ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΦΟΙΤΗΤΗ
ΣΠΥΡΙΔΑΚΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΛΕΓΧΟΣ – ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΑΡΒΑΝΙΤΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΜΑΙΟΣ, 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο Γραμμικός προγραμματισμός θεωρείται ως το σημαντικότερο πρότυπο στο χώρο της Διοικητικής Επιστήμης και είναι ίσως μια από τις πιο σπουδαίες ανακαλύψεις του αιώνα μας στην οικονομική επιστήμη. Το αντικείμενό του και η κατανομή περιορισμένων πόρων ανάμεσα σε διάφορες δραστηριότητες κατά το άριστο δυνατό τρόπο. Καλείται δε να συντελέσει στη λύση προβλημάτων όταν αυτά αφορούν αποφάσεις οικονομικού προγραμματισμού.

Για να αντιληφθούμε καλύτερα την ανάγκη προγραμματισμού μιας οικονομικής δραστηριότητας, θα εξετάσουμε το πρόβλημα της άριστης επιλογής προϊόντων και διαδικασιών μιας επιχείρησης, η οποία λειτουργεί σε υψηλό επίπεδο παραγωγικότητας. Στο επίπεδο αυτό, η επιχείρηση μπορεί εύκολα να αντιμετωπίσει την εξάντληση της δυναμικότητας τη εξ αιτίας του περιορισμού των πρώτων υλών της, της δυναμικότητας παραγωγής των μηχανών της, της χωρητικότητας των αποθηκών της, του εργατικού δυναμικού της, καθώς και άλλων τεχνολογικών, κοινοτικών ή περιβαλλοντικών παραγόντων.

Μια απλή λύση της μορφής να παραχθεί "μόνο το προϊόν το οποίο κάνει την αποδοτικότερη χρήση των διαθέσιμων πόρων ή των μέσω παραγωγής" δε μπορεί να υπάρξει γιατί, ως επί το πλείστον, δεν υπάρχει μια διαδικασία ή ένα προϊόν το οποίο να είναι το οικονομικότερο στο χρήση όλων των πόρων της επιχείρησης ταυτόχρονα. Ένα προϊόν μπορεί να κάνει την καλύτερη χρήση της μηχανής, δηλαδή να παράγει το υψηλότερο κέρδος ανά μονάδα χρόνου απασχόλησης της μηχανής, ενώ ένα άλλο μπορεί να απασχολεί το μικρότερο χώρο αποθήκευσης. Έτσι, η αποκλειστική παραγωγή του πρώτου προϊόντος θα γεμίσει τελείως τις αποθήκες προτού εξαντληθεί ο διαθέσιμος χρόνος λειτουργίας της μηχανής, ενώ η αποκλειστική παραγωγή του δεύτερου θα εξαντλήσει το χρόνο μηχανής έχοντας ακόμη διαθέσιμο χώρο αποθήκης.

Για να εφαρμόσουμε σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα το Γραμμικό Προγραμματισμό, θα πρέπει να πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις, που ονομάζονται συνήθως "αρχές" της εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού και είναι οι *α. αρχή της αναλογίας β. αρχή των σταθερών συντελεστών γ. αρχή της προσθετικότητας* δ. αρχή της διαιρετότητας

Για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού που το $n>2$ χρησιμοποιείται η μέθοδος Simplex ή η απλοποιημένη μέθοδος. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η μέθοδος αυτή βασίζεται σε ορισμένες βασικές ιδιότητες της λύσης του προβλήματος του γραμμικού προγραμματισμού, που συνάγονται από τη γραφική επίλυση των προηγούμενων παραδειγμάτων και οι οποίες ισχύουν και για το γενικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού.

SUMMARY

Linear programming is considered as the most important pattern in the area of Management science and perhaps it is one of the most important discoveries of our century in economics. Its subject and the distribution of restrained resources among various activities in an optimal way. It is also requested to contribute to problems' solution when they concern financial programming decisions.

The best way to understand the programming necessity of an economic activity will examine the problem of the optimal choice of products and processes of a company ,which functions at high levels of productivity. At this level, the company can easily cope with the exhaustion of its capacity because of the restriction of its raw materials, the capacity of engines' production , the capacity of its storehouse , its workforce, and as other technological, communal or environmental factors.

A simple solution of the form to be produced "only the product that makes the most efficient use of the available resources or the means of production" cannot be sustained because, mostly, there is not a procedure or a product that is the most economical in use of all of the company resources , simultaneously.A product can make the best use of the engine, that is to produce the highest profit per time unit of the engine's occupation, while another might occupy the least storage space. Thus, the exclusive production of the first product will fill up the storages before running the available function time of the engine , while the exclusive production of the latter will exhaust the engine time having yet available storehouse place. In order to apply linear programming in a specific problem, will have to fulfill the presuppositions , that are usually called " principles" of linear programming application and they are: a. the principle of proportion, b. the principle of steady contributors, c. the principle of additionally, d. the principle of divisibility.

For the solving of linear programming problems where n>2 is used the method Simplex or the simplified method. It is remarkable the fact that this method is based in some basic properties of the solution of linear programming problems, which conclude from the graphical solution of the previous examples and that also are valid for the general difficulty of linear programming.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι το κύριο εργαλείο στην άσκηση της Διοίκησης και ειδικότερα στη λήψη αποφάσεων, είναι η Επιχειρησιακή Έρευνα (Ε.Ε.), η οποία μπορεί να οριστεί σαν μια επιστημονική μεθοδολογία για υποστήριξη της διαδικασίας λήψης διοικητικών αποφάσεων σε περίπλοκα συστήματα που λειτουργούν μέσα σ' ένα αβέβαιο περιβάλλον.

Οι μελέτες της Επιχειρησιακής Έρευνας αποσκοπούν στην παροχή επιστημονικά θεμελιωμένων προτάσεων για στήριξη και προώθηση αποφάσεων της διοίκησης μιας επιχείρησης, οι οποίες έχουν στόχο τη βελτίωση της απόδοσής και την αποτελεσματικότερη λειτουργία της.

Οι προτάσεις αυτές αφορούν είτε μια βέλτιστη λύση (ή ικανοποιητικές προσεγγίσεις της) στο μελετώμενο πρόβλημα ή ένα σύνολο από εναλλακτικές ικανοποιητικές λύσεις κατάλληλα αξιολογημένες.

Λέξη κλειδί στον παραπάνω ορισμό είναι το μοντέλο. Στο χώρο της Ε.Ε. Με μοντέλο εννοούμε μια αφαίρεση της πραγματικότητας, δηλαδή μια απλουστευμένη και ιδεατή απεικόνιση ενός πραγματικού συστήματος (ή διαδικασίας ή φαινομένου) με τη μορφή ποσοτικών (συνήθως) σχέσεων μεταξύ διαφόρων μεταβλητών (παραμέτρων) και με σκοπό να βοηθήσει στη λήψη μιας διοικητικής απόφασης για την επίτευξη ορισμένων στόχων.

Σημειώνεται ότι μια μελέτη Επιχειρησιακής Έρευνας δεν περιορίζεται στη διατύπωση ενός μαθηματικού μοντέλου για την επίλυσή του: Περιλαμβάνει μια σειρά φάσεων, από την πρωτογενή έρευνα και ανάλυση του συστήματος, μέχρι και τη μέθοδο υλοποίησης των τελικών αποτελεσμάτων.

Η εντυπωσιακή ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας (κύρια μετά το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο) οφείλεται σε δύο βασικές αιτίες:

α) τις διαρκώς αυξανόμενες ανταγωνιστικές πιέσεις κάτω από τις οποίες λειτουργούν οι σύγχρονες επιχειρήσεις.

β) την εξέλιξη και διάδοση των Η/Υ που κάνουν δυνατή τη γρήγορη επεξεργασία τεράστιου όγκου πληροφοριών και επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων.

Η Επιχειρησιακής Έρευνα χαρακτηρίζεται από ένα μεγάλο πεδίο εφαρμογών που συνεχώς διευρύνεται. Ενδεικτικά αναφέρονται οι παρακάτω περιοχές επιχειρηματικών δραστηριοτήτων στις οποίες έχουν πραγματοποιηθεί πλήθος εφαρμογών της Επιχειρησιακής Έρευνας: βιομηχανία, μεταφορές, χωροθέτηση βιομηχανικών και εμπορικών εγκαταστάσεων, μάρκετινγκ κλπ. Εκτός από τον Ιδιωτικό και ο Δημόσιος Τομέας χρησιμοποιεί, με μεγάλη επιτυχία, τη μεθοδολογία της Ε.Ε., με εφαρμογές σε τομείς όπως της υγείας, της εκπαίδευσης, αντιπυρικής προστασίας, χωροθέτησης δημοσίων επιχειρήσεων, προστασίας του περιβάλλοντος κλπ.

1.1. Ιστορική Αναδρομή

Οι πρώτες ενδιαφέρουσες θεμελιώσεις προβλημάτων με τη μορφή μαθηματικού προγράμματος – ενός από τα βασικά μοντέλα της Ε.Ε. - έγιναν προς το τέλος του περασμένου αιώνα από τον οικονομολόγο Walras.

Στον μεσοπόλεμο έκαναν την εμφάνισή τους παρομοίου τύπου, αλλά περισσότερο εξειδικευμένα, οικονομικά μοντέλα των Markov και Von Newman.

Στη διάρκεια του Β' Παγκόσμιου Πολέμου η Ε.Ε. Εδραιώνεται, σε πρώτη φάση από τους Βρετανούς, σαν συστηματική μεθοδολογία στην αντιμετώπιση τακτικών και στρατηγικών προβλημάτων της εναέριας και θαλάσσια άμυνας των Βρετανικών Νήσων, με αντικειμενικό στόχο την αποτελεσματική χρησιμοποίηση των περιορισμένων στρατιωτικών πόρων, που διέθετε τότε η Βρετανία (χωροθέτηση συστημάτων ραντάρ, σύνθεση νηοπομπών κ.λπ). Οι επιτυχίες των Βρετανικών ομάδων επιχειρησιακών ερευνών είχαν σαν αποτέλεσμα την υιοθέτηση και από τον Αμερικανικό Στρατό της μεθοδολογία της Ε.Ε., αλλά αυτή τη φορά σε πολύ μεγαλύτερη έκταση και για πολυπλοκότερα προβλήματα (λογιστικά προβλήματα υποστήριξης επιχειρήσεων, σχεδίαση πτήσεων, ναρκοθετήσεις κ.λπ.) Έκτοτε οι Αμερικανοί διατηρούν την πρωτοπορία στην έρευνα και τις εφαρμογές τη Ε.Ε.

Με τη λήξη του Β' Παγκοσμίου Πολέμου ακολούθησε μια γρήγορη βιομηχανική και εμπορική ανάπτυξη, που είχε σαν αποτέλεσμα τη ραγδαία αύξηση σε μέγεθος και πολυπλοκότητα των επιχειρήσεων και οργανισμών. Συγκεκριμένα, προκειμένου να ανταποκριθούν στις αυξημένες ανάγκες παραγωγής και παροχής υπηρεσιών, καθώς και στον ανταγωνισμό και διαρκώς εναλλασσόμενο περιβάλλον (τεχνολογίας, αγορά κλπ):

α. Αυξήθηκε σημαντικά η κατανομή της εργασίας και ο επιμερισμός των αρμοδιοτήτων μεταξύ των ασκούντων τη διοίκηση.

β. Δημιουργήθηκαν νέα τμήματα για εξειδίκευση των εργασιών του οργανισμού ή ανάπτυξη νέων εργασιών.

γ. Εμφανίστηκε έντονη η ανάγκη συντονισμού των τμημάτων της επιχείρησης να επιτευχθούν συνολικοί στόχοι και να γίνεται με συνολικά κριτήρια και κατανομή των πόρων.

Παράλληλα η πρόοδος της τεχνολογίας των Η/Υ έκανε δυνατή την παροχή ενημερωμένων πληροφοριών στα στελέχη της διοίκησης. Η ανάγκη λοιπόν για ομαδική αντιμετώπιση των περίπλοκων επιχειρησιακών προβλημάτων, μαζί με την πρόοδο της τεχνολογίας οδήγησαν σε μια σταδιακή εμφάνιση και αξιοποίηση της Ε.Ε. και στο χώρο της βιομηχανίας, καθώς και στους χώρους της παροχής υπηρεσιών, του προγραμματισμού κ.λπ.

1.2. Στόχοι και χαρακτηριστικά τη Επιχειρησιακής Έρευνας

Ήδη μέχρι το 1951 η Ε.Ε. είχε επικρατήσει σαν επιστημονική μέθοδος στη λήψη αποφάσεων στη Μ. Βρετανία, σύντομα δε επικράτησε και στις ΗΠΑ. Σήμερα η Ε.Ε. χρησιμοποιείται στην Ελλάδα και στ εξωτερικό με πληθώρα προβλημάτων οικονομικής και διοικητικής των επιχειρήσεων, εθνικής οικονομίας, τεχνικού σχεδιασμού κ.α. Μερικά παραδείγματα είναι:

- Η επιλογής προϊόντων για παραγωγή
- Η άριστη σύνθεση προϊόντων
- Ο προγραμματισμός παραγωγής
- Ο προγραμματισμός συντήρησης μηχανών
- Ο προγραμματισμός εργατικού δυναμικού
- Προβλήματα μεταφορών
- Συγκοινωνιακά προβλήματα
- Προβλήματα δικτύων

- Ο προγραμματισμός έργων
- Η επιλογή χαρτοφυλακίου επενδύσεων
- Η αξιολόγηση επενδύσεων
- Ο χρηματοοικονομικός προγραμματισμός
- Ο προγραμματισμός πωλήσεων
- Ο προγραμματισμός διαφημιστικής εκστρατείας
- Η εισαγωγή νέων προϊόντων
- Η κατανομή προσωπικού σε εργασίες
- Η επιλογή τόπου εγκατάσταση της επιχείρησης
- Ο προγραμματισμός κυκλοφορίας
- Η επιλογή ενεργειακής πολιτικής
- Προβλήματα βελτίωσης του περιβάλλοντος κ.α.

Τα κύρια χαρακτηριστικά της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι:
α. Όπως φαίνεται και από τον τίτλο, αποτελεί την έρευνας προκειμένου να ληφθεί μια επιχειρηματική απόφαση. Η έρευνα αυτή αναφέρεται σε όλες τις φάσεις αυτής της απόφασης, από τη μελέτη του περιβάλλοντος και του συστήματος, μέχρι και την υλοποίηση της στον οργανισμό κα τον μετέπειτα έλεγχο λειτουργίας.
β. Βασίζεται στην επιστημονική μεθοδολογία, η οποία περιλαμβάνει τα εξής γενικά στάδια: ανάλυση του συστήματος, διατύπωση στόχων, διατύπωση του μοντέλου, επίλυση του μοντέλου, ανάλυση της λύσης και υλοποίηση – εφαρμογή.
γ. Υιοθετεί μια ευρεία (συστηματική) εξέταση του προβλήματος μέσα στο γενικό πλαίσιο ολόκληρου του συστήματος, στο οποίο εντάσσεται και με το οποίο αλληλοεπηρεάζεται. Κατά συνέπεια, απαιτεί τη χρήση μιας ομάδας επιστημόνων διαφόρων ειδικοτήτων για διεπιστημονική προσέγγιση.
δ. Συνήθως έχει σαν στόχο την αριστοποίηση του συστήματος που εξετάζεται. Βέβαια σε περιπτώσεις που η αριστοποίηση δεν εμφανίζεται εφικτή (π.χ. Δυσκολία αναλυτικών λύσεων, κατασκευής μοντέλου κ.λπ.) καταφεύγουμε σε άλλες μεθόδους.
ε. Απαιτεί σχεδόν πάντα την ύπαρξη Η/Υ, είτε για την επίλυση των μαθηματικών μοντέλων ή για την παροχή των δεδομένων που χρειάζονται από τα μοντέλα, μέσα από τα αρχεία του οργανισμού, ή τέλος για την ενσωμάτωση των μοντέλων μέσα στο πληροφοριακό σύστημα για μία συστηματική “υποστήριξη” των διοικητικών αποφάσεων.
στ. Έχει ένα πολύ μεγάλο εύρος εφαρμογών.

1.3. Μεθοδολογία της μελέτης Επιχειρησιακής Έρευνας

Ένα κύριο χαρακτηριστικό της Ε.Ε. Είναι ότι η επιστημονική μεθοδολογία που ακολουθεί για τη λήψη αποφάσεων είναι σε γενικές γραμμές η ίδια, ανεξάρτητα από το πεδίο εφαρμογής ή το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί. Η μεθοδολογία αυτή περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

α. Ανάλυση του συστήματος

Στο στάδιο αυτό σκοπός μας είναι να κατανοήσουμε πλήρως το σύστημα, το οποίο πρόκειται να μελετήσουμε. Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει να προσδιορίσουμε τη δομή του συστήματος και τον τρόπο λειτουργίας του. Να το αναλύσουμε στα υποσυστήματά του, να εντοπίσουμε τα σημεία στα οποία εμείς μπορούμε να επηρεάσουμε τη λειτουργία του, και να προσδιορίσουμε τρόπους (στρατηγικές – σενάρια) τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε. Μέσα από αυτή τη διαδικασία θα καταλήξουμε σε μια σαφή αντίληψη ως προς το ποιο είναι το πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπίσουμε, ποιες είναι οι μεταβλητές – παράμετροι του συστήματος και ποιοι είναι περιορισμοί που επιβάλλονται από τη δομή του, τη λειτουργία του ή το περιβάλλον.

