

Επομένως, η αντίσταση του ημιχώρου μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$\rho = \frac{2\pi \Delta V}{K i} \quad (2.5.)$$

όπου K είναι ο παράγοντας μέσα στην παρένθεση της σχέσης (2.4.), ο οποίος λέγεται γεωμετρικός παράγοντας και εξαρτάται από τη διάταξη των τεσσάρων ηλεκτροδίων. Στην περίπτωση ομογενούς και ισότροπου εδάφους και για οποιαδήποτε διάταξη ηλεκτροδίων, όταν ο γεωμετρικός παράγοντας πολλαπλασιάζεται με τη μετρούμενη αντίσταση, το αποτέλεσμα είναι η πραγματική αντίσταση του εδάφους.



Σχήμα 2.4.: Διάταξη τεσσάρων ηλεκτροδίων για τη μέτρηση της διαφοράς δυναμικού.

Στην περίπτωση μη ομογενούς και ισότροπου χώρου, η σχέση (2.5.), ορίζει μια παράμετρο που ονομάζεται φαινόμενη ειδική ηλεκτρική αντίσταση του ημιχώρου ρ_a . Η παράμετρος αυτή εισάγεται για να ληφθεί υπόψη η γεωμετρία της μέτρησης, οι θέσεις δηλαδή των ηλεκτροδίων. Η φαινόμενη αντίσταση δεν είναι η πραγματική αντίσταση του υπεδάφους, αλλά μια φαινόμενη τιμή, η οποία είναι η αντίσταση που θα είχε το έδαφος εάν ήταν γεωηλεκτρικά ομογενές. Η τιμή αυτή ταυτίζεται με την πραγματική αντίσταση όταν πρόκειται για ομογενή γη.

Στην πράξη η φαινόμενη αντίσταση ρ_a αποτελεί ένα είδος μέσου όρου των ηλεκτρικών αντιστάσεων του ανομοιογενούς υπεδάφους. Επομένως, δε δίνει ακριβώς την πραγματική αλλά μια “παραμορφωμένη εικόνα” της γεωηλεκτρικής δομής του υπεδάφους. Για το λόγο αυτό, η απευθείας χρήση των μετρήσεων φαινόμενης αντίστασης για την εξαγωγή συμπερασμάτων είναι παρακινδυνευμένη. Η πραγματική αντίσταση μπορεί να βρεθεί μόνο μετά από

κατάλληλη επεξεργασία. Ο καθορισμός της πραγματικής αντίστασης από τις τιμές της φαινόμενης αντίστασης είναι η λύση του αντίστροφου προβλήματος, για το οποίο θα γίνει λόγος παρακάτω.

2.5. Μεταβολές ηλεκτρικής αντίστασης

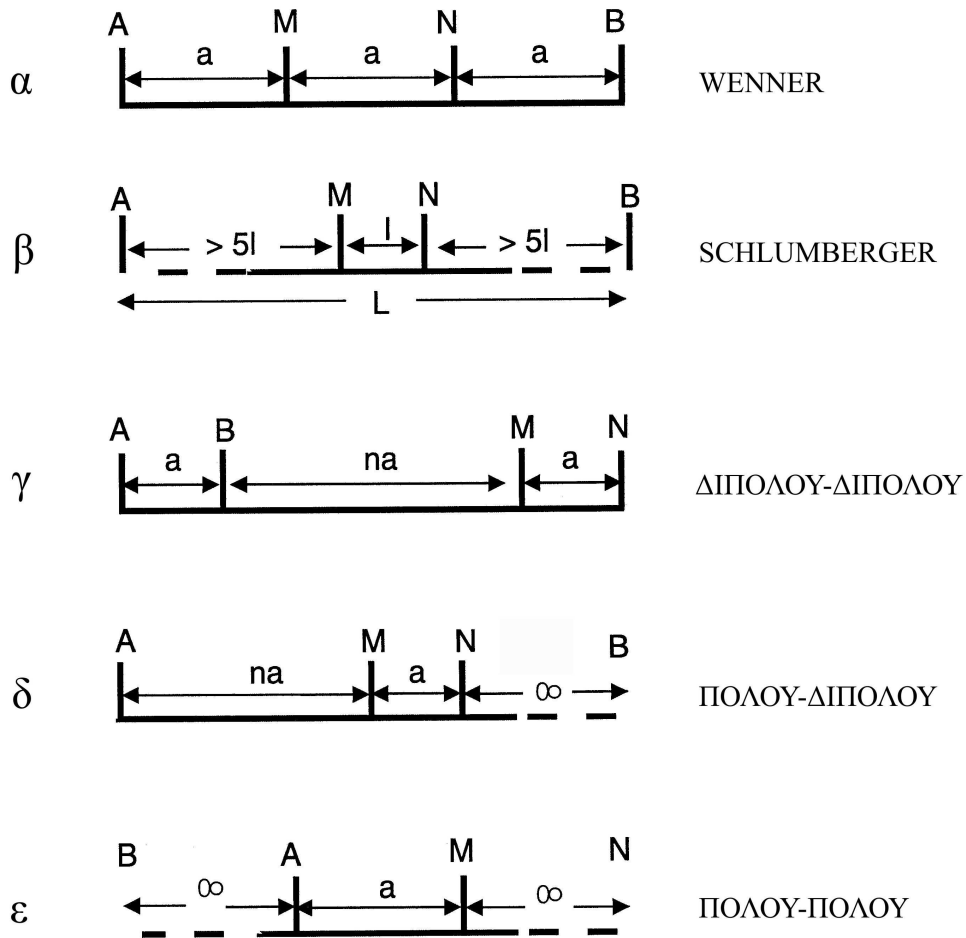
Η αντίσταση ρ κατά κύριο λόγο εξαρτάται από την ηλεκτρολυτική αγωγιμότητα δηλαδή είναι συνδυασμός παραγόντων που επηρεάζουν τη συγκέντρωση, σύσταση του νερού. Ειδικότερα εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως είναι οι υδρολογικές–υδρογεωλογικές συνθήκες της περιοχής μελέτης, η χημική σύσταση του

νερού, το μέγεθος των πόρων των σχηματισμών, πιθανές διαρρήξεις, διακλάσεις ή ρήγματα των σχηματισμών, η θερμοκρασία και η πίεση που επικρατούν. Τα μεταμορφωμένα και τα πυριγενή πετρώματα έχουν υψηλές τιμές αντίστασης. Η αντίσταση αυτών των πετρωμάτων εξαρτάται από το βαθμό ρωγμάτωσής τους και από το ποσοστό του νερού που περιέχουν στους πόρους τους. Τα ιζηματογενή πετρώματα, τα οποία είναι συνήθως περισσότερο πορώδη και περιέχουν υψηλότερο ποσοστό νερού, έχουν χαμηλότερες αντιστάσεις. Η αντίσταση του νερού ποικίλει από 10 έως 100 $\Omega \cdot m$, ανάλογα με την περιεκτικότητά του σε διαλυμένα άλατα (Παπαζάχος, 1986).

2.6. Διατάξεις ηλεκτροδίων

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι κατά τους οποίους διατάσσονται τα ηλεκτρόδια του ρεύματος και του δυναμικού. Παρακάτω παρουσιάζονται οι ευρύτερα χρησιμοποιούμενες διατάξεις αλλά και αυτές που εμείς χρησιμοποιήσαμε κατά την διάρκεια των μετρήσεων μας (σχήμα 2.4.). οι οποίες είναι : **Wenner, Schlumberger, διπόλου – διπόλου , πόλου - διπόλου και πόλου-πόλου.**

Το κύριο χαρακτηριστικό μιας διάταξης είναι ο γεωμετρικός της παράγοντας, ο οποίος σχετίζεται μονοσήμαντα με τις σχετικές αποστάσεις μεταξύ των ηλεκτροδίων (Tsourlos, 1995).



Σχήμα 2.4.:Οι συχνότερα χρησιμοποιούμενες διατάξεις ηλεκτροδίων (Tsourlos, 1995)

Διάταξη WENNER

Κατά τη διάταξη αυτή τα ηλεκτρόδια δυναμικού M,N τοποθετούνται μεταξύ των ηλεκτροδίων δυναμικού A,B (σχήμα 2.4α.).Οι αποστάσεις μεταξύ των παρακείμενων ηλεκτροδίων είναι ίσες με a . Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.4.) προκύπτει ότι:

$$K = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} \quad (2.6.)$$

και επομένως η φαινόμενη αντίσταση για τη διάταξη Wenner δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_a = 2\pi a \frac{\Delta V}{i} \quad (2.7.)$$

Διάταξη SCHLUMBERGER

Η διάταξη αυτή είναι παρόμοια με τη διάταξη Wenner, αλλά τα ηλεκτρόδια ρεύματος είναι τοποθετημένα σε απόσταση πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση των ηλεκτροδίων δυναμικού (σχήμα 2.4β). Αν η απόσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων ρεύματος είναι $2L$, η απόσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων δυναμικού είναι $2l$ και ισχύει $L \geq 10l$, τότε η φαινόμενη αντίσταση είναι:

$$\rho_a = \frac{\pi L^2}{2l} \cdot \frac{\Delta V}{i} \quad (2.8.)$$

2.7. Ηλεκτρική τομογραφία

Τρεις μέθοδοι έρευνας είναι οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες για τον καθορισμό της αντίστασης. Με τη μέθοδο της βυθοσκόπησης (sounding) καθορίζεται η αντίσταση σε συνάρτηση με το βάθος. Το κέντρο της διάταξης παραμένει σταθερό και με τη συνεχή αύξηση της απόστασης των ηλεκτροδίων ρεύματος, αυξάνεται και το βάθος διείσδυσης του ρεύματος και διαρρέονται βαθύτεροι σχηματισμοί. Με τη μέθοδο της όδευσης (profiling) εντοπίζονται πλευρικές μεταβολές της αντίστασης. Αντίθετα με τη βυθοσκόπηση, οι αποστάσεις των ηλεκτροδίων παραμένουν σταθερές και λαμβάνεται μια σειρά μετρήσεων με πλευρική μετακίνηση της διάταξης των ηλεκτροδίων ως συνόλου με σταθερό βήμα.

Η μέθοδος της ηλεκτρικής τομογραφίας αποτελεί συνδυασμό των μεθόδων της **βυθοσκόπησης** και της **όδευσης** και παρέχει τη δυνατότητα λήψης πληροφοριών τόσο για την πλευρική όσο και για τη σε βάθος μεταβολή της αντίστασης. Η ηλεκτρική τομογραφία μπορεί να περιγραφεί ως μία σειρά από συνεχόμενες ηλεκτρικές βυθοσκοπήσεις κατά μήκος της γραμμής έρευνας ή ως μία σειρά από οδεύσεις πάνω από την ίδια περιοχή με διαδοχικά αυξανόμενες αποστάσεις ηλεκτροδίων. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε μια διδιάστατη εικόνα της περιοχής μελέτης.

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της ηλεκτρικής τομογραφίας είναι ότι, σε σύγκριση με τις άλλες τεχνικές, λαμβάνεται ένας αρκετά μεγάλος αριθμός μετρήσεων (άρα και χρήσιμης πληροφορίας). Με αυτόν τον τρόπο αυξάνεται η διακριτική ικανότητα και ανάλυση της γεωηλεκτρικής μεθόδου. Παράλληλα όμως, λόγω του μεγάλου αριθμού τους, οι μετρήσεις είναι δύσκολο να ληφθούν με χειροκίνητη αλλαγή των ηλεκτροδίων, και γι' αυτό χρησιμοποιούνται συστήματα αυτοματοποιημένων πολυπλεκτών.

Πρόδρομος της ηλεκτρικής τομογραφίας είναι η μέθοδος της “ψευδοτομής” που έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα στην χαρτογράφηση μεταλλευμάτων (Edwards 1977)

αλλά και σε διάφορες άλλες εφαρμογές (π.χ. υδρογεωλογικές, Griffiths et al. 1990). Στην διαδικασία της “ψευδοτομής” μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες διατάξεις ηλεκτροδίων (διπόλου-διπόλου, Wenner, πόλου-διπόλου).

Η ηλεκτρική τομογραφία όμως είναι πιο γενικευμένος όρος που περιλαμβάνει και μετρήσεις με μη συμβατικές διατάξεις καθώς επίσης και μετρήσεις που λαμβάνονται με ηλεκτρόδια σε γεωτρήσεις (π.χ. Shima 1992).

