



Τ.Ε.Ι. Κρήτης

**Τμήμα Φυσικών Πόρων & Περιβάλλοντος
Εργαστήριο Γεωφυσικής και Σεισμολογίας**



**Μελέτη υπεδάφειων δομών με τη χρήση ηλεκτρικής
τομογραφίας στην περιοχή Χερσόνησος Ηρακλείου**

ΚΑΡΑΜΟΥΤΣΟΣ ΛΟΥΚΑΣ
Επιβλέπων Καθηγητής
Παπαδόπουλος Ηλίας



T.E.I. CRETE

**Department of Natural Resources and Environment
Laboratory of Seismology and Geophysics**



Case Study of Underground Structures Using Electric Tomography at the Hersonisos, Herakleio

**Karamoutsos Loukas
Supervising Professor
Papadopoulos Ilias**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	7
ABSTRACT	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΑΡΧΑΙΟ ΘΕΑΤΡΟ ΧΕΡΣΟΝΗΣΟΥ	
1.1 Αρχαιολογικός Χώρος Χερσονήσου	8
1.2 Περιγραφή Μνημείου	10
1.3 Υφιστάμενη Κατάσταση - Παλαιότερες Επεμβάσεις	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΕΩΝ	
2.1 Εισαγωγή	13
2.2 Διάδοση Ηλεκτρικού Ρεύματος	14
2.3 Ειδική Ηλεκτρική Αντίσταση	14
2.4 Φαινόμενη Ηλεκτρική Αντίσταση	15
2.5 Μεταβολές Ηλεκτρικής Αντίστασης	17
2.6 Διάταξη Ηλεκτροδίων	18
2.7 Ηλεκτρική Τομογραφία	19
2.7.1 Ερμηνεία των Μετρήσεων	20
2.7.2 Υπολογισμός του Ιακωβιανού Πίνακα	21
2.7.3 Μη Γραμμική Αντιστροφή	23
2.7.3.1 Αστάθεια στην Αντιστροφή του Γενικευμένου Ιακωβιανού	25
2.7.3.2 Χρήση Λογαριθμικής Κλίμακας στην Επίλυση Συστημάτων	26
2.7.3.3 Κριτήρια Σύγκλισης και Ποιότητας-Ανάλυση Σφαλμάτων	26
2.7.3.4 Πίνακας Στατιστικών Βαρών	27
2.7.3.5 Χρήση της SVD στην Επίλυση Ασταθών Συστημάτων	28
2.7.3.6 Μη Γραμμική Αντιστροφή με Περιορισμούς	28
2.7.3.7 Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων Απόσβεσης	29
2.7.3.8 Μέθοδος Εξομάλυνσης Αντιστροφής	31

2.8	Συμπεράσματα	32
2.8.1	Αστάθεια του Συστήματος-Προέλευση Περιορισμών	33
2.8.2	Αντιμετώπιση Θορύβου-Σφάλματα Δεδομένων	33
2.8.3	Επιλογή Αρχικού Μοντέλου	33
2.8.4	Σαφήνια στον Προσδιορισμό των Στρωμάτων	33

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

3.1	Αποτελέσματα μετρήσεων	35
3.2	Συμπεράσματα	39

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	40
---------------------	-----------

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρακάτω πτυχιακή εργασία ασχολείται με την γεωφυσική αρχαιομετρική διασκόπηση στον αρχαιολογικό χώρο Χερσονήσου. Σκοπός της διασκόπησης είναι ο εντοπισμός του Ρωμαϊκού Θεάτρου του Λ. Χερσονήσου. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο αρχαιολογικός χώρος Χερσονήσου καθώς επίσης και ιστορικά στοιχεία σχετικά με τον χώρο. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα γενικά χαρακτηριστικά της ηλεκτρικής διασκόπησης. Εν συντομία αναλύεται το φυσικό υπόβαθρο της μεθόδου. Παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους υλοποιούνται οι διατάξεις μέτρησης, τα όργανα που χρησιμοποιούνται και ο σχεδιασμός για την πραγματοποίηση της γεωφυσικής έρευνας. Τέλος στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται η ανάλυση και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τα δεδομένα που καταγράφηκαν βάση της μεθόδου της ηλεκτρικής διασκόπησης.

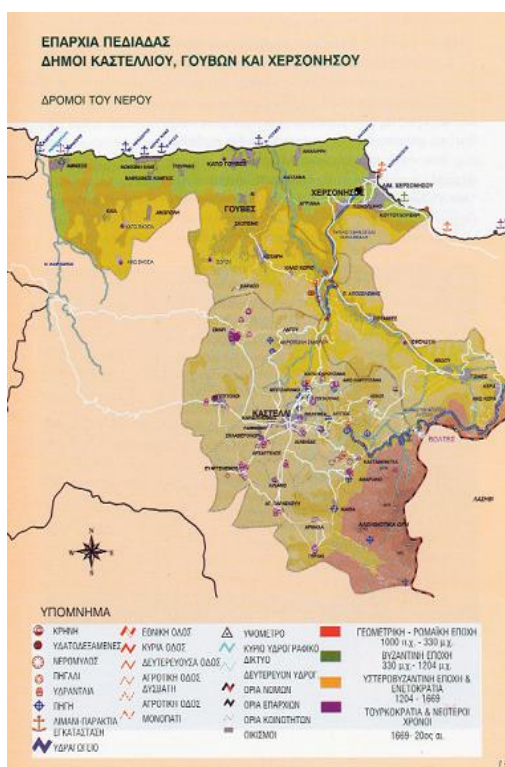
ABSTRACT

The following thesis deals with the geophysical investigation using electric tomography at the Hersonisos area in Herakleio. The purpose of the prospect is to identify the Roman Theatre of Hersonisos. The first chapter presents the archaeological site of Hersonisos as well as historical data on the site. The second chapter presents the general characteristics of the electrical survey. Briefly discussed the physical background of the method. Show how to implement a measurement, the instruments used and the design for the completion of geophysical research. Finally in the third chapter is the analysis and presentation of results from data recorded basis of the method of electrical survey.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΡΧΑΙΟ ΘΕΑΤΡΟ ΧΕΡΣΟΝΙΣΟΥ

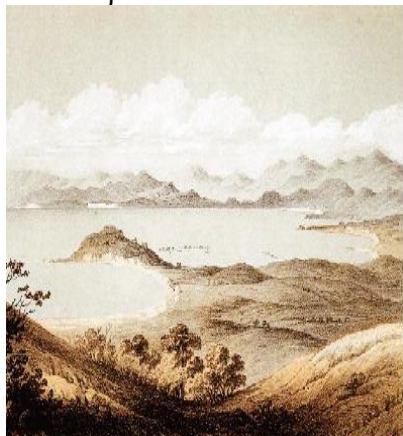
1.1 ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΧΕΡΣΟΝΗΣΟΥ



Σε απόσταση 26 χιλιομέτρων ανατολικά του Ηρακλείου στη δυτική πλευρά του κόλπου των Μαλλίων, κάτω από τον σύγχρονο οικισμό του Λιμένα Χερσονήσου βρίσκεται ο πυρήνας της αρχαίας Χερσονήσου ή Χερρονήσου, στην περιοχή που σήμερα ονομάζεται, σίγουρα όχι τυχαία, «Πόλη». Φαίνεται ότι

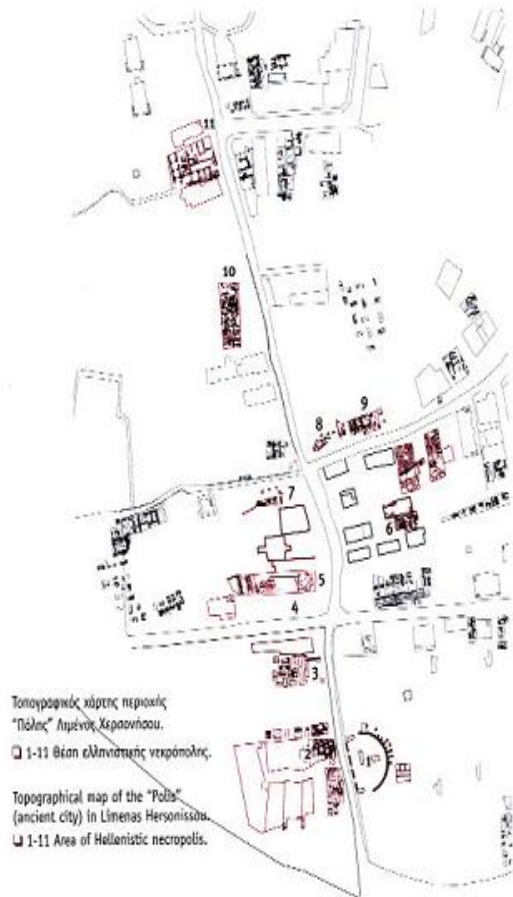
η ευρύτερη περιοχή, δυτικά του Λ. Χερσονήσου, κατοικήθηκε ήδη από τα Μινωικά χρόνια. Η πόλη όμως γνώρισε μεγάλη ακμή κυρίως κατά την ελληνιστική ρωμαϊκή & Πρωτοβυζαντινή περίοδο. Απετέλεσε ένα από τα σημαντικότερα και ασφαλέστερα λιμάνια στα Βόρεια παράλια της Κρήτης με δύο φυσικούς κολπίσκους να αγκαλιάζουν το ακρωτήριο Καστρί και να παρέχουν ασφαλές αγκυροβόλι στα πλοία ανάλογα με τις καιρικές συνθήκες. Ήταν αρχικά το επίνειο της Λύττου, (κατά τον Όμηρο Λύκτος) μιας σημαντικότητας πόλης

των ιστορικών χρόνων της Κρήτης που βρίσκεται σε απόσταση 15 χιλ. στο εσωτερικό του Ν.Ηρακλείου δίπλα στο σύγχρονο χωριό Ξιδάς



1.2 Το ακρωτήριο Καστρί (Γκραβούρα Spratt 1865) 1.3 Το ακρωτήριο Καστρί (Αεροφωτογραφία)

Αργότερα γίνεται αυτόνομη (4ος αι. π. χ.) και κόβει το δικό της νόμισμα. Κατά μια παράδοση η Χερσονήσος ιδρύθηκε από Τυρρηνούς πειρατές που έφεραν μαζί τους το άγαλμα της θεάς Βριτομάρτιδος Αρτέμιδος που ήταν πολιούχος της πόλης και που προς τιμήν της είχε ιδρυθεί ομόνυμο ιερό.



1.6 Θέσεις Ελληνιστικών ταφών



1.4 Ιχθυοδεξαμενές Ρωμαϊκών χρόνων



1.5 Καστρί. Παλαιοχριστιανική Βασιλική



Στοιχεία για την ελληνοιστική πόλη αντλούμε κύρια από τα νεκροταφεία της περιοχής ενώ η κατοίκηση κατά την ρωμαϊκή και παλαιοχριστιανική περίοδο είναι πυκνότερη. Η πόλη σώζει αρκετά δημόσια κτήρια όπως ρωμαϊκά λουτρά (θήρμες), υδραγωγείο, δεξαμενές, τμήματα δρόμων, μεγάλα κτηριακά συγκροτήματα ορισμένα με ψηφιδωτά, κεραμικά εργαστήρια, αναβρυτήριο, θέατρο, 3 ιχθυοδεξαμενές,

παλαιοχριστιανικές βασιλικές. Η ύπαρξη Επισκόπου στη Χερσονήσο μας είναι ήδη γνωστή από το 431 μ.Χ (Γ΄ Οικουμενική Σύνοδος). Η περίοδος της παρακμής της πόλης τοποθετείται στον 7ο αι. και συνοδεύεται από μια σταδιακή εγκατάλειψη όπως μας δείχνουν τα

ανασκαφικά δεδομένα. Στα νεώτερα χρόνια, πληροφορίες για τις σωζόμενες αρχαιότητες της Χερσονήσου μας δίνει ο Ιταλός Ο. Belli που το 1856 επισκέφτηκε τη

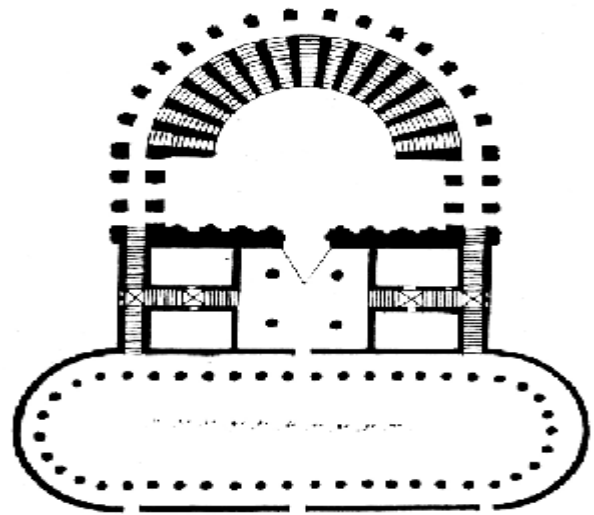
Χερσόνησο και γράφει σχετικά: «*Η πόλη της Χερσονήσου ήταν μικρή. Ήταν το λιμάνι της Λύττου και όμως έχει ένα αμφιθέατρο κι ένα θέατρο, όχι πολύ μεγάλο και πολύ αραιά οικοδομήματα. Είχε ένα λιμάνι, που τώρα επιχωματωμένο, είναι ικανό να χωρέσει 30 γαλέρες. Ο Στράβων λέει πως εδώ ήταν ο ναός της Βριτομάρτιδος που φαίνονται τα ίχνη του*».

Ο Onorio Belli μας διασώζει επίσης σχέδιο του θεάτρου της Χερσονήσου ανάμεσα σε άλλα 8 μνημειακών κτηρίων της Κρήτης (κύρια θέατρα). Πολύ ενδιαφέρουσα είναι και η περιγραφή του Spratt για την εικόνα της Χερσονήσου στα 1865.

1.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΝΗΜΕΙΟΥ



1.7 Ρωμαϊκό Θέατρο Χερσονήσου (Αεροφωτογραφία)
O. Belli)



1.8 Ρωμαϊκό θέατρο Χερσονήσου (σχέδιο



Στην αρχή του σύγχρονου οικισμού του Λιμένα Χερσονήσου από την πλευρά του Ηρακλείου μια παράκαμψη του κεντρικού δρόμου προς τα αριστερά (βόρεια) και σε μικρή απόσταση από αυτόν, βρίσκεται το αρχαίο θέατρο της Χερσονήσου. Στοιχεία για τη μορφή του θεάτρου μας δίνει ο O. Belli που είχε αποτυπώσει το θέατρο καθώς και ο Sanders. 1.9 Ρωμαϊκό θέατρο Χερσονήσου



Το προστώ (portico) ήταν μοναδικό καθώς είχε καμπύλα άκρα με εσωτερική κιονοστοιχία. Το μήκος του ήταν 83μ. και το πλάτος 30μ. Αν και υπήρχε είσοδος από το προστώ στο postscenium και από εκεί στη σκηνή, η κύρια είσοδος στο θέατρο γινόταν από τις κλίμακες που οδηγούσαν στις παρόδους και από εκεί στο κοίλο του θεάτρου, το οποίο είχε ένα μόνο διάζωμα. Την εξωτερική πλευρά του αναλημματικού τοίχου του

1.10 Ρωμαϊκό θέατρο Χερσονήσου
κοίλου διέτρεχε η συνηθισμένη για

τα ρωμαϊκά θέατρα στοά.

