



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΟΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΕΙΣΜΟΛΟΓΙΑΣ

---

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΓΕΩΦΥΣΙΚΗ ΑΡΧΑΙΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΟ  
ΧΩΡΟ ΤΟΥ ΜΑΝΤΕΙΟΥ ΤΩΝ ΔΕΛΦΩΝ**

**ΤΡΑΧΙΑΗΣ ΕΙΡΗΝΑΙΟΣ**  
**ΜΙΧΑΗΛ ΠΑΝΤΕΛΗ ΚΑΤΕΡΙΝΑ**

**Επιτροπή εποπτείας**

**Ηλίας Παπαδόπουλος**  
**Παντελής Σουπιός**  
**Μαρία Κούλη**

**Μάρτιος 2013**



TECHNOLOGICAL INSTITUTE OF CRETE  
DEPARTMENT OF NATURAL RESOURCES AND  
ENVIRONMENT  
LABORATORY OF GEOPHYSICS AND SEISMOLOGY

---

**Pre-Graduate Thesis**

**Geophysics Archaeometric Study at the Oracle of  
Delphi - Greece**

**TRACHILIS IRINEOS**  
**MICHAEL PANTELI KATERINA**

**Examining Comitee**

Hlias Papadopoulos  
Pantelis Soupios  
Maria Kouli

**February 2013**



## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Για την παρούσα πτυχιακή εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της πτυχιακής κ. Παπαδόπουλο Ηλία Καθηγητή Εφαρμογών του τομέα Γεωπεριβάλλοντος του Τ.Ε.Ι. Κρήτης. Τον ευχαριστώ θερμά για την ανάθεση του θέματος, την καθοδήγηση του αλλά και για τις ουσιαστικές παρατηρήσεις και συμβουλές του για να υλοποιηθεί η εργασία αυτή.

Ευχαριστώ θερμά τον κ. Παντελεήμων Σουπιό, Αναπληρωτή Καθηγητή του τομέα Γεωπεριβάλλοντος του Τ.Ε.Ι. Κρήτης, για τη βοήθεια και καθοδήγηση του σε επιστημονικά θέματα καθώς και για τη συνεχή παρότρυνση κατά τη διάρκεια της παρούσας εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και την κ. Μαρία Κούλη του τομέα Γεωπεριβάλλοντος για την βοήθεια της σε επιστημονικά θέματα κατά την επεξεργασία των μετρήσεων.

Τα δεδομένα των μετρήσεων μας δόθηκαν από τον κ. Παπαδόπουλο Νικόλαο, Ερευνητή του Ινστιτούτου Τεχνολογίας και Έρευνας, από αρχαιομετρική έρευνα που πραγματοποίησε το Ινστιτούτο στην περιοχή του Μαντείου των Δελφών.

## **ΣΚΟΠΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ**

Σκοπός της πτυχιακής μου εργασίας, ήταν η γεωφυσική αρχαιομετρική διασκόπηση στο χώρο του μαντείου των Δελφών, για την μελέτη υπεδάφινων δομών σε όσο δυνατό μεγαλύτερο βάθος. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το χρονικό διάστημα 20 - 24 Αυγούστου 2012, από εξειδικευμένη ερευνητική ομάδα του Ινστιτούτου Τεχνολογίας και Έρευνας.

Η ανάλυση, επεξεργασία και ερμηνεία των δεδομένων έγινε από εμένα στον χώρο του εργαστηρίου. Η πτυχιακή εργασία, παρουσιάζει συνοπτικά τη γεωφυσική μέθοδο της ηλεκτρικής τομογραφίας που χρησιμοποιήθηκε, λεπτομερή αναφορά των δεδομένων που ελήφθησαν ,και τέλος διεξοδικά τα αποτελέσματα των τομογραφιών σε δύο διαστάσεις και αναλυτικά τα ερμηνευτικά συμπεράσματα της έρευνας.

## **Introduction**

The aim of this pre-graduate thesis was the analysis, processing and interpretation of geophysical study from the Oracle of Delphi. The study was regarding archaeometric inquiry at the greatest depth possible. The field measurements were conducted at 20 – 24 August 2012, by a specialized crew from Institute of Research and Technology.

The analysis, processing and interpretation of electric tomography data was help by the writer inside the facilities of Laboratory of Geophysics and Seismology, in T.E.I. of Crete. The pre-graduate thesis presents in short the electric tomography method used, in detail the data taken during fieldwork, and at the end in great detail the results obtained in two and three dimensions.

## ΠΕΡΙΟΧΗ ΕΡΕΥΝΑΣ(ΤΟ ΜΑΝΤΕΙΟ ΤΩΝ ΔΕΛΦΩΝ)

### Ιστορία των Δελφών

Ο θρύλος λέει ότι οι Δελφοί ήταν το σημείο που συναντήθηκαν οι δύο αετοί. όταν ο Δίας



τους έστειλε να πετάξουν από δύο διαφορετικές κατευθύνσεις. Σ'αυτό το σημείο ο Δίας έριξε τον ιερό βράχο και οι Δελφοί έγιναν γνωστοί στα πέρατα του τότε κόσμου ως ο ομφαλός της Γης, το κέντρο του κόσμου.

Πριν όμως γίνει αυτό γεγονός, αυτή ήταν η περιοχή που ζούσε η θεά Γαία με τον προστάτη της και γιό της, το ερπετό Πύθωνα. Ο Απόλλωνας γιός του Δία έφυγε από τον Όλυμπο με σκοπό να σκοτώσει τον Πύθωνα και να κατακτήσει αυτό το όμορφο και ιερό μέρος.

Ο Απόλλωνας Θεός της χάρης, της μουσικής, του φωτός και της καλλιτεχνίας με την σφαγή του Πύθωνα έδωσε στους Έλληνες τον θρίαμβο της κατατρόπωσης του πατόγωνου ενστίκτου, δίνοντας ταυτόχρονα ώθηση στην άνθηση και στην πραγματοποίηση καλλιτεχνιμάτων σε όλους τους τομείς της μουσικής, γλυπτικής, συγγραφής και του τραγουδιού.

Μετά την σφαγή του Πύθωνα ο Απόλλωνας αυτοεξορίστηκε με σκοπό την αυτοτιμωρία και τον εξαγνισμό του, πριν επιστρέψει νικητής στους Δελφούς.

Δέλφης σημαίνει στ' αρχαία Ελληνικά Δελφίνι, και γι' αυτό οι Δελφοί ονομάστηκαν έτσι. Προς τιμή του δελφινιού, και αυτό γιατί αυτή τη μορφή πήρε ο Απόλλωνας κατά το ταξίδι της επιστροφής του, οδηγώντας το καράβι με τους Κρήτες ναυτικούς με σκοπό να μείνουν στους Δελφούς για να χτίσουν το ιερό του και να γίνουν οι ιερείς του.

Με την επιστροφή του ο Απόλλωνας στέφθηκε επισήμως προστάτης και άρχοντας των Δελφών. Στο σημείο που έγινε η σφαγή του Πύθωνα, τοποθετήθηκε ο ομφαλός βράχος. Ο ομφαλός σημαίνει "κέντρο της γής" και εκεί ήταν το Ιερό Μαντείο των Δελφών.

Στο κέντρο της Γής. Κατά τον 7ο αιώνα π.χ. οι Δελφοί ήταν μια πολύ σημαντική πόλη



καθώς ήταν το κέντρο της Αμφικτιονίας. Επισήμως όμως ήταν κάτω από την δυναστεία του Κροίσου. Ο Κλεισθένης όμως τύραννος της Σικυώνας ελευθέρωσε την πόλη κατά το 585 π.χ. όπου και ακολούθησε η πραγματική άνθηση της πόλης που οδήγησε στην φήμη και την δόξα της.

Ο Κλεισθένης έχτισε καινούργιες ενότητες στον ναό, και το θησαυροφυλάκιο, και ήταν εκείνος υπεύθυνος για την έναρξη των Πυθίων, ανάλογων των Ολυμπιακών αγώνων, και που τελούνταν κάθε τέσσερα χρόνια όπως και οι Ολυμπιακοί αγώνες.

Κατά την περίοδο των Πυθίων αγώνων, εκτελούνταν παραστάσεις στο θέατρο, και στο στάδιο οι 7000 θεατές παρακολουθούσαν τους αθλητές ν' αγωνίζονται στα αθλήματα, καθώς και αρματοδρομίες.

Οι Δελφοί ήταν το σημαντικότερο ιερό μέρος της Αρχαϊκής περιόδου στην Ελλάδα (750-550 π.χ.). Κάθε πόλη που είχε σκοπό την αποίκηση εκτός των τότε Ελληνικών συνόρων, έπρεπε να συμβουλευτεί τους χρησμούς από το Μαντείο των Δελφών.

Όταν η αποίκηση στεφόταν με επιτυχία, οι προσφορές, και τα δώρα κατέκλυζαν τον ναό σαν δείγμα ευχαριστίας και σεβασμού. Γι' αυτό και οι Δελφοί σύντομα έγιναν η δυνατότερη και ισχυρότερη οικονομικά πόλη της Ελλάδας. Σύντομα ανεγέρθηκαν 20 μαρμάρινα θησαυροφυλάκια για να στεγάζουν τις πολύτιμες και απαράμιλλης ομορφιάς



προσφορές.

Κάθε ισχυρή πόλη της Αρχαίας Ελλάδας είχε χτισμένο στους Δελφούς το θησαυροφυλάκιο της. Οι πόλεις που δεν ήταν τόσο οικονομικά ισχυρές για να χτίσουν το θησαυροφυλάκιο τους ανέγειραν αγάλματα στην Ιερά Οδό.

Από το νησί Σίφνος που κατά την αρχαία περίοδο ήταν από τα οικονομικά ισχυρότερα, έστειλαν εισφορές και έχτισαν ένα πανέμορφο Ιωνικού ρυθμού ναό που ήταν προφανής ο σκοπός του να επισκιάσει τους υπόλοιπους θησαυρούς, και θησαυροφυλάκια.

Οι Αθηναίοι επίσης έχτισαν το θησαυροφυλάκιο τους στους Δελφούς μετά την μάχη του Μαραθώνα κατά την οποία υπερνίκησαν τους Πέρσες.

Οι νίκες του Αθηναίου ήρωα Θησέα αναπαριστούνται στα εντυπωσιακά ανάγλυφα που περιτριγυρίζουν το Αθηναϊκό θησαυροφυλάκιο. Επίσης στους τοίχους του Αθηναϊκού θησαυροφυλακίου υπήρχε τεράστιος πίνακας από μαλακή πέτρα, έτσι ώστε οι επισκέπτες του θησαυροφυλακίου να χαράζουν τα αναθήματα, τις ευχές και τις αφιερώσεις τους. Ήταν αξιοσημείωτο ότι στους Δελφούς κάθε σημαντική πόλη είχε χτισμένο το θησαυροφυλάκιο της.

Οι Δελφοί όμως ήταν ουδέτερη ζώνη και έβλεπες να γειτονεύουν τα θησαυροφυλάκια πόλεων που βρίσκονταν σε εμπόλεμη κατάσταση μεταξύ τους. Όταν οι Συρακούσες νίκησαν την Αθήνα στην κρίσιμη μάχη κατά τον Πελοποννησιακό πόλεμο, έσπευσαν να χτίσουν το μεγαλόπρεπο θησαυροφυλάκιο τους ακριβώς απέναντι από αυτό των Αθηνών. Όλες οι πόλεις κράτη τις Ελλάδος συνεισέφεραν οικονομικά και έστελναν θησαυρούς κατά συρροή στους Δελφούς.





Όπως ο Δωριακού ρυθμού, μεγαλόπρεπος ναός που ανεγέρθηκε, κατά την Αρχαϊκή περίοδο και ήταν τοποθετημένος σ'ένα από τα λίγα επίπεδα σημεία του ιερού χώρου του Μαντείου των Δελφών. Πάνω από την είσοδο του ναού ήταν χαραγμένα - σκαλισμένα γνομικά όπως: "γνώριζε τον εαυτόν σου".

Στο Μαντείο έρχονταν όλοι όσοι επιθυμούσαν κάποια συμβουλή. Το Μαντείο των Δελφών ήταν θρησκευτική εμπειρία κατά την οποία όλα τα ερωτήματα έβρισκαν απαντήσεις και οι συμβουλές των ιερέων του Απόλλωνα ακολουθούνταν κατά γράμμα.

Ο Απόλλωνας ήταν εκείνος που συμβούλευε μέσω της ιέρειας του, Πυθείας, η οποία καθόταν στο τρίποδο ανάμεσα στις αναθυμιάσεις που ήταν το μέσο επικοινωνίας με τον Απόλλωνα.