2.8. Ερμηνεία των μετρήσεων

Η πλέον δημοφιλής τεχνική για την αποκατάσταση της πραγματικής εικόνας της γεωηλεκτρικής αντίστασης του υπεδάφους είναι αυτή της αντιστροφής. Σκοπός της αντιστροφής είναι να βρεθεί ένα μοντέλο αντίστασης που να δίνει μετρήσεις που είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στις πραγματικές. Προϋπόθεση η ύπαρξη μεθόδου επίλυσης του ευθέως προβλήματος, δηλαδή, να βρεθούν οι μετρήσεις, δοθείσης της κατανομής της αντίστασης.

Αρχικά γίνεται μια αναφορά στην επίλυση του ευθέως προβλήματος, δηλαδή στον υπολογισμό της θεωρητικής απόκρισης του υπεδάφους σε μια διέγερση από ένα πομπό TDEM. Παρουσιάζονται πολύ συνοπτικά οι διάφορες μέθοδοι επίλυσης, αριθμητικές ή αναλυτικές. Επίσης παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού του Ιακωβιανού πίνακα **A** που χρησιμοποιείται στην επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος.

Παρουσιάζονται οι εξισώσεις που ισχύουν για την περίπτωση επίλυσης μη γραμμικών αντιστροφών προβλημάτων χωρίς περιορισμούς, και ακολουθεί μια αναφορά στα κριτήρια σύγκλισης και στη χρήση πινάκων στατιστικών βαρών στις εξισώσεις.

Ακολούθως αναφέρονται οι μέθοδοι επίλυσης των μη γραμμικών συστημάτων με περιορισμούς. Οι μέθοδοι αυτές είναι οι πλέον χρησιμοποιούμενες στην πράξη, καθώς χειρίζονται αποτελεσματικά το πρόβλημα της αστάθειας της αντιστροφής του γενικευμένου Ιακωβιανού. Τέλος παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα και τα σχετικά μειονεκτήματα των μεθόδων, καθώς και οι λόγοι που μας οδήγησαν στην επιλογή μιας εξ αυτών για την εφαρμογή του αλγορίθμου που θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

2.9. Επίλυση του ευθέως προβλήματος

Από την δεκαετία του 1960 και μεταγενέστερα, πολλοί ερευνητές έχουν προτείνει λύσεις του ευθέως προβλήματος για τη μέθοδο των TDEM, είτε αναλυτικές είτε αριθμητικές. Για την περίπτωση απλών δομών, όπως είναι ο ομογενής ημιχώρος ή υπεδάφος δύο στρωμάτων, υπήρξαν αναλυτικές λύσεις. Για πιο πολύπλοκες δομές, όπως στρωματομένη Γη (1-D μοντέλα) και σώματα δύο ή τριών διαστάσεων, η λύση βασίζεται σε αριθμητικές λύσεις (Goldman 1988, Poddar και Anderson 1992, Hanneson 1992, Newman και Hohmann 1988, McNeil et al. 1984, SanFilipo et al. 1985, Newman et al. 1986). Οι περισσότεροι ερευνητές εφάρμοσαν τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier σε μοντέλα στην περιοχή των συχνοτήτων. Παρακάτω

αναφέρονται οι κυριότερες από αυτές για μονοδιάστατα μοντέλα, μιας και με αυτά ασχοληθήκαμε στην παρούσα εργασία.

- Ημιστατική απόκριση αγωγίμης σφαίρας σε διπολικό πεδίο (Nabighian 1970).
- Υπολογισμός φαινόμενης αγωγιμότητας με την χρήση ασύμπτωτων καμπυλών (Kaufman και Keller 1983, Kaufman και Morozova 1970, Morozova και Kaufman 1967).
- Επίλυση του ευθέως προβλήματος με την χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier στο πεδίο των συχνοτήτων (Spies 1976, Buselli 1977).
- Πρότυπες καμπύλες για την ερμηνεία Γης δύο στρωμάτων (Raiche και Spies 1981).
- Επίλυση του ευθέως προβλήματος με χρήση της πλήρους κυματομορφής του δέκτη (Asten 1987).
- Επίλυση του ευθέως προβλήματος με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace (Raiche 1984, Knight και Spies 1982, Karmis et al. 2002α).

Στην παρούσα εργασία για τη δημιουργία του αλγορίθμου σταθερής αντιστροφής δεδομένων TDEM σε μια διάσταση χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος από τους Karmis et al. (2002α). Είναι μια τροποποιημένη εφαρμογή της τεχνικής που προτάθηκε από τους Knight και Spies (1982) για το μοντέλο SIROTEM MKII.

2.10. Υπολογισμός του ιακωβιανού πίνακα

Η γενική διαδικασία αντιστροφής εμπεριέχει την έννοια της επαναληπτικής διαδικασίας, για την περίπτωση των μη-γραμμικών συστημάτων. Προσπαθούμε με διαδοχικές βελτιώσεις να βρούμε το μοντέλο \mathbf{m} του υπεδάφους, εκείνο το οποίο επιλύοντας το ευθύ πρόβλημα θα μας δώσει συνθετικά δεδομένα $f(\mathbf{m})$ τα οποία να βρίσκονται όσο το δυνατό πιο κοντά σε αυτά που μετρήθηκαν στο ύπαιθρο.

Δημιουργείται έτσι ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\mathbf{d}=f(\mathbf{m}), \quad (2.9)$$

όπου \mathbf{d} είναι το διάνυσμα που περιέχει τα πειραματικά δεδομένα. Η λύση των γραμμικών εξισώσεων επιτρέπει να γραφεί η εξίσωση (3.1) στη μορφή $\mathbf{m}=f^{-1}(\mathbf{d})$. Η αντιστροφή όμως της συνάρτησης f δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε μη-γραμμικά συστήματα, όπως στην περίπτωση των προβλημάτων των TDEM. Η λύση δίνεται με συνεχείς προσεγγίσεις, όπου υπολογίζεται πρώτα η συνάρτηση $f(\mathbf{m}_j)$, για κάθε επανάληψη j , και με διαδοχικές βελτιώσεις του θεωρητικού μοντέλου γίνεται προσπάθεια να πλησιάσει όσο το δυνατό περισσότερο το πειραματικό.

Η βελτίωση του μοντέλου \mathbf{m}_j γίνεται εφαρμόζοντας μικρές διαταραχές $d\mathbf{m}_j$ στις παραμέτρους. Υπολογίζοντας πάλι την λύση του ευθέος προβλήματος για τις καινούργιες παραμέτρους, συγκρίνονται οι θεωρητικές μετρήσεις με τις πραγματικές μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης που έχει τεθεί εξαρχής. Αναπτύσσοντας την εξίσωση (2.9) σε σειρά Taylor και αγνοώντας όρους μεγαλύτερης τάξεως από του ενός,

$$f_i(m_j + dm_j) \approx f_i(m_j) + \frac{\partial f_i(m_j + dm_j)}{\partial (dm_j)} dm_j.$$

Οι μερικές παράγωγοι της απόκρισης του μοντέλου $f(\mathbf{m})$ σε σχέση με τις παραμέτρους $d\mathbf{m}$ αποτελούν τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{A} που ονομάζεται Ιακωβιανός.

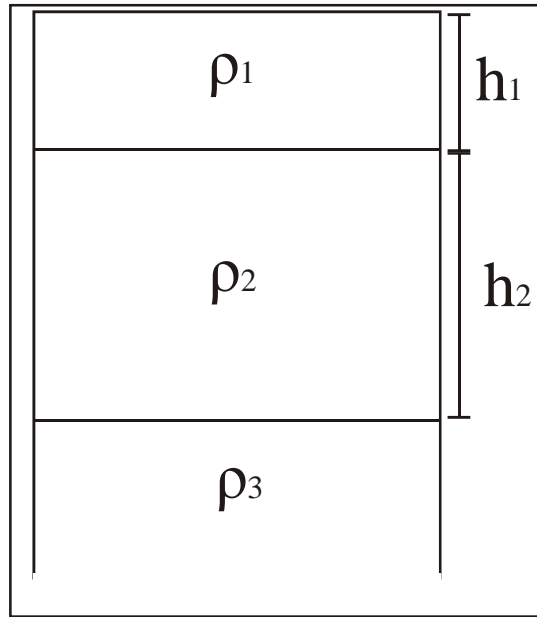
Άρα το στοιχείο ij του Ιακωβιανού πίνακα θα είναι

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i(m_j + dm_j)}{\partial (dm_j)} \quad (2.10)$$

Ο υπολογισμός των στοιχείων A_{ij} μέσω του τύπου (2.10) είναι δύσκολος, καθώς είναι άγνωστη η αναλυτική μορφή της συνάρτησης f . Υπάρχουν αριθμητικές λύσεις για τον υπολογισμό των στοιχείων του Ιακωβιανού Πίνακα, οι οποίες όμως είναι δύσκολο να υλοποιηθούν σε αλγοριθμική μορφή. Ο δημοφιλέστερος τρόπος είναι με τη χρήση της μεθόδου των διαταραχών των στοιχείων (perturbation technique) βάσει της εξίσωσης

$$A_{ij} = \frac{\log(f_i(m_j + \delta)) - \log(f_i(m_j))}{\delta}, \quad (2.11)$$

όπου δ είναι η διαταραχή $d\mathbf{m}$ που εισάγεται για την βελτίωση του μοντέλου \mathbf{m}_j . Δηλαδή, επιλύεται το ευθύ πρόβλημα μια φορά, και αλλάζουμε μια παράμετρο κατά ένα ποσοστό, π.χ. πέντε τοις εκατό, και επιλύεται δεύτερη φορά το ευθύ πρόβλημα για να υπολογιστεί η μεταβολή του συνθετικού μοντέλου εξαιτίας της διαταραχής της παραμέτρου. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε παράμετρο, έως ότου υπολογιστούν όλα τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{A} . Είναι φανερό ότι με την παραπάνω διαδικασία η μερική παράγωγος της εξίσωσης (2.10) υπολογίζεται προσεγγιστικά με τη χρήση των πεπερασμένων διαφορών (εξ.2.11).



Σχήμα 2.5 Μοντέλο τριών στρωμάτων με αντιστάσεις ρ_1, ρ_2, ρ_3 και πάχη h_1 και h_2 .

Στο σχήμα (2.6) παρουσιάζεται ένα μοντέλο υπεδάφους τριών στρωμάτων, με αντιστάσεις ρ_1, ρ_2, ρ_3 και πάχη h_1, h_2 αντίστοιχα. Ο Ιακωβιανός πίνακας σε αυτό το παράδειγμα θα είναι τάξης $(5 \times n)$ και θα έχει τη μορφή

$$A = \begin{array}{c|ccc|c} \frac{\partial f(m_1)}{\partial \rho_1} & \frac{\partial f(m_2)}{\partial \rho_1} & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial \rho_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial \rho_2} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial \rho_3} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial \rho_3} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial h_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial h_1} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial h_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial h_2} \end{array}$$

(2.12)

όπου n ο αριθμός των μετρήσεων. Τα στοιχεία του πίνακα υπολογίζονται με βάση τον τύπο (2.11).

2.10.1 Μη γραμμική αντιστροφή

Το πρόβλημα της ερμηνείας των γεωφυσικών ηλεκτρομαγνητικών δεδομένων πάσχει από μια εγγενή αδυναμία, η οποία και είναι συνηθισμένη στις περισσότερες γεωφυσικές μεθόδους: η αντιστροφή του γενικευμένου Ιακωβιανού πίνακα είναι ασταθής, με αποτέλεσμα, εάν δεν υπάρχουν περιορισμοί, οι λύσεις που προκύπτουν από την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος να είναι γεωλογικά απαρέδεκτες, παρόλο που μπορεί να είναι μαθηματικά ορθές.

Η διαδικασία της επίλυσης του ευθέως προβλήματος, μπορεί να γραφεί με την απλοποιημένη μορφή

$$f(\mathbf{m})=\mathbf{y}, \quad (2.13)$$

όπου \mathbf{y} είναι το διάνυσμα των πειραματικών δεδομένων, και $f(\mathbf{m})$ η λύση που προκύπτει από την επίλυση του ευθέως προβλήματος και αντιστοιχεί στο μοντέλο \mathbf{m} , που αποτελείται από πάχη και αντιστάσεις στρωμάτων.

Στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος, υποθέτουμε στρωματωμένη γη, δηλαδή τα στρώματα του υπεδάφους διατάσσονται οριζόντια, με συγκεκριμένα πάχη και αντιστάσεις. Άρα ο σκοπός της επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος είναι να μπορέσει να βρεθεί ένα μοντέλο στρωμάτων, το οποίο να έχει απόκριση που θα είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στις πειραματικές μετρήσεις.

