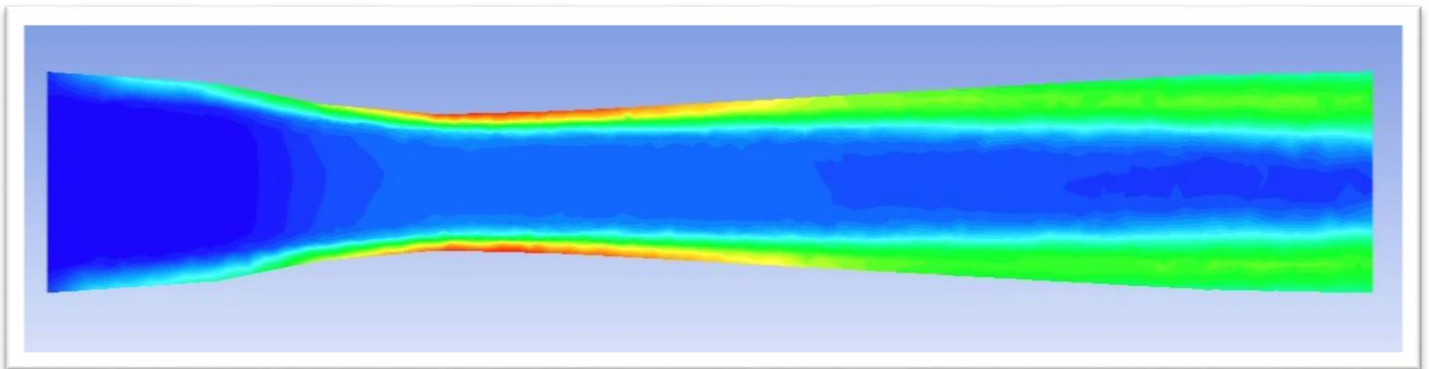


Πτυχιακή εργασία

Θέμα : Ανάλυση ροής σε μηχανολογικές εφαρμογές με μεθόδους υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD).



Σπουδαστής : Παναγιώτης Μωραΐτης

A.M. : 4234

Επιβλέπων καθηγητής : Κοζυράκης Γιώργος

Ελέγχθηκε

26/05/2014

Περιεχόμενα

Περίληψη πτυχιακής εργασίας.....	5
Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή.....	6
Η έννοια του ρευστού.....	6
Διάκριση των ρευστών.....	6
Πίεση ή τάση.....	7
Ιξώδες.....	8
Πυκνότητα.....	10
Κεφάλαιο 2 – Θεωρητικό μέρος	11
Δυναμική των ρευστών.....	11
Νόμοι διατήρησης	11
Είδη ροής	13
Συμπιεστή και ασυμπίεστη ροή.....	13
Στρωτή και τυρβώδης ροή	13
Σταθερή και χρονικά μεταβαλλόμενη ροή	14
Προσέγγιση προβλημάτων της ρευστοδυναμικής.....	14
Τι είναι το CFD.....	15
Εφαρμογές της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής.....	15
Στοιχεία αριθμητικής μεθόδου.....	16
Μαθηματικό μοντέλο	16
Μέθοδος διακριτοποίησης.....	16
Συστήματα συντεταγμένων	17
Αριθμητικό πλέγμα	17
Μέθοδος επίλυσης	19
Κριτήρια σύγκλισης.....	19
Ιδιότητες μεθόδων αριθμητικής επίλυσης.....	20
Συνέπεια.....	20
Ευστάθεια	20
Σύγκλιση.....	20
Διατήρηση.....	21
Φραγή	21
Ακρίβεια	21
Μέθοδοι διακριτοποίησης	22
Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών	22
Μέθοδος πεπερασμένων όγκων	23
Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων.....	23
Συνοριακές συνθήκες	24

Συνοριακές συνθήκες εισόδου	24
Συνοριακές συνθήκες εξόδου	24
Συνοριακές συνθήκες τοιχωμάτων	24
Συνοριακές συνθήκες σταθερής πίεσης	25
Συνοριακές συνθήκες συμμετρικές ως προς τον άξονα	25
Συμμετρική συνοριακή συνθήκη	25
Περιοδική ή κυκλική συνοριακή συνθήκη	25
Μέθοδοι επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων	26
Μη γραμμικά συστήματα	27
Μέθοδος Quasi – Newton	28
Μέθοδοι για την επίλυση γραμμικών συστημάτων	28
Επαναληπτικές Μέθοδοι	30
Βασικές επαναληπτικές μέθοδοι	31
Μέθοδοι συζυγών κλίσεων	32
Πολυπλεγματικές μέθοδοι επιτάχυνσης	32
Μοντέλο τύρβης $k - \epsilon$	33
Πρότυπο μοντέλο τύρβης $k - \epsilon$	33
Εφαρμογές	34
Κεφάλαιο 3 – Πειραματικό μέρος	35
Εισαγωγή	35
Πείραμα 1 ^ο – Μετρητής Venturi	35
Θεωρητικό μέρος	36
Υπολογισμός παραμέτρων του πειράματος	36
Δεδομένα – Αποτελέσματα πειράματος	37
Προσομοίωση CFD	38
Αποτελέσματα προσομοίωσης	40
Πείραμα 2 ^ο – Τοπικές απώλειες	44
Θεωρητικό μέρος	44
Τοπικές απώλειες σε αλλαγή κατεύθυνσης σωλήνα	44
Υπολογισμός παραμέτρων του πειράματος	46
Προσομοίωση CFD	47
Αποτελέσματα προσομοίωσης	49
Πείραμα 3 ^ο – Γραμμή ενέργειας	56
Θεωρητικό μέρος	56
Υπολογισμός παραμέτρων του πειράματος	58
Προσομοίωση CFD	59
Αποτελέσματα προσομοίωσης	61
Σύνοψη - Συμπεράσματα	67
Πηγές – Βιβλιογραφία	68

Περίληψη πτυχιακής εργασίας

Το αντικείμενο της πτυχιακής είναι η ανάλυση του πεδίου ροής σε μηχανολογικές εφαρμογές (ροή σε αγωγούς) και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

Ο τομέας της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής είναι ένας σύγχρονος επιστημονικός κλάδος με ευρύ φάσμα εφαρμογών. Σκοπός της πτυχιακής είναι να φέρει σε επαφή τον σπουδαστή με κάποιες από αυτές τις μεθόδους και να μπορέσει να επιλύσει και να οπτικοποιήσει διάφορες περιπτώσεις εσωτερικών ροών που βρίσκουν εφαρμογή στην μηχανολογία.

Σε πρώτη φάση θα μελετηθεί η βιβλιογραφία που σχετίζεται με τις παραπάνω μεθόδους και θα εντοπίσει τις περιπτώσεις ροής που παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

Σε δεύτερη φάση έγιναν μια σειρά ασκήσεων για τον δισδιάστατο υπολογισμό διαφόρων περιπτώσεων ροής με το πρόγραμμα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής που θα χρησιμοποιήσει.

Στην τρίτη φάση εφαρμόστηκε η σχετική μεθοδολογία για τον υπολογισμό συγκεκριμένων περιπτώσεων τρισδιάστατων εσωτερικών ροών.

Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή

Η έννοια του ρευστού

Με τον όρο ρευστό χαρακτηρίζεται μια οποιαδήποτε ουσία που παρουσιάζει ροή. Τέτοιες ουσίες είναι τα υγρά και τα αέρια ή και στερεά που βρίσκονται (τα τελευταία) σε φάση ροής. Συνεπώς ο όρος ρευστό χαρακτηρίζει συνοπτικά τα υγρά και τα αέρια σώματα των οποίων οι δυνάμεις συνοχής είναι χαλαρές με συνέπεια η μάζα τους να ολισθαίνει ελεύθερα (περίπτωση υγρών) ή να μετατοπίζεται ανεξάρτητα (περίπτωση αερίων) έτσι ώστε να λαμβάνει κάθε φορά το σχήμα του χώρου που καταλαμβάνουν ή του μέσου δια του οποίου κινούνται αυτά.

- Σημειώνεται ότι το φαινόμενο της ροής που χαρακτηρίζει γενικά τα ρευστά είναι ακριβώς τούτο: ότι σ' αυτά δεν παρατηρείται κατάτμηση της μάζας τους όταν ασκούνται σ' αυτήν εξωγενείς δυνάμεις αλλά αντίθετα αυτή αντιδρά ολισθαίνοντας συνεχώς ή μετατοπίζεται εξ ολοκλήρου ανεξάρτητα και συνεχώς. Φαινόμενο που δεν συμβαίνει στη μάζα των στερεών, υποκείμενη σε κατάτμηση, κάμψη, στρέψη ή άλλη παραμόρφωση ή ακόμα και επαναφορά στην αρχική κατάσταση, εκτός και αν βρεθεί σε "φάση ροής" οπότε και έχει πάψει τότε να θεωρείται στερεό.
- Τα ρευστά παρουσιάζουν μόνο μία δύναμη που ασκούν προς τα έξω την υδροστατική πίεση και η οποία εφαρμόζεται πάντα κάθετα προς οποιοδήποτε σημείο των τοιχωμάτων του χώρου που βρίσκονται

Διάκριση των ρευστών

Τα ρευστά διακρίνονται στις τρεις ακόλουθες κατηγορίες:

1. Ιδανικά ρευστά ή τέλεια ρευστά ή και ακόμα *ιδεώδη* ή *ιδεατά*: Χαρακτηρίζονται υποθετικά ρευστά (συνήθως υγρά) τα οποία είναι τελείως ασυμπιεστα και καμία εσωτερική τριβή των μορίων τους δεν αναπτύσσεται κατά τη ροή τους. Όπως επίσης και καμία δύναμη συνάφειας μεταξύ αυτών και των τοιχωμάτων των δοχείων ή αγωγών που περιέχονται. Είναι προφανές ότι αυτά αποτελούν υποθετική θεωρητική κατάσταση και μόνο, που λαμβάνεται υπόψη στις έρευνες και μελέτες των Νόμων των ρευστών διευκολύνοντας έτσι κατά πολύ την εξαγωγή συμπερασμάτων με αντίστοιχους υπολογισμούς. Παρά ταύτα ορισμένα φυσικά ρευστά με πολύ χαμηλό ιξώδες και μικρή θερμική αγωγιμότητα είναι δυνατόν ν' αντιμετωπιστούν, βέβαια κατά προσέγγιση, ως ιδανικά ρευστά.
2. Φυσικά ρευστά καλούμενα και Νευτώνεια ρευστά: Χαρακτηρίζονται όσα εμφανίζουν τις αποτρεπτικές ιδιότητες των προηγουμένων π.χ. το νερό, υδατικά διαλύματα, ορισμένοι υδατικοί διαλύτες, τα αραιά αιωρήματα και γαλακτώματα, καθώς και όλα τα αέρια.
3. Θιξότροπα ρευστά ή Μη νευτώνεια ρευστά: Τέτοια χαρακτηρίζονται συνήθως υγρά που παρουσιάζουν μικρότερης κλίμακας ιδιότητες των φυσικών ρευστών, δηλαδή χαμηλό ιξώδες ιδιαίτερα όταν υποβάλλονται σε ανάδευση και γίνονται περισσότερο λεπτόρρευστα, όπως, για παράδειγμα, το τυπογραφικό μελάνι, οι διάφορες βαφές (ελαιοχρώματα κ.λπ.). Επίσης σ' αυτή τη κατηγορία υπάγονται τα πυκνά αιωρήματα καθώς και τα διάφορα πυκνά γαλακτώματα.

- Κύρια στοιχεία της διαφορετικότητας των παραπάνω διακρίσεων των ρευστών είναι οι τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητές τους: του συμπιεστού, της συνοχής μεταξύ των μορίων τους που ανθίσταται στη διάσπασή τους κατά τη ροή και που εκδηλώνεται ως εσωτερική τριβή καλούμενη *συντελεστής τριβής* ή *συντελεστής ιξώδους* ή πιο απλά ιξώδες, και τέλος από τη συνάφεια των υγρών που παρατηρείται μεταξύ αυτών και των τοιχωμάτων των δοχείων ή αγωγών που μεταφέρονται.

Πίεση ή τάση

Ως πίεση χαρακτηρίζεται η δύναμη που ασκείται στη μονάδα της επιφάνειας ενός υλικού και ορίζεται ως το πηλίκο της ασκούμενης δύναμης που δρα σε μια επιφάνεια δια του εμβαδού της επιφάνειας αυτής.

Η Πίεση εξαρτάται από το μέγεθος της ασκούμενης δύναμης και από το εμβαδό της επιφάνειας στην οποία και ασκείται. Όσο μεγαλύτερη είναι η επιφάνεια τόσο μικρότερη γίνεται η πίεση. Ένα ρευστό υλικό (υγρό ή αέριο) ασκεί πίεση στο δοχείο που το περιέχει καθώς και στα αντικείμενα που βυθίζονται μέσα σ' αυτό. Για παράδειγμα, όσο ένα κολυμβητής - δύτης κατεβαίνει σε βάθος τόσο μεγαλύτερη είναι η πίεση που δέχεται από το υπερκείμενο βάρος του νερού.

Η Πίεση συμβολίζεται δια του λατινικού γράμματος P και είναι $P=F/S$ (όπου F=δύναμη και S=επιφάνεια). Διακρίνονται δύο ειδών, διαφορετικής προέλευση πιέσεις, η **στατική** που προκαλείται από μια σταθερή δύναμη (π.χ. η πίεση που ασκείται στο έδαφος από το βάρος ενός σώματος ή εκείνης των ρευστών σε ηρεμία) και η **δυναμική πίεση** που προκαλείται από δυνάμεις ένεκα κρούσεων κινούμενων σωματιδίων (π.χ. πίεση περιεχομένου αερίου σε τοιχώματα δοχείου ή από σύγκρουση κινούμενων μορίων του αερίου).

- Διατμητική τάση

Κατά τη Μηχανική των ρευστών η **διατμητική τάση** είναι η δύναμη που συνηθέστερα παραμορφώνει τα ρευστά, στη ροή τους, ανεξάρτητα το πόσο μικρή μπορεί να είναι.

Ως διατμητική τάση χαρακτηρίζεται το πηλίκο της παράλληλης ή εφαπτομενικής δύναμης που εφαρμόζεται σε μια επιφάνεια ρευστού, προς το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής. Συμβολίζεται δε με το ελληνικό μικρό γράμμα τ (ταυ).

Η διατμητική τάση εφαρμόζεται εφαπτομενικά σε αντίθεση με την πίεση που εφαρμόζεται κάθετα στην επιφάνεια του ρευστού.

- Τύπος: $\tau = F / A$, όπου F η παράλληλη συνιστώσα της δύναμης εφαρμογής και A η επιφάνεια εφαρμογής του ρευστού.
- Μονάδα μέτρησης της διατμητικής τάσης στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων είναι το Pascal που είναι ίσο με 1 Newton (μονάδα ασκούμενης δύναμης) ανά τετραγωνικό μέτρο (μέτρο επιφάνειας εφαρμογής στο SI).

Ιξώδες

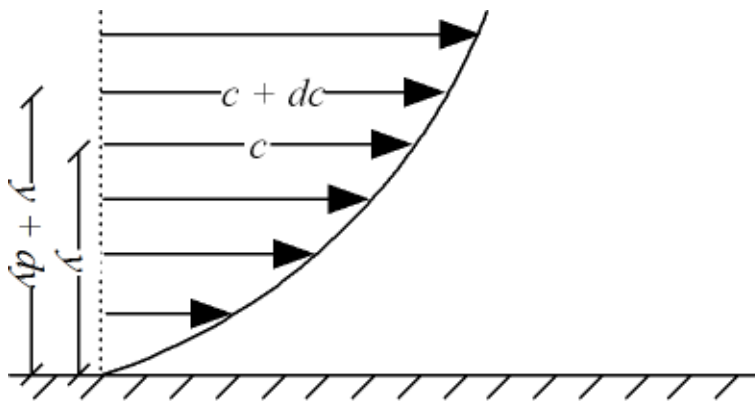
Με τον όρο **ιξώδες** στη Χημεία και στη Φυσική χαρακτηρίζεται μία από τις ιδιότητες της ύλης, ιδίως των υγρών αλλά και των αερίων, και συγκεκριμένα η αντίσταση που παρουσιάζουν κατά τη ροή τους. Για παράδειγμα, διαφορετικά ρέουν το μέλι, το λάδι και το νερό. Η αντίσταση αυτή που παρουσιάζουν τα ρευστά οφείλεται στις εσωτερικές τριβές των μορίων τους από δυνάμεις συνοχής, σε βαθμό που το ίδιο το ιξώδες ν' αποτελεί μέτρο αντίστασης του υγρού στη ροή.

Το μέτρο του ιξώδους είναι ο συντελεστής συνεκτικότητας ή συντελεστής εσωτερικής τριβής ή συντελεστής ιξώδους του υγρού. Όσο πιο παχύρρευστο είναι ένα υγρό, τόσο μεγαλύτερο ιξώδες λέμε ότι έχει, π.χ. το μέλι έχει μεγαλύτερο ιξώδες από το λάδι.

- Δυναμικό ιξώδες

Το δυναμικό ιξώδες είναι ένα μέτρο της εσωτερικής αντίστασης. Είναι η εφαπτομενική δύναμη ανά μονάδα περιοχής που απαιτείται να κινηθεί ένα οριζόντιο επίπεδο σε σχέση μ' ένα άλλο, σε μονάδα ταχύτητας όταν διατηρείται σε μονάδα απόστασης από το υγρό.

Η διατμητική τάση ανάμεσα στα στρώματα μιας μη τυρβώδους ροής κινείται σε ευθείες παράλληλες γραμμές και μπορεί να οριστεί για νευτώνεια ρευστά ως:



Το δυναμικό ιξώδες μπορεί να εκφραστεί σαν:

$$\tau = \mu \frac{dc}{dy}$$

Όπου:

τ η διατμητική τάση

μ το δυναμικό ιξώδες

Στο σύστημα SI, οι μονάδες του δυναμικού ιξώδους είναι $\text{N} \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$, $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ή $\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$.

Όπου:

$$1 Pa * s = 1 N \frac{s}{m^2} = 1 \frac{kg}{m * s}$$

- Κινηματικό ιξώδες

Κινηματικό ιξώδες είναι ο λόγος του απόλυτου ή δυναμικού ιξώδους προς την πυκνότητα – μια ποσότητα, στην οποία δεν εμπλέκεται καμία δύναμη. Το κινηματικό ιξώδες μπορεί να ληφθεί διαιρώντας το απόλυτο ιξώδες ενός ρευστού με την πυκνότητα του.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Όπου:

ν το κινηματικό ιξώδες

μ το απόλυτο ή δυναμικό ιξώδες

ρ η πυκνότητα

Στο σύστημα SI, η θεωρητική μονάδα είναι $\frac{m^2}{s}$ ή η συνήθως χρησιμοποιούμενη μονάδα **Stoke (St)**.

Όπου:

$$1 St (Stokes) = 10^{-4} \frac{m^2}{s} = 1 \frac{cm^2}{s}$$

Δεδομένου ότι η μονάδα Stoke είναι μια μεγάλη μη πρακτική μονάδα, συνήθως χρησιμοποιείται διαιρούμενη με το 100, η οποία καλείται **Centistokes (cSt)**.

Όπου:

$$1 St = 100 cSt$$

$$1 cSt (centiStokes) = 10^{-6} \frac{m^2}{s} = 1 \frac{mm^2}{s}$$

Δεδομένου ότι η ειδική βαρύτητα του νερού στους 20.2°C (68.4°F) είναι σχεδόν 1, το κινηματικό ιξώδες για νερό στους 20.2°C είναι για όλους τους πρακτικούς σκοπούς $1.0 \frac{mm^2}{s}$ (cSt). Το κινηματικό ιξώδες του νερού στους 20°C (68°F) είναι $1.0038 \frac{mm^2}{s}$ (cSt).

Η μετατροπή από το απόλυτο στο κινηματικό ιξώδες, μπορεί επίσης να εκφραστεί ως:

$$\nu = 6.7197 * 10^{-4} \frac{\mu}{\gamma}$$

Όπου:

ν το κινηματικό ιξώδες $\left(\frac{ft^2}{s}\right)$

μ το απόλυτο ή δυναμικό ιξώδες (cP)

γ το ειδικό βάρος $\left(\frac{lb}{ft^3}\right)$

Πυκνότητα

Η πυκνότητα ή για την ακρίβεια η ογκομετρική πυκνότητα μάζας μιας ουσίας, είναι η μάζα της ανά μονάδα όγκου. Το σύμβολο που χρησιμοποιείται συχνότερα για την πυκνότητα είναι το ρ . Η πυκνότητα ορίζεται ως το πηλίκο της μάζας διά του όγκου:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Όπου:

ρ η πυκνότητα

m η μάζα

V ο όγκος

Μονάδα μέτρησης της πυκνότητας στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων είναι το 1 kg/m^3

Για μια καθαρή ουσία, η πυκνότητα έχει την ίδια αριθμητική τιμή με την συγκέντρωση μάζας. Διαφορετικά υλικά έχουν συνήθως διαφορετικές πυκνότητες και η πυκνότητα μπορεί να έχει σχέση με την πλευστότητα, την καθαρότητα και την συσκευασία.

Για ν' απλοποιηθούν οι συγκρίσεις πυκνότητας ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα μονάδων, κάποιες φορές η πυκνότητα αντικαθίσταται από αδιάστατες ποσότητες, όπως «σχετική πυκνότητα» ή «ειδική βαρύτητα», δηλαδή ο ρυθμός της πυκνότητας ενός υλικού σε σχέση μ' ένα άλλο τυπικό υλικό, συνήθως νερό. Έτσι, μια σχετική πυκνότητα μικρότερη του ενός, σημαίνει πως η ουσία θα επιπλέει στο νερό.

Η πυκνότητα ενός υλικού διαφέρει ανάλογα με την θερμοκρασία και την πίεση. Αυτή η αλλαγή είναι τυπικά μικρή για στερεά και υγρά και πολύ μεγαλύτερη για αέρια.

Κεφάλαιο 2 – Θεωρητικό μέρος

Δυναμική των ρευστών

Η επιστήμη η οποία ασχολείται με τη μελέτη των ρευστών σε κίνηση ονομάζεται δυναμική των ρευστών. Η επιστήμη αυτή είναι παρακλάδι της μηχανικής των ρευστών, η οποία περιλαμβάνει και την μελέτη των ρευστών σε ηρεμία.

Την ροή των ρευστών την διέπουν τρεις βασικές αρχές. Η αρχή διατήρησης της μάζας, η αρχή διατήρησης της ορμής και η αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Στην παρούσα εργασία τα ρευστά θεωρούνται ως συνεχές μέσο και συνεπώς, ιδιότητες όπως η πυκνότητα, η πίεση, η θερμοκρασία και η ταχύτητα λαμβάνονται ως σαφώς καθορισμένες σε απειροελάχιστα σημεία και θεωρείται πως ποικίλουν συνεχώς από το ένα σημείο στο άλλο. Το γεγονός πως το υγρό αποτελείται από διακριτά μόρια αγνοείται. Στην πραγματικότητα όμως, αποτελούνται από μόρια τα όποια συγκρούονται, τόσο μεταξύ τους, όσο και με στερεά αντικείμενα.

Οι τρεις αρχές διατήρησης που αναφέραμε (μάζας, ορμής, ενέργειας) περιγράφονται από τις εξισώσεις Navier – Stokes (N-S), οι οποίες είναι ένα σετ μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει την ροή ενός ρευστού. Οι μη γραμμικές εξισώσεις N-S δεν έχουν μια γενική λύση κλειστού τύπου και επιλύονται με τη χρήση υπολογιστών. Οι εξισώσεις μπορούν να γραμμικοποιηθούν με διάφορες μεθόδους, οι οποίες τις καθιστούν πιο εύκολες στη λύση.

Νόμοι διατήρησης

Για την λύση προβλημάτων δυναμικής των ρευστών χρησιμοποιούνται τρεις νόμοι διατήρησης, και μπορούν να γραφούν είτε με την μορφή ολοκληρωμάτων, είτε με την μορφή παραγώγων. Αυτές οι μαθηματικές συναρτήσεις των νόμων διατήρησης μπορούν να ερμηνευτούν λαμβάνοντας υπόψιν την έννοια του διαφορικού όγκου. Ο διαφορικός όγκος είναι ένας συγκεκριμένος όγκος στον χώρο απ' τον οποίο μπορεί να ρέει ένα ρευστό εντός και εκτός. Οι συναρτήσεις με την μορφή ολοκληρώματος των νόμων διατήρησης αφορούν την αλλαγή της μάζας, της ορμής ή της ενέργειας εντός του διαφορικού όγκου.

- Συνέχεια της μάζας (διατήρηση της μάζας): Ο ρυθμός μεταβολής υγρής μάζας μέσα σε διαφορικό όγκο πρέπει να είναι ίσος με τον καθαρό ρυθμό ροής του ρευστού μέσα στον όγκο. Στη φύση, αυτή η δήλωση απαιτεί την μη δημιουργία και την μη καταστροφή μάζας μέσα στον ελεγχόμενο όγκο και μπορεί να εκφραστεί με την μορφή ολοκληρώματος της εξίσωσης της συνέχειας:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$$

Όπου:

- ρ, η πυκνότητα του υγρού
- \mathbf{u} , το διάνυσμα της ταχύτητας
- t, ο χρόνος

Το αριστερό μέλος της ανωτέρω εξίσωσης περιέχει την τριπλή ολοκλήρωση του διαφορικού όγκου, ενώ το δεξιό μέλος περιέχει την ολοκλήρωση της επιφάνειας του ελεγχόμενου όγκου.

- Διατήρηση της ορμής: Η συγκεκριμένη εξίσωση εφαρμόζει τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε διαφορικό όγκο, απαιτώντας κάθε αλλαγή στην ορμή του ρευστού εντός του ελεγχόμενου όγκου να οφείλεται στην καθαρή ροή του εντός του όγκου και την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων σε αυτό {στον αέρα} εντός του όγκου. Στην ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης οι σωματικές δυνάμεις (f_{body}), η σωματική δύναμη ανά μονάδα μάζας. Οι δυνάμεις επιφάνειας, όπως οι δυνάμεις ιξώδους (F_{surf}), η καθαρή δύναμη εξαιτίας των τάσεων πάνω στην επιφάνεια του ελεγχόμενου όγκου.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{u} dV = - \iint_S (\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{u} - \iint_S p d\mathbf{S} + \iiint_V \rho f_{body} dV + F_{surf}$$

Η παραγωγική μορφή της εξίσωσης της διατήρησης της ορμής έχει ως ακολούθως. Εδώ, τόσο οι δυνάμεις επιφάνειας, όσο και οι δυνάμεις σώματος υπολογίζονται σε μια συνολική δύναμη, F . Για παράδειγμα, F μπορεί να επεκταθεί σε δυνάμεις τριβής και βαρυτικές δυνάμεις, που δρουν σε μια εσωτερική ροή.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = F - \frac{\nabla p}{\rho}$$

Στην αεροδυναμική, ο αέρας θεωρείται νευτώνειο ρευστό, το οποίο προϋποθέτει μια γραμμική σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης (που οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις τριβής) και της παραμόρφωσης του ρευστού.

- Διατήρηση της ενέργειας: Παρόλο που η ενέργεια μπορεί ν' αλλάξει μορφή, η ολική ενέργεια σ' ένα κλειστό σύστημα παραμένει σταθερή.

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi$$

Όπου:

h , η ενθαλπία

k , η θερμική αγωγιμότητα του ρευστού

T , η θερμοκρασία

Φ , διάχυση λόγω ιξώδους

Η διάχυση λόγω του ιξώδους διέπει τον ρυθμό με τον οποίο η μηχανική ενέργεια του ρευστού μετατρέπεται σε θερμότητα. Ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής απαιτεί ο συντελεστής διάχυσης να είναι πάντα θετικός: η τριβή δεν μπορεί να παράγει ενέργεια εντός του διαφορικού όγκου.

Είδη ροής

Συμπιεστή και ασυμπιεστή ροή

Όλα τα ρευστά είναι συμπιεστά σε κάποιο βαθμό. Αλλαγές στην πίεση ή την θερμοκρασία έχουν ως αποτέλεσμα αλλαγές στην πυκνότητα. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις οι αλλαγές στην πίεση και την θερμοκρασία είναι τόσο μικρές, που οι αλλαγές στην πυκνότητα θεωρούνται μηδαμινές. Σ' αυτή την περίπτωση, η ροή μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ασυμπιεστή. Διαφορετικά πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι πιο γενικές εξισώσεις συμπιεσμένης ροής.

Μαθηματικά, η ασυμπιεστότητα εκφράζεται λέγοντας πως η πυκνότητα ρ , του ρευστού, δεν μεταβάλλεται καθώς το ρευστό κινείται εντός του πεδίου ροής. Δηλαδή:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Αυτός ο επιπρόσθετος περιορισμός απλοποιεί τις κύριες εξισώσεις, ειδικά στην περίπτωση που το ρευστό έχει σταθερή πυκνότητα.

Στρωτή και τυρβώδης ροή

Ως τυρβώδης χαρακτηρίζεται μια ροή με ανακυκλοφορία, δίνες και εμφανή τυχαιότητα. Ροή, στην οποία δεν παρατηρείται αναταραχή, ονομάζεται στρωτή. Θα πρέπει να σημειωθεί, όμως, πως η παρουσία δινών ή ανακυκλοφορίας από μόνες τους δεν δείχνουν απαραίτητα τυρβώδης ροή· αυτά τα φαινόμενα μπορεί να υπάρχουν και στην στρωτή ροή.

Οι τυρβώδης ροές μπορούν να περιγραφούν μέσω της χρήσης των εξισώσεων Navier – Stokes. Η άμεση αριθμητική προσομοίωση (DNS), βασιζόμενη στις εξισώσεις Navier – Stokes, καθιστά δυνατή την προσομοίωση τυρβώδους ροής με μικρό αριθμό Reynolds. Οι περιορισμοί εξαρτώνται από την υπολογιστική ισχύ και την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται για την λύση. Τα αποτελέσματα του DNS έχουν αποδειχθεί ακριβή μέσω πειραματικών δεδομένων για κάποιες ροές.

Οι περισσότερες ροές με τις οποίες ασχολούμαστε έχουν αριθμούς Reynolds πολύ υψηλούς για χρήση της μεθόδου DNS, δεδομένης της κατάστασης υπολογιστικής ισχύος που αναμένεται τις αμέσως επόμενες δεκαετίες. Οι Reynolds-averaged εξισώσεις Navier-Stokes (RANS) σε συνδυασμό με μέθοδο μοντελοποίησης τυρβώδους ροής αποτελούν τη βέλτιστη εναλλακτική λύση. Άλλη μια πολλά υποσχόμενη μεθοδολογία είναι Large Eddy Simulation (LES) και η Detached Eddy Simulation (DES) – η οποία είναι ένας συνδυασμός μοντελοποίησης RANS και LES.

Ο αριθμός Reynolds, ο οποίος είναι ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων ως προς τις δυνάμεις ιξώδους, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ν' αξιολογηθεί το κατά πόσο είναι κατάλληλες οι εξισώσεις για τυρβώδη ή στρωτή ροή σε ένα πρόβλημα και δίνεται από τον τύπο :

$$Re = \frac{\rho * U * D}{\mu} \quad \text{ή} \quad Re = \frac{U * D}{\nu}$$

όπου μ το δυναμικό ιξώδες και ν το κινηματικό.

