

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΝΕΦΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΤΗΣ
ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΑΣ

Λήψη και προβολή των μετεωρολογικών δεδομένων στο
διαδίκτυο

Θεόδωρος Γκουσάροβ
Τμ. Φυσικών Πόρων και Περιβάλλοντος

28 Ιουνίου

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Φαινομενολογία Νεφών | 5 |
| 1.1 | Δημιουργία Νεφών | 5 |
| 1.2 | Σύγχρονη ταξινόμηση | 7 |
| 1.2.1 | Χαμηλά νέφη, 0.6-2 χλμ | 7 |
| 1.2.2 | Μεσαία Νέφη, 2-6 χλμ | 12 |
| 1.2.3 | Υψηλά νέφη 4-6 χλμ | 13 |
| 1.2.4 | Ορογραφικά νέφη | 15 |
| 1.2.5 | Ομίχλη | 15 |
| 2 | Μελέτη της νέφωσης στην κίνηση της ατμόσφαιρας | 19 |
| 2.1 | Οι αστάθειες Rayleigh-Taylor, Kelvin- Helmholtz | 19 |
| 2.1.1 | Οι βασικές εξισώσεις των ρευστών | 19 |
| 2.2 | Η αστάθεια Rayleigh-Taylor | 21 |
| 2.3 | Η αστάθεια Kelvin-Helmholtz | 21 |
| 2.4 | Η επαναληπτική μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων | 22 |
| 3 | Γεωμετρικές κατασκευές | 23 |
| 3.1 | Κατασκευή διακριτοποίησης του νέφους | 23 |
| 3.1.1 | Κατασκευή του δικτύου | 29 |
| 3.1.2 | Συνοριακές γεωδαισιακές ψηφίδες | 29 |
| 3.2 | Εκτιμήσεις για την συνοριακή επιφάνεια του νέφους \mathcal{S} | 30 |
| 3.2.1 | Συνοριακές εκτιμήσεις | 30 |

Εισαγωγή Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου που με συνδραμαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες της πτυχιακής μου εργασίας καθ. Τ. Παπακώστα και δρ Δ. Πλιάκη, η οποία με καθοδήγησαν στη διάρκεια της.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθ. Π. Σουπιό που συμμετείχε στην επιτροπή εξέτασης.

Κεφάλαιο 1

Φαινομενολογία Νεφών

1.1 Δημιουργία Νεφών

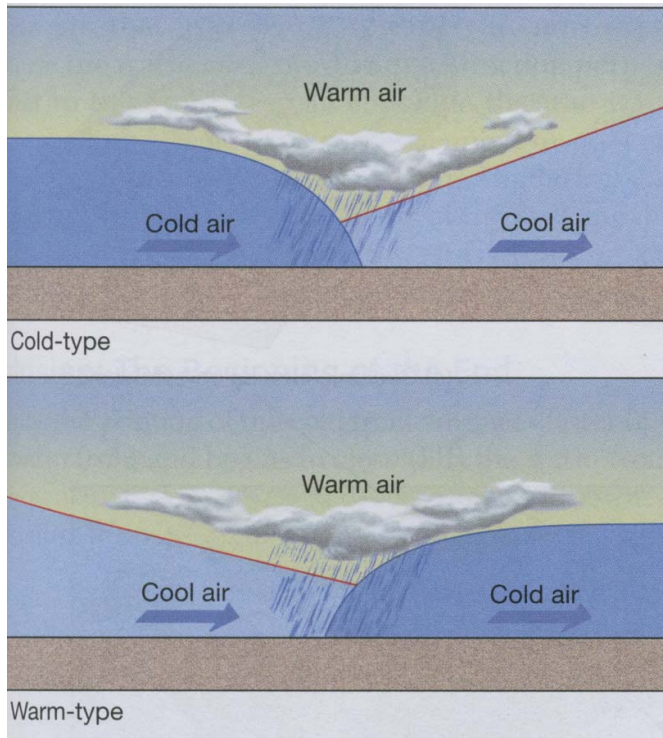
Τα σύννεφα σχηματίζονται από ανοδικά ρεύματα αέρα που φθάνουν στο ύψος της τροπόσφαιρας όπου ψύχονται αδιαβατικά. Η πτώση της θερμοκρασίας του αέρα δεν προκαλείται από το περιβάλλον αλλά από την εκτόνωση του και έτσι ψύχονται οι υδρατμοί και δημιουργούνται τα νέφη. Τα μόρια των υδρατμών ψύχονται και κολλούν στους πυρήνες (τα μικροσκοπικά σωματίδια της ατμόσφαιρας) σχηματίζοντας τα υδροσταγονίδια των νεφών. Με τον τρόπο αυτό και με την συμπύκνωση τους που επέρχεται μόλις η θερμοκρασία του αέρα βρεθεί κάτω από το σημείο δρόσου του, σχηματίζοντας τα νέφη στα διάφορα ύψη της τροπόσφαιρας. Τα ανοδικά ρεύματα του αέρα οφείλονται στους ακόλουθους παράγοντες και χαρακτηρίζονται ανάλογα:

- Την παρεμβολή των βουνών, και ονομάζονται ορογραφικά
- Την υπερθέρμανση του αέρα δημιουργώντας μέτωπα, μετωπικά
- Υπερθέρμανση της επιφάνειας του εδάφους ή της θάλασσας και εμφανίζεται η κατακόρυφη ανύψωση
- Στη δημιουργία στροβόλων λόγω της τριβής του ανέμου στα διάφορα γεωγραφικά στοιχεία

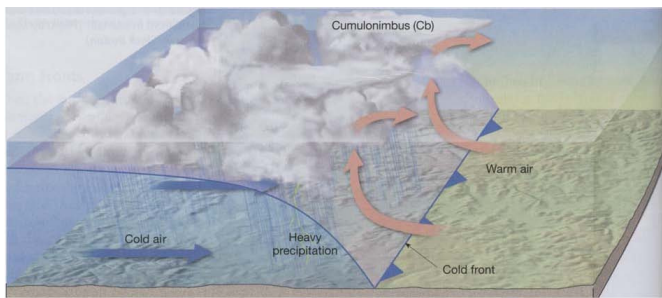
Το ύψος στο οποίο συντελείται η ψύξη των υδρατμών καλείται *στάθμη συμπύκνωσης*. Στο ύψος αυτό σχηματίζεται η βάση των νεφών. Ο καθορισμός του ύψους αυτού εξαρτάται από πολλούς παράγοντες κυρίως όμως από τη διαφορά της θερμοκρασίας αέρα και του δρόσου.

Τα υδροσταγονίδια που συνιστούν τα νέφη έχουν διάμετρο $10^{-5}m$ και η θερμοκρασία τους είναι σημαντικά χαμηλότερη από τον περιβάλλοντα αέρα.