Πρίν από κάθε επικοινωνία με τον Απόλλωνα, έπρεπε να τηρηθούν κάποιοι τελετουργικοί κανόνες από την ιέρια Πυθία.

Πρώτα έπρεπε να πλυθεί στα ιερά νερά της Κασταλίας πηγής για να καθαρίσει και



εξαγνίσει το σώμα της εσωτερικά, και μόνο τότε μπορούσε να καθίσει στον ομφάλιο βράχο και ν' αρχίσει την διαδικασία επικοινωνίας με τον Απόλλωνα.

Οι περιγραφές του θρύλου για το Μαντείο των Δελφών που αφορούν την Πυθία και την επικοινωνία της με τον Απόλλωνα μέσω αναθυμιάσεων ανήκαν στην σφαίρα του εξωπραγματικού και ίσως του μύθου, κατά την άποψη ορισμένων αρχαιολόγων.

Το 1892 Γάλλοι αρχαιολόγοι άρχισαν ανασκαφές στην περιοχή του ιερού των Δελφών με σκοπό να βρουν κάτι που να αποδεικνύει ότι πράγματι υπήρχε το χάσμα που επέτρεπε στα αέρια ν' αναδυθούν και να δημιουργήσουν το κανάλι "επικοινωνίας" μεταξύ Πυθίας και Απόλλωνα.

Δεν κατόρθωσαν όμως να βρουν κάτι που να το αποδεικνύει, και έτσι ο θρύλος παρέμεινε στην σφαίρα του μύθου.

Δεν ήταν παρά τα τέλη του 1990 που μια ομάδα αποτελούμενη από ένα αρχαιολόγο, έναν τοξικολόγο, ένα χημικό, και έναν γεωλόγο οι οποίοι υποστήριζαν το αντίθετο. Σύμφωνα με την θεωρία τους, ο ομφάλιος βράχος, πάνω στον οποίο καθόταν η Πυθία και ανάμεσα στις αναθυμιάσεις έλεγε στους χρησμούς της, βρισκόταν ακριβώς πάνω από ένα χάσμα που είχε δημιουργηθεί εξαιτίας της ολισθηρότητας των υπογείων πλακών, αφήνοντας μία δίοδο οστε οι αναθυμιάσεις αέριων όπως αιθάνιο + μεθάνιο, να ανεβαίνουν στην επιφάνεια του εδάφους και να εισπνέονται από την Πυθία.

Είναι γνωστό ότι αν κάποιος εισπνεύσει μικρή ποσότητα αιθυλενίου έρχεται σε

κατάσταση ευφορίας, και δημιουργούνται παραισθησιακά οράματα. Όταν η Πυθία ήταν στην "κατάσταση" επικοινωνίας με τον Απόλλωνα και ζητούνταν οι ερωτήσεις και συμβουλές, οι απαντήσεις της Πυθίας δίνονταν ασυνάρτητα, εκείνη παραληρούσε και έλεγε ασυναρτησίες. Οι ιερείς του ιερού ήταν εκείνοι που "μετάφραζαν" και έδιναν κάποιο νόημα στα όσα εκείνη έλεγε. Οι Απαντήσεις του Μαντείου ήταν πάντα σοφές και προνοητικές και γι' αυτό το Μαντείο ήταν αξιοσέβαστο και τόσο φημισμένο, και αναπόσπαστο στοιχείο του Ελληνικού τρόπου ζωής.

Ο φιλόσοφος Ηράκλειτος (500π.χ.) υποστήριξε ότι το Μαντείο ούτε αποκρύπτει, ούτε αποκαλύπτει την αλήθεια, μόνο την υπαινίσσεται. Ένα σχετικό παράδειγμα αυτού είναι: Όταν ο Λύδιος βασιλιάς Κροίσος (βασιλιάς της Λυδίας) ρώτησε το Μαντείο αν ήταν σωστό και σοφό να επιτεθεί στην Ελλάδα, η απάντηση που του δόθηκε ήταν η εξής: Αν επιτεθείς θα καταστρέψεις ένα μεγάλο Βασίλειο. Ο Κροίσος άκουσε τον χρησμό και επιτέθηκε.

Το αποτέλεσμα όμως δεν ήταν το αναμενόμενο. Η στρατιά του Κροίσου ηττήθηκε και το μεγάλο Βασίλειο που καταστράφηκε, ήταν το δικό του.

Ο Κροίσος κατόπιν αυτού δεν έπαψε να υποστηρίζει την σοφία και διορατικότητα του Μαντείου των Δελφών, και πόσο αληθινός αυτός ο χρησμός ήταν.

Ενώ η δύναμη και η δόξα του Μαντείου μεγάλωνε, δυστυχώς αυξήθηκαν και οι πόλεμοι μεταξύ πόλεων-κρατών για το ποιός θα έχει υπό την κυριαρχία του το Μαντείο και τους θησαυρούς του. Οι Φωκείς, οι Αμφισσειείς ακόμα και οι Αθηναίοι, όλοι προσπάθησαν να επέμβουν στην οικονομική και θρησκευτική δύναμη του Μαντείου.

Αλλά ακόμα πιο ενοχλητικό για το Μαντείο ήταν ότι οι κατά καιρούς κυρίαρχοι του



προσπαθούσαν

παρέμβουν και να αλλάξουν τους χρησμούς έτσι ώστε οι χρησμοί να λένε ότι άρεσε στον καθένα ν' ακούσει, παραμερίζοντας έτσι την σημαντική επικοινωνία της Πυθίας και των ιερέων με τον Απόλλωνα.

μεταξύ άλλων να

Κατά την Κυριαρχία του Φίλιππου της Μακεδονίας οι Δελφοί δέχονταν επισκέπτες, αλλά όχι σαν τις παλιές εισροές επισκεπτών και προσφορών. Ακόμα και οι Ρωμαίοι πήραν

στην κυριαρχία τους το Μαντείο.

Όλοι όμως αυτοί οι καταστροφικοί πόλεμοι για την κυριαρχία του και όλες οι επικείμενες παρεμβάσεις στο έργο του είχαν σαν επακόλουθο να χάσει την αίγλη και την σημασία του. Παρ' όλες τις προσπάθειες να ανακτήσει την παλιά του δόξα τίποτε δεν σταματούσε την παρακμή του, και σύντομα έπαψε να είναι το κέντρο του κόσμου.

Ο τελευταίος χρησμός που δόθηκε ήταν κατά το 362 π.χ. και ήταν ένα μήνυμα στον Παγανιστή Αυτοκράτορα Ιούλιο το οποίο έλεγε: Πήγαινε και πέσ στον βασιλιά ότι το καλά σφυρήλατο δωμάτιο έχει πέσει στην σκόνη. Ο Φοίβος Απόλλωνας δεν έχει πλέον οίκο, ή δάφνη, ή την γάργαρη πηγή. Ακόμα και η πηγή των αερίων έχει στερέψει και δεν υπάρχει πιά. Μετά από τόσους καταστρεπτικούς πολέμους για την κυριαρχία του, και τον ερχομό του Χριστιανισμού, το Μαντείο και το ιερό των Δελφών πέρασε σιωπηλά στο σκοτάδι της λησμονιάς και τις αφάνειας.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ2: ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΕΩΝ**

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα γενικά χαρακτηριστικά της ηλεκτρικής διασκόπησης. Εν συντομία αναλύεται το φυσικό υπόβαθρο της μεθόδου.

Παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους υλοποιούνται οι διατάξεις μέτρησης, τα όργανα που χρησιμοποιούνται και ο σχεδιασμός για την πραγματοποίηση της γεωφυσικής έρευνας.

### **2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Η γεωηλεκτρική μέθοδος παρουσιάζει μια ποικιλία έναντι των άλλων γεωφυσικών μεθόδων όπως η βαρυτική , η μαγνητική , η σεισμική και η ραδιομετρική. Μετρούνται συνήθως δυναμικά , ρεύματα ( εντάσεις και πυκνότητες ) και ηλεκτρομαγνητικά πεδία που παράγονται είτε από φυσικές είτε από τεχνητές πηγές. Με την εφαρμογή των ηλεκτρικών μεθόδων γεωφυσικής διασκόπησης επιδιώκεται ο καθορισμός της κατανομής των ηλεκτρικών ιδιοτήτων των πετρωμάτων των επιφανειακών στρωμάτων του φλοιού της Γης, με μετρήσεις ηλεκτρικών ποσοτήτων στην επιφάνεια της Γης.

Σκοπός της γεωηλεκτρικής μεθόδου διασκόπησης είναι να μετρηθεί η διαφορά δυναμικού που προκαλείται από την εισαγωγή ηλεκτρικού ρεύματος μέσα στην γη. Η μετρούμενη διαφορά δυναμικού αντικατοπτρίζει τη δυσκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μέσα στο υπέδαφος, δίνοντας έτσι μια ένδειξη για την ηλεκτρική αντίσταση του υπεδάφους. Διαφορετικοί γεωλογικοί σχηματισμοί παρουσιάζουν και διαφορετικές ηλεκτρικές αντιστάσεις.

Η γνώση της γεωηλεκτρικής δομής του υπεδάφους μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την έμμεση εύρεση της γεωλογικής δομής και δομών ενδιαφέροντος. Οι ηλεκτρικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται κυρίως στη χαρτογράφηση γεωλογικών στρωμάτων (Vandenberghe, 1982 Olesen et al., 1992 Griffiths and Barker, 1993), στην ανεύρεση και χαρτογράφηση υδάτινων πόρων (Van dam, 1976 Rijo et al., 1977 Aubert et al., 1984 Olayinka and Barker, 1990), στην τεχνική γεωλογία για την εύρεση του βάθους του μητρικού πετρώματος σε τοποθεσίες κατασκευής τεχνητών φραγμάτων (Habberjam, 1975 Smith, 1986 Butler and Llopis, 1990 Dahlin et al., 1994), στην ανίχνευση γεωθερμικών πεδίων (Wright et al., 1985 Thanassoulas and Tsokas, 1987), στην περιβαλλοντική γεωλογία για τον εντοπισμό μολυσμένων υπόγειων υδάτων (Rodgers and Kean, 1980) και διαρροών αποβλήτων (Van et al., 1992) καθώς και στην εύρεση στόχων αρχαιολογικού ενδιαφέροντος (Aitken, 1974 Hesse et al., 1986 Roka and Tsokas, 1987 Orlando et al., 1987 Szymanski et al., 1992).

## 2.2 ΔΙΑΔΟΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Οι μέθοδοι που εφαρμόζονται ανήκουν στην κατηγορία του τεχνητά παραγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος, το οποίο διαβιβάζεται στο έδαφος δια μέσου ενός ζεύγους ηλεκτροδίων και σε ένα δεύτερο ζεύγος ηλεκτροδίων όπου μετράτε η πτώση τάσης που προκαλείται (Σχήμα 2.1).

Η διάδοση του ηλεκτρικού ρεύματος στην γη γίνεται με τους εξής τρεις τρόπους.

### 1. Ηλεκτρολυτική αγωγιμότητα

Το ηλεκτρικό ρεύμα διαδίδεται μέσω των ιόντων αλάτων και ορυκτών που είναι διαλυμένα μέσα στο νερό που γεμίζει τους πόρους των γεωλογικών σχηματισμών.

### 2. Ηλεκτρονική αγωγιμότητα

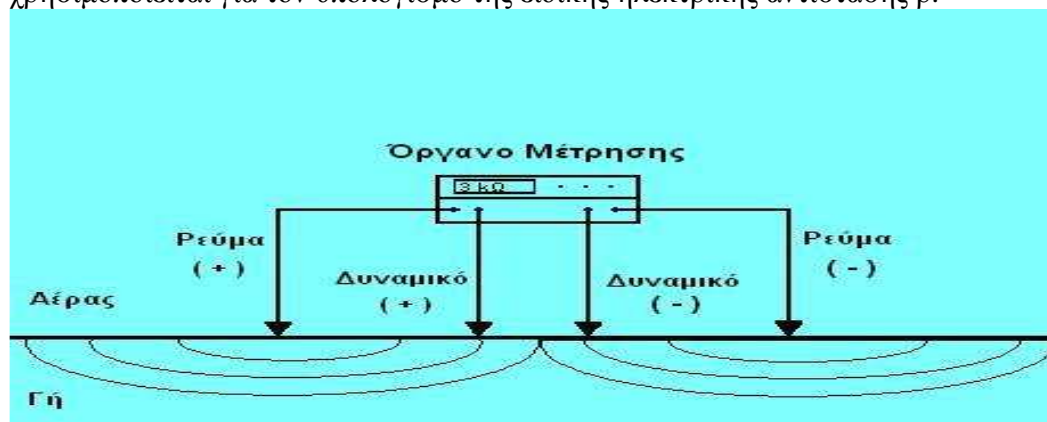
Το ηλεκτρικό ρεύμα διαδίδεται μέσω των ελεύθερων ηλεκτρονίων που βρίσκονται στην κρυσταλλική δομή πετρωμάτων και ορυκτών ( κυρίως μεταλλικών )

### 3. Διηλεκτρική αγωγιμότητα

Το εναλλασσόμενο ηλεκτρικό ρεύμα προκαλεί κυκλική κίνηση στα ιόντα της κρυσταλλικής δομής κάποιων μονωτών. Η κίνηση αυτή προκαλεί δευτερεύων εναλλασσόμενο ρεύμα.