Η ροή Stokes είναι ροή για πολύ χαμηλές τιμές Reynolds ($Re \ll 1$) στην οποία περίπτωση οι δυνάμεις αδράνειας είναι πολύ μικρές εν συγκρίσει με τις δυνάμεις ιξώδους.

Σε αντίθετη περίπτωση, υψηλές τιμές Reynolds δείχνουν πως οι δυνάμεις αδράνειας είναι πολύ μεγαλύτερες από τις δυνάμεις ιξώδους (τριβής).

Σε κάποια προβλήματα, όπως αυτά που περιλαμβάνουν στερεά όρια, μπορεί να απαιτούν να συμπεριλαμβάνεται η τριβή. Πολλές φορές, η τριβή δεν μπορεί να αμεληθεί κοντά σε στερεά όρια. Βάση της θεωρίας του οριακού στρώματος, ενώ η ταχύτητα του ρευστού μηδενίζεται πάνω στο στερεό όριο, ανακτά μία μικρή τιμή απείρως κοντά σε αυτό.

Γενικά, μια ροή μπορεί να χαρακτηριστεί ως στρωτή, μεταβαλλόμενη και τυρβώδης, ανάλογα με τον αριθμό Reynolds που τις αντιστοιχεί. Έτσι έχουμε :

Reynolds < 2000, Στρωτή ροή

2000 < Reynolds < 10000, μεταβαλλόμενη ροή

Reynolds > 10000, τυρβώδης ροή.

Σταθερή και χρονικά μεταβαλλόμενη ροή

Όταν όλες οι χρονικές μεταβλητές ενός πεδίου ροής εξαφανίζονται, η ροή θεωρείται σταθερή. Διαφορετικά, η ροή αποκαλείται χρονικά μεταβαλλόμενη.

Οι τυρβώδης ροές είναι εξ' ορισμού μη σταθερές. Μια τυρβώδης ροή, όμως, μπορεί να είναι στατιστικά σταθερή. Σύμφωνα με τον Pore:

Το τυχαίο πεδίο $U(x,t)$ είναι στατιστικά σταθερό αν όλα τα στατιστικά μένουν αμετάβλητα κάτω από την αλλαγή του χρόνου.

Με απλά λόγια, αυτό σημαίνει πως όλες οι στατιστικές ιδιότητες είναι σταθερές ως προς τον χρόνο. Συχνά, μας ενδιαφέρει το μέσο πεδίο, το οποίο είναι επίσης σταθερό σε μια στατιστικά σταθερή ροή.

Προσέγγιση προβλημάτων της ρευστοδυναμικής

Οι εξισώσεις της ρευστοδυναμικής, οι οποίες είναι γνωστές για πάνω από ένα αιώνα, λύνονται αναλυτικά μόνο για ένα περιορισμένο αριθμό ροών. Οι γνωστές αυτές λύσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την κατανόηση της ροής των ρευστών, όμως σπάνια μπορούν άμεσα να χρησιμοποιηθούν στην μηχανική ανάλυση ή το σχεδιασμό. Συνήθως χρησιμοποιούνται απλοποιημένες. Για παράδειγμα η οπισθέλκουσα δύναμη που ασκείται σε ένα αντικείμενο από την ροή ενός ρευστού, δίνεται από τον τύπο :

$$F_D = C_D S \rho v^2,$$

όπου S είναι η επιφάνεια του αντικειμένου με την οποία έρχεται σε επαφή με το ρευστό, v είναι η ταχύτητα ροής και ρ η πυκνότητα του ρευστού. Η παράμετρος C_D ονομάζεται συντελεστής οπισθέλκουσας. Είναι μια συνάρτηση των υπόλοιπων αδιάστατων παραμέτρων του προβλήματος και σχεδόν πάντα υπολογίζεται σε συνδυασμό με πειραματικά δεδομένα. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι αρκετά επιτυχής όταν το σύστημα

μπορεί να περιγραφεί από ένα ή δυο παραμέτρους , οπότε εφαρμογές με περίπλοκη γεωμετρία αποκλείονται.

Το πρόβλημα είναι ότι πολλά είδη ροών χρειάζονται αρκετές αδιάστατες παραμέτρους για τον ορισμό τους και ως αποτέλεσμα , πολλές φορές είναι αδύνατο να στηθεί ένα πείραμα το οποίο να δίνει αποτελέσματα στη σωστή κλίμακα. Παραδείγματα αποτελούν οι ροές στο σκελετό των αεροπλάνων και των πλοίων. Για να επιτευχθεί ο ίδιος αριθμός Reynolds με την χρήση μοντέλων σε κλίμακα, η ταχύτητα του ρευστού πρέπει να αυξηθεί. Για τα αεροπλάνα, αυτό μπορεί να δώσει πολύ μεγάλο αριθμό Mach αν χρησιμοποιηθεί το ίδιο ρευστό, οπότε πρέπει να βρεθεί ένα ρευστό το οποίο επιτρέπει την ταύτιση και των δυο παραμέτρων. Για τα πλοία , το πρόβλημα υπάρχει στην σύγκλιση των αριθμών Reynolds και Froude , η οποία είναι σχεδόν αδύνατη.

Σε άλλες περιπτώσεις , τα πειράματα είναι αρκετά δύσκολα έως αδύνατα. Για παράδειγμα, ο εξοπλισμός μετρήσεων μπορεί να διαταράξει την ροή. Κάποιες ποσότητες είναι απλά μη μετρήσιμες με την σημερινή τεχνολογία ή μετριοούνται με ανεπαρκή ακρίβεια.

Τα πειράματα είναι μια αποδοτική μέθοδος μέτρησης παραμέτρων , όπως η οπισθέλκουσα, η άνωση , η πτώση πίεσης ή οι συντελεστές μεταφοράς θερμότητας.

Η υπολογιστική ρευστοδυναμική (CFD), ξεκίνησε με την γένεση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Παρόλο που αρκετές θεμελιώδεις ιδέες για αριθμητικές μεθόδους , υπήρχαν για πάνω από ένα αιώνα ήδη, η χρησιμότητά τους ήταν περιορισμένη πριν την έλευση των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Όταν αναγνωρίστηκε η δύναμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών , το ενδιαφέρον για τις αριθμητικές μεθόδους αυξήθηκε κατακόρυφα. Η επίλυση των εξισώσεων της ρευστοδυναμικής έχει γίνει τόσο σημαντική που πλέον απασχολεί ένα μεγάλο ποσοστό όλων των ερευνητών στον τομέα αυτό και αυξάνεται συνεχώς.

Τι είναι το CFD

Οι ροές ρευστών , μπορούν να περιγραφούν από μερικές διαφορικές εξισώσεις , τις οποίες αναλύσαμε παραπάνω, οι οποίες δε μπορούν να λυθούν αναλυτικά , παρά μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Για να έχουμε μια προσεγγιστική αριθμητική λύση, πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος διακριτοποίησης , η οποία προσεγγίζει τις διαφορικές εξισώσεις με ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων , οι οποίες στη συνέχεια μπορούν να λυθούν αριθμητικά. Οι προσεγγίσεις αυτές εφαρμόζονται σε διακριτά σημεία στο χώρο ή και στον χρόνο. Η ακρίβεια των αριθμητικών αυτών αποτελεσμάτων, εξαρτάται από την ποιότητα και τη λεπτομέρεια της διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται.

Εφαρμογές της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής

Η μοντελοποίηση ροών μέσω CFD χρησιμοποιείται σε διάφορους τομείς. Κάποιες από τις κύριες βιομηχανίες που χρησιμοποιούν συχνά προσομοίωση μέσω CFD είναι: η αεροδυναμική/ αεροναυπηγική, η βιομηχανία των αυτοκινήτων, κτιριακών εγκαταστάσεων (θέρμανση, ψύξη, κλιματισμός), χημείας, παραγωγής ενέργειας, βιομηχανία πετρελαίου και φυσικού αερίου κτλ.

Πρακτικά πλεονεκτήματα χρησιμοποίησης CFD:

Οι πολλοί λόγοι που συμβουλευόμαστε την μοντελοποίηση μέσω CFD σε μεγάλο βαθμό σήμερα, έχουν ως εξής:

- Η μοντελοποίηση μέσω CFD προβλέπει συμπεριφορές προτού υιοθετηθούν ή εκτελεσθούν σε συστήματα
- Η μοντελοποίηση μέσω CFD μπορεί να προβλέψει ποιες αλλαγές είναι πιο απαραίτητες σε μια εγκατάσταση για να έχει αυξημένη απόδοση.
- Το μοντέλο CFD προσφέρει ακρίβεια και ακριβείς πληροφορίες σχετικά με τις σχεδιαστικές παραμέτρους ΘΨΚ συστημάτων.
- Η πρόοδος στην τεχνολογία συστημάτων κλιματισμού χρειάζεται περισσότερες και πιο λεπτομερείς πληροφορίες σχετικά με την ροή εντός μιας χρησιμοποιούμενης ζώνης, ενώ η μοντελοποίηση μέσω CFD είναι πιο αποδοτική.
- Η μοντελοποίηση μέσω CFD μειώνει το κόστος, τον χρόνο και μας προμηθεύει με πιο ασφαλή αποτελέσματα. Αυτός είναι ο λόγος που η αναφορά μοντελοποίησης μέσω CFD θεωρείται πιο αξιόπιστη.

Στοιχεία αριθμητικής μεθόδου

Οι κοινές διαφορικές εξισώσεις συναντώνται συχνά ως μαθηματικά μοντέλα σε πολλούς τομείς της επιστήμης και της μηχανικής. Συνήθως όμως οι εξισώσεις αυτές δεν έχουν λύσεις κλειστής μορφής, οπότε αποτελεί κοινή πρακτική η αναζήτηση προσεγγιστικών λύσεων με αριθμητικές μεθόδους. Στις μέρες μας κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί με πολύ μικρό κόστος και μεγάλη ακρίβεια.

Μαθηματικό μοντέλο

Το αρχικό σημείο οποιασδήποτε αριθμητικής μεθόδου είναι το μαθηματικό μοντέλο, για παράδειγμα ένα σύνολο μερικώς διαφορικών εξισώσεων και συνοριακών συνθηκών. Μπορούμε να επιλέξουμε την κατάλληλη μέθοδο ανάλογα την εφαρμογή (ασυμπίεστη, στρωτή, τυρβώδης, δισδιάστατη ή τρισδιάστατη κ.τ.λ.). Αυτό το μοντέλο μπορεί να περιλαμβάνει απλοποιήσεις από τους αναλυτικούς νόμους διατήρησης.

Μέθοδος διακριτοποίησης

Μετά την επιλογή του μαθηματικού μοντέλου, πρέπει να επιλεγεί η κατάλληλη μέθοδος διακριτοποίησης. Για παράδειγμα οι διαφορικές εξισώσεις ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων με τις μεταβλητές σε κάποιο είδος πλέγματος στο χώρο. Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις, αλλά οι πιο σημαντικές μέθοδοι είναι οι ακόλουθες: Πεπερασμένων Διαφορών (FD), Πεπερασμένων Όγκων (FV) και Πεπερασμένων Στοιχείων (FE).

Συστήματα συντεταγμένων

Οι εξισώσεις διατήρησης μπορούν να γραφούν με διάφορες μορφές, ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα, κάποιος μπορεί να διαλέξει το καρτεσιανό, κυλινδρικό, σφαιρικό, καμπύλο ορθογώνιο ή μη ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, το οποίο μπορεί να είναι σταθερό ή κινητό. Η επιλογή κυρίως εξαρτάται από την γεωμετρία του χωρίου, τη μέθοδο διακριτοποίησης και το είδος του πλέγματος που χρησιμοποιείται.

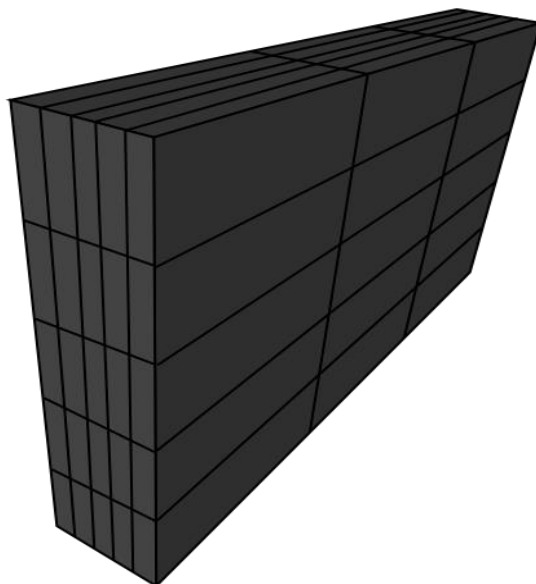
Αριθμητικό πλέγμα

Οι διακριτές θέσεις στις οποίες θα υπολογιστούν οι μεταβλητές ορίζονται από το αριθμητικό πλέγμα, το οποίο στην ουσία είναι μια διακριτή αναπαράσταση του γεωμετρικού χωρίου στον οποίο θα επιλυθεί το πρόβλημα.

- Δομημένο (κανονικό) πλέγμα

Το δομημένο πλέγμα αποτελείται από ομάδες γραμμών, με την ιδιότητα ότι οι γραμμές μιας ομάδας δεν συμπίπτουν μεταξύ τους, ενώ συμπίπτουν με τις γραμμές άλλων ομάδων μόνο μια φορά. Αυτό επιτρέπει στις γραμμές μιας ομάδας να αριθμηθούν διαδοχικά. Η θέση οποιουδήποτε σημείου στο πλέγμα μέσα στον τομέα μας έχει μοναδική ταυτότητα, με ένα σετ από δυο (σε δισδιάστατο πλέγμα) ή τριών (σε τρισδιάστατο πλέγμα) δεικτών.

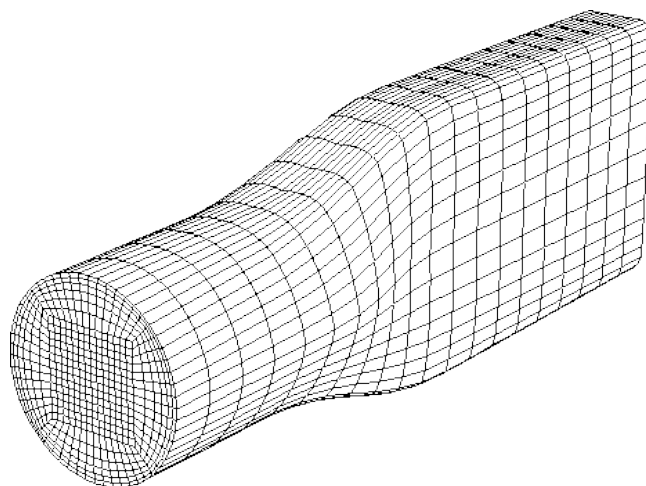
Αυτή πρόκειται για την απλούστερη δομή πλέγματος, αφού είναι λογικά ισοδύναμη με ένα καρτεσιανό πλέγμα. Επίσης ο πίνακας των αλγεβρικών εξισώσεων έχει μια συνηθισμένη δομή, η οποία μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη μιας τεχνικής επίλυσης. Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός επιλυτών οι οποίοι χρησιμοποιούν μονάχα τα πλέγματα αυτά. Το μειονέκτημα των δομημένων πλεγμάτων είναι ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν μονάχα σε απλούς γεωμετρικά τομείς. Άλλο ένα μειονέκτημά τους είναι η δυσκολία του ελέγχου της κατανομής των σημείων του πλέγματος. Η συγκέντρωση των σημείων σε μια περιοχή για λόγους ακριβείας έχει ως αποτέλεσμα την μη αναγκαία συγκέντρωσή τους και σε άλλα σημεία του πλέγματος, το οποίο αποτελεί σπατάλη πόρων. Το πρόβλημα αυτό είναι ιδιαίτερα αισθητό σε τρισδιάστατα πλέγματα, όπου τα κελιά τα οποία είναι μακριά και λεπτά, μπορούν να επηρεάσουν αρνητικά τη σύγκλιση.



Παράδειγμα τρισδιάστατου δομημένου πλέγματος

- Δομημένο μπλοκ πλέγμα

Σε ένα δομημένο μπλοκ πλέγμα, υπάρχουν δυο ή περισσότερα επίπεδα υποδιαίρεσης του τομέα λύσης. Στο πρώτο επίπεδο, υπάρχουν μπλοκ τα οποία αποτελούν σχετικά μεγάλα κομμάτια του τομέα, η δομή τους μπορεί να είναι αλλόκοτη και υπάρχει πιθανότητα να μην επικαλύπτονται. Στο δεύτερο επίπεδο (εσωτερικά του κάθε μπλοκ) ορίζεται ένα δομημένο πλέγμα. Ειδική μεταχείριση είναι απαραίτητη στα μπλοκ.

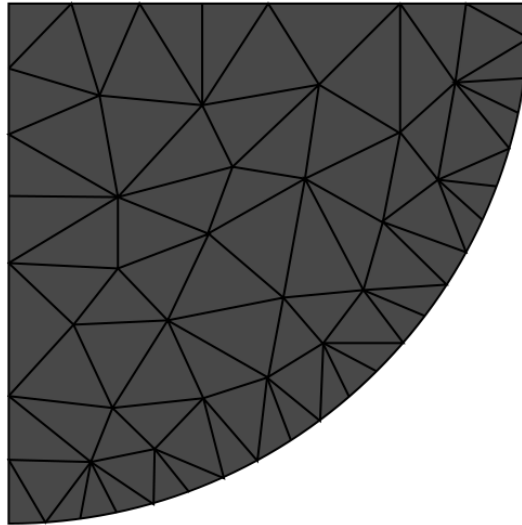


Παράδειγμα δομημένου μπλοκ πλέγματος

- Μη δομημένα πλέγματα

Για προβλήματα πολύπλοκης γεωμετρίας, ο πιο ευέλικτος τύπος πλέγματος είναι αυτός ο οποίος ταιριάζει σ' ένα αυθαίρετο οριακό τομέα λύσης. Τέτοια πλέγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μεθόδους πεπερασμένων όγκων και πεπερασμένων στοιχείων. Τα στοιχεία μπορούν να έχουν

οποιοδήποτε σχήμα και δεν υπάρχει περιορισμός όσον αφορά τον αριθμό τους. Στην πράξη , πλέγματα αποτελούμενα από τρίγωνα ή τετράπλευρα σε δυο διαστάσεις , τετράεδρα και εξάεδρα σε τρεις διαστάσεις είναι αυτά που χρησιμοποιούνται περισσότερο. Τέτοια πλέγματα μπορούν να δημιουργηθούν αυτόματα από υπάρχοντες αλγορίθμους. Εάν είναι επιθυμητό το πλέγμα μπορεί να γίνει ορθογώνιο, η αναλογία του οποίου καθορίζεται εύκολα και μπορεί επίσης εύκολα να βελτιστοποιηθεί τοπικά. Το πλεονέκτημα της ευελιξίας αντισταθμίζεται από το μειονέκτημα της μη κανονικότητας της δομής του πλέγματος. Οι τοποθεσίες των κόμβων και οι γειτονικές συνδέσεις πρέπει να οριστούν με ακρίβεια. Ο πίνακας του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων δεν έχει πλέον κανονική , διαγώνια δομή , το εύρος ζώνης πρέπει να μειωθεί, κάνοντας ανακατανομή των σημείων.



Παράδειγμα μη δομημένου πλέγματος

Μέθοδος επίλυσης

Η διακριτοποίηση αποφέρει ένα μεγάλο αριθμό γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η μέθοδος επίλυσης εξαρτάται από το πρόβλημα. Για μη στρωτές ροές, μέθοδοι βασισμένες σε αυτές που χρησιμοποιούνται για προβλήματα αρχικής τιμής για συνήθους διαφορικές εξισώσεις. Σε κάθε χρονικό βήμα πρέπει να λυθεί ένα ελλειπτικό πρόβλημα.

Κριτήρια σύγκλισης

Σαν τελευταίο βήμα , είναι απαραίτητο να οριστούν τα κριτήρια σύγκλισης για την επαναληπτική μέθοδο. Συνήθως , υπάρχουν δυο επίπεδα επαναλήψεων, οι εσωτερικές επαναλήψεις , στις οποίες λύνονται οι γραμμικές εξισώσεις και οι εξωτερικές επαναλήψεις οι οποίες ασχολούνται με την μη γραμμικοποίηση και την σύζευξη των εξισώσεων. Η απόφαση για το που θα τερματιστούν οι επαναλήψεις σε κάθε επίπεδο είναι ιδιαίτερα σημαντική από πλευράς ακρίβειας και αποδοτικότητας.

Ιδιότητες μεθόδων αριθμητικής επίλυσης

Η μέθοδος επίλυσης εμπεριέχει κάποιες ιδιότητες. Στις περισσότερες περιπτώσεις, δεν είναι δυνατό να αναλυθεί πλήρως η μέθοδος επίλυσης. Γίνεται ανάλυση των στοιχείων της μεθόδου και αν τα στοιχεία δε διαθέτουν τις επιθυμητές ιδιότητες, το ίδιο θα ισχύει και για την τελική μέθοδο. Το αντίθετο όμως δεν είναι απαραίτητα σωστό.

Συνέπεια

Η διακριτοποίηση θα πρέπει να γίνει ακριβής όταν τα διαστήματα του πλέγματος τείνουν στο μηδέν. Η διαφορά μεταξύ της διακριτής εξίσωσης και της αναλυτικής, ονομάζεται σφάλμα αποκοπής. Για την συνέπεια μιας μεθόδου, το σφάλμα αποκοπής πρέπει να μηδενιστεί όταν τα διαστήματα του πλέγματος και τα χρονικά διαστήματα τείνουν στο μηδέν. Το σφάλμα αποκοπής, είναι συνήθως ανάλογο της δύναμης του διαστήματος του πλέγματος και του χρονικού βήματός του. Αν ο ποιο σημαντικός όρος είναι ανάλογος του $(\Delta x)^n$ ή του $(\Delta t)^n$, τότε η μέθοδος αυτή, ονομάζεται προσέγγιση νιοστής τάξης. Ιδανικά, όλοι οι όροι πρέπει να διακριτοποιούνται με προσεγγίσεις της ίδιας τάξης ακρίβειας, όμως, μερικοί όροι (π.χ. όροι συναγωγής σε ροές με μεγάλο αριθμό Reynolds ή όροι διάχυσης σε ροές με μικρό αριθμό Reynolds) μπορεί να είναι κυρίαρχοι σε μια συγκεκριμένη ροή και ίσως να χρειάζονται περισσότερη ακρίβεια, σε σχέση με τους υπόλοιπους.

Ακόμη και αν οι προσεγγίσεις όμως είναι σταθερές, αυτό δεν συνεπάγεται ότι και η λύση του συστήματος των διακριτών εξισώσεων θα είναι η ακριβής λύση του διαφορικού συστήματος.

Ευστάθεια

Μια μέθοδος αριθμητικής λύσης θεωρείται ευσταθής αν δεν μεγαθύνει τα λάθη που εμφανίζονται στην πορεία της μαθηματικής λύσης. Για επαναληπτικές μεθόδους, ευσταθής μέθοδος θεωρείται αυτή που δεν αποκλίνει. Η ευστάθεια μπορεί να είναι δύσκολο να ερευνηθεί, ειδικά με την ύπαρξη συντομικών και μη γραμμικής συμπεριφοράς. Γι' αυτό το λόγο, είναι σύνηθες η αξιολόγηση της ευσταθείας μιας μεθόδου για γραμμικά προβλήματα με σταθερούς συντελεστές χωρίς συντομικές συνθήκες. Η εμπειρία δείχνει ότι τ' αποτελέσματα που λαμβάνονται μ' αυτό τον τρόπο, είναι συχνά εφαρμόσιμα σε πιο πολύπλοκα προβλήματα, αλλά υπάρχουν αξιοσημείωτες εξαιρέσεις.

Σύγκλιση

Μια αριθμητική μέθοδος θεωρείται πως συγκλίνει, εάν η λύση των διακριτοποιημένων εξισώσεων τείνει στην αναλυτική λύση καθώς το διάκενο του πλέγματος τείνει στο μηδέν. Όπως είναι φανερό, ένα σταθερό σύστημα δεν είναι χρήσιμο, παρά μόνο αν η μέθοδος λύσης συγκλίνει.

Για μη γραμμικά προβλήματα, τα οποία επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από τις συντομικές συνθήκες, η ευστάθεια και η σύγκλιση μιας μεθόδου, είναι δύσκολο ν' αποδειχθούν. Γι' αυτό το λόγο, η ευστάθεια συνήθως ελέγχεται με τη χρήση αριθμητικών πειραμάτων, για παράδειγμα επανάληψη του υπολογισμού σε μια σειρά από επιτυχώς πυκνωμένων πλεγμάτων. Αν η μέθοδος είναι ευσταθής και όλες οι

χρησιμοποιούμενες προσεγγίσεις στην διαδικασία διακριτοποίησης είναι ευσταθής, συνήθως βρίσκουμε πως η λύση συγκλίνει σε μια λύση ανεξάρτητου πλέγματος.

Διατήρηση

Εφόσον οι προς λύση εξισώσεις είναι νόμοι διατήρησης, το αριθμητικό σύστημα θα πρέπει επίσης – τόσο σε τοπική, όσο και ολική βάση – να σέβεται αυτούς τους νόμους. Αυτό σημαίνει πως σε σταθερή κατάσταση, όταν υπάρχει έλλειψη πηγών, το σύνολο της διατηρημένης ποσότητας που εξέρχεται από έναν κλειστό όγκο, είναι ίση με την ποσότητα που εισέρχεται στον συγκεκριμένο όγκο. Εάν χρησιμοποιείται μια ισχυρή μορφή εξισώσεων διατήρησης και μια μέθοδος πεπερασμένου όγκου, είναι εγγυημένο για κάθε ξεχωριστό διαφορικό όγκο και για κάθε λύση χωρίου σαν ένα σύνολο.

Αυτή είναι μια σημαντική ιδιότητα της μεθόδου επίλυσης, δεδομένου ότι επιβάλλει έναν περιορισμό στο σφάλμα της λύσης. Αν η διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας είναι δεδομένη, το σφάλμα μπορεί μόνο να διανείμει αυτές τις ποσότητες μέσα στον τομέα λύσης. Σχήματα μη διατήρησης μπορούν να παράγουν τεχνικές πηγές και βυθίσεις, αλλάζοντας την ισορροπία, τόσο σε τοπικό, όσο και ολικό επίπεδο. Ωστόσο σχήματα μη διατήρησης μπορεί να είναι συνεχή και σταθερά και γι' αυτό το λόγο, να οδηγούν σε σωστές λύσεις εντός του ορίου ενός πολύ λεπτού πλέγματος. Τα σφάλματα λόγω μη διατήρησης είναι στις περισσότερες περιπτώσεις αισθητά μόνο σε σχετικά αραιά πλέγματα. Το πρόβλημα είναι πως είναι δύσκολο να γνωρίζουμε σε ποιο πλέγμα είναι αρκετά μικρά αυτά τα λάθη. Ως εκ τούτου, προτιμούνται τα συστήματα διατήρησης.

Φραγή

Οι αριθμητικές λύσεις θα πρέπει να βρίσκονται εντός κατάλληλων ορίων. Φυσικά μη αρνητικές ποσότητες (όπως η πυκνότητα και η κινητική ενέργεια της τύρβης) πρέπει να θεωρούνται πάντα θετικές. Άλλες ποσότητες, όπως η συγκέντρωση μιας μεταβλητής, πρέπει να βρίσκεται μεταξύ του 0% και του 100%. Κατά την απουσία πηγών, κάποιες εξισώσεις (όπως η εξίσωση της θερμότητας για την θερμοκρασία όταν δεν υπάρχουν πηγές θερμότητας) απαιτούν οι ελάχιστες και οι μέγιστες τιμές της μεταβλητής να είναι εντός των ορίων του χωρίου.

Η φραγή του αριθμητικού σχήματος είναι δύσκολο να εξασφαλιστεί. Όλα τα συστήματα ανώτερης τάξης μπορούν να παράγουν μη φραγμένες λύσεις. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν τα πλέγματα είναι τόσο αραιά, ώστε μια λύση που εμφανίζει ακρότατα τιμών, είναι συνήθως μια ένδειξη ότι τα σφάλματα της λύσης είναι μεγάλα και το πλέγμα χρειάζεται κάποια βελτίωση (τουλάχιστον τοπικά). Το πρόβλημα είναι πως αυτά τα συστήματα, τα οποία είναι επιρρεπή στο να παράγουν μη φραγμένες λύσεις, μπορεί να έχουν προβλήματα ευστάθειας και σύγκλισης. Αυτές οι μέθοδοι, θα πρέπει να αποφεύγονται εάν είναι δυνατόν.

Ακρίβεια

Οι αριθμητικές λύσεις των προβλημάτων ροής και μεταφοράς θερμότητας είναι προσεγγιστικές λύσεις. Πέρα από τυχόν σφάλματα κατά την ανάπτυξη του αλγόριθμου επίλυσης, στον προγραμματισμό ή κατά τον ορισμό των συνοριακών συνθηκών, οι αριθμητικές λύσεις πάντοτε περιλαμβάνουν τριών ειδών λάθη :

- Σχεδιαστικά σφάλματα, τα οποία ορίζονται ως η διαφορά μεταξύ της πραγματικής ροής και της ακριβής λύσης του μαθηματικού μοντέλου
- Σφάλματα διακριτοποίησης, τα οποία ορίζονται ως η διαφορά μεταξύ της ακριβής λύσης των εξισώσεων διατήρησης και την ακριβή λύση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων
- Επαναληπτικά σφάλματα, τα οποία ορίζονται ως η διαφορά μεταξύ των επαναληπτικών λύσεων και της ακριβής λύσης του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων.

Κρίνεται απαραίτητη η γνώση των λαθών αυτών και ακόμη περισσότερο η διαφοροποίηση μεταξύ τους. Τα διάφορα σφάλματα σ' ένα πρόβλημα μπορεί να αλληλοεξουδετεροθούν, έτσι ώστε μερικές φορές, μια λύση που προέκυψε από ένα χοντρό πλέγμα, μπορεί να συμφωνεί περισσότερο με τα πειραματικά δεδομένα, από μια λύση που προήλθε από ένα πιο λεπτομερές πλέγμα, το οποίο εξ ορισμού έχει μεγαλύτερη ακρίβεια.

Ο απώτερος στόχος μιας λύσης θα πρέπει να είναι η επίτευξη της επιθυμητής ακρίβειας με όσο το δυνατό λιγότερο κόπο ή η επίτευξη της μέγιστης δυνατής ακρίβειας με τους διαθέσιμους πόρους.

Μέθοδοι διακριτοποίησης

Στα μαθηματικά, διακριτοποίηση ονομάζεται η μεταφορά συνεχών μοντέλων και εξισώσεων σε διακριτά υπομεγέθη. Αυτή η διαδικασία είναι συνήθως το πρώτο βήμα ώστε αυτά να γίνουν κατάλληλα για αριθμητική ανάλυση και επεξεργασία σε υπολογιστή. Ακολουθούν παρακάτω οι κυριότερες μέθοδοι διακριτοποίησης.

Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

Αυτή είναι η παλαιότερη μέθοδος για την αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ), που πιστεύεται πως έχει εισαχθεί από τον Euler τον δέκατο όγδοο αιώνα. Είναι επίσης η ευκολότερη μέθοδος για χρήση σε απλές γεωμετρίες.

Το σημείο εκκίνησης είναι η εξίσωση διατήρησης σε διαφορική μορφή. Το χωρίο διακριτοποιείται με ένα πλέγμα. Για κάθε σημείο του πλέγματος, η διαφορική εξίσωση αντικαθίσταται κατά προσέγγιση από μερικές παραγώγους μέσω προσεγγίσεων, σε σχέση με τις κομβικές τιμές των συναρτήσεων. Το αποτέλεσμα είναι μια αλγεβρική εξίσωση για κάθε κόμβο του πλέγματος, στους οποίους η μεταβλητή τιμή και ο ακριβής αριθμός των γειτονικών κόμβων εμφανίζονται ως άγνωστοι.

Θεωρούμε πως η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε τύπο πλέγματος. Ωστόσο, στην πράξη έχει εφαρμοστεί μόνο σε δομημένα πλέγματα. Οι γραμμές πλέγματος χρησιμεύουν ως τοπικές γραμμές συντεταγμένων.

Για δομημένα πλέγματα, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών είναι πολύ απλή και αποτελεσματική. Είναι ιδιαίτερα απλό να δημιουργηθούν σχήματα ανώτερης τάξης από κανονικά πλέγματα. Το μειονέκτημα των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών είναι ότι η διατήρηση δεν επιβάλλεται, εκτός αν έχει ληφθεί ειδική μέριμνα. Επίσης, ο περιορισμός σε απλές γεωμετρίες είναι σημαντικό μειονέκτημα σε πολύπλοκες ροές.

Μέθοδος πεπερασμένων όγκων

Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων χρησιμοποιεί την ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων διατήρησης ως σημείο εκκίνησης. Το χωρίο λύσης υποδιαιρείται σ' έναν πεπερασμένο αριθμό διαφορικών όγκων (Δ.Ο.) και οι εξισώσεις διατήρησης που εφαρμόζονται σε κάθε Δ.Ο.. Στο κέντρο βάρους κάθε Δ.Ο. βρίσκεται ένας υπολογιστικός κόμβος, στον οποίο μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών. Η παρεμβολή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει τιμές στην επιφάνεια του όγκου σε σχέση με τις κομβικές (κέντρο Δ.Ο.) τιμές. Τα ολοκληρώματα της επιφάνειας και του όγκου προσεγγίζονται με τη χρήση κατάλληλων τύπων τετραγωνισμού. Ως αποτέλεσμα, κάποιος αποκτά μια αλγεβρική εξίσωση για κάθε Δ.Ο.), στην οποία εμφανίζεται ένας αριθμός τιμών γειτονικών κόμβων.

Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε είδος πλέγματος, έτσι είναι κατάλληλο για πολύπλοκες γεωμετρίες. Το πλέγμα καθορίζει μόνο τα όρια του διαφορικού όγκου και δεν χρειάζεται να σχετίζεται μ' ένα σύστημα συντεταγμένων. Η μέθοδος είναι συντηρητική εκ κατασκευής.

Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων είναι ίσως η πιο απλή στην κατανόηση και στον προγραμματισμό. Όλοι οι όροι που χρειάζεται να προσεγγιστούν έχουν φυσική σημασία και γι' αυτό είναι δημοφιλείς με τους μηχανικούς.

Το μειονέκτημα των μεθόδων πεπερασμένων όγκων σε σχέση με τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών είναι ότι τα σχήματα μεγαλύτερων τάξεων από τη δεύτερη είναι πιο δύσκολο ν' αναπτυχθούν σε τρισδιάστατη μορφή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος πεπερασμένων όγκων απαιτεί τρία επίπεδα προσέγγισης: παρεμβολή, διαφοροποίηση και ολοκλήρωση.

Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Π.Σ.) έχει πολλές ομοιότητες με την μέθοδο πεπερασμένων όγκων. Το χωρίο διακριτοποιείται σ' ένα σύνολο διακριτών όγκων ή πεπερασμένων στοιχείων που είναι γενικά μη δομημένα σε δισδιάστατη μορφή, είναι συνήθως τρίγωνα ή τετράπλευρα, ενώ σε τρισδιάστατη μορφή τετράεδρα ή εξάεδρα, τα οποία χρησιμοποιούνται συχνότερα. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων είναι ότι οι εξισώσεις πολλαπλασιάζονται με μια συνάρτηση βάρους πριν ενσωματωθούν σε ολόκληρο το χωρίο. Στις πιο απλές μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, η λύση προσεγγίζεται από μια συνάρτηση γραμμικού σχήματος μέσα σε κάθε στοιχείο με τέτοιο τρόπο, ώστε να εγγυάται την συνέχεια της λύσης πέρα από τα όρια των στοιχείων. Μια τέτοια λειτουργία μπορεί να κατασκευαστεί από τις τιμές στις γωνίες των στοιχείων. Η συνάρτηση βάρους είναι συνήθως της ίδιας μορφής.

Αυτή η προσέγγιση αντικαθίσταται στη συνέχεια εντός τους σταθμισμένου ολοκληρώματος του νόμου διατήρησης και οι προς λύση εξισώσεις προέρχονται με την παραγωγή του ολοκληρώματος, ώστε η κάθε κομβική τιμή να είναι μηδέν. Αυτό αντιστοιχεί στην επιλογή της βέλτιστης λύσης μέσα στο σύνολο των επιτρεπόμενων λειτουργιών (αυτή με το ελάχιστο υπόλοιπο). Το αποτέλεσμα είναι ένα σύνολο μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων είναι η ικανότητα για την αντιμετώπιση αυθαίρετων συναρτήσεων. Η πύκνωση του πλέγματος είναι εύκολη, καθώς κάθε στοιχείο απλά υποδιαιρείται. Οι μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων είναι σχετικά εύκολο ν' αναλυθούν μαθηματικά και μπορεί να έχουν άριστες ιδιότητες για ορισμένους τύπους εξισώσεων. Το κύριο μειονέκτημα, το οποίο είναι κοινό για κάθε μέθοδο που χρησιμοποιεί μη δομημένα πλέγματα, είναι ότι οι πίνακες των

γραμμικοποιημένων εξισώσεων δεν είναι καλά δομημένοι όπως αυτοί για κανονικά πλέγματα, κάτι που δυσκολεύει την εύρεση αποτελεσματικών μεθόδων λύσης.

Συνοριακές συνθήκες

Ίσως το σημαντικότερο μέρος κάθε προβλήματος υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD) είναι ο ορισμός των συνοριακών του συνθηκών. Ως εκ τούτου, απαιτείται ο χρήστης να κατανοεί και να χρησιμοποιεί τις συνοριακές συνθήκες σωστά, με σύνεση και αποτελεσματικότητα, αλλά και ν' αντιλαμβάνεται το ρόλο τους στον αριθμητικό αλγόριθμο. Εάν οι συνοριακές συνθήκες δεν έχουν καθοριστεί σωστά, τότε η λύση θα μπορούσε να οδηγήσει σε σφάλματα και αν δεν χρησιμοποιούνται με σύνεση, τότε ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος μπορεί να αυξηθεί κατά πολύ. Παροδικά προβλήματα απαιτούν ένα ακόμη πράγμα, δηλαδή, αρχικές συνθήκες, όπου οι αρχικές τιμές των μεταβλητών ροής ορίζονται στους κόμβους του πεδίου ροής. Οι διάφοροι τύποι των συνοριακών συνθηκών που χρησιμοποιούνται σε CFD για διαφορετικές συνθήκες και σκοπούς, αναφέρονται παρακάτω.

Συνοριακές συνθήκες εισόδου

Σε συνοριακές συνθήκες εισόδου, η κατανομή όλων των μεταβλητών ροής πρέπει να καθορίζονται στα όρια της εισόδου, κυρίως η ταχύτητα. Αυτού του είδους οι οριακές συνθήκες είναι κοινές και καθορίζονται ως επί το πλείστον όπου είναι γνωστή η ταχύτητα εισόδου.

Συνοριακές συνθήκες εξόδου

Σε συνοριακές συνθήκες εξόδου, η κατανομή των μεταβλητών ροής πρέπει να καθορίζονται στα όρια της εξόδου, κυρίως η ταχύτητα. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως σύνδεση με τις συνοριακές συνθήκες εισόδου. Αυτού του είδους οι συνοριακές συνθήκες είναι κοινές και καθορίζονται κυρίως όπου είναι γνωστή η ταχύτητα εξόδου. Η ταχύτητα διατηρεί μια πλήρως ανεπτυγμένη ροή, όπου δεν συμβαίνει καμία αλλαγή στην κατεύθυνση της ροής, όταν η έξοδος επιλεγεί σε μεγάλη απόσταση από τις γεωμετρικές διαταραχές. Σε μια τέτοια περιοχή, μια έξοδος θα μπορούσε να περιγραφεί και η κλίση όλων των μεταβλητών θα ισοδυναμούσε με μηδέν στην κατεύθυνση της ροής, εκτός από την πίεση.

Συνοριακές συνθήκες τοιχωμάτων

Το πιο κοινό όριο που εμφανίζεται σε προβλήματα καθορισμένης ροής είναι το τοίχωμα. Αυτή η συνοριακή συνθήκη είναι γνωστή και ως συνοριακή συνθήκη μη ολίσθησης και είναι η κατάλληλη συνθήκη για τις συνιστώσες ταχύτητας στο τοίχωμα. Η κανονική συνιστώσα θα μπορούσε να ορισθεί ως μηδέν απευθείας, ενώ η εφαπτομενική συνιστώσα να ορισθεί ως η ταχύτητα του τοιχώματος.

$$V_{normal} = 0$$

$$V_{tangential} = V_{wall}$$

Η μεταφορά θερμότητας μέσω του τοιχώματος μπορεί να καθοριστεί ή αν τα τοιχώματα θεωρούνται αδιαβατικά, τότε η μεταφορά της θερμότητας κατά μήκος του τοιχώματος ορίζεται ως μηδενική.

$$Q_{AdiabaticWalls} = 0$$

Συνοριακές συνθήκες σταθερής πίεσης

Αυτού του είδους η συνοριακή συνθήκη χρησιμοποιείται όπου οι συνοριακές τιμές πίεσης είναι γνωστές και οι ακριβείς λεπτομέρειες της κατανομής της ροής είναι άγνωστες. Αυτό περιλαμβάνει κυρίως τις συνθήκες εισόδου και εξόδου. Τυπικά παραδείγματα που χρησιμοποιούν αυτή την συνοριακή συνθήκη, περιλαμβάνουν ροές με άνωση, εσωτερικές ροές με πολλαπλές εξόδους, ροές ελεύθερης επιφάνειας και εξωτερικές ροές γύρω από αντικείμενα. Ένα παράδειγμα μπορεί να είναι η ροή εξόδου στην ατμόσφαιρα, όπου η πίεση είναι ατμοσφαιρική.

Συνοριακές συνθήκες συμμετρικές ως προς τον άξονα

Σ' αυτή την συνοριακή συνθήκη, το μοντέλο είναι συμμετρικό κατά μήκος του κεντρικού άξονα, έτσι ώστε όλες οι φυσικές διαδικασίες σ' ένα συγκεκριμένο R, σε όλα τα θ και σε κάθε κομμάτι του Z, έχει την ίδια τιμή και κατανομή. Ένα παράδειγμα μπορεί να είναι μια ροή σ' ένα σωλήνα, όπου η ροή είναι συμμετρική ως προς το μήκος του κεντρικού άξονα του σωλήνα.

$$V_r(\theta) = Constant$$

Συμμετρική συνοριακή συνθήκη

Σ' αυτή την συνοριακή συνθήκη, γίνεται δεκτό ότι ισχύουν οι ίδιες φυσικές διεργασίες και στις δύο πλευρές του ορίου. Όλες οι μεταβλητές έχουν την ίδια τιμή και οι κλίσεις έχουν την ίδια απόσταση από το όριο. Το όριο λειτουργεί σαν καθρέφτης που αντανακλά όλη την κατανομή ροής στην άλλη πλευρά. Οι περιορισμοί στην συμμετρική συνοριακή συνθήκη είναι:

- Μη ύπαρξη ροής ενδιάμεσα του ορίου
- Μη ύπαρξη βαθμωτής ροής ενδιάμεσα του ορίου

Ένα παράδειγμα είναι ένας σωλήνας ροής μ' ένα συμμετρικό εμπόδιο στη ροή. Το εμπόδιο χωρίζει τη ροή σε ανώτερη και κατώτερη, καθιστώντας την καθρεπτιζόμενη ροή.

Περιοδική ή κυκλική συνοριακή συνθήκη

Η περιοδική ή κυκλική συνοριακή συνθήκη προκύπτει από ένα διαφορετικό είδος συμμετρίας σ' ένα πρόβλημα. Αν ένα συστατικό έχει ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο στην κατανομή ροής, πάνω από δύο φορές, παραβιάζει τις απαιτήσεις για συμμετρική οριακή συνθήκη. Ένα παράδειγμα είναι μια αντλία πτερυγίων, όπου η επιλεγμένη περιοχή

επαναλαμβάνεται τέσσερις φορές σε συντεταγμένες $r - \theta$. Οι κυκλικά συμμετρικές περιοχές θα πρέπει να έχουν κοινές μεταβλητές ροής και κοινή κατανομή και θα πρέπει τα προηγούμενα να ισχύουν για κάθε κομμάτι του Z.

Μέθοδοι επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων

Το κοινό χαρακτηριστικό όλων των μεθόδων διακριτοποίησης, είναι ότι οδηγούν σ'ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων το οποίο πρέπει να επιλυθεί.

Το σύστημα των εξισώσεων μπορεί να είναι γραμμικό ή μη γραμμικό, ανάλογα με την μέθοδο διακριτοποίησης και τις εξισώσεις που χρησιμοποιούνται. Υπάρχει η επιλογή να χρησιμοποιηθούν κοινές μέθοδοι επίλυσης, όπως η αντιστροφή του πίνακα των αλγεβρικών εξισώσεων. Όμως, τα προβλήματα ροής μπορούν να περιέχουν πολύ μεγάλο αριθμό σημείων πλέγματος, καθιστώντας τους άμεσους επιλυτές εξισώσεων, μη πρακτικούς. Ακολουθεί ένα παράδειγμα, όπου τα x υποδηλώνουν μη μηδενικούς όρους.

$$\begin{bmatrix} x & & & & & & & & & \\ x & x & & & & & & & & \\ & x & x & & & & & & & \\ & & x & x & & & & & & \\ & & & x & x & x & & & & \\ & & & & x & x & x & & & \\ & & & & & x & x & x & & \\ & & & & & & x & x & x & \\ & & & & & & & x & x & \end{bmatrix}$$

Συγκεκριμένα, για μεγάλα προβλήματα τα οποία μπορούν να περιέχουν εκατομμύρια σημεία πλέγματος, η μέθοδος αυτή δεν είναι πρακτική όσον αφορά τον υπολογιστικό χρόνο και την αποθήκευση. Το πρόβλημα της αποθήκευσης μπορεί να ξεπεραστεί, αναγνωρίζοντας ότι ο πίνακας είναι ταινιωτός και διαλέγοντας έπειτα μια κατάλληλη στρατηγική αποθήκευσης, όμως οι απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ για την αντιστροφή, παραμένουν μεγάλες.

Οι απαιτήσεις σε αποθήκευση γίνονται ακόμη μεγαλύτερες εάν ένα μη δομημένο πλέγμα χρησιμοποιηθεί με μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων ή πεπερασμένου όγκου. Σε αυτή την περίπτωση, εξ αιτίας του τυχαίου διαμερισμού, ο πίνακας των εξισώσεων θα είναι αραιός.

$$\begin{bmatrix} x & & & x & & & & & & & x & & & & & & & & & \\ x & x & & & & & & & & & x & & & & & & & & & \\ & x & & & & & & & & & & & & & & & & & & x \\ & & x & x & x & & & & & & & & & & & & & & \\ x & & & x & & & & & x & & & & & & & & & & \\ & & x & & & & & & x & x & & & & & & & & & \\ & x & & x & & & & & x & x & x & & & & & & & & \\ x & & & & & & & & & x & x & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται εναλλακτικές προσεγγίσεις επίλυσης.

Μη γραμμικά συστήματα

Οι όροι συναγωγής στις εξισώσεις της ροής, οδηγούν σε μη γραμμικά συστήματα όπου ο πίνακας είναι συνάρτηση των μεταβλητών της ροής, όπως φαίνεται από την παρακάτω εξίσωση.

$$[A(x)]\{x\} = \{B\}$$

Η μη γραμμικότητα μπορεί να προκύψει επίσης από την εξάρτηση των ιδιοτήτων του ρευστού από τις μεταβλητές της ροής, όπως για παράδειγμα εάν το ιξώδες είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι επίλυσης τέτοιων προβλημάτων. Θα αναφερθούν οι κυριότερες στη συνέχεια.

- Μέθοδος του Νεύτωνα

Η μέθοδος του Νεύτωνα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση γραμμικών αλλά και μη γραμμικών συστημάτων. Το σημείο εκκίνησης της είναι η υπόθεση μιας αρχικής πρόβλεψης της λύσης (x) και η έκφραση της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας τη λύση αυτή ως εξής :

$$\{R\} = [A(x)]\{x\} - \{B\}$$

όπου το R είναι υπολειμματικό το οποίο προκύπτει από το γεγονός ότι η αρχική πρόβλεψη δεν ικανοποιεί την εξίσωση. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάνοντας τον πολλαπλασιασμό $[A(x)]\{x\}$, προκύπτει διάνυσμα αντί για πίνακα. Οπότε εάν κατά τη διάρκεια της διακριτοποίησης, το διάνυσμα αυτό δημιουργηθεί όρο με όρο, δεν είναι πλέον αναγκαία η αποθήκευση πίνακα και έτσι μειώνονται οι απαιτήσεις σε αποθήκευση δραματικά.

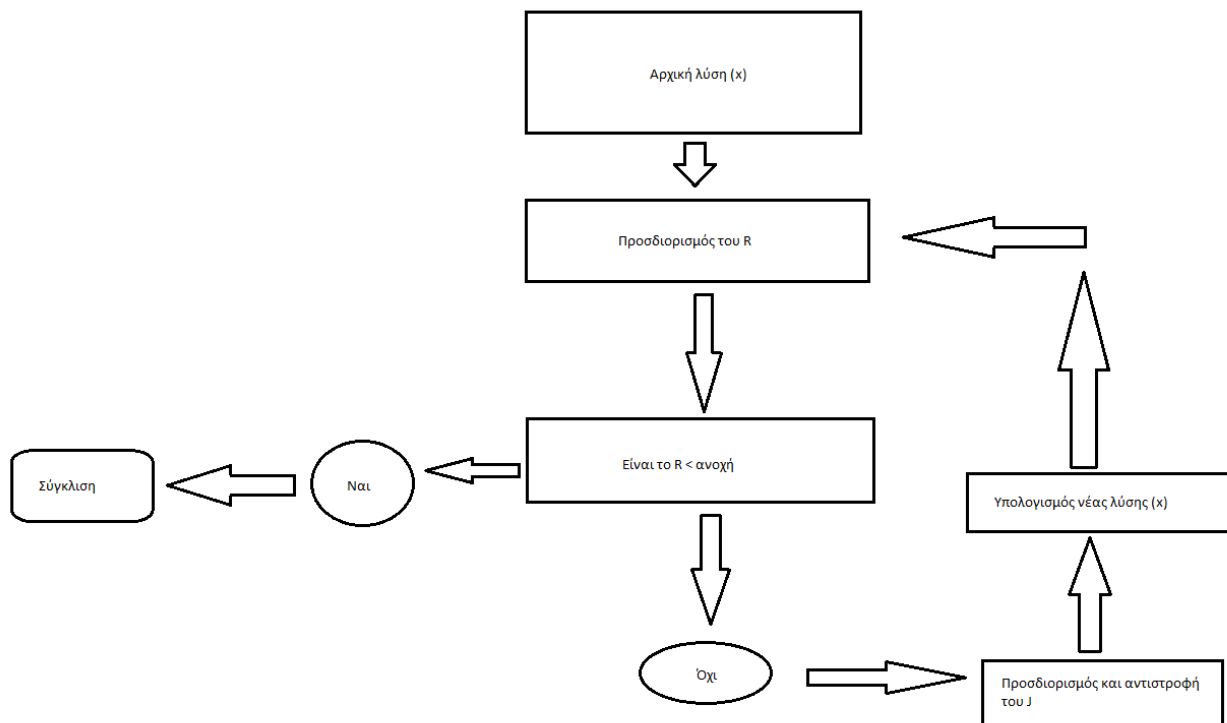
Η μέθοδος του Νεύτωνα, είναι μια επαναληπτική διαδικασία, η οποία βασίζεται στην έκφραση της παρακάτω εξίσωσης :

$$\{x^{n+1}\} = \{x^n\} - [J^n]^{-1}\{R^n\}$$

όπου το n καταδεικνύει το τωρινό επίπεδο επανάληψης και το $n+1$ το επόμενο. Σημειώνεται ότι το αποτέλεσμα της παραπάνω εξίσωσης είναι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων το οποίο απαιτεί λύσης.

Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η επιτάχυνση της σύγκλισης των μη γραμμικών συστημάτων, ειδικά εάν η αρχική πρόβλεψη είναι κοντά στην πραγματική λύση.

Το κύριο υπολογιστικό κόστος αυτής της μεθόδου είναι η απαίτηση για τον αντίστροφο ιακωβιανό πίνακα ($[J^n]^{-1}$). Ένα σχηματικό διάγραμμα της μεθόδου του Νεύτωνα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Μέθοδος Quasi – Newton

Σ' αυτή τη μέθοδο, η εξίσωση $\{x^{n+1}\} = \{x^n\} - [J^n]^{-1}\{R^n\}$, αντικαθίσταται από την εξίσωση:

$$\{x^{n+1}\} = \{x^n\} - \omega^n [H^n] \{R^n\}$$

Όπου ω είναι βαθμωτό μέγεθος. Ο πίνακας $[H]$ είναι μια προσέγγιση του αντίστροφου ιακωβιανού πίνακα. Αυτός ο πίνακας τροποποιείται συστηματικά κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επανάληψης, μέχρι να προσεγγίσει το αντίστροφο του ιακωβιανού πίνακα στη σύγκλιση με την κατάλληλη επιλογή του ω . Ο πίνακας $[H]$ λαμβάνεται επαναληπτικά χρησιμοποιώντας την ακόλουθη διαδικασία. Πρώτα, μια αρχική τιμή του $[H]$ υποτίθεται σε χρόνο n και στην συνέχεια της επαναληπτικής διαδικασίας ορίζεται ως εξής:

$$\{P^n\} = -\omega^n [H^n] \{R^n\}$$

$$\{\alpha^n\} = \frac{1}{\{P^n\}(\{R^{n+1}\} - \{R^n\})}$$

$$[H^{n+1}] = [H^n] - \{\alpha^n\}([H^n](\{R^{n+1}\} - \{R^n\})\{P^n\}^T + \{P^n\}(\{R^{n+1}\} - \{R^n\})[H^n])$$

Παρά το γεγονός ότι ο ιακωβιανός πίνακας είναι αραιός, ο πίνακας $[H]$ είναι πυκνός. Σε μια τυπική διαδικασία επανάληψης, η αρχική εικασία για τον πίνακα $[H]$ λαμβάνεται ως πίνακας ταυτότητας.

Μέθοδοι για την επίλυση γραμμικών συστημάτων

Γραμμικά συστήματα μπορεί να προκύψουν από την διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων που δεν εμφανίζουν μη γραμμικότητες, όπως οι εξισώσεις αγωγής θερμότητας ή παρόμοια προβλήματα διάχυσης. Μπορούν επίσης να προκύψουν από γραμμικοποίηση των μη γραμμικών συστημάτων.

Το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων παίρνει τη μορφή που φαίνεται από την εξίσωση $[A]\{x\} = \{B\}$ με τον πίνακα $[A]$, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από την μεταβλητή πεδίου. Η απαλοιφή Gauss μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση αυτού του συστήματος. Ωστόσο, η αποτελεσματική εφαρμογή αυτής της μεθόδου εξαρτάται από τις ιδιότητες του πίνακα $[A]$.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται στην εξάλειψη Gauss θα εξαρτηθεί από την φύση του πίνακα, για παράδειγμα, για ένα πυκνό πίνακα με λίγους μη μηδενικούς συντελεστές, ο πίνακας αποσυντίθεται από αυτό που είναι γνωστό ως αποσύνθεση LU. Αυτό σημαίνει πως ο πίνακας παρουσιάζεται σε άνω και κάτω τριγωνικούς πίνακες τέτοιους ώστε:

$$[L][U] = [A]$$

Όπου L και U πίνακες με την μορφή:

$$[L] = \begin{bmatrix} x & & & & & & & & \\ x & x & & & & & & & \\ x & x & x & & & & & & \\ x & x & x & x & & & & & \\ x & x & x & x & x & & & & \\ x & x & x & x & x & x & & & \\ x & x & x & x & x & x & x & & \\ x & x & x & x & x & x & x & x & \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} x & & & & & & & & \\ & x & & & & & & & \\ & & x & & & & & & \\ & & & x & & & & & \\ & & & & x & & & & \\ & & & & & x & & & \\ & & & & & & x & & \\ & & & & & & & x & \\ & & & & & & & & x \end{bmatrix}$$

Έπειτα, η παρουσιαζόμενη μορφή του πίνακα λύνεται ως εξής:

$$[U]\{x\}[L]^{-1}\{B\}$$

Επειδή ο πίνακας $[U]$ είναι άνω τριγωνικός, απαιτείται μόνο η πίσω αντικατάσταση, μόλις βρεθεί η σωστή πλευρά. Έτσι, το κύριο υπολογιστικό κόστος έγκειται στην παρουσίαση και την αντιστροφή του πίνακα $[L]$.

Αν ο πίνακας είναι κλιμακωτός, όπως το τριδιαγώνιο σύστημα που φαίνεται στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} x & & & & & & & & \\ x & x & & & & & & & \\ & x & x & & & & & & \\ & & x & x & & & & & \\ & & & x & x & & & & \\ & & & & x & x & & & \\ & & & & & x & x & & \\ & & & & & & x & x & x \\ & & & & & & & x & x \end{bmatrix}$$

Τότε χρησιμοποιείται συνήθως αυτό που είναι γνωστό ως αλγόριθμος Thomas. Ο αλγόριθμος Thomas είναι μια παραλλαγή της απαλοιφής Gauss.

Ο αλγόριθμος Gauss εκτελείται με τη χρήση δύο σταδίων. Για να δειχτεί η μέθοδος, θεωρήστε το ακόλουθο τριδιαγώνιο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & a_4 & b_4 & c_4 \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_n \end{Bmatrix}$$

Το πρώτο βήμα είναι η μείωση του συστήματος με τη χρήση της σχέσης:

$$c'_1 = \frac{c_1}{d_1}, \quad d'_1 = \frac{d_1}{d_1}$$

Για την πρώτη σειρά και την χρήση της σχέσης:

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}$$

Για τις υπόλοιπες σειρές.

Τότε, το σύστημα μειώνεται σε:

$$\begin{bmatrix} 1 & c'_1 & & & \\ & 1 & c'_2 & & \\ & & 1 & c'_3 & \\ & & & 1 & c'_4 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_n \end{Bmatrix}$$

Στη συνέχεια, το στάδιο υποκατάστασης παίρνει την μορφή:

$$x_n = d'_n \\ x_i = d'_i - x_{i+1} c'_i$$

Σημειώστε ότι η τελευταία εξίσωση ξεκινά από το άκρο του πίνακα και πηγαίνει προς τα πάνω.

Ο αλγόριθμος Thomas μπορεί να γενικευθεί σε κλιμακωτούς πίνακες μεγαλύτερου εύρους ζώνης που προκύπτουν από την διακριτοποίηση των δισδιάστατων και τρισδιάστατων προβλημάτων.

Επαναληπτικές Μέθοδοι

Μέθοδοι άμεσης λύσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν υπολογιστικά για πολλά προβλήματα CFD, λόγω του μεγέθους των πινάκων που εμπλέκονται. Έτσι, είναι πιο σύνηθες πλέον να καταφύγουν σε επαναληπτικούς λύτες. Αυτά παρέχουν δύο πλεονεκτήματα. Το πρώτο είναι ότι οι απαιτήσεις μνήμης μειώνονται δραματικά, επειδή το σύστημα του πίνακα δεν έχει αποθηκευτεί. Το δεύτερο είναι η μειωμένη υπολογιστική προσπάθεια.

Αν και οι επαναληπτικές μέθοδοι γενικά θεωρούνται ως σχεδιασμένες για μη γραμμικά συστήματα, χρησιμοποιούνται επίσης για γραμμικά ή μη γραμμικά συστήματα που γραμμικοποιούνται χρησιμοποιώντας διαδικασίες όπως η μέθοδος του Newton.

Οι επαναληπτικές μέθοδοι μπορούν να θεωρηθούν ως μια διαδικασία για την αρχική λύση, ή την αρχική εκτίμηση. Αυτό μερικές φορές λαμβάνεται από τις συνθήκες των διαπολικών ορίων σε όλους τους εσωτερικούς κόμβους. Αυτή η λύση στη συνέχεια, τροποποιείται επιτυχώς χρησιμοποιώντας κάποια επαναληπτική προσέγγιση έως ότου συγκλίνει η λύση. Η σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν η διαφορά της λύσης ανάμεσα στην επανάληψη και των προηγούμενων αριθμών επαναλήψεων φθάσει μια προκαθορισμένη ανοχή, η οποία δεν αυξάνεται με περισσότερες επαναλήψεις.

Βασικές επαναληπτικές μέθοδοι

Αυτές είναι οι πρώτες μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για επαναληπτικούς λύτες. Η προσέγγιση σε λύσεις σταθερής κατάστασης γίνεται με την χρήση πεπερασμένων χρονικών βημάτων. Η πρώτη μέθοδος για να πάρει αυτή την μορφή είναι η μέθοδος Jacobi. Σκεφτείτε την εξίσωση πινάκων $[A]\{x\} = \{B\}$. Η μέθοδος Jacobi ξεκινά με την παραδοχή ότι η αρχική εκτίμηση λύσης x_i^n είναι γνωστή, όπου ο εκθέτης n δείχνει το επίπεδο του χρόνου. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, αυτή η αρχική λύση μπορεί να παρεμβληθεί από οριακές συνθήκες ή να χρησιμοποιηθεί από τις τιμές σε κάθε όριο του τομέα.

Μια επαναληπτική διαδικασία στη συνέχεια δημιουργείται ως εξής:

$$x_i^{n+1} = \frac{B_i - \left(\sum_{j \neq i}^n A_j x_j^n \right)}{A_i}$$

Το πρώτο σημαντικό χαρακτηριστικό της μεθόδου Jacobi είναι ότι αν το διάνυσμα από την δεξιά μεριά $A_{if} x_f^n$ συναρμολογείται απευθείας κατά τη διάρκεια των υπολογισμών, δεν υπάρχει ανάγκη ν' αποθηκευτεί το σύνολο του πίνακα. Το δεύτερο χαρακτηριστικό είναι ότι η λύση δύο διανυσμάτων πρέπει ν' αποθηκευτεί, επειδή η λύση στο τρέχον επίπεδο επανάληψης εξαρτάται από τη λύση στην προηγούμενη επανάληψη.