β. Διατύπωση στόχων

Στο στάδιο αυτό θα θέσουμε τους στόχους που θέλουμε να επιτύχουμε. Παραδείγματα στόχων μπορεί να είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους, η ελαχιστοποίηση του κόστους, η βελτίωση της παραγωγικότητας κ.α.
Η φάση της διατύπωσης στόχων είναι ιδιαίτερα σημαντική και όχι πάντα απλή. Είναι σημαντική, γιατί από τη διατύπωση των σωστών στόχων εξαρτάται η επιτυχία και η εφαρμοσιμότητα των λύσεων που θα προταθούν. Και δεν είναι πάντα απλή, γιατί συχνά υπάρχουν περισσότεροι του ενός στόχοι τους οποίους πρέπει κάπως να συμπτύξουμε ή να ιεραρχήσουμε.
Για παράδειγμα, μια επιχείρηση που παράγει και πωλεί μια σειρά προϊόντων. Το τμήμα πωλήσεων ενδιαφέρεται για τον προσδιορισμό των προϊόντων, τα οποία θα μεγιστοποιήσουν τις τωρινές ή κάποιες μελλοντικές πωλήσεις τους. Το τμήμα παραγωγής ενδιαφέρεται για την καλύτερη απασχόληση του εργατικού δυναμικού, καλύτερη αξιοποίηση των πρώτων υλών, μεγιστοποίηση της παραγωγικότητας. Και οι μέτοχοι της επιχείρησης ενδιαφέρονται για την μεγιστοποίηση των κερδών, του μερίσματος κ.λπ. Είναι προφανές ότι όλοι αυτοί οι στόχοι δεν επιτυγχάνονται με την ίδια στρατηγική. Επομένως ο στόχος που θα τεθεί θα επηρεάσει κατά πολύ και τη στρατηγική που θα εφαρμοστεί.

γ. Διατύπωση του μοντέλου

Στο στάδιο αυτό δημιουργούμε μια απλουστευμένη αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος, με σκοπό να μπορέσουμε να την μελετήσουμε αργότερα για να αναλύσουμε (εκτιμήσουμε) την επίδραση διαφόρων στρατηγικών στους στόχους που ετέθησαν, και, ει δυνατόν, να επιλέξουμε την καλύτερη. Το μοντέλο αυτό είναι συνήθως ένα σύνολο από ποσοτικές σχέσεις, που εκφράζουν τους στόχους του προβλήματος και τους περιορισμούς του περιβάλλοντος.
Η διαδικασία διατύπωσης του μοντέλου χωρίζεται σε τρεις φάσεις:

1. Διατύπωση ορισμένων υποθέσεων οι οποίες απλουστεύουν το πρόβλημα, και οι οποίες δεν είναι “αδικαιολόγητες”. Αυτό γίνεται για να κάνει εφικτότερη και ανετότερη την επίλυση και ανάλυση του προβλήματος.
2. Διατύπωση των μαθηματικών σχέσεων, οι οποίες εκφράζουν τις σχέσεις μεταξύ των συντελεστών του συστήματος, των στόχων, των μεταβλητών και του περιβάλλοντος.
3. Επιβεβαίωση του μοντέλου με δοκιμαστική χρήση του σε ένα “απλό” πρόβλημα. Αυτό γίνεται για να ελέγξουμε την ακρίβεια των υποθέσεων (φάση 1) και των σχέσεων/εντολών (φάση 2) που διατυπώθηκε παραπάνω. Σε περίπτωση που τα αποτελέσματα δεν είναι ικανοποιητικά οι φάσεις 1 και 2 επαναλαμβάνονται.

δ. Επίλυση μοντέλου

Στο στάδιο αυτό χρησιμοποιούμε μια τεχνική της Ε.Ε για να λύσουμε το πρόβλημα, δηλαδή να προσδιορίσουμε τη στρατηγική εκείνη η οποία πετυχαίνει το στόχο που έχει τεθεί. Οι τεχνικές αυτές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1. Εκείνες που βρίσκουν την άριστη στρατηγική για το στόχο που ετέθη και
2. Εκείνες που βρίσκουν μια ικανοποιητική στρατηγική για αυτό το στόχο.

ε. Ανάλυση της λύσης

Η λύση (στρατηγική) την οποία μας υπέδειξε το μοντέλο στο προηγούμενο στάδιο ισχύει για τις παραμέτρους του περιβάλλοντος (π.χ. Τιμές, δυναμικότητα κ.λπ.) που ορίσαμε αρχικά όταν διατυπώσαμε το μοντέλο (στάδιο γ). Το διοικητικό στέλεχος όμως, προτού υλοποιήσει αυτή τη στρατηγική, θέλει συχνά να γνωρίζει τι επίπτωση θα είχε στην άριστη στρατηγική μια τυχόν αλλαγή στο περιβάλλον. Για παράδειγμα, στη διαδικασία προγραμματισμού της παραγωγής, θα ήταν χρήσιμο να γνωρίζει πώς θα έπρεπε να αλλάζει η παραγωγή, αν οι τιμές ορισμένων τελικών προϊόντων (ή πρώτων υλών) μεταβληθούν κατά 10% από τις προβλεπόμενες ποσότητες ορισμένων πρώτων υλών κ.λπ.
Αυτή η ανάλυση της λύσης ονομάζεται στη βιβλιογραφία "ανάλυση ευαισθησίας". Το στάδιο αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, γιατί παρέχει μία πολύ χρήσιμη πληροφόρηση στο διοικητικό στέλεχος και μπορεί να τον επηρεάσει ουσιαστικά στην επιλογή της στρατηγικής που θα ακολουθήσει.

στ. Υλοποίηση της λύσης

Έχοντας επιλέξει τη στρατηγική που θα ακολουθήσουμε, πρέπει πρώτα να την υλοποιήσουμε. Το στάδιο αυτό, αν και σε πρώτη όψη ίσως φαίνεται το απλούστερο, συχνά είναι το λεπτότερο και δυσκολότερο στάδιο όλης της διαδικασίας της Ε.Ε. Και αυτό συμβαίνει γιατί στη μεταφορά των αποτελεσμάτων από το χαρτί στο πραγματικό σύστημα συχνά παρεμβαίνει ο ανθρώπινος παράγοντας. Ο παράγοντας αυτός συνήθως είναι δύσκολο να ληφθεί υπόψη στο ποσοτικό μοντέλο, οπότε και η αντίδρασή του πιθανόν να μην έχει προβλεφθεί. Για παράδειγμα, στην εφαρμογή ενός νέου συστήματος εργασίας (το οποίο αριστοποιεί ορισμένους στόχους που έχει θέσει το στέλεχος ή η διοίκηση), μπορεί να υπάρξει αντίδραση των εργαζομένων για διάφορους λόγους. Μερικά παραδείγματα είναι: η μη αποδοχή από μέρους του των στόχων που έχουν τεθεί, η μεταβολή των ισορροπιών μέσα στον οργανισμό, ο φόβος για κάθε καινοτομία, κ.λπ.
Για όλους αυτούς, και για πολλούς άλλους λόγους, είναι φανερό ότι μπορεί να υπάρξει περίπτωση στην οποία η υλοποίηση της λύσης είναι αδύνατη. Είναι χρήσιμο λοιπόν η εφαρμογή της λύσης, και συγκεκριμένα οι διάφοροι παράγοντες που θα την επηρεάσουν, να ληφθούν υπόψη από τα πρώτα στάδια της διαδικασίας. Αυτό μπορεί να γίνει με συμμετοχή όλων των ενδιαφερομένων μερών στο θέσιμο των στόχων, επιλογή της άριστης στρατηγικής μόνο μεταξύ αυτών που θεωρούνται εφικτές, συνεχή ενημέρωση και επιμόρφωση στα νέα συστήματα κ.λπ.

2. ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ

2.1 Τι είναι απόθεμα;

Ο όρος απόθεμα αναφέρεται σε αγαθά που διατηρούνται για να χρησιμοποιηθούν ή για να διατεθούν σε κάποια μεταγενέστερη ημερομηνία. Η διατήρηση ενός αποθέματος για μελλοντική πώληση ή χρησιμοποίηση είναι κάτι πολύ κοινό στις επιχειρηματικές δραστηριότητες. Λιανοπωλητές, χονδροπωλητές, βιομηχανικές επιχειρήσεις – ακόμα και τράπεζες αίματος – διατηρούν ένα απόθεμα προϊόντων. Πώς όμως, ένα τέτοιο σύστημα θα αποφασίζει για την πολιτική αποθεμάτων του, δηλαδή “πότε” και “πόσο” πρέπει να ανανεώνει τα αποθέματά του;

2.2 Τι είναι έλεγχος αποθεμάτων;

Ο έλεγχος των αποθεμάτων είναι η τεχνική του ελέγχου του ποσού του αποθέματος που διατηρείται, σε διάφορες μορφές, μέσα στην επιχείρηση με σκοπό να ικανοποιήσει τη ζήτηση των πελατών της με τον πιο οικονομικό τρόπο.
Μια τέτοια επιχείρηση μπορεί να είναι μια πολυεθνική εταιρεία με ζήτηση σε εισαγωγές και εξαγωγές ή μια μικρή βιοτεχνία που προμηθεύει μια μεγάλη επιχείρηση. Ο έλεγχος αποθεμάτων συνήθως συνδέεται με τη βιομηχανία, αλλά προβλήματα αποθεμάτων παρουσιάζονται και σε άλλους οργανισμούς όπως οι ένοπλες δυνάμεις, οι μεταφορές, τα νοσοκομεία κ.λπ.
Τα αποθέματα που διατηρούνται από μια επιχείρηση έχουν πολλές μορφές, π.χ. Στο περιβάλλον ενός εργοστασίου απόθεμα μπορεί να είναι:

- Τα ακατέργαστα υλικά για την παραγωγή των προϊόντων του εργοστασίου
- Τα κατεργασμένα υλικά για τις πωλήσεις των προϊόντων του εργοστασίου
- Τα υλικά για τις λειτουργικές ανάγκες του εργοστασίου (γραφικά, ανταλλακτικά κ.α.)

Σε έναν ιδανικό κόσμο, όπου η ζήτηση στις επιχειρήσεις είναι εκ των προτέρων επακριβώς γνωστή και οι προμηθευτές είναι συνεπείς στις ημερομηνίες παράδοσης των προϊόντων τους, δεν υπάρχει ανάγκη να διατηρείται οποιαδήποτε μορφή αποθέματος εκτός από μια περιορισμένη ποσότητα για λόγους ασφαλείας. Στην πραγματικότητα όμως η ζήτηση δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή και οι προμήθειες είναι ασυνεπείς στις ημερομηνίες παράδοσης (συχνά παραδίδουν αργότερα). Έτσι το απόθεμα ενεργεί ως εφεδρεία μεταξύ της προσφοράς και της ζήτησης.

2.3 Αιτίες για τη διατήρηση αποθεμάτων

Οι κύριες αιτίες για τη διατήρηση του αποθέματος είναι οι ακόλουθες:
α. Η διατήρηση αποθέματος ενεργεί ως ασφάλεια για ζήτηση ποσοτικά μεγαλύτερη από τη μέση ζήτηση του πελάτη. Αυτό εξασφαλίζει την ικανοποίηση της ζήτησης του πελάτη και κατά συνέπεια συνεχή ζήτηση.
β. Η διατήρηση αποθέματος ενεργεί ως ασφάλεια για ζήτηση χρονικά μεγαλύτερη

από το μέσο χρόνο παράδοσης του προμηθευτή. Ο χρόνος αυτός καλείται “οδηγός χρόνος” στον έλεγχο των αποθεμάτων. Σε περιπτώσεις αργοπορημένων προμηθευτών, οι πελάτες πιθανώς θα προμηθευτούν τα ίδια προϊόντα από κάπου αλλού.
γ. Η διατήρηση αποθέματος πλεονεκτεί σε περιπτώσεις ποσοτικών εκπτώσεων. Έτσι, εάν το κόστος/μονάδα είναι χαμηλό για αγορές μεγάλων ποσοτήτων, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι πιο οικονομικό να αγοραστούν περισσότερα προϊόντα από αυτά που άμεσα είναι αναγκαία.
δ. Η διατήρηση αποθέματος πλεονεκτεί σε περιπτώσεις εποχιακών και άλλων διακυμάνσεων των τιμών. Π.χ. Η αγορά ειδών θέρμανσης το καλοκαίρι έχει μικρό κόστος, το οποίο υπερτερεί της αύξησης τους κόστους αποθήκευσης. Ο προμηθευτής με την εποχιακή ελάττωση της τιμής τονώνει τη ζήτηση σε μια νεκρή περίοδο και έτσι ελαττώνει το κόστος παραγωγής αφού αυξάνει την ετήσια ζήτησή του.
ε. Η διατήρηση αποθέματος ελαχιστοποιεί τις καθυστερήσεις που προκαλούνται από ελλείψεις ανταλλακτικών στο χώρο παραγωγής. Με προϊόντα που συντίθενται από πολλά μέρη είναι πρακτικά σχεδόν αδύνατο να υπάρξει ταυτόχρονη άφιξη όλων των μερών στο τελικό σημείο συναρμολόγησης. Εδώ τα αποθέματα ενεργούν ως εφεδρεία μέσα στο ίδιο σύστημα παραγωγής του προϊόντος.
Παρόλα όμως αυτά, η διατήρηση αποθέματος είναι δαπανηρή. Το κύριο στοιχείο του κόστους διατήρησης του αποθέματος είναι συνήθως τόκος που διαφορετικά θα μπορούσε να κερδηθεί από τα χρήματα που δαπανήθηκαν για την αγορά του. Άλλα στοιχεία του κόστους διατήρησης αποθέματος είναι: το κόστος αποθήκευσης, τα διοικητικά έξοδα, η παραλαβή, η ασφάλεια, η παλαίωση, η φθορά, οι κλοπές κ.α.
Αν ληφθούν όλα αυτά υπόψη, τότε το ετήσιο κόστος διατήρησης αποθέματος είναι συνήθως της τάξεως του 15-20% της αξία του αποθέματος που διατηρείται, δηλαδή ένα απόθεμα με μέση αξία 1000 ευρώ αν διατηρηθεί ένα έτος κοστίζει 250 με 200 ευρώ στον ιδιοκτήτη του μόνο για τη διατήρηση.
Προφανώς μειονεκτήματα υπάρχουν στη διατήρηση είτε των πολλών, είτε των λίγων αποθεμάτων.

2.4 Μειονεκτήματα λίγων αποθεμάτων

α. Η ζήτηση του πελάτη δεν ικανοποιείται. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στην ακύρωση των παρόντων και μελλοντικών παραγγελιών ή ακόμα και στην απώλεια πελατών.
β. Λόγω του πρώτου μειονεκτήματος και για μη χαθεί ο πελάτης, αναγκαστικά γίνεται προσφυγή σε επείγουσες και συχνά δαπανηρές διαδικασίες συμπλήρωσης.
γ. Με σκοπό να διατηρηθεί μια ελάχιστη εξυπηρέτηση είναι αναγκαίο να γίνονται συχνότερες παραγγελίες συμπλήρωσης απ' ότι όταν διατηρούνται πολλά αποθέματα. Τότε βέβαια δημιουργούνται περισσότερα έξοδα συμπλήρωσης.

2.5 Μειονεκτήματα πολλών αποθεμάτων

α. Τα πολλά αποθέματα προξενούν υψηλά έξοδα αποθήκευσης (π.χ. Κτίρια φύλαξης κ.α.)
β. Η απώλεια του κεφαλαίου που επενδύθηκε σε απόθεμα γίνεται όλο και πιο μεγάλη.
γ. Μια μεγάλη διατήρηση αποθέματος προϊόντος που σύντομα θα θεωρηθεί

απαρχαιωμένο είναι μια μεγάλη επένδυση κεφαλαίου σε είδος που δεν πρόκειται να πωληθεί ή θα πωληθεί με αξία, όσο η αξία του ως άχρηστο.
δ. Μια μεγάλη επένδυση κεφαλαίου σε αποθέματα, αναγκαστικά, σημαίνει ότι περιορίζονται τα διαθέσιμα χρήματα της επιχείρησης για άλλες ανάγκες, όπως επέκταση, βελτίωση, εισαγωγή νέων προϊόντων κ.λπ.
ε. Η διατήρηση πολλών αποθεμάτων ακατέργαστου υλικού, σε κάποια ξαφνική πτώση τιμών σημαίνει χάσιμο χρημάτων , διότι είχαν αγοραστεί με υψηλότερες τιμές. (Αν οι τιμές αντίθετα ανέβουν υπάρχει όφελος). Όμως είναι δύσκολο να προβλεφθούν τέτοιες αλλαγές στην αγορά. Συμβουλευτικά, η διατήρηση πολλών αποθεμάτων είναι λογική σε μια περίοδο γενικού πληθωρισμού παρά σε μια περίοδο υποτίμησης.
Η τακτική διατήρησης αποθέματος μιας επιχείρησης εξαρτάται από πολλούς κανόνες, οι οποίοι καθορίζουν πότε και πώς θα πρέπει να παρθούν ορισμένες αποφάσεις, που αφορούν τη διατήρηση του αποθέματος. Οι κανόνες αυτοί είναι γνωστοί ως τακτική αποθεμάτων.