## 2.3 ΕΙΔΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

Η ηλεκτρική αντίσταση που υπολογίζεται σαν το πηλίκο των δύο αυτών μεγεθών χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης  $\rho$ .



**Σχήμα 2.1. Η βασική διάταξη γεωηλεκτρικών μετρήσεων.**

Η ειδική ηλεκτρική αντίσταση  $\rho$  ενός στερεού σώματος κυλινδρικού σχήματος, διατομής  $S$  και μήκους  $L$ , που έχει ηλεκτρική αντίσταση  $R$ , ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{RS}{L} \quad (2.1.)$$

και αντικατοπτρίζει την δυσκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μέσα στο υπέδαφος στο σύστημα SI. Το  $R$  μετράται σε Ohms, το  $L$  σε μέτρα (m) και το  $S$  σε τετραγωνικά μέτρα ( $m^2$ ). Μονάδα μέτρησης της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης είναι το  $Ohm \cdot m$ ..



**Σχήμα 2.2** Ειδική ηλεκτρική αντίσταση

Ένας άλλος όρος, που περιγράφει τη συμπεριφορά της Γης στη διέλευση του ρεύματος είναι η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα  $\sigma$ , η οποία αποτελεί το αντίστροφο της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης:

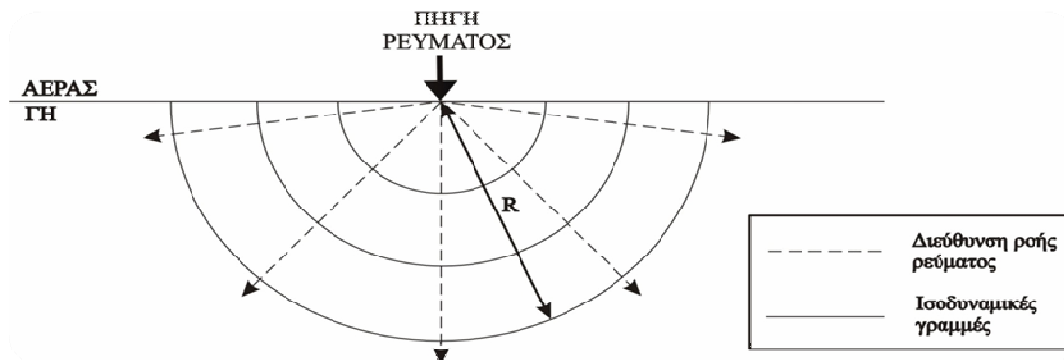
$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (2.2.)$$

και αντικατοπτρίζει την ευκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μέσα στο υπέδαφος. Η μονάδα μέτρησης της ειδικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας είναι το siemens ανά μέτρο (S/m).

#### **2.4 ΦΑΙΝΟΜΕΝΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ**

Στην απλή περίπτωση, όπου το έδαφος είναι ομογενές και ισότροπο, το ρεύμα που εισέρχεται σε αυτό μέσω μιας σημειακής πηγής (ηλεκτροδίου), ρέει ακτινικά διερχόμενο από ένα ημισφαιρίου εμβαδού  $S = 2\pi r^2$ , όπου  $r$  είναι η απόσταση της περιφέρειας του ημισφαιρίου από το σημείο εισαγωγής του ρεύματος. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες έχουν σχήμα ημισφαιρίου και οι γραμμές του ρεύματος είναι κάθετες στις ισοδυναμικές επιφάνειες (σχήμα 2.3.). Σε αυτή την περίπτωση το δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{\rho i}{2\pi r} \quad (2.3.)$$



**Σχήμα 2.3.** Οι ισοδυναμικές γραμμές και η κατεύθυνση του ρεύματος για μια σημειακή πηγή.

Στην πράξη χρειάζονται τέσσερα ηλεκτρόδια για να γίνει μέτρηση της αντίστασης ενός ημιχώρου. Τα δύο από αυτά χρησιμεύουν στην εισαγωγή και κυκλοφορία του ρεύματος και τα ονομάζουμε A και B, ενώ με τη βοήθεια των άλλων μετράμε τη διαφορά δυναμικού στα αντίστοιχα σημεία και τα ονομάζουμε M και N. Έστω ότι AM είναι η απόσταση του M από το θετικό ηλεκτρόδιο A, BM από το αρνητικό B και AN και BN οι αντίστοιχες αποστάσεις του N από τα ηλεκτρόδια του ρεύματος (σχήμα 2.4.).

Τότε, σύμφωνα με τη σχέση (2.3.), η διαφορά δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων A και B για έναν ομογενή ημιχώρο με αντίσταση  $\rho$  και για μια διάταξη τεσσάρων ηλεκτροδίων, είναι:

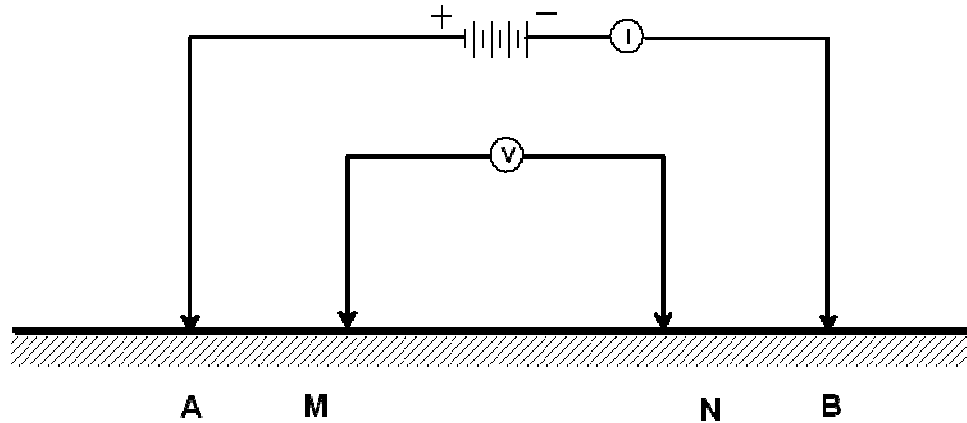
$$\Delta V = \frac{\rho i}{2\pi} \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right) \quad (2.4.)$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται για τη μελέτη των διαφορών διατάξεων. Επομένως, η αντίσταση του ημιχώρου μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$\rho = \frac{2\pi \Delta V}{K i} \quad (2.5)$$



όπου  $K$  είναι ο παράγοντας μέσα στην παρένθεση της σχέσης (2.4.), ο οποίος λέγεται γεωμετρικός παράγοντας και εξαρτάται από τη διάταξη των τεσσάρων ηλεκτροδίων. Στην περίπτωση ομογενούς και ισότροπου εδάφους και για οποιαδήποτε διάταξη ηλεκτροδίων, όταν ο γεωμετρικός παράγοντας πολλαπλασιάζεται με τη μετρούμενη αντίσταση, το αποτέλεσμα είναι η πραγματική αντίσταση του εδάφους.



**Σχήμα 2.4 Διάταξη τεσσάρων ηλεκτροδίων για τη μέτρηση της διαφοράς δυναμικού.**

Στην περίπτωση μη ομογενούς και ισότροπου χώρου, η σχέση (2.5.), ορίζει μια παράμετρο που ονομάζεται φαινόμενη ειδική ηλεκτρική αντίσταση του ημιχώρου  $\rho_a$ . Η παράμετρος αυτή εισάγεται για να ληφθεί υπόψη η γεωμετρία της μέτρησης, οι θέσεις δηλαδή των ηλεκτροδίων. Η φαινόμενη αντίσταση δεν είναι η πραγματική αντίσταση του υπεδάφους, αλλά μια φαινόμενη τιμή, η οποία είναι η αντίσταση που θα είχε το έδαφος εάν ήταν γεωηλεκτρικά ομογενές. Η τιμή αυτή ταυτίζεται με την πραγματική αντίσταση όταν πρόκειται για ομογενή γη.

Στην πράξη η φαινόμενη αντίσταση  $\rho_a$  αποτελεί ένα είδος μέσου όρου των ηλεκτρικών αντιστάσεων του ανομοιογενούς υπεδάφους. Επομένως, δε δίνει ακριβώς την πραγματική αλλά μια “παραμορφωμένη εικόνα” της γεωηλεκτρικής δομής του υπεδάφους. Για το λόγο αυτό, η απευθείας χρήση των μετρήσεων φαινόμενης αντίστασης για την εξαγωγή συμπερασμάτων είναι παρακινδυνευμένη. Η πραγματική αντίσταση μπορεί να βρεθεί μόνο μετά από κατάλληλη επεξεργασία. Ο καθορισμός της πραγματικής αντίστασης από τις τιμές της φαινόμενης αντίστασης είναι η λύση του αντίστροφου προβλήματος, για το οποίο θα γίνει λόγος παρακάτω.

## **2.5 ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ**

Η αντίσταση  $\rho$  κατά κύριο λόγο εξαρτάται από την ηλεκτρολυτική αγωγιμότητα δηλαδή είναι συνδυασμός παραγόντων που επηρεάζουν τη συγκέντρωση, σύσταση του

νερού. Ειδικότερα εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως είναι οι υδρολογικές–υδρογεωλογικές συνθήκες της περιοχής μελέτης, η χημική σύσταση του νερού, το μέγεθος των πόρων των σχηματισμών, πιθανές διαρρήξεις, διακλάσεις ή ρήγματα των σχηματισμών, η θερμοκρασία και η πίεση που επικρατούν. Τα μεταμορφωμένα και τα πυριγενή πετρώματα έχουν υψηλές τιμές αντίστασης. Η αντίσταση αυτών των πετρωμάτων εξαρτάται από το βαθμό ρωγμάτωσής τους και από το ποσοστό του νερού που περιέχουν στους πόρους τους.

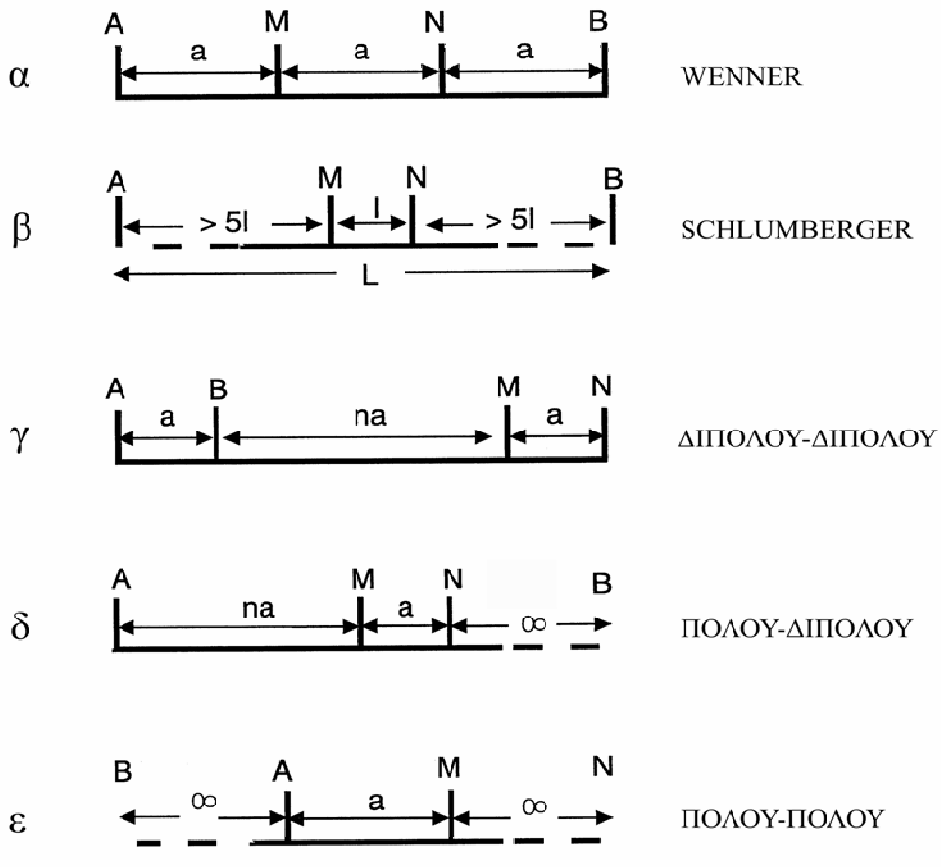
Τα ιζηματογενή πετρώματα, τα οποία είναι συνήθως περισσότερο πορώδη και περιέχουν υψηλότερο ποσοστό νερού, έχουν χαμηλότερες αντιστάσεις. Η αντίσταση του νερού ποικίλει από 10 έως 100  $Ohm \cdot m$ , ανάλογα με την περιεκτικότητά του σε διαλυμένα άλατα (Παπαζάχος, 1986).

