ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΠΑΝΤΑΙΔΑΚΗΣ ΜΙΧΑΗΛ Α.Μ 8342 ΕΞΑΜΗΝΟ :ΠΤΘ

# ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΈΡΕΥΝΑ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΥ


ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΥ ΕΛΕΝΗ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2015

# Περιεχόμενα

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με την πάροδο των χρόνων, ο κόσμος των επιχειρήσεων, των οργανισμών, της βιομηχανίας κλπ. , αντιμετωπίζει όλο και περισσότερο προβλήματα τα οποία αφορούν τόσο την εσωτερική οργάνωση τους όσο και τον ανταγωνισμό. Η εξέλιξη των μικρών επιχειρήσεων σε μεγάλες εταιρείες με διεθνή παρουσία έφερε μια μεγάλη πολυπλοκότητα με σύνθετες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ανθρώπων, των υλικών και των χρημάτων. Το διαρκώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον απαιτεί νέες μεθόδους οργάνωσης και λειτουργίας. Ένα συχνό πρόβλημα που ακολουθεί την ανάπτυξη των επιχειρήσεων είναι η ανομοιομορφία και η αποσπασματική αντιμετώπιση των προβλημάτων. Πολλές διοικητικές μονάδες θέτουν στόχους και εφαρμόζουν μεθόδους οι οποίες συχνά βρίσκονται σε αντίθεση μεταξύ τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την μη αποτελεσματική λειτουργία και τη σπατάλη των πόρων.

Η προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων οργάνωσης και αποτελεσματικότερης λειτουργίας των επιχειρήσεων παρείχε το υπόβαθρο και το περιβάλλον για την ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας. Η επιχειρησιακή έρευνα αποτελεί ένα ευρύ επιστημονικό πεδίο το οποίο παρέχει δυνατότητες επίλυσης μεγάλου αριθμού προβλημάτων στο χώρο των επιχειρήσεων , των βιομηχανιών , των οργανισμών κλπ. Οι μεθοδολογίες και οι υπολογιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιεί εξελίσσονται διαρκώς και υποστηρίζονται από σύγχρονο λογισμικό Πληροφορικής. Ο Γραμμικός Προγραμματισμός αποτελεί τη κύρια τεχνική επίλυσης των προβλημάτων της Επιχειρησιακής Έρευνας. Η γνώση της θεωρίας και των σχετικών εφαρμογών του αποτελεί βασική προϋπόθεση για την κατανόηση και αφομοίωση των περισσότερο εξειδικευμένων μεθοδολογιών.

Στην εργασία αυτή επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας σε δύο από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν πολλές σύγχρονες επιχειρήσεις. Αυτά είναι το πρόβλημα της μεταφοράς και το πρόβλημα του καταμερισμού. Η ανάπτυξη αυτών των προβλημάτων ακολουθεί ένα απλό και συνοπτικό τρόπο παρουσίασης των βασικών θεμάτων της θεωρίας , χωρίς να αναφέρονται μαθηματικές αποδείξεις. Η θεωρία παρουσιάζεται με τη βοήθεια παραδειγμάτων για τα οποία παρουσιάζεται η επίλυση τους με ειδικό λογισμικό του γραμμικού προγραμματισμού ( excel-solver) καθώς και με ειδικές υπολογιστικές τεχνικές.

Η εργασία περιλαμβάνει δύο κεφάλαια στα οποία αναπτύσσονται τα πλέον γνωστά προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας τα οποία διατυπώνονται και επιλύονται με βάση τη θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Αναλυτικά, το πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται στο πρόβλημα της μεταφοράς. Το ζητούμενο του προβλήματος είναι να προσδιοριστούν οι ποσότητες που πρέπει να μεταφερθούν από ορισμένα κέντρα προέλευσης ( παραγωγής ή εφοδιασμού) σε ορισμένα κέντρα προορισμού (π.χ. ζήτησης ή κατανάλωσης). Η μεταφορά πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος ή να μεγιστοποιείται το κέρδος, ενώ συγχρόνως να ικανοποιείται η προσφορά των κέντρων προέλευσης και η ζήτηση των κέντρων προορισμού. Στο μοντέλο μεταφοράς γίνεται η υπόθεση ότι το κόστος μεταφοράς μιας ορισμένης διαδρομής είναι ευθέως ανάλογο του αριθμού των μονάδων του προϊόντος που μεταφέρεται.

Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στο πρόβλημα του καταμερισμού n εργασιών σε n άτομα (ή μηχανές). Η κάθε εργασία θα κατανεμηθεί σε ένα άτομο, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί κάποιο επίπεδο αποτελεσματικότητας ή να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός χρόνος ή το κόστος εκτέλεσης των εργασιών. Τα προβλήματα καταμερισμού αποτελούν ιδιαίτερη περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς εάν θέσουμε ίδιο αριθμό κέντρων προέλευσης και προορισμού και προσφορά του κάθε κέντρου προέλευσης =1 και ζήτηση του κάθε κέντρου προορισμού =1.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
# ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

## 1.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα της μεταφοράς είναι ένα ειδικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με την έννοια ότι μπορεί να διατυπωθεί σε μοντέλο Γ.Π. και να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex. Επειδή όμως στην πράξη το πρόβλημα μεταφοράς μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο ως προς τις μεταβλητές και τους περιορισμούς για να λυθεί με τη μέθοδο Simplex, έχουν αναπτυχθεί ειδικοί αλγόριθμοι επίλυσης. Έτσι, σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τις κύριες μεθόδους επίλυσης του προβλήματος μεταφοράς.