2.6 Στόχος ενός συστήματος ελέγχου αποθεμάτων

Ο στόχος ενός συστήματος ελέγχου αποθεμάτων είναι να εξασφαλίσει τις ποσότητες των αποθεμάτων σε ένα τέτοιο επίπεδο που “βελτιστοποιεί” μερικά κριτήρια της διοίκησης, όπως:

- Ελαχιστοποίηση του κόστους διατήρησης του αποθέματος.
- Μεγιστοποίηση των εσόδων της επιχείρησης
- Περιοχής μιας σταθερής εξυπηρέτησης στον πελάτη

Πολλές επιχειρήσεις έχουν κατορθώσει να ελαττώσουν στο 1/4 ως και στο 1/3 το συνολικό κόστος διατήρησης αποθέματος, με την εφαρμογή σχετικά απλών τεχνικών ελέγχου αποθεμάτων. Από αυτές η πιο γνωστή είναι το βασικό ή κλασσικό μοντέλο ελέγχου αποθεμάτων.

2.7 Βασικό (κλασσικό) μοντέλο ελέγχου αποθεμάτων

Ένας αριθμός από εμπορεύματα (μονάδες), κάποιου ειδικού τύπου, αγορασμένα ή κατασκευασμένα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, ονομάζεται ομάδα. Η απλούστερη και η πιο χρησιμοποιημένη μέθοδος ελέγχου αποθεμάτων, η οποία είναι γνωστή ως μοντέλο της Οικονομικής Ποσότητας Ομάδας (σε συντομία Ο.Π.Ο.), εξαρτάται από τις ακόλουθες υποθέσεις:
α. Η ζήτηση του εμπορεύματος θεωρείται ομοιόμορφη, συνεχής και γνωστή (δηλαδή οι αποσύρσεις από το απόθεμα γίνονται με ομοιόμορφο ρυθμό).
β. Η συμπλήρωση του αποθέματος θεωρείται στιγμιαία (δηλαδή το ύψος του αποθέματος επιτρέπεται να πέσει στο μηδέν, αλλά ταυτόχρονα γίνεται η συμπλήρωση και η παράδοση του νέου εμπορεύματος) και
γ. Το κόστος διατήρησης αποθέματος ανά εμπόρευμα είναι ανάλογο του αριθμού των εμπορευμάτων στο απόθεμα και του χρόνου που διατηρούνται αυτά σε απόθεμα.
Έστω ότι q είναι η ποσότητα της ομάδα σε εμπορεύματα (π.χ. Απλές μονάδες, δωδεκάδες, κουτιά ομοιόμορφου περιεχομένου κ.α.) t ο αριθμός των χρονικών περιόδων (ημέρες, εβδομάδες, έτη) που απαιτούνται για να εξαντληθεί αυτή η

ποσότητα και μ ο ρυθμός απόσυρσης, σε ομάδες ανά χρονική περίοδο. Ο πλήρης κύκλος από τη συμπλήρωση του αποθέματος μέχρι την εξάντλησή του θα καλείται κύκλο συμπλήρωσης ή κύκλος παραγγελίας.
Έτσι το ύψος αποθέματος κατά τη διάρκεια κάθε κύκλου είναι μια επικλινής ευθεία γραμμή και αυτό γιατί οι αποσύρσεις από το απόθεμα υποτίθεται ότι συμβαίνουν με ομοιόμορφο ρυθμό.
Υπάρχει μια απλή και φανερή σχέση μεταξύ της ποσότητας ομάδας (q), του ρυθμού απόσυρσης (μ) και του χρόνου (t) που απαιτείται μέχρι να εξαντληθεί το απόθεμα, η οποία μπορεί να αποτυπωθεί με τον ακόλουθο μαθηματικό τύπο

$$q=\mu.t$$

Έτσι $t=q/\mu$ και $\mu=q/t$

Παράδειγμα
Ποιό είναι το μέσο ύψος του αποθέματος ενός ειδικού αντικειμένου όταν κάθε μονάδα που αποσύρεται από το απόθεμα με τον ομοιόμορφο ρυθμό των 7 μονάδων / μήνα και το απόθεμα εξαντλείται και επαναπαραγγείλεται κάθε 6 μήνες.

Λύση

$q=\mu.t = 75.6=450$ μονάδες

Μέσο ύψος αποθέματος $1/2q=450/2=225$ μονάδες

3. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

3.1 Εισαγωγή στο Γ.Π.

Τα προβλήματα συνδυασμού των πόρων που διαθέτει η επιχείρηση είναι από τα πιο σημαντικά και γνωστά στους διοικητικούς φορείς, ονομάζονται δε "προβλήματα κατανομής".
Τα προβλήματα αυτά δημιουργούνται όταν υπάρχει ένας αριθμός δραστηριοτήτων που πρέπει να εκτελεσθούν. Οι δραστηριότητες αυτές μπορούν να πραγματοποιηθούν με διάφορους τρόπους (ή σε διάφορα επίπεδα), κάτω όμως από ορισμένους περιορισμούς. Οι περιορισμοί οφείλονται είτε στη στενότητα των διαθέσιμων πόρων (δηλαδή μηχανές, ανθρώπινο δυναμικό, υλικά, χρηματικοί πόροι, έδαφος) είτε στον τρόπο με τον οποίο μπορούν οι πόροι αυτοί να καταναλωθούν στις διάφορες δραστηριότητες.
Το πρόβλημα που προβάλλει είναι η εξεύρεση ενός τρόπου "κατανομής" των διαθέσιμων πόρων της επιχείρησης, ώστε να πραγματοποιείται ο αντικειμενικός στόχος που επιδιώκεται, δηλαδή να επιτυγχάνεται το βέλτιστο. Τα προβλήματα αυτά ονομάζονται και προβλήματα βελτιστοποίησης, ακριβώς λόγω της επιδίωξης του βέλτιστου. Με τον όρο "βέλτιστο" εννοούμε το "μέγιστο" μιας ποσότητας που είναι επιθυμητή ή το "ελάχιστο" μιας άλλης που είναι ανεπιθύμητη.
Συνεπώς η "βελτιστοποίηση" αναφέρεται πάντα σ' ένα μέγεθος – κριτήριο, που καθορίζεται εκ των προτέρων. Αυτό το μέγεθος – κριτήριο συνήθως είναι το κέρδος

(οπότε επιδιώκεται η μεγιστοποίησή του) ή το κόστος (οπότε επιδιώκεται η ελαχιστοποίησή του) ή και οποιοδήποτε άλλο μέγεθος, που η τιμή του εξαρτάται από τον τρόπο κατανομής των διαθέσιμων πόρων. Όλες οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για την εξεύρεση το “βέλτιστου” ονομάζονται και αυτές μέθοδοι βελτιστοποίησης και αποτελούν τον “Μαθηματικό Προγραμματισμό”. Συγκεκριμένα, ο Μαθηματικός Προγραμματισμός χρησιμοποιείται όταν σ' ένα πρόβλημα θέλουμε να βρούμε τη βέλτιστη τιμή μιας συνάρτησης αγνώστων μεταβλητών, που συνδέονται μεταξύ τους μ' ένα σύνολο σχέσεων (περιορισμοί). Το σύνολο των διαθέσιμων παραγωγικών πόρων και οι τρόποι κατανομής τους αντιμετωπίζονται σαν “σύστημα”. Η συνάρτησή δε αυτή αποτελεί ένα δείκτη λειτουργίας του συστήματος που μελετάται και δίνει την τιμή του μεγέθους – κριτηρίου. Συνήθως η συνάρτηση αυτή ονομάζεται “αντικειμενική”, επειδή ακριβώς είναι αντικείμενο βελτιστοποίησης (στόχος του προβλήματος) ή και “οικονομική συνάρτηση” 36, γιατί πρώτα, αλλά και τα περισσότερα προβλήματα αυτής της κατηγορίας είναι οικονομικά. Οι “περιορισμοί” του προβλήματος είναι και αυτοί συναρτήσεις, που εκφράζουν αναλυτικά τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος.

Στα προβλήματα στα οποία τόσο η αντικειμενική συνάρτηση, όσο και οι συναρτήσεις των περιορισμών είναι γραμμικές ως προς τους αγνώστους που περιέχουν, εφαρμόζεται ο Γραμμικός Προγραμματισμός, που είναι μια από τις πιο γνωστές τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας, για τη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων. Η αρχική διατύπωση του προβλήματος και η επινόηση του αλγόριθμου επίλυσής του έγινε από τον G. Dantzing το 1947.

Ο ΓΠ θεωρείται ως το σημαντικότερο πρότυπο στο χώρο της Διοικητικής Επιστήμης και είναι ίσως μια από τις πιο σπουδαίες ανακαλύψεις του αιώνα μας στην οικονομική επιστήμη. Το αντικείμενό του και η κατανομή περιορισμένων πόρων ανάμεσα σε διάφορες δραστηριότητες κατά το άριστο δυνατό τρόπο. Καλείται δε να συντελέσει στη λύση προβλημάτων όταν αυτά αφορούν αποφάσεις οικονομικού προγραμματισμού, π.χ. Απόφαση σχετικά με το επίπεδο στο οποίο θα αναπτυχθούν ορισμένες οικονομικές δραστηριότητες, οι οποίες “συναγωνίζονται” μεταξύ τους για τους ίδιος πόρους. Μερικά παραδείγματα είναι η κατανομή του κρατικού προϋπολογισμού μεταξύ διαφόρων προγραμμάτων υπουργείου κ.λπ, η κατανομή των πρώτων υλών, του εργατικού δυναμικού και των μηχανών μια επιχείρησης για την παραγωγή των προϊόντων της ή την εξυπηρέτηση των πελατών της, η κατανομή ενός κεφαλαίου μεταξύ ανταγωνιζόμενων επενδυτικών ευκαιριών κ.α.

Για να αντιληφθούμε καλύτερα την ανάγκη προγραμματισμού μιας οικονομικής δραστηριότητας, ας εξετάσουμε το πρόβλημα της άριστης επιλογής προϊόντων και διαδικασιών μιας επιχείρησης, η οποία λειτουργεί σε υψηλό επίπεδο παραγωγικότητας. Στο επίπεδο αυτό, η επιχείρηση μπορεί εύκολα να αντιμετωπίσει την εξάντληση της δυναμικότητας τη εξ αιτίας του περιορισμού των πρώτων υλών της, της δυναμικότητας παραγωγής των μηχανών της (χρόνος λειτουργίας, ποσότητα παραγωγής), της χωρητικότητας των αποθηκών της, του εργατικού δυναμικού της, καθώς και άλλων τεχνολογικών, κοινοτικών ή περιβαλλοντικών παραγόντων.

Ένα κύριο χαρακτηριστικό μιας τέτοιας κατάστασης είναι ότι η παραγωγή ενός σχετικά μη κερδοφόρου προϊόντος ή η χρησιμοποίηση μιας διαδικασίας παραγωγής, η οποία κάνει “φιλελεύθερη” χρήση των περιορισμένων πόρων, απασχολεί χρήσιμη δυναμικότητα, η οποία θα ήταν αποδοτικότερη σε πιο οικονομικές διαδικασίες ή στην παραγωγή πιο κερδοφόρων αγαθών.

Εξάλλου, μια απλή λύση της μορφής να παραχθεί “μόνο το προϊόν το οποίο κάνει την αποδοτικότερη χρήση των διαθέσιμων πόρων ή των μέσω παραγωγής” δε μπορεί να υπάρξει γιατί, ως επί το πλείστον, δεν υπάρχει μια διαδικασία ή ένα προϊόν το οποίο να είναι το οικονομικότερη στο χρήση όλων των πόρων της επιχείρησης ταυτόχρονα. Σαν παράδειγμα, ένα προϊόν μπορεί να κάνει την καλύτερη χρήση της μηχανής, δηλαδή να παράγει το υψηλότερο κέρδος ανά μονάδα χρόνου απασχόλησης της μηχανής, ενώ ένα άλλο μπορεί να απασχολεί το μικρότερο χώρο αποθήκευσης. Έτσι, η αποκλειστική παραγωγή του πρώτου προϊόντος θα γεμίσει τελείως τις αποθήκες προτού εξαντληθεί ο διαθέσιμος χρόνος λειτουργίας της μηχανής, ενώ η αποκλειστική παραγωγή του δεύτερου θα εξαντλήσει το χρόνο μηχανής έχοντας ακόμη διαθέσιμο χώρο αποθήκης.
Ένα συναφές πρόβλημα το οποίο παρουσιάζεται στο χώρο της παραγωγής είναι ο προσδιορισμός της άριστης σύνθεσης ενός προϊόντος ώστε να ικανοποιηθούν οι προδιαγραφές παραγωγής του με τον οικονομικότερο δυνατό τρόπο. Κλασσικό πρόβλημα αυτής της κατηγορίας είναι το “πρόβλημα της δίαιτας” στο οποίο ζητούμε να βρεθεί η σύνθεση της δίαιτας η οποία θα ικανοποιεί τη συνταγή του γιατρού (ως προς βιταμίνες, πρωτεΐνες κ.λπ) με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Παρόμοια προβλήματα παρουσιάζονται συχνά στη βιομηχανία, διυλιστήρια πετρελαίου κ.λπ.
Τα προβλήματα μεταφορών είναι ένας άλλος τομέας όπου παρουσιάζεται ανάγκη προγραμματισμού. Κατά την επιλογή των δρόμων μεταφοράς, ειδικά όταν η επιχείρηση διαθέτει πολλού τρόπους παραγωγής και πολλά σημεία διανομής, μπορεί να μειωθεί σημαντικά το κόστος από τον προσεκτικό προγραμματισμό της μεταφοράς των αγαθών. Εάν η επιχείρηση διαθέτει τα δικά τη μεταφορικά μέσα, το πρόβλημα είναι να ευρεθούν οι διαδρομές οι οποίες θα ελαχιστοποιούν το κόστος ή το χρόνο. Όταν η επιχείρηση χρησιμοποιεί ξένα μεταφορικά μέσα τότε ο προγραμματισμός είναι περιπλοκότερος γιατί πρέπει να περιλάβει τις ιδιομορφίες της κοστολόγησης διαφόρων μέσων μεταφοράς.
Ένα τρίτο παράδειγμα ανάγκης προγραμματισμού είναι στον τομέα των επενδύσεων. Στα προβλήματα το καθένα από τα οποία χαρακτηρίζεται από διαφορετικές απαιτήσεις για κεφαλαιουχική (ή άλλη) επένδυση, διάρκεια, μέγεθος αποδόσεων, κίνδυνο ή αβεβαιότητα αποδόσεων κ.λπ. Το πρόγραμμα του επενδυτή πρέπει να καθορίζει τα συγκεκριμένα επενδυτικά προγράμματα τα οποία θα αναλάβει, το χρόνο ανάληψής τους, το ποσό το οποίο θα επενδύσει σε κάθε πρόγραμμα και την εξασφάλιση των οικονομικών μέσων που είναι απαραίτητα για την ολοκλήρωση των προγραμμάτων.
Εκτός από τους παραπάνω τρεις τομείς, υπάρχουν πολλοί άλλοι όπου υπάρχει ανάγκη οικονομικού προγραμματισμού. Για τη λύση αυτών των προβλημάτων ο ΓΠ χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό πρότυπο το οποίο αποτελείται από μια αντικειμενική συνάρτηση (ή συνάρτηση σκοπού) και ένα σύνολο περιορισμών. Αντικειμενική συνάρτηση είναι εκείνη η οποία εκφράζει το αντικείμενο (π.χ. Κόστος, κέρδος, πωλήσεις κ.λπ) το οποίο επιθυμούμε να βελτιστοποιήσουμε (να ελαχιστοποιήσουμε ή να μεγιστοποιήσουμε αντίστοιχα). Οι περιορισμοί είναι ένα σύνολο αλγεβρικών ανισοτήτων ή ανισοτήτων οι οποίες εκφράζουν τους περιορισμούς και την τεχνολογία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο κινείται ο αποφασίζων, π.χ. Περιορισμοί δυναμικότητας, διαθεσιμότητας πρώτων υλών, τεχνολογίας, αγοράς κ.λπ. Το όλο πρότυπο ονομάζεται πρότυπο γραμμικού προγραμματισμού γιατί:

1. η αντικειμενική συνάρτηση και ο οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις ως

προς τις άγνωστες μεταβλητές,
2. οι άγνωστες μεταβλητές είναι συνεχείς και
3. η λύση του προβλήματος ΓΠ αποτελεί ένα πρόγραμμα για την (οικονομική συνήθως) δραστηριότητα την οποία θα αναπτύξει ο αποφασίζων.

3.2 Το γενικό πρόβλημα του Γ.Π.