## **2.6 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΔΙΩΝ**

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι κατά τους οποίους διατάσσονται τα ηλεκτρόδια του ρεύματος και του δυναμικού. Παρακάτω παρουσιάζονται οι ευρύτερα

χρησιμοποιούμενες διατάξεις αλλά και αυτές που εμείς χρησιμοποιήσαμε κατά την διάρκεια των μετρήσεων μας (σχήμα 2.4.). οι οποίες είναι : Wenner, Schlumberger, διπόλου – διπόλου , πόλου - διπόλου και πόλου-πόλου.

Το κύριο χαρακτηριστικό μιας διάταξης είναι ο γεωμετρικός της παράγοντας, ο οποίος σχετίζεται μονοσήμαντα με τις σχετικές αποστάσεις μεταξύ των ηλεκτροδίων (Tsourlos, 1995).



**Σχήμα 2.4** Οι συχνότερα χρησιμοποιούμενες διατάξεις ηλεκτροδίων (Tsourlos, 1995)

**ΔΙΑΤΑΞΗ WENNER.** Κατά τη διάταξη αυτή τα ηλεκτρόδια δυναμικού M,N τοποθετούνται μεταξύ των ηλεκτροδίων δυναμικού A,B (σχήμα 2.4α.).Οι αποστάσεις

μεταξύ των παρακείμενων ηλεκτροδίων είναι ίσες με  $a$ . Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.4.) προκύπτει ότι:

$$K = \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} \quad (2.6.)$$

και επομένως η φαινόμενη αντίσταση για τη διάταξη Wenner δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_a = 2\pi a \frac{\Delta V}{i} \quad (2.7.)$$

**ΔΙΑΤΑΞΗ SCHLUMBERGER.** Η διάταξη αυτή είναι παρόμοια με τη διάταξη Wenner, αλλά τα ηλεκτρόδια ρεύματος είναι τοποθετημένα σε απόσταση πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση των ηλεκτροδίων δυναμικού (σχήμα 2.4β). Αν η απόσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων ρεύματος είναι  $2L$ , η απόσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων δυναμικού είναι  $2l$  και ισχύει  $L \geq 10l$ , τότε η φαινόμενη αντίσταση είναι:

$$\rho_a = \frac{\pi L^2}{2l} \cdot \frac{\Delta V}{i} \quad (2.8.)$$

## **2.7 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑ**

Δύο μέθοδοι έρευνας είναι οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες για τον καθορισμό της αντίστασης. Με τη μέθοδο της βυθοσκόπησης (sounding) καθορίζεται η αντίσταση σε συνάρτηση με το βάθος. Το κέντρο της διάταξης παραμένει σταθερό και με τη συνεχή αύξηση της απόστασης των ηλεκτροδίων ρεύματος, αυξάνεται και το βάθος διείσδυσης του ρεύματος και διαρρέονται βαθύτεροι σχηματισμοί. Με τη μέθοδο της όδευσης (profiling) εντοπίζονται πλευρικές μεταβολές της αντίστασης.

Αντίθετα με τη βυθοσκόπηση, οι αποστάσεις των ηλεκτροδίων παραμένουν σταθερές και λαμβάνεται μια σειρά μετρήσεων με πλευρική μετακίνηση της διάταξης των ηλεκτροδίων ως συνόλου με σταθερό βήμα.

Η μέθοδος της ηλεκτρικής τομογραφίας αποτελεί συνδυασμό των μεθόδων της βυθοσκόπησης και της όδευσης και παρέχει τη δυνατότητα λήψης πληροφοριών τόσο για την πλευρική όσο και για τη σε βάθος μεταβολή της αντίστασης. Η ηλεκτρική τομογραφία μπορεί να περιγραφεί ως μία σειρά από συνεχόμενες ηλεκτρικές βυθοσκοπήσεις κατά μήκος της γραμμής έρευνας ή ως μία σειρά από οδεύσεις πάνω από την ίδια περιοχή με διαδοχικά αυξανόμενες αποστάσεις ηλεκτροδίων. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε μια δυσδιάστατη εικόνα της περιοχής μελέτης.

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της ηλεκτρικής τομογραφίας είναι ότι, σε σύγκριση με τις άλλες τεχνικές, λαμβάνεται ένας αρκετά μεγάλος αριθμός μετρήσεων (άρα και χρήσιμη πληροφορίας). Με αυτόν τον τρόπο αυξάνεται η διακριτική ικανότητα και ανάλυση της γεωηλεκτρικής μεθόδου. Παράλληλα όμως, λόγω του μεγάλου αριθμού τους, οι μετρήσεις είναι δύσκολο να ληφθούν με χειροκίνητη αλλαγή των ηλεκτροδίων, και γι' αυτό χρησιμοποιούνται συστήματα αυτοματοποιημένων πολυπλεκτών.

Πρόδρομος της ηλεκτρικής τομογραφίας είναι η μέθοδος της “ψευδοτομής” που έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα στην χαρτογράφηση μεταλλευμάτων (Edwards 1977) αλλά και σε διάφορες άλλες εφαρμογές (π.χ. υδρογεωλογικές, Griffiths et al. 1990). Στην διαδικασία της “ψευδοτομής” μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες διατάξεις ηλεκτροδίων (διπόλου-διπόλου, Wenner, πόλου-διπόλου). Η ηλεκτρική τομογραφία όμως είναι πιο γενικευμένος όρος που περιλαμβάνει και μετρήσεις με μη συμβατικές διατάξεις καθώς επίσης και μετρήσεις που λαμβάνονται με ηλεκτρόδια σε γεωτρήσεις (π.χ. Shima 1992).

### **2.7.1 ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ**



Η πλέον δημοφιλής τεχνική για την αποκατάσταση της πραγματικής εικόνας της γεωηλεκτρικής αντίστασης του υπεδάφους είναι αυτή της αντιστροφής. Σκοπός της αντιστροφής είναι να βρεθεί ένα μοντέλο αντίστασης που να δίνει μετρήσεις που είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στις πραγματικές. Προϋπόθεση η ύπαρξη μεθόδου επίλυσης του ευθέως προβλήματος, δηλαδή, να βρεθούν οι μετρήσεις, δοθείσης της κατανομής της αντίστασης.

Αρχικά γίνεται μια αναφορά στην επίλυση του ευθέως προβλήματος, δηλαδή στον υπολογισμό της θεωρητικής απόκρισης του υπεδάφους σε μια διέγερση ροής ηλεκτρικού

ρεύματος. Παρουσιάζονται πολύ συνοπτικά οι διάφορες μέθοδοι επίλυσης, αριθμητικές ή αναλυτικές. Επίσης παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού του Ιακωβιανού πίνακα  $A$  που χρησιμοποιείται στην επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος.

Παρουσιάζονται οι εξισώσεις που ισχύουν για την περίπτωση επίλυσης μη γραμμικών αντιστροφών προβλημάτων χωρίς περιορισμούς, και ακολουθεί μια αναφορά στα κριτήρια σύγκλισης και στη χρήση πινάκων στατιστικών βαρών στις εξισώσεις.

Ακολούθως αναφέρονται οι μέθοδοι επίλυσης των μη γραμμικών συστημάτων με περιορισμούς. Οι μέθοδοι αυτές είναι οι πλέον χρησιμοποιούμενες στην πράξη, καθώς χειρίζονται αποτελεσματικά το πρόβλημα της αστάθειας της αντιστροφής του γενικευμένου Ιακωβιανού. Τέλος παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα και τα σχετικά μειονεκτήματα των μεθόδων, καθώς και οι λόγοι που μας οδήγησαν στην επιλογή μιας εξ αυτών για την εφαρμογή του αλγορίθμου που θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

### **2.7.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΙΑΚΩΒΙΑΝΟΥ ΠΙΝΑΚΑ**

Η γενική διαδικασία αντιστροφής εμπεριέχει την έννοια της επαναληπτικής διαδικασίας, για την περίπτωση των μη-γραμμικών συστημάτων. Προσπαθούμε με διαδοχικές βελτιώσεις να βρούμε το μοντέλο  $m$  του υπεδάφους, εκείνο το οποίο επιλύοντας το ευθύ πρόβλημα θα μας δώσει συνθετικά δεδομένα  $f(m)$  τα οποία να βρίσκονται όσο το δυνατό πιο κοντά σε αυτά που μετρήθηκαν στο ύπαιθρο.

Δημιουργείται έτσι ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$d=f(m), \quad (2.9)$$

όπου  $d$  είναι το διάνυσμα που περιέχει τα πειραματικά δεδομένα. Η λύση των γραμμικών εξισώσεων επιτρέπει να γραφεί η εξίσωση (3.1) στη μορφή  $m=f^{-1}(d)$ . Η αντιστροφή όμως της συνάρτησης  $f$  δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε μη-γραμμικά συστήματα, όπως στην περίπτωση των προβλημάτων των TDEM. Η λύση δίνεται με συνεχείς προσεγγίσεις, όπου υπολογίζεται πρώτα η συνάρτηση  $f(m_j)$ , για κάθε επανάληψη  $j$ , και με διαδοχικές βελτιώσεις του θεωρητικού μοντέλου γίνεται προσπάθεια να πλησιάσει όσο το δυνατό περισσότερο το πειραματικό.

Η βελτίωση του μοντέλου  $m_j$  γίνεται εφαρμόζοντας μικρές διαταραχές  $dm_j$  στις παραμέτρους. Υπολογίζοντας πάλι την λύση του ευθέως προβλήματος για τις καινούργιες παραμέτρους, συγκρίνονται οι θεωρητικές μετρήσεις με τις πραγματικές μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης που έχει τεθεί εξ αρχής.

Αναπτύσσοντας την εξίσωση (2.9) σε σειρά Taylor και αγνοώντας όρους μεγαλύτερης τάξεως από του ενός,

$$f_i(m_j + dm_j) \approx f_i(m_j) + \frac{\partial f_i(m_j + dm_j)}{\partial (dm_j)} dm_j.$$

Οι μερικές παράγωγοι της απόκρισης του μοντέλου  $f(m)$  σε σχέση με τις παραμέτρους  $dm$  αποτελούν τα στοιχεία του πίνακα  $A$  που ονομάζεται Ιακωβιανός.

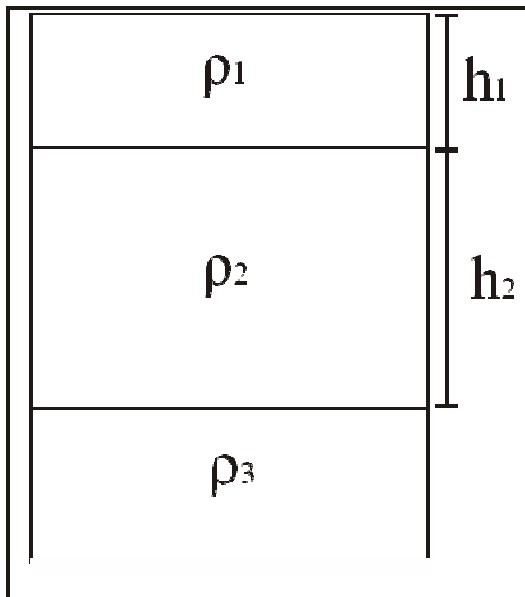
Αρα το στοιχείο  $ij$  του Ιακωβιανού πίνακα θα είναι

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i(m_j + dm_j)}{\partial (dm_j)} \quad (2.10)$$

Ο υπολογισμός των στοιχείων  $A_{ij}$  μέσω του τύπου (2.10) είναι δύσκολος, καθώς είναι άγνωστη η αναλυτική μορφή της συνάρτησης  $f$ . Υπάρχουν αριθμητικές λύσεις για τον υπολογισμό των στοιχείων του Ιακωβιανού Πίνακα, οι οποίες όμως είναι δύσκολο να υλοποιηθούν σε αλγοριθμική μορφή. Ο δημοφιλέστερος τρόπος είναι με τη χρήση της μεθόδου των διαταραχών των στοιχείων (perturbation technique) βάσει της εξίσωσης

$$A_{ij} = \frac{\log(f_i(m_j + \delta)) - \log(f_i(m_j))}{\delta} \quad (2.11)$$

όπου  $\delta$  είναι η διαταραχή  $dm$  που εισάγεται για την βελτίωση του μοντέλου  $m_j$ . Δηλαδή, επιλύεται το ευθύ πρόβλημα μια φορά, και αλλάζουμε μια παράμετρο κατά ένα ποσοστό, π.χ. πέντε τοις εκατό, και επιλύεται δεύτερη φορά το ευθύ πρόβλημα για να υπολογιστεί η μεταβολή του συνθετικού μοντέλου εξαιτίας της διαταραχής της παραμέτρου. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε παράμετρο, έως ότου υπολογιστούν όλα τα στοιχεία του πίνακα  $A$ . Είναι φανερό ότι με την παραπάνω διαδικασία η μερική παράγωγος της εξίσωσης (2.10) υπολογίζεται προσεγγιστικά με τη χρήση των πεπερασμένων διαφορών (εξ.2.11).