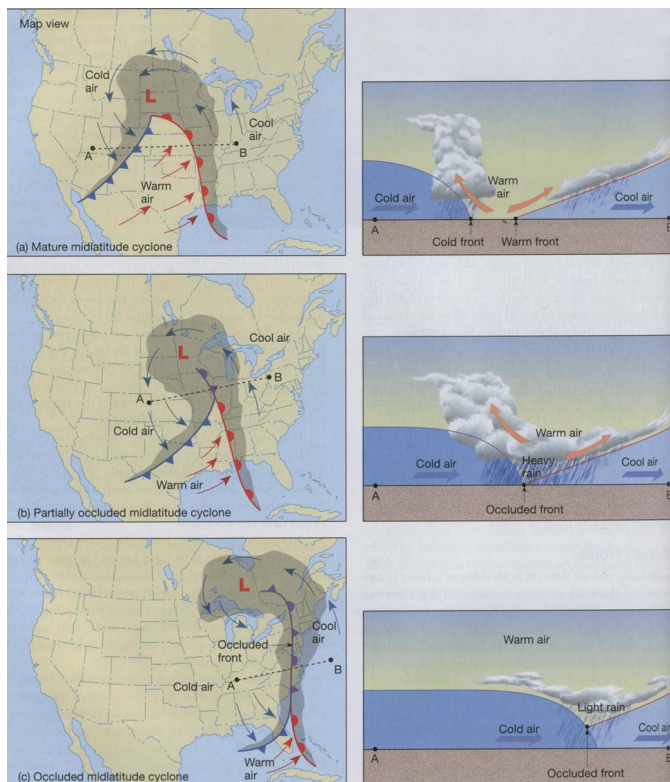
Έτσι αναρωτιόμαστε γιατί ο βαρύτερος ψυχρός αέρας των νεφών δεν πέφτει άμεσα ως βροχή αλλά αποτελούν σώματα που πλανώνται στον ουρανό. Η αρχική απλοϊκή ερμηνεία τους συμπέρανε ότι οι υδροσταγόνες αποτελούνται από ελφρύτερα συστατικά του αέρα, π.χ. υδρογόνο ή ήλιο. Η ορεθή ερμηνεία είναι ότι το βάρος των σωματιδίων εξισορροπείται από την κίνηση του αέρα, εκτός των ανοδικών ρευμάτων ο αέρας διαπερνά τα νέφη. Τα υδροσταγονίδια επιπλέουν και αιωρούνται στον αέρα δημιουργώντας τα νέφη. Στο δεύτερο μέρος θα δούμε τη μαθηματική θεωρία της δημιουργίας των νεφών ως αστάθειες που προκύπτουν από την επαφή δύο διαφορετικών ρευστών, αστάθειες Rayleigh-Taylor, Helmholtz.



Σχήμα 1.1: Δημιουργία Νεφών



Σχήμα 1.2: Δημιουργία Νεφών



Σχήμα 1.3: Δημιουργία Νεφών

1.2 Σύγχρονη ταξινόμηση

Η ταξινόμηση των νεφών βασίζεται σε δύο στοιχεία, στον τρόπο σχηματισμού τους και στο ύψος που βρίσκονται.

1.2.1 Χαμηλά νέφη, 0.6-2 χλμ

Σωρείτες Cumulus Είναι απομονωμένα νέφη, γενικά πυκνά με έντονα περιγράμματα, αναπτύσσονται κατακόρυφα με τη μορφή των ανυψούμενων σωρών, θόλων ή πύργων. Το εξογκωμένο ανώτερο τμήμα μοιάζει με κουνουπίδι. Η βάση τους είναι σκούρα και σχεδόν οριζόντια. Οι σωρείτες εμφανίζονται σε διάφορα μεγέθη. Η οριζόντια και κατακόρυφη ανάπτυξη τους υπερβαίνει το χιλιόμετρο. Επίσης μέσω του σχηματισμού συμπλεγμάτων, το μέγεθος τους μπορεί να αυξηθεί. Η υποκατηγορία Cumulus medioeris αποτελείται από νέφη με μορφή βαμβακιού σχηματίζονται δε τις θερμές ώρες της ημέρας όταν ο ζεστός αέρα ανέρχεται σε ψυχρότερα στρώματα και συμπυκνώνεται σε υδρατμούς. Η εμφάνιση τους συνδυάζεται με καλοκαιρία και διαύγεια.

Οι σωρείτες μπορεί να φέρουν ψιλόβροχο. Η εμφάνιση τους οφείλεται σε ασταθείς αέριες μάζες, κυρίως τους θερμούς μήνες του έτους. Μπορεί να εξελιχθούν σε πυργοσωρείτες.

Οι πυργοσωρείτες είναι νέφη κατακόρυφης ανάπτυξης: οφείλονται στην ύπαρξη ασταθών αέριων μαζών στην ανώτερη ατμόσφαιρα. Σχηματίζονται όταν ισχυρά ανοδικά ρεύματα ζεστού αέρα ανυψώνονται και συναντούν ψυχρότερα στρώματα. Προκαλούν ισχυρές και σύντομες βροχοπτώσεις ενώ μπορεί να δώσουν χαλάζι. Σπανιότερα παρατηρούνται ηλεκτρικά φαινόμενα.



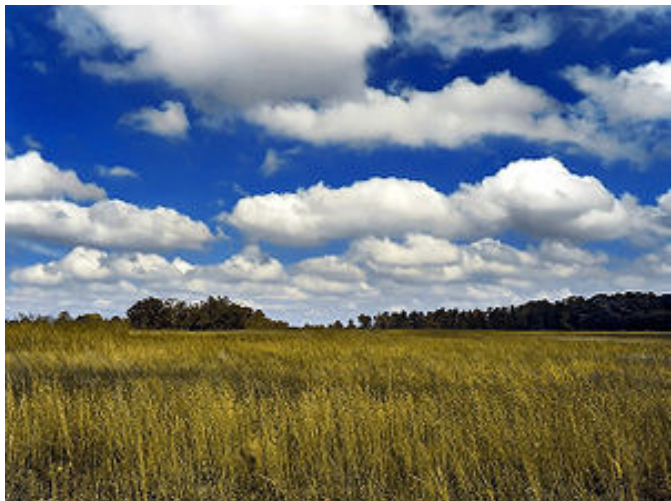
Σχήμα 1.4: Σωρείτες mediocris



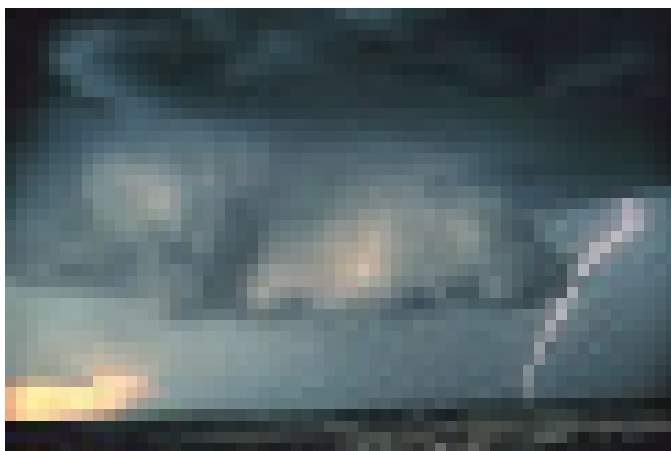
Σχήμα 1.5: Σωρείτες Cu



Σχήμα 1.6: Πυργοσωρείτες Towercumulus



Σχήμα 1.7: Σωρείτες



Σχήμα 1.8: Νεφικα τείχη Wall cloud

Σωρειτομελανίτες Cumulonimbus Πυκνά νέφη με σημαντική κατακόρυφη ανάπτυξη σε μορφή πελώριου πύργου: αποτελούν προηγμένο στάδιο των σωρειτών. Το ανώτερο τμήμα των νεφών αυτών εξαπλώνεται σε σχήμα άκμονα. Η κορυφή του άκμονα στα ψηλότερα νέφη βρίσκεται συνήθως κοντά στο επίπεδο της τροπόπαυσης. Κ'άτω από τη βάση τους, η οποία είναι συνήθως πολύ σκούρα, συχνά διασπείρονται νέφη και υετός συνιστώντας την ουρά του σωρείτομελανία. Οι σωρειτομελανίες αναγνωρίζονται εύκολα διότι συνδέονται με όμβρους και καταιγίδες με έντονα ηλεκτρικά φαινόμενα. Επιπλέον είναι τα μόνα νέφη που δίνουν ξαλάζι και άρα είναι καταστροφικά, ευτυχώς όμως διατηρούνται για μικρό χρονικό διάστημα.

Νεφικά τείχη Wall cloud Είναι νέφη που σχηματίζονται κατά την έλευση ψυχρών μετώπων ή μετώπων καταιγίδων. Συνοδεύονται από πολύ ισχυρούς ανέμους και έντονες βροχές μαζί με ασταπόβροντα. Μετν παρέλευση η θερμοκρασία πέφτει σημαντικά.