Το γενικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού μαθηματικά διατυπώνεται ως εξής:

Να βρεθούν οι τιμές x_1, x_2, x_3 ...x_n αγνώστων μεταβλητών οι οποίες δίνουν το μέγιστο (ή το ελάχιστο) της τιμής της συνάρτησης:

$Z=c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3+ ...+ c_nx_n$
και ικανοποιούν τους περιορισμούς (ή συνθήκες),

$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3+ ...+ \alpha_{1n}x_n$ ($\geq$, =, $\leq$) b_1
$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3+ ...+ \alpha_{2n}x_n$ ($\geq$, =, $\leq$) b_2
....
....
$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \alpha_{m3}x_3+ ...+ \alpha_{mn}x_n$ ($\geq$, =, $\leq$) b_m
$x_j \geq 0$, j = 1, 2, 3, … n

Με μεγαλύτερη συντομία θα μπορούσε να διατυπωθεί ότι ο γραμμικός προγραμματισμό συνίσταται στην προσπάθεια να βρεθεί το μέγιστο (ή το ελάχιστο) δυνατό του μεγέθους:

$$\sum_{j=1}^{m} c_jx_j$$

με τον όρο ότι πληρούνται οι περιορισμοί (ή οι συνθήκες):

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}x_j \ (\geq, =, \leq)\ b_i \quad j=1,2,3,...,n$$

Σε όλες τις παραπάνω σχέσεις, για κάθε σχέση ισχύει ένα μόνο από τα σύμβολα ισότητας και ανισότητας. Οι παράγοντες α_{ij}, b_i, c_j , ονομάζονται γενικά “συντελεστές”, οι τιμές τους είναι γνωστές εκ των προτέρων και δεν επηρεάζονται από τις αποφάσεις που θα πάρουμε, καθορίζοντας τις τιμές των αγνώστων μεταβλητών.

Αναλυτικότερα: Από τους περιορισμούς προκύπτει ότι έχουμε n δραστηριότητες (π.χ. παραγωγή n προϊόντων), στις οποίες θα πρέπει να κατανείμουμε τους m π.χ. παραγωγικούς πόρους, δηλαδή κάθε μία από τις εξισώσεις (ή ανισότητες) m αντιστοιχεί σε ένα διαθέσιμο παραγωγικό πόρο. Έτσι b_1 είναι η διαθέσιμη ποσότητα παραγωγικού πόρου 1 (π.χ. πρώτες ύλες), που μπορεί να κατανεμηθεί σε 1,2,3,...,n δραστηριότητες (π.χ. παραγωγή προϊόντων), b_2 είναι η ποσότητα παραγωγικού πόρου 2 (π.χ. μηχανοώρες), που μπορεί να κατανεμηθεί σε 1,2,3,...,n δραστηριότητες κ.ο.κ έως την b_m. Εξάλλου x_j είναι οι άγνωστες μεταβλητές που ζητούμε να ορίσουμε την τιμή τους, όπου δείκτης j προσδιορίζει τη συγκεκριμένη δραστηριότητα και x είναι η στάθμη αυτής της δραστηριότητας, που πρέπει να καθορίσουμε (π.χ. Αριθμός παραγομένων προϊόντων). Επίσης οι συντελεστές:

Πρώτο: $α_{ij}$ είναι η ποσότητα που χρειάζεται από κάθε b_1, για να εκτελεσθεί μια μονάδα δραστηριότητας j (π.χ η ποσότητα πρώτης ύλη I, που χρειάζεται για να παραχθεί μια μονάδα προϊόντος j).

Δεύτερο: c_j είναι η ποσότητα του κριτηρίου – μεγέθους που αντιστοιχεί σε μια μονάδα της δραστηριότητας x_j (π.χ. το κέρδος από την πώληση μιας μονάδας του προϊόντος j). Τέλος, ο περιορισμός $x_j \geq 0$ σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε αρνητική ποσότητα μιας δραστηριότητας. Ο περιορισμός αυτός ονομάζεται μη αρνητικός περιορισμός για να διακρίνεται από τους υπόλοιπους περιορισμούς. Έτσι όταν λέμε ότι έχουμε στο πρόβλημα m περιορισμούς, εννοούμε τους περιορισμούς της μορφής που αναφέραμε παραπάνω (δηλαδή εκτός του περιορισμού $x_j \geq 0$). Επιπλέον, θα πρέπει να αναφερθεί ότι ένα σύνολο τιμών x_j αποτελεί πράγματι λύση του προβλήματος, μόνον όταν δεν περιλαμβάνει αρνητικές τιμές. Στην περίπτωση δε αυτή η λύση ονομάζεται “δυνατή λύση του προβλήματος”. Αν δεν πληρούται αυτός ο περιορισμός (δηλαδή $x_j \geq 0$), τότε λέμε ότι έχουμε απλώς μια “λύση” του προβλήματος. Η “δυνατή λύση” πο μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την τιμή της αντικειμενική συνάρτησης ονομάζεται “άριστη” ή “βέλτιστη” δυνατή λύση.

3.3 Προϋποθέσεις για την εφαρμογή του Γ.Π.

Για να εφαρμόσουμε σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα το Γραμμικό Προγραμματισμό, θα πρέπει να πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις, που ονομάζονται συνήθως “αρχές” της εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού και είναι οι παρακάτω:

α. Αρχή της αναλογίας

Σύμφωνα με την αρχή αυτή, οι ποσότητες των διαθέσιμων πόρων (παραγωγικών) που καταναλίσκονται στις διάφορες δραστηριότητες πρέπει να είναι ευθέως ανάλογες προς το επίπεδο των δραστηριοτήτων αυτών (π.χ. εάν για την παραγωγή μιας μονάδας ενός προϊόντος χρειάζεται α ώρες εργασίας και β ποσότητα μιας πρώτης ύλης, τότε για την παραγωγή δέκα μονάδων του προϊόντος αυτού θα χρειαστούν 10α ώρες εργασίας και 10β ποσότητα πρώτης ύλης). Το ίδιο ισχύει και για την αντικειμενική συνάρτηση. Συγκεκριμένα, το μέρος της αντικειμενικής συνάρτησης που επηρεάζεται από μια ορισμένη δραστηριότητα πρέπει να είναι πόσο ευθέως ανάλογο του επιπέδου αυτής της δραστηριότητας. Δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι σύμφωνα με την αρχή αυτή οι συντελεστές $α_{ij}$ και c_j πρέπει να παραμένουν σταθεροί, με την έννοια ότι δεν επηρεάζονται από τις αυξομειώσεις των τιμών των x_j.

β. Αρχή των σταθερών συντελεστών

Οι τιμές των συντελεστών $α_{ij}$ b_i και c_j, πρέπει να προσδιορίζονται εκ των προτέρων με βεβαιότητα και ακρίβεια, να είναι δε σταθερές (φυσικά και για ορισμένη χρονική περίοδο). Επειδή στην πραγματικότητα πολύ συχνά δεν υπάρχει αυτή η προϋπόθεση (οπότε στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο γραμμικός προγραμματισμός) καθορίζεται εκ των προτέρων μια τιμή των συντελεστών αυτών. Συχνά για την αντιμετώπιση αυτού του θέματος εφαρμόζεται η ανάλυση ευαισθησίας της λύσης. Σύμφωνα με την ανάλυση αυτή δοκιμάζεται κατά πόσο παραμένει η λύση "άριστη" μετά από μεταβολές στις τιμές των "σταθερών συντελεστών".

γ. Αρχή της προσθετικότητας

Κατά την αρχή αυτή οι ποσότητες ενός διαθέσιμου παραγωγικού πόρου που "καταναλίσκονται" για την εκτέλεση των διαφόρων δραστηριοτήτων πρέπει να είναι δυνατό να προστεθούν, ανεξάρτητα από την κατανομή τους. Το ίδιο ισχύει και για το μέτρο αποτελεσματικότητας, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης π.χ. Συνολικό κέρδος πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα των μερικών κερδών που αντιστοιχούν προς τα επίπεδα των διαφόρων δραστηριοτήτων. Έτσι, εάν χρησιμοποιήσουμε επί t_1 ώρες την μηχανή Α για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος α και t_2 ώρες για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος β, τότε ο συνολικός χρόνος που χρησιμοποιείται η μηχανή Α για την παραγωγή α και του β είναι: $t_1 + t_2$. Εξάλλου εάν το κέρδος από την παραγωγή και διάθεση μιας μονάδας του προϊόντος α και c_1 και του προϊόντος β και c_2, τότε το συνολικό κέρδος από την διάθεση των προϊόντων αυτών (μιας μονάδας του α και μια μονάδας του β) θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα $c_1 + c_2$.

δ. Αρχή της διαιρετότητας

Θα πρέπει να επιτρέπονται οι κλασματικές τιμές του επιπέδου των διαφόρων δραστηριοτήτων (x_j). Στην πράξη μερικές φορές είναι απαραίτητο να έχουμε ακέραιες τιμές (π.χ. δεν μπορούμε να παράγουμε 1/2 αυτοκίνητο), τότε, στις περιπτώσεις που οι "βέλτιστες" τιμές των μεταβλητών είναι σχετικώς μεγάλες, μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει η αρχή της διαιρετότητας και να γίνει στη συνέχεια η στρογγυλοποίηση των τιμών των x_j., χωρίς σημαντική επίδραση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Εάν όμως δεν συμβαίνει αυτό, τότε εφαρμόζεται ιδιαίτερη τεχνική επεξεργασίας των συγκεκριμένων προβλημάτων, που λέγεται "ακέραιος προγραμματισμός".

3.4 Γενική Δομή του προβλήματος του Γ.Π.

Σε κάθε πρόβλημα ΓΠ πρέπει πρώτα να αναγνωρίσουμε ποιος είναι ο αντικειμενικός σκοπός του προβλήματος. Τι δηλαδή προσπαθούμε να επιτύχουμε με τη λύση του προβλήματος αυτού. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να αναγνωρίσουμε ένα μέτρο αποτελεσματικότητας ένα κριτήριο που μπορεί να μετρηθεί και να εκφραστεί ποσοτικά. Το κριτήριο αυτό, το μέτρο αποτελεσματικότητα, θα αποτελέσει σε συνέχεια τον αντικειμενικό σκοπό του προβλήματος, την αντικειμενική συνάρτηση ή τη συνάρτηση στόχων την οποία θα προσπαθήσουμε να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε. Όταν η αντικειμενική συνάρτηση υποδηλώνει το κέρδος της επιχείρησης το άριστο πρόγραμμα είναι εκείνο που θα μας αποδώσει το μέγιστο κέρδος. Εάν το πρόβλημα είναι του τύπου των προβλημάτων στα οποία η διεύθυνση της επιχείρησης ενδιαφέρεται κυρίως για το κόστος, τότε ο αντικειμενικός σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους, και το άριστο πρόγραμμα θα είναι εκείνο που θα είχε σαν αποτέλεσμα το ελάχιστο κόστος. Η βασική ιδέα επομένως είναι ότι σε κάθε πρόβλημα ΓΠ υπάρχει μια συνάρτηση, η αντικειμενική συνάρτηση, η οποία θα πρέπει να αριστοποιηθεί (ή βελτιστοποιηθεί), δηλαδή θα πρέπει να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί. Η συνάρτηση αυτή σύμφωνα με την υπόθεση της γραμμικότητας θα πρέπει να είναι γραμμική συνάρτηση. Έτσι αν παραστήσουμε το κέρδος με Π και τον αριθμό των μονάδων που θα παραχθούν από κάθε προϊόν Α, Β και Γ με τα γράμματα x, y, z αντίστοιχα, τότε η γραμμική συνάρτηση δίδεται ως εξής:

$$Π = Αx + Βy + Γz$$

δηλαδή, Π είναι το συνολικό κέρδος το οποίο πρέπει να μεγιστοποιηθεί και Αx είναι το συνολικό κέρδος από την παραγωγή και την πώληση x μονάδων του προϊόντος Α, Βy είναι το συνολικό κέρδος από την παραγωγή και την πώληση y μονάδων του προϊόντων Β και Γz είναι το συνολικό κέρδος από την παραγωγή και την πώληση z μονάδων του προϊόντος Γ. Ας σημειωθεί ότι η αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι τίποτα άλλο παρά η μαθηματική έκφραση, η οποία περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο το κέρδος συγκεντρώνεται σαν συνάρτηση του αριθμού των μονάδων των διαφόρων προϊόντων, που παράγονται. Ας σημειωθεί επίσης ότι η αντικειμενική συνάρτηση συσχετίζεται με την μεταβλητή της αποτελεσματικότητας ή κριτηρίου (το κέρδος) με τις μεταβλητές των αποφάσεων x, y, z (αριθμός των μονάδων των προϊόντων Α, Β, Γ που πρέπει να παραχθούν).
Η αντικειμενική όμως συνάρτηση σε κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού θα ήταν κάτι αόριστο και προφανώς κάτι μη λογικό και πραγματικό αν δεν συνοδευόταν από την επιβολή ορισμένων πραγματικών ορίων, την επιβολή ορισμένων περιορισμών. Η μεγιστοποίηση π.χ. Στην παραπάνω αντικειμενική συνάρτηση κέρδους θα είχε σαν αποτέλεσμα να φτάσουμε στο άπειρο (θετικό άπειρο, ∞+). Όταν όμως η αντικειμενική συνάρτηση υπόκειται σε ορισμένους περιορισμούς, δηλαδή τους περιορισμούς εκείνους που επιβάλλονται από τους περιορισμένους πόρους, τότε μόνο οι αξίες εκείνες του x, y και z (αριθμός των παραγόμενων μονάδων των προϊόντων Α, Β και Γ) θα ληφθούν υπ' όψη οι οποίες δεν παραβιάζουν τους βασικούς περιορισμούς που επιβάλλονται από το πρόβλημα.
Οι περιορισμοί γενικά σ' ένα πρόβλημα ΓΠ είναι περιορισμοί που είτε επιβάλλονται από το εξωτερικό περιβάλλον, είτε από την ίδια την επιχείρηση και συνήθως αντανακλούν περιορισμένη δυναμικότητα, περιορισμένες ώρες μηχανών, περιορισμένες ώρες εργατών, περιορισμένο ποσό χρημάτων, περιορισμένο χώρο κ.λπ. Οι τεχνικές προδιαγραφές του προβλήματος και ο τρόπος με τον οποίο αυτές σχετίζονται με τους περιορισμένους πόρους της δυναμικότητας εκφράζονται από ένα σύνολο, μια σειρά (δομικών) τεχνικών περιορισμών. Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε πρόγραμμα παραγωγής και αν αποφασιστεί, αυτό δεν πρέπει να απαιτεί περισσότερους από τους διαθέσιμους πόρους.

Τα τρία βασικά μέρη κάθε προβλήματος ΓΠ, τα οποία περιγράφον τη δομή κάθε προβλήματος είναι τα εξής:

1. Γραμμική αντικειμενική συνάρτηση
2. Γραμμικοί περιορισμοί
3. Περιορισμός των μη αρνητικών τιμών

Γενικότερα στα προβλήματα του ΓΠ παρατηρούμε τα εξής:

α. Οι μεταβλητές που περιλαμβάνονται στη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση τις οποίες ονομάσαμε δραστηριότητες, προϊόντα, ονομάζονται και μεταβλητές αποφάσεων (π.χ. x, y, z). Η διοίκηση της επιχείρησης αντιμετωπίζει το πρόβλημα της εκλογής των μεταβλητών που θα περιληφθούν στην αντικειμενική συνάρτηση. Ποιες είναι οι μεταβλητές εκείνες, οι οποίες αντιπροσωπεύουν στόχους της επιχείρησης και θα πρέπει να παρουσιαστούν στην αντικειμενική συνάρτηση; Η απάντηση στην ερώτηση αυτή θα εξαρτηθεί από τις γενικές συνθήκες της επιχειρήσεως, όπως επίσης από τις συνθήκες της αγοράς και το γενικότερο επιχειρηματικό και οικονομικό περιβάλλον. Αφού αποφασιστεί ποιες μεταβλητές θα περιληφθούν στην αντικειμενική συνάρτηση θα πρέπει κατόπιν να βρούμε τις τιμές εκείνες των μεταβλητών οι οποίες θα αριστοποιήσουν την αντικειμενική συνάρτηση. Οι τιμές αυτές θα βρεθούν (π.χ. ποιά ποσότητα να παράγουμε) από την λύση του υποδείγματος του ΓΠ.

β. Οι συντελεστές των μεταβλητών αποφάσεων στην αντικειμενική συνάρτηση αποτελούν τους συντελεστές κέρδους, στην περίπτωση της μεγιστοποίησης, ή συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι συντελεστές αυτοί είναι γνωστοί και δεδομένοι από την επιχείρηση και καθορίζονται από τη διεύθυνση πωλήσεων και το Λογιστήριο τη επιχείρησης.

γ. Οι συντελεστές των μεταβλητών αποφάσεων στις συναρτήσεις των περιορισμών είναι γνωστοί σαν συντελεστές εισόδου – εξόδου. Ο όρος συντελεστές εισόδου – εξόδου πρέπει να θεωρηθεί κατάλληλος, γιατί οι τιμές των συντελεστών αυτών δείχνουν το μέγεθος κάθε ειδικού πόρου (είσοδος) που απαιτείται για να επιτευχθεί η παραγωγή (έξοδος) μια μονάδας προϊόντος. Οι συντελεστές αυτοί καλούνται και τεχνολογικοί συντελεστές ή συντελεστές τεχνικών προδιαγραφών, γιατί πράγματι εκφράζουν τις τεχνολογικές συνθήκες παραγωγής ενός προϊόντος. Οι συντελεστές αυτοί δίνονται από την διεύθυνση παραγωγής και την διεύθυνση ερευνών και ανάπτυξης της επιχείρησης. Αν οι τεχνολογικές συνθήκες αλλάξουν π.χ. Με την εγκατάσταση ενός τελευταίου τύπου βελτιωμένου μηχανήματος, θα αλλάξουν ανάλογα και οι τεχνολογικοί συντελεστές.