**Σχήμα 2.5 Μοντέλο τριών στρωμάτων με αντιστάσεις  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  και πάχη  $h_1$  και  $h_2$ .**

Στο σχήμα (2.6) παρουσιάζεται ένα μοντέλο υπεδάφους τριών στρωμάτων, με αντιστάσεις  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  και πάχη  $h_1, h_2$  αντίστοιχα. Ο Ιακωβιανός πίνακας σε αυτό το παράδειγμα θα είναι τάξης  $(5 \times n)$  και θα έχει τη μορφή

$$A = \begin{array}{c|ccc} \frac{\partial f(m_1)}{\partial \rho_1} & \frac{\partial f(m_2)}{\partial \rho_1} & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial \rho_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial \rho_2} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial \rho_3} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial \rho_3} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial h_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial h_1} \\ \frac{\partial f(m_1)}{\partial h_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f(m_n)}{\partial h_2} \end{array} \quad (2.12)$$

όπου  $n$  ο αριθμός των μετρήσεων. Τα στοιχεία του πίνακα υπολογίζονται με βάση τον τύπο (2.11).

### **2.7.3 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ**

Το πρόβλημα της ερμηνείας των γεωφυσικών ηλεκτρομαγνητικών δεδομένων πάσχει από μια εγγενή αδυναμία, η οποία και είναι συνηθισμένη στις περισσότερες γεωφυσικές μεθόδους: η αντιστροφή του γενικευμένου Ιακωβιανού πίνακα είναι ασταθής, με αποτέλεσμα, εάν δεν υπάρχουν περιορισμοί, οι λύσεις που προκύπτουν από την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος να είναι γεωλογικά απαρέδεκτες, παρόλο που μπορεί να είναι μαθηματικά ορθές.

Η διαδικασία της επίλυσης του ευθέως προβλήματος, μπορεί να γραφεί με την απλοποιημένη μορφή

$$f(m)=y, \quad (2.13)$$

όπου  $y$  είναι το διάνυσμα των πειραματικών δεδομένων, και  $f(m)$  η λύση που προκύπτει από την επίλυση του ευθέως προβλήματος και αντιστοιχεί στο μοντέλο  $m$ , που αποτελείται από πάχη και αντιστάσεις στρωμάτων.

Στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος, υποθέτουμε στρωματομένη γη, δηλαδή τα στρώματα του υπεδάφους διατάσσονται οριζόντια, με συγκεκριμένα πάχη και αντιστάσεις. Άρα ο σκοπός της επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος είναι να μπορέσει να βρεθεί ένα μοντέλο στρωμάτων, το οποίο να έχει απόκριση που θα είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στις πειραματικές μετρήσεις.

Σκοπός λοιπόν της αντιστροφής είναι να καταλήξει σε μια σχέση της μορφής  $y=f^{-1}(m)$ .

$$(2.14)$$

Επειδή το πρόβλημα είναι μη γραμμικό, δε μπορεί να επιλυθεί απευθείας, αλλά μπορεί να αντικατασταθεί με την επίλυση επιμέρους «μικρότερων» γραμμικών προβλημάτων. Εάν η συνάρτηση  $f(m)$  αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από μια πολύ μικρή μεταβολή του  $dm$ , και αγνοώντας τους όρους μεγαλύτερης τάξης από την πρώτη, προκύπτει ότι



$$f(m + dm) \approx f(m) + \frac{\partial f(m)}{\partial m} dm = y, \quad (2.15)$$

όπου  $\frac{\partial f(m)}{\partial m}$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας, που εκφράζει τις μερικές παραγώγους της  $f(m)$

σε σχέση με τη μεταβολή του μοντέλου  $m$ .

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι

$$\frac{\partial f(m)}{\partial m} = y - f(m) = dy,$$

όπου  $dy$  η διαφορά μεταξύ πραγματικών και συνθετικών δεδομένων. Έτσι, η επίλυση του αρχικού μη γραμμικού προβλήματος έχει αντικατασταθεί με την επίλυση πολλών επιμέρους γραμμικών προβλημάτων.

Για την περίπτωση γραμμικών προβλημάτων, η λύση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του σφάλματος μεταξύ των πειραματικών και θεωρητικών δεδομένων, δηλαδή,

$$q = dy^T dy = (y - f(m))^T (y - f(m)). \quad (2.16)$$

Θέτοντας την παράγωγο του  $q$  ως προς  $dm$  ίση με μηδέν, καταλήγουμε στις κανονικές εξισώσεις του συστήματος,

$$A^T A dm = A^T dy \quad (2.17)$$

και η τελική λύση του συστήματος είναι

$$dm = (A^T A)^{-1} A^T dy \quad (2.18)$$

όπου ο πίνακας  $A^T A$  ονομάζεται γενικευμένος Ιακωβιανός.

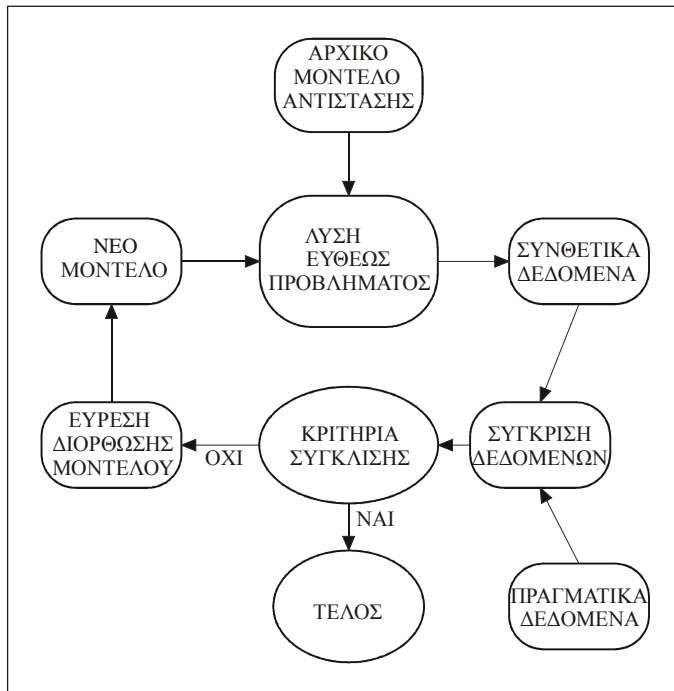
Βάσει της εξ.(2.17) μπορούμε να ορίσουμε τον αλγόριθμο επίλυσης του μη γραμμικού προβλήματος. Είναι μια επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία, σε κάθε επανάληψη  $k$ , η διόρθωση του μοντέλου δίνεται από τη σχέση

$$dm_k = (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T dy_k \quad (2.19)$$

όπου  $A_k$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας για την  $k$  επανάληψη,  $dy_k = [y - f(m_{k-1})]$ , και το νέο μοντέλο προκύπτει από την πρόσθεση της διόρθωσης στο προηγούμενο, δηλαδή,

$$m_{k+1} = m_k + dm_k. \quad (2.20)$$

Στο σχήμα (2.7) παριστάνεται σχηματικά η διαδικασία της μη γραμμικής αντιστροφής.



Σχήμα 2.7 Διάγραμμα ροής του αντιστρόφου μη γραμμικού προβλήματος.

### 2.7.3.1 ΑΣΤΑΘΕΙΑ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΙΑΚΩΒΙΑΝΟΥ

Στην πράξη η αντιστροφή του γενικευμένου Ιακωβιανού είναι μαθηματικά ασταθής. Αυτό οφείλεται στους φυσικούς περιορισμούς της μεθόδου. Όσο η πληροφορία έρχεται από μεγαλύτερα βάθη, τόσο μειώνεται η διακριτική ικανότητα και κυρίως η ευαισθησία της μεθόδου. Άρα η μεταβολή μιας παραμέτρου που αντιστοιχεί σε μεγάλο βάθος, αναμένεται να επηρεάσει πολύ λίγο τις μετρήσεις μας. Αντίστροφα, μια μικρή αλλαγή σε κάποια μέτρηση μπορεί να επιφέρει τεράστια μεταβολή σε κάποιες από τις παραμέτρους του μοντέλου.

Άρα η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος έχει εγγενή αδυναμία, και η ύπαρξη σφαλμάτων στις μετρήσεις μας κάνει ακόμα πιο ασταθές το σύστημα (Lanczos 1961, Jackson 1972). Επομένως, καθώς προσπαθούμε να βρούμε ένα μοντέλο που να ταιριάζει στα πειραματικά δεδομένα που έχουμε συλλέξει, καταλήγουμε σε μια πλειάδα μοντέλων που μπορεί να ικανοποιούν μαθηματικά, ή ακόμα και φυσικά, τους όρους σύγκλισης μεταξύ πειραματικών και θεωρητικών μετρήσεων.

Απαιτείται έτσι η χρήση διαφόρων τεχνικών ώστε αφενός να κάνουμε την αντιστροφή μαθηματικά σταθερή, και αφετέρου να μπορέσουμε να διακρίνουμε ποιο από όλα τα μοντέλα που ικανοποιούν μαθηματικά τις εξισώσεις του συστήματος είναι αυτό που είναι πιο κοντά στο πραγματικό.

### 2.7.3.2 ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Στις μεθόδους αντιστροφής των γεωφυσικών προβλημάτων συχνή είναι η χρησιμοποίηση λογαριθμικής κλίμακας. Δύο είναι οι κύριες αιτίες. Η χρήση λογαρίθμων υποχρεώνει τις παραμέτρους να αποκτούν μόνο θετικές τιμές, αποφεύγοντας έτσι τιμές που δεν έχουν φυσικό νόημα (Sasaki 1982). Δεύτερον, λόγω του μεγάλου δυναμικού εύρους των τιμών που μπορεί να έχουν οι παράμετροι (ιδιαίτερα οι ηλεκτρικές αντιστάσεις), η χρήση λογαρίθμων δύναται να επιταχύνει το ρυθμό σύγκλισης του επαναληπτικού αλγορίθμου (Park και Van, 1991).

Το τετράγωνο του σφάλματος των ελαχίστων τετραγώνων, στην περίπτωση χρήσης λογαρίθμων, γίνεται  $q' = dy'^T dy'$ , όπου  $dy' = \ln y - \ln f(m)$ .

Το διάνυσμα των παραμέτρων  $m$  γίνεται  $p_i$ , όπου  $p_i = e^{x_i}$ , και  $i=1, n$ . Η λύση του συστήματος είναι

$$dp = (A'^T A')^{-1} A'^T dy \quad (2.21)$$

όπου ο  $A'$  έχει στοιχεία  $A'_{ij} = \frac{\partial \ln y_i}{\partial p_j}$  (Tsourlos, 1995).

### **2.7.3.3 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΚΑΙ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ- ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ**

Η διαδικασία της αντιστροφής θα ήταν ημιτελής χωρίς ανάλυση των σφαλμάτων του διανύσματος των λύσεων. Καθώς τα δεδομένα έχουν εγγενή σφάλματα, είναι επόμενο να υπάρχουν σφάλματα και στη λύση που προκύπτει από τη μη γραμμική αντιστροφή του συστήματος. Ο έλεγχος των σφαλμάτων γίνεται με χρήση στατιστικών όρων (Press et all 1992).

Όπως και στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, ο μέσος όρος του τετραγώνου των σφαλμάτων υπολογίζεται ως

$$RMS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{(d_i^{ob} - d_i^{th})^2}{(d_i^{ob})^2}}, \quad (2.22)$$

όπου  $N$  ο αριθμός των δεδομένων,  $d^{ob}$  τα πειραματικά δεδομένα και  $d^{th}$  τα θεωρητικά δεδομένα.