Σκοπός λοιπόν της αντιστροφής είναι να καταλήξει σε μια σχέση της μορφής

$$\mathbf{y}=f^{-1}(\mathbf{m}). \quad (2.14)$$

Επειδή το πρόβλημα είναι μη γραμμικό, δε μπορεί να επιλυθεί απευθείας, αλλά μπορεί να αντικατασταθεί με την επίλυση επιμέρους «μικρότερων» γραμμικών προβλημάτων. Εάν η συνάρτηση $f(\mathbf{m})$ αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από μια πολύ μικρή μεταβολή του $d\mathbf{m}$, και αγνοώντας τους όρους μεγαλύτερης τάξης από την πρώτη, προκύπτει ότι

$$f(m+dm) \approx f(m) + \frac{\partial f(m)}{\partial m} dm = y, \quad (2.15)$$

όπου $\frac{\partial f(m)}{\partial m}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας, που εκφράζει τις μερικές παραγώγους της $f(\mathbf{m})$ σε σχέση με τη μεταβολή του μοντέλου \mathbf{m} .

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι
$$\frac{\partial f(m)}{\partial m} = y - f(m) = dy,$$

όπου $d\mathbf{y}$ η διαφορά μεταξύ πραγματικών και συνθετικών δεδομένων. Έτσι, η επίλυση του αρχικού μη γραμμικού προβλήματος έχει αντικατασταθεί με την επίλυση πολλών επιμέρους γραμμικών προβλημάτων.

Για την περίπτωση γραμμικών προβλημάτων, η λύση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του σφάλματος μεταξύ των πειραματικών και θεωρητικών δεδομένων, δηλαδή,

$$q = d\mathbf{y}^T d\mathbf{y} = (\mathbf{y} - f(\mathbf{m}))^T (\mathbf{y} - f(\mathbf{m})). \quad (2.16)$$

Θέτοντας την παράγωγο του q ως προς $d\mathbf{m}$ ίση με μηδέν, καταλήγουμε στις κανονικές εξισώσεις του συστήματος,

$$A^T A d\mathbf{m} = A^T d\mathbf{y}, \quad (2.17)$$

και η τελική λύση του συστήματος είναι

$$d\mathbf{m} = (A^T A)^{-1} A^T d\mathbf{y}, \quad (2.18)$$

όπου ο πίνακας $A^T A$ ονομάζεται γενικευμένος Ιακωβιανός.

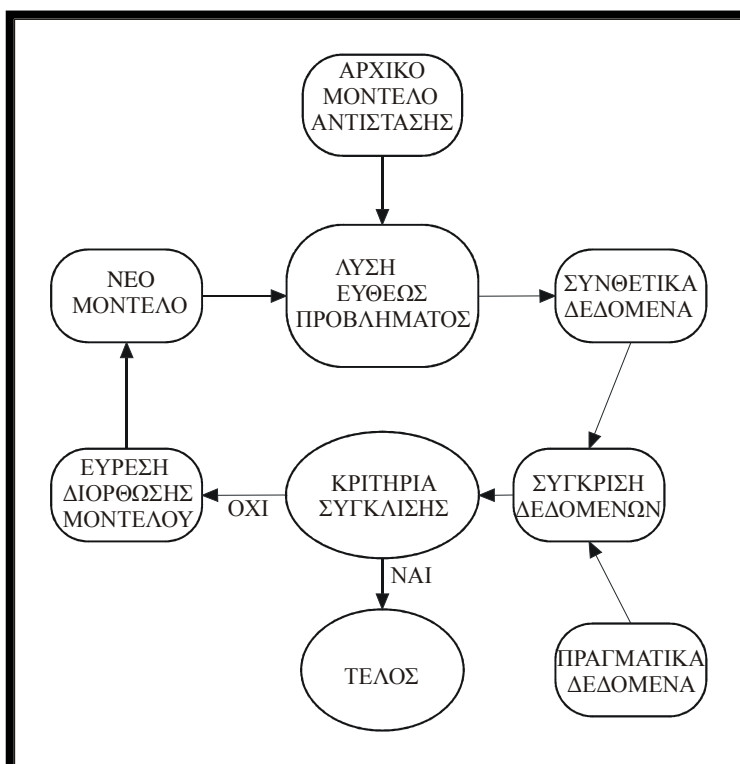
Βάσει της εξ.(2.17) μπορούμε να ορίσουμε τον αλγόριθμο επίλυσης του μη γραμμικού προβλήματος. Είναι μια επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία, σε κάθε επανάληψη k , η διόρθωση του μοντέλου δίνεται από τη σχέση

$$d\mathbf{m}_k = (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T d\mathbf{y}_k, \quad (2.19)$$

όπου \mathbf{A}_k είναι ο Ιακωβιανός πίνακας για την k επανάληψη, $dy_k = [y - f(m_{k-1})]$, και το νέο μοντέλο προκύπτει από την πρόσθεση της διόρθωσης στο προηγούμενο, δηλαδή,

$$m_{k+1} = m_k + dm_k . \quad (2.20)$$

Στο σχήμα (2.7) παριστάνεται σχηματικά η διαδικασία της μη γραμμικής αντιστροφής.



Σχήμα 2.7 Διάγραμμα ροής του αντιστρόφου μη γραμμικού προβλήματος.

2.10.2 Αστάθεια στην αντιστροφή του γενικευμένου ιακωβιανού

Όπως είδαμε στην εξ.(2.18), η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος TDEM σε μια διάσταση εμπεριέχει τον υπολογισμό του αντιστρόφου γενικευμένου Ιακωβιανού πίνακα $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Στην πράξη η αντιστροφή του γενικευμένου Ιακωβιανού είναι μαθηματικά ασταθής. Αυτό οφείλεται στους φυσικούς περιορισμούς της μεθόδου. Όσο η πληροφορία έρχεται από μεγαλύτερα βάθη, τόσο μειώνεται η διακριτική ικανότητα και κυρίως η ευαισθησία της μεθόδου. Άρα η μεταβολή μιας παραμέτρου που αντιστοιχεί σε μεγάλο βάθος, αναμένεται να επηρεάσει πολύ λίγο τις μετρήσεις μας. Αντίστροφα, μια μικρή αλλαγή σε κάποια μέτρηση μπορεί να επιφέρει τεράστια μεταβολή σε κάποιες από τις παραμέτρους του μοντέλου.

Άρα η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος έχει εγγενή αδυναμία, και η ύπαρξη σφαλμάτων στις μετρήσεις μας κάνει ακόμα πιο ασταθές το σύστημα (Lanczos 1961, Jackson 1972). Επομένως, καθώς προσπαθούμε να βρούμε ένα μοντέλο που να ταιριάζει στα πειραματικά δεδομένα που έχουμε συλλέξει, καταλήγουμε σε μια πλειάδα μοντέλων που μπορεί να ικανοποιούν μαθηματικά, ή ακόμα και φυσικά, τους όρους σύγκλισης μεταξύ πειραματικών και θεωρητικών μετρήσεων.

Απαιτείται έτσι η χρήση διαφόρων τεχνικών ώστε αφενός να κάνουμε την αντιστροφή μαθηματικά σταθερή, και αφετέρου να μπορέσουμε να διακρίνουμε ποιο από όλα τα μοντέλα που ικανοποιούν μαθηματικά τις εξισώσεις του συστήματος είναι αυτό που είναι πιο κοντά στο πραγματικό. Παρακάτω αναφέρονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται εκτεταμένα στην επίλυση του μονοδιάστατου προβλήματος με τη μέθοδο των TDEM.

2.10.3 Χρήση λογαριθμικής κλίμακας στην επίλυση συστημάτων

Στις μεθόδους αντιστροφής των γεωφυσικών προβλημάτων συχνή είναι η χρησιμοποίηση λογαριθμικής κλίμακας. Δύο είναι οι κύριες αιτίες. Η χρήση λογαρίθμων υποχρεώνει τις παραμέτρους να αποκτούν μόνο θετικές τιμές, αποφεύγοντας έτσι τιμές που δεν έχουν φυσικό νόημα (Sasaki 1982). Δεύτερον, λόγω του μεγάλου δυναμικού εύρους των τιμών που μπορεί να έχουν οι παράμετροι (ιδιαίτερα οι ηλεκτρικές αντιστάσεις), η χρήση λογαρίθμων δύναται να επιταχύνει το ρυθμό σύγκλισης του επαναληπτικού αλγορίθμου (Park και Van, 1991).

Το τετράγωνο του σφάλματος των ελαχίστων τετραγώνων, στην περίπτωση χρήσης λογαρίθμων, γίνεται $q' = dy'^T dy'$, όπου $dy' = \ln y - \ln f(m)$.

Το διάνυσμα των παραμέτρων \mathbf{m} γίνεται \mathbf{p}_i , όπου $p_i = e^{x_i}$, και $i=1, n$. Η λύση του συστήματος είναι

$$dp = (A'^T A')^{-1} A'^T dy, \quad (2.21)$$

όπου ο \mathbf{A}' έχει στοιχεία $A'_{ij} = \frac{\partial \ln y_i}{\partial p_j}$ (Tsourlos, 1995).

2.10.4 Κριτήρια σύγκλισης και ποιότητας – Ανάλυση σφαλμάτων

Η διαδικασία της αντιστροφής θα ήταν ημιτελής χωρίς ανάλυση των σφαλμάτων του διανύσματος των λύσεων. Καθώς τα δεδομένα έχουν εγγενή σφάλματα, είναι επόμενο να υπάρχουν σφάλματα και στη λύση που προκύπτει από τη μη γραμμική αντιστροφή του συστήματος. Ο έλεγχος των σφαλμάτων γίνεται με χρήση στατιστικών όρων (Press et all 1992).

Όπως και στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, ο μέσος όρος του τετραγώνου των σφαλμάτων υπολογίζεται ως

$$RMS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{(d_i^{ob} - d_i^{th})^2}{(d_i^{ob})^2}}, \quad (2.22)$$

όπου N ο αριθμός των δεδομένων, d^{ob} τα πειραματικά δεδομένα και d^{th} τα θεωρητικά δεδομένα.

Με τη χρήση του RMS ως κριτήριο σύγκλισης, το διάνυσμα των λύσεων είναι ευαίσθητο σε μεγάλα σφάλματα, γι αυτό στην πράξη χρησιμοποιείται ο όρος του αναγόμενου χ-τετράγωνο (Rijo 1977), που ορίζεται ως

$$\chi^2 = \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^N (d_i^{ob} - d_i^{th})^2, \quad (2.23)$$

όπου M ο αριθμός των παραμέτρων. Η χρήση αυτού του στατιστικού όρου κάνει τη λύση του συστήματος πιο ανεκτική σε μεγάλα σφάλματα.

Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα του όρου χ-τετράγωνο υπολογίζεται ο όρος του επί τοις εκατό μέσου σφάλματος των δεδομένων, που στην περίπτωση χρήσης λογαριθμικής κλίμακας δίνεται από τη σχέση

$$\% \varepsilon = (10^{\sqrt{\chi^2}} - 1) \times 100\%, \quad (2.24)$$

και είναι αυτός που χρησιμοποιείται στην σταθερή αντιστροφή, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ο ρυθμός σύγκλισης μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων (C.R), ορίζεται ως

$$C.R. = \frac{|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i|}{\varepsilon_{i+1}}. \quad (2.25)$$

Πέρα από τα σφάλματα των μετρήσεων, το τελικό αποτέλεσμα της διαδικασίας αντιστροφής πρέπει να ελεγχθεί αν βρίσκεται μεταξύ των ορίων εμπιστοσύνης.

Ο έλεγχος γίνεται βρίσκοντας τα σφάλματα του διανύσματος των λύσεων. Το σφάλμα της i παραμέτρου ορίζεται ως

$$S_{p_i} = \sqrt{\chi^2} \sqrt{(A^T A)_{ii}^{-1}}, \quad (2.26)$$

όπου $(A^T A)_{ii}$ είναι το στοιχείο του αντιστρόφου γενικευμένου Ιακωβιανού. Στην περίπτωση αυτή η παράμετρος p_i θα βρίσκεται μεταξύ των ορίων $p_i \pm S_{p_i}$.

2.10.5 Πίνακας στατιστικών βαρών

Καθώς η αναπόφευκτη ύπαρξη σφαλμάτων στις μετρήσεις επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα της αντιστροφής, ένας πολύ χρήσιμος τρόπος για τον έλεγχο τους είναι η εισαγωγή πινάκων στις εξισώσεις του συστήματος που να δίνουν μεγαλύτερη ή μικρότερη βαρύτητα στις μετρήσεις ανάλογα με την ποιότητα τους.