δ. Οι αριθμοί στο δεξιό μέρος των συναρτήσεων των περιορισμών, εκφράζουν το μέγιστο των διαθέσιμων πόρων ($\leq$), τις ελάχιστες απαιτούμενες ποσότητες ($\geq$) ή τις ποσότητες που ακριβώς απαιτούνται (=). Οι πληροφορίες όσον αφορά το μέγεθος της δυναμικότητας ή τις απαιτούμενες ποσότητες, παρέχονται από πολλές πηγές μέσα στην επιχείρηση, όπως είναι η διεύθυνση της χρηματοδότησης, η διεύθυνση παραγωγής, η διεύθυνση ποιοτικού ελέγχου κ.λπ. Η απόκτηση μεγαλύτερης δυναμικότητας, η οποία θα επηρεάσει την πορεία της επιχείρησης μακροχρόνια, αποτελεί μια σπουδαία επιχειρηματική απόφαση, και θα πρέπει να εξεταστεί πολύ προσεκτικά. Ο ΓΠ μπορεί να βοηθήσει στην ανάλυση και λήψη τέτοιων αποφάσεων.

4. ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

4.1 Θεωρία της μεθόδου

Για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού που το n>2 χρησιμοποιείται η μέθοδος Simplex ή η απλοποιημένη μέθοδος. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η μέθοδος αυτή βασίζεται σε ορισμένες βασικές ιδιότητες της λύσης του προβλήματος του γραμμικού προγραμματισμού, που συνάγονται από τη γραφική επίλυση των προηγούμενων παραδειγμάτων και οι οποίες ισχύουν και για το γενικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού, εάν φανταστούμε ότι αυτό μπορεί να παρουσιαστεί γεωμετρικώς σε ένα n – διάστατο χώρο. Ειδικότερα οι ιδιότητες αυτές είναι:

Πρώτο:

Επειδή είναι πιο εύκολο να εργαζόμαστε αλγεβρικώς με ισότητες παρά με ανισοϊσότητες, μετατρέπουμε τις ανισοϊσότητες του π.γ.π. σε εξισώσεις, οπότε έχουμε το σύστημα

$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ... + \alpha_{1n}x_n \ (=)\ b_1$
$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + ... + \alpha_{2n}x_n \ (=)\ b_2$
....
....
$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \alpha_{m3}x_3 + ... + \alpha_{mn}x_n \ (=)\ b_m$

Οποιοδήποτε σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι εύκολο να παρασταθεί με τη μορφή μητρών. Στο παραπάνω σύστημα η m x n μήτρα:

$$A = \alpha_{ij} = \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{matrix}$$

η οποία ονομάζεται “μήτρα” του συστήματος και η mx (n+1) μήτρα:

$$A_b = \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} & b_m \end{matrix}$$

Η οποία ονομάζεται η “επαυξημένη μήτρα” του συστήματος:
εάν δε θέσουμε Χ και b για τις μήτρες στήλες:

x_1 $\qquad\qquad$ b_1

$$X = \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{matrix} \qquad b = \begin{matrix} b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{matrix}$$

Τότε μπορεί να γραφεί:

$$AX=b$$

Αλλά και οι συντελεστές c_j της αντικειμενικής συνάρτησης αποτελούν μια μήτρα γραμμής την

$$c=[c_1, c_2, c_3...c_n]$$

επομένως, το π.γ.π μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:
α) να βρεθεί το μέγιστο (ή το ελάχιστο) του

$$z=CX$$

με τους περιορισμούς:

$$AX=b$$

και $X \geq 0$

ή ακόμη:
β) να προσδιορισθεί το διάνυσμα-στήλη των n στοιχείων:

$$x=[x_1, x_2, x_3...x_n]$$

τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τους περιορισμούς:
$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + ... + x_nP_n = P_o$
ή

$$\sum_{j=1}^{n} P_jx_j = P_o$$

και $X \geq 0$

και να μεγιστοποιεί την συνάρτηση:

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j = P_o$$

Όπου P_j για j=1,2,3.... n είναι η j στήλη της μήτρας Α, και P_o=b

Δεύτερο:
Οποιοδήποτε σύστημα ανισοϊσοτήτων (ή ανισοτήτων) μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα σύστημα εξισώσεων. Η διαδικασία είναι η εξής:

α) έστω ότι έχουμε την ανισοϊσότητα

$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + ... + \alpha_{in}x_n \leq b_i$

Εάν η διαφορά μεταξύ πρώτου και δεύτερου μέλους της ανισοϊσότητας εκφρασθεί με την μεταβλητή x_{n+1} , ανισοϊσότητα αυτή ισοδυναμεί προς την εξίσωση:

$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + ... + \alpha_{in}x_{n+1} = b_i$

Δηλαδή η μεταβλητή x_{n+1} (με συντελεστή +1) εκφράζει την ποσότητα που υπολείπεται της b1 (που είναι η μέγιστη διαθέσιμη ποσότητα του b1) για να έχουμε τα δύο μέλη ίσα. Η x_{n+1} ονομάζεται "χαλαρή" μεταβλητή (ή βοηθητική ή ουδέτερη ή αδρανής ή περιθώριος μεταβλητή).

β) Ομοίως η ανισοϊσότητα

$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + ... + \alpha_{in}x_n \geq b_i$

είναι ισοδύναμη προς την εξίσωση:
$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + ... + \alpha_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$

Η μεταβλητή x_{n+1} (με συντελεστή -1) ονομάζεται "πλεονάζουσα" χαλαρή μεταβλητή γιατί εκφράζει την ποσότητα που περισσεύει από αυτήν της ελάχιστης τιμής b_1 (b_1 θεωρείται η ελάχιστη ποσότητα που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ή να παραχθεί) για να γίνουν τα δύο μέλη ίσα.

γ) Επίσης η ανισοϊσότητα

$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + ... + \alpha_{in}x_n \leq - b_i$

δεδομένου ότι $b_1 \geq 0$, μετατρέπεται στην ισοδύναμη εξίσωση:
$- \alpha_{i1}x_1 - \alpha_{i2}x_2 - \alpha_{i3}x_3 - ... - \alpha_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$

Συμπερασματικά, εάν σε ένα σύστημα ανισοϊσοτήτων εισαχθούν κατάλληλα τόσες χαλαρές μεταβλητές όσες είναι και οι ανοσοϊσότητες που περιέχονται στο σύστημα, τότε το σύστημα αυτό μετασχηματίζεται σε ένα ισοδύναμο προς αυτό το σύστημα εξισώσεων, που έχει την παρακάτω γενική μορφή:

$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ...+ \alpha_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$
$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + ...+ \alpha_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$
$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + ...+ \alpha_{3n}x_n + x_{n+3} = b_3$
....
.
$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \alpha_{m3}x_3 + ...+ \alpha_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$

όπου $x_j \geq 0$, j = (1,2,3,...n, n+1,..., n+m)

Ως προς την αντικειμενική συνάρτηση θεωρούμε ότι οι αντίστοιχοι των χαλαρών μεταβλητών συντελεστές c_j είναι μηδενικοί.
Η παραπάνω μορφή που παίρνει τελικά το π.γ.π καλείται "πρότυπη" μορφή του π.γ.π. και είναι ισοδύναμη προς τη γενική μορφή του π.γ.π. που δόθηκε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού. Αποδεικνύεται δε ότι οι δυνατές λύσεις του αρχικού συστήματος ενός π.γ.π. είναι και οι δυνατές λύσεις του συστήματος της πρότυπης μορφής, την οποία παίρνει το π.γ.π. και αντίστροφα. Επίσης η βέλτιστη τιμή του πρώτου είναι βέλτιστη λύση του δεύτερου και αντίστροφα.
Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού στην πρότυπη μορφή του μπορεί να διατυπωθεί συνοπτικά έτσι:

Να βρεθούν οι τιμές x_1, x_2, x_3...x_n αγνώστων μεταβλητών που θα δίνουν το μέγιστο της συνάρτησης

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

και να ικανοποιούν τις συνθήκες (περιορισμούς):

$\Sigma\, \alpha_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$ i=1,2,3,...,m
j=1,2,3,...,n n+1,...n+m
$x_j \geq 0$, $x_{n+1} \geq 0$
Οι χαλαρές μεταβλητές που εισάγονται σε ένα π.γ.π. έχουν ορισμένες ιδιότητες, που διευκολύνουν την επίλυση του προβλήματος. Οι ιδιότητες αυτές είναι:
α) Τα αντίστοιχα προς τις χαλαρές μεταβλητές διανύσματα στήλης P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3},...., P_{n+m} είναι μοναδιαία και σχηματίζουν με τα στοιχεία τους μοναδιαία μήτρα.
β) οι χαλαρές μεταβλητές δεν εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση.

Τρίτο:
Η επίλυση του π.γ.π. δεν είναι τίποτε άλλο παρά η εξεύρεση της λύσης ενός ταυτόχρονου συστήματος m γραμμικών εξισώσεων με n άγνωστες μεταβλητές. Επομενώς, για τη λύση του συστήματος AX=b, ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση πρώτη:
Το σύστημα AX=b έχει λύση (δηλαδή είναι συμβιβαστό) εάν και μόνο εάν ισχύει:
$r(A) = r(A_b) = k$
Δηλαδή το σύστημα AX=b έχει λύση, εάν και μόνο εάν, η τάξη της μήτρας του

συστήματος ισούται με την τάξη της επαυξημένης μήτρας.

Πρόταση δεύτερη:
Το σύστημα AX=b είναι συμβιβαστό, τότε:
α) αυτό έχει μία και μοναδική λύση εάν:
$r(A) = r(A_b) = k$ και $k=n$
Δηλαδή, εάν η κοινή τάξη των μήτρων A και A_b είναι ίση με το πλήθος των άγνωστων μεταβλητών.
β) αυτό έχει άπειρες λύσεις εάν
$r(A) = r(A_b) = k$ και $k < n$
δηλαδή, εάν η κοινή τάξη των μητρών A και A_b είναι μικρότερη του πλήθους των αγνώστων μεταβλητών, οπότε n-k άγνωστες μεταβλητές μπορούν να πάρουν αυθαίρετες τιμές, συναρτήσεις δε αυτών καθορίζονται και οι υπόλοιπες άγνωστες μεταβλητές.
γ) μπορούν να παραληφθούν (σαν πλεονάζουσες) m-k εξισώσεις εάν
$r(A) = r(A_b) = k$ και $k < m$
Από τα παραπάνω συνάγεται ότι μας ενδιαφέρει μόνο η περίπτωση που η μήτρα A, είναι m x n και m < n, δηλαδή το πλήθος των αγνώστων μεταβλητών είναι μεγαλύτερο του πλήθους των εξισώσεων, διότι μόνο τότε το σύστημα Ax=b έχει απειρία λύσεων, δεδομένου ότι η τάξη της μήτρας A, καθώς και της Ab, μπορεί να είναι το πολύ ίση με m. Εάν δε στο σύστημα Ax=b, m εξισώσεων και n αγνώστων, όπου m < n, βάλουμε n-m μεταβλητές ίσες προς το μηδέν και λύσουμε ως προς τις υπόλοιπες m μεταβλητές, υπό τον όρο ότι η ορίζουσα των συντελεστών των m αυτών μεταβλητών δεν είναι μηδενική (δηλαδή, τα αντίστοιχα διανύσματα στηλών της μήτρας m x m είναι γραμμικώς ανεξάρτητα), προκύπτει μια λύση του συστήματος ax=b όπου ονομάζεται "βασική λύση". Οι m μεταβλητές $x_1, x_2, x_3 ... x_m$ ονομάζονται "βασικές μεταβλητές" και οι υπόλοιπες χαρακτηρίζονται σαν "μη βασικές" μεταβλητές. Οι βασικές μεταβλητές σχηματίζουν μια μήτρα στήλης η οποία παριστάνεται με X_B (διάνυσμα m x 1), ενώ, οι μη βασικές μεταβλητές μια μήτρα στήλης που συμβολίζεται με X_A (διάνυσμα (n-m) x 1). Τα στοιχεία των m γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων αποτελούν μια τετραγωνική μήτρα, η οποία είναι υπομήτρα της A, ονομάζεται δε "βασική μήτρα", διότι τα m γραμμικών ανεξάρτητα διανύσματα της B αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου E_m. Η βασική μήτρα παριστάνεται με B, η μήτρα δε που προκύπτει αν από την A αφαιρεθεί η B παριστάνεται με A_A.
Κατόπιν αυτών το σύστημα AX=b γράφεται:

$$AX=[B,A_A]\, X \frac{X_B}{X_A} = b$$

ή $BX_B + A_AX_A = b$
Αφού οι τιμές η μήτρα B είναι τετραγωνική (m x m) και μη ιδιάζουσα ($|B| \neq 0$) η βασική λύση του συστήματος δίδεται από τη σχέση:

$$XB = B^{-1}\, b$$

Τέταρτο:
Ο μέγιστος αριθμός των βασικών λύσεων ενός συστήματος ισούται με τον αριθμό συνδυασμών ή διανυσμάτων λαμβανομένων ανά m, ήτοι:

$$C^n_m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Εάν π.χ. m = 4 και n= 7, τότε:

$$C^4_7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = 35$$

Οι παρακάτω ορισμοί είναι επίσης χρήσιμοι για την επίλυση ενός π.γ.π.
“Βασική δυνατή (ή εφικτή) λύση” είναι μια λύση η οποία έχει το πολύ m στοιχεία του διανύσματος x μη αρνητικά.
“Μη εκφυλισμένη βασική δυνατή λύση” είναι μια βασική δυνατή λύση με ακριβώς m θετικά x_i, δηλαδή όλες οι βασικές μεταβλητές είναι θετικές (b > 0).
“Εκφυλισμένη βασική δυνατή λύση” είναι μια βασική δυνατή λύση η οποία έχει λιγότερα από m θετικά x_i, δηλαδή μία ή περισσότερες από τις βασικές μεταβλητές ισούται με το μηδέν ($b \geq 0$).

Πέμπτο:

Οταν υπάρχουν δυνατές λύσεις (δηλαδή λύσεις που να ικανοποιούν εκτός των m περιορισμών και τον περιορισμό $x_j > 0$), η περιοχή όλων των δυνατών λύσεων είναι μία πολυγωνική, κυρτή περιοχή που σύνορά της αποτελούν τα τμήματα των ευθειών που αντιστοιχούν στους περιορισμούς του προβλήματος (γεωμετρικώς, κυρτό σύνολο είναι ένα σύνολο που περιέχει όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν οποιαδήποτε δύο σημεία του συνόλου).

Αναλυτικά:
Τα σημεία τα οποία ικανοποιούν μια γραμμική ανισότητα της μορφή:
$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + \ldots + \alpha_{in}x_n \ (\geq, \leq)\ b_i$
ορίζουν ημιχώρα στον n -διάστατο χώρο. Ο κοινός δε χώρος λύσεων του συστήματος των ανισοτήτων:

$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + x_{n+1} \ (\geq, \leq)\ b_1$
$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + x_{n+2} \ (\geq, \leq)\ b_2$
$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \ldots + \alpha_{3n}x_n + x_{n+3} \ (\geq, \leq)\ b_3$
....
.
$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \alpha_{m3}x_3 + \ldots + \alpha_{mn}x_n + x_{n+m} \ (\geq, \leq)\ b_m$
είναι μια κυρτή περιοχή του n-διάστατου χώρου.
Επομένως, το π.γ.π. μπορεί να περιγραφεί και ως εξής: Δίδεται κυρτό σύνολο το οποίο ορίζεται από ένα σύστημα γραμμικών περιορισμών σε n-διάστατο Ευκλείδιο χώρο. Σκοπός δε είναι να επιλέξουμε από όλα τα σημεία που ανήκουν στο κυρτό αυτό σύνολο ένα υποσύνολο σημείων (που θα περιέχει ένα ή περισσότερα σημεία) με τα οποία βελτιστοποιείται μια αντικειμενική γραμμική συνάρτηση.