Με τη χρήση του RMS ως κριτήριο σύγκλισης, το διάνυσμα των λύσεων είναι ευαίσθητο σε μεγάλα σφάλματα, γι αυτό στην πράξη χρησιμοποιείται ο όρος του αναγόμενου  $\chi$ -τετράγωνο (Rijo 1977), που ορίζεται ως

$$\chi^2 = \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^N (d_i^{ob} - d_i^{th})^2, \quad (2.23)$$

όπου  $M$  ο αριθμός των παραμέτρων. Η χρήση αυτού του στατιστικού όρου κάνει τη λύση του συστήματος πιο ανεκτική σε μεγάλα σφάλματα.

Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα του όρου  $\chi$ -τετράγωνο υπολογίζεται ο όρος του επί τοις εκατό μέσου σφάλματος των δεδομένων, που στην περίπτωση χρήσης λογαριθμικής κλίμακας δίνεται από τη σχέση

$$\% \varepsilon = (10^{\sqrt{\chi^2}} - 1) \times 100\%, \quad (2.24)$$

και είναι αυτός που χρησιμοποιείται στην σταθερή αντιστροφή, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ο ρυθμός σύγκλισης μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων (C.R), ορίζεται ως

$$C.R. = \frac{|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i|}{\varepsilon_{i+1}} \quad (2.25)$$

Πέρα από τα σφάλματα των μετρήσεων, το τελικό αποτέλεσμα της διαδικασίας αντιστροφής πρέπει να ελεγχθεί αν βρίσκεται μεταξύ των ορίων εμπιστοσύνης. Ο έλεγχος γίνεται βρίσκοντας τα σφάλματα του διανύσματος των λύσεων. Το σφάλμα της  $i$  παραμέτρου ορίζεται ως

$$S_{p_i} = \sqrt{\chi^2} \sqrt{(A^T A)_{ii}^{-1}}, \quad (2.26)$$

όπου  $(A^T A)_{ii}$  είναι το στοιχείο του αντιστρόφου γενικευμένου Ιακωβιανού. Στην περίπτωση αυτή η παράμετρος  $p_i$  θα βρίσκεται μεταξύ των ορίων  $p_i \pm S_{p_i}$ .

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΒΑΡΩΝ

Καθώς η αναπόφευκτη ύπαρξη σφαλμάτων στις μετρήσεις επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα της αντιστροφής, ένας πολύ χρήσιμος τρόπος για τον έλεγχο τους είναι η εισαγωγή πινάκων στις εξισώσεις του συστήματος που να δίνουν μεγαλύτερη ή μικρότερη βαρύτητα στις μετρήσεις ανάλογα με την ποιότητα τους.

Εάν  $m$  είναι οι μετρήσεις, ορίζεται ένας διαγώνιος πίνακας  $(m \times m)$ , που ονομάζεται πίνακας στατιστικών βαρών, του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου ορίζονται ως

$$W_{ii} = \frac{1}{\sigma_i} \quad (2.27)$$

όπου  $\sigma_i$  είναι το σφάλμα της  $i$  μέτρησης. Η τιμή του σφάλματος δίνεται είτε από το όργανο μέτρησης κατά τη διάρκεια της έρευνας, είτε από τον χρήστη ανάλογα με τις εκτιμήσεις του για την ποιότητα των στοιχείων που συνέλεξε.

Η φυσική έννοια της χρήσης των πινάκων  $W$  είναι πως αν κάποια μέτρηση έχει μεγάλο σφάλμα, το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα θα έχει πολύ μικρή τιμή.

Ο πίνακας αυτός πολλαπλασιάζεται και με τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.13), οπότε  $Wf(m) = Wy$ ,

$$(2.28)$$

και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$dm_k = (A_k^T W^T W A_k)^{-1} A_k^T W dy_k \quad (2.29)$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι η αντίστοιχη εξίσωση του συστήματος να λαμβάνεται λιγότερο υπόψη κατά τη διάρκεια της αντιστροφής, επηρεάζοντας έτσι το διάνυσμα των λύσεων λιγότερο από τις υπόλοιπες εξισώσεις του συστήματος.

### 2.7.3.5 ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ SVD ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΤΑΘΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ένας τρόπος επίλυσης συστημάτων που ο πίνακας  $A$  είναι ασταθής είναι με τη χρήση της μεθόδου SVD (Lanczos 1961, Golub και Reinsch 1970, Lawson και Hanson 1974). Ο πίνακας  $A$  διαστάσεων  $(m \times n)$  αναλύεται σε τρεις πίνακες,

$$A = U\Lambda V, \quad (2.30)$$

όπου, ο πίνακας  $U$  είναι διαστάσεων  $(m \times n)$ , ο  $\Lambda$  είναι διαγώνιος  $(n \times n)$  και ο  $V$  είναι διαστάσεων  $(n \times n)$ . Ο αντίστροφος γενικευμένος Ιακωβιανός είναι  $A_g^{-1} = V\Lambda^{-1}U^T$ .

Ο πίνακας  $\Lambda$  είναι ο πίνακας των ιδιοτιμών του συστήματος. Από την ανάλυση του πίνακα  $\Lambda$ , μπορούμε να καταλάβουμε το πόσο ασταθές είναι το σύστημα. Τα στοιχεία του πίνακα είναι

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & & 0 \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_3} & \dots & \\ & & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

όπου,  $\lambda_i$  είναι οι ιδιοτιμές του συστήματος. Όταν οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$  είναι πολύ μικρές (κοντά στο μηδέν), το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα  $A$  αποκτά πολύ μεγάλη τιμή και η συνεισφορά του στο διάνυσμα των λύσεων του συστήματος είναι μεγάλη.

Είναι δυνατό μέσω της ανάλυσης που επιτυγχάνεται με τη χρήση της SVD να εντοπιστούν οι πολύ μικρές ιδιοτιμές του συστήματος και να αποκοπούν. Εφαρμόζεται ένα κατώφλι κάτω από το οποίο τα στοιχεία του πίνακα  $A$  μηδενίζονται, και οι ιδιοτιμές αυτές δεν λαμβάνονται υπόψη κατά τη διαδικασία της αντιστροφής. Η τεχνική χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα στις αρχές της δεκαετίας του 1980 για την επίλυση των ασταθών συστημάτων στο αντίστροφο γεωφυσικό πρόβλημα.

Το πρόβλημα είναι πως η επιλογή της τιμής που θα έχει το κατώφλι είναι αυθαίρετη, και εξαρτάται από το χρήστη, παρόλο που υπάρχουν διάφορες τεχνικές για τον ορισμό της τιμής αυτής (Press et al 1992). Αν δεν γίνει σωστός ορισμός της τιμής που θα έχει το κατώφλι, είτε θα αποκοπούν ιδιοτιμές που περιέχουν χρήσιμες πληροφορίες για το σύστημα που επιλύεται, είτε θα παραμείνουν ιδιοτιμές που θα «παραμορφώσουν» τη λύση του συστήματος. Η δυσκολία να οριστεί το κατώφλι είναι και ο λόγος που η χρήση της SVD είναι περιορισμένη στην αντιστροφή γεωφυσικών προβλημάτων. Υπάρχουν άλλες μέθοδοι, που με πιο αποτελεσματικό τρόπο απομακρύνουν τις ιδιοτιμές αυτές, χωρίς τον κίνδυνο να χαθούν πληροφορίες του συστήματος, όπως θα δούμε παρακάτω.

### 2.7.3.6 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Μια άλλη κατηγορία μεθόδων, ιδιαίτερα δημοφιλής και αποτελεσματική στην επίλυση του αντίστροφου γεωφυσικού προβλήματος, είναι η εισαγωγή περιορισμών στη λύση του συστήματος. Οι περιορισμοί μπορεί να προέρχονται από προϋπάρχουσες πληροφορίες για το πραγματικό μοντέλο, ή από εκτιμήσεις γύρω από αυτό. Η κύρια φιλοσοφία αυτών των μεθόδων είναι ότι οι τιμές των διορθώσεων σε κάθε επανάληψη της αντιστροφής, δεν πρέπει να αφήνονται να κινούνται ανεξέλεγκτα. Περιορίζεται έτσι το βήμα των διορθώσεων σε περιοχή εμπιστοσύνης ώστε να αποφευχθούν λύσεις οι οποίες είναι μεν μαθηματικά σωστές, αλλά είναι φυσικά (γεωλογικά) απαράδεκτες.

### 2.7.3.7 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

Μια από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους για την επίλυση ασταθών αντίστροφων προβλημάτων είναι η τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης, που προτάθηκε από τον Levenberg (1944). Η σταθεροποίηση της αντιστροφής επιτυγχάνεται με την πρόσθεση μιας σταθεράς στα διαγώνια στοιχεία του  $A^T A$ .

Αργότερα ο Marquardt (1963, 1970) χρησιμοποίησε αυτή την ιδέα για να αναπτύξει ένα πολύ χρήσιμο αλγόριθμο. Η μέθοδος ονομάστηκε Levenberg-Marquardt και είναι αυτή που χρησιμοποιείται κατά κόρον στη Γεωφυσική. Η μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα στη μονοδιάστατη αντιστροφή των δεδομένων της μεθόδου των TDEM.

Η μέθοδος εκτός από τη συνθήκη για περιορισμό του σφάλματος  $q = dy^T dy = (y - f(m))^T (y - f(m))$ , εισάγει ένα ακόμα περιορισμό, την προϋπόθεση η λύση να βρίσκεται μέσα στο χώρο εμπιστοσύνης που εξαρχής ορίζεται από το χρήστη. Μαθηματικά ο περιορισμός αυτός ορίζεται ως

$$dm^T dm < ct, \quad (2.32)$$

όπου  $ct$  είναι μια θετική σταθερά που αντικατοπτρίζει το ποσοστό του θορύβου που έχουν τα δεδομένα. Έτσι προκύπτει μια καινούργια συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση, η  $\phi = q_1 + \lambda q_2 = dy^T dy + \lambda (m^T m - L_0^2)$ .

Στην εξίσωση (2.33), η συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση είναι ο γραμμικός συνδυασμός του τετραγώνου των σφαλμάτων και του μεγέθους των λύσεων, και τίθεται ένα ανώτερο επιτρεπτό όριο στο μέγεθος των αλλαγών των παραμέτρων. Ο παράγοντας  $\lambda$  ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange ή παράγοντας απόσβεσης και μένει να καθορισθεί.

Ακολουθώντας παρόμοια στρατηγική όπως στην περίπτωση χωρίς περιορισμούς, καταλήγουμε στις κανονικές εξισώσεις, που για το γραμμικό πρόβλημα είναι,

$$(A^T A + \lambda I)m = A^T y \quad (2.34)$$

Για το μη γραμμικό πρόβλημα, η διόρθωση του μοντέλου, για κάθε επανάληψη  $k$ , είναι

$$dm_k = [A_k^T A_k + \lambda_k I]^{-1} A_k^T dy_k \quad (2.35)$$

και το νέο μοντέλο δίνεται από τη σχέση

$$m_{k+1} = m_k + dm_k. \quad (2.36)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν πίνακες στατιστικών βαρών, η εξίσωση (2.35) μετατρέπεται στην

$$dm_k = [A_k^T W^T W A_k + \lambda_k I]^{-1} A_k^T W d y_k . \quad (2.37)$$

Αναλύοντας τον πίνακα  $A$  με τη χρήση της SVD και επιλύοντας το σύστημα,

$$m = (V \Lambda U^T U \Lambda V^T + \lambda I)^{-1} V \Lambda U^T y = V \text{diag} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \lambda} \right) U^T y . \quad (2.38)$$

Ο πίνακας  $\text{diag} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \lambda} \right)$  έχει τη μορφή

$$\begin{array}{cccc} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda} & & & 0 \\ & \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + \lambda} & & 0 \\ 0 & & \frac{\lambda_3}{\lambda_3^2 + \lambda} & \dots \\ 0 & 0 & & \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \lambda} \end{array} . \quad (2.39)$$

Αν η ιδιοτιμή  $\lambda_i$  είναι μεγάλη, τότε η πρόσθεση του  $\lambda$  στο κλάσμα δεν επιφέρει καμία αλλαγή. Αν όμως το  $\lambda_i$  είναι μικρό, η πρόσθεση του  $\lambda$  δίνει μια πολύ μικρή τιμή στο κλάσμα, και κάνει το στοιχείο του πίνακα  $A$  να έχει πολύ μικρή συνεισφορά στο διάλυμα των λύσεων (Jupp και Vozoff 1975).