Εάν m είναι οι μετρήσεις, ορίζεται ένας διαγώνιος πίνακας $(m \times m)$, που ονομάζεται πίνακας στατιστικών βαρών, του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου ορίζονται ως

$$W_{ii} = \frac{1}{\sigma_i}, \quad (2.27)$$

όπου σ_i είναι το σφάλμα της i μέτρησης. Η τιμή του σφάλματος δίνεται είτε από το όργανο μέτρησης κατά τη διάρκεια της έρευνας, είτε από τον χρήστη ανάλογα με τις εκτιμήσεις του για την ποιότητα των στοιχείων που συνέλεξε.

Η φυσική έννοια της χρήσης των πινάκων \mathbf{W} είναι πως αν κάποια μέτρηση έχει μεγάλο σφάλμα, το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα θα έχει πολύ μικρή τιμή. Ο πίνακας αυτός πολλαπλασιάζεται και με τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.13), οπότε

$$\mathbf{W}f(\mathbf{m}) = \mathbf{W}y, \quad (2.28)$$

και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$dm_k = (A_k^T W^T W A_k)^{-1} A_k^T W dy_k. \quad (2.29)$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι η αντίστοιχη εξίσωση του συστήματος να λαμβάνεται λιγότερο υπόψη κατά τη διάρκεια της αντιστροφής, επηρεάζοντας έτσι το διάνυσμα των λύσεων λιγότερο από τις υπόλοιπες εξισώσεις του συστήματος.

2.10.6 Χρήση της svd στην επίλυση ασταθών συστημάτων

Ένας τρόπος επίλυσης συστημάτων που ο πίνακας \mathbf{A} είναι ασταθής είναι με τη χρήση της μεθόδου SVD (Lanczos 1961, Golub και Reinsch 1970, Lawson και Hanson 1974). Ο πίνακας \mathbf{A} διαστάσεων $(m \times n)$ αναλύεται σε τρεις πίνακες,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}, \quad (2.30)$$

όπου, ο πίνακας \mathbf{U} είναι διαστάσεων $(m \times n)$, ο $\mathbf{\Lambda}$ είναι διαγώνιος $(n \times n)$ και ο \mathbf{V} είναι διαστάσεων $(n \times n)$. Ο αντίστροφος γενικευμένος Ιακωβιανός είναι $\mathbf{A}_g^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^T$.

Ο πίνακας $\mathbf{\Lambda}$ είναι ο πίνακας των ιδιοτιμών του συστήματος. Από την ανάλυση του πίνακα $\mathbf{\Lambda}$, μπορούμε να καταλάβουμε το πόσο ασταθές είναι το σύστημα. Τα στοιχεία του πίνακα είναι

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_3} & \dots \\ & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{vmatrix}, \quad (2.31)$$

όπου, λ_i είναι οι ιδιοτιμές του συστήματος. Όταν οι ιδιοτιμές λ_i είναι πολύ μικρές (κοντά στο μηδέν), το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα $\mathbf{\Lambda}$ αποκτά πολύ μεγάλη τιμή και η συνεισφορά του στο διάνυσμα των λύσεων του συστήματος είναι μεγάλη.

Είναι δυνατό μέσω της ανάλυσης που επιτυγχάνεται με τη χρήση της SVD να εντοπιστούν οι πολύ μικρές ιδιοτιμές του συστήματος και να αποκοπούν. Εφαρμόζεται ένα κατώφλι κάτω από το οποίο τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{\Lambda}$ μηδενίζονται, και οι ιδιοτιμές αυτές δεν λαμβάνονται υπόψη κατά τη διαδικασία της αντιστροφής. Η τεχνική χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα στις αρχές της δεκαετίας του 1980 για την επίλυση των ασταθών συστημάτων στο αντίστροφο γεωφυσικό πρόβλημα (Inman et al. 1973, Murai και Kagawa 1985).

Το πρόβλημα είναι πως η επιλογή της τιμής που θα έχει το κατώφλι είναι αυθαίρετη, και εξαρτάται από το χρήστη, παρόλο που υπάρχουν διάφορες τεχνικές για τον ορισμό της τιμής αυτής (Press et al 1992). Αν δεν γίνει σωστός ορισμός της τιμής που θα έχει το κατώφλι, είτε θα αποκοπούν ιδιοτιμές που περιέχουν χρήσιμες πληροφορίες για το σύστημα που επιλύεται, είτε θα παραμείνουν ιδιοτιμές που θα

«παραμορφώσουν» τη λύση του συστήματος. Η δυσκολία να οριστεί το κατώφλι είναι και ο λόγος που η χρήση της SVD είναι περιορισμένη στην αντιστροφή γεωφυσικών προβλημάτων. Υπάρχουν άλλες μέθοδοι, που με πιο αποτελεσματικό τρόπο απομακρύνουν τις ιδιοτιμές αυτές, χωρίς τον κίνδυνο να χαθούν πληροφορίες του συστήματος, όπως θα δούμε παρακάτω.

2.11. Μη γραμμική αντιστροφή με περιορισμούς

Μια άλλη κατηγορία μεθόδων, ιδιαίτερα δημοφιλής και αποτελεσματική στην επίλυση του αντίστροφου γεωφυσικού προβλήματος, είναι η εισαγωγή περιορισμών στη λύση του συστήματος. Οι περιορισμοί μπορεί να προέρχονται από προϋπάρχουσες πληροφορίες για το πραγματικό μοντέλο, ή από εκτιμήσεις γύρω από αυτό. Η κύρια φιλοσοφία αυτών των μεθόδων είναι ότι οι τιμές των διορθώσεων σε κάθε επανάληψη της αντιστροφής, δεν πρέπει να αφήνονται να κινούνται ανεξέλεγκτα. Περιορίζεται έτσι το βήμα των διορθώσεων σε περιοχή εμπιστοσύνης ώστε να αποφευχθούν λύσεις οι οποίες είναι μεν μαθηματικά σωστές, αλλά είναι φυσικά (γεωλογικά) απαράδεκτες.

2.11.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης

Μια από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους για την επίλυση ασταθών αντίστροφων προβλημάτων είναι η τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης, που προτάθηκε από τον Levenberg (1944). Η σταθεροποίηση της αντιστροφής επιτυγχάνεται με την πρόσθεση μιας σταθεράς στα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Αργότερα ο Marquardt (1963, 1970) χρησιμοποίησε αυτή την ιδέα για να αναπτύξει ένα πολύ χρήσιμο αλγόριθμο. Η μέθοδος ονομάστηκε Levenberg-Marquardt και είναι αυτή που χρησιμοποιείται κατά κόρον στη Γεωφυσική. Η μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα στη μονοδιάστατη αντιστροφή των δεδομένων της μεθόδου των TDEM (Sandberg 1988, TEMIX, User's Manual).

Η μέθοδος εκτός από τη συνθήκη για περιορισμό του σφάλματος $q = dy^T dy = (y - f(m))^T (y - f(m))$, εισάγει ένα ακόμα περιορισμό, την προϋπόθεση η λύση να βρίσκεται μέσα στο χώρο εμπιστοσύνης που εξαρχής ορίζεται από το χρήστη. Μαθηματικά ο περιορισμός αυτός ορίζεται ως

$$dm^T dm < ct, \quad (2.32)$$

όπου ct είναι μια θετική σταθερά που αντικατοπτρίζει το ποσοστό του θορύβου που έχουν τα δεδομένα.

Προκύπτει έτσι μια καινούργια συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση, η

$$\phi = q_1 + \lambda q_2 = dy^T dy + \lambda(m^T m - L_0^2). \quad (2.33)$$

Στην εξίσωση (2.33), η συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση είναι ο γραμμικός συνδυασμός του τετραγώνου των σφαλμάτων και του μεγέθους των λύσεων, και τίθεται ένα ανώτερο επιτρεπτό όριο στο μέγεθος των αλλαγών των παραμέτρων. Ο παράγοντας λ ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange ή παράγοντας απόσβεσης και μένει να καθοριστεί.

Ακολουθώντας παρόμοια στρατηγική όπως στην περίπτωση χωρίς περιορισμούς, καταλήγουμε στις κανονικές εξισώσεις, που για το γραμμικό πρόβλημα είναι,

$$(A^T A + \lambda I)m = A^T y . \quad (2.34)$$

Για το μη γραμμικό πρόβλημα, η διόρθωση του μοντέλου, για κάθε επανάληψη k , είναι

$$dm_k = [A_k^T A_k + \lambda_k I]^{-1} A_k^T dy_k , \quad (2.35)$$

και το νέο μοντέλο δίνεται από τη σχέση

$$m_{k+1} = m_k + dm_k . \quad (2.36)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν πίνακες στατιστικών βαρών, η εξίσωση (2.35) μετατρέπεται στην

$$dm_k = [A_k^T W^T W A_k + \lambda_k I]^{-1} A_k^T W dy_k . \quad (2.37)$$

Αναλύοντας τον πίνακα \mathbf{A} με τη χρήση της SVD και επιλύοντας το σύστημα,

$$m = (V \Lambda U^T U \Lambda V^T + \lambda I)^{-1} V \Lambda U^T y = V \text{diag}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \lambda}\right) U^T y . \quad (2.38)$$

Ο πίνακας $\text{diag}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \lambda}\right)$ έχει τη μορφή (2.39)

Αν η ιδιοτιμή λ_i είναι μεγάλη, τότε η πρόσθεση του λ στο κλάσμα δεν επιφέρει καμία αλλαγή. Αν όμως το λ_i είναι μικρό, η πρόσθεση του λ δίνει μια πολύ μικρή τιμή στο κλάσμα, και κάνει το στοιχείο του πίνακα Λ να έχει πολύ μικρή συνεισφορά στο διάνυσμα των λύσεων (Jupp και Vozoff 1975).

$$\begin{array}{cccc|c} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda} & & & & 0 \\ & \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + \lambda} & & & 0 \\ 0 & & \frac{\lambda_3}{\lambda_3^2 + \lambda} & \dots & \\ 0 & 0 & & & \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \lambda} \end{array}$$

Σε σύγκριση με την εξίσωση (2.19) που προκύπτει από την χωρίς περιορισμούς λύση, γίνεται φανερό από την ανάλυση της SVD πως η εξίσωση (2.35) μπορεί να διαχειριστεί αποτελεσματικά την περίπτωση που υπάρχουν ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Ο Marquardt (1970) έδειξε πως η μέθοδος είναι ίδια με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για $\lambda \rightarrow 0$, και με τη γενικευμένη αντιστροφή του Penrose^(*) (1955).

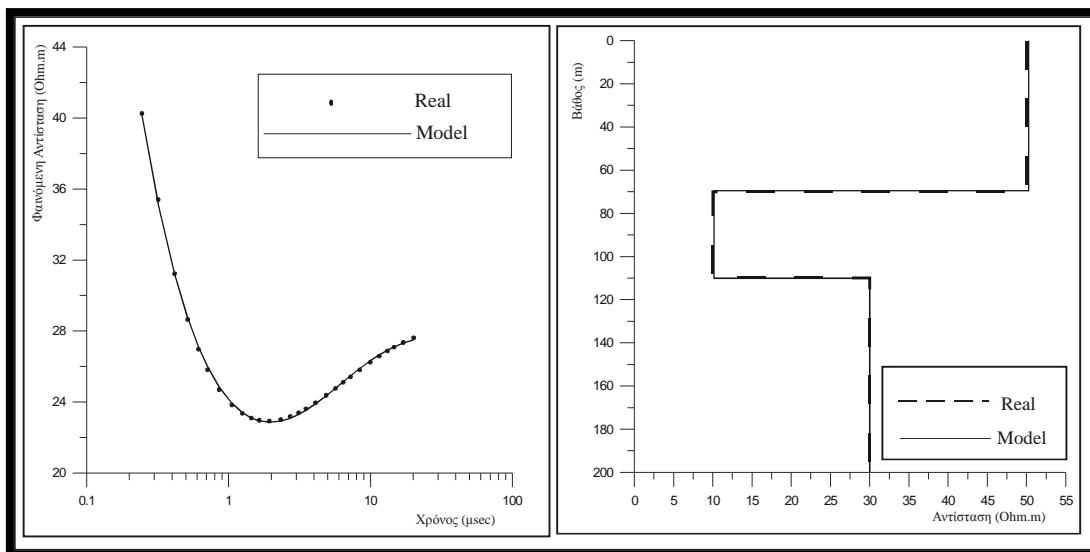
Για τον προσδιορισμό του παράγοντα απόσβεσης, ο Marquardt πρότεινε να δίνεται μια μεγάλη τιμή αρχικά στο λ κατά την πρώτη επανάληψη. Αν από τη σύγκριση των θεωρητικών και πραγματικών δεδομένων διαπιστωθεί σύγκλιση, τότε η τιμή του παράγοντα απόσβεσης στην επόμενη επανάληψη υποδεκαπλασιάζεται, και επαναλαμβάνεται η διαδικασία. Διαφορετικά, σε περίπτωση απόκλισης δηλαδή, η τιμή του λ δεκαπλασιάζεται.