Έκτο:
Η περιοχή των λύσεων (k) μπορεί να είναι ή κενό σύνολο (οπότε το πρόβλημα δεν έχει καμία λύση) ή κυρτό πολύεδρο ή κυρτή περιοχή μη φραγμένη σε μια διεύθυνση. Εάν το k είναι κυρτό πολύεδρο, που σημαίνει ότι έχει πεπερασμένο αριθμό ακροτάτων σημείων τότε: α) κάθε ακρότατο σημείο αυτού είναι μια βασική δυνατή λύση του προβλήματος, β) η αντικειμενική συνάρτηση έχει τη βέλτιστη τιμή σε ένα (τουλάχιστον) ακρότατο σημείο του κυρτού πολύεδρου και γ) εάν η αντικειμενική συνάρτηση έχει τη βέλτιστη τιμή σε περισσότερα από ένα ακρότατα σημεία του k (δηλαδή στην περίπτωση που η τομή της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης και του κυρτού συνόλου k αποτελεί τμήμα του συνόρου του k), τότε παίρνει την ίδια τιμή για κάθε κυρτό συνδυασμό των ακρότατων αυτών σημείων.
Τέλος, εάν το κυρτό σύνολο των λύσεων (k) είναι μια περιοχή μη φραγμένη σε μια διεύθυνση τότε το πρόβλημα έχει λύση, αλλά η βέλτιστη τιμή ενδέχεται να μην είναι πεπερασμένη (στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει ένα ακρότατο σημείο που να αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση, το δε πρόβλημα έχει μια βέλτιστη , απεριόριστη λύση).
Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, για την επίλυση ενός π.γ.π. αρκεί να ερευνήσουμε τις λύσεις που είναι ακρότατα σημεία, δηλαδή τις λύσεις οι οποίες παράγονται από τα m γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Όπως ήδη αναφέραμε, υπάρχουν το πολύ (n m) σύνολα m γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων από το δεδομένο σύνολο των n διανυσμάτων. Συνεπώς, ο ανώτατος αριθμός των βασικών δυνατών λύσεων του προβλήματος είναι:

$$c^{n}_{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

(ο αριθμός αυτός δίνει και τον αριθμό των ακρότατων σημείων του πολυέδρου).
Στην περίπτωση όμως που ο αριθμός των n – αγνώστων μεταβλητών, καθώς και των m περιορισμών είναι μεγάλος, δεν είναι δυνατό να βρούμε όλες τις βασικές δυνατές λύσεις και να επιλέξουμε τη λύση που δίνει τη βέλτιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση.
Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτή της κατηγορίας αναπτύχθηκε από τον B.B. Dantzing η μέθοδος Simplex.
Η μέθοδος Simplex είναι ένας αλγόριθμος που μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε, με πιο συστηματικό, ένα μικρό υποσύνολο των βασικών δυνατών λύσεων, το οποίο συγκλίνει στη βέλτιστη λύση. Η διαδικασία Simplex αρχίζει με τον καθορισμό ενός ακρότατου σημείου του κυρτού συνόλου δυνατών λύσεων, δηλαδή με τον καθορισμό μιας αρχικής βασικής δυνατής λύσης, σύμφωνα δε με ένα κριτήριο, καθορίζει αν η λύση αυτή είναι η βέλτιστη. Εάν το ακρότατο αυτό σημείο δεν είναι το βέλτιστο, τότε ή διαδικασία βρίσκει, με τη μετακίνηση από το σημείο αυτό και κατά μήκος μιας ακμής, ένα γειτονικό ακρότατο σημείο (δύο σημεία ονομάζονται "γειτονικά" εάν συνδέονται δια συνόρου του κυρτού πολυέδρου), για το οποίο η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη ή ίση προς την προηγούμενη τιμή. Αξιοσημείωτο είναι ότι από όλα τα γειτονικά σημεία επιλέγεται εκείνο που έχει σαν συνέπεια την μεγαλύτερη αύξηση της τιμής του z. Επομένως, κάθε λύση είναι καλύτερη (ή είναι δυνατό να είναι και η ίδια) από την προηγούμενη. Μετά δε από ένα αριθμό επαναλήψεων του αλγόριθμου καταλήγουμε στη βέλτιστη λύση, εφόσον

βέβαια υπάρχει μια βέλτιστη λύση.
Επίσης, με τη διαδικασία Simplex είναι δυνατόν να διαπιστωθεί εάν:
α) Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων είναι ασυμβίβαστο (επομένως το πρόβλημα δεν έχει λύση)
β) Το πρόβλημα έχει περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις
γ) Το πρόβλημα έχει πεπερασμένη ή μη πεπερασμένη βέλτιστη λύση (επομένως μη παραδεκτή)

4.2 Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου

Αναφέραμε προηγουμένως ότι η μέθοδος Simplex αρχίζει από το αρχικό ακρότατο σημείο. Ανακύπτει λοιπόν το ερώτημα, πώς θα οριστεί το σημείο αυτό;
Στα παραδείγματα γραφικής επίλυσης π.γ.π. είδαμε ότι συχνά η αρχή των αξόνων αποτελεί ένα ακρότατο σημείο της περιοχής δυνατών λύσεων. Από το ίδιο ακρότατο σημείο αρχίζει και η υπολογιστική διαδικασία Simplex. Πράγματι, αναφέραμε παραπάνω ότι ένα π.γ.π. της μορφής $AX \leq b$, ανάγεται στην πρότυπη μορφή του με την εισαγωγή των χαλαρών μεταβλητών, οπότε σχηματίζεται μια μοναδιαία μήτρα m x m. Η μοναδιαία αυτή μήτρα ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις για να αποτελέσει βάση της μήτρας A, η σχετική δε βασική λύση αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων.
Εάν όμως το πρόβλημα είναι της μορφής $AX \geq b$, τότε το ισοδύναμο σύστημα των εξισώσεων λαμβάνεται με την αφαίρεση μιας νέας μη αρνητικής "πλεονάζουσας" μεταβλητής από κάθε ανισοϊσότητα, οπότε οι εξισώσεις περιέχουν μια αρνητική μοναδιαία βάση, η οποία, επειδή υποθέτουμε ότι $b \geq 0$, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την έναρξη της υπολογιστικής διαδικασίας Simplex. Στην περίπτωση αυτή, όπως θα δούμε παρακάτω, χρησιμοποιούμε τεχνητή βάση.
Τέλος, εάν το π.γ.π. έχει ένα μίγμα περιορισμών της μορφής $\geq$,$\leq$ και = τότε ανάγεται σε ένα ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων, με κατάλληλη πρόσθεση ή αφαίρεση χαλαρών μεταβλητών, "πλεοναζουσών" μεταβλητών, καθώς και την χρησιμοποίηση τεχνητών διανυσμάτων.
Επομένως, εάν μπορέσουμε να φέρουμε ένα π.γ.π. στην πρότυπη μορφή του, η μοναδιαία μήτρα τάξης m μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν αρχική βάση για την έναρξη της υπολογιστικής διαδικασίας Simplex, η δε αρχική δυνατή βασική λύση προκύπτει, αν δώσουμε μηδενικές τιμές στις n-m μη βασικές μεταβλητές και έχοντας σαν βάση αυτές λύσουμε το πρόβλημα ως προς τις m βασικές μεταβλητές. Η αρχική βασική δυνατή λύση ισούται με $BX_B = b$, $b \geq 0$, όπου το διάνυσμα XB αποτελείται από τις πρόσθετες χαλαρές μεταβλητές, πλεονάζουσες ή τεχνητές.
Σε συνέχεια, τη λύση αυτή την εκφράζουμε με τη μορφή πίνακα που έχει την παρακάτω γενική μορφή:

Αρχικός πίνακας της υπολογιστικής διαδικασίας Simplex

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	C	C	C_2		C_n	C_{n+1}		C_j		C_{n+m}	

i C_B διάνυσμα βάσης
α) Στην δεύτερη στήλη του πίνακα έχουμε το διάνυσμα C_B ,δηλαδή το υποδιάνυσμα του C που περιλαμβάνει τις τιμές που αντιστοιχούν στα διανύσματα της βάσης (ή που

περιλαμβάνει τους συντελεστές των μεταβλητών της βάσης – αρχικής λύσης – στην αντικειμενική συνάρτηση).

β) Στην τρίτη στήλη έχουμε τα διανύσματα της μήτρας A, που ανήκουν στη βάση (δηλαδή τα διανύσματα της μήτρας B). Συνήθως κατά την υπολογιστική διαδικασία της μεθόδου Simplex αντί του συμβολισμού P_1, P_2, ...,P_m βάζουμε α) την αρίθμηση που έχουν αυτά σαν διανύσματα της μήτρας A, δηλαδή αν P_1 είναι το διάνυσμα της α_7 της μήτρας A, θα βάλουμε στη θέση του P_1 το α_1 κλπ. β) τις μεταβλητές που βρίσκονται στη βάση (βασικές μεταβλητές). Με αυτό τον τρόπο σε κάθε βήμα φαίνεται καλύτερα ποια από τα διανύσματα της A αποτελούν τη βάση της συγκεκριμένης λύσης ή ποιες είναι οι βασικές μεταβλητές αυτής της λύσης.

γ) Στις επόμενες στήλες έχουμε τους συντελεστές y_{ij}, συναρτήσει των οποίων τα διανύσματα P_j της μήτρας A εκφράζονται σαν γραμμικές συναρτήσεις των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων της βάσης P_{n+1}, P_{n+2}, …, P_{n+m}. Στην πραγματικότητα οι συντελεστές y_{ij} δείχνουν της σχέση υποκατάστασης μεταξύ δύο μεταβλητών (δηλαδή, Εάν στη βασική λύση βάλουμε μια μονάδα της μεταβλητής X_j, ο συντελεστής y_{ij}, δείχνει πόσες μονάδες της αντίστοιχης βασικής μεταβλητής θα αντικαταστήσει).

δ) Τα διανύσματα P_{n+1}, P_{n+2}, …, R_{n+m} σχηματίζουν μια μοναδιαία μήτρα m x n, που αποτελεί τη βάση για την αρχική βασική δυνατή λύση.

ε) Στην τελευταία στήλη έχουμε την βασική δυνατή λύση που προκύπτει από τον πίνακα, δηλαδή τις τιμές των βασικών μεταβλητών της τρίτης στήλης. Βάλαμε P_o = b, διότι η αρχική βασική λύση BX_B είναι αυτό το δεύτερο μέλος b.

στ) Η πρώτη γραμμή, πάνω από τους τίτλους δείχνει τον αντίστοιχο συντελεστή κάθε μεταβλητής στην αντικ. Συνάρτηση (ή τις C_j του διανύματος C), η δεύτερη δε γραμμή περιλαμβάνει όλα τα διανύσματα P_j (α_j) της μήτρας A ή όλες τις μεταβλητές του προβλήματος την πρότυπη μορφή του.

ζ) Τα στοιχεία z και $z_j - c_j$ καταχωρίζονται στην προτελευταία και τελευταία γραμμή των αντίστοιχων στηλών. Το z_j για j= 1, 2, …., n, n+m, βρίσκεται, εάν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο του j – του διανύσματος με τοο διάνυση – στήλη, που συμβολίζεται στον πίνακα δια C_B. Ετσι, $z=C_BP_1 = C_{B1}Y_{11} + C_{B21}Y_{22} +.... + C_{Bm}Y_{m1}$ και $z_n=C_BP_n$ όπως $z_{n+m} = C_BP_{n+m}$. Η τιμή του z_j εκφράζει το ακαθάριστο κέρδος από το οποίο θα πρέπει να παραιτηθούμε, εάν αντικαταστήσουμε κάποια από τις βασικές μεταβλητές της συγκεκριμένης λύσης με μια μονάδα τη μεταβλητής που αντιστοιχεί στη στήλη του z_j . Το τελευταίο στοιχείο της σειράς z αντιστοιχεί στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, υπολογίζεται δε από τη σχέση: $z_o=C_Bb_1 + C_{B2}b_2 +.... + C_{Bm}b_m$

Μετά τον υπολογισμό της σειράς z_j , μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την τελευταία σειρά, εάν αφαιρέσουμε από το z_j το c_j.

Η διαφορά $z_j - c_j$ για j= 1, 2, …., n, n+m, εκφράζει το καθαρό κέρδος που θα προστεθεί στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, εάν $z_j - c_j$ είναι αρνητικό, ή το κέρδος που θα αφαιρεθεί (χαθεί) εάν $z_j - c_j$ είναι θετικό, από την εισαγωγή στην βασική λύση μιας μονάδας της μεταβλητής x_j. (Συχνά αντί της διαφοράς $z_j - c_j$ χρησιμοποιείται η $c_j - z_j$, με τη διάταξη όμως που έχει ο πίνακας είναι πιο εύκολος, ο υπολογισμός $z_j - c_j$ παρά $c_j - z_j$).

Συνεπώς, εάν όλοι οι αριθμοί $c_j - z_j > 0$, για j= 1, 2, …., n, n+m τότε η αρχική βασική δυνατή λύση είναι μια βέλτιστη λύση και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι z_o. Εάν τουλάχιστον ένα $c_j - z_j < 0$, τότε κατασκευάζουμε μια νέα δυνατή λύση, που η βάση της περιέχει m-1 διανύσματα από την αρχική βάση P_{n+1},

P_{n+2}, …, P_{n+m}. Στην αναζήτηση του νέου διανύσματος που θα εισάγουμε στην βάση, μπορούμε θεωρητικά να εκλέξουμε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του οποίου το αντίστοιχο $c_j - z_j < 0$. Εντούτοις, ο αριθμός των αναγκαίων επαναλήψεων περιορίζεται σημαντικά, αν αντί να γίνεται η επιλογή του P_j τυχαία επιλέξουμε το διάνυσμα το οποίο δίνει τη μεγαλύτερη άμεση αύξηση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι, το κριτήριο που χρησιμοποιούμε για την εισαγωγή μιας μη βασικής μεταβλητής στη βάση είναι το εξής: Εισάγεται το διάνυσμα P_j (α_j) που αντιστοιχεί στο:

$z_k - c_k = \min_j (z_j - c_j)$ για $z_j - c_j < 0$

Το κριτήριο αυτό ονομάζεται "κριτήριο εισόδου" και η μη βασική μεταβλητή που εισάγεται στη βάση ονομάζεται "εισερχόμενη μεταβλητή". Εάν υπάρχουν δύο ή περισσότερα διανύσματα που μπορούν να εισαχθούν στη βάση με το μικρότερο (ή το μεγαλύτερο) δείκτη j.

Αφού καθορίσουμε την "εισερχόμενη μεταβλητή", επιλέγουμε σύμφωνα πάλι με ένα κριτήριο, τη μεταβλητή που θα μηδενιστεί και θα βγει από τη βάση, δηλαδή την "εξερχόμενη μεταβλητή"

Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής:

Πρώτο, εξετάζουμε τους συντελεστές Y_{ik} και εάν διαπιστώσουμε ότι: α) $Y_{ik} \leq 0$ για όλα τα i, αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα έχει μια δυνατή λύση, της οποίας η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλη (ή μικρή), δηλαδή υπάρχει μια βέλτιστη απεριόριστη λύση. β) $Y_{ik} > 0$ για ένα τουλάχιστον I, τότε μπορεί να βρεθεί μια νέα βασική δυνατή λύση, η οποία θα έχει σαν αποτέλεσμα να παίρνει η αντικειμενική συνάρτηση τιμή $z' > z^o$.

Δεύτερο: εάν $Y_{ik} > 0$ για ένα ή περισσότερα i, τότε: α) Διαιρούμε τις τιμές των μεταβλητών της βάσης (x_B) με κάθε αντίστοιχο θετικό στοιχείο της στήλης που επιλέξαμε, δηλαδή με τους συντελεστές Y_{ik} όπου $Y_{ik} > 0$. β) Επιλέγουμε το πηλίκο που μας δίνει το μικρότερο αριθμό, δηλαδή:

$$\theta_o = \min \frac{XB}{Y_{ik}}, \; Y_{ik} > 0$$

όπου θ_o εκφράζει την μεγαλύτερη τιμή με την οποία μπορεί να μπει στην βάση η νέα μεταβλητή, χωρίς να γίνουν αρνητικοί οι συντελεστές από τις βασικές μεταβλητές x_1, x_2, …, x_m.

Το στοιχείο για το οποίο έχουμε το minimum του παραπάνω λόγου θα μηδενιστεί, βγαίνει δεν το διάνυσμα και η αντίστοιχη προς αυτό βασική μεταβλητή που βρίσκεται στην ίδια με το στοιχείο αυτό γραμμή.

Στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα από δύο διανύσματα που μπορούν να βγουν από τη βάση, ένας εύχρηστος τρόπος για να καθορίσουμε την "εξερχόμενη μεταβλητή" είναι να διαλέξουμε το διάνυσμα με το μεγαλύτερο Y_{ik} . Εάν δεν μας βοηθήσει αυτό το κριτήριο, τότε θα διαλέξουμε το διάνυσμα με το μικρότερο (ή μεγαλύτερο) δείκτη I.

Το στοιχείο που ανήκει στην στήλη της "εισερχόμενης" και συγχρόνως στην γραμμή της "εξερχόμενης" μεταβλητής λέγεται "αξονικό" και το βάζουμε σε κύκλο Y_{ik} , η δε ραμμή r και η στήλη k στις οποίες ανήκει λέγονται επίσης "αξονικές".

Τρίτο: κατασκευάζουμε το νέο (δεύτερο) πίνακα.

4.3 Περιπλοκές και δυσκολίες κατά την εφαρμογή της μεθόδου

Κυριότερες από αυτές είναι οι παρακάτω:

α) Περιορισμοί της μορφής $\geq$ ή =

Στην γενική μορφή του π.γ.π. οι ανισοϊσότητες έχουν κατεύθυνση $\leq$, με συνέπεια οι μεταβλητές που θεωρούνται βασικές στον αρχικό πίνακα simplex (δηλαδή, οι χαλαρές μεταβλητές που η μήτρα των συντελεστών τους είναι μοναδιαία) να έχουν πρόσημο θετικό. Είναι όμως δυνατόν το πρόβλημα να περιλαμβάνει και ανισοϊσότητες οι οποίες έχουν κατεύθυνση $\geq$, οπότε μια ή περισσότερες μεταβλητές $x_{n+1} = -b$. Ήδη όμως προϋπόθεση είναι $b_i \geq 0$ για όλα τα b_i , επομένως, εάν $x_{n+1} = -b$, τότε η λύση δεν είναι δυνατή.