Η πρόσοψη της σκηνής (scaenae frons) μήκους 43μ. είναι μάλλον απλή με μια κεντρική πόρτα και μικρές ημικυκλικές κόγχες και ημικίονες. Η κεντρική είσοδος οδηγεί στην αίθουσα πίσω

από τη σκηνή (postscenium) έκτασης 18τ.μ. με τέσσερις κίονες στο εσωτερικό. Από εδώ κλίμακες

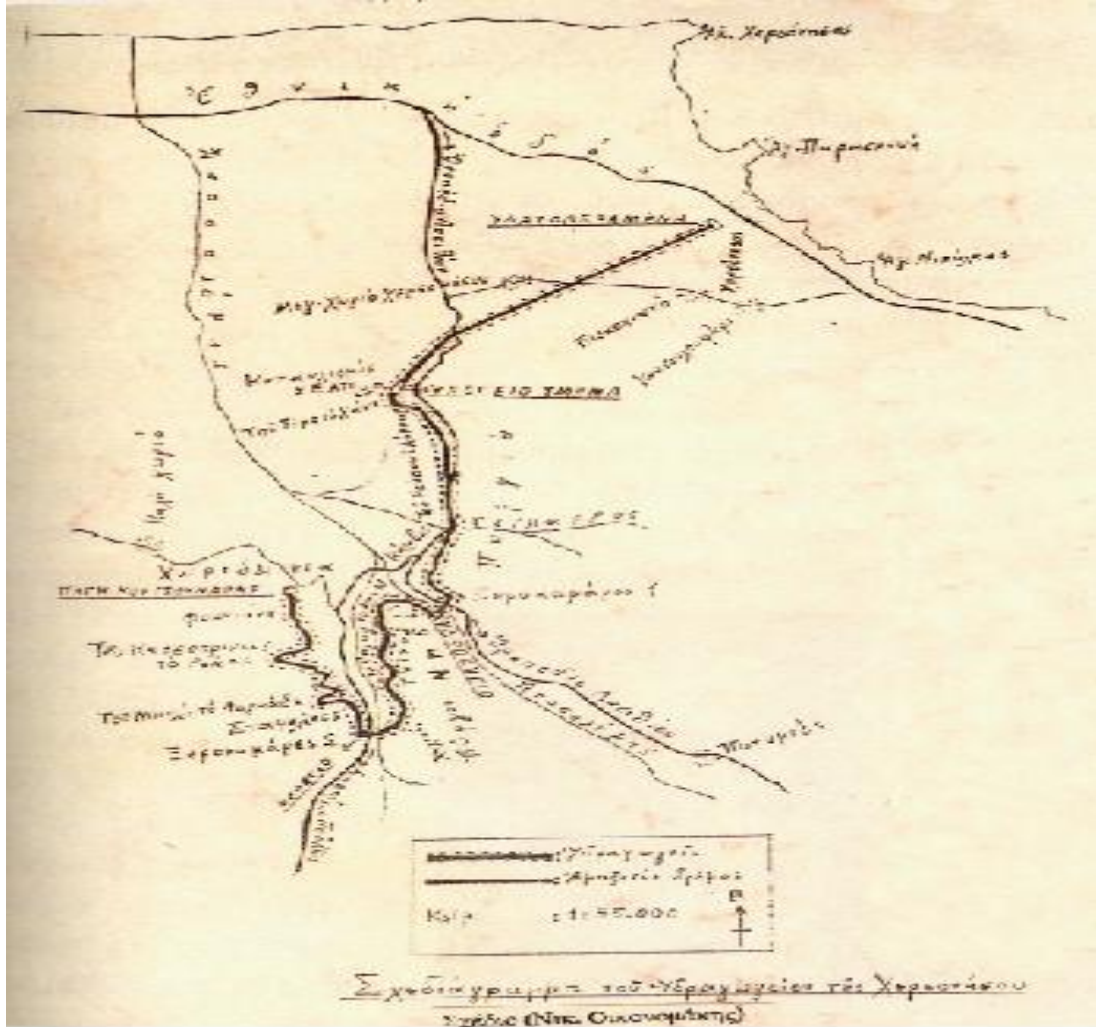
οδηγούσαν σε πλευρικές αίθουσες και από εκεί στις κλίμακες των παρόδων. Το βασικό στοιχείο του θεάτρου που διασώζεται είναι το

τοιχίο στήριξης του κοίλου (cavea) φτιαγμένο από κονίαμα πάχους 0,75 μέτρα και ύψους μέχρι 3 μέτρα. Η εσωτερική διάμετρός του είναι 33,25 μ ενώ απέναντι βρίσκονται οι 14 βάσεις των εξωτερικών ανίδων του κτιρίου που έχουν ελάχιστο φάρδος 2,00μ και βάθος 2,20 μέτρα.

1.3 ΥΦΙΣΤΑΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ – ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΕΣ ΕΠΕΜΒΑΣΕΙΣ

Το μνημείο δεν έχει ανασκαφεί συστηματικά. Επιφανειακά είναι ορατά τμήματα του δρόμου του οικισμού που διέρχεται από εκεί τοιχίου στήριξης του κοίλου καθώς και ο εξωτερικός τοίχος της σκηνής στο άκρο του (οδός Δημοκρατίας). Παράλληλα, στην ευρύτερη περιοχή πίσω από το κοίλο του θεάτρου, υπάρχουν τοίχοι κτηρίων ίσως από κτήρια που θα μπορούσαν να σχετίζονται με το θέατρο και θα πρέπει να διερευνηθούν και εξαχθούν σχετικά συμπεράσματα. Το θέατρο καθώς και τα προσκτίσματα αυτά βρίσκονται σε περιοχή που έχει απαλλοτριωθεί από το ΥΠΠΟΤ εκτός από τα τμήματα των δρόμων του σχεδίου πόλεως (έκταση 2.903,75 τ.μ και τιμή μονάδος 639,89 €/τ.μ) τα οποία εκκρεμούν να απαλλοτριωθούν από το ΥΠΠΟΤ μετά την πρόσφατη τροποποίηση του σχεδίου πόλεως με σκοπό την προστασία και ενοποίηση του μόνου ουσιαστικά αρχικού πυρήνα που μπόρεσε να διατηρηθεί ορατός στον Λιμένα Χερσονήσου που αποτελεί τον υπ' αρ. 1 τουριστικό προορισμό του Ν. Ηρακλείου. Ο χώρος του θεάτρου σε συνδυασμό με το όμορο απαλλοτριωμένο οικοπέδο Μιχελακάκη όπου έχει αποκαλυφθεί τμήμα εκτεταμένου λουτρικού συγκροτήματος και με το επίσης όμορο απαλλοτριωμένο οικοπέδο Ασπετάκη, όπου

έχει αποκαλυφθεί Ρωμαϊκός δρόμος από



1.11 Υδραγωγείο Χερσονήσου (σχεδιάγραμμα)

λαξευμένες πλάκες άριστης διατήρησης, μπορεί να ενταχθεί σε πολιτιστική διαδρομή που θα ξεκινάει από την ενδοχώρα παράλληλα με το Ρωμαϊκό υδραγωγείο, θα διέρχεται από την τεράστια δεξαμενή νερού στη θέση «Παλάτια» (οικόπεδο Αποστολάκη υπόαπαλλοτρίωση) και θα καταλήγει στο κέντρο της αρχαίας πόλης. Στοναρχαιολογικό χώρο του αρχαίου θεάτρου εντάσσεται επίσης τοοικόπεδο Φ. Φραγκιαδάκη (υπό απαλλοτρίωση), όμορο προς ανατολάςμε το οικόπεδο Μιχελακάκη και σε επαφή με την έκταση του θεάτρου προς Νότο όπου συνεχίζεται το μνημειώδες λουτρικό συγκρότημα του οικόπεδου Μιχελακάκη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα γενικά χαρακτηριστικά της ηλεκτρικής διασκόπησης. Εν συντομία αναλύεται το φυσικό υπόβαθρο της μεθόδου.

Παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους υλοποιούνται οι διατάξεις μέτρησης, τα όργανα που χρησιμοποιούνται και ο σχεδιασμός για την πραγματοποίηση της γεωφυσικής έρευνας.

2.1 Εισαγωγή

Η γεωηλεκτρική μέθοδος παρουσιάζει μια ποικιλία έναντι των άλλων γεωφυσικών μεθόδων όπως η βαρυτική, η μαγνητική, η σεισμική και η ραδιομετρική. Μετρούνται συνήθως δυναμικά, ρεύματα (εντάσεις και πυκνότητες) και ηλεκτρομαγνητικά πεδία που παράγονται είτε από φυσικές είτε από τεχνητές πηγές. Με την εφαρμογή των ηλεκτρικών μεθόδων γεωφυσικής διασκόπησης επιδιώκεται ο καθορισμός της κατανομής των ηλεκτρικών ιδιοτήτων των πετρωμάτων των επιφανειακών στρωμάτων του φλοιού της Γης, με μετρήσεις ηλεκτρικών ποσοτήτων στην επιφάνεια της Γης.

Σκοπός της γεωηλεκτρικής μεθόδου διασκόπησης είναι να μετρηθεί η διαφορά δυναμικού που προκαλείται από την εισαγωγή ηλεκτρικού ρεύματος μέσα στην γη. Η μετρούμενη διαφορά δυναμικού αντικατοπτρίζει τη δυσκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μέσα στο υπέδαφος, δίνοντας έτσι μια ένδειξη για την ηλεκτρική αντίσταση του υπεδάφους. Διαφορετικοί γεωλογικοί σχηματισμοί παρουσιάζουν και διαφορετικές ηλεκτρικές αντιστάσεις.

Η γνώση της γεωηλεκτρικής δομής του υπεδάφους μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την έμμεση εύρεση της γεωλογικής δομής και δομών ενδιαφέροντος.

Οι ηλεκτρικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται κυρίως στη χαρτογράφηση γεωλογικών στρωμάτων (Vandenberghe, 1982 Olesen et al., 1992 Griffiths and Barker, 1993), στην ανεύρεση και χαρτογράφηση υδάτινων πόρων (Van dam, 1976 Rijo et al., 1977 Aubert et al., 1984 Olayinka and Barker, 1990), στην τεχνική γεωλογία για την εύρεση του βάθους του μητρικού πετρώματος σε τοποθεσίες κατασκευής τεχνητών φραγμάτων (Habberjam, 1975 Smith, 1986 Butler and Llopis, 1990 Dahlin et al., 1994), στην ανίχνευση γεωθερμικών πεδίων (Wright et al., 1985 Thanassoulas and Tsokas, 1987), στην περιβαλλοντική γεωλογία για τον εντοπισμό μολυσμένων υπόγειων υδάτων (Rodgers and Kean, 1980) και διαρροών αποβλήτων (Van et al., 1992) καθώς και στην εύρεση στόχων αρχαιολογικού ενδιαφέροντος (Aitken, 1974 Hesse et al., 1986 Roka and Tsokas, 1987 Orlando et al., 1987 Szymanski et al., 1992).

2.2 ΔΙΑΔΟΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Οι μέθοδοι που εφαρμόζονται ανήκουν στην κατηγορία του τεχνητά παραγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος, το οποίο διαβιβάζεται στο έδαφος δια μέσου ενός ζεύγους ηλεκτροδίων και σε ένα δεύτερο ζεύγος ηλεκτροδίων όπου μετράτε η πτώση τάσης που προκαλείται (Σχήμα 2.1).

Η διάδοση του ηλεκτρικού ρεύματος στην γη γίνεται με τους εξής τρεις τρόπους.

1. Ηλεκτρολυτική αγωγιμότητα

Το ηλεκτρικό ρεύμα διαδίδεται μέσω των ιόντων αλάτων και ορυκτών που είναι διαλυμένα μέσα στο νερό που γεμίζει τους πόρους των γεωλογικών σχηματισμών.

2. Ηλεκτρονική αγωγιμότητα

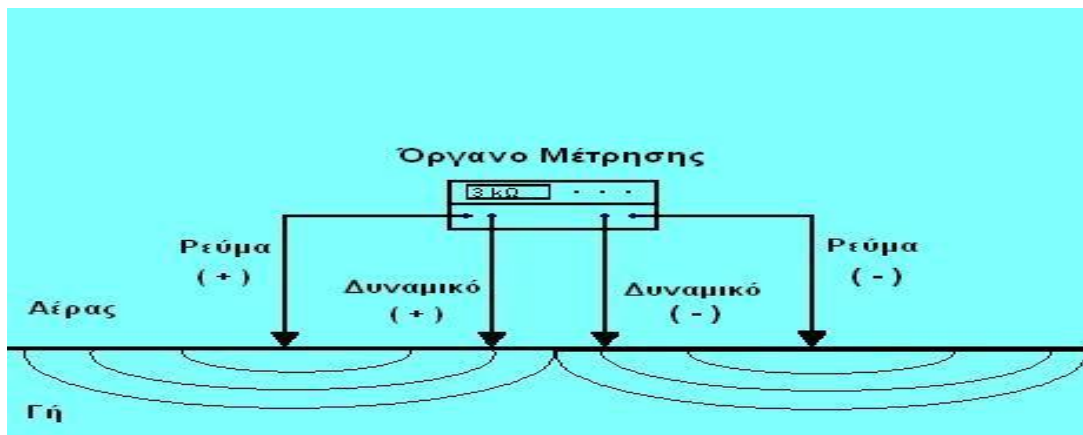
Το ηλεκτρικό ρεύμα διαδίδεται μέσω των ελεύθερων ηλεκτρονίων που βρίσκονται στην κρυσταλλική δομή πετρωμάτων και ορυκτών (κυρίως μεταλλικών)

3. Διηλεκτρική αγωγιμότητα

Το εναλλασσόμενο ηλεκτρικό ρεύμα προκαλεί κυκλική κίνηση στα ιόντα της κρυσταλλικής δομής κάποιων μονωτών. Η κίνηση αυτή προκαλεί δευτερεύων εναλλασσόμενο ρεύμα.

2.3 ΕΙΔΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

Η ηλεκτρική αντίσταση που υπολογίζεται σαν το πηλίκο των δύο αυτών μεγεθών χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης ρ .