Αν και η μέθοδος Jacobi είναι απλή, είναι γενικά μια ακριβή υπολογιστική μέθοδος, επειδή απαιτεί πάρα πολλές επαναλήψεις, ώστε η λύση να φθάσει στη σύγκλιση.

Μια άμεση βελτίωση στη μέθοδο Jacobi παρέχεται από τη μέθοδο Gauss – Seidel. Αυτό είναι παρόμοιο με τη μέθοδο Jacobi, με την εξαίρεση ότι οι τιμές του διανύσματος λύσης x_i^{n+1} χρησιμοποιούνται στη δεξιά

πλευρά της εξίσωσης $x_i^{n+1} = \frac{B_i - \left(\sum_{j \neq i}^n A_j x_j^n \right)}{A_i}$ μόλις καταστούν διαθέσιμες. Έτσι η λύση γίνεται:

$$x_i^{n+1} = \frac{B_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} A_j x_j^{n+1} \right) - \left(\sum_{j=i+1}^n A_j x_j^n \right)}{A_i}$$

Η μέθοδος Gauss – Seidel μπορεί να είναι έως και δύο φορές γρηγορότερη από την μέθοδο Jacobi. Τόσο η μέθοδος Jacobi, όσο και η μέθοδος Gauss – Seidel θα συγκλίνουν σίγουρα αν ο πίνακας A είναι διαγώνια κυρίαρχος.

Η μέθοδος Gauss – Seidel μπορεί να βελτιωθεί με την χρήση της μεθόδου των διαδοχικών υπερχαλαρώσεων. Σ' αυτή τη μέθοδο το διάνυσμα λύσης x_i^{n+1} αξιολογείται ως ο σταθμισμένος μέσος όρος μεταξύ της αξίας του στο τρέχον επίπεδο του χρόνου και αυτού στο νέο τρέχον επίπεδο του χρόνου, χρησιμοποιώντας μια παράμετρο χαλάρωσης που μπορεί να μεταβάλλεται από πρόβλημα σε πρόβλημα με βάση την εμπειρία.

Μέθοδοι συζυγών κλίσεων

Σήμερα, οι μέθοδοι συζυγών κλίσεων χρησιμοποιούνται ευρέως λόγω της αποτελεσματικότητάς τους. Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων εφευρέθηκε το 1952, αλλά δεν χρησιμοποιούνταν ευρέως μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1970, όταν έγινε αντιληπτό ότι η αποτελεσματικότητά του μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά με την χρήση ενός προ-σταθεροποιητή.

Εδώ θα περιγραφεί ο τρόπος λειτουργίας της ακόλουθης διαδικασίας:

1^ο βήμα: Ξεκινώντας με τον πίνακα A και το δεξί μέλος b, και μια αρχική εικασία της λύσης x^0 σε επίπεδο επανάληψης $n = 0$.

2^ο βήμα: Υπολογισμός ενός αρχικού προ-οριοθετημένου διανύσματος $z_0 = M^{-1}r^0$, όπου M είναι μια εύκολη προσέγγιση του αντίστροφου του πίνακα A. Όσο πιο κοντά είναι τα M και A, τόσο πιο αποτελεσματική είναι η προ-οριοθέτηση και τόσο πιο δύσκολη είναι η αντιστροφή.

3^ο βήμα: Υπολογισμός της αρχικής διαφοράς $r_0 = b - Ax_0$, θέτοντας $p_0 = r_0$

4^ο βήμα: Υπολογισμός του διανύσματος: $q_k = Ap_k$ για την επανάληψη k

5^ο βήμα: Υπολογισμός της παραμέτρου $a_k = (r_k, r_k)/(q_k, q_k)$ όπου για δύο διανύσματα, m και n, το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως: $(m, n) = \sum m_i n_i$

6^ο βήμα: Υπολογισμός της μεταβλητής στο νέο επίπεδο επανάληψης: $x_{k+1} = x_k + a_k p_k$

7^ο βήμα: Υπολογισμός διαφοράς στο νέο επίπεδο: $r_{k+1} = r_k - a_k q_k$

8^ο βήμα: Υπολογισμός προ-ορισμένου διανύσματος στο νέο πεδίο επανάληψης: $z_{k+1} = M^{-1}r_{k+1}$

9^ο βήμα: Υπολογισμός νέου προτύπου: $\beta_k = (r_{k+1}, z_{k+1})/(r_k, z_k)$

10^ο βήμα: Υπολογισμός νέας παραμέτρου $p_{k+1} = z_{k+1} + \beta_k p_k$

11^ο βήμα: Ανώτερο επίπεδο επανάληψης $k = k + 1$

12^ο βήμα: Δοκιμή για σύγκλιση. Αν δεν επιτευχθεί, μεταβαίνουμε στο βήμα 4 και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Πολυπλεγματικές μέθοδοι επιτάχυνσης

Οι μέθοδοι πολλαπλών πλεγμάτων (MG) μπορούν να εφαρμοστούν τόσο σε γραμμικά, όσο και σε μη γραμμικά συστήματα. Λειτουργούν με μια σειρά πλεγμάτων, έτσι ώστε η λύση ν' αναζητείται στο πιο πυκνό πλέγμα. Τα υπόλοιπα πλέγματα είναι πιο αραιά του ίδιου χωρίου λύσης, η οποία διατάσσεται από μια ακολουθία, στην οποία κάθε πλέγμα είναι περίπου το μισό σε αριθμό των σημείων των πλεγμάτων από το προηγούμενο πλέγμα ή είναι δύο φορές πιο αραιά.

Η ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν τα αραιά πλέγματα για την απόσβεση των υψηλών συχνοτήτων ταλαντώσεων και την προέκταση των διορθώσεων για τις λύσεις των πυκνών πλεγμάτων.

Για την παρουσίαση της μεθόδου, ας θεωρήσουμε έναν αριθμό πλεγμάτων που οργανώνονται από το πλέγμα 1 ως το πλέγμα M, όπου το πλέγμα M είναι το πιο πυκνό. Τότε η επιδιωκόμενη λύση είναι το σύστημα:

$$A^M x^M = b^M$$

Στη συνέχεια, μια προσέγγιση της λύσης x^M παρέχεται από την λύση του επόμενου αραιού πλέγματος x^{M-1} . Ομοίως, για κάθε ενδιάμεσο πλέγμα, η λύση αναζητείται στα επόμενα πιο αραιά πλέγματα. Ή με άλλα λόγια, η λύση για κάθε πλέγμα x^M θεωρείται μια καλή προσέγγιση της λύσης στο πιο πυκνό πλέγμα x^{M+1} .

Τώρα, αν η προσέγγιση της λύσης αντικαθίσταται μέσα στην εξίσωση, θα παράγει μια διαφορά:

$$b^{M+1} - A^{M+1} x^{M+1,c} = R^{M+1}$$

Όπου το $x^{M+1,c}$ είναι μια προσέγγιση της επίλυσης στο επίπεδο του πλέγματος $M + 1$, που λαμβάνεται με την παρεμβολή του επιπέδου πλέγματος m . Η διαφορά θα πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

$$A^{M+1} W^{M+1} = R^{M+1}$$

Μια τυπική διαδικασία πολλαπλών πλεγμάτων κατασκευάζεται από μια επαναληπτική διαδικασία, όπου οι λύσεις λαμβάνονται από πιο αραιά πλέγματα και στη συνέχεια οι διορθώσεις μετασχηματίζονται διαδοχικά σε πυκνά πλέγματα. Όταν το επίπεδο επανάληψης φθάσει το πυκνότερο πλέγμα, οι λύσεις παρατείνονται διαδοχικά πίσω στα πιο αραιά πλέγματα και ούτω καθεξής, μέχρι να συγκλίνει η λύση.

Μοντέλο τύρβης $k - \epsilon$

Το μοντέλο τύρβης $k - \epsilon$ είναι το πιο κοινό μοντέλο που χρησιμοποιείται στην υπολογιστική ρευστοδυναμική (CFD) για την προσομοίωση συνθηκών τύρβης. Πρόκειται για ένα μοντέλο δύο εξισώσεων, το οποίο δίνει μια γενική περιγραφή της τύρβης μέσω δύο εξισώσεων μεταφοράς. (PDEs). Η πρώτη μεταφερόμενη μεταβλητή καθορίζει την ενέργεια της τύρβης και καλείται κινητική ενέργεια τύρβης (k). Η δεύτερη μεταφερόμενη μεταβλητή είναι η τυρβώδης διάχυση (ϵ), η οποία καθορίζει τον ρυθμό διάχυσης της κινητικής ενέργειας.

Σε αντίθεση με άλλα μοντέλα τύρβης, το μοντέλο $k - \epsilon$ εστιάζεται στους μηχανισμούς που επηρεάζουν την κινητική ενέργεια τύρβης. Το μοντέλο μήκους - ανάμειξης στερείται αυτού του είδους γενικότητας. Η βασική παραδοχή του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι το ιξώδες τύρβης είναι ιστροπικό, με άλλα λόγια, η αναλογία ανάμεσα στην τάση Reynolds και του ρυθμού παραμορφώσεως είναι ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις.

Πρότυπο μοντέλο τύρβης $k - \epsilon$

Οι ακριβείς εξισώσεις $k - \epsilon$ περιέχουν πολλούς άγνωστους και μη μετρήσιμους όρους. Για μια πολύ πιο πρακτική προσέγγιση, χρησιμοποιείται το πρότυπο μοντέλο τύρβης $k - \epsilon$ (Launder και Spalding, 1974), η οποία βασίζεται στην καλύτερη κατανόηση των σχετικών διεργασιών, ελαχιστοποιώντας έτσι αγνώστους και παρουσιάζοντας ένα σύνολο εξισώσεων που μπορούν να εφαρμοστούν σ' ένα μεγάλο αριθμό εφαρμογών τύρβης.

Για τυρβώδη κινητική ενέργεια k :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - \rho \epsilon$$

Για τον ρυθμό τυρβώδους διάχυσης ϵ :

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \epsilon u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k}$$

Όπου:

u_i αποτελεί συνιστώσα της ταχύτητας στην αντίστοιχη κατεύθυνση

E_{ij} αποτελεί συνιστώσα του ρυθμού παραμόρφωσης

μ_t αποτελεί την δίνη ιξώδους

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

Με άλλα λόγια,

Ο ρυθμός μεταβολής του k ή του ϵ + μεταφορά του k ή ϵ με συναγωγή = Μεταφορά του k ή ϵ με διάχυση + ρυθμός παραγωγής του k ή ϵ – Ποσοστό καταστροφής του k ή ϵ

Οι εξισώσεις αποτελούνται επίσης από μερικές ρυθμιζόμενες σταθερές σ_k , σ_ϵ , $C_{1\epsilon}$ και $C_{2\epsilon}$. Οι τιμές αυτών των σταθερών βρέθηκαν εμπειροτεχνικά για ένα ευρύ φάσμα τυρβωδών ροών. Οι τιμές οι ακόλουθες:

$$C_\mu = 0.09$$

$$\sigma_k = 1.00$$

$$\sigma_\epsilon = 1.30$$

$$C_{1\epsilon} = 1.44$$

$$C_{2\epsilon} = 1.92$$

Εφαρμογές

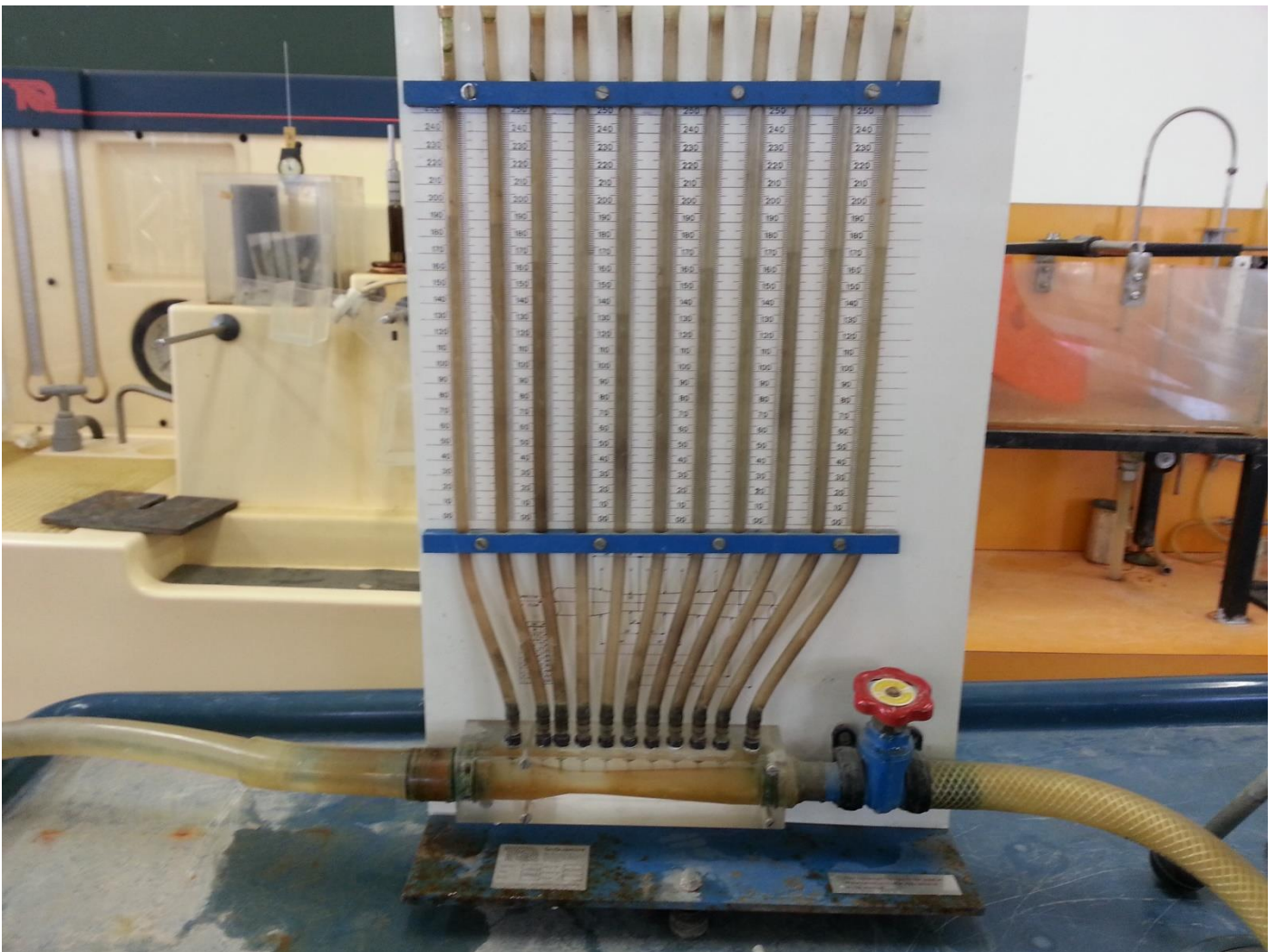
Το μοντέλο $k - \epsilon$ έχει σχεδιαστεί ειδικά για στρώματα επίπεδης διάτμησης και ροές με ανακυκλοφορία. Αυτό το μοντέλο είναι το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο και επικυρωμένο μοντέλο τύρβης με εφαρμογές που κυμαίνονται από βιομηχανικές σε περιβαλλοντικές ροές, γεγονός που εξηγεί την δημοτικότητα του. Είναι συνήθως χρήσιμο για ροές ελεύθερης διάτμησης με σχετικά μικρές κλίσεις πίεσης, καθώς και σε περιορισμένες ροές, όπου οι διατμητικές τάσεις Reynolds είναι οι σημαντικότερες. Μπορεί επίσης ν' αναφερθεί πως το απλούστερο μοντέλο τύρβης, για το οποίο μόνο οι αρχικές και/ή συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να παρέχονται.

Κεφάλαιο 3 – Πειραματικό μέρος

Εισαγωγή

Για το πειραματικό μέρος αυτής της εργασίας, εκτελέσαμε τρία πειράματα από πειραματικές διατάξεις του εργαστηρίου της μηχανικής ρευστών. Σκοπός μας είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων που λάβαμε από το εργαστήριο με τα αποτελέσματα από την προσομοίωση αυτών με το πρόγραμμα CFD, Fluent της Ansys Inc.

Πείραμα 1^ο – Μετρητής Venturi



Εικόνα 1 - Πειραματική διάταξη του μετρητή Venturi στο εργαστήριο της μηχανικής ρευστών

Θεωρητικό μέρος

Μετρά παροχή, βάσει της μανομετρικής ένδειξης που παρουσιάζει λόγω γεωμετρίας του, κατά την κίνηση ενός ρευστού μέσα απ' αυτόν. Αποτελείται από τρία μέρη: Ένα συγκλίνον κωνικό τμήμα, ένα κυλινδρικό στο μέσο και ένα αποκλίνον κωνικό με πολύ μικρή κωνικότητα για να μην παρουσιάζει μεγάλες απώλειες.

Κατά μήκος τριών τμημάτων υπάρχουν πιεζομετρικοί σωλήνες, που η ένδειξη τους μας βοηθάει να μετρήσουμε την παροχή.

Μέσω του μετρητή διοχετεύουμε μια παροχή Q και εφαρμόζουμε την εξίσωση συνέχειας και την σχέση του Bernoulli μεταξύ διατομών 1 και 2 (με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν απώλειες ολικής ενέργειας).

$$\begin{aligned}U_1 * a_1 &= U_2 * a_2 \Rightarrow U_1 = \frac{U_2 * a_2}{a_1} \Rightarrow U_1^2 = U_2^2 * \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{U_1^2}{2g} + h_1 = \frac{U_2^2}{2g} + h_2 \Rightarrow \frac{U_2^2}{2g} * \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + h_1 \\&= \frac{U_2^2}{2g} + h_2 \Rightarrow \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} * \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = h_1 - h_2 \Rightarrow U_2 = \sqrt{\frac{2g * (h_2 - h_1)}{1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}} \Rightarrow Q = U_2 * a_2 \\&= a_2 * \sqrt{\frac{2g * (h_2 - h_1)}{1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}}\end{aligned}$$

Επειδή όμως, έχουμε απώλειες ενέργειας στην πραγματικότητα, το:

$$Q_{πραγ} = C * a_2 * \sqrt{\frac{2g * (h_2 - h_1)}{1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}}$$

Όπου:

C ο συντελεστής παροχής οργάνου.

Υπολογισμός παραμέτρων του πειράματος

Πριν την προσομοίωση του πειράματος στον υπολογιστή, πρέπει να υπολογιστούν δυο παράμετροι, η ταχύτητα εισαγωγής του ρευστού στην είσοδο του σωλήνα και ο αριθμός Reynolds, ο οποίος θα μας υποδείξει εάν η ροή μέσα στο σωλήνα είναι στρωτή ή τυρβώδης.

Η πειραματική διάταξη του εργαστηρίου έχει παροχή $0,02 \text{ m}^3/\text{s}$.

Υπολογισμός ταχύτητας :

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{0,02 \text{ m}^3/\text{s}}{530,9 * 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,4 \text{ m/s}$$

Όπου A η διατομή του σωλήνα στην εισαγωγή , όπως φαίνεται από τον πίνακα 1 παρακάτω.

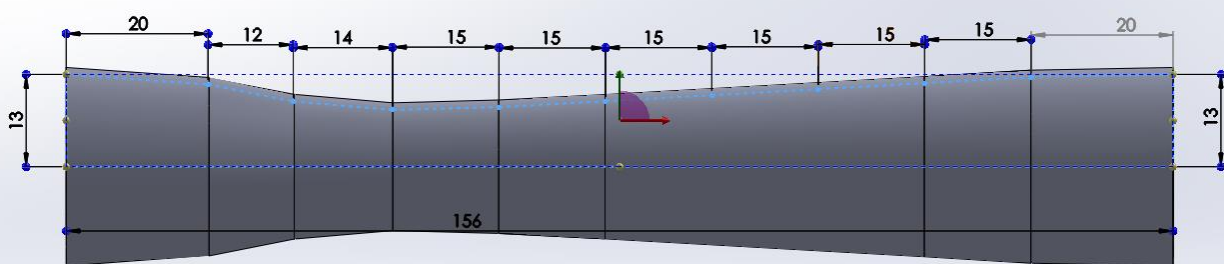
Υπολογισμός αριθμού Reynolds :

$$Re = \frac{\rho * U * d}{\mu} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 26 * 10^{-3} \text{m}}{1,002 * 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}}} = 10379,24$$

Άρα για αριθμό Reynolds 10379 , η ροή είναι τυρβώδης.

Δεδομένα – Αποτελέσματα πειράματος

Στο σωλήνα της πειραματικής διάταξης του εργαστηρίου, παίρνουμε μετρήσεις της πίεσης σε έντεκα σημεία , όπως φαίνεται και από την εικόνα 1. Στην εικόνα 2 που ακολουθεί φαίνονται αναλυτικά τα σημεία δηγματοληψίας και οι διαστάσεις του σωλήνα.



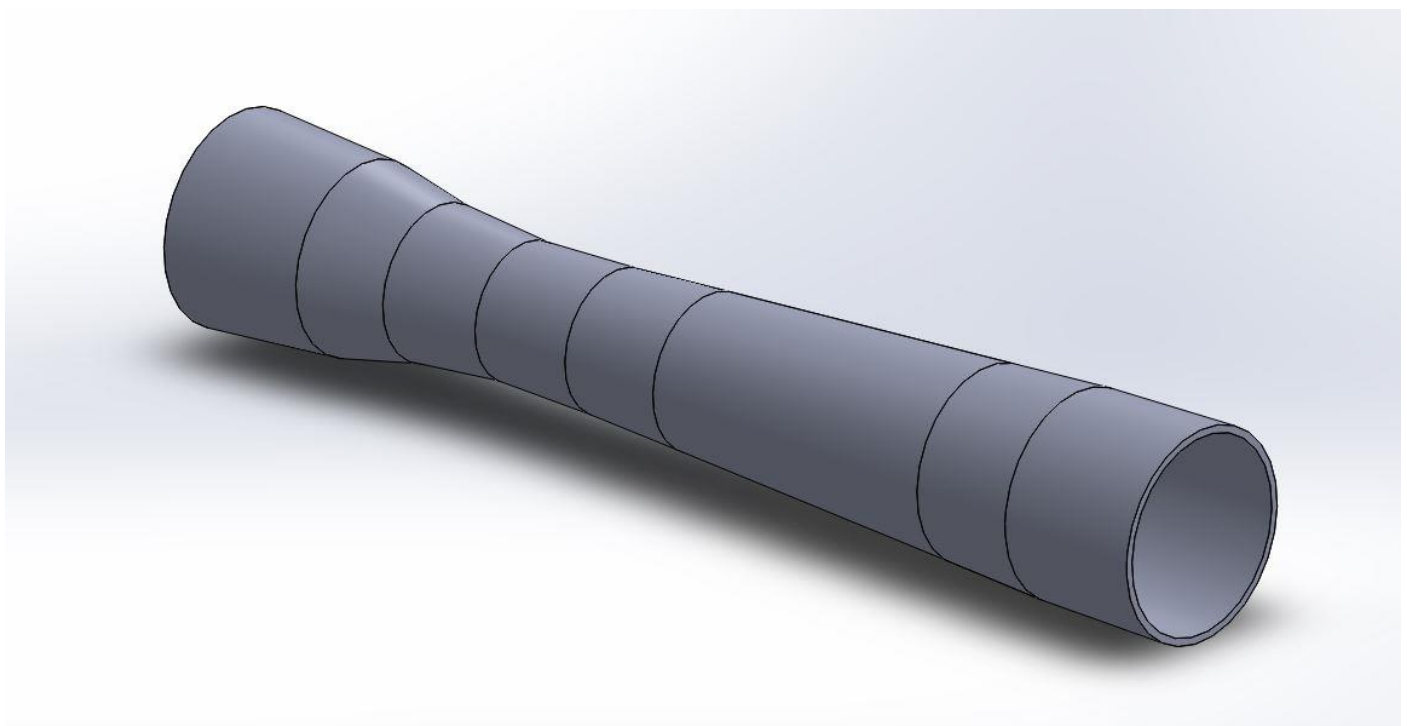
Εικόνα 2

Σημείο	Διάμετρος (mm)	Επιφάνεια (mm ²)	Πίεση (mmW)
A	26	530,9	192
B	23,2	422,7	187,5
C	18,4	265,9	166
D	16	201,1	128
E	16,8	221,7	130
F	18,47	268	152
G	20,16	318,8	163
H	21,84	375	172
J	23,53	435	170
K	25,24	500,8	174
L	26	530,9	175

Πίνακας 1 – Αποτελέσματα πειραματικής διάταξης

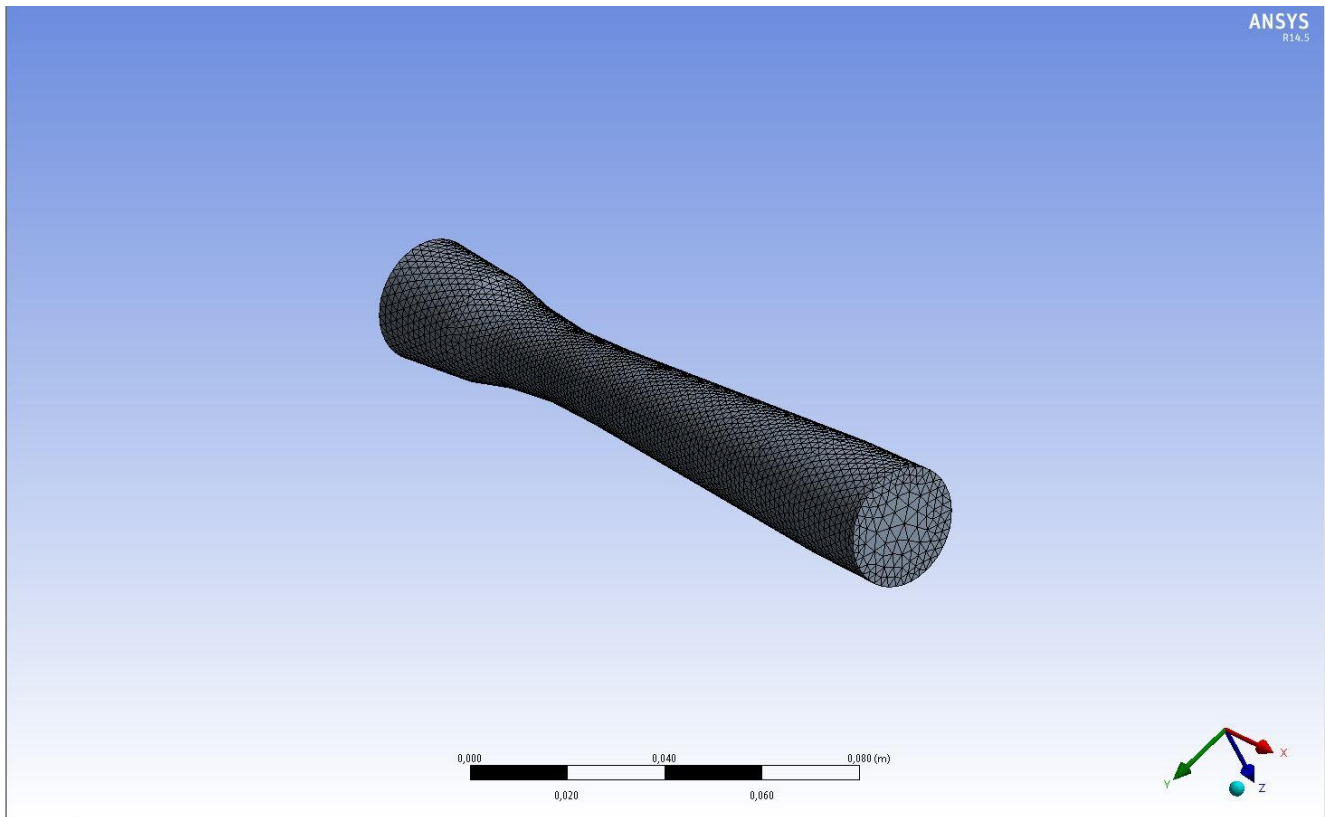
Προσομοίωση CFD

Το πρώτο βήμα για την προσομοίωση του πειράματος μας είναι η μοντελοποίηση του αγωγού της πειραματικής διάταξης του εργαστηρίου. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Solidworks , για λόγους ευχρηστότητας και έπειτα με το κατάλληλο plugin έγινε η μεταφορά του μοντέλου στην σουίτα της Ansys για το υπόλοιπο της διαδικασίας της προσομοίωσης.



Εικόνα 3 - Τρισδιάστατο μοντέλο του αγωγού της πειραματικής διάταξης στο πρόγραμμα Solidworks

Μετά την μοντελοποίηση και την μεταφορά του στην σουίτα της Ansys, ακολουθεί η δημιουργία του πλέγματος, όπως φαίνεται στην εικόνα 4.



Εικόνα 4 – Δημιουργία του πλέγματος

Το επόμενο βήμα μετά τη δημιουργία του πλέγματος είναι ο ορισμός των παραμέτρων για την επίλυση του προβλήματος.

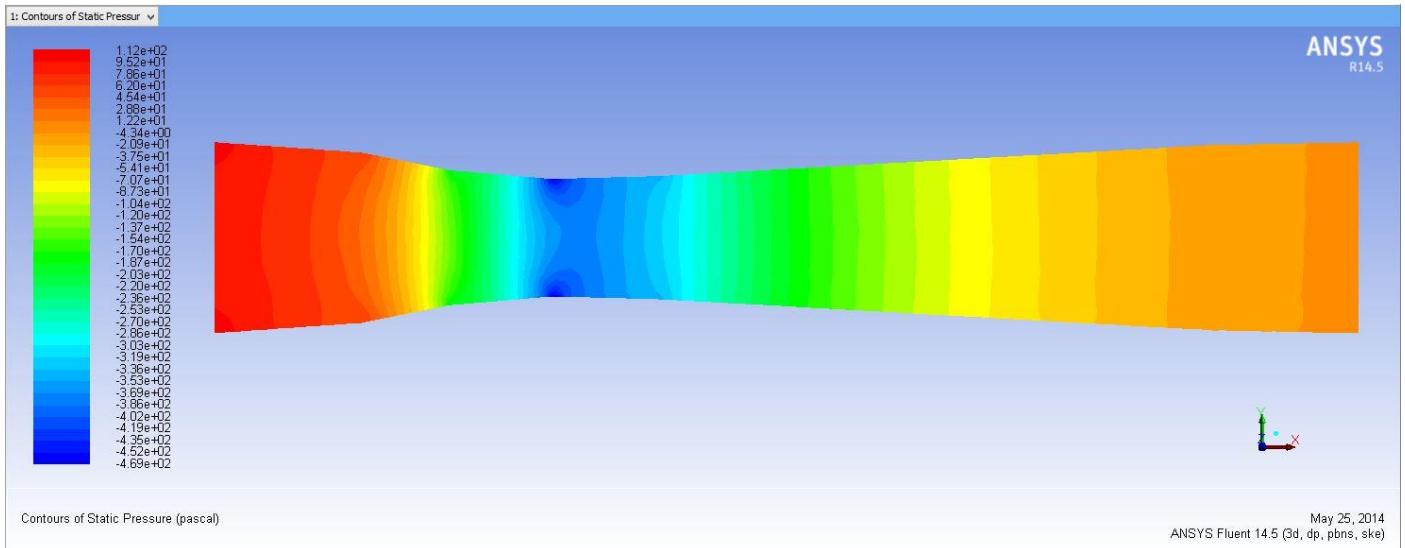
Όπως υπολογίστηκε παραπάνω η ροή στο σωλήνα θα είναι τυρβώδης και κατά συνέπεια στις παραμέτρους επίλυσης στο fluent επιλέγουμε το μοντέλο k-epsilon standard με τις προκαθορισμένες τιμές του.