Σχήμα 1.9: Σωρείτες



Σχήμα 1.10: Σωρείτες

Στρώματα -Stratus. Είναι γενικά γκριζο νεφικό στρώμα με ομοιόμορφη βάση, το οποίο μπορεί να επιφέρει ψεκάδες, παγοπρίσματα ή κόκκους χιονιού. Τα στρώματα μερικές φορές έχουν τη μορφή διάσπαρτων τμημάτων. Είναι γενικά δύσκολο να παρατηρήσει κανείς συνολικά αυτό το είδος νέφους. από το έδαφος για τί συχνά η μεγάλη έκταση τους οριζοντίως αποκρύπτει την κορυφή ή τις πλευρές των νεφών. Εντούτοις σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν τα νέφη είναι διάσπαρτα σε τμήματα είναι πιο ευδιάκριτα λόγω της μεγαλύτερης ταχύτητάς τους. Σχηματίζουν ομίχλη, δίνουν σπανίως υετό, όταν δίνουν είναι σε μορφή ψεκάδας. Κάτω από αυτά η θερμοκρασία παραμένει χαμηλή.

Στρωματοσωρείτες Stratocumulus. Γκριζο ή υπόλευκο φύλλο ή στρώμα νέφους το οποίο έχει σχεδόν πάντα σκούρα τμήματα αποτελούμενα από στρογγυλές μάζες, κυλίνδρους κλπ τα οποία δεν είναι ινώδη και τα οποία είναι δυνατόν να είναι ενωμένα. Αυτό το είδος νεφών είναι συχνά παρόμοιο με τα στρώματα καθώς έχουν την ίδια έκταση, ωστόσο τα τμήματα του είναι ευδιάκριτα. Οι στρωματοσωρείτες μπορούν να καλύψουν μεγάλα τμήματα (της τάξεως των 100 τχλμ) σε οριζόντια κλίμακα και έτσι διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ενεργειακή ισορροπία του πλανήτη.



Σχήμα 1.11: Σωρείτες



Σχήμα 1.12: Σωρείτες

Στρωματομελανίες Nimbostratus Γκριζο νέφικό στρώμα συνήθως σκούρο που καλύπτει το σύνολο του ουρανού εμφανίζεται διάσπαρτο καθώς συνοδεύεται από βροχή που ως επί το πλείστον φθάνει στο έδαφος. Είναι αρκετά παχύ ώστε να αποκρύπτει τον Ήλιο. Η περιοχή βροχής είναι εκτεταμένη και περιορίζει την οριζόντια ορατότητα. Τα νέφη αυτά προκαλούν βροχοπτώσεις και χιονοπτώσεις συνεχούς διάρκειας και σταθερής έντασης.

Στρωματομελανίες Nimbostratus Γκριζο νέφικό στρώμα συνήθως σκούρο που καλύπτει το σύνολο του ουρανού εμφανίζεται διάσπαρτο καθώς συνοδεύεται από βροχή που ως επί το πλείστον φθάνει στο έδαφος. Είναι αρκετά παχύ ώστε να αποκρύπτει τον Ήλιο. Η περιοχή βροχής είναι εκτεταμένη και περιορίζει την οριζόντια ορατότητα. Τα νέφη αυτά προκαλούν βροχοπτώσεις και χιονοπτώσεις συνεχούς διάρκειας και σταθερής έντασης.

1.2.2 Μεσαία Νέφη, 2-6 χλμ



Σχήμα 1.13: Υψιστρώματα Altostratus

Υψιστρώματα Altostratus Υπογκρίζα η υποκύανα νεφικά φύλλα ή στρώματα, ινώδους ή ομοιόμορφης εμφάνισης που ολικά ή μερικά καλύπτουν τον ουρανό και έχουν αρκετά λεπτά τμήματα, μέσα από τα οποία αποκλαύπτεται ο ήλιος αμυδρά. Η διαφορά τους με τα στρώματα έγκειται στη βάση των νεφών των υψιστρωμάτων που βρίσκεται σε μεσαίο ύψος. Το στέμμιχα, ένα φωτομετέωρο που αποτελείται από μία ακολουθία έγχρωμων δακτυλίων φωτός με κέντρο τον ήλιο ή τη Σελήνη συχνά συγχέεται με υψιστρώματα. Τα νέφη αυτά συναντώνται σε ατμοσφαιρικές διαταραχές, προκαλούν πολύωρο ψιχάλισμα ή μέτριας έντασης βροχή ή χιόνι.

Υψισωρείτες (Altocumulus Λευκά ή γκριζα νεφικά φύλλα ή στρώματα, σκιερά που αποτελούνται από στρογγυλεμένες μάζες, ενίοτε ινώδη ή διάσπαρτα που μπορεί να προέρχονται από συγχνευση. Συνήθως είναι πολύ λεπτοί και εξαιτίας της σύνθεσης τους από αδιαφανή συστατικά είναι ευδιάκριτοι, κρύβοντας μερικώς τον ήλιο. Τα νέφη σχηματίζονται με ήπιες ανοδικές κινήσεις αέρα στα ενδιάμεσα στρώματα της ατμόσφαιρας. Η παρουσία τους συνδέεται με την ευστάθεια της ατμόσφαιρας το χειμώνα. Όταν εμφανίζονται τα καλοκαιρινά πρωινά ακολουθούν απογευματινές καταιγίδες.

1.2.3 Υψηλά νέφη 4-6 χλμ

Θύσσανοι Cirrus. Διαχωρισμένα νέφη με τη μορφή λευκών λεπτών νημάτων ή λευκών φύλλων ή στενών ζωνών. Τα νέφη αυτά ινώδη σαν κόμη εμφάνιση ή μεταξωτή υφή.

Θυσανοστρώματα Cirrostratus. Διαφανή, υπόλευκα νεφικά πέπλα με ινώδη ή ομοιόμορφη εμφάνιση που καλύπτει πλήρως ή μερικώς τον ουρανό, δίνοντας μια γαλακτώδη όψη. Γενικά παράγει φαινόμενα άλω. Η άλως είναι ένα φωτοστέφανο που παράγεται από την περίθλαση του ηλιακού φωτός από τους παγοκρυστάλλους της ατμόσφαιρας. Η εμφάνιση τους σημαίνει την έλευση του μετώπου



Σχήμα 1.14: Σωρείτες



Σχήμα 1.15: Σωρείτες



Σχήμα 1.17: Σωρείτες

κακοκαιρίας

Σχήμα 1.16: Σωρείτες

Θυσανοσωρείτες Cirrocumulus. Λεπτά, λευκά νεφικά φύλλα ή στρώματα χωρίς σκίαση που αποτελούνται από πολύ μικρά στοιχεία στη μορφή κόκκων ανέξαρτητα ή συγχωνευμένα και ως επί το πλείστον κανονικά διατεταγμένα. Στην όψη τους φαίνονται σα μικρά λέπια. Είναι παρόμοια με τους υψισωρείτες, σχηματίζονται ψηλότερα από αυτούς. Η εμφάνιση τους προμηνύει καταιγίδα, ενώ ο ήλιος διακρίνεται μέσα από αυτά.

1.2.4 Ορογραφικά νέφη

Τα ορογραφικά νέφη σχηματίζονται σε διάφορα ύψη πάνω από λόφους και βουνά . Η μορφή τους εξαρτάται από το ανάγλυφο της επφάνειας της γης. Τα βασικά είδη νεφών μπορούν να διαμορφωθούν λόγω του ανάγλυφου. Έτσι οι οροσειρές είναι σημεία εκδήλωσης ομίχλης στρωμάτων , στρωματοσωρειτών, σωρειτών και σωρειομελανίων. Οι κοιλάδες μεταξύ βουνών ευνοούν την εμφάνιση ομίχλης. Επίσης πολλά νέφη με ορογραφική προέλευση εμφανίζονται με τη μορφή φακοειδών νεφών (lenticularis) . Ο όρος αυτός υποδηλώνει νέφη σε σχήμα φακών και εφαρμόζεται στους στρωματοσωρείτες, υψισωρείτες ή θυσανοσωρείτες.