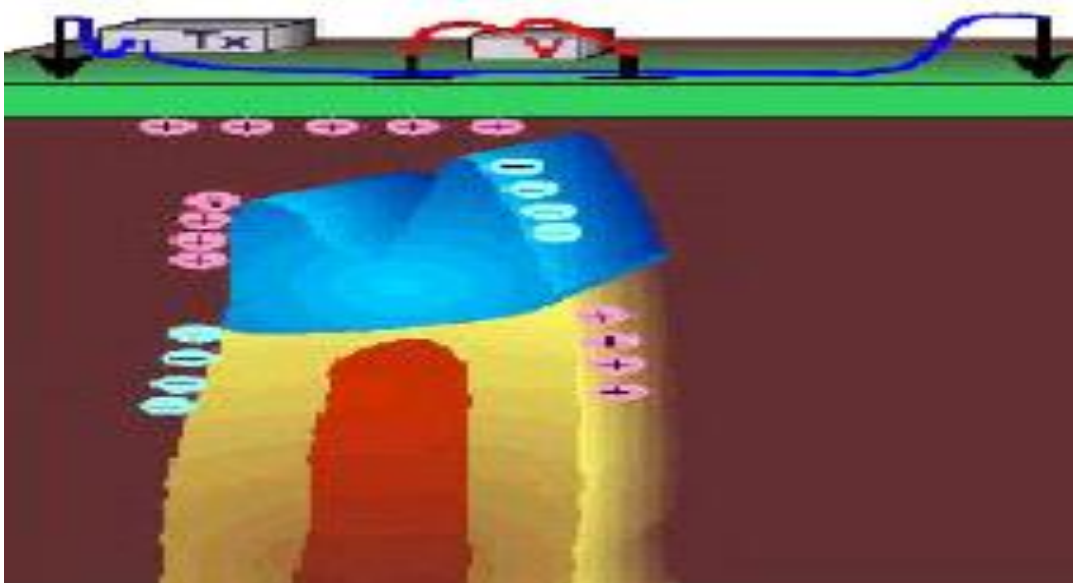
2.1. Η βασική διάταξη γεωηλεκτρικών μετρήσεων.

Η ειδική ηλεκτρική αντίσταση ρ ενός στερεού σώματος κυλινδρικού σχήματος, διατομής S και μήκους L , που έχει ηλεκτρική αντίσταση R , ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{RS}{L} \quad (2.1.)$$

και αντικατοπτρίζει την δυσκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μέσα στο υπόδαφος στο σύστημα SI. Το R μετράται σε Ohms, το L σε μέτρα (m) και το S σε

τετραγωνικά μέτρα (m^2). Μονάδα μέτρησης της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης είναι το Ωm .



2.2 Ειδική ηλεκτρική αντίσταση

Ένας άλλος όρος, που περιγράφει τη συμπεριφορά της Γης στη διέλευση του ρεύματος είναι η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα σ , η οποία αποτελεί το αντίστροφο της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης:

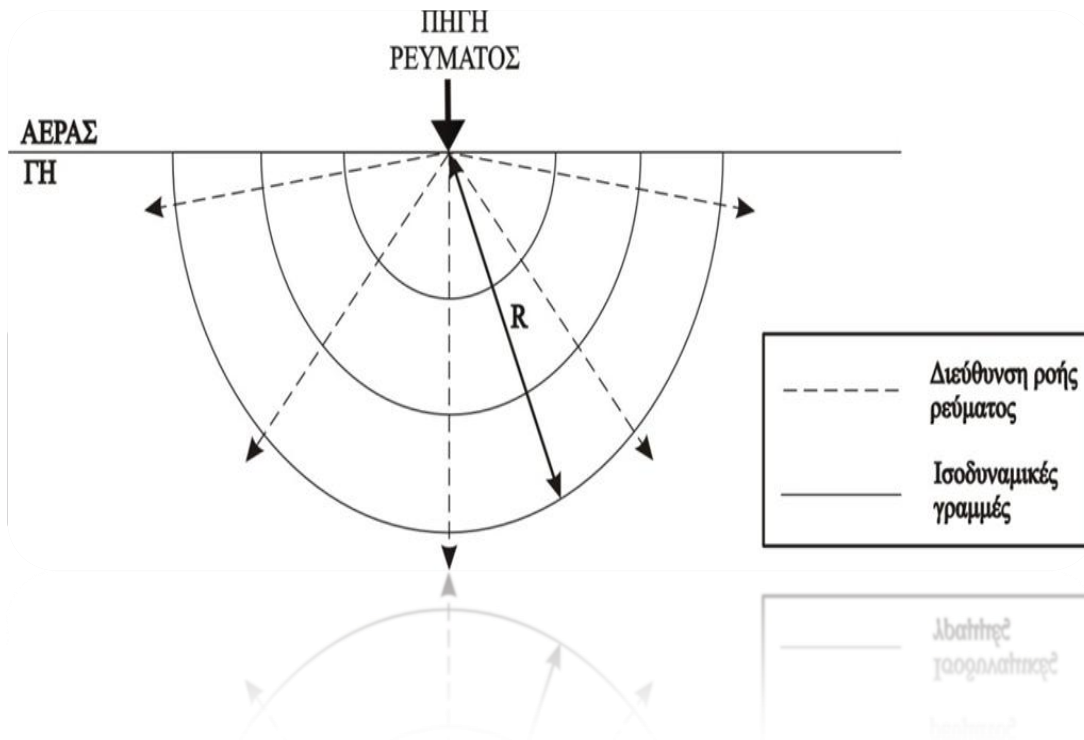
$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (2.2.)$$

και αντικατοπτρίζει την ευκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μέσα στο υπέδαφος. Η μονάδα μέτρησης της ειδικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας είναι το siemens ανά μέτρο (S/m).

2.4 ΦΑΙΝΟΜΕΝΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

Στην απλή περίπτωση, όπου το έδαφος είναι ομογενές και ισότροπο, το ρεύμα που εισέρχεται σε αυτό μέσω μιας σημειακής πηγής (ηλεκτροδίου), ρέει ακτινικά διερχόμενο από ένα ημισφαίριο εμβαδού $S = 2\pi r^2$, όπου r είναι η απόσταση της περιφέρειας του ημισφαιρίου από το σημείο εισαγωγής του ρεύματος. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες έχουν σχήμα ημισφαιρίου και οι γραμμές του ρεύματος είναι κάθετες στις ισοδυναμικές επιφάνειες (σχήμα 2.3.). Σε αυτή την περίπτωση το δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{\rho i}{2\pi r} \quad (2.3.)$$



2.3. Οι ισοδυναμικές γραμμές και η κατεύθυνση του ρεύματος για μια σημειακή πηγή.

Στην πράξη χρειάζονται τέσσερα ηλεκτρόδια για να γίνει μέτρηση της αντίστασης ενός ημιχώρου. Τα δύο από αυτά χρησιμεύουν στην εισαγωγή και κυκλοφορία του ρεύματος και τα ονομάζουμε A και B, ενώ με τη βοήθεια των άλλων μετράμε τη διαφορά δυναμικού στα αντίστοιχα σημεία και τα ονομάζουμε M και N. Έστω ότι AM είναι η απόσταση του M από το θετικό ηλεκτρόδιο A, BM από το αρνητικό B και AN και BN οι αντίστοιχες αποστάσεις του N από τα ηλεκτρόδια του ρεύματος (σχήμα 2.4.).

Τότε, σύμφωνα με τη σχέση (2.3.), η διαφορά δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων A και B για έναν ομογενή ημιχώρο με αντίσταση ρ και για μια διάταξη τεσσάρων ηλεκτροδίων, είναι:

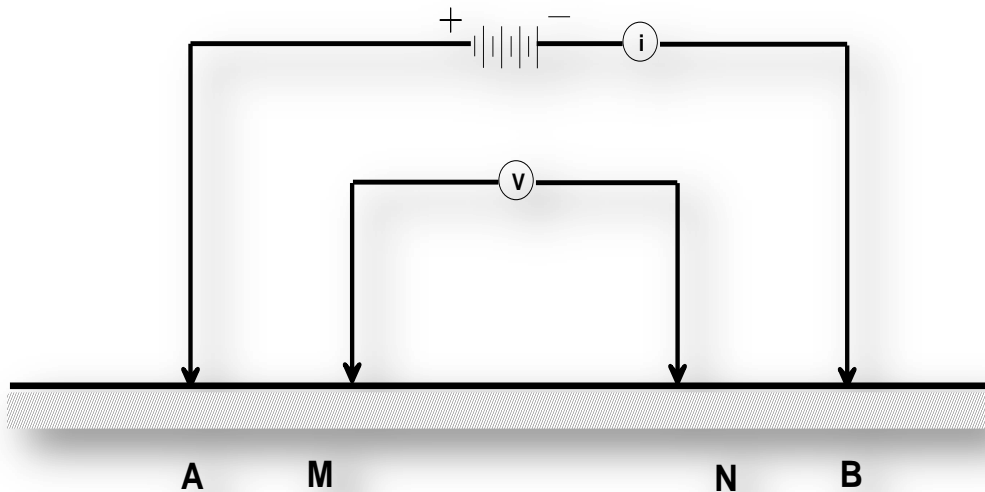
$$\Delta V = \frac{\rho i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right) \quad (2.4.)$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται για τη μελέτη των διαφόρων διατάξεων. Επομένως, η αντίσταση του ημιχώρου μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$\rho = \frac{2\pi \Delta V}{K i} \quad (2.5)$$

όπου K είναι ο παράγοντας μέσα στην παρένθεση της σχέσης (2.4.), ο οποίος λέγεται γεωμετρικός παράγοντας και εξαρτάται από τη διάταξη των τεσσάρων ηλεκτροδίων.

Στην περίπτωση ομογενούς και ισότροπου εδάφους και για οποιαδήποτε διάταξη ηλεκτροδίων, όταν ο γεωμετρικός παράγοντας πολλαπλασιάζεται με τη μετρούμενη αντίσταση, το αποτέλεσμα είναι η πραγματική αντίσταση του εδάφους.



2.4 Διάταξη τεσσάρων ηλεκτροδίων για τη μέτρηση της διαφοράς δυναμικού.

Στην περίπτωση μη ομογενούς και ισότροπου χώρου, η σχέση (2.5.), ορίζει μια παράμετρο που ονομάζεται φαινόμενη ειδική ηλεκτρική αντίσταση του ημιχώρου ρ_a . Η παράμετρος αυτή εισάγεται για να ληφθεί υπόψη η γεωμετρία της μέτρησης, οι θέσεις δηλαδή των ηλεκτροδίων. Η φαινόμενη αντίσταση δεν είναι η πραγματική αντίσταση του υπεδάφους, αλλά μια φαινόμενη τιμή, η οποία είναι η αντίσταση που θα είχε το έδαφος εάν ήταν γεωηλεκτρικά ομογενές. Η τιμή αυτή ταυτίζεται με την πραγματική αντίσταση όταν πρόκειται για ομογενή γη.

Στην πράξη η φαινόμενη αντίσταση ρ_a αποτελεί ένα είδος μέσου όρου των ηλεκτρικών αντιστάσεων του ανομοιογενούς υπεδάφους. Επομένως, δε δίνει ακριβώς την πραγματική αλλά μια “παραμορφωμένη εικόνα” της γεωηλεκτρικής δομής του υπεδάφους. Για το λόγο αυτό, η απευθείας χρήση των μετρήσεων φαινόμενης αντίστασης για την εξαγωγή συμπερασμάτων είναι παρακινδυνευμένη. Η πραγματική αντίσταση μπορεί να βρεθεί μόνο μετά από κατάλληλη επεξεργασία. Ο καθορισμός της πραγματικής αντίστασης από τις τιμές της φαινόμενης αντίστασης είναι η λύση του αντίστροφου προβλήματος, για το οποίο θα γίνει λόγος παρακάτω.

2.5 ΜΕΤΑΒΟΛΛΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ

Η αντίσταση ρ κατά κύριο λόγο εξαρτάται από την ηλεκτρολυτική αγωγιμότητα δηλαδή είναι συνδυασμός παραγόντων που επηρεάζουν τη συγκέντρωση, σύσταση του νερού. Ειδικότερα εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως είναι οι υδρολογικές-υδρογεωλογικές συνθήκες της περιοχής μελέτης, η χημική σύσταση του νερού, το μέγεθος των πόρων των σχηματισμών, πιθανές διαρρήξεις, διακλάσεις ή ρήγματα των σχηματισμών, η θερμοκρασία και η πίεση που επικρατούν. Τα μεταμορφωμένα και τα πυριγενή πετρώματα έχουν υψηλές τιμές αντίστασης. Η

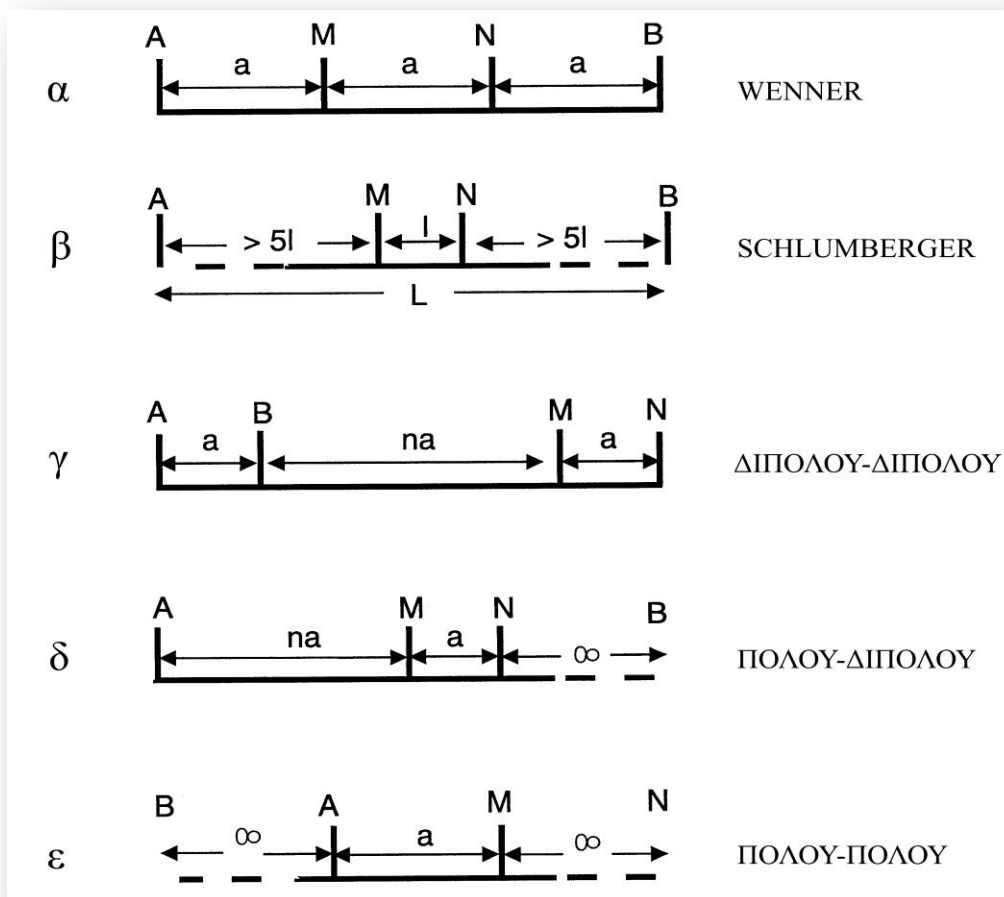
αντίσταση αυτών των πετρωμάτων εξαρτάται από το βαθμό ρωγμάτωσής τους και από το ποσοστό του νερού που περιέχουν στους πόρους τους.