Στις περιπτώσεις αυτές εξετάζουμε πρώτα, εάν είναι δυνατόν να πετύχουμε την πρότυπη μορφή του προβλήματος με την αλλαγή της κατεύθυνσης των ανισοϊσοτήτων σε $\geq$, όπως στο παρακάτω παράδειγμα: Να βρεθεί το μέγιστο της συνάρτησης:

$z = 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 6x_4$

με τους περιορισμούς

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 20$ (1)

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 10$ (2)

$- x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \geq -8$ (3)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Εάν πολλαπλασιάσουμε με το (-1) τις δύο τελευταίες ανισότητες (2) και (3) θα έχουμε:

$-2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 10$

$x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 \leq 8$

οπότε, μετά την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών το πρόβλημα είναι στην πρότυπη μορφή του, δηλαδή:

$x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 8$

$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_6 = 10$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 20$

Εάν όμως δεν είναι δυνατή η αλλαγή της κατεύθυνσης των ανισοϊσοτήτων, τότε, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, προσθέτουμε, εκτός από τις χαλαρές και πλεονάζουσες μεταβλητές, τις “τεχνητές” μεταβλητές. Οι “τεχνητές” μεταβλητές μας βοηθούν να σχηματίσουμε με τεχνητό τρόπο το μοναδιαίο διάνυσμα (δηλαδή δημιουργούν μια τεχνητή βάση, για να μας διευκολύνουν στην επίλυση του προβλήματος). Επειδή οι τεχνητές μεταβλητές δεν έχουν φυσική σημασία, στην τελική λύση οι τιμές τους θα πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν, αλλιώς δεν ικανοποιούνται οι περιορισμοί του προβλήματος.

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα:

Να βρεθεί το:

$\max z = x_1 + 8x_2 – 6x_3$

με τους περιορισμούς :

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 17$
$3x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 20$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Προσθέτουμε δύο πλεονάζουσες και δύο τεχνητές μεταβλητές και το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + q_1 = 17$
$3x_1 + 7x_2 + x_3 - x_5 + q_2 = 20$

η δε αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$maxz = x_1 + 8x_2 - 6x_3 + (0)x_4 + (0)x_5 - q_1 - q_2$

Τεχνητές μεταβλητές χρησιμοποιούμε και στην περίπτωση που αντί για ανισοϊσότητες έχουμε εξισώσεις.

Παράδειγμα:
Ζητείται να βρεθεί το:

$maxz = 20x_1 + 5x_2 + 30x_3 + 3x_4$

με τους περιορισμούς:
$2x_2 - x_3 + x_4 = 10$ (1)
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 24$ (2)
$x_1 - x_2 + 2x4 + x_5 = 18$ (3)
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Η δυσκολία δημιουργείται από τις δύο πρώτες εξισώσεις, γιατί η τρίτη περιέχει την μεταβλητή x_5 που το διάνυσμά της είναι μοναδιαίο και δεν εμφανίζεται στην αντικειμενική συνάρτηση. Προσθέτοντας δύο τεχνητές μεταβλητές στις εξισώσεις (1) και (2), έχουμε το πρόβλημα στην πρότυπή του μορφή:

$x_1 - x_2 + 2x4 + x_5 = 18$
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + q_1 = 24$
$2x_2 - x_3 + x_4 + q_2 = 10$

Η δε αντικειμενική συνάρτηση: $maxz = 20x_1 + 5x_2 + 30x_3 + 3x_4 - q_1 - q_2$.

Για την επίλυση του προβλήματος που περιλαμβάνει "τεχνητές" μεταβλητές έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές. Όλες βασίζονται στην αρχή ότι η τελική λύση του προβλήματος δεν μπορεί να περιέχει και "τεχνητές" μεταβλητές. Οι πιο γνωστές από τις τεχνικές αυτές είναι: α) η μέθοδος Μ. Σύμφωνα με αυτήν, στην αντικειμενική συνάρτηση κάθε μια από τις τεχνητές μεταβλητές πολλαπλασιάζεται επί ένα αριθμό -

M (ή +M, όταν είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης), όπου M είναι θετικός αριθμός ασυγκρίτως μεγαλύτερος του μεγίστου των συντελεστών c_j της z. Σε συνέχεια, εμφανίζοντας την μέθοδο Simplex, αντικαθιστούμε διαδοχικά σε κάθε βάση, τις τεχνητές μεταβλητές με τις φυσικές μεταβλητές. Όταν τελειώσει αυτή η αντικατάσταση, έχουμε μια φυσική πλέον λύση και συνεχίζουμε τη διαδικασία της Simplex μέχρι να καταλήξουμε στη βέλτιστη λύση. β) Η μέθοδος των δύο φάσεων. Στην πρώτη φάση μηδενίζονται διαδοχικώς οι τεχνητές μεταβλητές, έτσι ώστε στο τέλος αυτής να προκύπτει μια βασική λύση (χωρίς τεχνητές μεταβλητές). Στη δεύτερη φάση θα χρησιμοποιήσουμε τη λύση αυτή σαν μια αρχική βασική δυνατή λύση και σε συνέχεια εφαρμόζουμε τη διαδικασία Simplex, μέχρι να βρούμε τη βέλτιστη λύση.

β) Ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης z

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με τη διαδικασία εφαρμογής της μεθόδους Simplex μόνο σε προβλήματα μεγιστοποίησης. Επειδή όμως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα μεγιστοποίησης και να λυθεί σαν πρόβλημα αυτής της κατηγορίας, γι' αυτό μελετώνται κατά κανόνα μόνο τα προβλήματα μεγιστοποίησης. Η μετατροπή αυτού του προβλήματος ελαχιστοποίησης σε προβλήματα μεγιστοποίησης γίνεται με τον πολλαπλασιασμό της αντικειμενικής συνάρτησης επί -1, οπότε:

minz = max-z

Συγκεκριμένα: Υποθέτουμε ότι η z μπορεί να πάρει τις τιμές (6, 5, 4, 3, 2, 1). Το min z=1. Αλλά η -z μπορεί να πάρει τις τιμές (-6, -5, -4, -3, -2, -1). Και το max-z = -1 ή max(-z) = 1 = maxz.

Έτσι, αν αλλάξουμε τα πρόσημα των συντελεστών μιας αντικειμενικής συνάρτησης ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης, τότε αυτό μετατρέπεται σε πρόβλημα μεγιστοποίηση. Δηλαδή:

το $\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ είναι ισοδύναμο με το

$$\max(-z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Παράδειγμα:

Η βιομηχανία ΗΛΙΟΣ πρέπει να παραδώσει τα επόμενα δύο έτη τις παρακάτω ποσότητες του προϊόντος τύπου Α:

1.000 μονάδες το πρώτο έτος και 1.000 μονάδες το δεύτερο έτος.

Η παραγωγική δυναμικότητα της ΗΛΙΟΣ είναι 1500 μονάδες τύπου Α ετησίως. Το κόστος για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος τύπου Α είναι 100 ευρώ, προβλέπεται όμως αύξηση αυτού το δεύτερο έτος κατά 50 ευρώ (δηλαδή 150/1). Τα προϊόντα που δεν διατίθενται μέσα στο έτος που παράγονται συνεπάγεται κόστος διατήρησης 20 ευρώ ανά μονάδα. Ο ΗΛΙΟΣ δεν έχει απόθεμα αυτού του προϊόντος και δεν επιθυμεί να έχει (απόθεμα του ίδιου προϊόντος) στο τέλος του δεύτερου έτους.

Πώς θα παραγραμματισθεί η παραγωγή του προϊόντος τύπου Α, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος παραγωγής, αλλά συγχρόνως να παραδοθούν τα προϊόντα εγκαίρως;

Εάν
x_1= η ποσότητα του προϊόντος Α που θα παραχθεί το πρώτο έτος
x_2= το απόθεμα προϊόντος Α στο τέλος του πρώτου έτους
x_3= η ποσότητα του προϊόντος Α που θα παραχθεί κατά το δεύτερο έτος

Το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:
$x_1 + x_2 = 1.000$ (1)
$x_2 + x_3 = 1.000$ (2)
$x_1 \leq 1.500$ (3)
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε πρόβλημα μεγιστοποίησης και προσθέτουμε τις αναγκαίες συμπληρωματικές μεταβλητές, δηλαδή, τεχνητές μεταβλητές στις (1) και (2) και μια χαλαρή μεταβλητή στην (3): Ζητείται το:
$\max(-z) = -100x_1 - 20x_2 - 150x_3 - M_{q1} - M_{q2}$

με τους περιορισμούς:
$x_1 - x_2 + q_1 = 1.000$
$x_2 + x_3 + q_2 = 1.000$
$x_1 + x_4 = 1.500$

Πρώτο βήμα: Κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα Simplex με βασική λύση:
$q_1 = 1.000 \quad x_1 = 0$
$q_2 = 1.000 \quad x_2 = 0$
$x_4 = 1.500 \quad x_3 = 0$

z = [1.000 x (-M)] + [1.500 x (0)] = - 2.000 M

Πίνακας 1. Αρχικός πίνακας Simplex

C			-100	-20	-150	-M	-M	0	b
i	C_B	Βασικές μετ/τές	x_1	x_2	x_3	q_1	q_2	x_4	
1	-M	q_1	1	-1	0	1	0	0	1000
2	-M	q_2	0	1	(1)	0	1	0	1000
3	0	x_4	1	0	0	0	0	1	1500
R_o		z	-M	0	-M	-M	-M	0	-2000M
		$c_j - z_j$	-M+100	20	-M+150	0	0	0	

Ο υπολογισμός των z_j γίνεται ως εξής:

$z_1 = 1(-M) + 0(-M) + 1(0) = -M$,

z_2 = (-1) (-M) + 1(-M) + 0(0) =0

Δεύτερο βήμα: “Εισερχόμενη” μεταβλητή είναι η x_3, “εξερχόμενη” είναι η q_2 και Y_{rk} = Y_{23} = 1. Κατασκευάζουμε τον δεύτερο πίνακα μετά από τον υπολογισμό των γραμμών του:

Πίνακας 2.

C			-100	-20	-150	-M	-M	0	b
i	C_B	Βασικές μετ/τές	x_1	x_2	x_3	q_1	q_2	x_4	
1	-M	q_1	(1)	-1	0	1	0	0	1000
2	-150	x_3	0	1	1	0	1	0	1000
3	0	x_4	1	0	0	0	0	1	1500
R_o		$z_j - c_j$	-M+100	M-130	0	0	M-150	0	-2000M -150000M

γ) Ανακυκλώσεις

Είναι δυνατόν να υπάρξουν περιπτώσεις στις οποίες οι βασικές λύσεις επαπαναλαμβάνονται, με την έννοια ότι επαναλαμβάνεται ο αλγόριθμος Simplex, χωρίς να μεταβάλλονται οι τιμές των αγνώστων μεταβλητών ούτε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Τότε λέμε ότι έχουμε μια ανακύκλωση, η οποία με την εφαρμογή ορισμένων μεθόδων (Charness, Dantzig) μπορεί να ξεπεραστεί και έτσι να συνεχιστεί η εφαρμογή της Simplex μέχρι τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης.

5. ΔΥΪΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Μια από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις από τα πρώτα στάδια ανάπτυξης του ΓΠ είναι η θεωρία τη δυϊκότητας. Οι πρώτες μελέτες αυτής της θεωρίας έγιναν από το μαθηματικό και οικονομολόγο John von Neuman, στη συνέχεια δε από του D. Gale, H. Kuhn και A. Tucker. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία για κάθε πρόβλημα ΓΠ μπορούμε να διατυπώσουμε ένα αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα το οποίο σχετίζεται με το αρχικό (πρωτεύον) πρόβλημα ως προς τη δομή του, και το οποίο μας παρέχει σημαντικές οικονομικές πληροφορίες σχετικά με τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος.

5.1 Διατύπωση του δυϊκού προβλήματος

Έστω (Π) το ακόλουθο πρόβλημα: Να ευρεθούν (x_1, x_2, x_3...x_n) ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ...+ c_nx_n$

με τους περιορισμούς:

$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ...+ \alpha_{1n}x_n \leq b_1$

$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ...+ \alpha_{2n}x_n \leq b_2$

$$\begin{array}{ll} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad\qquad\qquad (\Pi) \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ...+ \alpha_{mn}x_n \leq b_m$
$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

Το δυϊκό πρόβλημα (Δ) του προβλήματος (Π) ορίζεται ως εξής: Να ευρεθούν (Y_1, Y_2, ... Y_m) ώστε να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση :

$\Theta = b_1Y_1 + b_2Y_2 +....+ b_mY_m$
με τους περιορισμούς

$\alpha_{11}Y_1 + \alpha_{12}Y_2 + ...+ b_{m1}Y_m \geq c_1$
$\alpha_{21}Y_1 + \alpha_{22}Y_2 + ...+ b_{m2}Y_m \geq c_2$

$$\begin{array}{ll} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad\qquad\qquad (\Delta) \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

$\alpha_{1n}Y_1 + \alpha_{2n}Y_2 + ...+ b_{mn}Y_m \geq c_m$
$Y_1, Y_2, ..., Y_m \geq 0$

Γενικότερα, υπάρχει η εξής αντιστοίχηση μεταξύ των δομών του πρωτεύοντος και του δυϊκού προβλήματος:

α. Περιορισμοί

Σε κάθε περιορισμό i του πρωτεύοντος αντιστοιχεί και μια μεταβλητή Y_i του δυϊκού. Εάν ο περιορισμός είναι της μορφής $\leq$, τότε η αντίστοιχη μεταβλητή ορίζεται $Y_i \geq 0$. Εάν ο περιορισμός i είναι της μορφής $\geq$, τότε $Y_i \leq 0$ και εάν ο περιορισμός i είναι της μορφής =, τότε η Y_i δεν περιορίζεται (μπορεί να έχει θετικές ή αρνητικές τιμές).

β. Μεταβλητές

Σε κάθε μεταβλητή xj του πρωτεύοντος αντιστοιχεί και ένας περιορισμός του δυϊκού. Εάν μια μεταβλητή είναι της μορφής $x_j \geq 0$, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός είναι της μορφής $\geq$, και εάν $x_j \leq 0$, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός είναι της μορφής $\leq$.
Οι συντελεστές των περιορισμών του δυϊκού προβλήματος είναι οι συντελεστές των περιορισμών του πρωτεύοντος, όπου οι στήλες και οι γραμμές έχουν αναστραφεί (ανάστροφος πίνακας).
Η δεξιά σταθερά κάθε περιορισμού του δυϊκού προβλήματος είναι ο συντελεστής της αντίστοιχης μεταβλητής στην αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος.

γ. Αντικειμενική Συνάρτηση

Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος είναι οι δεξιές σταθερές των περιορισμών του πρωτεύοντος. Εάν το πρωτεύον πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, τότε το δυϊκό είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης και αντίστροφα.

Οι σχέσεις αυτές μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού προβλήματος παρουσιάζονται περιληπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας: Σχέσεις στη διατύπωση μεταξύ πρωτευόντων και δυϊκού προβλήματος:

Πρόβλημα μεγιστοποίησης	....	Πρόβλημα ελαχιστοποίησης
Περιορισμός i μορφής $\leq$	....	Μεταβλητή $Y_i \geq 0$
Περιορισμός i μορφής $\geq$	....	Μεταβλητή $Y_i \leq 0$
Περιορισμός i μορφής =	....	Μεταβλητή Y_i χωρίς περιορισμούς
Μεταβλητή $x_j \geq 0$	....	Περιορισμός j μορφής $\geq$
Μεταβλητή $x_j \leq 0$	....	Περιορισμός j μορφής $\leq$
Μεταβλητή j χωρίς περιορισμό	....	Περιορισμός j μορφής =
Συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης	....	Δεξιές σταθερές περιορισμών
Δεξιές σταθερές περιορισμών	....	Συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης

Από τις ανωτέρω σχέσεις μπορεί να φανεί εύκολα ότι το δυϊκό του δυϊκού προβλήματος είναι πάλι το πρωτεύον.
Επομένως, προκειμένου να διατυπώσουμε το δυϊκό ενός προβλήματος, κατ' αρχή εξετάζουμε το πρωτεύον πρόβλημα κατά πόσον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης και το εντάσσουμε σε μια από τις δύο κατηγορίες. Το δυϊκό πρόβλημα διατυπώνεται τότε από την απέναντι κατηγορία.