1.2.5 Ομίχλη

Ομίχλη είναι γενικά οποιοδήποτε νέφος που η βάση του ακουμπά στη γη. Συνεπώς, οποιοδήποτε νέφος διαπερνά ένα βουνό χαρακτηρίζεται ως ομίχλη για το τμήμα που περικλείεται από αυτό ενώ εάν παρατηρηθεί κάτω από τη βάση του νέφους θα κατατασσόταν σε μία από τις κατηγορίες που είδαμε πιο πάνω. Πραγματική ομίχλη θεωρείται το αποτέλεσμα της ψύχρανσης του αέρα λόγω της επαφής με ψυχρή επιφάνεια. Τα πιο συνηθισμένα παραδείγματα είναι η δημιουργία ομίχλης κατά τη διάρκεια αίθριων νυχτών με άπνοια όταν το έδαφος ψυχρανθεί από την ακτινοβολία (ομίχλη ακτινοβολίας/radiation fog) και η δημιουργία ομίχλης (οριζόντιας μεταφοράς-advection) όταν ο θερμός αέρας κινηθεί πάνω



Σχήμα 1.18: Ομίχλη



Σχήμα 1.19: Ομίχλη

από ψυχρές επιφάνειες, φαινόμενο ιδιαίτερα συνηθισμένο στις θαλάσσιες περιοχές. Κσαθώς η ψύξη κατανέμεται ανοδικά εξαιτίας της ανάμειξης αέριων μαζών, η ομίχλη μπορεί να ανυψωθεί και να σχηματίσει στρώματα (stratus) χαμηλού επιπέδου που τις περισσότερες φορές δεν ξεπερνούν τα 500 μ σε πάχος και δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά.

Κλασικός τρόπος παρατήρησης των νεφών είναι από παρατηρητές στο έδαφος: σήμερα οι δορυφόροι παρέχουν μία συνεχή και λεπτομερή περιγραφή της νέφωσης από απόσταση.



Σχήμα 1.20: Ομίχλη

Κεφάλαιο 2

Μελέτη της νέφωσης στην κίνηση της ατμόσφαιρας

2.1 Οι αστάθειες Rayleigh-Taylor, Kelvin- Helmholtz

Ο σχηματισμός των νεφών είναι συνυφασμένος με την εμφάνιση των ασταθειών Rayleigh-Taylor (RTI), Kelvin- Helmholtz (KHI) Συγκεκριμένα οι αστάθειες (RTI) παρατηρούνται στην περίπτωση ισορροπίας ενός ασυμπίεστου ετερογενούς ρευστού, δηλαδή ενός ρευστού μεταβλητής πυκνότητας. Η περίπτωση της αστάθειας (KHI) συνδέεται με την σχετική κίνηση δύο στρωμάτων ρευστών που υπερτίθενται.

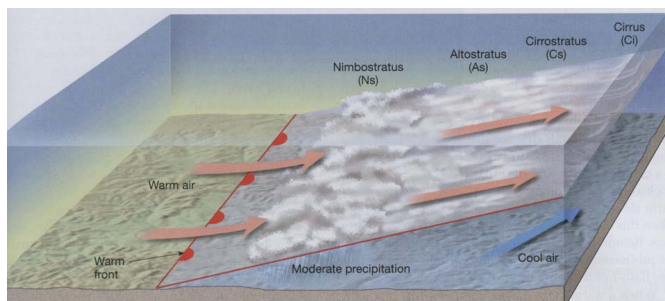
2.1.1 Οι βασικές εξισώσεις των ρευστών

Θεωρούμε ότι η κίνηση του ασυμπίεστου ρευστού δίνεται μέσω των μεταβλητών (\underline{v}, n, s) , όπου \underline{v} είναι το πεδίο ταχυτήτων, n είναι η αριμητική πυκνότητα και s είναι η χωρική 'πυκνότητα εντροπίας'. Υποθέτουμε ότι έχουμε την εξίσωση κατάστασης:

$$\rho = f(n, s)$$

από την οποία προκύπτει μέσω του 1ου νόμου της θερμοδυναμικής η πίεση p και η θερμοκρασία θ :

$$p = n \frac{\partial \rho}{\partial n} - \rho, \quad \theta = \frac{1}{n} \frac{\partial \rho}{\partial s}$$



Σχήμα 2.1: Συνθήκες σχηματισμού νεφών

Μπορούμε να δείξουμε ότι εφόσον η λύση είναι ομαλή, δηλαδή δεν έχουμε την εμφάνιση κρουστικών κυμάτων (ασυνεχειών) τότε η εντροπία κατά μήκος των γραμμών ροής παραμένει σταθερή. Εισάγοντας τον ταυυστή ενέργειας-ορμής ρευστού:

$$\Pi_{ij} = (\rho + p)\delta_{ij} + \rho v_i v_j$$

και τον ταυυστή ιξώδδους τάσεως, με συντελεστή ιξώδδους μ :

$$p_{ij} = \mu (v_{i;j} + v_{j;i})$$

Η κίνηση του ρευστού δίνεται από το νόμο διατήρησης:

$$\Pi_{ij;j} = \pi_{ij;j} + f_j$$

όπου f_j είναι το βαρυτικό πεδίο $f_i = \delta_{i3}\Phi$. Οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \partial_t s + \underline{v} \cdot \nabla s &= 0 \\ \partial_t \psi + \underline{v} \cdot \nabla \psi &= 0 \\ \partial_t \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} &= -\nabla \psi - e^\psi \nabla \Phi - \mu \Delta_3 \underline{v} \\ \operatorname{div}(\underline{v}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \tilde{\theta} - \hat{c} \Delta_3 \tilde{\theta} = \frac{\tilde{c}}{c_V} \nabla \log \left(\frac{\tilde{c}}{c_V} \right) \cdot \nabla \tilde{\theta} - \tilde{c} \nabla \log \hat{c} \cdot \nabla \log(C_V) \tilde{\theta} + e^{-\psi} \Phi$$

όταν για τη θερμική αγωγιμότητα c

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} &= \frac{\eta^2}{1 + \eta^2}, \quad \lambda = \frac{2\eta f''}{(1 + \eta^2)^2} \\ \eta^2 &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S, \\ \psi &= \log \rho, \quad \tau = \sqrt{|\underline{v}|^2 + 1} \\ \tilde{\theta} &= c_V \theta, \quad \hat{c} = e^{-\psi} c, \quad \tilde{c} = c c_V \end{aligned} \tag{2.2}$$

Η μεταβλητή Φ είναι το βαρυτικό δυναμικό που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta_3 \Phi = 0$$

Παραγωγίζοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς το χρόνο λαμβάνουμε:

$$\psi_{tt} = \eta^2 |\nabla \psi|^2 + 2 \nabla \psi \cdot (\underline{v} \wedge \underline{\omega}) + \nabla \psi \cdot \nabla |\underline{v}|^2 + v_i v_j \psi_{ij}$$

για τον στροβιλισμό $\underline{\omega} = \operatorname{curl}(\underline{v})$ Η απόκλιση της δεύτερης μας δίδει:

$$|\underline{\omega}|^2 + \operatorname{div}(\underline{F}) - |\nabla \underline{v}|^2 = \eta^2 \Delta_3 \psi$$

Συνδυάζοντας τώρα τις δύο εξισώσεις λαμβάνουμε:

$$\psi_{tt} - \Delta_\alpha \psi = \nabla \psi \cdot (\underline{v} \wedge \underline{\omega}) + \frac{1}{2} \nabla |\underline{v}|^2 \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\eta^2} + \eta^2 |\nabla \psi|^2 + (|\underline{v}|^2 - |\underline{\omega}|^2 + \operatorname{div}(\underline{F}))$$