Στο σχήμα (2.8) δίνεται ένα τυπικό παράδειγμα αντιστροφής δεδομένων TDEM σε μια διάσταση, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης για ένα μοντέλο τριών στρωμάτων^(†).

(*) (Η γενικευμένη αντιστροφή που πρότεινε ο Penrose (1955) ονομάζεται και μέθοδος της απότομης μεταβολής, όπου το αρχικό μοντέλο διορθώνεται κατά τη διεύθυνση της αρνητικής παραγώγου της συνάρτησης σφάλματος, δηλαδή $m = -k \left\{ \frac{\partial q}{\partial m} \right\}$, όπου k είναι μια θετική

σταθερά.

(†) Στα παραδείγματα που ακολουθούν σε όλο το κεφάλαιο, χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας του Sandberg (1988), τροποποιημένος από τους Karmis et al (προσωπική επικοινωνία) για το μοντέλο της SIROTEM MKII. Σε όλα τα παραδείγματα θεωρήθηκαν δεδομένα πρώιμων



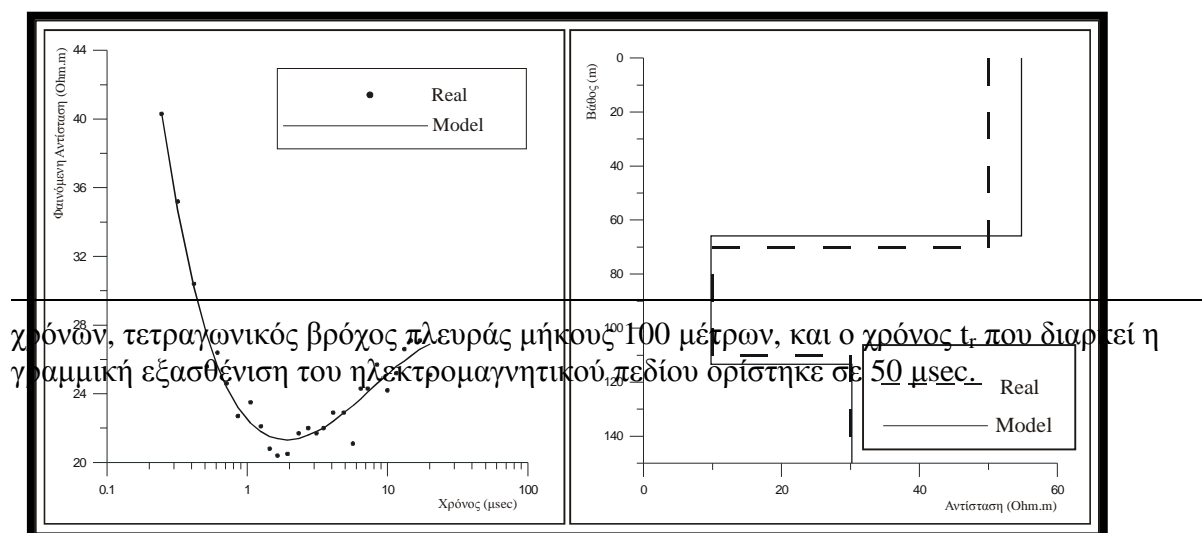
Σχήμα 2.8 Αποτελέσματα αντιστροφής με τη μέθοδο Marquardt για συνθετικό μοντέλο τριών στρωμάτων.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης, ειδικά με τη χρησιμοποίηση των πινάκων στατιστικών βαρών, αποκρίνεται ικανοποιητικά σε περιπτώσεις όπου στα δεδομένα ο θόρυβος είναι κανονικά κατανομημένος. Στο σχήμα (2.9) δείχνεται ένα τέτοιο παράδειγμα, όπου σε συνθετικά δεδομένα έχει εισαχθεί θόρυβος τυχαίας κανονικής κατανομής ποσοστού 7%.

Σχήμα 2.9 Αντιστροφή συνθετικού μοντέλου τριών στρωμάτων με εισαγωγή θορύβου 7% στα δεδομένα και χρήση πινάκων στατιστικών βαρών.

Παρατηρούμε πως σε αυτή την περίπτωση η μέθοδος απέδωσε επίσης ικανοποιητικά, καταφέρνοντας να παράγει ένα μοντέλο πολύ κοντά στο πραγματικό.

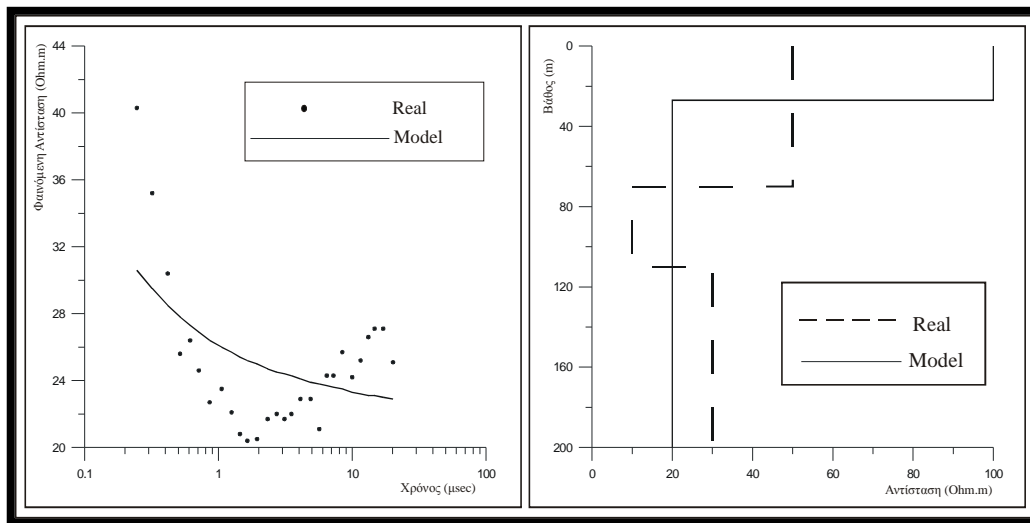
Στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως μειονέκτημα της μεθόδου, η ισχυρή εξάρτηση από την επιλογή του αρχικού μοντέλου m_0 (Meju 1994, Draper και Smith 1981), με αποτέλεσμα πολλές φορές οι λύσεις που δίνονται να είναι μαθηματικά μεν ορθές, αλλά φυσικά (γεωλογικά) μη αποδεκτές (Smith και Shanno 1971), ειδικά στην περίπτωση που τα δεδομένα περιέχουν σφάλματα. Επίσης, στο μονοδιάστατο



χρόνων, τετραγωνικός βρόχος πλευράς μήκους 100 μέτρων, και ο χρόνος t_r που διαρκεί η γραμμική εξασθένιση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ορίστηκε σε 50 μsec .

πρόβλημα των TDEM, ιδιαίτερα σημαντική είναι η επιλογή του αριθμού των στρωμάτων του μοντέλου.

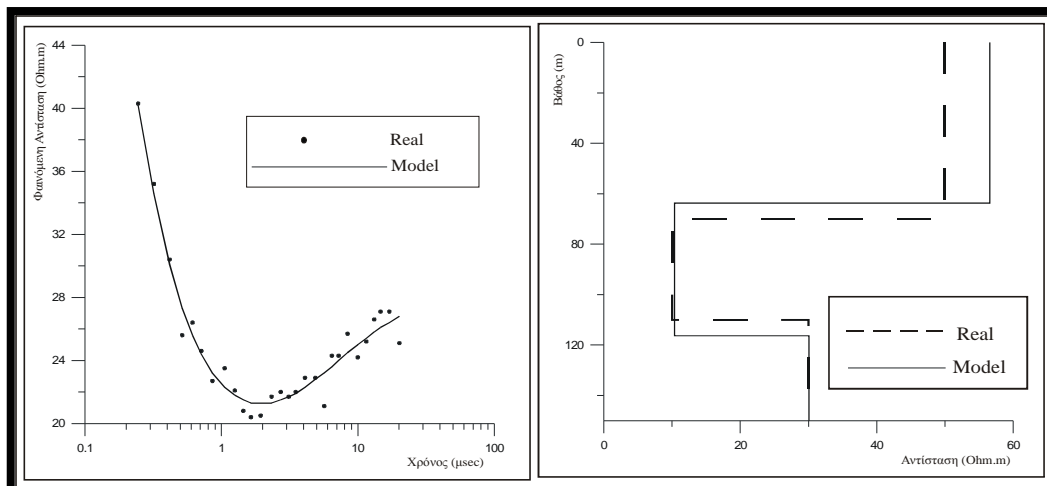
Στο σχήμα (2.10) παρουσιάζεται ένα τέτοιο παράδειγμα. Στο ίδιο μοντέλο με το σχήμα (2.8) έγινε εισαγωγή στα δεδομένα συνθετικού θορύβου κανονικής κατανομής σε ποσοστό 7%. Μόνο που η αρχική εκτίμηση είναι λάθος, καθώς τέθηκε σαν αρχικό μοντέλο ένα μοντέλο 2 στρωμάτων. Παρόλο που για το πρώτο στρώμα το πάχος και η αντίσταση τέθηκαν ίδιες με το πραγματικό, και για το δεύτερο η αντίσταση ίδια με την αντίσταση του ημιχώρου, η μέθοδος απέτυχε να παράγει μοντέλο κοντινό στην πραγματικότητα.



Σχήμα 2.10

Αντιστροφή συνθετικού μοντέλου τριών στρωμάτων με λάθος αρχική εκτίμηση στον αριθμό των στρωμάτων.

Ένα δεύτερο πρόβλημα, όσο αφορά την αρχική εκτίμηση του μοντέλου, είναι πως μπορεί να γίνει σωστή επιλογή του αριθμού των στρωμάτων, αλλά η αρχική εκτίμηση των παραμέτρων να απέχει από το πραγματικό μοντέλο. Στο σχήμα (2.11), και για το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως, οι τιμές των αντιστάσεων και των παχών τέθηκαν διπλάσιες από το πραγματικό μοντέλο. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης κατάφερε εν μέρει να αποκαταστήσει το πραγματικό μοντέλο.



Σχήμα 2.11

Αποτελέσματα αντιστροφής συνθετικού μοντέλου τριών στρωμάτων, με εισαγωγή στα δεδομένα θορύβου κανονικής κατανομής ποσοστού 7%, και λάθος αρχική εκτίμηση στην τιμή των αντιστάσεων και των παχών.

2.11.2 Μέθοδος εξομαλυμένης αντιστροφής

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης ασταθών προβλημάτων αντιστροφής είναι να εισαχθεί ένας περιορισμός εξομάλυνσης. Η χρήση τέτοιου περιορισμού για την σταθεροποίηση των προβλημάτων αντιστροφής ανήκει σε μια γενικότερη κατηγορία μεθόδων «κανονικοποίησης» που πρώτος εισήγαγε ο Tikhonov (Tikhonov 1963, Tikhonov και Glasko 1965).

Ένας αλγόριθμος αντιστροφής αυτού του τύπου, που είναι πολύ δημοφιλής στη γεωφυσική, είναι η μέθοδος Occam (Constable et al. 1987). Η βασική ιδέα πίσω από τη μέθοδο έγκειται στην προσπάθεια εξεύρεσης της πιο απλής λύσης ελλείψει πληροφοριών για το μοντέλο που αναζητείται. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται συντηρητικά, με την έννοια πως δεν ψάχνουμε την ακριβή αναπαράσταση της πραγματικότητας, αλλά ένα μοντέλο, ανάμεσα στα πολλά που ικανοποιούν μαθηματικά τα δεδομένα, που θα είναι το απλούστερο δυνατό.

Η αρχική υπόθεση που γίνεται είναι ότι οι άγνωστες παράμετροι του μοντέλου είναι ένας αριθμός στρωμάτων, π.χ. ίσος με τον αριθμό των μετρήσεων, γνωστού πάχους και άγνωστης αντίστασης (DeGroot-Hedlin και Constable, 1990). Έτσι, οι άγνωστοι είναι μόνο οι αντιστάσεις των στρωμάτων. Ο Constable έθεσε τα πάχη των στρωμάτων ίσα, λαμβάνοντας όμως υπόψη το γεγονός ότι η ευαισθησία της μεθόδου μειώνεται με το βάθος, θα μπορούσαν τα πάχη των στρωμάτων να αυξάνονται με το βάθος.