Στις συνοριακές συνθήκες θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής ταχύτητες εισαγωγής : 0,4 , 0,6 , 0,81 , 1 , 1,2 m/s. Ο λόγος για την επιλογή πολλαπλών ταχυτήτων εισαγωγής, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η ταχύτητα που υπολογίσαμε παραπάνω, είναι για να εξετάσουμε στη συμπεριφορά του πειράματός μας σε διαφορετικές ταχύτητες εισαγωγής.

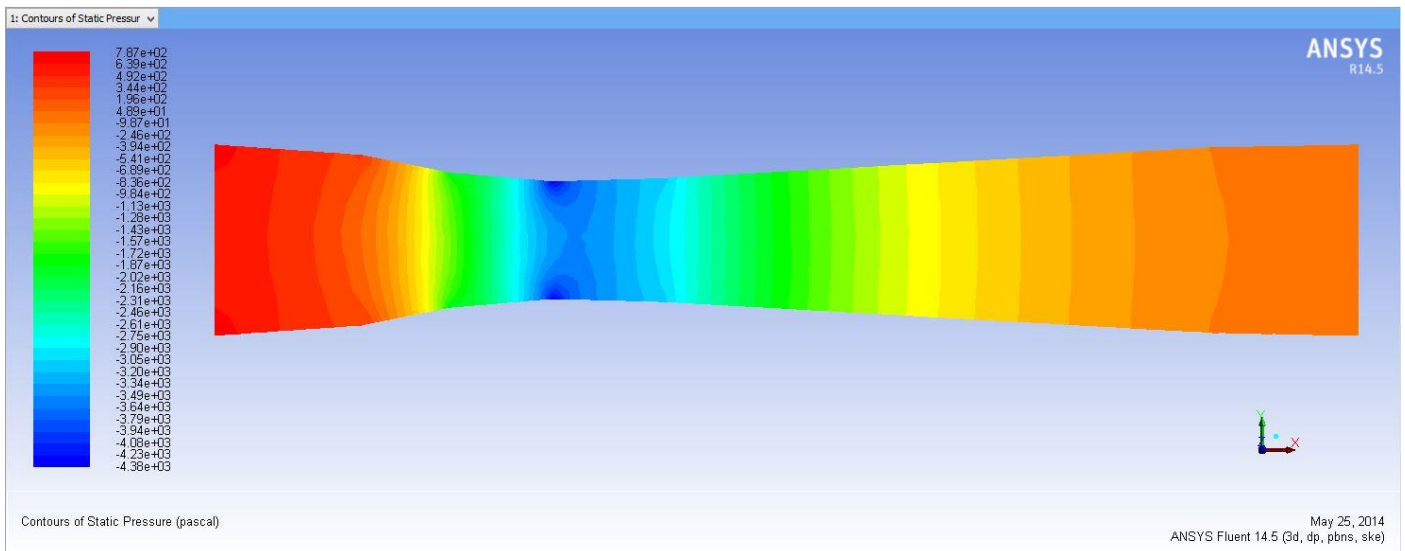
Στην έξοδο του σωλήνα επιλέγουμε pressure-outlet με ατμοσφαιρική πίεση.

Αποτελέσματα προσομοίωσης

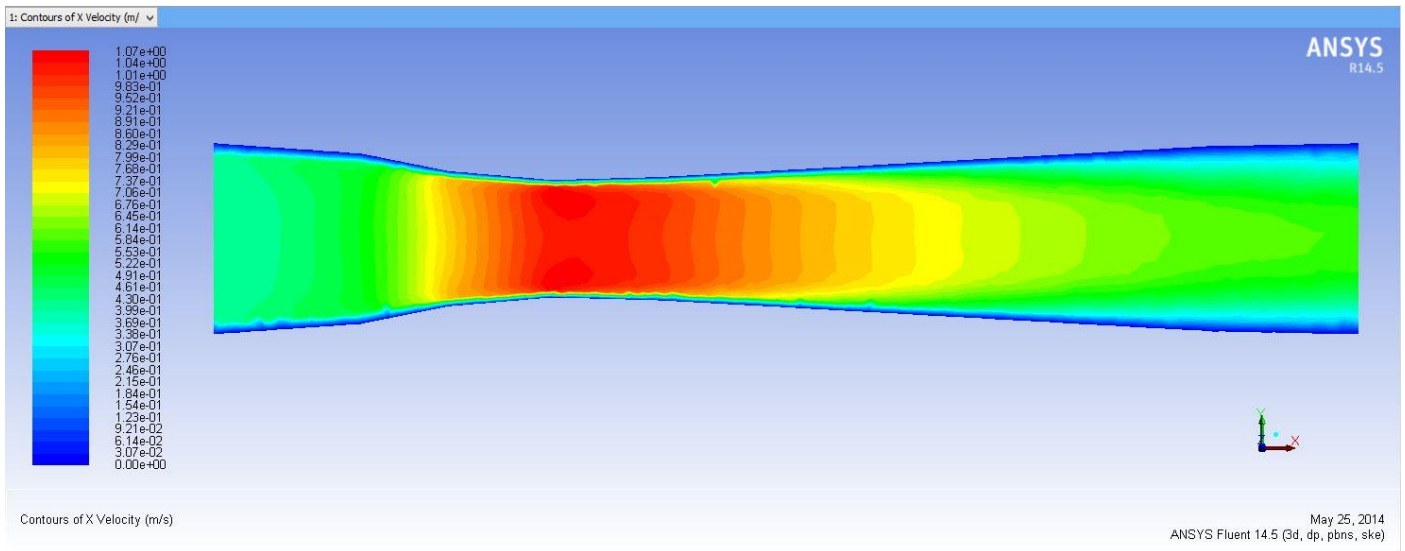
Για το σκοπό της παρουσίασης των αποτελεσμάτων , δημιουργήθηκε μια επιφάνεια η οποία τέμνει τον αγωγό κατά μήκος του και στη μέση της διατομής του. Στην επιφάνεια αυτή θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που μας δίνει το fluent.



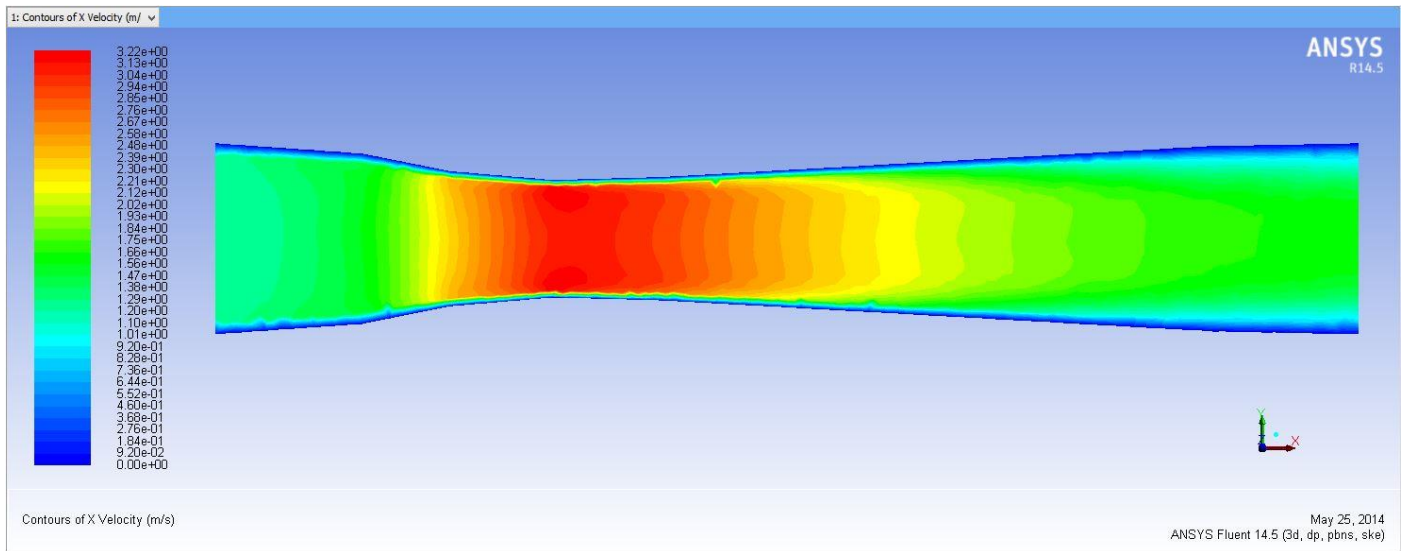
Εικόνα 5 - Κατανομή της στατικής πίεσης κατά μήκος του αγωγού για ταχύτητα 0,4 m/s



Εικόνα 6 - Κατανομή της στατικής πίεσης κατά μήκος του αγωγού για ταχύτητα 1,2 m/s

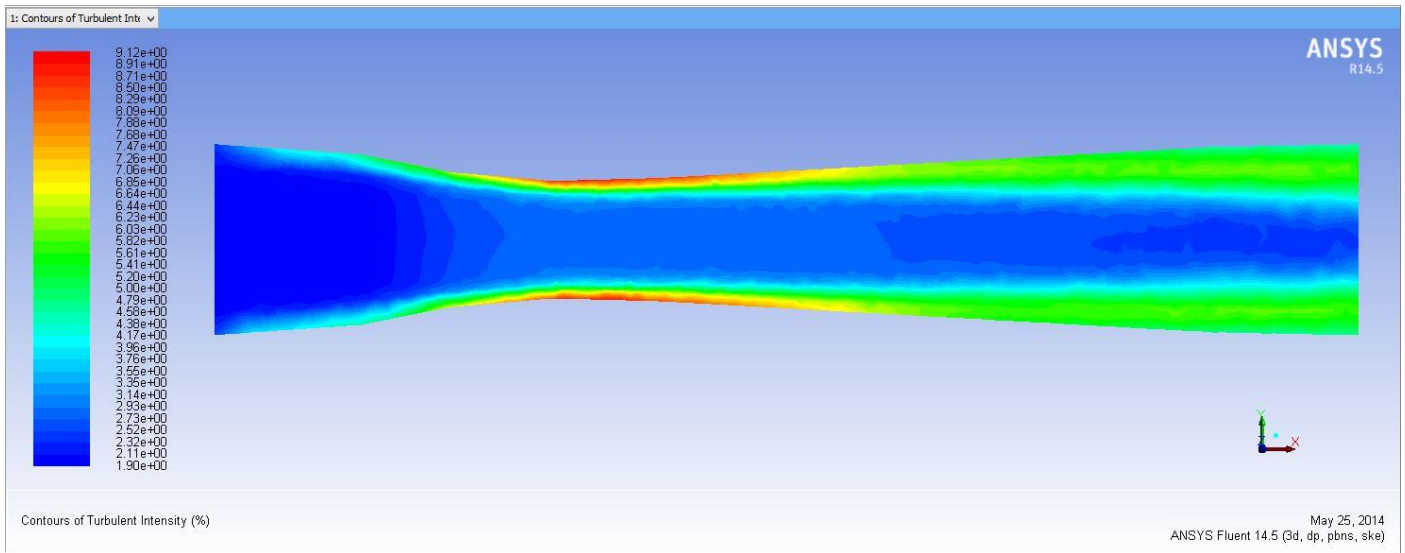


Εικόνα 7 – Κατανομή της ταχύτητας στον άξονα X για ταχύτητα 0,4 m/s

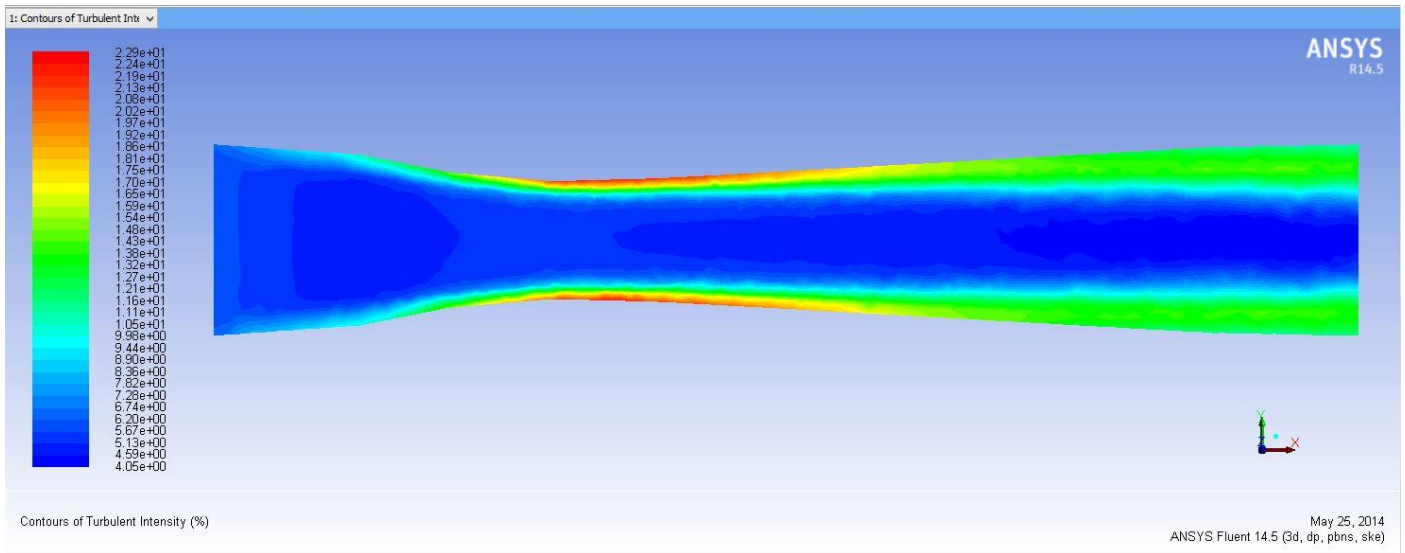


Εικόνα 8 – Κατανομή της ταχύτητας στον άξονα X για ταχύτητα 1,2 m/s

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα τείνει στο μηδέν κοντά στα τοιχώματα του αγωγού και παίρνει μέγιστη τιμή στο κέντρο του στο σημείο που στενεύει.

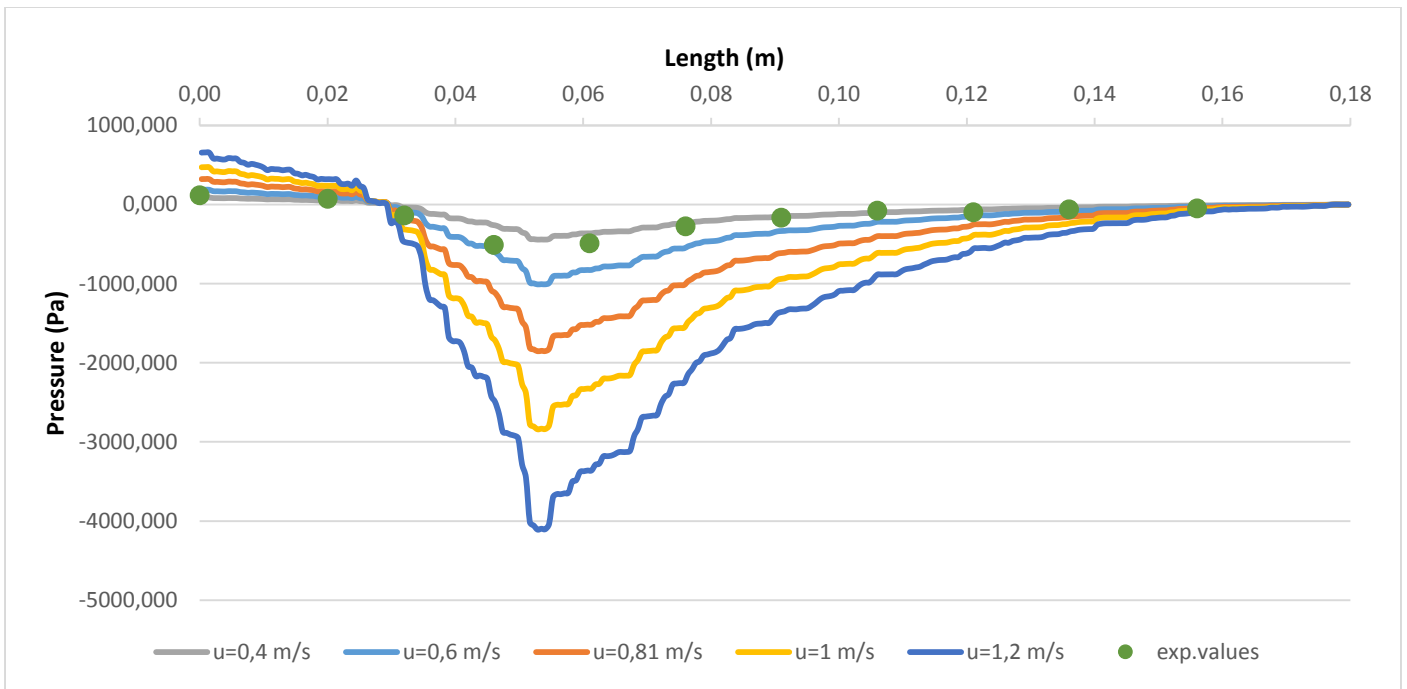


Εικόνα 9 – Ένταση της τύρβης για ταχύτητα 0,4 m/s

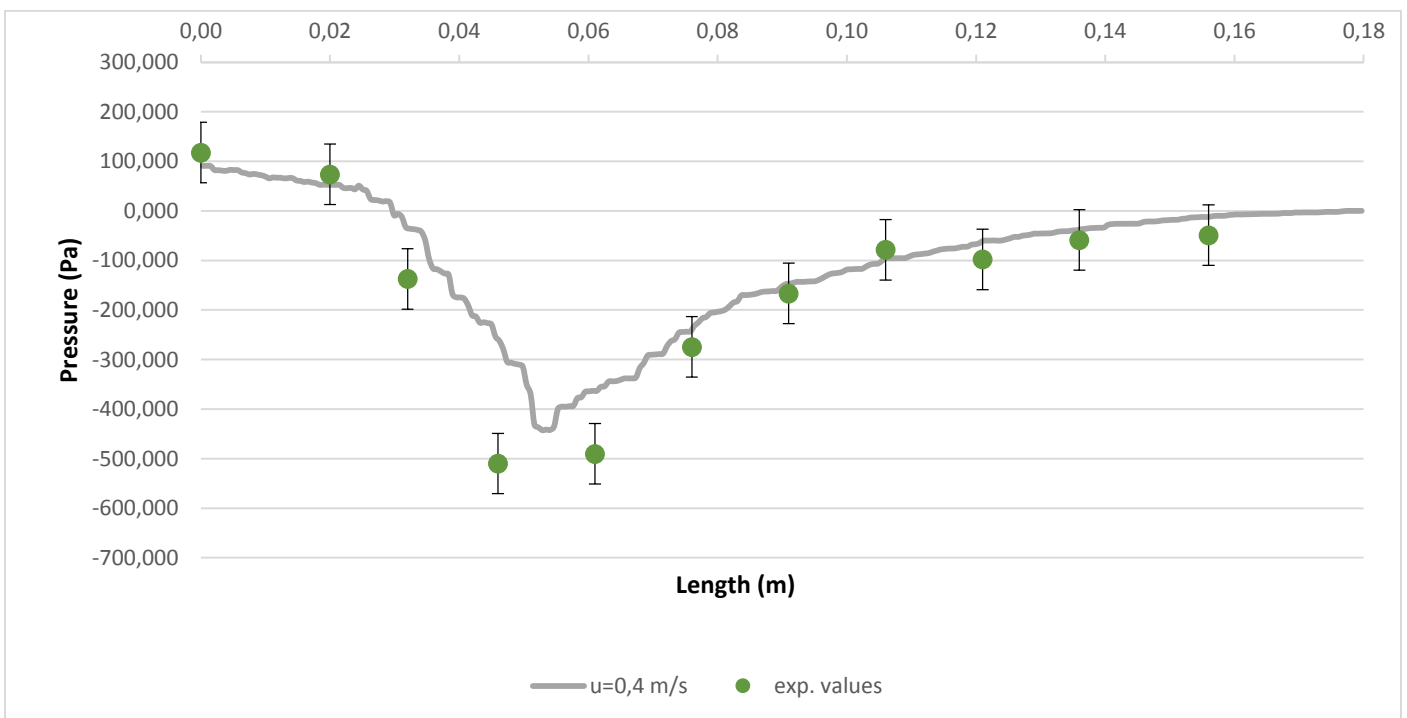


Εικόνα 10 – Ένταση της τύρβης για ταχύτητα 1,2 m/s

Παρατηρούμε ότι η ένταση της τύρβης, παίρνει τη μέγιστη τιμή της, μετά το σημείο που στενεύει ο αγωγός και κοντά στα τοιχώματά του.



Γράφημα 1 – Κατανομή πίεσης κατά μήκος του αγωγού με διαφορετικές ταχύτητες εισαγωγής



Γράφημα 2 – Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων με τα αποτελέσματα από το fluent.

Πείραμα 2^ο – Τοπικές απώλειες

Θεωρητικό μέρος

Οι τοπικές απώλειες οφείλονται σε μεταβολές της γεωμετρίας της ροής. Στις αλλαγές αυτές η ροή παύει τοπικά να είναι ομοιόμορφη και δημιουργούνται συχνά στρόβιλοι απορρόφησης ενέργειας. Οι τοπικές απώλειες αυξάνονται με το μέγεθος των δημιουργούμενων στροβίλων (περιοχών ανακυκλοφορίας της ροής).

Οι τοπικές απώλειες υπολογίζονται από την ακόλουθη εξίσωση :

$$h_m = k \frac{V^2}{2g}$$

όπου k είναι ο συντελεστής τοπικών απωλειών, ο οποίος εξαρτάται από το είδος της ροής (κυρίως τον Re) και τη γεωμετρία μεταβολής της ροής. Στις πρακτικές περιπτώσεις της πλήρως τυρβώδους ροής ο συντελεστής k εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία.

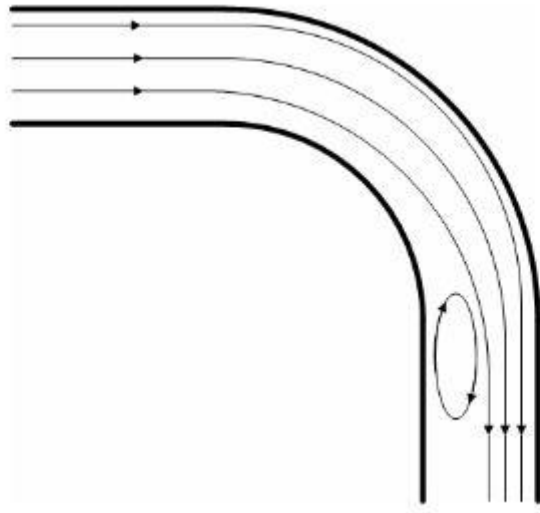
Ο υπολογισμός του k μπορεί να γίνει με εφαρμογή της μεθόδου του όγκου αναφοράς στις απλές περιπτώσεις γεωμετρίας και πειραματικά στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις.

Δυο είναι οι γενικές αρχές για τις τιμές του k :

1. Όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος των δημιουργούμενων στροβίλων, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του k . Έτσι, στις αποκλίνουσες ροές, όπως π.χ. σε απότομες διαστολές ο συντελεστής k είναι μεγαλύτερος απ' ότι στις συγκλίνουσες ροές, όπως π.χ. σε απότομες συστολές.
2. Όσο περισσότερο απότομη είναι η μεταβολή της γεωμετρίας, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του k . Έτσι, στις βαθμιαίες διαστολές ο συντελεστής k είναι πολύ μικρότερος απ' ότι στις απότομες διαστολές.

Τοπικές απώλειες σε αλλαγή κατεύθυνσης σωλήνα

Η πραγματοποίηση της αλλαγής κατεύθυνσης της ροής σε σωλήνες γίνεται με τη βοήθεια ειδικών τεμαχίων, όπως καμπυλών γωνιών και ταυ. Στα καμπύλα τεμάχια οι τοπικές απώλειες οφείλονται (α) στη δημιουργία στροβίλων στην εσωτερική πλευρά του σωλήνα, εξαιτίας της προκαλούμενης αποκόλλησης της ροής, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.9)6 και (β) στη δημιουργούμενη δευτερεύουσα ροή στο επίπεδο της διατομής του σωλήνα, η οποία αποτελείται από σχετικά μεγάλους στρόβιλους.



Συνηθικές ροής σε αλλαγή κατεύθυνσης σωλήνα



Εικόνα 11 – Πειραματική διάταξη του εργαστηρίου της μηχανικής ρευστών

Υπολογισμός παραμέτρων του πειράματος

$$l_{\sigma\omega\lambda} = 1.44 \text{ m}, D = 1'' = 0.0254 \text{ m}$$

$$Q_{\text{πραγμ}} = Q_{\text{μετρ}} * 10 = (185 * 10) \frac{\text{lt}}{\text{h}} = 1850 \frac{\text{lt}}{\text{h}}$$

$$\Delta H_{1,2\text{μετρ}} = P_1 - P_2 = 7 \text{ mmHg} = 95.2 \text{ mmW}$$

Υπολογισμός με την σχέση Darcy:

$$\Delta H_{1,2} = h_f = f * \frac{l}{D} * \frac{U^2}{2 * g}$$

$$U = \frac{4 * Q}{\pi * D^2} = \frac{4 * 1850 * \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{3600 \text{ sec}}}{\pi * (0.0254)^2 \text{ m}^2} = 1.015 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$Re = \frac{U * D}{\nu} = \frac{1.015 \frac{\text{m}}{\text{sec}} * 0.0254 \text{ m}}{10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}} = 2.57 * 10^4$$

Γαλβανιζέ σιδηροσωλήνας: $E = 0.0076 \text{ cm} = 0.076 \text{ mm}$

$$\frac{E}{D} = \frac{0.076 \text{ mm}}{25.4 \text{ mm}} = 0.003$$

Από το διάγραμμα Moody:

$$\frac{E}{D} = 0.003$$

$$Re = 2.5 * 10^4$$

$$f = 0.032$$

Άρα:

$$h_f = 0.032 * \frac{1.44 \text{ m}}{0.0254 \text{ m}} * \frac{(1.015)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}}{2 * 9.806 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}} = 0.0952 \text{ mW}$$

$$\Delta H_{1,2\theta\epsilon\omega\rho} = h_f = 95.2 \text{ mmW}$$

$$\Delta H_{1,2\pi\epsilon\iota\rho} = 95.2 \text{ mmW}$$

Ο σωλήνας σχηματίζεται από 12 εξαρτήματα.

$$n = 12, Q = 1570 \frac{lt}{h}$$

$$\Delta P_{1,2} = 95 \text{ mmHg} = 95 * 13.6 \text{ mmW} = 1.29 \text{ mW}$$

Τοπικές απώλειες πειραματικά:

$$\Sigma h_{m_{\text{πειρ}}} = 1.29 \text{ mW}$$

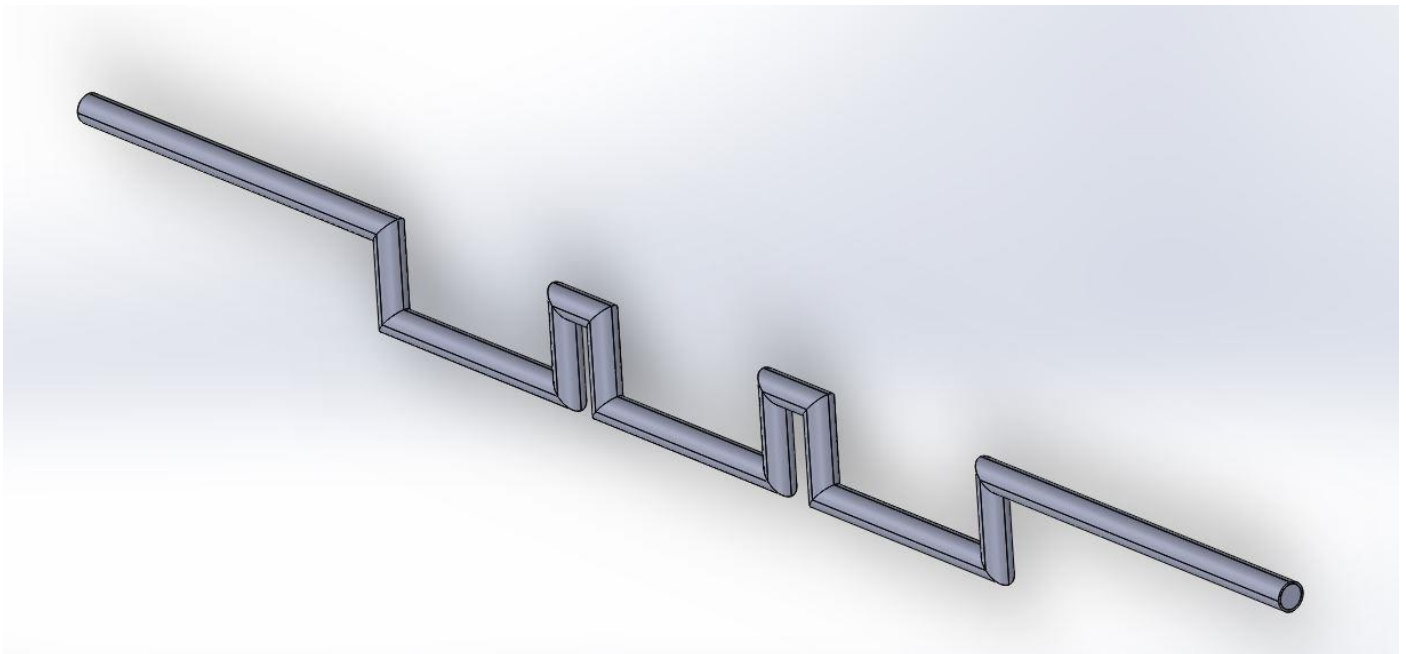
$$U = \frac{4 * Q}{\pi * D^2} = \frac{4 * 1570 * \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{3600 \text{ sec}}}{\pi * (0.0254)^2 \text{ m}^2} = 0.86 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$k = \frac{\Sigma h_m * 2 * g}{12 * U^2} = \frac{1.29 \text{ mW} * 2 * 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}}{12 * (0.86)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}} = 2.85$$

$$\Sigma h_m = n * h_m = n * k * \frac{U^2}{2 * g} = 12 * 2.85 * \frac{(0.86)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}}{2 * 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}} = 1.29 \text{ mW}$$

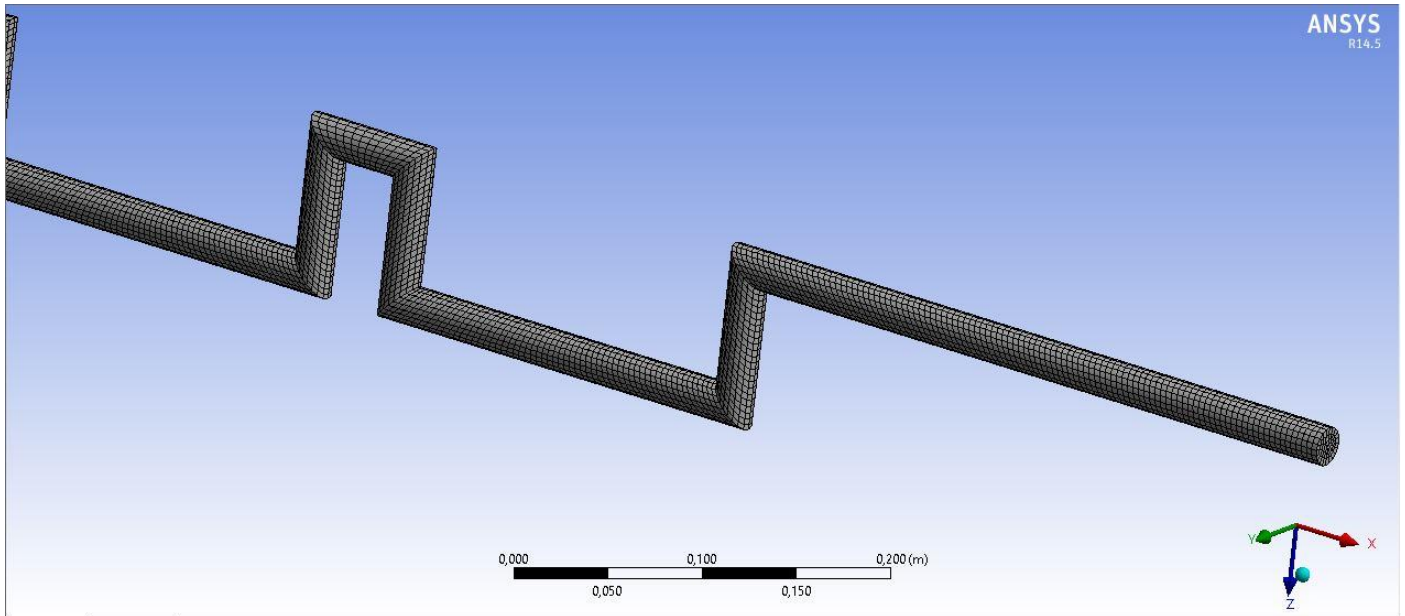
Προσομοίωση CFD

Όπως και στο προηγούμενο πείραμα, η μοντελοποίηση έγινε στο πρόγραμμα Solidworks και έπειτα το μοντέλο μεταφέρθηκε στην σουίτα της Ansys για τα επόμενα βήματα.