όπου Δ_α είναι ο τελεστής Laplace-Beltrami που ορίζεται μέσω της 'ακουστικής μετρικής':

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} + v_i v_j, \quad \det(\alpha) = \tau^2$$

Η ουσιωδώς μη γραμμική υπερβολική εξίσωση καθορίζει τη μεταβολή της πίεσης λόγω της κίνησης του ρευστού. Στη για τη λήψη εκτιμήσεων Harnack. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κυματικό τελεστή

$$\square_\alpha = \partial_t^2 - \Delta_\alpha$$

και τον όρο πηγής:

$$\mathcal{S} = \nabla \psi \cdot (\underline{v} \wedge \underline{\omega}) + \frac{1}{2} \nabla |\underline{v}|^2 \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\eta^2} + \eta^2 |\nabla \psi|^2 + (|\underline{v}|^2 - |\underline{\omega}|^2 + \operatorname{div}(\underline{F}))$$

2.2 Η αστάθεια Rayleigh-Taylor

Η διαταρχή μίας λύσεως ισορροπίας των εξισώσεων του ρευστού μπορεί να οδηγήσει στην εμφάνιση ασταθειών δηλαδή σε κίνηση του ρευστού στην οποία αναπτύσσονται ανεξέλεγκτες τιμές της ταχύτητας και της πίεσης του ρευστού ως αποτέλεσμα της μεταβολής του ιξώδους του ρευστού. Προκειμένου να υπολογίσουμε τους μηχανισμούς εμφάνισης αυτών θα μελετήσουμε τα χωρία όπου το ιξώδες παραμένει εντός συγκεκριμένων ορίων μεταβολής. Έτσι εισάγουμε τις ποσότητες

$$\mathcal{D}^j[\mu; \mathfrak{R}; \zeta] = \int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla^j \mu|^2$$

με το φορέα της $\zeta \subset \mathfrak{R}_{\eta, \epsilon}$ έτσι ώστε:

$$\mathfrak{R}_{\eta, \epsilon} = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 / (1 - \epsilon)\eta \mathcal{D}^0[\mu; \mathfrak{R}; \zeta] \leq \mathcal{D}^1[\mu; \mathfrak{R}; \zeta], \mathcal{D}^2[\mu; \mathfrak{R}; \zeta] \leq \eta \mathcal{D}^0[\mu; \mathfrak{R}; \zeta]\}$$

Στη συνέχεια η μέθοδος ελλειπτικών εκτιμήσεων και αρμονικής προσέγγισης [ΠΔ1] μας επιτρέπει να παραστήσουμε το σύνολο αυτό μέσω πολυωνυμικών εξισώσεων.

2.3 Η αστάθεια Kelvin-Helmholtz

Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει μία διαχωριστική επιφάνεια \mathfrak{S} με μέση καμπυλότητα h που διαχωρίζει τα δύο όγκους ρευστών τότε ο νόμος διατήρησης

$$\Pi_{ij;j} = \pi_{ij;j} + f_i$$

με ολοκλήρωση σε κύλινδρική επιφάνεια έχουμε ότι οι τάσεις κατα μήκος αυτών θα ικανοποιεί:

$$[(-p\delta_{ik} + p_{ik})_+ - (-p\delta_{ik} + p_{ik})_-] = -Th$$

όπου T είναι η επιφανειακή τάση της διαχωριστικής επιφάνειας \mathfrak{S} . Εάν υποθέσουμε ότι διαχωριστική επιφάνεια \mathfrak{S} είναι μία λεία επιφάνεια με κάθετο διανυσματικό πεδίο $\underline{\nu}$. Η συνθήκη αυτή οδηγεί στην προσθήκη του όρου

$$Th\delta_{\mathfrak{S}\underline{n}}$$

στις εξισώσεις των ρευστών, $\delta_{\mathfrak{S}\underline{n}}$ είναι το ρεύμα της διαχωριστικής επιφάνειας \mathfrak{S} .¹

¹Ρεύμα καλούμε ένα διανυσματικό πεδίο $\delta_{\mathfrak{S}\underline{n}}$ που οι συντελεστές του είναι κατανομές $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ εν προκειμένω $\delta_{\mathfrak{S}}$, που έχει ως φορέα τη διαχωριστική επιφάνεια \mathfrak{S}

2.4 Η επαναληπτική μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων

Θα εισάγουμε γεωδαισιακές συντεγμένες ως προς τη διαχωριστική επιφάνεια η οποία μεταβάλλεται χρονικά. Το σύστημα συντεταγμένων που θα κατασκευαστεί με τη μέθοδο της επανάληψης και θα λάβουμε εκτιμήσεις που μας επιτρέπουν να καταλήξουμε στην οριακή κατασκευή του συστήματος και της επιφάνειας.

Το σύστημα θα επιλυθεί αναζητώντας τη λύση στην επανάληψη τάξεως n μέσω των δεδομένων τάξεως $n - 1$. Θεωρούμε δηλαδή την ακουστική μετρική στο βήμα αυτο α_n , την πίεση ψ_n , τη θερμοκρασία $\tilde{\theta}_n$ και φυσικά την διαχωριστική επιφάνεια \mathfrak{S}_n :

$$\begin{aligned}
 \square_{\alpha_{n-1}} \psi_n &= \mathcal{S}_{n-1} \\
 \partial_t \underline{v}_n + \underline{v}_{n-1} \cdot \nabla \underline{v}_n &= -\eta_{n-1}^2 \nabla \psi_{\psi_{n-1}} - e^{-\psi_{n-1}} \Phi_{n-1} \\
 \partial_t \psi_n + \underline{v}_{n-1} \cdot \nabla \psi_n &= 0 \\
 \partial \tilde{\theta}_n + \underline{v}_{n-1} \cdot \nabla \tilde{\theta}_n - \Delta_3 \tilde{\theta}_n &= \frac{\tilde{c}_{n-1}}{c_{V,n-1}} \nabla \log\left(\frac{\tilde{c}_{n-1}}{c_{V,n-1}}\right) \cdot \nabla \tilde{\theta}_{n-1} - \tilde{c} \nabla \log \hat{c}_{n-1} \nabla \log(C_{V,n-1}) \tilde{\theta}_{n-1} + e^{-\psi_{n-1}} \Phi_{n-1}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα περιγράψουμε το σύστημα συντεταγμένων στο κοντα στο ελεύθερο σύνορο \mathfrak{S} και στο εσωτερικό του νέφους.

Κεφάλαιο 3

Γεωμετρικές κατασκευές

3.1 Κατασκευή διακριτοποίησης του νέφους

Θα εισάγουμε συντεγμένες Fermi ως προς την περιβάλλουσα επιφάνεια \mathfrak{S} , που διαμορφώνεται κατά τον σχηματισμό του νέφους. Συνγχεκριμένα έστω $\mathfrak{N} \subset \mathbf{R}^3$ εφοδιασμένο με τοπικές καμπυλόγραμμες συνετατγμένες $\underline{x} : \tilde{\mathfrak{N}} \rightarrow \mathfrak{N}$, $\tilde{\mathfrak{N}} \subset \mathfrak{N}$ στις οποίες η μετρική γράφεται στη μορφή:

$$\alpha = \alpha^{ij} dx_i dx_j$$

Ο χωρισμός των μεταβλητών αντιστοιχεί στην επιλογή συνταγμένων $(t, \underline{\vartheta}), \underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2) : D^2 \times [0, \epsilon) \rightarrow (\mathfrak{S} \cap \tilde{\mathfrak{N}}) \times [0, \epsilon)$ γράφεται στη μορφή:

$$g = dt^2 + \gamma$$

όπου

$$\gamma = \gamma^{ij} d\vartheta_i d\vartheta_j$$

είναι μετρική πάνω στις σταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης $t, \Sigma_t :$

$$\Sigma_t = \{\underline{x} \in \tilde{\mathfrak{N}} : t(\underline{x}) = t\}$$

Η ύπαρξη αυτού του τοπικού συστήματος συντεταγμένων είναι απόρροια του θεωρήματος Gauss στη ριμάνια γεωμετρία, καλούνται δε *συνταγμένες Fermi*. Η κατασκευή αυτών επιτυγάνεται με την επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων που ορίζουν τις γεωδιασιακές:

$$\frac{dx^i}{ds} = \xi^i, \quad \frac{d\xi^i}{ds} = \Gamma^i_{jk} \xi^j \xi^k$$

με αρχικά δεδομένα

$$\underline{x} \in \mathfrak{S}, \quad \underline{\xi} \perp \mathfrak{S}$$

Εξισώσεις μεταβολής

Περαιτέρω μάλιστα έχουμε τις εξισώσεις μεταβολής:

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = 2k$$

ενώ εάν θεωρήσουμε $R_{00} = Ric(\underline{n}, \underline{n})$ όπου \underline{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στη σταθμική επιφάνεια και $R_{i0j0} = Riem(\underline{e}_i, \underline{n}, \underline{e}_j, \underline{n})$:

$$\frac{dk_{ij}}{dt} = k_i^l k_{lj} - R_{i0j0}$$

Η μεταβολή της βαθμωτής καμπυλότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\kappa}{dt} = h\kappa$$

Η μεταβολή της επιφάνειας της παράλληλης φέτας $A(\mathfrak{F}_t)$:

$$\frac{dA}{dt} = 2hA$$

όπου h είναι η μέση καμπυλότητα της παράλληλης φέτας, η οποία με τη σειρά ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dh}{dt} = |k|^2 - R_{00}$$

Εξισώσεις Gauss, Codazzi

Ορίζουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα $\kappa = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$ της σταθμικής επιφάνειας Σ_t και έτσι έχουμε την :

$$\begin{aligned} \bar{R}_{1212} + \kappa &= R_{1212} \\ \bar{R}_{11} + hk_{11} - \alpha_1 &= R_{11}, \quad \alpha_1 = \gamma^{11}k_{11}^2 + 2\gamma^{12}k_{11}k_{12} + \gamma^{22}k_{21}^2 \geq 0 \\ \bar{R}_{21} - \alpha_2 &= R_{21}, \quad \alpha_2 = \gamma^{12}(k_{22}^2 + \kappa), \\ \bar{R}_{22} + hk_{22} - \alpha_3 &= R_{22}, \quad \alpha_3 = \gamma^{11}k_{12}^2 + 2\gamma^{12}k_{21}k_{22} + \gamma^{22}k_{22}^2 \geq 0 \\ \bar{R} + h^2 - k^2 &= R - R_{00} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τον τελεστή ∇ της συναλλοιώτου παραγώγου στην σταθμική επιφάνεια και οι εξισώσεις Codazzi γράφονται για $i = 1, 2$:

$$\text{div}(k)_i - \nabla_i h = R_{0i}$$

$$\text{curl}(k)_{lij} = R_{i0ij}$$

Εδώ θα θέλαμε να δώσουμε τις εκτιμήσεις ακτινικής μεταβολής. Συγκεκριμένα ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις

$$\begin{aligned} \max_{I(\tau, \epsilon, \theta)} |h| &\leq c_1(r, C_0) \min_{I(\tau, \epsilon, \theta)} |h|, \\ \max_{I(\tau, \epsilon, \theta)} |\nabla h| &\leq c_2(r, C_j) \min_{I(\tau, \epsilon, \theta)} |\nabla h| \\ \max_{I(\tau, \epsilon, \theta)} |\nabla^2 h| &\leq c_3(r, C_j) \min_{I(\tau, \epsilon, \theta)} |\nabla^2 h| \end{aligned}$$

Η βασική ταυτότητα για μία συναρτήση $f : I_{(\tau, \epsilon, \theta)} \rightarrow \mathbf{R}$ που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{df}{dt} = \alpha f + \beta$$

είναι η ακόλουθη

$$\log(\max_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} |f|) - \log(\min_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} |f|) = \log\left(\frac{\max_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} |f|}{\min_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} |f|}\right) \leq \int_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} \frac{1}{|f|} \frac{df}{dt}(r') dr'$$

οπότε

$$\int_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} \frac{1}{|f|} \frac{df}{dt}(r') dr' = \int_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} \left(\alpha + \frac{\beta}{|f|}\right) dr$$

Με εφαρμογή των ανισοτήτων Cauchy-Schwarz, Hardy λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \int_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} \frac{\beta}{|f|} &\leq \sqrt{\epsilon r} \left(\int_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} \frac{\beta^2}{f^2} \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{(1+\epsilon)\epsilon r}}{2} \left(\int_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} \frac{\beta^2}{f^2} \right)^{1/2} + \\ &+ \frac{\sqrt{(1+\epsilon)\epsilon r}}{2} \left(\int_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \alpha^2 \beta^2 + \frac{(1+\epsilon)\beta^4}{f^2} \right) \end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος μετά από την επιλογή κατάλληλου ϵ δίδει την ανισότητα:

$$\int_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} \frac{\beta}{|f|} \leq \frac{\sqrt{(1+\epsilon)\epsilon r}}{2} \left(\int_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} \alpha^2 \beta^2 \right)$$

Σε συνδυασμό έχουμε ότι

$$\max_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} |f| \leq e^C \min_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} |f|$$

για

$$C = \left(r \int_{I_{(\tau, \epsilon, \theta)}} (1 + (1+\epsilon)\epsilon r \beta^2) \alpha^2 \right)^{1/2}$$

Ανισότητες Harnack στη φέτα

Ανακαλούμε τώρα την ανισότητα Sobolev όπως αποδείχθηκε από τους Hoffmann - Spruck, [?] γενικεύοντας σε πολλαπλότητα την ανισότητα των Michael-Simon, [MS], στην περίπτωση μίας υποπολλαπλότητας $\mathcal{F} \subset \Omega$:

$$\left(\int_{\mathcal{F}} u^2 \right)^{1/2} \leq C \int_{\mathcal{F}} |\nabla u| + |h||u|$$

η οποία ξεκινώντας από την

$$\left(\int_{\mathcal{F}} u^4 \right)^{1/2} \leq 2C \int_{\mathcal{F}} |u| |\nabla u| + |h| u^2$$

με εφαρμογή της ανισότητας Hölder λαμβάνουμε:

$$\int_{\mathfrak{F}} |u| |\nabla u| \leq A^{1/4} \left(\int_{\mathfrak{F}} u^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\mathfrak{F}} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

$$\int_{\mathfrak{F}} |h| u^2 \leq \left(\int_{\mathfrak{F}} u^{2p} \right)^{1/p} \left(\int_{\mathfrak{F}} |h|^q \right)^{1/q}$$

όπου $p < 2, q = \frac{p}{p-1} > 2$. Επίσης με βάση τις ταυτότητες που δίνουμε παρακάτω έχουμε για ένα συμμετρικό, τανυστικό πεδίο U επί της φέτας:

$$\int_{\mathfrak{F}} |\nabla(U)|^2 \leq C \int_{\mathfrak{F}} |\operatorname{div}(U)|^2 + |\operatorname{curl}(U)|^2 + (|\kappa|)|U|^2 +$$

η οποία εφαρμοζόμεν στην περίπτωση του $U = \zeta k$:

$$\int_{\mathfrak{F}} \zeta^2 |\nabla(k)|^2 \leq C \int_{\mathfrak{F}} |\zeta|^2 |\operatorname{Ric}| + \zeta |\nabla h|^2 + |k|^2 |\nabla \zeta|^2$$