Τα ιζηματογενή πετρώματα, τα οποία είναι συνήθως περισσότερο πορώδη και περιέχουν υψηλότερο ποσοστό νερού, έχουν χαμηλότερες αντιστάσεις. Η αντίσταση του νερού ποικίλει από 10 έως 100 $\Omega \cdot m$, ανάλογα με την περιεκτικότητά του σε διαλυμένα άλατα (Παπαζάχος, 1986).

2.6 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΔΙΩΝ

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι κατά τους οποίους διατάσσονται τα ηλεκτρόδια του ρεύματος και του δυναμικού. Παρακάτω παρουσιάζονται οι ευρύτερα χρησιμοποιούμενες διατάξεις αλλά και αυτές που εμείς χρησιμοποιήσαμε κατά την διάρκεια των μετρήσεων μας (σχήμα 2.4.). οι οποίες είναι : Wenner, Schlumberger, διπόλου – διπόλου , πόλου - διπόλου και πόλου-πόλου.

Το κύριο χαρακτηριστικό μιας διάταξης είναι ο γεωμετρικός της παράγοντας, ο οποίος σχετίζεται μονοσήμαντα με τις σχετικές αποστάσεις μεταξύ των ηλεκτροδίων (Tsourlos, 1995).



2.4 Οι συχνότερα χρησιμοποιούμενες διατάξεις ηλεκτροδίων (Tsourlos, 1995)

ΔΙΑΤΑΞΗ WENNER. Κατά τη διάταξη αυτή τα ηλεκτρόδια δυναμικού M,N τοποθετούνται μεταξύ των ηλεκτροδίων δυναμικού A,B (σχήμα 2.4α.). Οι αποστάσεις μεταξύ των παρακείμενων ηλεκτροδίων είναι ίσες με a . Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.4.) προκύπτει ότι:

$$K = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} \quad (2.6.)$$

και επομένως η φαινόμενη αντίσταση για τη διάταξη Wenner δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_a = 2\pi a \frac{\Delta V}{i} \quad (2.7.)$$

ΔΙΑΤΑΞΗ SCHLUMBERGER. Η διάταξη αυτή είναι παρόμοια με τη διάταξη Wenner, αλλά τα ηλεκτρόδια ρεύματος είναι τοποθετημένα σε απόσταση πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση των ηλεκτροδίων δυναμικού (σχήμα 2.4β). Αν η απόσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων ρεύματος είναι $2L$, η απόσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων δυναμικού είναι $2l$ και ισχύει $L \geq 10l$, τότε η φαινόμενη αντίσταση είναι:

$$\rho_a = \frac{\pi L^2}{2l} \cdot \frac{\Delta V}{i} \quad (2.8.)$$

2.7 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑ

Δύο μέθοδοι έρευνας είναι οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες για τον καθορισμό της αντίστασης. Με τη **μέθοδο της βυθοσκόπησης (sounding)** καθορίζεται η αντίσταση σε συνάρτηση με το βάθος. Το κέντρο της διάταξης παραμένει σταθερό και με τη συνεχή αύξηση της απόστασης των ηλεκτροδίων ρεύματος, αυξάνεται και το βάθος διείσδυσης του ρεύματος και διαρρέονται βαθύτεροι σχηματισμοί. Με τη **μέθοδο της όδευσης (profiling)** εντοπίζονται πλευρικές μεταβολές της αντίστασης.

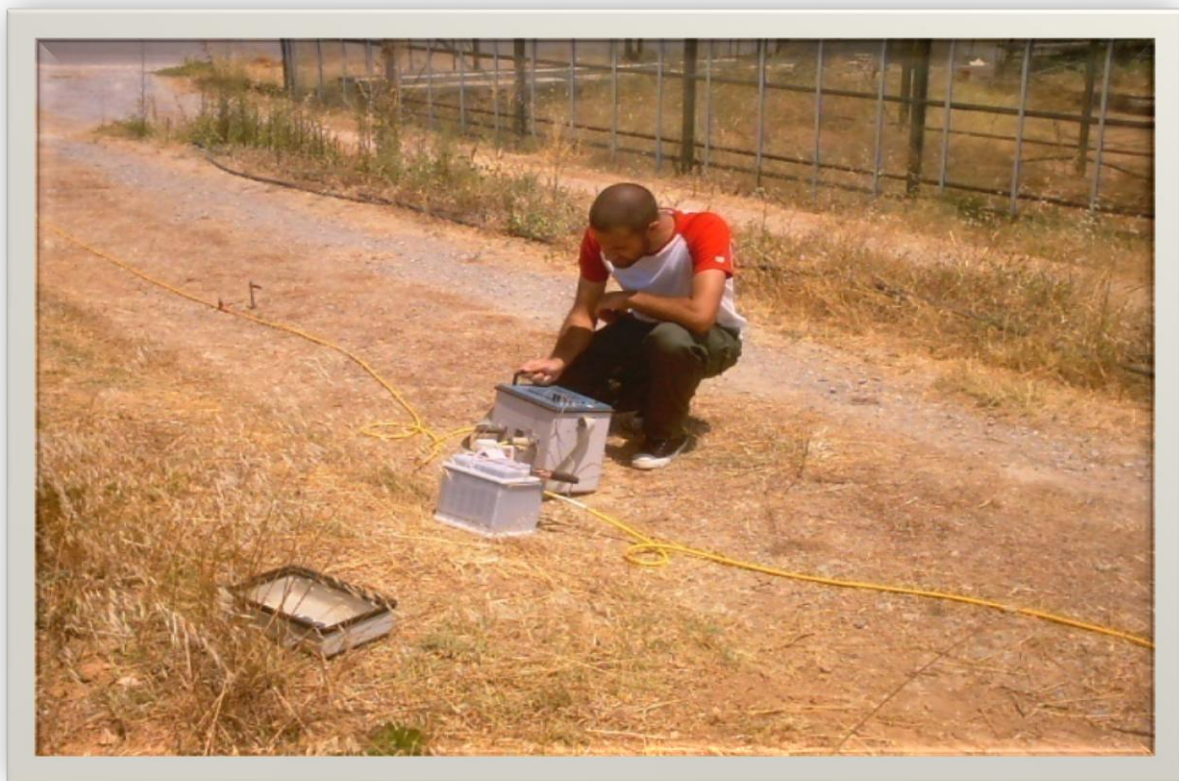
Αντίθετα με τη βυθοσκόπηση, οι αποστάσεις των ηλεκτροδίων παραμένουν σταθερές και λαμβάνεται μια σειρά μετρήσεων με πλευρική μετακίνηση της διάταξης των ηλεκτροδίων ως συνόλου με σταθερό βήμα.

Η **μέθοδος της ηλεκτρικής τομογραφίας** αποτελεί συνδυασμό των μεθόδων της βυθοσκόπησης και της όδευσης και παρέχει τη δυνατότητα λήψης πληροφοριών τόσο για την πλευρική όσο και για τη σε βάθος μεταβολή της αντίστασης. Η ηλεκτρική τομογραφία μπορεί να περιγραφεί ως μία σειρά από συνεχόμενες ηλεκτρικές βυθοσκοπήσεις κατά μήκος της γραμμής έρευνας ή ως μία σειρά από οδεύσεις πάνω από την ίδια περιοχή με διαδοχικά αυξανόμενες αποστάσεις ηλεκτροδίων. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε μια δυσδιάστατη εικόνα της περιοχής μελέτης.

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της ηλεκτρικής τομογραφίας είναι ότι, σε σύγκριση με τις άλλες τεχνικές, λαμβάνεται ένας αρκετά μεγάλος αριθμός μετρήσεων (άρα και χρήσιμης πληροφορίας). Με αυτόν τον τρόπο αυξάνεται η διακριτική

ικανότητα και ανάλυση της γεωηλεκτρικής μεθόδου. Παράλληλα όμως, λόγω του μεγάλου αριθμού τους, οι μετρήσεις είναι δύσκολο να ληφθούν με χειροκίνητη αλλαγή των ηλεκτροδίων, και γι' αυτό χρησιμοποιούνται συστήματα αυτοματοποιημένων πολυπλεκτών.

Πρόδρομος της ηλεκτρικής τομογραφίας είναι η μέθοδος της “ψευδοτομής” που έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα στην χαρτογράφηση μεταλλευμάτων (Edwards 1977) αλλά και σε διάφορες άλλες εφαρμογές (π.χ. υδρογεωλογικές, Griffiths et al. 1990). Στην διαδικασία της “ψευδοτομής” μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες διατάξεις ηλεκτροδίων (διπόλου-διπόλου, Wenner, πόλου-διπόλου). Η ηλεκτρική τομογραφία όμως είναι πιο γενικευμένος όρος που περιλαμβάνει και μετρήσεις με μη συμβατικές διατάξεις καθώς επίσης και μετρήσεις που λαμβάνονται με ηλεκτρόδια σε γεωτρήσεις (π.χ. Shima 1992).



2.7.1 ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Η πλέον δημοφιλής τεχνική για την αποκατάσταση της πραγματικής εικόνας της γεωηλεκτρικής αντίστασης του υπεδάφους είναι αυτή της αντιστροφής. Σκοπός της αντιστροφής είναι να βρεθεί ένα μοντέλο αντίστασης που να δίνει μετρήσεις που είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στις πραγματικές. Προϋπόθεση η ύπαρξη μεθόδου επίλυσης του ευθέως προβλήματος, δηλαδή, να βρεθούν οι μετρήσεις, δοθείσης της κατανομής της αντίστασης.

Αρχικά γίνεται μια αναφορά στην επίλυση του ευθέως προβλήματος, δηλαδή στον υπολογισμό της θεωρητικής απόκρισης του υπεδάφους σε μια διέγερση ροής ηλεκτρικού ρεύματος. Παρουσιάζονται πολύ συνοπτικά οι διάφορες μέθοδοι επίλυσης, αριθμητικές ή αναλυτικές. Επίσης παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού του Ιακωβιανού πίνακα A που χρησιμοποιείται στην επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος.

Παρουσιάζονται οι εξισώσεις που ισχύουν για την περίπτωση επίλυσης μη γραμμικών αντίστροφων προβλημάτων χωρίς περιορισμούς, και ακολουθεί μια αναφορά στα κριτήρια σύγκλισης και στη χρήση πινάκων στατιστικών βαρών στις εξισώσεις.

Ακολουθώς αναφέρονται οι μέθοδοι επίλυσης των μη γραμμικών συστημάτων με περιορισμούς. Οι μέθοδοι αυτές είναι οι πλέον χρησιμοποιούμενες στην πράξη, καθώς χειρίζονται αποτελεσματικά το πρόβλημα της αστάθειας της αντιστροφής του γενικευμένου Ιακωβιανού. Τέλος παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα και τα σχετικά μειονεκτήματα των μεθόδων, καθώς και οι λόγοι που μας οδήγησαν στην επιλογή μιας εξ αυτών για την εφαρμογή του αλγορίθμου που θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

2.7.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΙΑΚΩΒΙΑΝΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Η γενική διαδικασία αντιστροφής εμπεριέχει την έννοια της επαναληπτικής διαδικασίας, για την περίπτωση των μη-γραμμικών συστημάτων. Προσπαθούμε με διαδοχικές βελτιώσεις να βρούμε το μοντέλο m του υπεδάφους, εκείνο το οποίο επιλύοντας το ευθύ πρόβλημα θα μας δώσει συνθετικά δεδομένα $f(m)$ τα οποία να βρίσκονται όσο το δυνατό πιο κοντά σε αυτά που μετρήθηκαν στο ύπαιθρο.

Δημιουργείται έτσι ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$d=f(m), \quad (2.9)$$

όπου d είναι το διάνυσμα που περιέχει τα πειραματικά δεδομένα. Η λύση των γραμμικών εξισώσεων επιτρέπει να γραφεί η εξίσωση (3.1) στη μορφή $m=f^{-1}(d)$. Η αντιστροφή όμως της συνάρτησης f δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε μη-γραμμικά συστήματα, όπως στην περίπτωση των προβλημάτων των TDEM. Η λύση δίνεται με συνεχείς προσεγγίσεις, όπου υπολογίζεται πρώτα η συνάρτηση $f(m_j)$, για κάθε επανάληψη j , και με διαδοχικές βελτιώσεις του θεωρητικού μοντέλου γίνεται προσπάθεια να πλησιάσει όσο το δυνατό περισσότερο το πειραματικό.

Η βελτίωση του μοντέλου m_j γίνεται εφαρμόζοντας μικρές διαταραχές dm_j στις παραμέτρους. Υπολογίζοντας πάλι την λύση του ευθέως προβλήματος για τις καινούργιες παραμέτρους, συγκρίνονται οι θεωρητικές μετρήσεις με τις πραγματικές μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης που έχει τεθεί εξ αρχής.

Αναπτύσσοντας την εξίσωση (2.9) σε σειρά Taylor και αγνοώντας όρους μεγαλύτερης τάξεως από του ενός,

$$f_i(m_j + dm_j) \approx f_i(m_j) + \frac{\partial f_i(m_j + dm_j)}{\partial (dm_j)} dm_j.$$

Οι μερικές παράγωγοι της απόκρισης του μοντέλου $f(m)$ σε σχέση με τις παραμέτρους dm αποτελούν τα στοιχεία του πίνακα A που ονομάζεται Ιακωβιανός.