Εικόνα 12 - Τρισδιάστατο μοντέλο του σωλήνα της πειραματικής διάταξης στο πρόγραμμα Solidworks

Ακολουθεί η δημιουργία του πλέγματος στην σουίτα της Ansys (εικόνα 7)



Εικόνα 13 – Μέρος του μοντέλου του σωλήνα στο οποίο απεικονίζεται το πλέγμα.

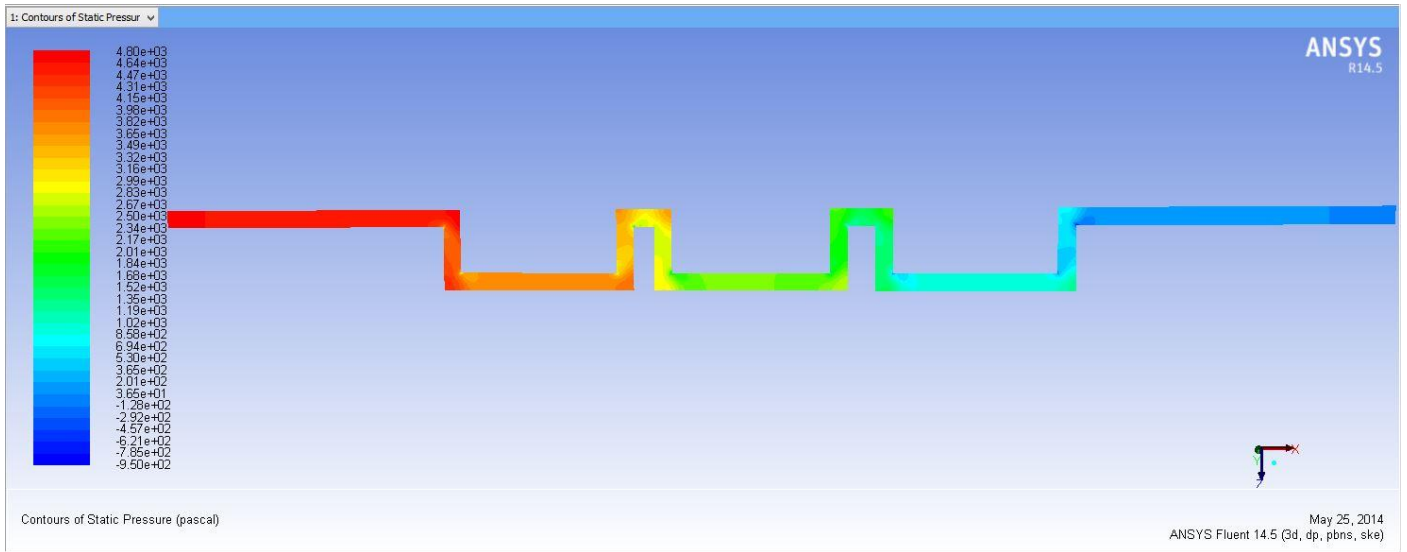
Το επόμενο βήμα μετά τη δημιουργία του πλέγματος είναι ο ορισμός των παραμέτρων για την επίλυση του προβλήματος.

Όπως υπολογίστηκε παραπάνω η ροή στο σωλήνα θα είναι τυρβώδης και κατά συνέπεια στις παραμέτρους επίλυσης στο fluent επιλέγουμε το μοντέλο k-epsilon standard με τις προκαθορισμένες τιμές του.

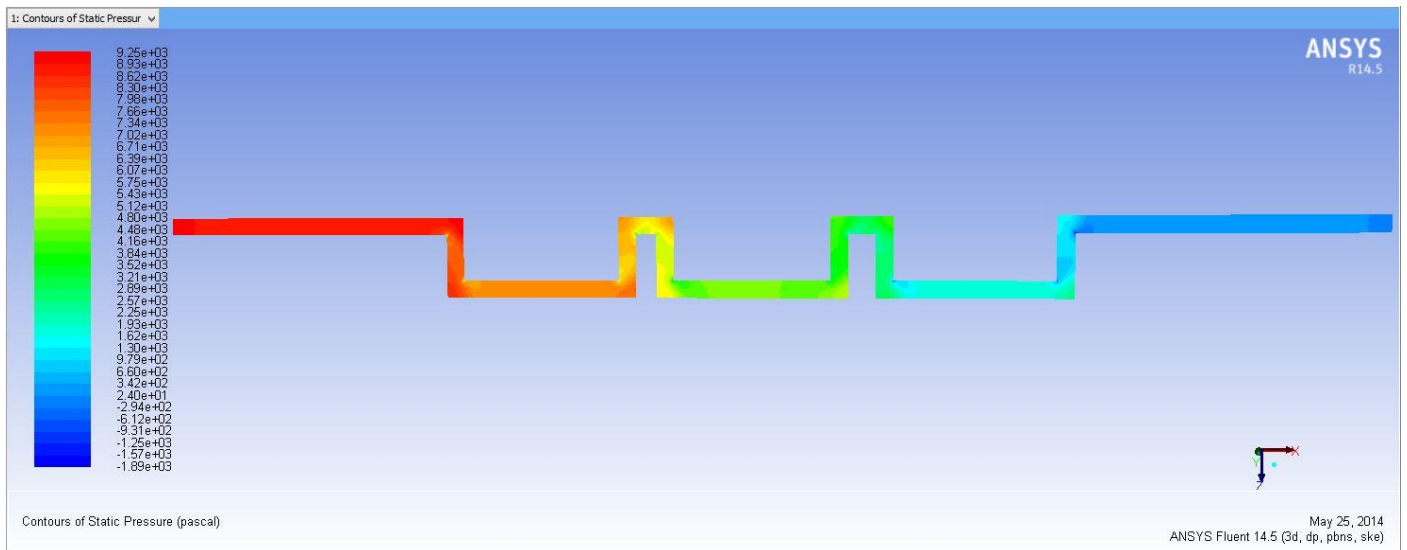
Στις συνοριακές συνθήκες θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής ταχύτητες εισαγωγής : 0,4 , 0,6 , 0,86 , 1 , 1,2 m/s. Ο λόγος για την επιλογή πολλαπλών ταχυτήτων εισαγωγής, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η ταχύτητα που υπολογίσαμε παραπάνω, είναι για να εξετάσουμε στη συμπεριφορά του πειράματός μας σε διαφορετικές ταχύτητες εισαγωγής.

Στην έξοδο του σωλήνα επιλέγουμε pressure-outlet με μηδενική πίεση.

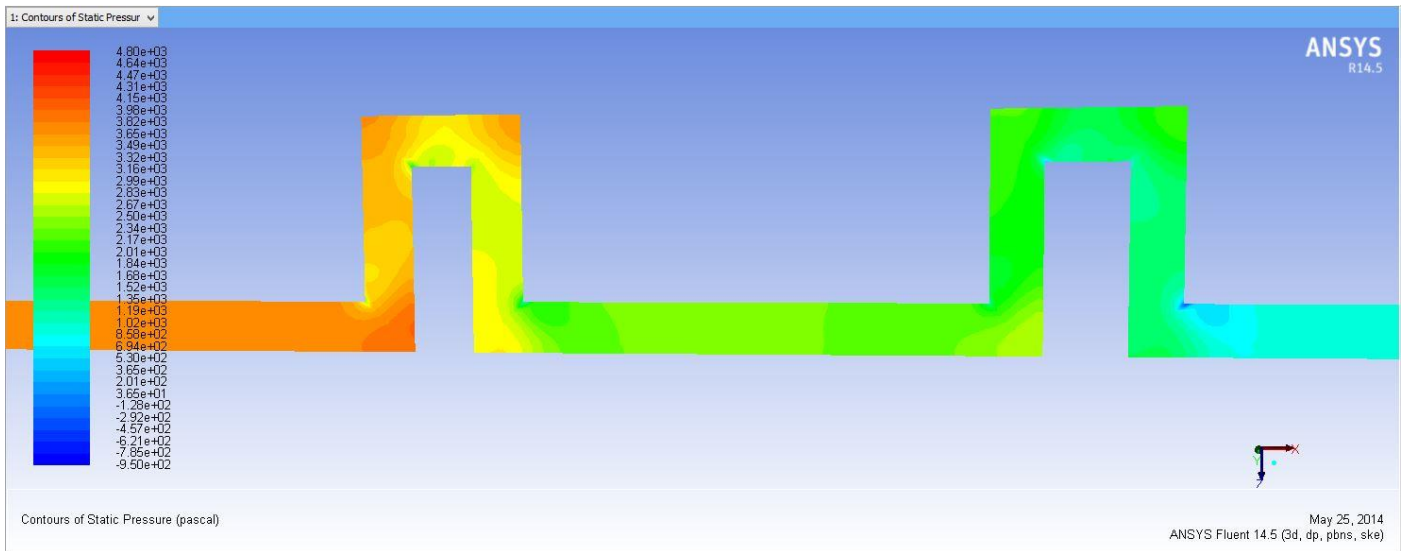
Αποτελέσματα προσομοίωσης



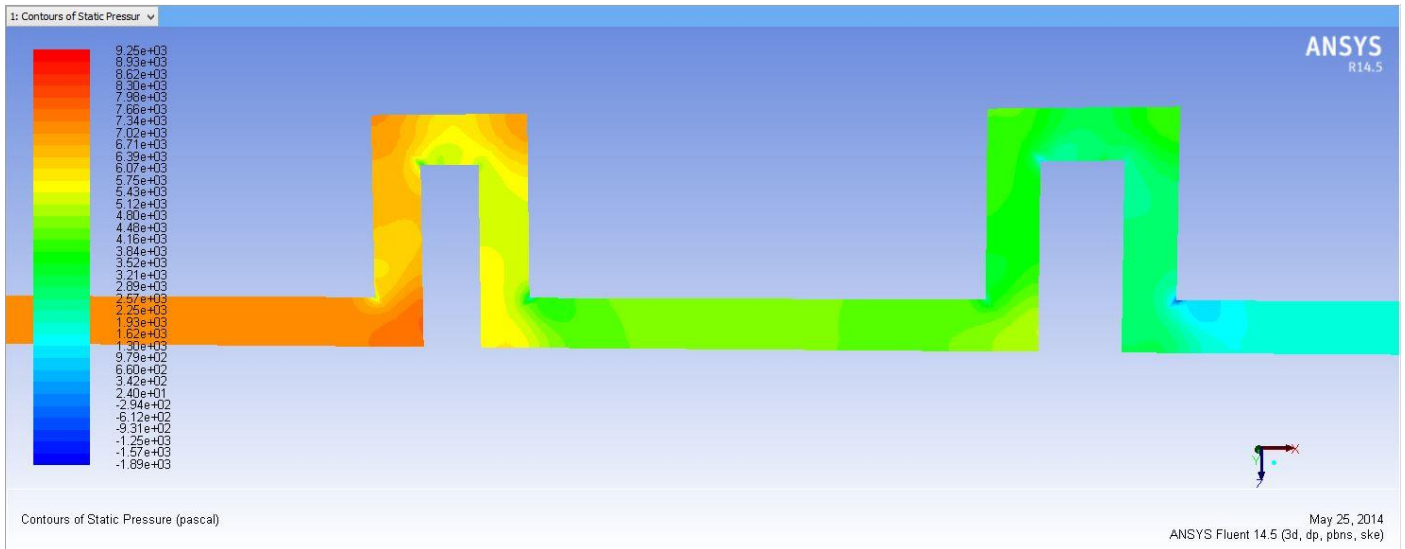
Εικόνα 14 - Κατανομή στατικής πίεσης κατά μήκος του αγωγού για ταχύτητα 0,86 m/s.



Εικόνα 15 - Κατανομή στατικής πίεσης κατά μήκος του αγωγού για ταχύτητα 1,2 m/s.

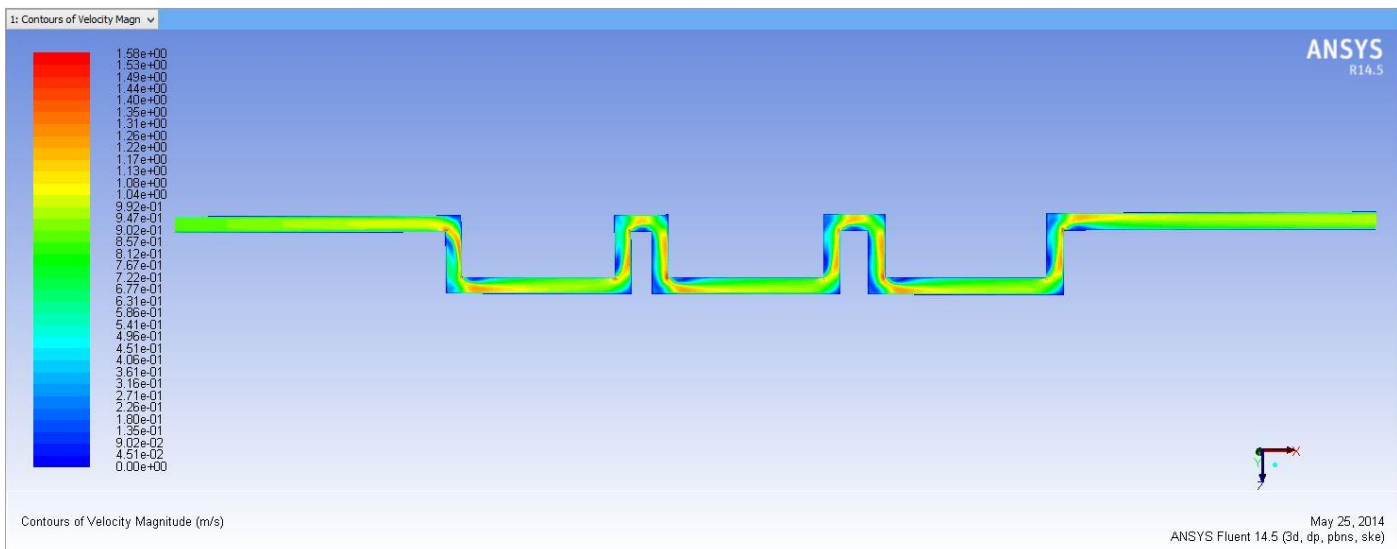


Εικόνα 16 - Κατανομή στατικής πίεσης σε ένα μέρος του αγωγού για ταχύτητα 0,86 m/s

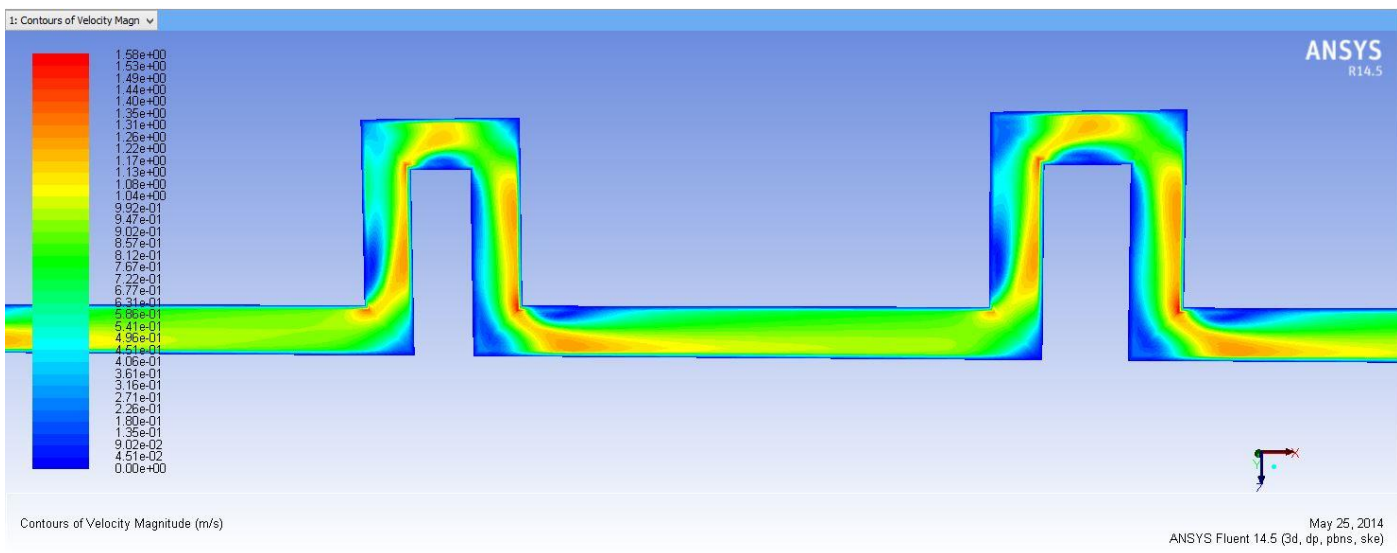


Εικόνα 17 - Κατανομή στατικής πίεσης σε ένα μέρος του αγωγού για ταχύτητα 1,2 m/s

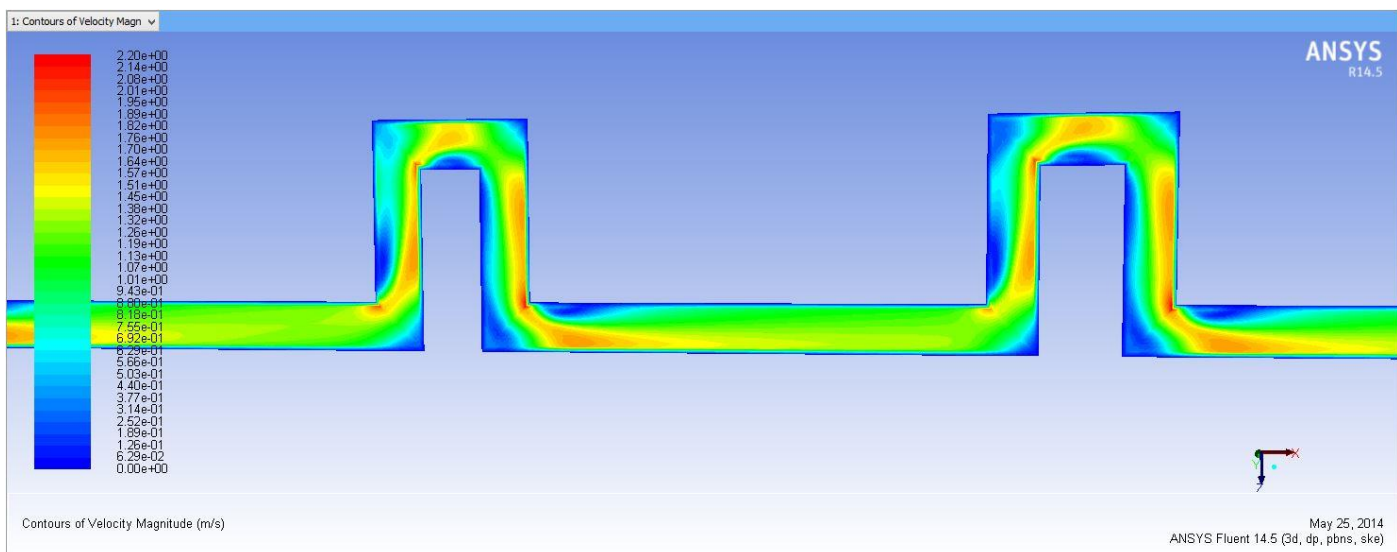
Από τις εικόνες 14-17 παρατηρούμε την πτώση της πίεσης κατά μήκος του αγωγού αλλά και με μεγαλύτερη λεπτομέρεια σε μερικές από τις γωνίες του. Η πτώση πίεσης οφείλεται στις απότομες αλλαγές τις γεωμετρίας του αγωγού.



Εικόνα 18 – Κατανομή ταχύτητας για ταχύτητα εισόδου 0,86 m/s.

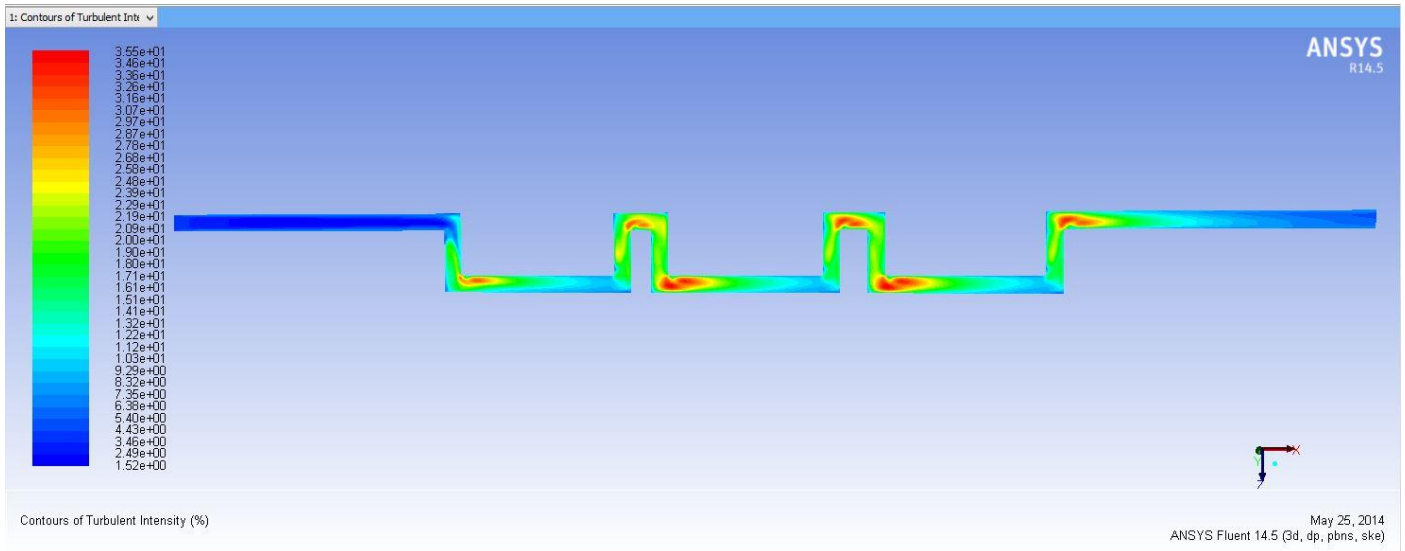


Εικόνα 19 - Ταχύτητα σε ένα μέρος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 0,86 m/s.

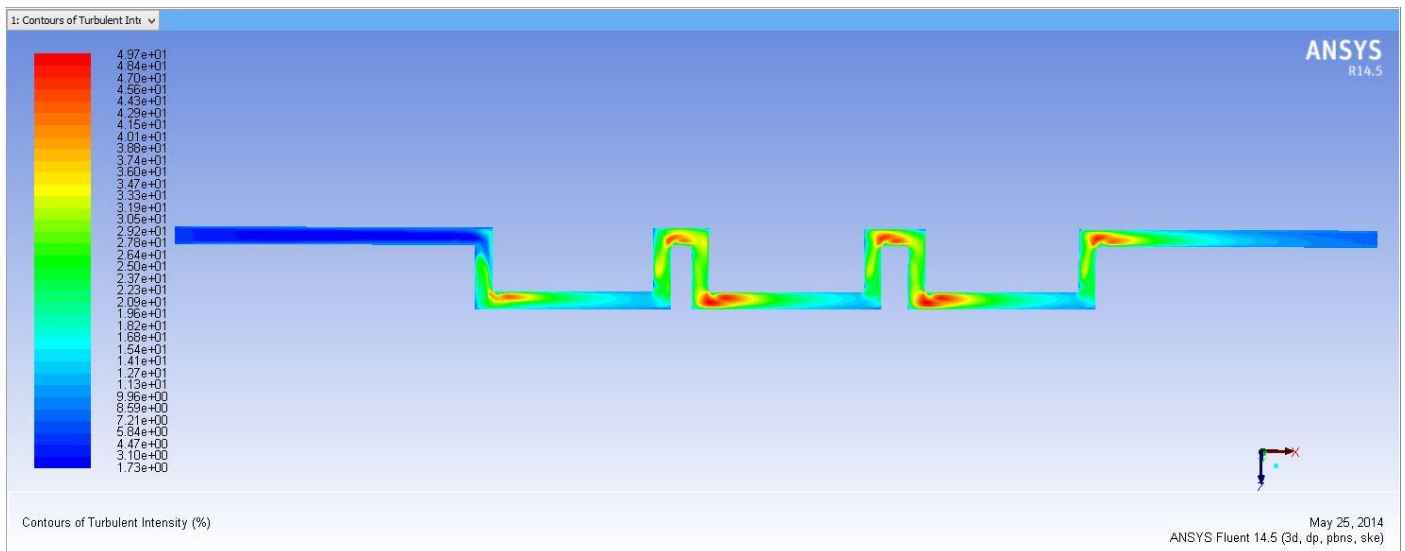


Εικόνα 20 - Ταχύτητα σε ένα μέρος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 1,2 m/s.

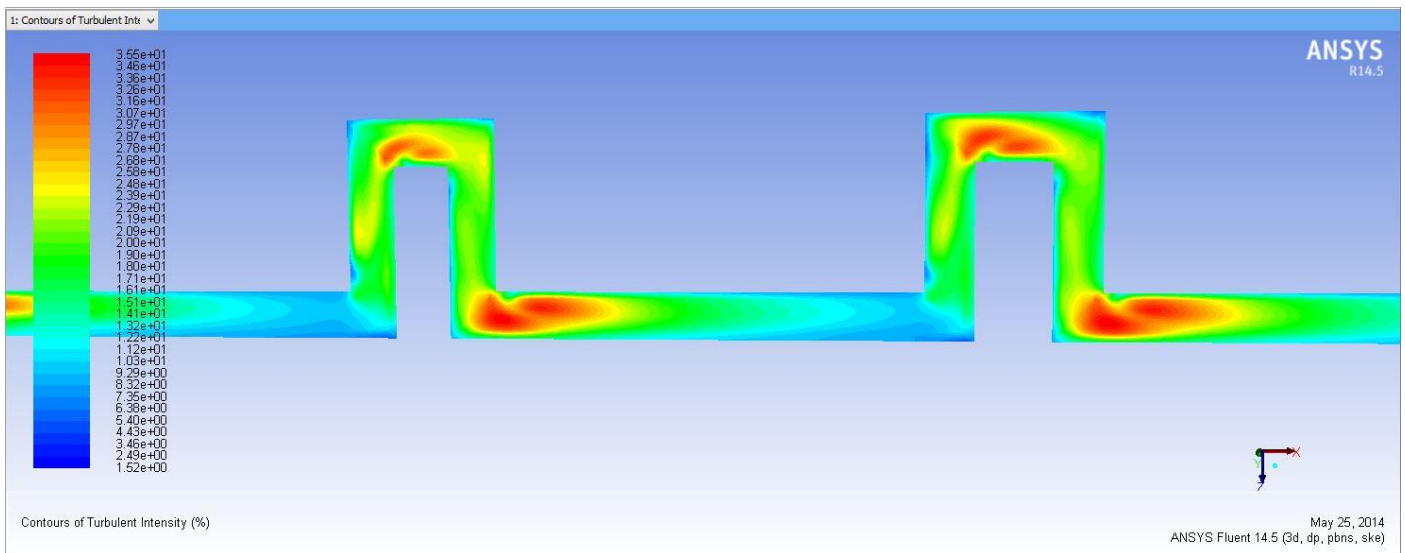
Από τις εικόνες 18-20 παρατηρούμε την αποκόλληση και την προσκόλληση ροής λόγω των απότομων αλλαγών της γεωμετρίας του αγωγού.