Θα θεωρήσουμε τώρα τις περιοχές της φέτας \mathcal{F}_j οι οποίες χαρακτηρίζονται από την διακύμανση της ενέργειας τάσης μέσω της ακολουθίας σταθερών $\{\eta_j\}$, στα οποία

$$\eta_{j-1} \int_{\mathcal{F}_j} \zeta^2 h^2 \leq \int_{\mathcal{F}_j} \zeta^2 |\nabla h|^2 \leq \eta_j \int_{\mathcal{F}_j} \zeta^2 h^2$$

Η ανισότητα Harnack που αποδεινύται με εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου Nash-Moser για χωρίο $\Omega \subset \mathcal{F}$, το οποίο θεωρούμε ότι ορίζεται από την συνάρτηση $\tilde{h} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ που λύνει το (ΣΠ):

$$\Delta \tilde{h} = 0, \quad \tilde{h}|_{\partial\Omega} = h$$

Έτσι παριστούμε το χωρίο στη μορφή για την αρχική μορφή του \tilde{h}_0 :

$$\mathcal{F}_j = \{x \in \mathcal{F} : \theta\eta \leq |\tilde{h}_0(x)| \leq \eta\}$$

και τότε η ανισότητα Harnack παίρνει τη μορφή:

$$\max_{\mathcal{F}_j} |h| \leq e^{C\eta^2(\eta_j - \eta_{j-1})} \min_{\mathcal{F}_j} |h|$$

Η Διαφορική εξίσωση

Στις συντεταγμένες Fermi η λαπλασιανή γράφεται στη μορφή:

$$\Delta_g u = \frac{d^2 u}{dt^2} + h \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u$$

θα σχοληθούμε με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\Delta_g u = \Gamma u$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται στη μορφή:

$$u \frac{d^2 u}{dt^2} + hu \frac{du}{dt} + u \Delta u = Gu$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathfrak{F}} u^2 \right) &= 2 \int_{\mathfrak{F}} u \frac{du}{dt} + hu^2 \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\mathfrak{F}} u^2 \right) &= 2 \int_{\mathfrak{F}} u \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \int_{\mathfrak{F}} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{dh}{dt} hu^2 + 2hu \frac{du}{dt} = \\ &= 2 \int_{\mathfrak{F}} u \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \int_{\mathfrak{F}} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathfrak{F}} hu^2 \right) \\ \frac{dh}{dt} &= |k|^2 - R_{00} \end{aligned}$$

με αποτέλεσμα να οδηγηθούμε στην ταυτότητα μέσω παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$2 \int_{\mathfrak{F}} \zeta^2 \left(u \frac{d^2 u}{dt^2} + hu \frac{du}{dt} + u \Delta u \right) = \int_{\mathfrak{F}} \Gamma \zeta^2 u^2$$

ή τελικά

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\mathfrak{F}} (\zeta u)^2 \right) - 2 \int_{\mathfrak{F}} \left(\zeta \frac{du}{dt} \right)^2 - \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{F}} h(\zeta u)^2 + 2 \int_{\mathfrak{F}} (h^2 + |k|^2 - R_{00})(u\zeta)^2 - \int_{\mathfrak{F}} \zeta^2 |\nabla u|^2 = \\ 2 \int_{\mathfrak{F}} \Gamma (u\zeta)^2 - 2 \int_{\mathfrak{F}} u^2 \left[\zeta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 + h\zeta \frac{d\zeta}{dt} \right] - \int_{\mathfrak{F}} u^2 (\zeta \Delta \zeta + |\nabla \zeta|^2) \end{aligned}$$

Τελικά πολλαπλασιάζοντας με

$$\Pi_0(t) = \int_{\mathfrak{F}} (u\zeta)^2,$$

και θέτοντας

$$\Pi_1(t) = \int_{\mathfrak{F}} \left(\zeta \frac{du}{dt} \right)^2,$$

και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $I_{\tau,\epsilon} = ((1-\epsilon)\tau, (1+\epsilon)\tau)$ έχοντας διαλέξει

$$\text{supp}(\zeta) \cap \{t/(t, \underline{x}) \in \mathfrak{S}_{(\tau,\epsilon,\theta)}\} \subset I_{\tau,\epsilon}$$

λαμβάνουμε :

$$\int_{\mathcal{J}_{\tau,\epsilon}} \left(\frac{d\Pi_0(t)}{dt} \right)^2 + \int_{\mathcal{J}_{\tau,\epsilon}} \Pi_0(t)\Pi_1(t) - \int_{\mathcal{J}_{\tau,\epsilon}} \frac{d\Pi_0}{dt} \Upsilon_1 + \int_{\mathcal{J}_{\tau,\epsilon}} \mathcal{D}^1[u; \mathfrak{F}; \zeta] \Pi_0 = - \int_{\mathcal{J}_{\tau,\epsilon}} \Pi_0 \Upsilon_2$$

όπου

$$\mathcal{D}^1[u; \mathfrak{F}; \zeta] = \int_{\mathfrak{F}} \zeta^2 |\nabla u|^2$$

$$\Upsilon_1 = \int_{\mathfrak{F}} h(u\zeta)^2,$$

$$\Upsilon_2 = \int_{\mathfrak{F}} \left((|k|^2 - R_{00} - \Gamma)\zeta^2 + \zeta \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 + |\nabla\zeta|^2 - \zeta\Delta\zeta \right) u^2$$

Τώρα εφαρμόζοντας τις ανισότητες Hölder, (SMSHS):

$$\int_{\mathfrak{J}_{\tau,\epsilon}} \Upsilon_1 \frac{d\Pi_0}{dt} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{J}_{\tau,\epsilon}} \left(\frac{d\Pi_0}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{J}_{\tau,\epsilon}} \Upsilon_1^2$$

και

$$\Upsilon_1 \leq C_{(\tau,\epsilon,\theta)} \left(\int_{\mathfrak{F}} (h\zeta)^2 \right)^{1/2} (\mathcal{D}^1[u; \mathfrak{F}; \zeta])^{1/2}$$

Εν κατακλείδι έχουμε ότι :

$$\int_{\mathfrak{J}_{\tau,\epsilon}} \left(\frac{d\Pi_0}{dt} \right)^2 \leq C(\mathfrak{B}_{\eta(\tau,\epsilon,\theta),\epsilon(\tau,\epsilon,\theta)}) \int_{\mathfrak{J}_{\tau,\epsilon}} \Pi_0^2$$

Τελικά έχουμε τη στοιχειώδη ανισότητα:

$$\log \left(\frac{\sup_{I(\tau,\epsilon,\theta)} \Pi_0}{\inf_{I(\tau,\epsilon,\theta)} \Pi_0} \right) \leq \int_{\mathfrak{J}_{\tau,\epsilon}} \frac{1}{\Pi_0(t)} \frac{d\Pi_0}{dt} dt \leq C(\mathfrak{B}_{\eta(\tau,\epsilon,\theta),\epsilon(\tau,\epsilon,\theta)}) \epsilon \tau \left(\frac{\sup_{I(\tau,\epsilon,\theta)} \Pi_0}{\inf_{I(\tau,\epsilon,\theta)} \Pi_0} \right)^2$$

Υποθέτοντας τώρα ότι

$$\left(\frac{\sup_{I(\tau,\epsilon,\theta)} \Pi_0}{\inf_{I(\tau,\epsilon,\theta)} \Pi_0} \right) < 2$$

και

$$\delta = 3C(\mathfrak{B}_{\eta(\tau,\epsilon,\theta),\epsilon(\tau,\epsilon,\theta)}) \epsilon \tau < \frac{1}{3}$$

βρίσκουμε ότι:

$$\left(\frac{\sup_{I(\tau,\epsilon,\theta)} \Pi_0}{\inf_{I(\tau,\epsilon,\theta)} \Pi_0} \right) < \frac{1}{2}$$

Συνεπώς διαπιστώνουμε ότι υποθέτοντας αρχικά λογαριθμική διακύμανση < 2 καταλήγουμε σε διακύμανση $\frac{3}{2}$. Προφανώς η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και έτσι οδηγεί στη βέλτιστη τοπική προσέγγιση της ποσότητας Π_0 .