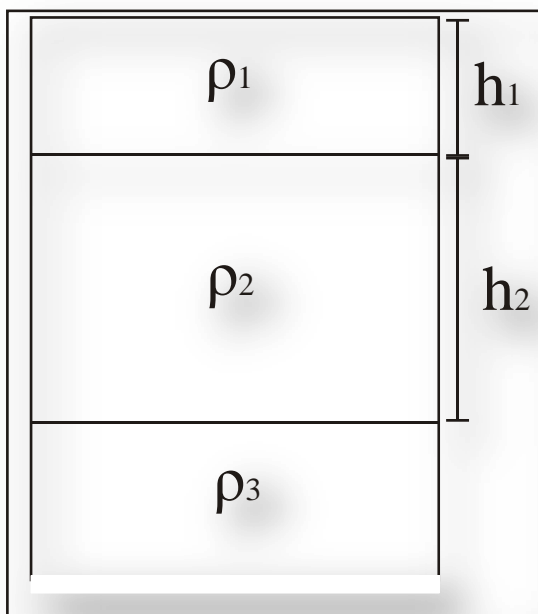
Άρα το στοιχείο ij του Ιακωβιανού πίνακα θα είναι

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i(m_j + dm_j)}{\partial (dm_j)} \quad (2.10)$$

Ο υπολογισμός των στοιχείων A_{ij} μέσω του τύπου (2.10) είναι δύσκολος, καθώς είναι άγνωστη η αναλυτική μορφή της συνάρτησης f . Υπάρχουν αριθμητικές λύσεις για τον υπολογισμό των στοιχείων του Ιακωβιανού Πίνακα, οι οποίες όμως είναι δύσκολο να υλοποιηθούν σε αλγοριθμική μορφή. Ο δημοφιλέστερος τρόπος είναι με τη χρήση της μεθόδου των διαταραχών των στοιχείων (perturbation technique) βάσει της εξίσωσης

$$A_{ij} = \frac{\log(f_i(m_j + \delta)) - \log(f_i(m_j))}{\delta} \quad (2.11)$$

όπου δ είναι η διαταραχή dm που εισάγεται για την βελτίωση του μοντέλου m_j . Δηλαδή, επιλύεται το ευθύ πρόβλημα μια φορά, και αλλάζουμε μια παράμετρο κατά ένα ποσοστό, π.χ. πέντε τοις εκατό, και επιλύεται δεύτερη φορά το ευθύ πρόβλημα για να υπολογιστεί η μεταβολή του συνθετικού μοντέλου εξαιτίας της διαταραχής της παραμέτρου. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε παράμετρο, έως ότου υπολογιστούν όλα τα στοιχεία του πίνακα A . Είναι φανερό ότι με την παραπάνω διαδικασία η μερική παράγωγος της εξίσωσης (2.10) υπολογίζεται προσεγγιστικά με τη χρήση των πεπερασμένων διαφορών (εξ.2.11).



2.5 Μοντέλο τριών στρωμάτων με αντιστάσεις ρ_1, ρ_2, ρ_3 και πάχη h_1 και h_2 .

Στο σχήμα (2.6) παρουσιάζεται ένα μοντέλο υπεδάφους τριών στρωμάτων, με αντιστάσεις ρ_1, ρ_2, ρ_3 και πάχη h_1, h_2 αντίστοιχα. Ο Ιακωβιανός πίνακας σε αυτό το παράδειγμα θα είναι τάξης $(5 \times n)$ και θα έχει τη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(m_1)}{\partial \rho_1} & \frac{\partial f(m_2)}{\partial \rho_1} & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial \rho_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial \rho_2} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial \rho_3} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial \rho_3} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial h_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial h_1} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial h_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial h_2} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

όπου n ο αριθμός των μετρήσεων. Τα στοιχεία του πίνακα υπολογίζονται με βάση τον τύπο (2.11).

2.7.3 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

Το πρόβλημα της ερμηνείας των γεωφυσικών ηλεκτρομαγνητικών δεδομένων πάσχει από μια εγγενή αδυναμία, η οποία και είναι συνηθισμένη στις περισσότερες γεωφυσικές μεθόδους: η αντιστροφή του γενικευμένου Ιακωβιανού πίνακα είναι ασταθής, με αποτέλεσμα, εάν δεν υπάρχουν περιορισμοί, οι λύσεις που προκύπτουν από την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος να είναι γεωλογικά απαρέδεκτες, παρόλο που μπορεί να είναι μαθηματικά ορθές.

Η διαδικασία της επίλυσης του ευθέως προβλήματος, μπορεί να γραφεί με την απλοποιημένη μορφή

$$f(m)=y, \quad (2.13)$$

όπου y είναι το διάνυσμα των πειραματικών δεδομένων, και $f(m)$ η λύση που προκύπτει από την επίλυση του ευθέως προβλήματος και αντιστοιχεί στο μοντέλο m , που αποτελείται από πάχη και αντιστάσεις στρωμάτων.

Στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος, υποθέτουμε στρωματομένη γη, δηλαδή τα στρώματα του υπεδάφους διατάσσονται οριζόντια, με συγκεκριμένα πάχη και αντιστάσεις. Άρα ο σκοπός της επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος είναι να μπορέσει να βρεθεί ένα μοντέλο στρωμάτων, το οποίο να έχει απόκριση που θα είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στις πειραματικές μετρήσεις.

Σκοπός λοιπόν της αντιστροφής είναι να καταλήξει σε μια σχέση της μορφής

$$y=f^{-1}(m) \quad (2.14)$$

Επειδή το πρόβλημα είναι μη γραμμικό, δε μπορεί να επιλυθεί απευθείας, αλλά μπορεί να αντικατασταθεί με την επίλυση επιμέρους «μικρότερων» γραμμικών προβλημάτων. Εάν η συνάρτηση $f(m)$ αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από μια πολύ

μικρή μεταβολή του dm , και αγνοώντας τους όρους μεγαλύτερης τάξης από την πρώτη, προκύπτει ότι

$$f(m + dm) \approx f(m) + \frac{\partial f(m)}{\partial m} dm = y, \quad (2.15)$$

όπου $\frac{\partial f(m)}{\partial m}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας, που εκφράζει τις μερικές παραγώγους της $f(m)$ σε σχέση με τη μεταβολή του μοντέλου m .

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι

$$\frac{\partial f(m)}{\partial m} = y - f(m) = dy,$$

όπου dy η διαφορά μεταξύ πραγματικών και συνθετικών δεδομένων. Έτσι, η επίλυση του αρχικού μη γραμμικού προβλήματος έχει αντικατασταθεί με την επίλυση πολλών επιμέρους γραμμικών προβλημάτων.

Για την περίπτωση γραμμικών προβλημάτων, η λύση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του σφάλματος μεταξύ των πειραματικών και θεωρητικών δεδομένων, δηλαδή,

$$q = dy^T dy = (y - f(m))^T (y - f(m)). \quad (2.16)$$

Θέτοντας την παράγωγο του q ως προς dm ίση με μηδέν, καταλήγουμε στις κανονικές εξισώσεις του συστήματος,

$$A^T A dm = A^T dy \quad (2.17)$$

και η τελική λύση του συστήματος είναι

$$dm = (A^T A)^{-1} A^T dy \quad (2.18)$$

όπου ο πίνακας $A^T A$ ονομάζεται γενικευμένος Ιακωβιανός.

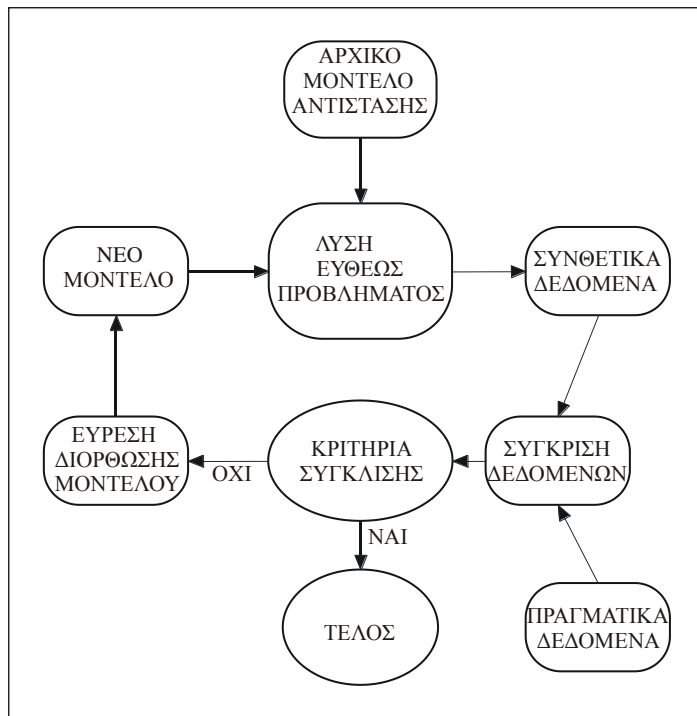
Βάσει της εξ.(2.17) μπορούμε να ορίσουμε τον αλγόριθμο επίλυσης του μη γραμμικού προβλήματος. Είναι μια επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία, σε κάθε επανάληψη k , η διόρθωση του μοντέλου δίνεται από τη σχέση

$$dm_k = (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T dy_k \quad (2.19)$$

όπου A_k είναι ο Ιακωβιανός πίνακας για την k επανάληψη, $dy_k = [y - f(m_{k-1})]$, και το νέο μοντέλο προκύπτει από την πρόσθεση της διόρθωσης στο προηγούμενο, δηλαδή,

$$m_{k+1} = m_k + dm_k. \quad (2.20)$$

Στο σχήμα (2.7) παριστάνεται σχηματικά η διαδικασία της μη γραμμικής αντιστροφής.



2.7 Διάγραμμα ροής του αντιστρόφου μη γραμμικού προβλήματος.

2.7.3.1 ΑΣΤΑΘΕΙΑ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΙΑΚΩΒΙΑΝΟΥ

Στην πράξη η αντιστροφή του γενικευμένου Ιακωβιανού είναι μαθηματικά ασταθής. Αυτό οφείλεται στους φυσικούς περιορισμούς της μεθόδου. Όσο η πληροφορία έρχεται από μεγαλύτερα βάθη, τόσο μειώνεται η διακριτική ικανότητα και κυρίως η ευαισθησία της μεθόδου. Άρα η μεταβολή μιας παραμέτρου που αντιστοιχεί σε μεγάλο βάθος, αναμένεται να επηρεάσει πολύ λίγο τις μετρήσεις μας. Αντίστροφα, μια μικρή αλλαγή σε κάποια μέτρηση μπορεί να επιφέρει τεράστια μεταβολή σε κάποιες από τις παραμέτρους του μοντέλου.

Άρα η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος έχει εγγενή αδυναμία, και η ύπαρξη σφαλμάτων στις μετρήσεις μας κάνει ακόμα πιο ασταθές το σύστημα (Lanczos 1961, Jackson 1972). Επομένως, καθώς προσπαθούμε να βρούμε ένα μοντέλο που να ταιριάζει στα πειραματικά δεδομένα που έχουμε συλλέξει, καταλήγουμε σε μια πλειάδα μοντέλων που μπορεί να ικανοποιούν μαθηματικά, ή ακόμα και φυσικά, τους όρους σύγκλισης μεταξύ πειραματικών και θεωρητικών μετρήσεων.

Απαιτείται έτσι η χρήση διαφόρων τεχνικών ώστε αφενός να κάνουμε την αντιστροφή μαθηματικά σταθερή, και αφετέρου να μπορέσουμε να διακρίνουμε ποιο από όλα τα μοντέλα που ικανοποιούν μαθηματικά τις εξισώσεις του συστήματος είναι αυτό που είναι πιο κοντά στο πραγματικό.

2.7.3.2 ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Στις μεθόδους αντιστροφής των γεωφυσικών προβλημάτων συχνή είναι η χρησιμοποίηση λογαριθμικής κλίμακας. Δύο είναι οι κύριες αιτίες. Η χρήση λογαρίθμων υποχρεώνει τις παραμέτρους να αποκτούν μόνο θετικές τιμές, αποφεύγοντας έτσι τιμές που δεν έχουν φυσικό νόημα (Sasaki 1982). Δεύτερον, λόγω του μεγάλου δυναμικού εύρους των τιμών που μπορεί να έχουν οι παράμετροι (ιδιαίτερα οι ηλεκτρικές αντιστάσεις), η χρήση λογαρίθμων δύναται να επιταχύνει το ρυθμό σύγκλισης του επαναληπτικού αλγορίθμου (Park και Van, 1991).

Το τετράγωνο του σφάλματος των ελαχίστων τετραγώνων ,στην περίπτωση χρήσης λογαρίθμων, γίνεται $q' = dy'^T dy'$, όπου $dy' = \ln y - \ln f(m)$.

Το διάνυσμα των παραμέτρων m γίνεται p_i , όπου $p_i = e^{x_i}$, και $i=1,n$. Η λύση του συστήματος είναι

$$dp = (A'^T A')^{-1} A'^T dy \quad (2.21)$$

όπου ο A' έχει στοιχεία $A'_{ij} = \frac{\partial \ln y_i}{\partial p_j}$ (Tsourlos, 1995).

2.7.3.3 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΚΑΙ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ- ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Η διαδικασία της αντιστροφής θα ήταν ημιτελής χωρίς ανάλυση των σφαλμάτων του διανύσματος των λύσεων. Καθώς τα δεδομένα έχουν εγγενή σφάλματα, είναι επόμενο να υπάρχουν σφάλματα και στη λύση που προκύπτει από τη μη γραμμική αντιστροφή του συστήματος. Ο έλεγχος των σφαλμάτων γίνεται με χρήση στατιστικών όρων (Press et all 1992).

Όπως και στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, ο μέσος όρος του τετραγώνου των σφαλμάτων υπολογίζεται ως

$$RMS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{(d_i^{ob} - d_i^{th})^2}{(d_i^{ob})^2}}, \quad (2.22)$$

όπου N ο αριθμός των δεδομένων, d^{ob} τα πειραματικά δεδομένα και d^{th} τα θεωρητικά δεδομένα.

Με τη χρήση του RMS ως κριτήριο σύγκλισης, το διάνυσμα των λύσεων είναι ευαίσθητο σε μεγάλα σφάλματα, γι αυτό στην πράξη χρησιμοποιείται ο όρος του αναγόμενου χ-τετράγωνο (Rijo 1977), που ορίζεται ως

$$\chi^2 = \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^N (d_i^{ob} - d_i^{th})^2, \quad (2.23)$$

όπου M ο αριθμός των παραμέτρων. Η χρήση αυτού του στατιστικού όρου κάνει τη λύση του συστήματος πιο ανεκτική σε μεγάλα σφάλματα.

Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα του όρου χ-τετράγωνο υπολογίζεται ο όρος του επί τοις εκατό μέσου σφάλματος των δεδομένων, που στην περίπτωση χρήσης λογαριθμικής κλίμακας δίνεται από τη σχέση

$$\% \varepsilon = (10^{\sqrt{\chi^2}} - 1) \times 100\%, \quad (2.24)$$

και είναι αυτός που χρησιμοποιείται στην σταθερή αντιστροφή, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ο ρυθμός σύγκλισης μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων (C.R), ορίζεται ως

$$C.R. = \frac{|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i|}{\varepsilon_{i+1}}. \quad (2.25)$$

Πέρα από τα σφάλματα των μετρήσεων, το τελικό αποτέλεσμα της διαδικασίας αντιστροφής πρέπει να ελεγχθεί αν βρίσκεται μεταξύ των ορίων εμπιστοσύνης. Ο έλεγχος γίνεται βρίσκοντας τα σφάλματα του διανύσματος των λύσεων. Το σφάλμα της i παραμέτρου ορίζεται ως

$$S_{p_i} = \sqrt{\chi^2} \sqrt{(A^T A)_{ii}^{-1}}, \quad (2.26)$$

όπου $(A^T A)_{ii}$ είναι το στοιχείο του αντιστρόφου γενικευμένου Ιακωβιανού. Στην περίπτωση αυτή η παράμετρος p_i θα βρίσκεται μεταξύ των ορίων $p_i \pm S_{p_i}$.

2.7.3.4 ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΒΑΡΩΝ

Καθώς η αναπόφευκτη ύπαρξη σφαλμάτων στις μετρήσεις επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα της αντιστροφής, ένας πολύ χρήσιμος τρόπος για τον έλεγχο τους είναι η εισαγωγή πινάκων στις εξισώσεις του συστήματος που να δίνουν μεγαλύτερη ή μικρότερη βαρύτητα στις μετρήσεις ανάλογα με την ποιότητα τους.

Εάν m είναι οι μετρήσεις, ορίζεται ένας διαγώνιος πίνακας $(m \times m)$, που ονομάζεται πίνακας στατιστικών βαρών, του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου ορίζονται ως

$$W_{ii} = \frac{1}{\sigma_i} \quad (2.27)$$

όπου σ_i είναι το σφάλμα της i μέτρησης. Η τιμή του σφάλματος δίνεται είτε από το όργανο μέτρησης κατά τη διάρκεια της έρευνας, είτε από τον χρήστη ανάλογα με τις εκτιμήσεις του για την ποιότητα των στοιχείων που συνέλεξε.

Η φυσική έννοια της χρήσης των πινάκων W είναι πως αν κάποια μέτρηση έχει μεγάλο σφάλμα, το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα θα έχει πολύ μικρή τιμή.

Ο πίνακας αυτός πολλαπλασιάζεται και με τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.13), οπότε $Wf(m) = Wy$,

$$(2.28)$$

και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$dm_k = (A_k^T W^T W A_k)^{-1} A_k^T W dy_k. \quad (2.29)$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι η αντίστοιχη εξίσωση του συστήματος να λαμβάνεται λιγότερο υπόψη κατά τη διάρκεια της αντιστροφής, επηρεάζοντας έτσι το διάνυσμα των λύσεων λιγότερο από τις υπόλοιπες εξισώσεις του συστήματος.

2.7.3.5 ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ SVD ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΤΑΘΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ένας τρόπος επίλυσης συστημάτων που ο πίνακας A είναι ασταθής είναι με τη χρήση της μεθόδου SVD (Lanczos 1961, Golub και Reinsch 1970, Lawson και Hanson 1974). Ο πίνακας A διαστάσεων $(m \times n)$ αναλύεται σε τρεις πίνακες,

$$A = UV^T, \quad (2.30)$$

όπου, ο πίνακας U είναι διαστάσεων $(m \times m)$, ο Λ είναι διαγώνιος $(n \times n)$ και ο V είναι διαστάσεων $(n \times n)$. Ο αντίστροφος γενικευμένος Ιακωβιανός είναι $A_g^{-1} = V\Lambda^{-1}U^T$.

Ο πίνακας Λ είναι ο πίνακας των ιδιοτιμών του συστήματος. Από την ανάλυση του πίνακα Λ , μπορούμε να καταλάβουμε το πόσο ασταθές είναι το σύστημα. Τα στοιχεία του πίνακα είναι

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & & 0 \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_3} & \dots & \\ & & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

όπου, λ_i είναι οι ιδιοτιμές του συστήματος. Όταν οι ιδιοτιμές λ_i είναι πολύ μικρές (κοντά στο μηδέν), το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα Λ αποκτά πολύ μεγάλη τιμή και η συνεισφορά του στο διάνυσμα των λύσεων του συστήματος είναι μεγάλη.

Είναι δυνατό μέσω της ανάλυσης που επιτυγχάνεται με τη χρήση της SVD να εντοπιστούν οι πολύ μικρές ιδιοτιμές του συστήματος και να αποκοπούν. Εφαρμόζεται ένα κατώφλι κάτω από το οποίο τα στοιχεία του πίνακα Λ μηδενίζονται, και οι ιδιοτιμές αυτές δεν λαμβάνονται υπόψη κατά τη διαδικασία της αντιστροφής. Η τεχνική χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα στις αρχές της δεκαετίας του 1980 για την επίλυση των ασταθών συστημάτων στο αντίστροφο γεωφυσικό πρόβλημα .

Το πρόβλημα είναι πως η επιλογή της τιμής που θα έχει το κατώφλι είναι αυθαίρετη, και εξαρτάται από το χρήστη, παρόλο που υπάρχουν διάφορες τεχνικές για τον ορισμό της τιμής αυτής (Press et al 1992). Αν δεν γίνει σωστός ορισμός της τιμής που θα έχει το κατώφλι, είτε θα αποκοπούν ιδιοτιμές που περιέχουν χρήσιμες πληροφορίες για το σύστημα που επιλύεται, είτε θα παραμείνουν ιδιοτιμές που θα «παραμορφώσουν» τη λύση του συστήματος. Η δυσκολία να οριστεί το κατώφλι είναι και ο λόγος που η χρήση της SVD είναι περιορισμένη στην αντιστροφή γεωφυσικών προβλημάτων. Υπάρχουν άλλες μέθοδοι, που με πιο αποτελεσματικό τρόπο απομακρύνουν τις ιδιοτιμές αυτές χωρίς τον κίνδυνο να χαθούν πληροφορίες του συστήματος όπως θα δούμε παρακάτω.

2.7.3.6 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Μια άλλη κατηγορία μεθόδων, ιδιαίτερα δημοφιλής και αποτελεσματική στην επίλυση του αντίστροφου γεωφυσικού προβλήματος, είναι η εισαγωγή περιορισμών στη λύση του συστήματος. Οι περιορισμοί μπορεί να προέρχονται από προϋπάρχουσες πληροφορίες για το πραγματικό μοντέλο, ή από εκτιμήσεις γύρω από αυτό. Η κύρια φιλοσοφία αυτών των μεθόδων είναι ότι οι τιμές των διορθώσεων σε κάθε επανάληψη της αντιστροφής, δεν πρέπει να αφήνονται να κινούνται

ανεξέλεγκτα. Περιορίζεται έτσι το βήμα των διορθώσεων σε περιοχή εμπιστοσύνης ώστε να αποφευχθούν λύσεις οι οποίες είναι μεν μαθηματικά σωστές, αλλά είναι φυσικά (γεωλογικά) απαράδεκτες.

2.7.3.7 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

Μια από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους για την επίλυση ασταθών αντίστροφων προβλημάτων είναι η τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης, που προτάθηκε από τον Levenberg (1944). Η σταθεροποίηση της αντίστροφής επιτυγχάνεται με την πρόσθεση μιας σταθεράς στα διαγώνια στοιχεία του $A^T A$.

Αργότερα ο Marquardt (1963, 1970) χρησιμοποίησε αυτή την ιδέα για να αναπτύξει ένα πολύ χρήσιμο αλγόριθμο. Η μέθοδος ονομάστηκε Levenberg-Marquardt και είναι αυτή που χρησιμοποιείται κατά κόρον στη Γεωφυσική. Η μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα στη μονοδιάστατη αντίστροφή των δεδομένων της μεθόδου των TDEM.

Η μέθοδος εκτός από τη συνθήκη για περιορισμό του σφάλματος $q = dy^T dy = (y - f(m))^T (y - f(m))$, εισάγει ένα ακόμα περιορισμό, την προϋπόθεση η λύση να βρίσκεται μέσα στο χώρο εμπιστοσύνης που εξαρχής ορίζεται από το χρήστη. Μαθηματικά ο περιορισμός αυτός ορίζεται ως

$$dm^T dm < ct, \quad (2.32)$$

όπου ct είναι μια θετική σταθερά που αντικατοπτρίζει το ποσοστό του θορύβου που έχουν τα δεδομένα. Έτσι προκύπτει μια καινούργια συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση, η

$$\phi = q_1 + \lambda q_2 = dy^T dy + \lambda (m^T m - L_0^2). \quad (2.33)$$

Στην εξίσωση (2.33), η συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση είναι ο γραμμικός συνδυασμός του τετραγώνου των σφαλμάτων και του μεγέθους των λύσεων, και τίθεται ένα ανώτερο επιτρεπτό όριο στο μέγεθος των αλλαγών των παραμέτρων. Ο παράγοντας λ ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange ή παράγοντας απόσβεσης και μένει να καθοριστεί.

Ακολουθώντας παρόμοια στρατηγική όπως στην περίπτωση χωρίς περιορισμούς, καταλήγουμε στις κανονικές εξισώσεις, που για το γραμμικό πρόβλημα είναι,

$$(A^T A + \lambda I)m = A^T y \quad (2.34)$$

Για το μη γραμμικό πρόβλημα, η διόρθωση του μοντέλου, για κάθε επανάληψη k , είναι

$$dm_k = [A_k^T A_k + \lambda_k I]^{-1} A_k^T dy_k \quad (2.35)$$

και το νέο μοντέλο δίνεται από τη σχέση

$$m_{k+1} = m_k + dm_k. \quad (2.36)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν πίνακες στατιστικών βαρών, η εξίσωση (2.35) μετατρέπεται στην

$$dm_k = [A_k^T W^T W A_k + \lambda_k I]^{-1} A_k^T W dy_k. \quad (2.37)$$

Αναλύοντας τον πίνακα A με τη χρήση της SVD και επιλύοντας το σύστημα,

$$m = (V \Lambda U^T U \Lambda V^T + \lambda I)^{-1} V \Lambda U^T y = V \text{diag}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \lambda}\right) U^T y. \quad (2.38)$$

Ο πίνακας $\text{diag}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \lambda}\right)$ έχει τη μορφή

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda} & & & & 0 \\ & \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + \lambda} & & & 0 \\ 0 & & \frac{\lambda_3}{\lambda_3^2 + \lambda} & \dots & \\ 0 & 0 & & & \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \lambda} \end{vmatrix}. \quad (2.39)$$

Αν η ιδιοτιμή λ_i είναι μεγάλη, τότε η πρόσθεση του λ στο κλάσμα δεν επιφέρει καμία αλλαγή. Αν όμως το λ_i είναι μικρό, η πρόσθεση του λ δίνει μια πολύ μικρή τιμή στο κλάσμα, και κάνει το στοιχείο του πίνακα A να έχει πολύ μικρή συνεισφορά στο διάλυμα των λύσεων (Jupp και Vozoff 1975).

Σε σύγκριση με την εξίσωση (2.19) που προκύπτει από την χωρίς περιορισμούς λύση, γίνεται φανερό από την ανάλυση της SVD πως η εξίσωση (2.35) μπορεί να διαχειριστεί αποτελεσματικά την περίπτωση που υπάρχουν ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $A^T A$. Ο Marquardt (1970) έδειξε πως η μέθοδος είναι ίδια με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για $\lambda \rightarrow 0$, και με τη γενικευμένη αντιστροφή του Penrose^(*) (1955).

Για τον προσδιορισμό του παράγοντα απόσβεσης, ο Marquardt πρότεινε να δίνεται μια μεγάλη τιμή αρχικά στο λ κατά την πρώτη επανάληψη. Αν από τη σύγκριση των θεωρητικών και πραγματικών δεδομένων διαπιστωθεί σύγκλιση, τότε η τιμή του παράγοντα απόσβεσης στην επόμενη επανάληψη υποδεκαπλασιάζεται, και επαναλαμβάνεται η διαδικασία. Διαφορετικά, σε περίπτωση απόκλισης δηλαδή, η τιμή του λ δεκαπλασιάζεται.

Στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως μειονέκτημα της μεθόδου, η ισχυρή εξάρτηση από την επιλογή του αρχικού μοντέλου m_0 (Meju 1994, Draper και Smith 1981), με αποτέλεσμα πολλές φορές οι λύσεις που δίνονται να είναι μαθηματικά μεν ορθές,

(*) (Η γενικευμένη αντιστροφή που πρότεινε ο Penrose (1955) ονομάζεται και μέθοδος της απότομης μεταβολής, όπου το αρχικό μοντέλο διορθώνεται κατά τη διεύθυνση της αρνητικής παραγώγου της συνάρτησης σφάλματος,

δηλαδή $m = -k \left\{ \frac{\partial q}{\partial m} \right\}$, όπου k είναι μια θετική σταθερά.

αλλά φυσικά (γεωλογικά) μη αποδεκτές (Smith και Shanno 1971), ειδικά στην περίπτωση που τα δεδομένα περιέχουν σφάλματα.

2.7.3.8 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΟΜΑΛΥΣΜΕΝΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης ασταθών προβλημάτων αντιστροφής είναι να εισαχθεί ένας περιορισμός εξομάλυνσης. Η χρήση τέτοιου περιορισμού για την σταθεροποίηση των προβλημάτων αντιστροφής ανήκει σε μια γενικότερη κατηγορία μεθόδων «κανονικοποίησης» που πρώτος εισήγαγε ο Tikhonov (Tikhonov 1963, Tikhonov και Glasko 1965).

Ένας αλγόριθμος αντιστροφής αυτού του τύπου, που είναι πολύ δημοφιλής στη γεωφυσική, είναι η μέθοδος Occam (Constable et al. 1987). Η βασική ιδέα πίσω από τη μέθοδο έγκειται στην προσπάθεια εξεύρεσης της πιο απλής λύσης ελλείψει πληροφοριών για το μοντέλο που αναζητείται. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται συντηρητικά, με την έννοια πως δεν ψάχνουμε την ακριβή αναπαράσταση της πραγματικότητας, αλλά ένα μοντέλο, ανάμεσα στα πολλά που ικανοποιούν μαθηματικά τα δεδομένα, που θα είναι το απλούστερο δυνατό.

Η αρχική υπόθεση που γίνεται είναι ότι οι άγνωστες παράμετροι του μοντέλου είναι ένας αριθμός στρωμάτων, π.χ. ίσος με τον αριθμό των μετρήσεων, γνωστού πάχους και άγνωστης αντίστασης (DeGroot-Hedlin και Constable, 1990). Έτσι, οι άγνωστοι είναι μόνο οι αντιστάσεις των στρωμάτων. Ο Constable έθεσε τα πάχη των στρωμάτων ίσα, λαμβάνοντας όμως υπόψη το γεγονός ότι η ευαισθησία της μεθόδου μειώνεται με το βάθος, θα μπορούσαν τα πάχη των στρωμάτων να αυξάνονται με το βάθος.