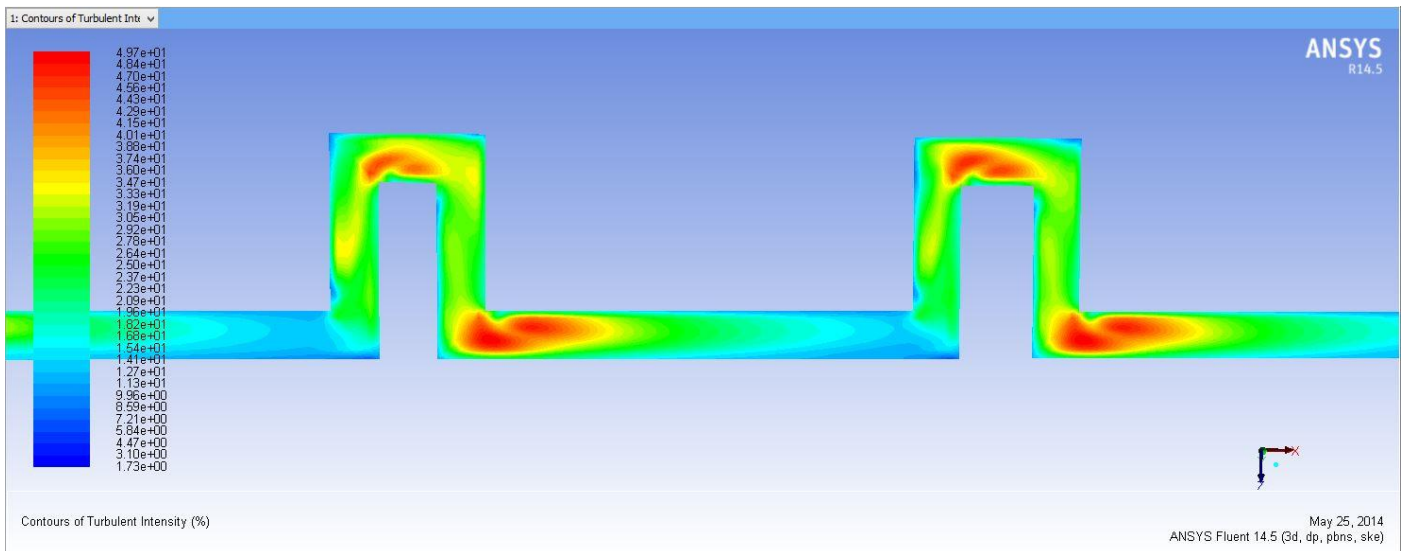
Εικόνα 21 - Ένταση της τύρβης για ταχύτητα 0,86 m/s.



Εικόνα 22 - Ένταση της τύρβης για ταχύτητα 1,2 m/s.

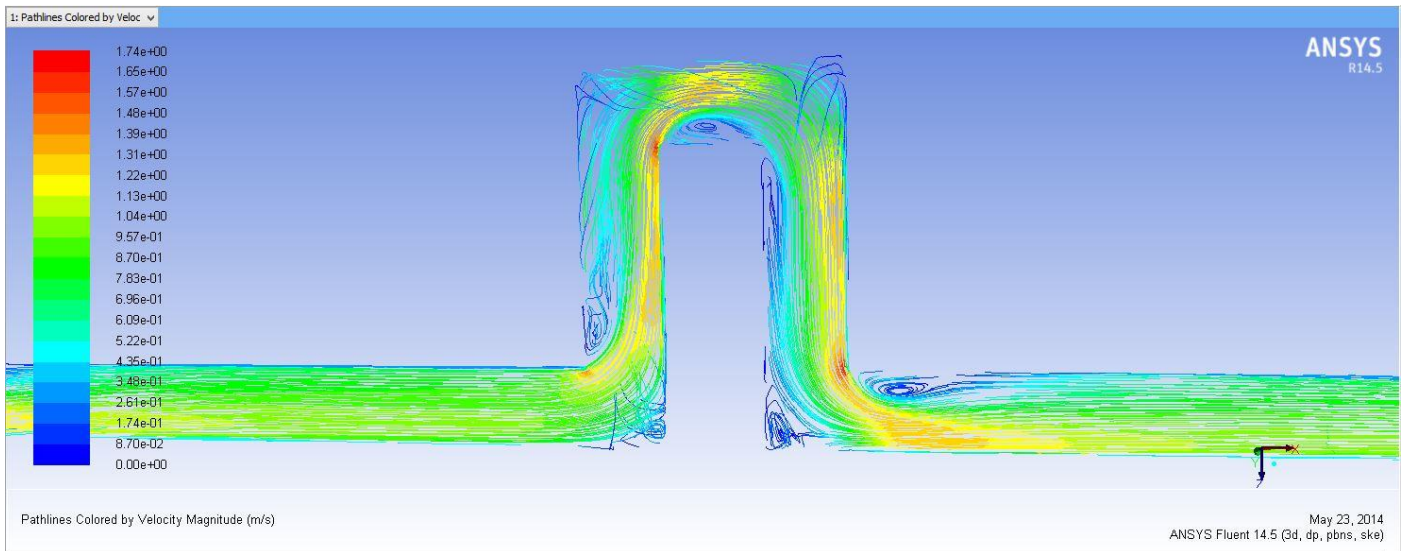


Εικόνα 23 - Ένταση της τύρβης σε ένα μέρος του αγωγού για ταχύτητα 0,86 m/s.

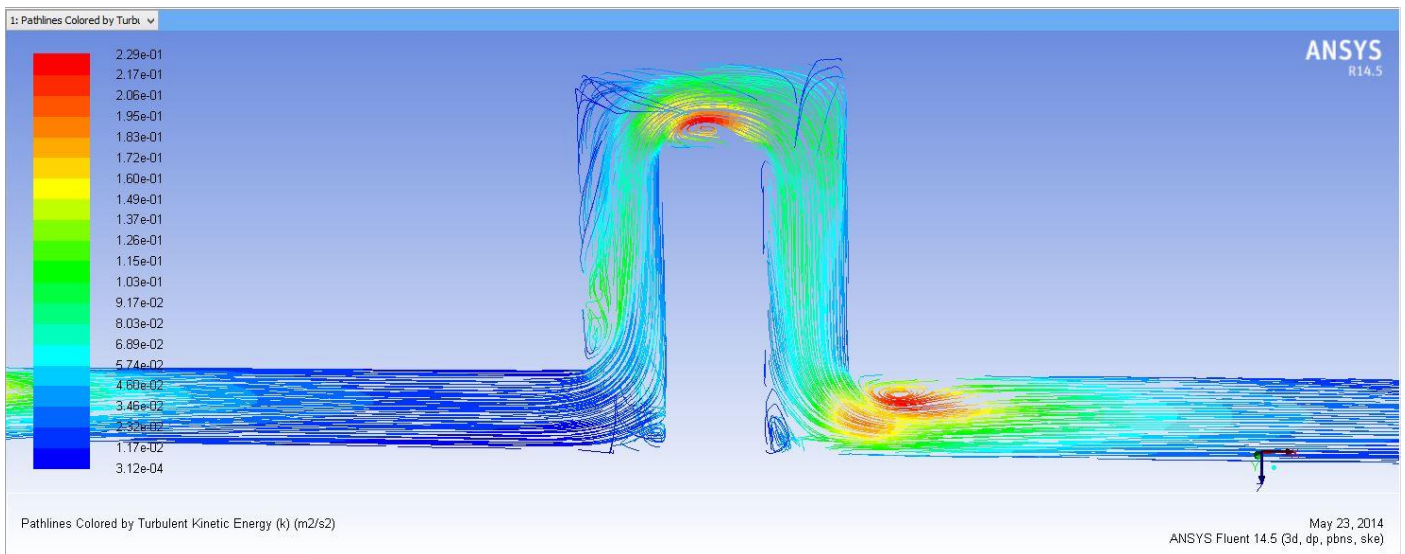


Εικόνα 24 - Ένταση της τύρβης σε ένα μέρος του αγωγού για ταχύτητα 1,2 m/s.

Από τις εικόνες 21-24 παρατηρούμε ότι η ένταση της τύρβης παίρνει μέγιστη τιμή στα σημεία που υπάρχει αποκόλληση της ροής λόγω αλλαγής στη γεωμετρία του αγωγού.

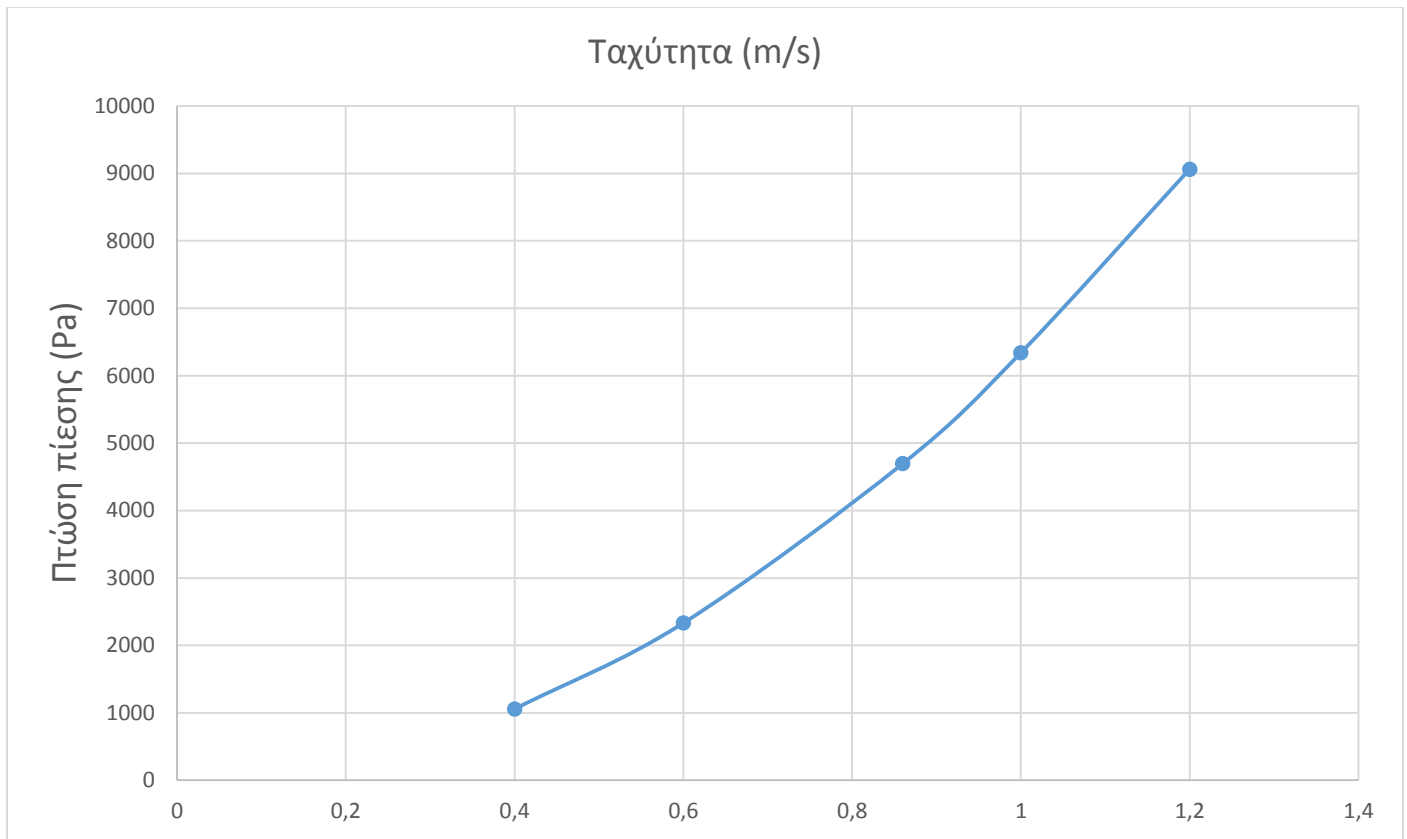


Εικόνα 25 - Γραμμές ροής της ταχύτητας σε ένα μέρος του αγωγού για ταχύτητα 0,86 m/s.



Εικόνα 26 - Γραμμές ροής της κινητικής ενέργειας της τύρβης σε ένα μέρος του αγωγού για ταχύτητα 0,86 m/s.

Στις εικόνες 25-26 παρατηρούμε στον στροβιλισμό που δημιουργείται στις γωνίες του αγωγού.



Γράφημα 3

Παρατηρούμε από το γράφημα 3 ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα εισαγωγής, η διαφορά πίεσης μεταξύ εισαγωγής και εξαγωγής είναι μεγαλύτερη επίσης λόγω αύξησης των απωλειών.

Πείραμα 3^ο – Γραμμή ενέργειας



Εικόνα 27 – Πειραματική διάταξη του εργαστηρίου της μηχανικής ρευστών

Θεωρητικό μέρος

Το ολικό ύψος ενέργειας:

$$H = Z + \frac{\rho}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}$$

$h = Z + \frac{\rho}{\gamma}$ λέγεται και πιεζομετρικό ύψος.

Αν υποθεθεί ότι έχουμε μονοδιάστατη ροή ενός πραγματικού ρευστού από τη θέση (1) στη θέση (2) περιλαμβανομένων και των ενεργειακών απωλειών (ΔH^{\wedge}) η εξίσωση της ενέργειας θα είναι της μορφής:

$$H = Z_1 + \frac{\rho_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{\rho_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g}$$

Αφού ούτε προσθέτουμε, ούτε αφαιρούμε ενέργεια κατά τη ροή του ρευστού εντός του κυκλικού αγωγού, το ολικό ύψος των ενεργειακών απωλειών (ΔH_{12}) θα είναι h_f (απώλειες λόγω τριβής στα τοιχώματα) συν h_m (απώλειες που οφείλονται σε αλλαγές διευθύνσεως και διατομής του αγωγού).

Για ένα κλειστό σύστημα σταθερής διατομής, οι απώλειες λόγω τριβών εξαρτώνται από την πυκνότητα (ρ), το ιξώδες (μ) και την ταχύτητα του ρευστού (U), καθώς επίσης και από το μήκος του αγωγού (l), την διάμετρο (D) και την τραχύτητα (ϵ).

Η εξάρτηση αυτή δίδεται από τη σχέση Darcy – Weisbach:

$$h_f = f * \frac{l}{D} * \frac{U^2}{2g}$$

Όπου:

f ο συντελεστής τριβής (αδιάστατος) που εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds:

$$Re = \frac{P * U * D}{\mu} \quad \text{ή} \quad Re = \frac{U * D}{\nu} \quad \text{ή} \quad Re = \frac{U * 4 * R * h}{\nu}$$

Όπου:

$$\rho \text{ σε } \frac{kg}{m^3}$$

$$U \text{ σε } \frac{m}{sec}$$

$$D \text{ σε } m$$

$$\mu \text{ σε } \frac{kg}{m * sec}$$

$$\mu \text{ στους } 15^\circ C \quad 1.14 * 10^{-3}$$

$$\mu \text{ στους } 20^\circ C \quad 1.005 * 10^{-3}$$

$$\mu \text{ στους } 25^\circ C \quad 0.894 * 10^{-3}$$

Ο συντελεστής f υπολογίζεται από διάγραμμα Moody (Re & $\frac{\epsilon}{D}$)

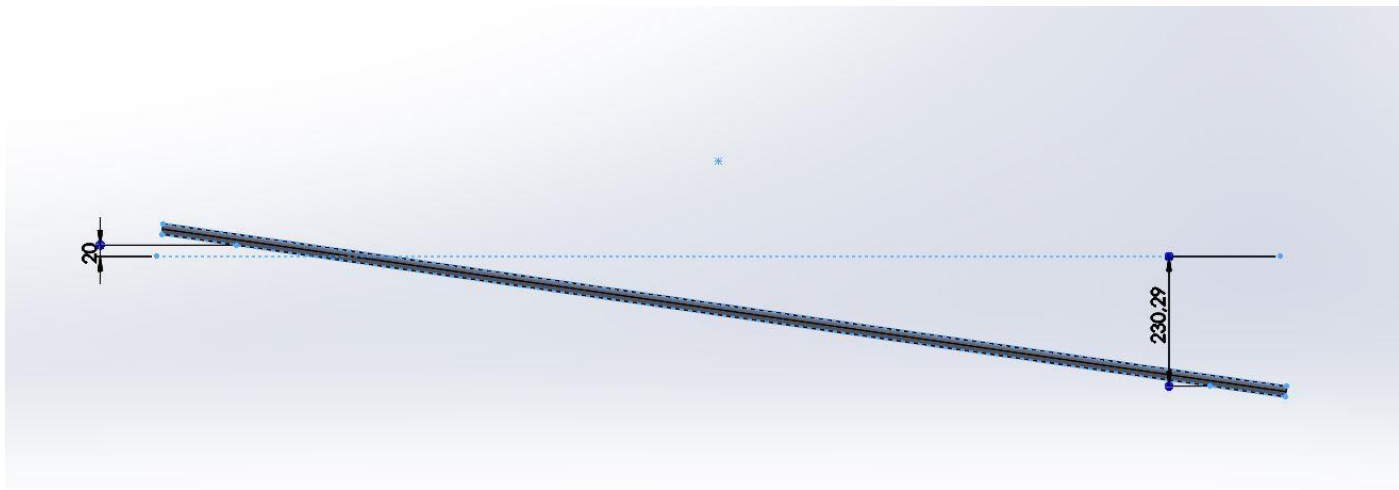
l = μήκος αγωγού

D = διάμετρος αγωγού

U = μέση ταχύτητα ρευστού

$$\text{Εάν } Re < 2320, \text{ τότε } f = \frac{64}{Re}$$

Οι τοπικές απώλειες $h_m = k \frac{U^2}{2g}$, υπολογίζονται για κάθε περίπτωση χωριστά (άνοιγμα αγωγού, βάνο κτλ).



Εικόνα 28 – Σημεία δειγματοληψίας του αγωγού

$$Q = 1360 \frac{lt}{h}$$

$$D = 314'' = 0.01905 \text{ m}$$

$$L = 2 \text{ m}$$

Πειραματικός υπολογισμός απωλειών:

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{U_1^2}{2 * g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{U_2^2}{2 * g} + \Delta H_{1,2} \Rightarrow 39 \text{ cmW} + 2 \text{ cm} = 29 \text{ cmW} - 23 \text{ cm} + \Delta H_{1,2} \Rightarrow$$

$$\Delta H_{1,2} = h_{f_{\text{πειρ}}} = 35 \text{ cm}$$

$$U = \frac{4 * Q}{\pi * D^2} = \frac{4 * 1360 * \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{3600 \text{ sec}}}{\pi * (0.01905 \text{ m})^2} = 1.32 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$Re = \frac{U * D}{\nu} = \frac{1.32 * 0.01905 \frac{\text{m}}{\text{sec}}}{10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}} = 2.51 * 10^4$$

$$\frac{E}{D} = \frac{0.0152 \text{ cm}}{1.905 \text{ cm}} = 0.008$$

Άρα:

$$f = 0.038$$

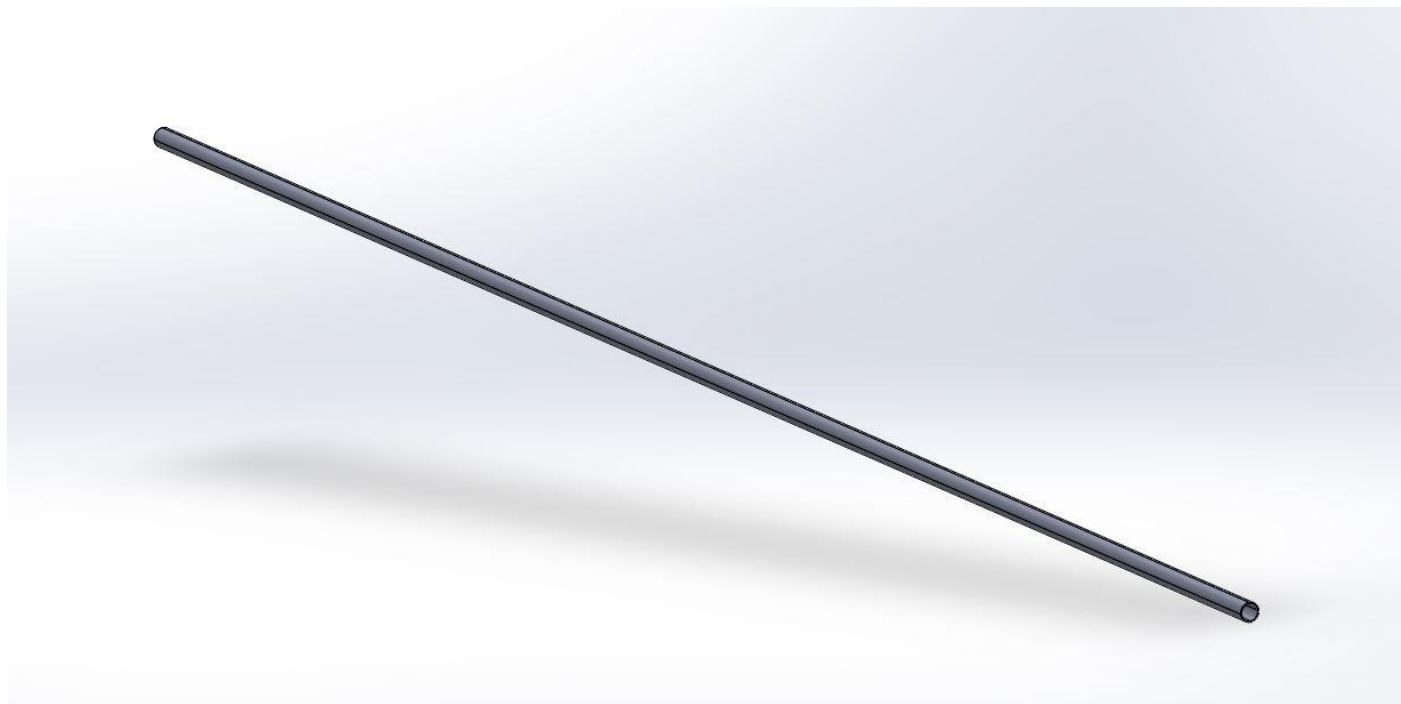
$$h_f = 0.038 * \frac{2 \text{ m}}{0.01905 \text{ m}} * \frac{(1.32)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}}{2 * 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}} = 0.354 \text{ m}$$

$$h_{f_{\theta\epsilon\omega\rho}} = 35.4 \text{ cm}$$

$$h_{f_{\pi\epsilon\iota\rho}} = 35 \text{ cm}$$

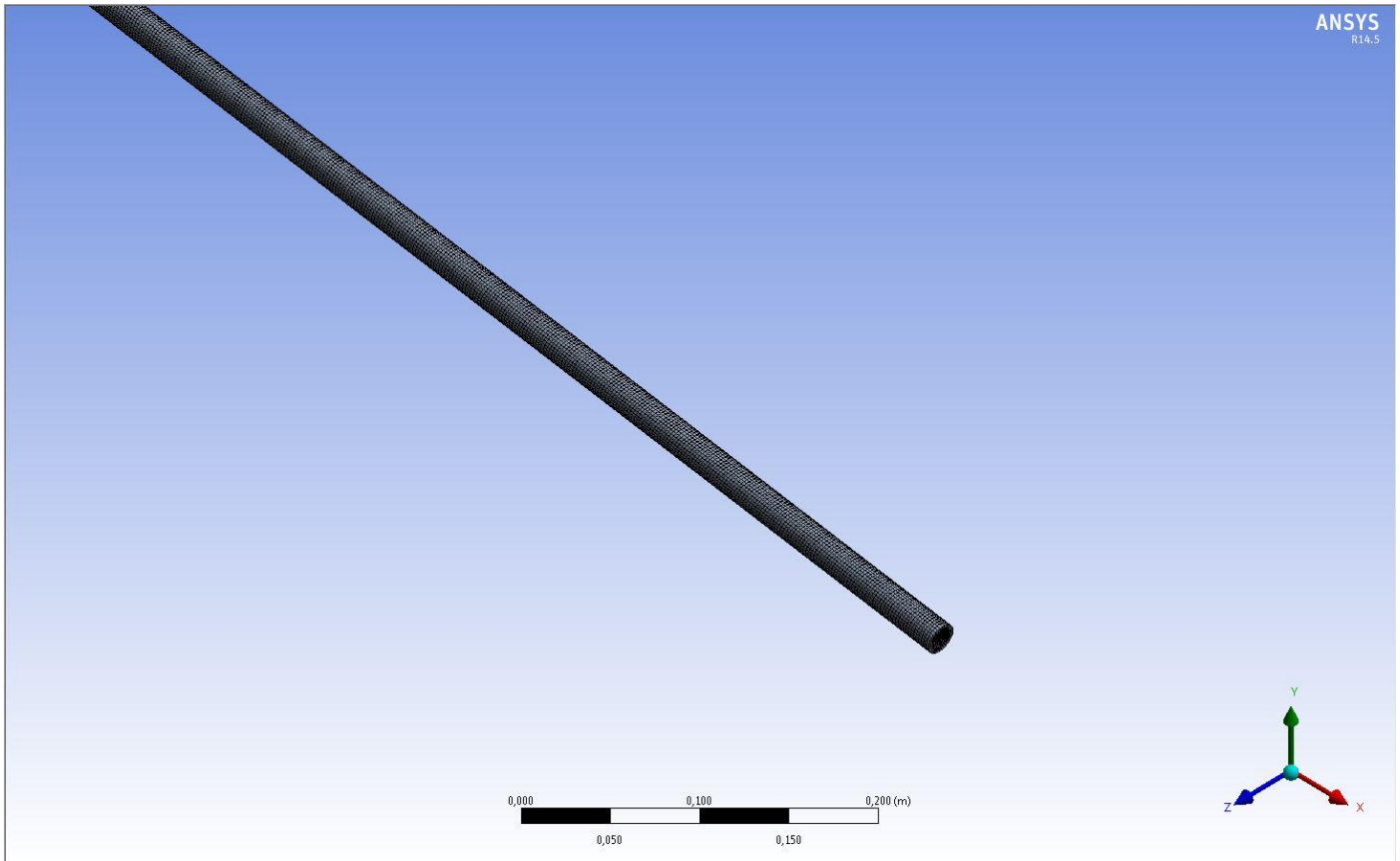
Προσομοίωση CFD

Όπως και στο προηγούμενα πειράματα , η μοντελοποίηση έγινε στο πρόγραμμα Solidworks και έπειτα το μοντέλο μεταφέρθηκε στην σουίτα της Ansys για τα επόμενα βήματα.



Εικόνα 29 - Τρισδιάστατο μοντέλο του σωλήνα της πειραματικής διάταξης στο πρόγραμμα Solidworks

Δημιουργία του πλέγματος στην σουίτα της Ansys (εικόνα 30)



Εικόνα 30 – Μέρος του μοντέλου του σωλήνα στο οποίο απεικονίζεται το πλέγμα.

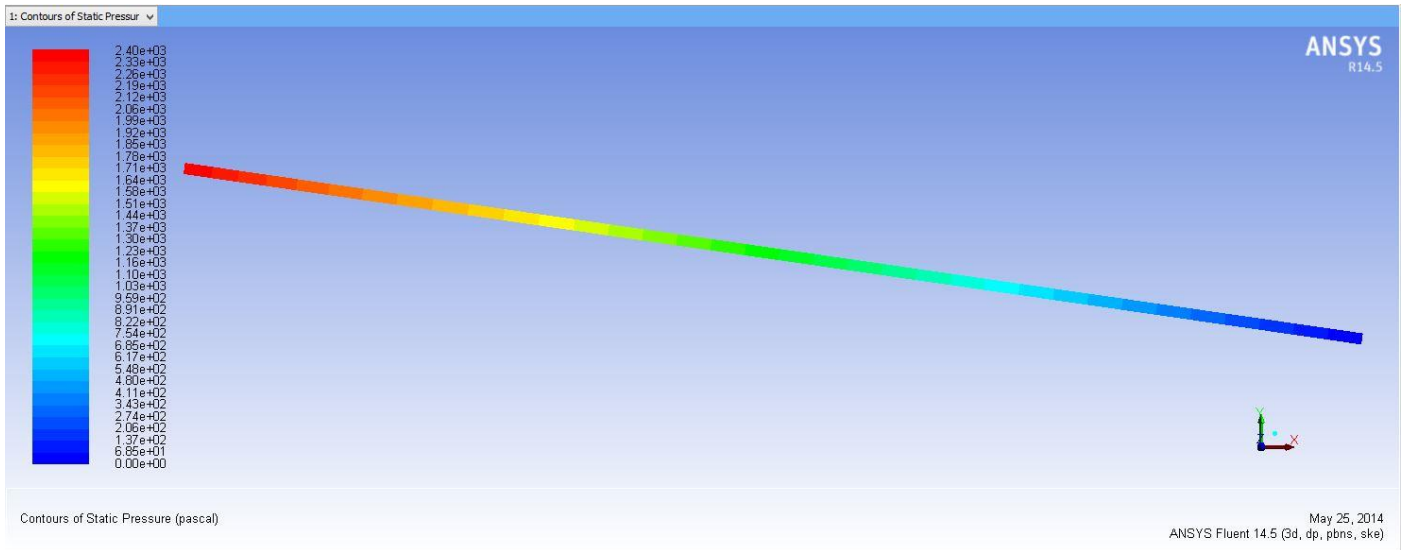
Το επόμενο βήμα μετά τη δημιουργία του πλέγματος είναι ο ορισμός των παραμέτρων για την επίλυση του προβλήματος.

Όπως υπολογίστηκε παραπάνω η ροή στο σωλήνα θα είναι τυρβώδης και κατά συνέπεια στις παραμέτρους επίλυσης στο fluent επιλέγουμε το μοντέλο k-epsilon standard με τις προκαθορισμένες τιμές του.

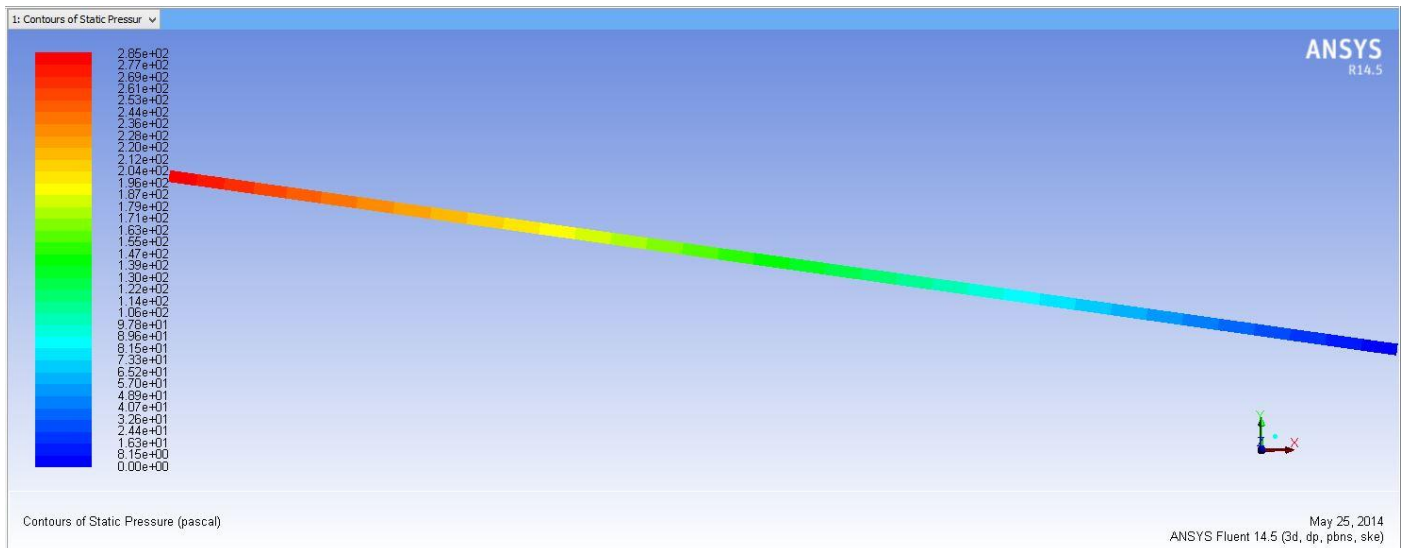
Στις συνοριακές συνθήκες θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής ταχύτητες εισαγωγής : 0,4 , 0,6 , 0,86 , 1 , 1,32 m/s. Ο λόγος για την επιλογή πολλαπλών ταχυτήτων εισαγωγής, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η ταχύτητα που υπολογίσαμε παραπάνω, είναι για να εξετάσουμε στη συμπεριφορά του πειράματός μας σε διαφορετικές ταχύτητες εισαγωγής.