Σε σύγκριση με την εξίσωση (2.19) που προκύπτει από την χωρίς περιορισμούς λύση, γίνεται φανερό από την ανάλυση της SVD πως η εξίσωση (2.35) μπορεί να διαχειριστεί αποτελεσματικά την περίπτωση που υπάρχουν ιδιάζουσες τιμές του πίνακα  $A^T A$ . Ο Marquardt (1970) έδειξε πως η μέθοδος είναι ίδια με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για  $\lambda \rightarrow 0$ , και με τη γενικευμένη αντιστροφή του Penrose<sup>(\*)</sup> (1955).

Για τον προσδιορισμό του παράγοντα απόσβεσης, ο Marquardt πρότεινε να δίνεται μια μεγάλη τιμή αρχικά στο  $\lambda$  κατά την πρώτη επανάληψη. Αν από τη σύγκριση των θεωρητικών και πραγματικών δεδομένων διαπιστωθεί σύγκλιση, τότε η τιμή του παράγοντα απόσβεσης στην επόμενη επανάληψη υποδεκαπλασιάζεται, και επαναλαμβάνεται η διαδικασία. Διαφορετικά, σε περίπτωση απόκλισης δηλαδή, η τιμή του  $\lambda$  δεκαπλασιάζεται.

Στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως μειονέκτημα της μεθόδου, η ισχυρή εξάρτηση από την επιλογή του αρχικού μοντέλου  $m_0$  (Meju 1994, Draper και Smith 1981), με αποτέλεσμα

(\*) (Η γενικευμένη αντιστροφή που πρότεινε ο Penrose (1955) ονομάζεται και μέθοδος της απότομης μεταβολής, όπου το αρχικό μοντέλο διορθώνεται κατά τη διεύθυνση της αρνητικής παραγώγου της συνάρτησης σφάλματος, δηλαδή

$$m = -k \left\{ \frac{\partial q}{\partial m} \right\}, \text{ όπου } k \text{ είναι μια θετική σταθερά.}$$

πολλές φορές οι λύσεις που δίνονται να είναι μαθηματικά μεν ορθές, αλλά φυσικά (γεωλογικά) μη αποδεκτές (Smith και Shanno 1971), ειδικά στην περίπτωση που τα δεδομένα περιέχουν σφάλματα.

### **2.7.3.8 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΟΜΑΛΥΣΜΕΝΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ**

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης ασταθών προβλημάτων αντιστροφής είναι να εισαχθεί ένας περιορισμός εξομάλυνσης. Η χρήση τέτοιου περιορισμού για την σταθεροποίηση των προβλημάτων αντιστροφής ανήκει σε μια γενικότερη κατηγορία μεθόδων «κανονικοποίησης» που πρώτος εισήγαγε ο Tikhonov (Tikhonov 1963, Tikhonov και Glasko 1965).

Ένας αλγόριθμος αντιστροφής αυτού του τύπου, που είναι πολύ δημοφιλής στη γεωφυσική, είναι η μέθοδος Occam (Constable et al. 1987). Η βασική ιδέα πίσω από τη μέθοδο έγκειται στην προσπάθεια εξεύρεσης της πιο απλής λύσης ελλείπει πληροφοριών για το μοντέλο που αναζητείται. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται συντηρητικά, με την έννοια πως δεν ψάχνουμε την ακριβή αναπαράσταση της πραγματικότητας, αλλά ένα μοντέλο, ανάμεσα στα πολλά που ικανοποιούν μαθηματικά τα δεδομένα, που θα είναι το απλούστερο δυνατό.

Η αρχική υπόθεση που γίνεται είναι ότι οι άγνωστες παράμετροι του μοντέλου είναι ένας αριθμός στρωμάτων, π.χ. ίσος με τον αριθμό των μετρήσεων, γνωστού πάχους και άγνωστης αντίστασης (DeGroot-Hedlin και Constable, 1990). Έτσι, οι άγνωστοι είναι μόνο οι αντιστάσεις των στρωμάτων. Ο Constable έθεσε τα πάχη των στρωμάτων ίσα, λαμβάνοντας όμως υπόψη το γεγονός ότι η ευαισθησία της μεθόδου μειώνεται με το βάθος, θα μπορούσαν τα πάχη των στρωμάτων να αυξάνονται με το βάθος. Ο αρχικός περιορισμός που εισάγεται είναι το μέτρο της διαφοράς μεταξύ των πραγματικών και θεωρητικών μετρήσεων να είναι μικρότερο από το επίπεδο του θορύβου των δεδομένων, δηλαδή,

$$\|f(m) - d\| \leq \varepsilon. \quad (2.40)$$

Το σφάλμα του συστήματος, η συνάρτηση δηλαδή προς ελαχιστοποίηση, είναι η

$$q = (Wd - WAm)^T (Wd - WAm). \quad (2.41)$$

Επιπλέον, εισάγεται στο σύστημα ένας πίνακας τραχύτητας  $R$ , ο οποίος δείχνει τον τύπο της εξομάλυνσης. Ο πίνακας  $R$  μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$R = \|Cm\|^2 \quad (2.42)$$

και υποδηλώνει την εξάρτηση των παραμέτρων μεταξύ τους, δηλαδή των αντιστάσεων των στρωμάτων γνωστού πάχους. Η  $i$  γραμμή του πίνακα δίνει πληροφορίες για την  $i$  παράμετρο-αντίσταση του συστήματος, και την εξομάλυνση που υφίσταται σε σχέση με τις γειτονικές παραμέτρους. Αν το πραγματικό μοντέλο αποτελείται από  $n$  στρώματα, με πάχη  $(n-1)$ , προσπαθούμε να βρούμε ένα θεωρητικό μοντέλο με  $N$  στρώματα (όσες και οι μετρήσεις), και ο πίνακας  $C$  είναι  $(NxN)$  τάξεως, της μορφής



$$C = \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & \dots \\ & & \dots & 1 & -1 \\ & 0 & \dots & & 1 \end{vmatrix} \quad (3.35)$$

Μαθηματικά, το πρόβλημα τίθεται ως εξής: ελαχιστοποίηση του σφάλματος  $q$  υπό τη συνθήκη η τραχύτητα  $R$  του μοντέλου να είναι ελάχιστη.

Από την ελαχιστοποίηση με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange προκύπτει η εξίσωση

$$((AW)^T AW + \lambda R)m = (WA)^T Wy. \quad (2.43)$$

Επομένως, η λύση του συστήματος για το μη γραμμικό πρόβλημα είναι

$$dm_k = ((A_k W)^T A_k W + \lambda_k C^T C)^{-1} (WA_k)^T W dy_k \quad (2.44)$$

και το νέο μοντέλο

$$m_{k+1} = m_k + dm_k. \quad (2.45)$$

Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του  $\lambda$ , τόσο πιο εξομαλυσμένες είναι οι λύσεις, άρα μικρό εύρος διορθώσεων. Αντίστροφα, μικρή τιμή του  $\lambda$  συνεπάγεται μεγάλο εύρος διορθώσεων.

Η διαφορά της εξίσωσης (2.43) από την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης (εξ.2.36), είναι η προσθήκη του πίνακα  $R$ , που δίνει στο μοντέλο την εξομαλυσμένη μορφή, επιτρέπει δηλαδή στο μοντέλο να αποκλίνει από την απλούστερη μορφή τόσο, όσο χρειάζεται για να πλησιάσουν οι θεωρητικές μετρήσεις τις πραγματικές.

Ο Constable προτείνει μια διαδικασία καθορισμού της τιμής του  $\lambda$  με μεθόδους βελτιστοποίησης. Αρχικά ορίζεται ένα πολύ μεγάλο διάστημα μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η τιμή του  $\lambda$  (από  $10^{-3}$  έως  $10^6$ ). Ερευνώντας σε όλο το διάστημα ορίζεται ένα μικρότερο διάστημα, μέσα στο οποίο βρίσκεται ένα τοπικό ελάχιστο. Αν η τιμή της συνάρτησης  $q$ , για αυτή την τιμή του  $\lambda$ , είναι μικρότερη από κατώφλι θορύβου που έχει οριστεί, τότε ο αλγόριθμος αναζητά την τιμή εκείνη του  $\lambda$  για την οποία η τιμή της συνάρτησης  $q$  γίνεται ίση με το επίπεδο του θορύβου. Η τιμή αυτή του  $\lambda$  θεωρείται πως είναι η βέλτιστη για τη συγκεκριμένη επανάληψη.

## 2.8 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο υποκεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται μια σύγκριση μεταξύ των κυριότερων μεθόδων αντιστροφής σε μια διάσταση για τη μέθοδο της ηλεκτρικής τομογραφίας που μελετήθηκαν παραπάνω, δηλαδή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης, της μεθόδου της εξομαλυσμένης αντιστροφής.

### **2.8.1 ΑΣΤΑΘΕΙΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ-ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ**

Στη μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής, ο περιορισμός τίθεται από φυσική σκοπιά. Η στρωμάτωση του υπεδάφους δεν αναμένεται να έχει απότομες μεταβολές όσο αφορά τις αντιστάσεις, και έτσι το τελικό μοντέλο αποκλίνει από τον ομογενή ημιχώρο τόσο, όσο ώστε οι θεωρητικές μετρήσεις να συγκλίνουν με τα πειραματικά δεδομένα.

Ο περιορισμός που τίθεται στην υβριδική αντιστροφή είναι διαφορετικός από τη μέθοδο της εξομαλυσμένης αντιστροφής. Περιορίζεται το εύρος διόρθωσης του μοντέλου όσο αφορά τις αντιστάσεις των στρωμάτων, όμως τα πάχη αφήνονται να μεταβάλλονται ανεξέλεγκτα. Ο περιορισμός αυτός έχει φυσική έννοια, καθώς επιδιώκουμε να πάρουμε ένα τελικό μοντέλο με διακριτά στρώματα, όμως υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των αντιστάσεων, υπό την έννοια πως δεν αναμένονται τρομερά απότομες αλλαγές των αντιστάσεων μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων.

### **2.8.2 ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ-ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ**

Η ύπαρξη σφαλμάτων στα δεδομένα θα πρέπει να θεωρείται εκ των προτέρων δεδομένη. Στην περίπτωση που τα σφάλματα είναι τυχαία και έχουν κανονική κατανομή, αποδείχτηκε πειραματικά πως όλες οι μέθοδοι αποκρίνονται ικανοποιητικά. Με τη χρήση των πινάκων στατιστικών βαρών, οι μέθοδοι απομονώνουν τις μετρήσεις εκείνες που έχουν πολύ μεγάλα σφάλματα, δίνοντας τους πολύ μικρό βάρος κατά τη διαδικασία της αντιστροφής.

### **2.8.3 ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΡΧΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ**

Στην περίπτωση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης και της υβριδικής αντιστροφής, η επιλογή του αρχικού μοντέλου είναι σημαντική. Ο χρήστης απαιτείται να εισάγει όχι μόνο το σωστό αριθμό στρωμάτων, αλλά και να επιλέξει τις τιμές των παραμέτρων του αρχικού μοντέλου έτσι ώστε να είναι αρκετά κοντά στις πραγματικές. Στην περίπτωση που υπάρχει πρότερη γνώση της δομής του υπεδάφους αυτό είναι σχετικά εύκολο, αλλά πολλές φορές ο χρήστης πρέπει να δοκιμάζει πολλά μοντέλα με διαφορετικό αριθμό στρωμάτων έως ότου να καταλήξει σε αυτό που έχει τη μεγαλύτερη σύγκλιση με τις πειραματικές μετρήσεις.

Αν δεν υπάρχει καμία πληροφορία για το μοντέλο του υπεδάφους, τότε η μέθοδος της εξομαλυσμένης αντιστροφής είναι αυτή που μπορεί να παρέχει τα πιο αξιόπιστα αποτελέσματα, καθώς δεν απαιτείται προσδιορισμός του αριθμού των στρωμάτων. Ο χρήστης εισάγει μόνο τη μέση αντίσταση του υπεδάφους και το σταθερό πάχος των στρωμάτων, και ο αλγόριθμος προσπαθεί να μεταβάλλει τις αντιστάσεις των στρωμάτων ώστε να υπάρξει σύγκλιση μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών μετρήσεων.

## ΣΑΦΗΝΕΙΑ ΣΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ

Είθισται στη Γεωφυσική να αναπαριστούμε τα μοντέλα του υπεδάφους χρησιμοποιώντας διακριτές ασυνέχειες μεταξύ των στρωμάτων, ιδιαίτερα όσο αφορά τις αντιστάσεις τους. Π.χ. μοντέλο δύο στρωμάτων με ανώτερο στρώμα πάχους 100 μέτρων και αντίσταση 10 Ohm-m, υπερκείμενο ημιχώρου 100 Ohm-m.