Ο αρχικός περιορισμός που εισάγεται είναι το μέτρο της διαφοράς μεταξύ των πραγματικών και θεωρητικών μετρήσεων να είναι μικρότερο από το επίπεδο του θορύβου των δεδομένων, δηλαδή,

$$\|f(m) - d\| \leq \varepsilon. \quad (2.40)$$

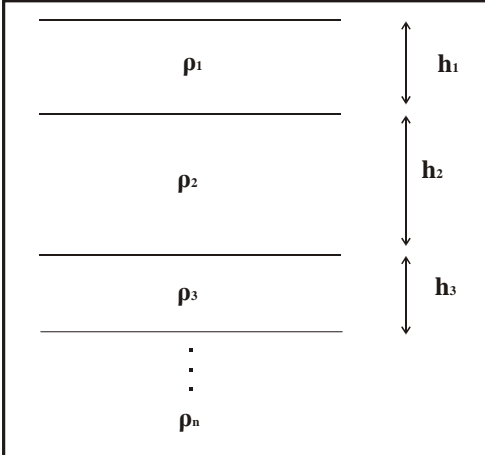
Το σφάλμα του συστήματος, η συνάρτηση δηλαδή προς ελαχιστοποίηση, είναι η

$$q = (Wd - WAm)^T (Wd - WAm). \quad (2.41)$$

Επιπλέον, εισάγεται στο σύστημα ένας πίνακας τραχύτητας \mathbf{R} , ο οποίος δείχνει τον τύπο της εξομάλυνσης. Ο πίνακας \mathbf{R} μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$R = \|Cm\|^2, \quad (2.42)$$

και υποδηλώνει την εξάρτηση των παραμέτρων μεταξύ τους, δηλαδή των αντιστάσεων των στρωμάτων γνωστού πάχους. Η i γραμμή του πίνακα δίνει πληροφορίες για την i παράμετρο-αντίσταση του συστήματος, και την εξομάλυνση που υφίσταται σε σχέση με τις γειτονικές παραμέτρους. Αν το πραγματικό μοντέλο αποτελείται από n στρώματα, με πάχη $(n-1)$, προσπαθούμε να βρούμε ένα θεωρητικό μοντέλο με N στρώματα (όσες και οι μετρήσεις), και ο πίνακας C είναι $(N \times N)$ τάξεως, της μορφής



The diagram shows a vertical stack of layers. The top layer has thickness h_1 and resistivity ρ_1 . The second layer has thickness h_2 and resistivity ρ_2 . The third layer has thickness h_3 and resistivity ρ_3 . Below these are vertical dots and then a layer with resistivity ρ_n . To the right of the diagram is the matrix C defined by equation (3.35):

$$C = \begin{vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & -1 & & \\ 0 & 1 & -1 & \dots & \\ & & \dots & 1 & -1 \\ & 0 & \dots & & 1 \end{vmatrix} \quad (3.35)$$

Μαθηματικά, το πρόβλημα τίθεται ως εξής: ελαχιστοποίηση του σφάλματος \mathbf{q} υπό τη συνθήκη η τραχύτητα \mathbf{R} του μοντέλου να είναι ελάχιστη.

Από την ελαχιστοποίηση με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange προκύπτει η εξίσωση

$$((AW)^T AW + \lambda R)m = (WA)^T Wy. \quad (2.43)$$

Επομένως, η λύση του συστήματος για το μη γραμμικό πρόβλημα είναι

$$dm_k = ((A_k W)^T A_k W + \lambda_k C^T C)^{-1} (WA_k)^T W dy_k, \quad (2.44)$$

και το νέο μοντέλο

$$m_{k+1} = m_k + dm_k. \quad (2.45)$$

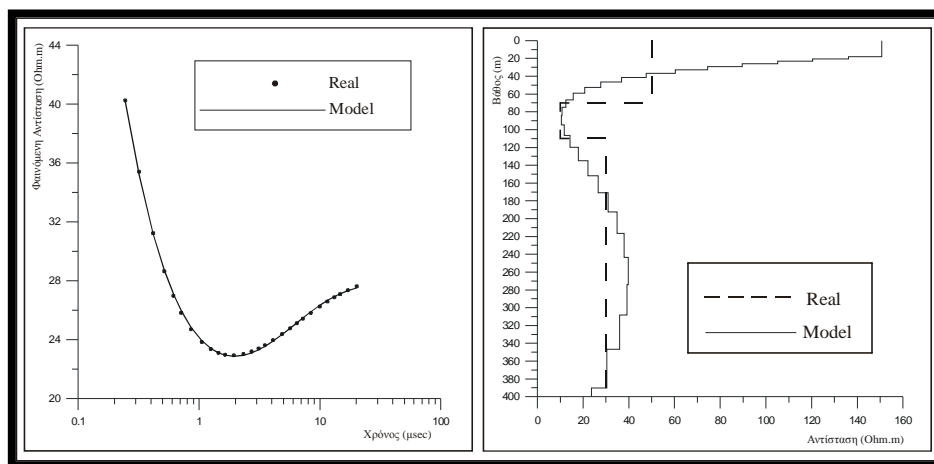
Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του λ , τόσο πιο εξομαλυσμένες είναι οι λύσεις, άρα μικρό εύρος διορθώσεων. Αντίστροφα, μικρή τιμή του λ συνεπάγεται μεγάλο εύρος διορθώσεων.

Η διαφορά της εξίσωσης (2.43) από την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης (εξ.2.36), είναι η προσθήκη του πίνακα \mathbf{R} , που δίνει στο μοντέλο την εξομαλυσμένη

μορφή, επιτρέπει δηλαδή στο μοντέλο να αποκλίνει από την απλούστερη μορφή τόσο, όσο χρειάζεται για να πλησιάσουν οι θεωρητικές μετρήσεις τις πραγματικές.

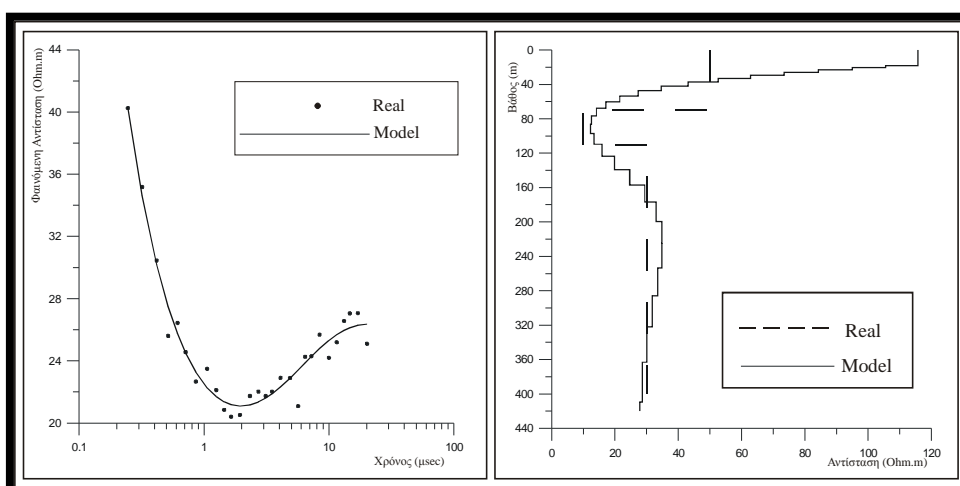
Ο Constable προτείνει μια διαδικασία καθορισμού της τιμής του λ με μεθόδους βελτιστοποίησης. Αρχικά ορίζεται ένα πολύ μεγάλο διάστημα μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η τιμή του λ (από 10^{-3} έως 10^6). Ερευνώντας σε όλο το διάστημα ορίζεται ένα μικρότερο διάστημα, μέσα στο οποίο βρίσκεται ένα τοπικό ελάχιστο. Αν η τιμή της συνάρτησης \mathbf{q} , για αυτή την τιμή του λ , είναι μικρότερη από το κατώφλι θορύβου που έχει οριστεί, τότε ο αλγόριθμος αναζητά την τιμή εκείνη του λ για την οποία η τιμή της συνάρτησης \mathbf{q} γίνεται ίση με το επίπεδο του θορύβου. Η τιμή αυτή του λ θεωρείται πως είναι η βέλτιστη για τη συγκεκριμένη επανάληψη.

Στο σχήμα (2.12) φαίνονται τα αποτελέσματα για το ίδιο μοντέλο και δεδομένα που χρησιμοποιήθηκε και στο σχήμα (3.3), με τη χρήση της μεθόδου Occam.



Σχήμα 2.12 Αποτελέσματα αντιστροφής με τη μέθοδο Occam για συνθετικό μοντέλο τριών στρωμάτων.

Το μειονέκτημα της συντηρητικής λύσης της μεθόδου, αντισταθμίζεται από το μεγάλο πλεονέκτημα ότι η μέθοδος είναι σταθερή και κυρίως απαλλαγμένη από την ανάγκη επιλογής αρχικού μοντέλου. Στο παράδειγμα του σχήματος (2.12), η μόνη αρχική εκτίμηση δόθηκε στον αλγόριθμο είναι η μέση αντίσταση του υπεδάφους (50 Ohm-m). Επίσης σε δεύτερη επεξεργασία δόθηκε μέση αντίσταση ίση με 100 Ohm-m. Και στις δύο περιπτώσεις η μέθοδος κατέληξε στα ίδια αποτελέσματα, με τη μόνη διαφορά πως στη δεύτερη περίπτωση απαιτήθηκαν περισσότερες επαναλήψεις.



Σχήμα 2.13 Αποτελέσματα αντιστροφής με τη μέθοδο Occam για συνθετικό μοντέλο τριών στρωμάτων με εισαγωγή θορύβου κανονικής κατανομής ποσοστού 7% στα δεδομένα.

Ακόμα και στην περίπτωση που τα δεδομένα έχουν τυχαίο θόρυβο, όπως στο παράδειγμα του σχήματος (2.13), η μέθοδος της εξομαλυσμένης αντιστροφής καταφέρνει να δώσει μια συντηρητική εικόνα του πραγματικού μοντέλου. Όταν δεν υπάρχουν πληροφορίες για το πραγματικό μοντέλο, η μέθοδος της εξομαλυσμένης αντιστροφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δημιουργηθεί ένα σχετικά αξιόπιστο μοντέλο στρωμάτων το οποίο θα αποτελέσει το αρχικό μοντέλο για κάποια άλλη μέθοδο αντιστροφής.

Το κυριότερο μειονέκτημα της μεθόδου είναι πως η αντιστροφή των δεδομένων γίνεται μόνο για τις παραμέτρους των αντιστάσεων. Τα πάχη θεωρείται πως είναι γνωστά εξ αρχής για το κάθε στρώμα, και το τελικό αποτέλεσμα είναι να υπάρχει μια γενική εικόνα των αντιστάσεων των στρωμάτων του υπεδάφους αλλά τα όρια των στρωμάτων να παραμένουν ασαφή.

2.11.3 Υβριδική μέθοδος αποσβενομένων τετραγώνων

Μια μέθοδος που προσπαθεί να συγκεράσει τα πλεονεκτήματα των δύο παραπάνω μεθόδων (Marquardt-Occam) είναι η υβριδική μέθοδος των αποσβενομένων τετραγώνων (Meju, 1994). Εφαρμογή της μεθόδου στο μονοδιάστατο πρόβλημα με τη μέθοδο των TDEM έγινε από τους Karmis et al. (προσωπική επικοινωνία).

Η φιλοσοφία της μεθόδου είναι να εισάγει ως παραμέτρους στρώματα με άγνωστες αντιστάσεις και πάχη, όπως και με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης. Παράλληλα όμως, εισάγονται και περιορισμοί εξομάλυνσης, οι οποίοι μπαίνουν τροποποιημένοι σε σχέση με τη μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής, και το κριτήριο της ελάχιστης τραχύτητας εφαρμόζεται μόνο για τις αντιστάσεις των στρωμάτων, καθώς δεν υπάρχει φυσικό νόημα να εφαρμοστεί στα πάχη των στρωμάτων.