Στην έξοδο του σωλήνα επιλέγουμε pressure-outlet με ατμοσφαιρική πίεση.

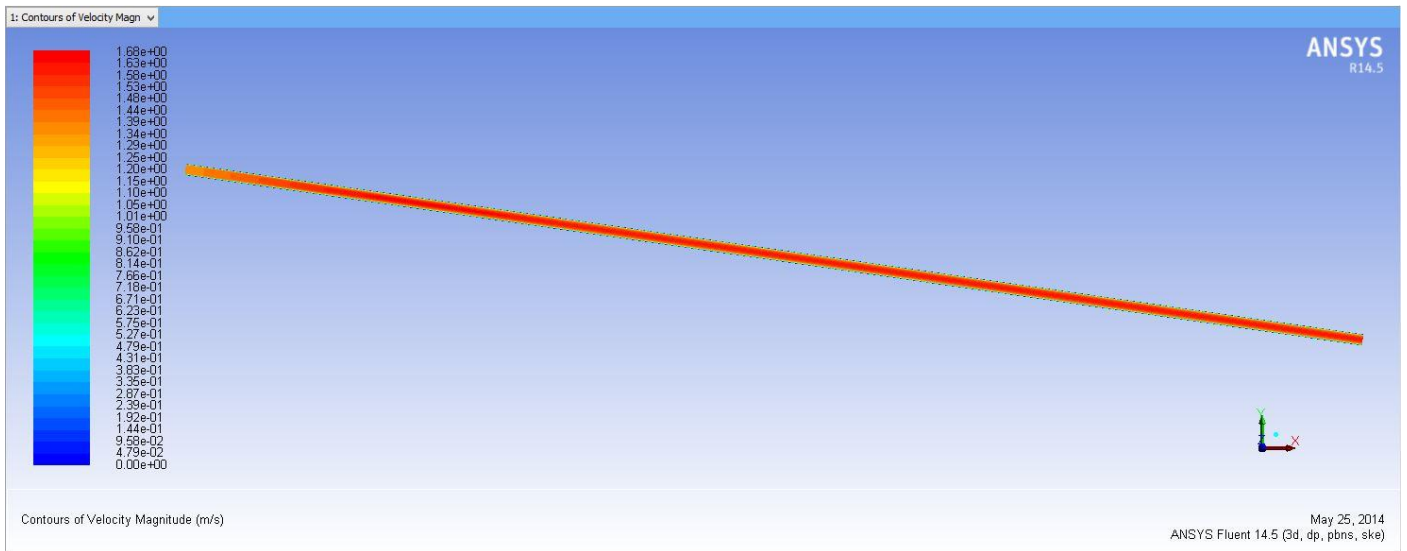
Αποτελέσματα προσομοίωσης



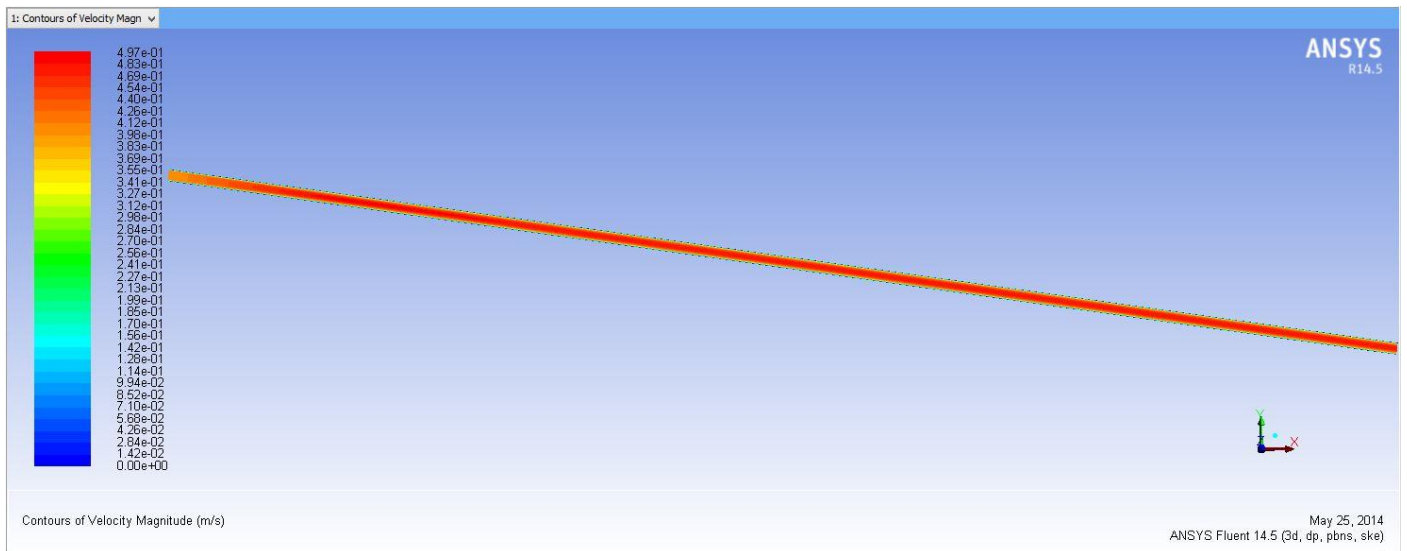
Εικόνα 31 – Στατική πίεση κατά μήκος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 1,36 m/s.



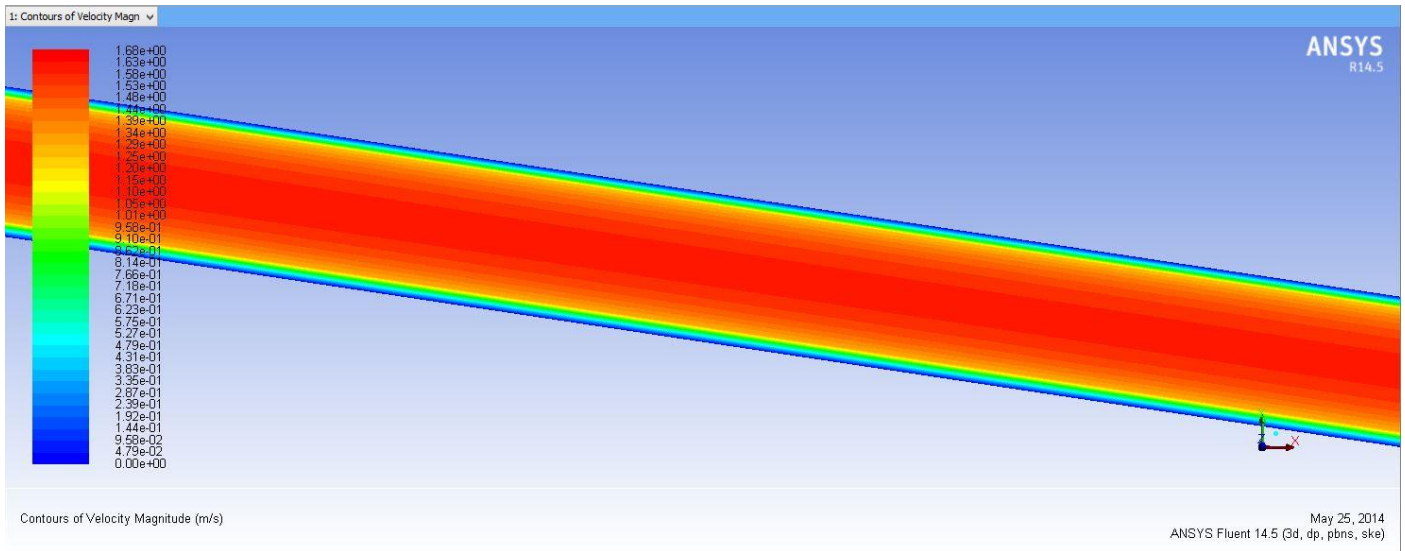
Εικόνα 32 – Στατική πίεση κατά μήκος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 0,4 m/s.



Εικόνα 33 – Κατανομή της ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 1,36 m/s.

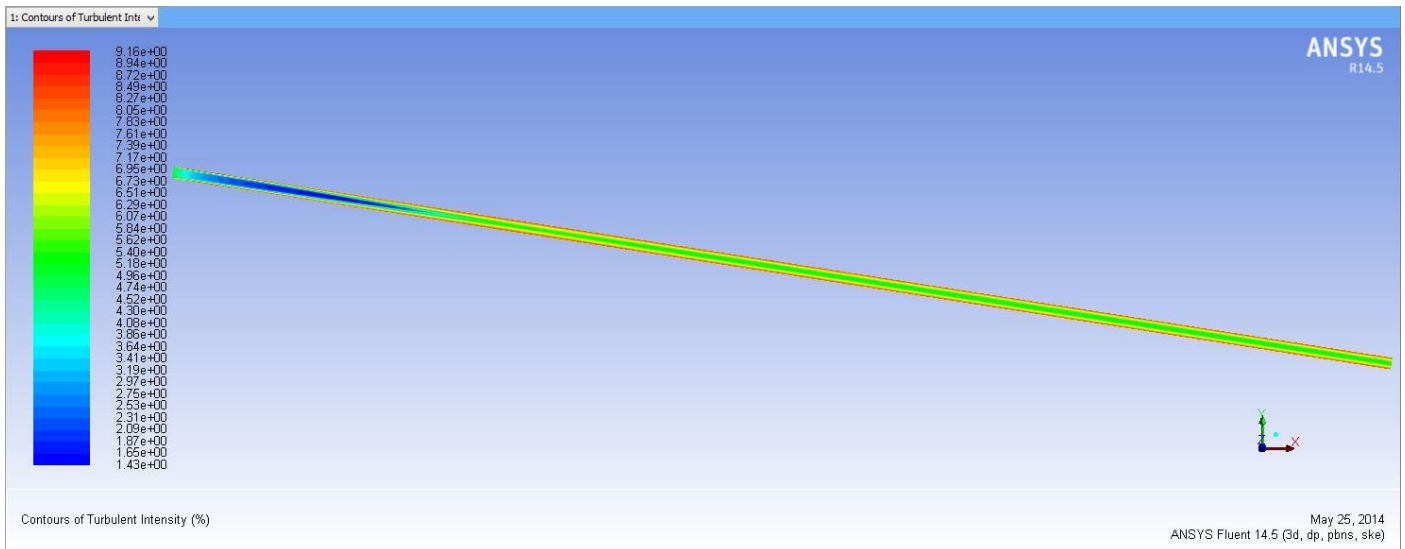


Εικόνα 34 – Κατανομή της ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 0,4 m/s.

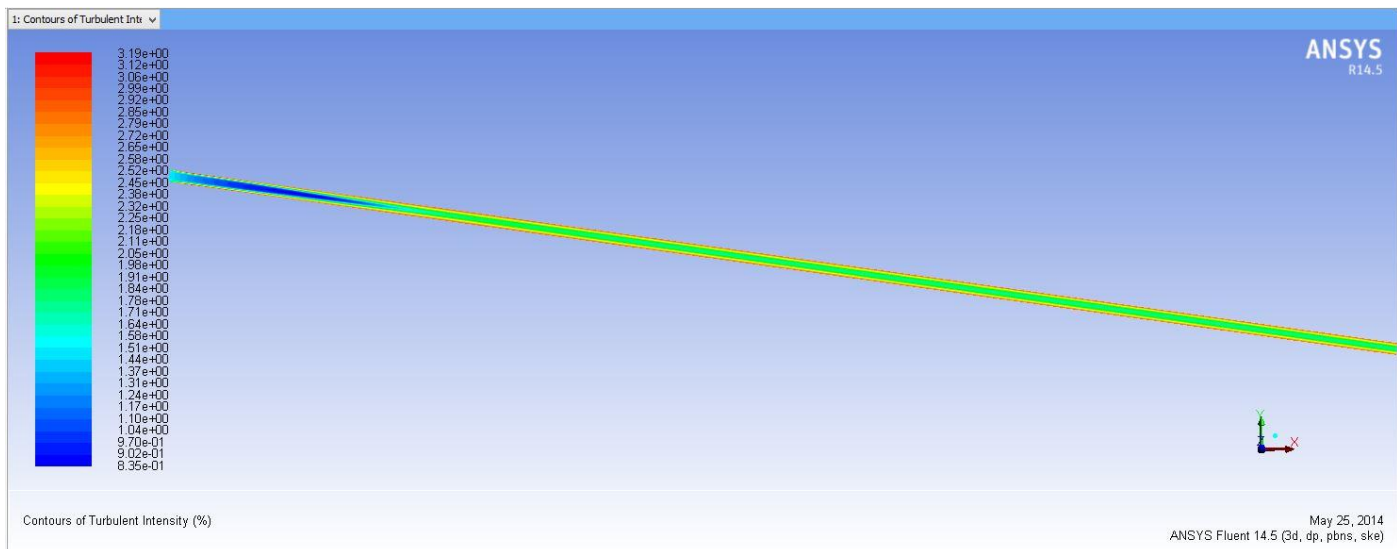


Εικόνα 35 – Κατανομή της ταχύτητας σε ένα μέρος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 1,36 m/s.

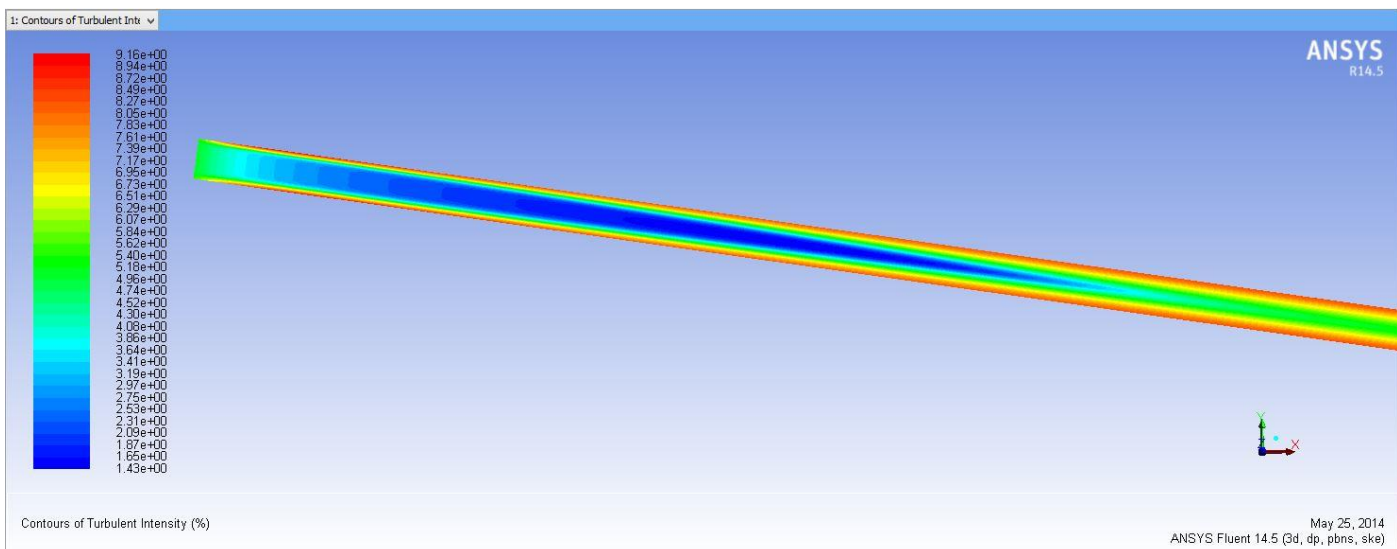
Από τις εικόνες 33-35, παρατηρούμε ότι η κατανομή ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού είναι ομοιόμορφη καθώς η διατομή του παραμένει σταθερή.



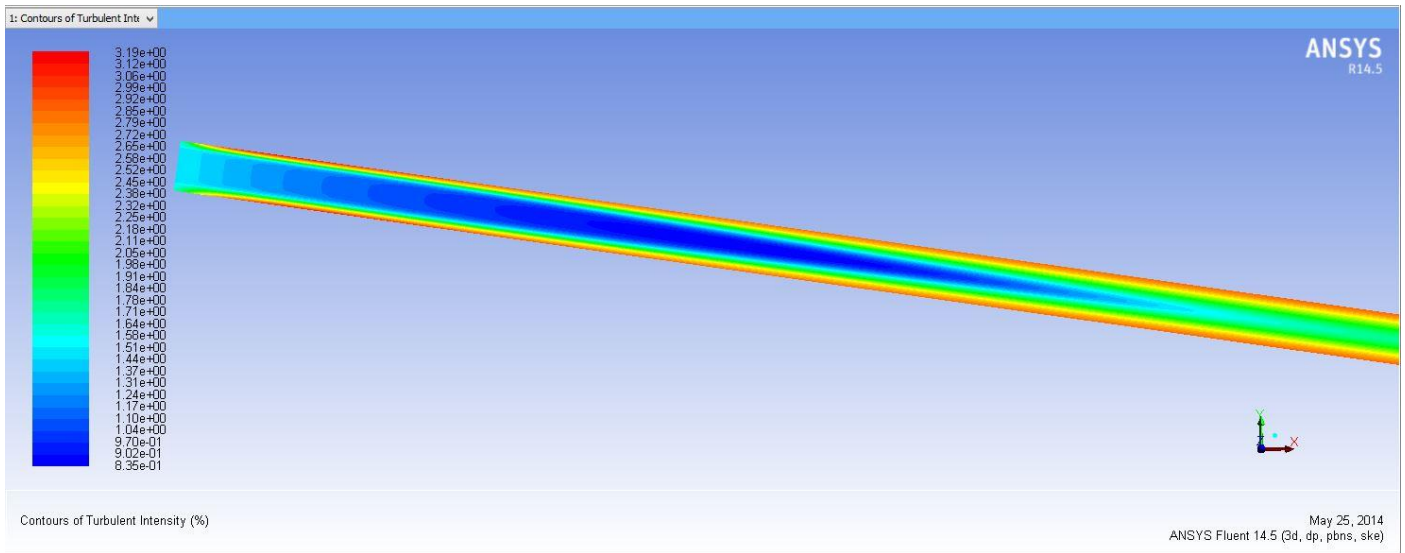
Εικόνα 36 – Κατανομή της έντασης της τύρβης κατά μήκος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 1,36 m/s.



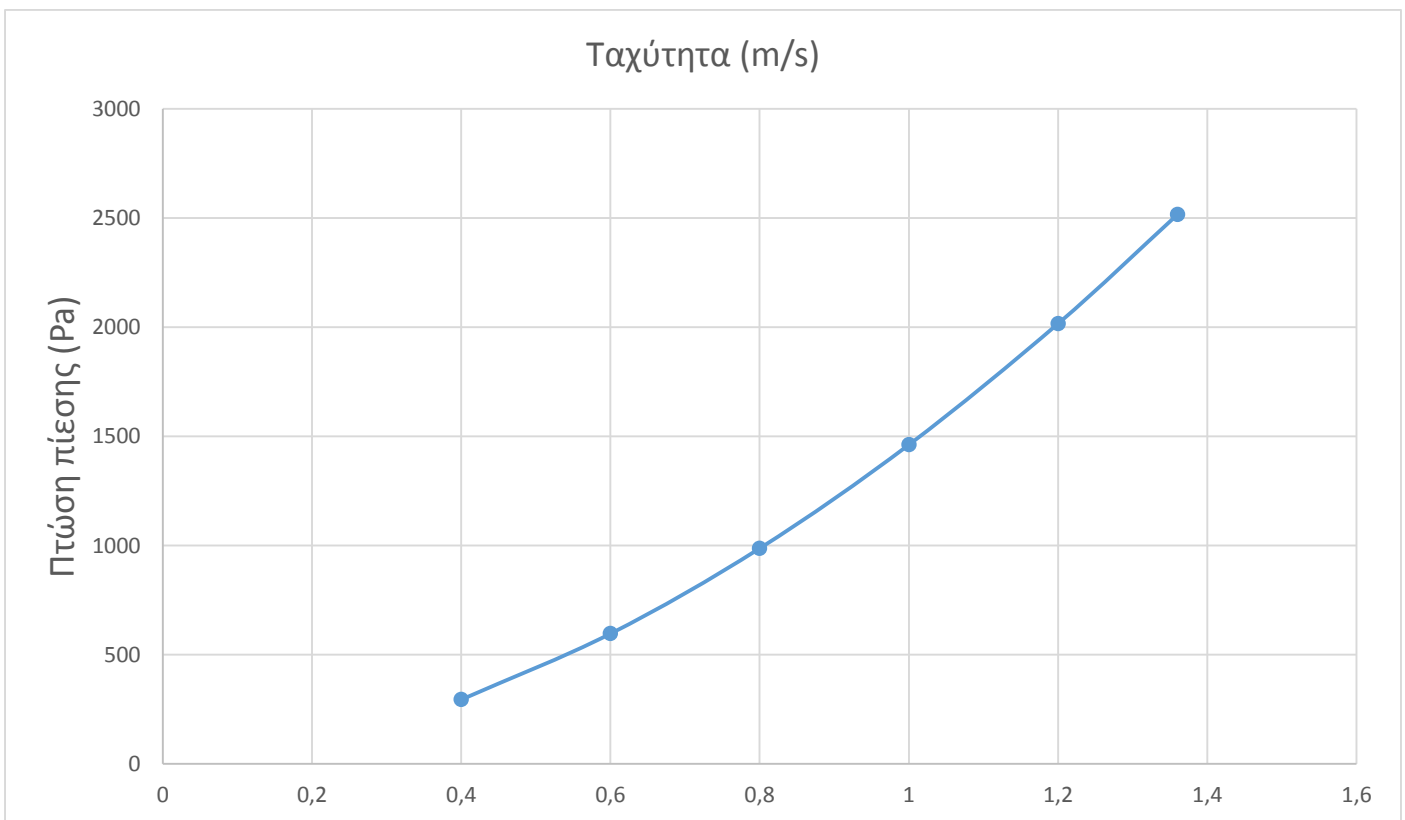
Εικόνα 37 – Κατανομή της έντασης της τύρβης κατά μήκος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 0,4 m/s.



Εικόνα 38 – Κατανομή της έντασης της τύρβης στο αρχικό μέρος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 1,36 m/s.



Εικόνα 39 – Κατανομή της έντασης της τύρβης στο αρχικό μέρος του αγωγού για ταχύτητα εισόδου 0,4 m/s.

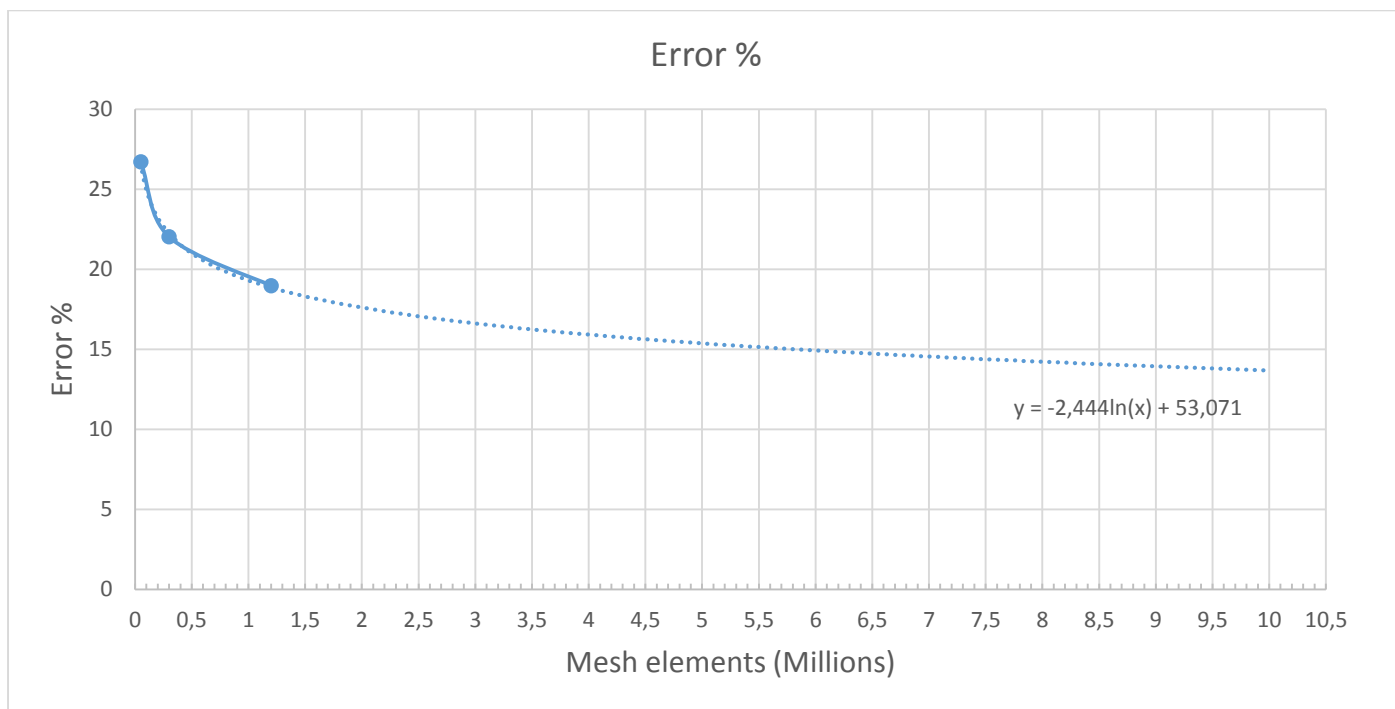


Γράφημα 4

Παρατηρούμε από το γράφημα 4 ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα εισόδου, η διαφορά πίεσης μεταξύ εισαγωγής και εξαγωγής είναι μεγαλύτερη επίσης λόγω αύξησης των απωλειών.

Κατά την πρώτη προσομοίωση του πειράματος στο fluent , πήραμε σαν αποτέλεσμα διαφορά ολικής πίεσης εισόδου – εξόδου, **25,6 cmW**. Παραπάνω υπολογίστηκε η απώλεια πίεσης μέσω της πειραματικής διάταξης του εργαστηρίου στα **35 cmW**. Άρα προκύπτει σφάλμα της τάξης του **26,72%**, το οποίο κρίνεται αρκετά μεγάλο.

Για την μείωση του σφάλματος πραγματοποιήθηκαν δυο επιπλέον προσομοιώσεις με πυκνότερο πλέγμα, η πρώτη με 300.000 στοιχεία πλέγματος και η δεύτερη με 1.200.000. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω γράφημα.



Γράφημα 5

Στο γράφημα 5 , έχουμε στον άξονα Χ το πλήθος των στοιχείων του πλέγματος και στον άξονα Ψ το ποσοστό σφάλματος. Παρατηρούμε πως μεταβάλλεται το ποσοστό του σφάλματος όσο το πλέγμα γίνεται πιο πυκνό.

Σύνοψη - Συμπεράσματα

Για το πειραματικό μέρος αυτής της εργασίας, εκτελέσαμε τρία πειράματα από πειραματικές διατάξεις του εργαστηρίου της μηχανικής ρευστών. Σκοπός μας ήταν η σύγκριση των αποτελεσμάτων που λάβαμε από το εργαστήριο με τα αποτελέσματα από την προσομοίωση αυτών με το πρόγραμμα CFD, Fluent της Ansys Inc.

Για την μοντελοποίηση των αγωγών των πειραματικών διατάξεων σε υπολογιστή, χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Solidworks, για λόγους ευχρηστότητας έναντι του σχεδιαστικού προγράμματος της σουίτας της Ansys αλλά επίσης και λόγω καλύτερης εξοικείωσης του σπουδαστή στο συγκεκριμένο πρόγραμμα, μέσω των μαθημάτων της σχολής.

Μετά το πέρας της μοντελοποίησης, έγινε η μεταφορά των μοντέλων των αγωγών στην σουίτα της Ansys, μέσω του επίσημου Plugin για το Solidworks.

Στη συνέχεια ακολούθησε η δημιουργία του πλέγματος των αγωγών, κατά την οποία δοκιμάστηκαν διαφορετικές πυκνότητες αυτού, για να εξετάσουμε πως αυτό επηρεάζει τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, όπως φαίνεται από το πείραμα 3.

Το επόμενο βήμα μετά την μοντελοποίηση και τη δημιουργία του πλέγματος, ήταν ο ορισμός των παραμέτρων επίλυσης στο fluent. Για το μοντέλο επίλυσης χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο τύρβης k-ε standard με τις προεπιλεγμένες παραμέτρους του, καθώς σε όλα τα πειράματα είχαμε αριθμό Reynolds μεγαλύτερο του 10000.

Στις συνοριακές συνθήκες, χρησιμοποιήσαμε πολλαπλές ταχύτητες εισαγωγής, για να εξετάσουμε την συμπεριφορά των αποτελεσμάτων με διαφορετικές ταχύτητες, όπως φαίνεται και από το πείραμα 1. Στην έξοδο των αγωγών επιλέχθηκε pressure-outlet με ατμοσφαιρική πίεση σε όλες τις περιπτώσεις.

Οι τιμές των υπολειμματικών κυμάνθηκαν από 10^{-6} έως 10^{-12} και έγιναν όσες επαναλήψεις ήταν απαραίτητες μέχρι την σύγκλιση της λύσης στις περισσότερες περιπτώσεις ή μέχρι το σημείο που οι τιμές των υπολειμματικών δεν μειωνόταν περαιτέρω. Το πλήθος των επαναλήψεων που χρειάστηκαν μεταβάλλεται ανάλογα με το πείραμα, την πυκνότητα του πλέγματος και τις διαφορετικές συνοριακές συνθήκες εισαγωγής.

Στο πείραμα 1 παρατηρήσαμε μια αρκετά ικανοποιητική σύγκλιση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης CFD και των αποτελεσμάτων που λάβαμε από την πειραματική διάταξη, όπως φαίνεται στο Γράφημα 2.

Στο πείραμα 2, ο αγωγός μας είχε πολλές απότομες αλλαγές στην γεωμετρία του (γωνίες 90°). Μέσω των εικόνων των αποτελεσμάτων από το Fluent, δείξαμε τον στροβιλισμό που δημιουργείται στις γωνίες του και το μέγεθός του. Δείξαμε επίσης την αποκόλληση και την προσκόλληση της ροής και την μεταβολή της πίεσης κατά μήκος του αγωγού, τα οποία παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον σε τέτοιου είδους αγωγούς.

Στο πείραμα 3, αρχικά είχαμε μεγάλο ποσοστό σφάλματος μεταξύ των δυο σετ αποτελεσμάτων, το οποίο στη συνέχεια καταφέραμε να το μειώσουμε αισθητά και μέσα σε αποδεκτά όρια, με την πύκνωση του πλέγματος του μοντέλου του αγωγού, όπως φαίνεται από το γράφημα 5.

Πηγές – Βιβλιογραφία

Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics (Springer, 3ed, 2001)(T)(431s)

Computational fluid dynamics – Abdulnaser Sayma

Διαδίκτυο