Απόρροια της προηγούμενης ανισότητας είναι η ακόλουθη ανισότητα:

$$\mathcal{D}^1[u; \mathfrak{F}; \zeta] \leq C_4(\mathfrak{B}_{\eta(\tau,\epsilon,\theta),\epsilon(\tau,\epsilon,\theta)}) \int_{\mathfrak{B}_{\eta,\epsilon}} (u\zeta)^2$$

η οποία μας επιτρέπει να πάρουμε ανισότητες Harnack όπως άλλωστε και η μονοδιάστατη που λάβαμε πμό πάνω. Συγκεκριμένα με βάση την τελευταία ανισότητα εφαρμόζοντας τη μέθοδο επανάληψης Nash-Moser λαμβάνουμε ότι εφόσον ισχύει στο $\mathfrak{B}_{\eta(\tau,\epsilon,\theta),\epsilon(\tau,\epsilon,\theta)}$, $u > 0$:

$$\max_{\mathfrak{B}_{\eta(\tau,\epsilon,\theta),\epsilon(\tau,\epsilon,\theta)}} |u| \leq e^{C(\mathfrak{B}_{\eta(\tau,\epsilon,\theta),\epsilon(\tau,\epsilon,\theta)})} \min_{\mathfrak{B}_{\eta(\tau,\epsilon,\theta),\epsilon(\tau,\epsilon,\theta)}} |u|$$

3.1.1 Κατασκευή του δικτύου

Εσωτερικές γεωδαισιακές ψηφίδες

Το εσωτερικό του χωρίου θα παραχθεί μέσω ενός δικτύου χωρίων που καλούμε γεωδαισιακές ψηφίδες παραμέτρων $\eta, \epsilon : \mathfrak{B}_{\eta, \epsilon}(\Gamma\Psi)$ που ορίζονται με επιφάνειες που καλούμε στοιχειώδη μέτωπα κύματος, $\mathfrak{F}_{\eta, \epsilon}$ (ΣΜΚ) και αποτελούνται από τμήματα γεωδαισιακών σφαιρών. Η επιλογή των γεωδαισιακών σφαιρών θα γίνει έτσι ώστε να επιτευχθεί η βέλτιστη εκτίμηση του φάσματος μέσω της αρχής min-max.

Στην περίπτωση γεωδαισιακών σφαιρών οι συντεταγμένες χωρισμού

$$g = dr^2 + \gamma$$

είναι γενικευμένες σφαιρικές συντεταγμένες $(r, \underline{\vartheta}), \underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2)$:

$$(r, \underline{\vartheta}) : B_{\underline{s}, \epsilon}^3 \rightarrow \mathfrak{S}_{(\tau, \epsilon, \theta)}$$

για το τμήμα σφαιρικού κελύφους

$$\mathfrak{S}_{(\tau, \epsilon, \theta)} = ((1 - \epsilon)\tau, (1 + \epsilon)\tau) \times \Omega_\eta(S_{0, \epsilon}^2)$$

όπου $\Omega_\eta(S_\epsilon^2)$ είναι ένα χωρίο της σφαίρας S_ϵ^2 παραμετροποιημένο από την παράμετρο $\eta > 0$. Οι σταθμικές επιφάνειες Σ_r είναι οι γεωδαισιακές σφαίρες. Προηγουμένως δείξαμε τις ανισότητες για την καμπυλότητα το τμήμα της γεωδαισιακής σφαίρας:

$$\max_{\mathfrak{S}_{(\tau, \epsilon, \theta)}} |k| \leq C_{01}(\mathfrak{S}_{(\tau, \epsilon, \theta)}) \min_{\mathfrak{S}_{(\tau, \epsilon, \theta)}} |k|,$$

$$\max_{\mathfrak{S}_{(\tau, \epsilon, \theta)}} |h| \leq C_{02}(\mathfrak{S}_{(\tau, \epsilon, \theta)}) \min_{\mathfrak{S}_{(\tau, \epsilon, \theta)}} |h|,$$

3.1.2 Συνοριακές γεωδαισιακές ψηφίδες

Έστω $\underline{s} \in S$, τότε είδαμε ότι σε ένα σύστημα συντεταγμένων Fermi, στον κύλινδρο:

$$\mathfrak{C}_{\epsilon, r} = [0, \epsilon) \times (S \cap B_{\underline{s}, \epsilon}^3)$$

$$(t, \underline{\theta}) : \mathfrak{C}_{\epsilon, r} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+ \times B_{0, \epsilon}^2$$

η μετρική γράφεται στη μορφή

$$g = dt^2 + \bar{g}$$

Θα θεωρήσουμε την παράλληλη με το σύνορο φέτα

$$\mathfrak{F}_t = \{\underline{x} \in \mathfrak{C}_{\epsilon, r} / t' = t\}$$

Οι αντίστοιχες ανισώσεις για την καμπυλότητα $k(t)$ κάθε φέτας θα είναι:

$$\max_{\mathcal{C}_{\epsilon_j, r_j}} |k| \leq C_{03}(\mathcal{C}_{\epsilon_j, r_j}) \min_{\mathcal{C}_{\epsilon_j, r_j}} |k|,$$

$$\max_{\mathcal{C}_{\epsilon_j, r_j}} |h| \leq C_{04}(\mathcal{C}_{\epsilon_j, r_j}) \min_{\mathcal{C}_{\epsilon_j, r_j}} |h|,$$

3.2 Εκτιμήσεις για την συνοριακή επιφάνεια του νέφους \mathfrak{G}

Η Διαφορική εξίσωση για το σύμμορφο παράγοντα

Η λαπλασιανή γράφεται στη μορφή:

$$\Delta_g u = \frac{d^2 u}{dt^2} + h \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u, \quad B(u)|_{\partial(\Omega)} = cu^3$$

ο δε τελεστής συνόρου:

$$B(u) = \frac{du}{dt} + \frac{1}{2}hu$$

Εσωτερικές εκτιμήσεις Εφαρμόζοντας τώρα τις βασικές ανισότητες λαμβάνουμε

$$\max_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |u| \leq C_{01}(\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}) \min_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |u|$$

$$\max_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |\nabla u| \leq C_{02}(\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}) \min_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |\nabla u| + C_{021}(\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j})$$

$$\max_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |\nabla^2 u| \leq C_{03}(\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}) \min_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |\nabla^2 u| + C_{031}(\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j})$$

3.2.1 Συνοριακές εκτιμήσεις

Παρόμοια έχουμε κοντά στο σύνορο:

$$\max_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |u| \leq C_{001}(\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}) \min_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |u|$$

$$\max_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |\nabla u| \leq C_{002}(\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}) \min_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |\nabla u| + C_{0021}(\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j})$$

$$\max_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |\nabla^2 u| \leq C_{003}(\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}) \min_{\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j}} |\nabla^2 u| + C_{0031}(\mathfrak{B}_{\eta_j, \epsilon_j})$$

Βιβλιογραφία

- [C] Chandrashekhara S., Hydrodynamic and hydroagnetic stability, Dover Publications Inc, New York (1961)
- [MS] Michael J., Simon L., *Sobolev inequality on hypersurfaces*, Comm. Pure Applied Math., **27**, (1974),
- [PM] Pliakis D., Minardi S., *An iterative shadowgraphic* , JOSA A, (2009)
- [PD0] Pliakis D., *Generalized Hardy's inequality* , (preprint)
- [PD1] Pliakis D., *On the volume of nodal sets*, (preprint)
- [PD2] Πλιάκης Δ., *Σημειώσεις για MΔΕ: Harnack, Nash-Moser μέθοδοι* , Σημειώσεις
- [PTPS] Pliakis D., Thanasoulas S., Papakostas T., Soupios P., *Geodesic sphere constructions for wave propagation: estimates and simulations*, (preprint) 2010.
- [SY] Schoen R., Yau S. T., Lectures on differential geometry, International Press.