Αναπτύσσοντας τις εξισώσεις της αντιστροφής όμοια με τη μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής, καταλήγουμε στη συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση

$$q = (Wd - WAm)^T (Wd - WAm). \quad (2.46)$$

Η διόρθωση του μοντέλου προκύπτει από το ίδιο σύστημα εξισώσεων με τη μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής,

$$dm_k = ((A_k W)^T A_k W + \lambda_k C^T C)^{-1} (W A_k)^T W dy_k. \quad (2.47)$$

και το νέο μοντέλο

$$m_{k+1} = m_k + dm_k. \quad (2.48)$$

Η διαφορά με την μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής βρίσκεται στον τρόπο υπολογισμού των στοιχείων του πίνακα τραχύτητας \mathbf{R} . Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές όπου υπάρχει βαθμωτή αλλαγή των παραμέτρων, το ενδιαφέρον εστιάζεται στην απόκτηση ενός εξομαλυσμένου μοντέλου, κάτι που υπαγορεύεται από την φυσική αντιμετώπιση του προβλήματος. Παράδειγμα αποτελεί η στρωμάτωση του υπεδάφους, όπου δεν αναμένεται να υπάρχουν απότομες ασυνέχειες στις ηλεκτρικές ιδιότητες των στρωμάτων, άρα αναζητείται ένα εξομαλυσμένο μοντέλο (Constable et al. 1987, Meju και Hutton 1992). Τα πάχη όμως των στρωμάτων δεν απαιτείται να είναι εξομαλυσμένα, καθώς δεν υπάρχει κάποια φυσική αιτία που να τα αναγκάζει να αποκτούν τιμές που να είναι εξαρτημένες μεταξύ τους.

Σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας \mathbf{C} (εξ.3.35), ο οποίος εάν έχουμε n στρώματα με $(n-1)$ πάχη, θα είναι τάξεως $[(2n-1) \times (2n-1)]$, θα έχει τη μορφή

ρ_1	h_1
ρ_2	h_2
ρ_3	h_3
\vdots	
ρ_n	

$C =$

0	0	0		
-1	1			0
	-1	1		
0		0
0	0	1
0			0	1

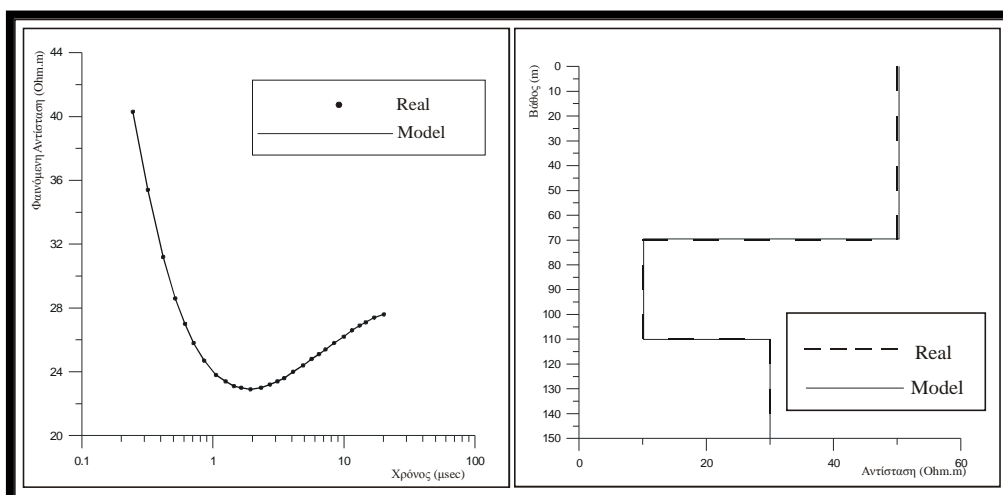
(3.42)

Οι πρώτες n γραμμές του πίνακα \mathbf{C} που αντιστοιχούν στις ηλεκτρικές αντιστάσεις των στρωμάτων έχουν στοιχεία που εξομαλύνουν τις τιμές αυτών των παραμέτρων, ενώ οι υπόλοιπες $(n-1)$ γραμμές του πίνακα που αντιστοιχούν στα πάχη των στρωμάτων δεν επηρεάζουν το διάνυσμα των λύσεων προς καμία κατεύθυνση.

Οι Karmis et al. (προσωπική επικοινωνία), πρότειναν τον υπολογισμό του παράγοντα απόσβεσης με έρευνα βελτιστοποίησης. Ορίζοντας ένα εύρος τιμών εμπειρικά, θεωρώντας ότι καλύπτει όλο το φάσμα τιμών που μπορεί να πάρει το λ , ο αλγόριθμος διεξάγει έρευνα μέχρι να βρεθεί το ολικό ή τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης προς ελαχιστοποίηση. Το διάστημα που ορίζεται αρχικά, διαιρείται σε μικρότερα διαστήματα, μέχρι να βρεθεί ένα πολύ μικρό διάστημα που μέσα του να βρίσκεται η τιμή που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση q . Επιλύεται έτσι το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα πολλές φορές, άλλα σε κάθε επανάληψη απαιτείται μόνο ο αρχικός υπολογισμός του Ιακωβιανού πίνακα. Έτσι, ο τρόπος προσδιορισμού του παράγοντα λ είναι πιο γρήγορος από τον τρόπο που πρότεινε ο Constable.

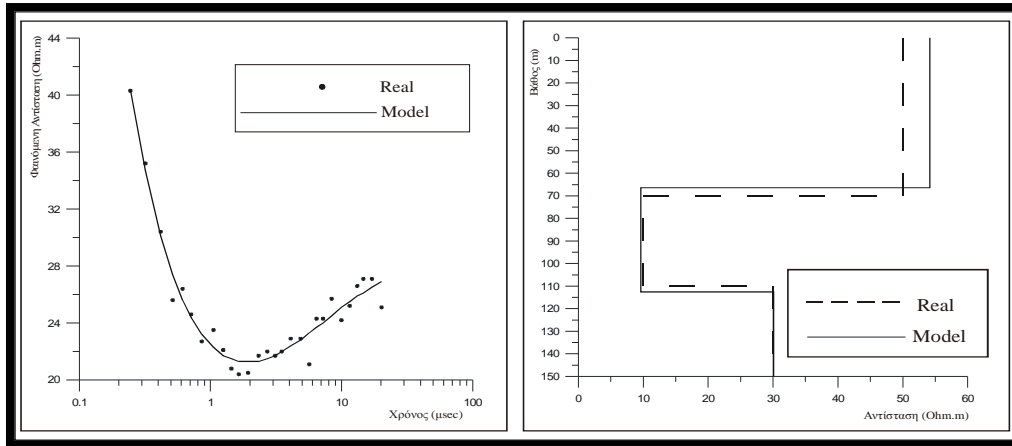
Το πλεονέκτημα της υβριδικής μεθόδου έναντι της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης είναι πως η σταθεροποίηση της αντιστροφής επιτυγχάνεται με περιορισμούς που βασίζονται στη φυσική του προβλήματος, μέσω των πινάκων εξομάλυνσης, και όχι στην επιλογή μιας αυθαίρετης τιμής περιορισμού.

Σε σχέση με τη μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής, τα πάχη των στρωμάτων αφήνονται να μεταβάλλονται ανεξάρτητα μεταξύ τους, δίνοντας σαφή όρια στα πάχη τους. Στο σχήμα (2.14) φαίνεται ένα τυπικό παράδειγμα αντιστροφής μοντέλου τριών στρωμάτων με τη μέθοδο της υβριδικής αντιστροφής.

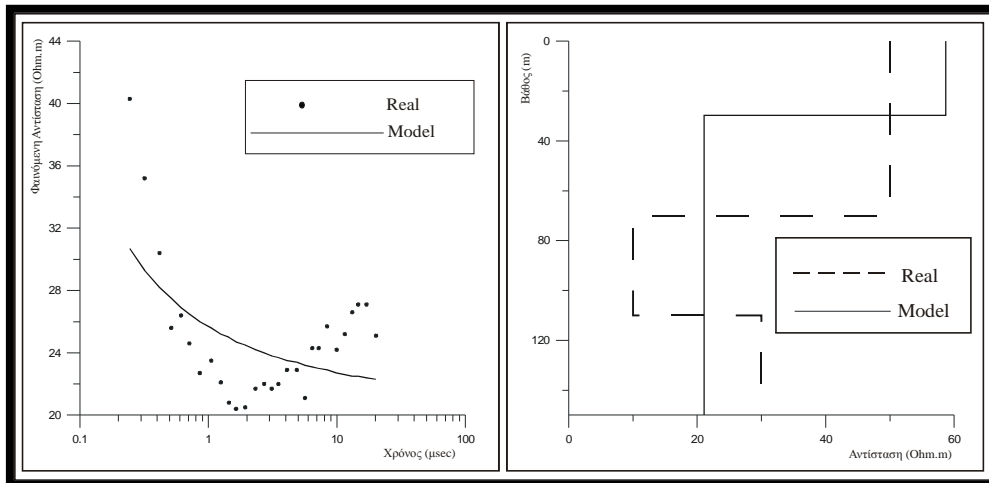


Σχήμα 2.14 Παράδειγμα αντιστροφής συνθετικού μοντέλου τριών στρωμάτων με τη μέθοδο της υβριδικής αντιστροφής.

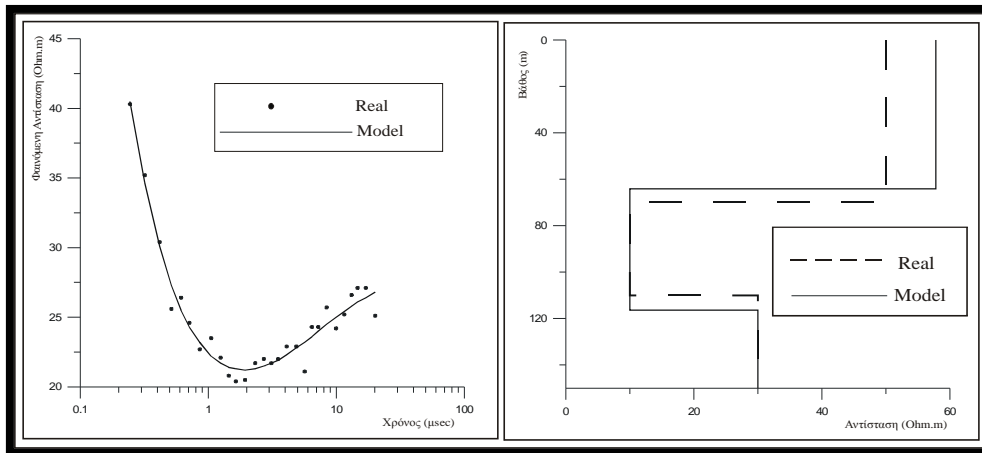
Στο σχήμα (2.15) φαίνεται η απόκριση της μεθόδου σε δεδομένα στα οποία έχει εισαχθεί θόρυβος κανονικής κατανομής ποσοστού 7%. Παρατηρούμε πως η μέθοδος παράγει αποτελέσματα που βρίσκονται πολύ κοντά στο πραγματικό μοντέλο.



Σχήμα 2.15 Αποτελέσματα αντιστροφής συνθετικού μοντέλου τριών στρωμάτων με εισαγωγή στα δεδομένα θορύβου κανονικής κατανομής ποσοστού 7% με τη μέθοδο της υβριδικής αντιστροφής



Σχήμα 2.16 Αντιστροφή συνθετικού μοντέλου τριών στρωμάτων με εισαγωγή θορύβου κανονικής κατανομής 7% στα δεδομένα, και λάθος αρχική εκτίμηση στον αριθμό των στρωμάτων.



Σχήμα 2.17 Αποτελέσματα αντιστροφής για μοντέλο τριών στρωμάτων, με εισαγωγή θορύβου στα δεδομένα κανονικής κατανομής 7%, και λάθος αρχική εκτίμηση στις παραμέτρους του μοντέλου.

Στο σχήμα (2.16) παρουσιάζεται παράδειγμα κακής επιλογής αριθμού στρωμάτων αρχικού μοντέλου, ενώ στο σχήμα (2.17) παράδειγμα κακής επιλογής αρχικής εκτίμησης, παρά το γεγονός πως ο αριθμός των στρωμάτων είναι ο σωστός.

Παρόλα αυτά, η χρήση στρωμάτων με διακριτό πάχος συνεπάγεται ότι ο χρήστης πρέπει να καθορίσει το «σωστό» αριθμό των στρωμάτων. Το διάνυσμα των λύσεων αναγκάζεται να κινηθεί προς συγκεκριμένη κατεύθυνση και αν η αρχική εκτίμηση είναι εκτός πραγματικότητας, τότε το θεωρητικό μοντέλο δεν μπορεί να αναπαραστήσει το πραγματικό μοντέλο του υπεδάφους.

2.12 Συμπεράσματα

Στο υποκεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται μια σύγκριση μεταξύ των κυριότερων μεθόδων αντιστροφής σε μια διάσταση για τη μέθοδο των TDEM που μελετήθηκαν παραπάνω, δηλαδή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης, της μεθόδου της εξομαλυσμένης αντιστροφής και της υβριδικής αντιστροφής.