Ο αρχικός περιορισμός που εισάγεται είναι το μέτρο της διαφοράς μεταξύ των πραγματικών και θεωρητικών μετρήσεων να είναι μικρότερο από το επίπεδο του θορύβου των δεδομένων, δηλαδή,

$$\|f(m) - d\| \leq \varepsilon. \quad (2.40)$$

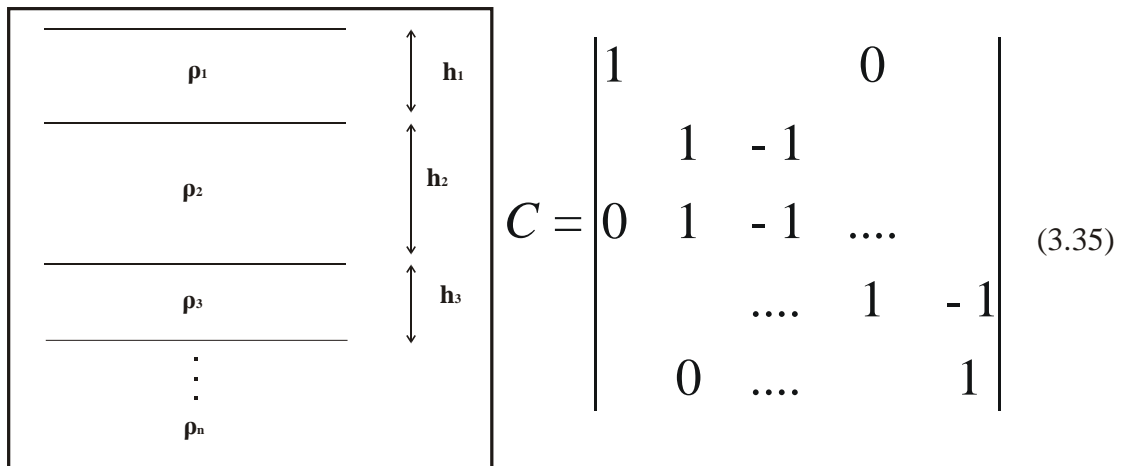
Το σφάλμα του συστήματος, η συνάρτηση δηλαδή προς ελαχιστοποίηση, είναι η

$$q = (Wd - WAm)^T (Wd - WAm). \quad (2.41)$$

Επιπλέον, εισάγεται στο σύστημα ένας πίνακας τραχύτητας R , ο οποίος δείχνει τον τύπο της εξομάλυνσης. Ο πίνακας R μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$R = \|Cm\|^2 \quad (2.42)$$

και υποδηλώνει την εξάρτηση των παραμέτρων μεταξύ τους, δηλαδή των αντιστάσεων των στρωμάτων γνωστού πάχους. Η i γραμμή του πίνακα δίνει πληροφορίες για την i παράμετρο-αντίσταση του συστήματος, και την εξομάλυνση που υφίσταται σε σχέση με τις γειτονικές παραμέτρους. Αν το πραγματικό μοντέλο αποτελείται από n στρώματα, με πάχη $(n-1)$, προσπαθούμε να βρούμε ένα θεωρητικό μοντέλο με N στρώματα (όσες και οι μετρήσεις), και ο πίνακας C είναι (NxN) τάξεως, της μορφής



The diagram shows a vertical column representing a layered earth model. It is divided into horizontal layers. The top layer has density ρ_1 and thickness h_1 . The second layer has density ρ_2 and thickness h_2 . The third layer has density ρ_3 and thickness h_3 . Below these, there are vertical dots and a final layer with density ρ_n . To the right of the diagram is a matrix equation labeled (3.35):

$$C = \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & \dots \\ & & \dots & 1 & -1 \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix} \quad (3.35)$$

Μαθηματικά, το πρόβλημα τίθεται ως εξής: ελαχιστοποίηση του σφάλματος q υπό τη συνθήκη η τραχύτητα R του μοντέλου να είναι ελάχιστη.

Από την ελαχιστοποίηση με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange προκύπτει η εξίσωση

$$((AW)^T AW + \lambda R)m = (WA)^T Wy. \quad (2.43)$$

Επομένως, η λύση του συστήματος για το μη γραμμικό πρόβλημα είναι

$$dm_k = ((A_k W)^T A_k W + \lambda_k C^T C)^{-1} (WA_k)^T W dy_k \quad (2.44)$$

και το νέο μοντέλο

$$m_{k+1} = m_k + dm_k. \quad (2.45)$$

Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του λ , τόσο πιο εξομαλυσμένες είναι οι λύσεις, άρα μικρό εύρος διορθώσεων. Αντίστροφα, μικρή τιμή του λ συνεπάγεται μεγάλο εύρος διορθώσεων.

Η διαφορά της εξίσωσης (2.43) από την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης (εξ.2.36), είναι η προσθήκη του πίνακα R , που δίνει στο μοντέλο την εξομαλυσμένη μορφή, επιτρέπει δηλαδή στο μοντέλο να αποκλίνει από την απλούστερη μορφή τόσο, όσο χρειάζεται για να πλησιάσουν οι θεωρητικές μετρήσεις τις πραγματικές.

Ο Constable προτείνει μια διαδικασία καθορισμού της τιμής του λ με μεθόδους βελτιστοποίησης. Αρχικά ορίζεται ένα πολύ μεγάλο διάστημα μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η τιμή του λ (από 10^{-3} έως 10^6). Ερευνώντας σε όλο το διάστημα ορίζεται ένα μικρότερο διάστημα, μέσα στο οποίο βρίσκεται ένα τοπικό ελάχιστο. Αν η τιμή της συνάρτησης q , για αυτή την τιμή του λ , είναι μικρότερη από το κατώφλι θορύβου που έχει οριστεί, τότε ο αλγόριθμος αναζητά την τιμή εκείνη του λ για την οποία η τιμή της συνάρτησης q γίνεται ίση με το επίπεδο του θορύβου. Η τιμή αυτή του λ θεωρείται πως είναι η βέλτιστη για τη συγκεκριμένη επανάληψη.

2.8 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο υποκεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται μια σύγκριση μεταξύ των κυριότερων μεθόδων αντιστροφής σε μια διάσταση για τη μέθοδο της ηλεκτρικής τομογραφίας που μελετήθηκαν παραπάνω, δηλαδή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης, της μεθόδου της εξομαλυσμένης αντιστροφής.

2.8.1 ΑΣΤΑΘΕΙΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ-ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

Στη μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής, ο περιορισμός τίθεται από φυσική σκοπιά. Η στρωμάτωση του υπεδάφους δεν αναμένεται να έχει απότομες μεταβολές όσο αφορά τις αντιστάσεις, και έτσι το τελικό μοντέλο αποκλίνει από τον ομογενή ημιχώρο τόσο, όσο ώστε οι θεωρητικές μετρήσεις να συγκλίνουν με τα πειραματικά δεδομένα.

Ο περιορισμός που τίθεται στην υβριδική αντιστροφή είναι διαφορετικός από τη μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής. Περιορίζεται το εύρος διόρθωσης του μοντέλου όσο αφορά τις αντιστάσεις των στρωμάτων, όμως τα πάχη αφήνονται να μεταβάλλονται ανεξέλεγκτα. Ο περιορισμός αυτός έχει φυσική έννοια, καθώς επιδιώκουμε να πάρουμε ένα τελικό μοντέλο με διακριτά στρώματα, όμως υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των αντιστάσεων, υπό την έννοια πως δεν αναμένονται τρομερά απότομες αλλαγές των αντιστάσεων μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων.

2.8.2 ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ-ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η ύπαρξη σφαλμάτων στα δεδομένα θα πρέπει να θεωρείται εκ των προτέρων δεδομένη. Στην περίπτωση που τα σφάλματα είναι τυχαία και έχουν κανονική κατανομή, αποδείχτηκε πειραματικά πως όλες οι μέθοδοι αποκρίνονται ικανοποιητικά. Με τη χρήση των πινάκων στατιστικών βαρών, οι μέθοδοι απομονώνουν τις μετρήσεις εκείνες που έχουν πολύ μεγάλα σφάλματα, δίνοντας τους πολύ μικρό βάρος κατά τη διαδικασία της αντιστροφής.

2.8.3 ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΡΧΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Στην περίπτωση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης και της υβριδικής αντιστροφής, η επιλογή του αρχικού μοντέλου είναι σημαντική. Ο χρήστης απαιτείται να εισάγει όχι μόνο το σωστό αριθμό στρωμάτων, αλλά και να επιλέξει τις τιμές των παραμέτρων του αρχικού μοντέλου έτσι ώστε να είναι αρκετά κοντά στις πραγματικές. Στην περίπτωση που υπάρχει πρότερη γνώση της δομής του υπεδάφους αυτό είναι σχετικά εύκολο, αλλά πολλές φορές ο χρήστης πρέπει να δοκιμάζει πολλά μοντέλα με διαφορετικό αριθμό στρωμάτων έως ότου να καταλήξει σε αυτό που έχει τη μεγαλύτερη σύγκλιση με τις πειραματικές μετρήσεις.

Αν δεν υπάρχει καμία πληροφορία για το μοντέλο του υπεδάφους, τότε η μέθοδος της εξομαλυσμένης αντιστροφής είναι αυτή που μπορεί να παρέχει τα πιο αξιόπιστα αποτελέσματα, καθώς δεν απαιτείται προσδιορισμός του αριθμού των στρωμάτων. Ο χρήστης εισάγει μόνο τη μέση αντίσταση του υπεδάφους και το σταθερό πάχος των στρωμάτων, και ο αλγόριθμος προσπαθεί να μεταβάλλει τις αντιστάσεις των στρωμάτων ώστε να υπάρξει σύγκλιση μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών μετρήσεων.

2.8.4 ΣΑΦΗΝΕΙΑ ΣΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ

Είθισται στη Γεωφυσική να αναπαριστούμε τα μοντέλα του υπεδάφους χρησιμοποιώντας διακριτές ασυνέχειες μεταξύ των στρωμάτων, ιδιαίτερα όσο αφορά

τις αντιστάσεις τους. Π.χ. μοντέλο δύο στρωμάτων με ανώτερο στρώμα πάχους 100 μέτρων και αντίσταση 10 Ohm-m, υπερκείμενο ημιχώρου 100 Ohm-m.

Η μέθοδος της εξομαλυσμένης αντιστροφής, εξαιτίας ακριβώς του περιορισμού που εισάγεται μέσω του πίνακα τραχύτητας R , επιτρέπει στις αντιστάσεις μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων να μεταβάλλονται βαθμιαία μεταξύ τους. Επιπλέον, ο αριθμός των στρωμάτων ορίζεται ίσος με τον αριθμό των μετρήσεων. Το τελικό μοντέλο αποτελείται έτσι από πολλά μικρά στρώματα, και δεν ορίζονται σαφή πάχη μεταξύ στρωμάτων με απότομες μεταβολές στην αντίσταση, αλλά υπάρχει μια ομαλή μεταβολή μεταξύ ακραίων τιμών.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης δεν εισάγει κανενός είδους περιορισμό, και τα πάχη των στρωμάτων ορίζονται σαφώς, καθώς αφήνονται να κινούνται ανεξέλεγκτα μεταξύ τους.

Στην υβριδική αντιστροφή, ο περιορισμός που τίθεται είναι οι αντιστάσεις μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων να μην κινούνται ανεξέλεγκτα μεταξύ τους. Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός όσο αφορά τα πάχη των στρωμάτων, τα οποία μπορούν να μεταβάλλονται ελεύθερα. Έτσι και σε αυτή τη μέθοδο τα πάχη ορίζονται σαφώς.

Συμπερασματικά, από την ανάλυση που έγινε παραπάνω, αλλά κυρίως από τις δοκιμές που έγιναν με διάφορα θεωρητικά μοντέλα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η υβριδική μέθοδος αντιστροφής είναι αυτή που παρουσιάζει τα περισσότερα πλεονεκτήματα από όλες τις μεθόδους που εξετάστηκαν. Είναι σταθερή, λαμβάνει υπόψη της τα μεγέθη των σφαλμάτων των μετρήσεων, δίνει με σαφήνεια το πάχος των στρωμάτων του μοντέλου, και το τελικό μοντέλο προκύπτει ως αποτέλεσμα φυσικών και όχι αυθαίρετων μαθηματικών περιορισμών. Επίσης εμφανίζει τα περισσότερα πλεονεκτήματα μεταξύ των μεθόδων που εξετάστηκαν. Τη μέθοδο αυτή επιλέξαμε για την εφαρμογή του αλγορίθμου σταθερής αντιστροφής που θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Όλα τα παραπάνω, συνοψίζονται στον πίνακα (Π3.1), όπου με ([]) συμβολίζονται τα πλεονεκτήματα ή οι απαιτήσεις και με (-) τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου

Μέθοδος	Είναι Σταθερή η Αντιστροφή ;	Προέλευση Περιορισμών ;	Αρχικό Μοντέλο ;	Διακριτά Στρώματα ;	Συμπεριλαμβάνεται Τυχαιός Θόρυβος ;
Ελάχιστα Τετράγωνα	-	-	[[[
Ελ. Τετράγωνα Απόσβεσης	[Μαθηματικό Μοντέλο	[[[
Εξομαλυσμένη αντιστροφή	[Φυσικό Μοντέλο	-	-	[

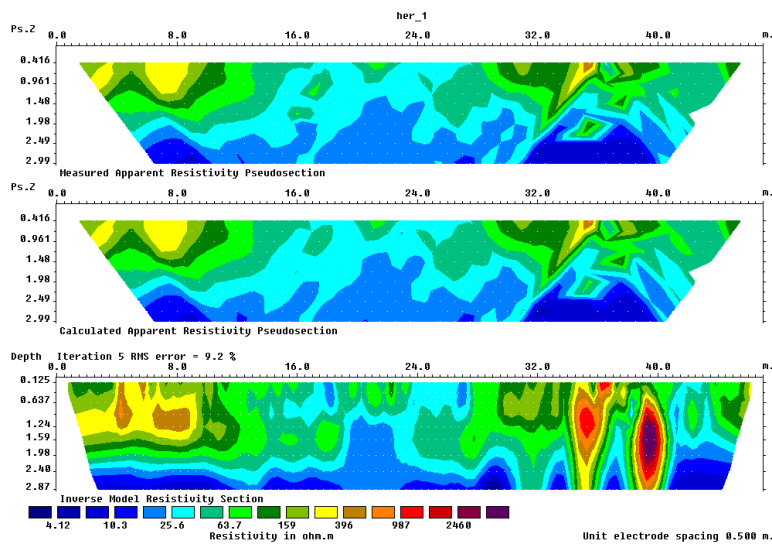
Πίνακας Π3.1 Συγκεντρωτικά τα συμπεράσματα για τις μεθόδους αντιστροφής του μονοδιάστατου προβλήματος της ηλεκτρικής τομογραφίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