Παράδειγμα:
Έστω (Π1) το ακόλουθο πρόβλημα: Να ευρεθούν (x_1, x_2, x_3) ώστε να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση:

$z = 6x_1 + 5\ x_2 - 3x_3$
με τους περιορισμούς
$2x_1 - 7x_2 + 2x_3 \geq 5$
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7$ (Π1)
$3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10$
$x_1 + x_2 \leq 8$
$x_1, x_2 \geq 0$

Το Δυϊκό του προβλήματος (Π1) είναι το εξής: Να ευρεθούν (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση

$\Theta = 5Y_1 + 7Y_2 + 10Y_3 + 8Y_4$
με τους περιορισμούς:
$2Y_1 + Y_2, + 3Y_3 + Y_4 \leq 6$
$-7Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 + Y_4 \leq 5$
$3Y_1 + 2Y_2 + Y_3 = 3$ (Δ1)
$3Y_1 + 2Y_2 + Y_3$
$Y_1 \geq 0, Y_3 \leq 0, Y_4 \leq 0$

5.2 Σχέσεις μεταξύ πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος

Εκτός από τις σχέσεις στη διατύπωση μεταξύ πρωτεύοντος (Π) και δυϊκού (Δ) προβλήματος, υπάρχουν σημαντικές σχέσεις και στη λύση των δυο προβλημάτων. Οι σχέσεις αυτές αποτελούν τη θεωρία της δυϊκότητας και είναι οι ακόλουθες:

Σχέση 1: Εάν Ζ είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του (Π) η οποία προέρχεται από μία εφικτή (όχι κατ' ανάγκη την άριστη) λύση του (Π) και Θ μια αντίστοιχη τιμή για το (Δ) τότε ισχύει:

$Z \geq \Theta$

Σχέση 2: Για τις άριστες τιμές Ζ* και Θ* (εφ' όσον υπάρχουν) ισχύει:

$Z^* = \Theta^*$

Σχέση 3: Εάν ένα από τα δύο προβλήματα (Π ή Δ) έχει απεριόριστη λύση, τότε το άλλο είναι αδύνατο.

$$\begin{array}{ccc} Z_o & (\Pi) & \\ \hline & & Z^* = \Theta^* \\ \Theta_o & (\Delta) & \end{array}$$

Σχήμα: Σχέσεις της λύσης μεταξύ πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Θα αντιληφθούμε καλύτερα τις σχέσεις 1-3 αν εξετάσουμε το παραπάνω σχήμα. Έστω (Π) ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης και (Δ) το δυϊκό του πρόβλημα (πρόβλημα μεγιστοποίησης). Σύμφωνα με τη σχέση 1, κάθε εφικτή λύση του (Δ) θα είναι μικρότερη (ή το πολύ ίση) από όλες τις εφικτές λύσεις του (Π). Αυτό είναι πολύ χρήσιμο γιατί μας παρέχει ένα κατώτατο όριο των τιμών της Ζ. Η σχέση 2 υποδεικνύει ότι τα δύο προβλήματα έχουν την ίδια άριστη λύση (εάν αυτή υπάρχει). Τέλος, σύμφωνα με τη σχέση 3, εάν το ένα από τα δύο προβλήματα έχει απεριόριστη άριστη λύση, τότε το δυϊκό του δεν έχει καμία λύση.

Σχέση 4: Η άριστη λύση του ενός προβλήματος μπορεί να αναγνωσθεί και από τον τελικό πίνακα του δυϊκού προβλήματος και συγκεκριμένα στην τελευταία σειρά του τελικού πίνακα.

5.3 Σημασία του δυϊκού προβλήματος

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι μπορεί κανείς να αποκτήσει τη λύση ενός προβλήματος ΓΠ λύνοντας είτε το πρωτεύον πρόβλημα, είτε το δυϊκό. Ποια λοιπόν η πρακτική σημασία του δυϊκού προβλήματος;

Η κύρια χρησιμότητα του δυϊκού προβλήματος είναι ότι μας βοηθά στην κατανόηση των δυϊκών τιμών και του επιπλέον κόστους. Επίσης, σε ορισμένα προβλήματα (λόγω δομής του προβλήματος) η λύση του δυϊκού είναι ευκολότερη από αυτή του πρωτεύοντος. Τέλος, το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να μας βοηθήσει στο να αποκτήσουμε εύκολα ένα ανώτατο ή κατώτατο όριο της άριστης λύσης. Συγκεκριμένα: Οι περιπτώσεις στις οποίες η λύση του δυϊκού παρουσιάζεται ευκολότερη από αυτή του πρωτεύοντος είναι κυρίως δύο. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν μια αρχική βασική εφικτή λύση δεν υπάρχει στο πρωτεύον (οπότε θα πρέπει να ακολουθήσουμε τη μέθοδο των δύο φάσεων, όπως π.χ. στα προβλήματα ελαχιστοποίησης), ενώ αντίστοιχα υπάρχει στο δυϊκό. Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν οι περιορισμοί στο πρωτεύον πρόβλημα είναι πολύ περισσότεροι από όσες οι μεταβλητές. Σ' αυτήν την περίπτωση το δυϊκό πρόβλημα θα έχει (σύμφωνα με τους κανόνες της διατύπωσης) πολύ περισσότερες μεταβλητές από όσους περιορισμούς και επομένως θα είναι συνήθως ευκολότερο να λυθεί.
Τέλος, η χρησιμότητα των ορίων για την άριστη λύση είναι σημαντική ειδικά σε περιπτώσεις όπου η ακριβής τιμή της δεν είναι απαραίτητη ή είναι δύσκολο να αποκτηθεί. Η χρησιμότητα αυτή του δυϊκού προβλήματος πηγάζει από την πρώτη σχέση μεταξύ (Π) και (Δ) και εφαρμόζεται ως εξής: έστω ότι η λύση του πρωτεύοντος είναι δύσκολη, ενώ αντίστροφα κάποια λύση του δυϊκού είναι εύκολο να αποκτηθεί. Τότε, αυτή η λύση του δυϊκού προβλήματος αποτελεί και ένα όριο στην άριστη λύση του πρωτεύοντος. Ανάλογα με την περίπτωση, το όριο αυτό μπορεί να αποτελεί μια πολύ χρήσιμη πληροφορία για τη λήψη μιας επιχειρηματικής απόφασης.

Παράδειγμα : Μια επιχείρηση γεωργικών προϊόντων χρησιμοποιεί τρεις πρώτες ύλες Α, Β, Γ για να παράγει δύο προϊόντα Π1 και Π2. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές για την παραγωγή μιας μονάδας Π1 πρέπει να χρησιμοποιηθούν 1 μονάδα Α, 1 μονάδα Β και δύο μονάδες Γ. Αντίστοιχα, μια μονάδα Π2 απαιτεί 2 μονάδες Α, 1 μονάδα Β και 1 μονάδα Γ. Η επιχείρηση διαθέτει αποθέματα ύψους 30, 20, και 36 μονάδων αντίστοιχα για τις τρεις πρώτες ύλες, τα δε προϊόντα Π1 και Π2 πωλούνται στην αγορά σε τιμές 200 και 300 ευρώ ανά μονάδα, αντίστοιχα. Να ευρεθούν οι ποσότητες των Π1 και Π2 οι οποίες πρέπει να παραχθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό εισόδημα.

Αρχικός Πίνακας του προβλήματος είναι ο εξής:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	1	1	-1	0	10
1	1	0	1	0	20
2	1	0	0	1	36
-200	-300	0	0	0	0

Πίνακας α: Αρχικός πίνακας του πρωτεύοντος. Μετά από μετασχηματισμούς ο τελικός πίνακας είναι ο εξής:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	1	1	-1	0	10
1	0	-1	2	0	10
0	0	0	-3	1	6
0	0	100	0	0	5.000

Πίνακας β: Τελικός πίνακας του πρωτεύοντος. Από τον τελικό πίνακα διαβάζουμε την ακόλουθη άριστη λύση:
Ποσότητες: x_1 *= 10, x_2*= 10, s_3*= 6, s_1*= s_2*= 0

Αντικειμενική συνάρτηση Z* = 100, Y_B*=100, Y_Γ*=0
Από τη λύση αυτή έπεται ότι οι δυϊκές τιμές των τριών πρώτων υλών είναι 100, 100, και 0 ευρώ αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι εάν η επιχείρηση είχε μια μονάδα Α περισσότερη στη διάθεσή της, τότε θα μπορούσε (με διαφορετικό βέβαια πρόγραμμα παραγωγής) να αυξήσει το εισόδημά της κατά 100 ευρώ. Το ίδιο θα συνέβαινε με μία περισσότερη μονάδα Β. Αντίθετα, μια περισσότερη μονάδα Γ δεν θα αύξανε το εισόδημά της εφ' όσον ήδη υπάρχουν αχρησιμοποίητες 6 μονάδες Γ.
Το δυϊκό του προβλήματος αυτού διατυπώνεται ως εξής: Μια άλλη επιχείρηση δασικών προϊόντων χρησιμοποιεί τις ίδιες πρώτες ύλη Α, Β, Γ για να κατασκευάσει διαφορετικά προϊόντα. Η επιχείρηση αυτή έχει μεγάλη ανάγκη να αυξήσει την παραγωγή της προκειμένου να ανταποκριθεί σε συμβάσεις τις οποίες έχει ήδη υπογράψει. Για αυτό το λόγο χρειάζεται να αγοράσει όλα τα αποθέματα πρώτων υλών της πρώτης (γεωργικής) επιχείρησης. Έτσι, θέλει να προσδιορίσει τιμές για κάθε μονάδα πρώτης ύλης ώστε, αφ' ενός μεν να ελαχιστοποιήσει το κόστος αγοράς των πρώτων υλών και αφετέρου να δώσει το οικονομικό κίνητρο στη γεωργική επιχείρηση να πωλήσει τα αποθέματά της αντί να τα διοχετεύσει στην παραγωγή της. Για να πετύχει αυτό το κίνητρο πρέπει να προσφέρει τιμές τέτοιες ώστε να είναι ανταγωνιστικές με το εισόδημα που θα εισέπραττε η γεωργική επιχείρηση εάν παρήγαγε και πωλούσε τα προϊόντα Π1 και Π2.
Το πρόβλημα λοιπόν για την επιχείρηση δασικών προϊόντων είναι να προσδιορίσει τιμές Y_A, Y_B και Y_Γ για τις τρεις πρώτες ύλες ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος αγοράς.

$\Theta = 30Y_A + Y_B + 36Y_\Gamma$
με τους περιορισμούς:
$2Y_A + Y_B + 2Y_\Gamma \geq 200$
$2Y_A + Y_B + Y_\Gamma \geq 300$
$Y_A, Y_B, Y_\Gamma \geq 0$

Το πρόβλημα αυτό είναι το δυϊκό του προβλήματος της γεωργικής επιχείρησης. Προσθέτοντας πρόσθετες μεταβλητές ε1 και ε2 και τεχνιτές μεταβλητές α1 και α2.

Y_A	Y_B	$Y_Γ$	$ε_1$	$ε_2$	$α_1$	$α_2$	
0	1	2	-1	1	1	0	200
1	1	1	0	0	0	1	300
30	20	36	0	0	M	M	0

Πίνακας α: Αρχικός πίνακας του Δυϊκού

Μετά μερικούς μετασχηματισμούς ο τελικός πίνακας του δυϊκού είναι ο εξής:

Y_A	Y_B	$Y_Γ$	$ε_1$	$ε_2$	
0	1	3	-2	1	100
1	0	-1	1	-1	100
0	0	6	10	10	-5000

Πίνακας β: Τελικός πίνακας του Δυϊκού

Από τον πίνακα αυτό διαβάζουμε την ίδια λύση με το πρωτεύον, και έτσι τον επαληθεύουμε.
Για τη σημασία του δυϊκού προβλήματος πρέπει να έχουμε υπ' όψη μας τα εξής:
α. Η λύση σε ένα πρόβλημα ΓΠ δεν είναι μόνο οι άριστες τιμές των αρχικών και πρόσθετων μεταβλητών, και της αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά επίσης και οι δυϊκές τιμές και τα επιπλέον κόστη. Τα δύο αυτά τελευταία μεγέθη έχουν πολύ σημαντική οικονομική σημασία.
β. Η λύση ενός προβλήματος ΓΠ γενικά μεταβάλλεται όταν γίνουν μεταβολές στις σταθερές του προβλήματος (π.χ. στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ή στις δεξιές σταθερές). Για ορισμένες όμως “μικρές” αλλαγές ορισμένα κομμάτια της λύσης δεν μεταβάλλονται. Συγκεκριμένα, για μικρές αλλαγές τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι δυνατόν να μην επέλθει μεταβολή στις άριστες τιμές των μεταβλητών, θα μεταβληθούν όμως οι δυϊκές τιμές, τα επιπλέον κόστη, και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Από την άλλη μεριά, για μικρές αλλαγές των δεξιών σταθερών είναι δυνατόν να μην επέλθει μεταβολή στις δυϊκές τιμές και τα επιπλέον κόστη, αλλά θα μεταβληθούν οι τιμές των μεταβλητών και της αντικειμενικής συνάρτησης.

5.4 Οικονομική ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος

Η λύση του δυϊκού προβλήματος μας δίνει την οριακή τιμή κάθε μονάδας του συντελεστή της παραγωγής, δηλαδή το κόστος ανά μονάδα παραγωγικής δυναμικότητας της επιχείρησης. Η πληροφορία αυτή δίδεται και από τη γραμμή της καθαρής εκτιμήσεως του άριστου προγράμματος, της λύσης του κύριου προβλήματος με τη μέθοδο Simplex. Οι τιμές αυτές είναι πολύ χρήσιμες για τις επιχειρήσεις και καμία άλλη τεχνική ή μέθοδος δεν μας δίνει τις πληροφορίες αυτές αλλά μόνο ο Γραμμικός Προγραμματισμός. Τέλος οι τιμές αυτές είναι απαραίτητες για τον προγραμματισμό των επιχειρήσεων και για αποφάσεις επέκτασης ή περιορισμού της δυναμικότητας των επιχειρήσεων. Ακόμη, πολλές φορές το δυϊκό πρόβλημα μας δίνει μια ευκολότερη λύση με πολύ λιγότερες μεταβλητές και λιγότερο υπολογιστικό χρόνο και δαπάνες, γεγονός που πρέπει απαραίτητα να εκμεταλλευθεί η επιχείρηση για να επικρατήσει και να αναπτυχθεί μέσα στις τόσο δύσκολες και ανταγωνιστικές συνθήκες της αγοράς όπου λειτουργεί.

6. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

6.1 Χρήση του Η/Υ για τον έλεγχο αποθεμάτων με την εφαρμογή του Γραμμικού Προγραμματισμού

Η μέθοδος Simplex είναι αρκετά περίπλοκη και επίπονη στη χρήση της, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για ρεαλιστικά προβλήματα που εμφανίζονται στη βιομηχανία, τις υπηρεσίες, την έρευνα κλπ.
Από την άλλη μεριά, το γεγονός ότι η μέθοδος αυτή αποτελείται από επαναλαμβανόμενα βήματα καθιστά εύκολη και απαραίτητη την κωδικοποίηση της σε Ηλεκτρονικό Υπολογιστή (Η/Υ).
Για αυτούς τους λόγους η μεγαλύτερη χρήση του ΓΠ γίνεται σήμερα με βάση τον Η/Υ. Εκτός από τα απλά παραδείγματα για επίδειξη και κατανόηση της μεθόδου Simplex και των αποτελεσμάτων της, όλα σχεδόν τα προβλήματα ρεαλιστικού μεγέθους απαιτούν τη χρήση έτοιμων προγραμμάτων (πακέτων) ΓΠ. Τα πακέτα αυτά χρησιμοποιούν τη μέθοδο simplex (ή κάποια παραλλαγή της) σαν τον κύριο κορμό του προγράμματος. Εκεί εκτελούνται όλες οι λογικές διεργασίες και οι μαθηματικοί μετασχηματισμοί της μεθόδου. Τα πακέτα αυτά είναι εξοπλισμένα με ειδικές εντολές (ή ρουτίνες) εισόδου – εξόδου για την είσοδο των δεδομένων του κάθε προβλήματος από τον χρήστη και για την παρουσίαση, εκτύπωση ή αποθήκευση των αποτελεσμάτων μετά τη λύση και ο χρήστης να έχει τη δυνατότητα να κατευθύνει ανάλογα τις εργασίες που θα εκτελεστούν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ε. Καρασαββίδου – Χατζηγρηγορίου: Λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων: Προσέγγιση με την επιχειρησιακή έρευνα. University studio press, Θεσσαλονίκη 1986.

2. Ιωάννης Κάρκαζης: Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα. Εκδόσεις Σμπίλιας, Χίος 1988.

3. Στρατή Κουνιά – Δημήτρη Φακινού. Γραμμικός προγραμματισμός θεωρία και ασκήσεις. Εκδόσεις Ζήση Θεσσαλονίκη 1989.

4. Γιάννη Τ. Λαζαρίδη – Αγγελικής Ι. Δημοπούλου. Περιπτωσιακές διερευνήσεις επιχειρησιακών προβλημάτων. Εκδοτικός Οίκος Αφών Κυριακίδη Θεσσαλονίκη 1984.

5. Μανόλη Λουκάκη. Θέματα επιχειρησιακής έρευνας. Αριστοποίηση σε δίκτυα. Τόμος Α. Εκδόσεις Εγνατία Θεσσαλονίκη 1986.

6. Γρηγόρης Γ. Πραστάκος: Εφαρμογές γραμμικού προγραμματισμού με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Εκδόσεις Α. Σταμούλης, Πειραιας 1992.

7. Γρηγόρης Γ. Πραστάκος: Επιχειρησιακή έρευνα για τη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων. Α: Μαθηματικός προγραμματισμός. Εκδόσεις Α. Σταμούλης, Πειραιας 1992.

8. Άγγελος Α. Τσακλαγκάνος: Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα για τη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων. Γραμμικός προγραμματισμός. Γ΄ έκδοση. Εκδοτικός οίκος Αφών Κυριαζίδη – Θεσσαλονίκη 1980.