Η μέθοδος της εξομαλυσμένης αντιστροφής, εξαιτίας ακριβώς του περιορισμού που εισάγεται μέσω του πίνακα τραχύτητας  $R$ , επιτρέπει στις αντιστάσεις μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων να μεταβάλλονται βαθμιαία μεταξύ τους. Επιπλέον, ο αριθμός των στρωμάτων ορίζεται ίσος με τον αριθμό των μετρήσεων. Το τελικό μοντέλο αποτελείται έτσι από πολλά μικρά στρώματα, και δεν ορίζονται σαφή πάχη μεταξύ στρωμάτων με απότομες μεταβολές στην αντίσταση, αλλά υπάρχει μια ομαλή μεταβολή μεταξύ ακραίων τιμών.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων απόσβεσης δεν εισάγει κανενός είδους περιορισμό, και τα πάχη των στρωμάτων ορίζονται σαφώς, καθώς αφήνονται να κινούνται ανεξέλεγκτα μεταξύ τους.

Στην υβριδική αντιστροφή, ο περιορισμός που τίθεται είναι οι αντιστάσεις μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων να μην κινούνται ανεξέλεγκτα μεταξύ τους. Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός όσο αφορά τα πάχη των στρωμάτων, τα οποία μπορούν να μεταβάλλονται ελεύθερα. Έτσι και σε αυτή τη μέθοδο τα πάχη ορίζονται σαφώς.

Συμπερασματικά, από την ανάλυση που έγινε παραπάνω, αλλά κυρίως από τις δοκιμές που έγιναν με διάφορα θεωρητικά μοντέλα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η υβριδική μέθοδος αντιστροφής είναι αυτή που παρουσιάζει τα περισσότερα πλεονεκτήματα από όλες τις μεθόδους που εξετάστηκαν. Είναι σταθερή, λαμβάνει υπόψη της τα μεγέθη των σφαλμάτων των μετρήσεων, δίνει με σαφήνεια το πάχος των στρωμάτων του μοντέλου, και το τελικό μοντέλο προκύπτει ως αποτέλεσμα φυσικών και όχι αυθαίρετων μαθηματικών περιορισμών. Επίσης εμφανίζει τα περισσότερα πλεονεκτήματα μεταξύ των μεθόδων που εξετάστηκαν. Τη μέθοδο αυτή επιλέξαμε για την εφαρμογή του αλγορίθμου σταθερής αντιστροφής που θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Όλα τα παραπάνω, συνοψίζονται στον πίνακα (Π3.1), όπου με ([]) συμβολίζονται τα πλεονεκτήματα ή οι απαιτήσεις και με (-) τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου.

Μέθοδος	Είναι Σταθερή η Αντιστροφή ;	Προέλευση Περιορισμών ;	Αρχικό Μοντέλο ;	Διακριτά Στρώματα ;	Συμπεριλαμβάνεται Τυχαίος Θόρυβος ;
Ελάχιστα Τετράγωνα	-	-	[	[	[
Ελ. Τετράγωνα Απόσβεσης	[	Μαθηματικό Μοντέλο	[	[	[
Εξομαλυσμένη αντιστροφή	[	Φυσικό Μοντέλο	-	-	[

**Πίνακας Π3.1 Συγκεντρωτικά τα συμπεράσματα για τις μεθόδους αντιστροφής του μονοδιάστατου προβλήματος της ηλεκτρικής τομογραφίας.**

## **ΕΞΟΠΛΙΣΜΟΣ**

Για την εκτέλεση των γεωφυσικών μετρήσεων υπαίθρου χρησιμοποιήθηκαν τα κάτωθι επιστημονικά όργανα:

SYSCAL Jr. Switch 48 (v. 11.4++) (σχήμα 2.5). Ένα αυτόματο πολυκαναλικό σύστημα (48 καναλιών) μέτρησης αντιστάσεων με εσωτερικό επιλογή καναλιών (πολυπλέκτης 48 θέσεων) της εταιρείας IRIS INSTRUMENTS

2 πολύκλινα καλώδια (26 κλώνων) μεταφοράς του σήματος με 24 εξόδους το καθένα ανά 5 μέτρα.

48 πάσσαλοι και 48 καλώδια σύνδεσης αυτών με τα καλώδια μεταφοράς του σήματος.

1 μπαταρία 12V και 143Ah για μεγάλη αυτονομία στο ύπαιθρο.

Καλώδιο RS232 για μεταφορά των δεδομένων από το σύστημα καταγραφής στον υπολογιστή για περαιτέρω επεξεργασία. Το όργανο μέτρησης χρησιμοποιεί τόσο εσωτερικές (12Volt) όσο και εξωτερικές μπαταρίες και παρουσιάζεται στο σχήμα (2.5.). Η μπαταρία που χρησιμοποιήσαμε εμείς σαν εξωτερική ήταν μπαταρία αυτοκινήτου τάσης 12 Volt.



**Σχήμα 2.5. Όργανο λήψης ηλεκτρικών μετρήσεων SYSCAL Jr. Switch 48 (v. 11.4++) της εταιρείας IRIS INSTRUMENTS.**

### **3. Επεξεργασία δεδομένων γεωηλεκτρικής τομογραφίας**

Τα δεδομένα επεξεργάστηκαν με ένα αλγόριθμο αντιστροφής (Loke, 2000, 2002). Ο αλγόριθμος αυτός είναι δυσδιάστατης μη γραμμικής αντιστροφής και εκτελεί επαναληπτική βελτιστοποίηση βασισμένος σε ένα πρόγραμμα μοντελοποίησης με πεπερασμένα στοιχεία. Ο αλγόριθμος είναι τελείως αυτοματοποιημένος και χρησιμοποιεί το σχήμα της αντιστροφής Occam (Constable et al. 1991). Η διαδικασία αντιστροφής μπορεί να επιταχυνθεί με τη χρήση τεχνικών Quasi-Newton για την ενημέρωση του Ιακωβιανού πίνακα.

Όλες οι αντιστροφές παρουσίασαν σχετικά μικρό σφάλμα (R.M.S. 1.45-25%) δεδομένης της έντονης υπεδάφειας ανομοιογένειας της περιοχής έρευνας. Η έντονη μεταβολή του r.m.s σχετίζεται με τη μεγάλη μεταβλητότητα των τιμών της υπεδάφειας ηλεκτρικής αντίστασης που μεταβάλλεται από τα 1-10 Ohm.m της αργίλου, τα 30-150 Ohm.m των μαργαϊκών μέχρι τα 1800 Ohm.m των κροκάλων και πιθανών δομών. Έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι τα αποτελέσματα της αντιστροφής που παρουσιάζονται στις επόμενες σελίδες, δίνουν καλή προσέγγιση της πραγματικής αντίστασης του εδάφους, εάν λάβουμε υπόψη το εύρος μεταβολής των τιμών της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης.

#### **3.1 Εξοπλισμός**

Για την εκτέλεση των γεωφυσικών μετρήσεων υπαίθρου χρησιμοποιήθηκαν τα κάτωθι επιστημονικά όργανα:

SYSCAL Jr. Switch 48 (v. 11.4++). Ένα αυτόματο πολυκαναλικό σύστημα (48 καναλιών) μέτρησης αντιστάσεων με εσωτερικό επιλογέα καναλιών (πολυπλέκτης 48 θέσεων).

2 πολύκλωνα καλώδια (26 κλώνων) μεταφοράς του σήματος με 24 εξόδους το καθένα ανά 5 μέτρα.

48 ατσάλινοι πάσσαλοι και 48 καλώδια σύνδεσης αυτών με τα καλώδια μεταφοράς του σήματος.

1 μπαταρία 12V και 143Ah για μεγάλη αυτονομία στο ύπαιθρο.

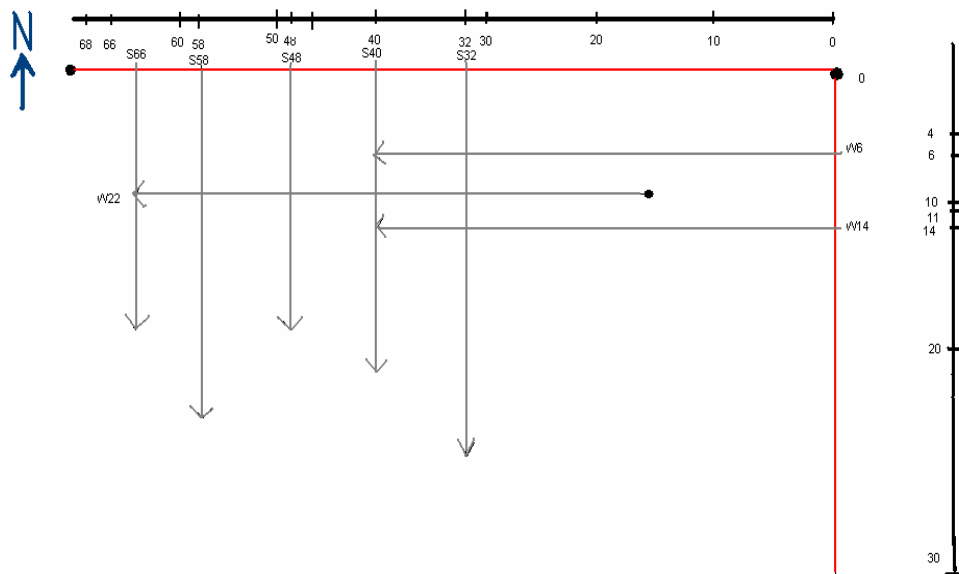
Καλώδιο RS232 για μεταφορά των δεδομένων από το σύστημα καταγραφής στον υπολογιστή για περαιτέρω επεξεργασία.

Ψηφιακή φωτογραφική μηχανή HP450 για την αποτύπωση των θέσεων και τη συλλογή φωτογραφικού υλικού.

GPS Garmin 12XL για την αποτύπωση των γραμμών μέτρησης.

#### **3.2 Προγραμματισμός και Λήψη μετρήσεων γεωηλεκτρικών τομογραφιών**

Στο σχήμα 6 παρουσιάζεται σκαρίφημα της περιοχής του έργου όπου πραγματοποιήθηκε και η γεωφυσική έρευνα. Η μετρήσεις υπαίθρου ξεκίνησαν από την τομή 01. Στην περιοχή εκτελέστηκαν 8 τομογραφίες των 48 ηλεκτροδίων. Οι τομές 1-2-4-5 και 7 έχουν διεύθυνση Βορρά-Νότου και οι τομές 3-6 και 8 διεύθυνση Ανατολής-Δύσης.



Σχήμα 6. Φωτογραφία του χώρου έρευνας με αποτυπωμένο το σκαρίφημα όλων των τομών.

Η αντιστοιχία των τομών με το σκαρίφημα του σχήματος 6 είναι:

- 1) S32\_1 (ΤΟΜΗ 1)
- 2) S58\_1418(ΤΟΜΗ 2)
- 3) W22\_2411(ΤΟΜΗ 3)
- 4) S40\_643(ΤΟΜΗ 4)
- 5) S66\_2086(ΤΟΜΗ 5)
- 6) W14\_5609(ΤΟΜΗ 6)
- 7) S48\_1093(ΤΟΜΗ 7)
- 8) W6NEW\_4559(ΤΟΜΗ 8)

Στη συνέχεια θα αναλυθούν τα αποτελέσματα από την επεξεργασία των δεδομένων και θα παρουσιασθούν ανά τομή όπως αυτή ορίζεται στο σχήμα.





## **ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ**

*Τα αποτελέσματα της πτυχιακής δεν αναγράφονται στο ηλεκτρονικό έντυπο για λόγους προστασίας των πνευματικών δικαιωμάτων των γραφόντων. Μπορούν να αναζητηθούν στο τυπωμένο αντίτυπο που βρίσκεται στη βιβλιοθήκη του Τμήματος Φυσικών Πόρων και Περιβάλλοντος στα Χανιά.*

**BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

**Loke, M. H., 2002, RES2DMOD, Rapid 2D Resistivity Forward Modeling Using Finite-Difference and Finite-Element Methods, published at [www.geoelectrical.com](http://www.geoelectrical.com)**

**Loke, M. H., 2000, A Practical Guide to 2D & 3D Electrical Imaging Surveys, published at [www.geoelectrical.com](http://www.geoelectrical.com)**

**Tsourlos, P., Szymanski, J. and Tsokas G., 1999, The effect of terrain topography on commonly used resistivity arrays: *Geophysics*, 64, 1357-1363.**