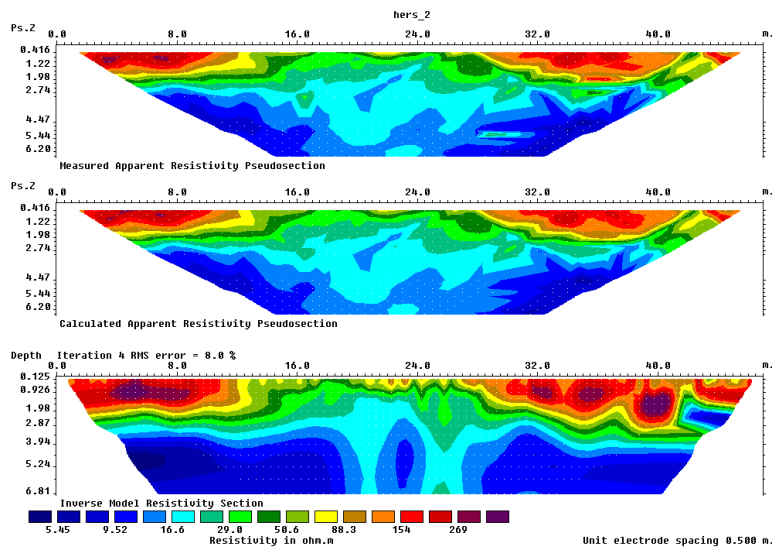
3.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Τομή 1^η



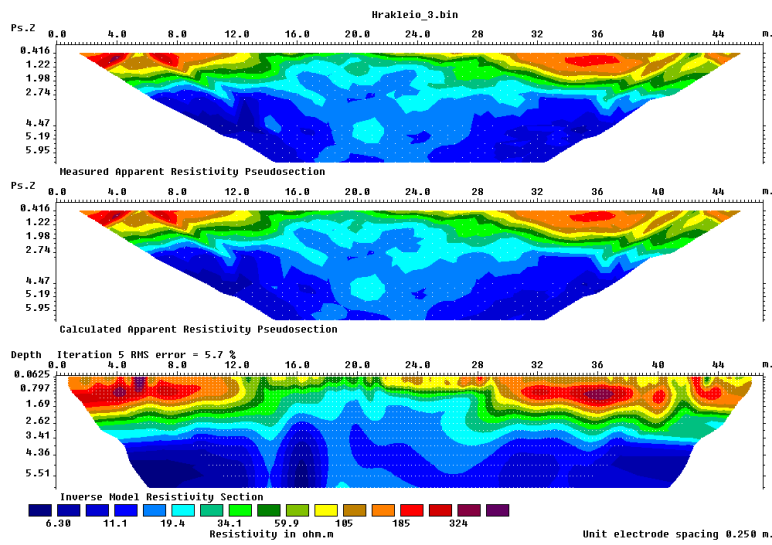
Σχήμα 3.1 Αποτελέσματα πρώτης τομής.

Τομή 2^η



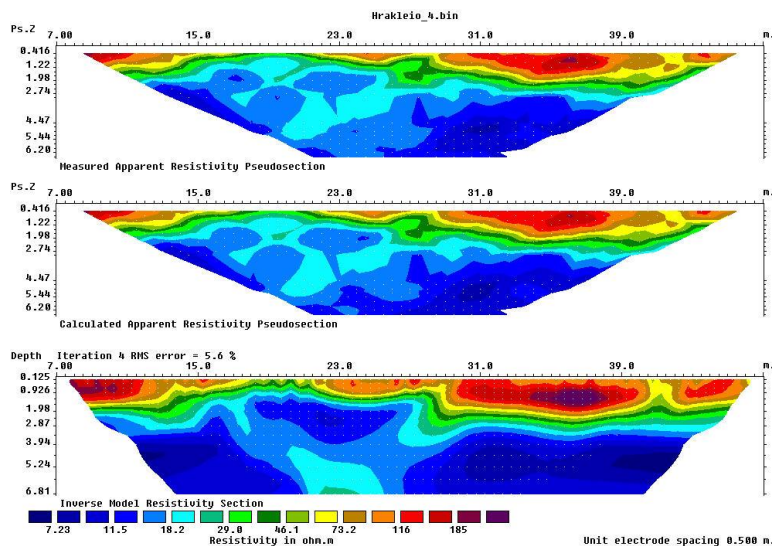
Σχήμα 3.2 Αποτελέσματα δεύτερης τομής.

Τομή 3^η



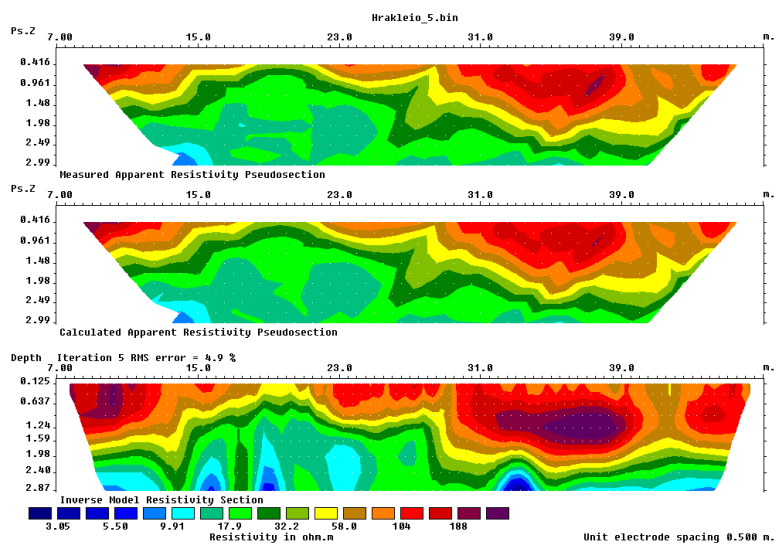
Σχήμα 3.3 Αποτελέσματα τρίτης τομής.

Τομή 4^η



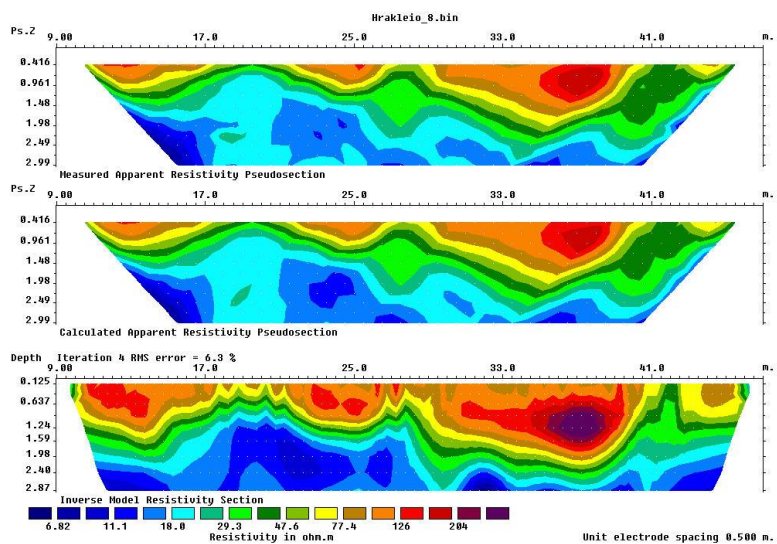
Σχήμα 3.4 Αποτελέσματα τέταρτης τομής.

Τομή 5^η



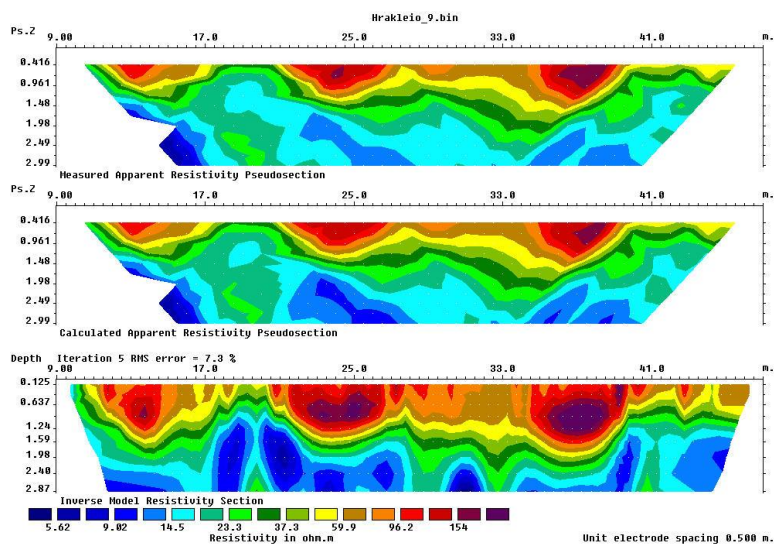
Σχήμα 3.5 Αποτελέσματα πέμπτης τομής.

Τομή 6^η



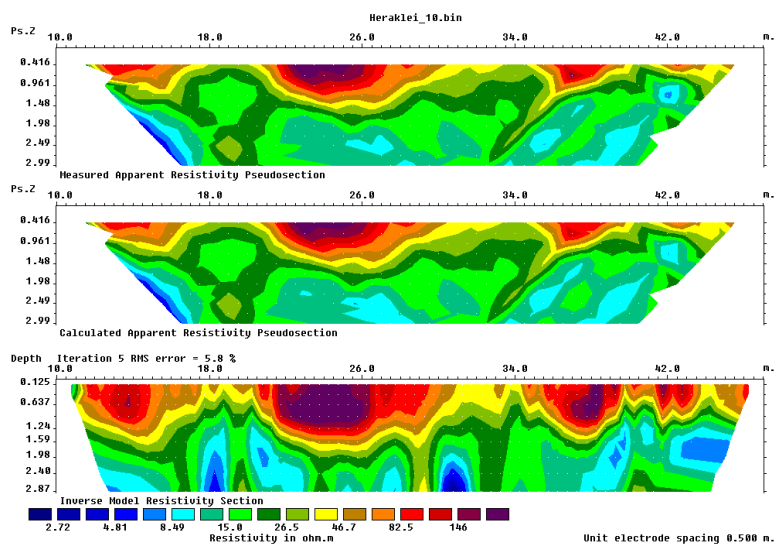
Σχήμα 3.6 Αποτελέσματα έκτης τομής.

Τομή 7^η



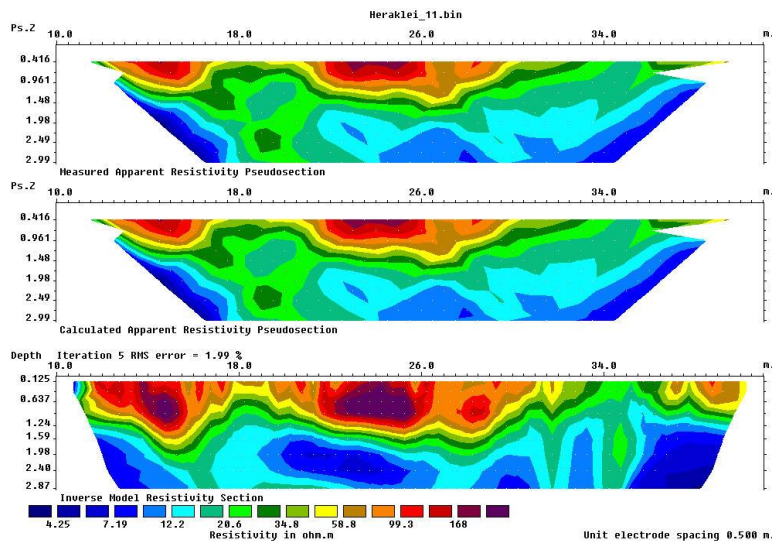
Σχήμα 3.7 Αποτελέσματα έβδομης τομής.

Τομή 8^η



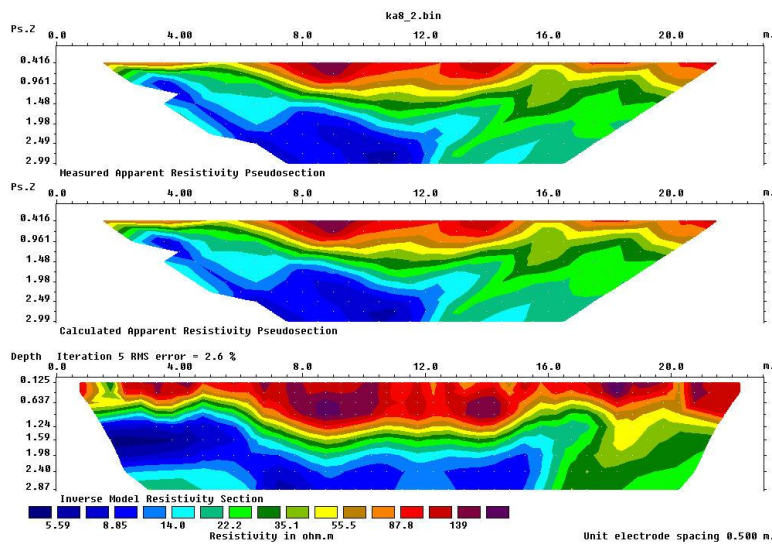
Σχήμα 3.8 Αποτελέσματα όγδοης τομής.

Τομή 9^η



Σχήμα 3.9 Αποτελέσματα ένατης τομής.

Τομή 10^η



Σχήμα 3.10 Αποτελέσματα δέκατης τομής.

3.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως διαπιστώνεται από τα αποτελέσματα, στην περιοχή της Χερσονήσου Ηρακλείου το Ρωμαϊκό θέατρο διασώζεται υπεδάφια. Οι πολύ μεγάλες αντιστάσεις που παρατηρούνται οφείλονται στην ύπαρξη σκληρών πλακών (πιθανότητα ασβεστολιθικές) που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των κερκίδων και της κεντρικής σκηνής. Πιθανή ανασκαφή του χώρου θα αποκαλύψει περισσότερα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Loke, M. H., 2002, RES2DMOD, Rapid 2D Resistivity Forward Modeling Using Finite-Difference and Finite-Element Methods, published at www.geoelectrical.com

Loke, M. H., 2000, A Practical Guide to 2D & 3D Electrical Imaging Surveys, published at www.geoelectrical.com

Tsourlos, P., Szymanski, J. and Tsokas G., 1999, The effect of terrain topography on commonly used resistivity arrays: *Geophysics*, **64, 1357-1363.**