2.13 Αστάθεια του συστήματος – προέλευση περιορισμών

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων στη διαδικασία της αντιστροφής δεδομένων TDEM είναι εγγενώς ασταθής. Η αστάθεια αυτή έχει φυσική προέλευση, καθώς η μέθοδος των TDEM χάνει την ευαισθησία της σε μεγάλα βάθη. Η φυσική αυτή αδυναμία εκφράζεται μαθηματικά στην αδυναμία σταθερής αντιστροφής του γενικευμένου Ιακωβιανού.

Το πρόβλημα λύνεται εν μέρει με την εισαγωγή περιορισμών στη μεταβολή του διανύσματος των λύσεων. Στην περίπτωση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης, ο περιορισμός είναι καθαρά μαθηματικός. Για να λυθεί το πρόβλημα της αστάθειας του συστήματος, προστίθεται μια θετική ποσότητα λ στα στοιχεία της διαγωνίου του γενικευμένου Ιακωβιανού. Έτσι το τελικό μοντέλο είναι μεν μαθηματικά ορθό, μερικές φορές όμως μπορεί να στερείται φυσικής λογικής.

Στη μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής, ο περιορισμός τίθεται από φυσική σκοπιά. Η στρωμάτωση του υπεδάφους δεν αναμένεται να έχει απότομες μεταβολές όσο αφορά τις αντιστάσεις, και έτσι το τελικό μοντέλο αποκλίνει από τον ομογενή ημιχώρο τόσο, όσο ώστε οι θεωρητικές μετρήσεις να συγκλίνουν με τα πειραματικά δεδομένα.

Ο περιορισμός που τίθεται στην υβριδική αντιστροφή είναι διαφορετικός από τη μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής. Περιορίζεται το εύρος διόρθωσης του μοντέλου όσο αφορά τις αντιστάσεις των στρωμάτων, όμως τα πάχη αφήνονται να μεταβάλλονται ανεξέλεγκτα. Ο περιορισμός αυτός έχει φυσική έννοια, καθώς επιδιώκουμε να πάρουμε ένα τελικό μοντέλο με διακριτά στρώματα, όμως υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των αντιστάσεων, υπό την έννοια πως δεν αναμένονται τρομερά απότομες αλλαγές των αντιστάσεων μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων.

2.14 Αντιμετώπιση του θορύβου –σφάλματα δεδομένων

Η ύπαρξη σφαλμάτων στα δεδομένα θα πρέπει να θεωρείται εκ των προτέρων δεδομένη. Στην περίπτωση που τα σφάλματα είναι τυχαία και έχουν κανονική κατανομή, αποδείχτηκε πειραματικά πως όλες οι μέθοδοι αποκρίνονται ικανοποιητικά. Με τη χρήση των πινάκων στατιστικών βαρών, οι μέθοδοι απομονώνουν τις μετρήσεις εκείνες που έχουν πολύ μεγάλα σφάλματα, δίνοντας τους πολύ μικρό βάρος κατά τη διαδικασία της αντιστροφής.

2.15 Επιλογή αρχικού μοντέλου

Στην περίπτωση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης και της υβριδικής αντιστροφής, η επιλογή του αρχικού μοντέλου είναι σημαντική. Ο χρήστης απαιτείται να εισάγει όχι μόνο το σωστό αριθμό στρωμάτων, αλλά και να επιλέξει τις τιμές των παραμέτρων του αρχικού μοντέλου έτσι ώστε να είναι αρκετά κοντά στις πραγματικές. Στην περίπτωση που υπάρχει πρότερη γνώση της δομής του υπεδάφους αυτό είναι σχετικά εύκολο, αλλά πολλές φορές ο χρήστης πρέπει να δοκιμάζει πολλά μοντέλα με διαφορετικό αριθμό στρωμάτων έως ότου να καταλήξει σε αυτό που έχει τη μεγαλύτερη σύγκλιση με τις πειραματικές μετρήσεις.

Αν δεν υπάρχει καμία πληροφορία για το μοντέλο του υπεδάφους, τότε η μέθοδος της εξομαλυσμένης αντιστροφής είναι αυτή που μπορεί να παρέχει τα πιο αξιόπιστα αποτελέσματα, καθώς δεν απαιτείται προσδιορισμός του αριθμού των στρωμάτων. Ο χρήστης εισάγει μόνο τη μέση αντίσταση του υπεδάφους και το σταθερό πάχος των

στρωμάτων, και ο αλγόριθμος προσπαθεί να μεταβάλλει τις αντιστάσεις των στρωμάτων ώστε να υπάρξει σύγκλιση μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών μετρήσεων.

2.16 Σαφήνεια στον προσδιορισμό των στρωμάτων

Είθισται στη Γεωφυσική να αναπαριστούμε τα μοντέλα του υπεδάφους χρησιμοποιώντας διακριτές ασυνέχειες μεταξύ των στρωμάτων, ιδιαίτερα όσο αφορά τις αντιστάσεις τους. Π.χ. μοντέλο δύο στρωμάτων με ανώτερο στρώμα πάχους 100 μέτρων και αντίσταση 10 Ohm-m, υπερκείμενο ημιχώρου 100 Ohm-m.

Η μέθοδος της εξομαλυσμένης αντιστροφής, εξαιτίας ακριβώς του περιορισμού που εισάγεται μέσω του πίνακα τραχύτητας \mathbf{R} , επιτρέπει στις αντιστάσεις μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων να μεταβάλλονται βαθμιαία μεταξύ τους. Επιπλέον, ο αριθμός των στρωμάτων ορίζεται ίσος με τον αριθμό των μετρήσεων. Το τελικό μοντέλο αποτελείται έτσι από πολλά μικρά στρώματα, και δεν ορίζονται σαφή πάχη μεταξύ στρωμάτων με απότομες μεταβολές στην αντίσταση, αλλά υπάρχει μια ομαλή μεταβολή μεταξύ ακραίων τιμών.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης δεν εισάγει κανενός είδους περιορισμό, και τα πάχη των στρωμάτων ορίζονται σαφώς, καθώς αφήνονται να κινούνται ανεξέλεγκτα μεταξύ τους.

Στην υβριδική αντιστροφή, ο περιορισμός που τίθεται είναι οι αντιστάσεις μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων να μην κινούνται ανεξέλεγκτα μεταξύ τους. Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός όσο αφορά τα πάχη των στρωμάτων, τα οποία μπορούν να μεταβάλλονται ελεύθερα. Έτσι και σε αυτή τη μέθοδο τα πάχη ορίζονται σαφώς.

Συμπερασματικά, από την ανάλυση που έγινε παραπάνω, αλλά κυρίως από τις δοκιμές που έγιναν με διάφορα θεωρητικά μοντέλα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η υβριδική μέθοδος αντιστροφής είναι αυτή που παρουσιάζει τα περισσότερα πλεονεκτήματα από όλες τις μεθόδους που εξετάστηκαν. Είναι σταθερή, λαμβάνει υπόψη της τα μεγέθη των σφαλμάτων των μετρήσεων, δίνει με σαφήνεια το πάχος των στρωμάτων του μοντέλου, και το τελικό μοντέλο προκύπτει ως αποτέλεσμα φυσικών και όχι αυθαίρετων μαθηματικών περιορισμών. Φυσικά όλα αυτά δεν αποδεικνύουν πως η συγκεκριμένη μέθοδος είναι πανάκεια για το μονοδιάστατο πρόβλημα των TDEM, όμως εμφανίζει τα περισσότερα πλεονεκτήματα μεταξύ των μεθόδων που εξετάστηκαν. Τη μέθοδο αυτή επιλέξαμε για την εφαρμογή του αλγορίθμου σταθερής αντιστροφής που θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο. Όλα τα παραπάνω, συνοψίζονται στον πίνακα (Π3.1), όπου με (□) συμβολίζονται τα πλεονεκτήματα ή οι απαιτήσεις και με (-) τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου.

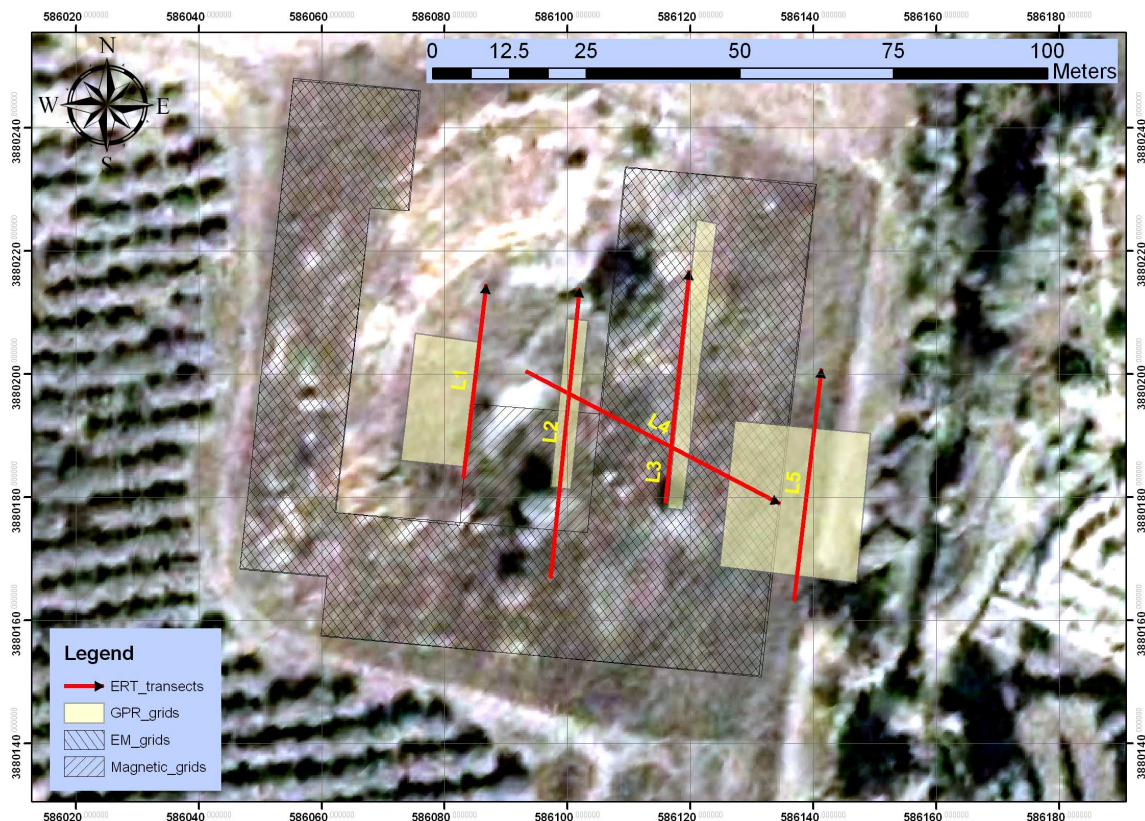
Μέθοδος	Είναι Σταθερή η Αντιστροφή ;	Προέλευση Περιορισμών ;	Αρχικό Μοντέλο ;	Διακριτά Στρώματα ;	Συμπεριλαμβάνεται Τυχαίος Θόρυβος ;
Ελάχιστα Τετράγωνα	-	-	[[[
Ελ. Τετράγωνα Απόσβεσης	[Μαθηματικό Μοντέλο	[[[
Εξομαλυσμένη Αντιστροφή	[Φυσικό Μοντέλο	-	-	[
Υβριδική Αντιστροφή	[Φυσικό Μοντέλο	[[[

Πίνακας Π3.1 Συγκεντρωτικά τα συμπεράσματα για τις μεθόδους αντιστροφής του μονοδιάστατου προβλήματος της μεθόδου των TDEM

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ – ΤΕΛΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται η ανάλυση των δεδομένων ηλεκτρικής τομογραφίας που συλλέχθηκαν στην περιοχή της Γόρτυνας Ηρακλείου με τη μέθοδο της ηλεκτρικής τομογραφίας. Πραγματοποιήθηκαν 9 τομογραφίες σε διάφορες διευθύνσεις σε 4 θέσεις ώστε να καλυφθεί καλύτερα η περιοχή, με απόσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων 0.5 μέτρα. 5 τομογραφίες έγιναν με τη μέθοδο διπόλου – διπόλου και 4 με τη μέθοδο της διαβάθμισης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 3.2 έως 3.10 ενώ στο σχήμα 3.1 παρουσιάζεται το σκαρίφημα των μετρήσεων.



Σχήμα 3.1 Σκαρίφημα της περιοχής μελέτης. Με κόκκινες γραμμές απεικονίζονται οι θέσεις των μετρήσεων και η κωδική ονομασία τους, ενώ με κίτρινα τετράγωνα απεικονίζονται θέσεις που έχουν πραγματοποιηθεί μετρήσεις με διαφορετική μέθοδο.