Γενικά, το πρόβλημα μεταφοράς (transportation problem) αφορά την εύρεση βέλτιστου σχεδίου μεταφοράς (optimal transportation plan) και τον προσδιορισμό των καταλλήλων ποσοτήτων ενός συγκεκριμένου προϊόντος , που πρέπει να μεταφερθούν από ορισμένα κέντρα **προέλευσης** (παραγωγής ή εφοδιασμού ) , **αφετηρίες** ή **πηγές** σε ορισμένα κέντρα **προορισμού** (κατανάλωσης ή ζήτησης) . Αφετηρίες σε προβλήματα μεταφοράς είναι συνήθως οι βιομηχανίες , οι μονάδες παραγωγής προϊόντων , οι κεντρικές αποθήκες εφοδιασμού κλπ. Προορισμοί είναι τα καταστήματα λιανικής πώλησης , οι περιφερειακές αποθήκες κλπ. Η κάθε αφετηρία ή πηγή παρέχει αγαθά και έχει συγκεκριμένη δυναμικότητα διάθεσης (προσφορά) . Ο κάθε προορισμός μπορεί να απορροφήσει συγκεκριμένη ποσότητα αγαθών (ζήτηση). Η μεταφορά εμπορευμάτων από μία αφετηρία προς κάθε προορισμό έχει συγκεκριμένο κόστος το οποίο αναφέρεται είτε σε χρηματική αξία είτε σε χρόνο είτε σε απόσταση είτε προσδιορίζεται με ειδική συνάρτηση κόστους όπως για παράδειγμα μια συνάρτηση κέρδους. Αναλόγως της εφαρμογής το πρόβλημα της μεταφοράς διατυπώνεται ως πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους ή ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης συνολικού κόστους ή χρόνου μεταφοράς. Σε ένα τυπικό πρόβλημα μεταφοράς δίνονται ως δεδομένα :

- Η προσφορά της κάθε αφετηρίας
- Η ζήτηση των προορισμών
- Ο πίνακας κόστους – οφέλους μεταξύ των κόμβων του δικτύου μεταφοράς

Στο πρόβλημα της μεταφοράς ζητούμενο είναι όπως αναφέρεται παραπάνω να υπολογιστούν οι ποσότητες μεταφοράς μεταξύ των πηγών και των προορισμών ( σχέδιο συνολικής μεταφοράς) ώστε να βελτιστοποιείται η συνάρτηση κόστους – οφέλους. Έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς, ενώ συγχρόνως να ικανοποιείται η προσφορά (π.χ. οι παραγωγικές ικανότητες) των κέντρων προέλευσης και η ζήτηση των κέντρων προορισμού. Το πρόβλημα μεταφοράς έχει διαφορετικές παραλλαγές αναλόγως των υποθέσεων για πλήρη ή μερική ικανοποίηση της ζήτησης, της πλήρους ή της μερικής απορρόφησης των ποσοτήτων που παράγονται ή αναλόγως ιδιαίτερων περιορισμών που είναι δυνατόν να τίθενται (π.χ. αποκλεισμός μερικών προορισμών αναλόγως της αφετηρίας). Οι παραλλαγές αυτές επιδέχονται και διαφορετικούς τρόπους επίλυσης.

Στο μοντέλο μεταφοράς γίνεται η υπόθεση ότι το κόστος μεταφοράς μιας ορισμένης διαδρομής είναι ευθέως ανάλογο του αριθμού των μονάδων (π.χ. σε φορτία) του προϊόντος που μεταφέρεται.

Παραδείγματα προβλημάτων που εκφράζονται ως προβλήματα μεταφοράς είναι η διακίνηση βιομηχανικών προϊόντων ως μέρους της εφοδιαστικής αλυσίδας, η διανομή εφημερίδων και περιοδικών σε υποπρακτορεία και σημεία πώλησης, η διανομή τροφίμων σε μονάδες super market , η διανομή δεμάτων και αλληλογραφίας από εταιρείες ταχυμεταφοράς, η διανομή ηλεκτρικής ενέργειας σε υποσταθμούς κλπ.

## 1.2 Η Τυπική μορφή του Προβλήματος Μεταφοράς ως Μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού

Ένα τυπικό πρόβλημα μεταφοράς διατυπώνεται ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Το γενικό μοντέλο του προβλήματος μεταφοράς διαμορφώνεται ως εξής: Έστω ότι υπάρχουν n κέντρα προέλευσης και m κέντρα προορισμού.

Συμβολίζουμε με:

$s_i$ την συνολική ποσότητα προσφορά ή παραγωγική δυναμικότητα της i προέλευσης, σε ποσότητες του προϊόντος ($i = 1,..., n$),

$d_j$ τη συνολική ποσότητα ζήτηση του j προορισμού, σε μονάδες προϊόντος, ($j = 1,..., m$),

$x_{ij}$ τις μεταβλητές απόφασης που παριστάνουν τις ποσότητες του προϊόντος που θα μεταφερθούν από την i προέλευση (π.χ. εργοστάσιο) στον j προορισμό (π.χ. κέντρο διανομής, αποθήκη) και των οποίων τις τιμές θέλουμε να προσδιορίσουμε.

$c_{ij}$ το κόστος μεταφοράς από την i προέλευση στον j προορισμό, ανά μονάδα προϊόντος σε χρηματικές μονάδες.

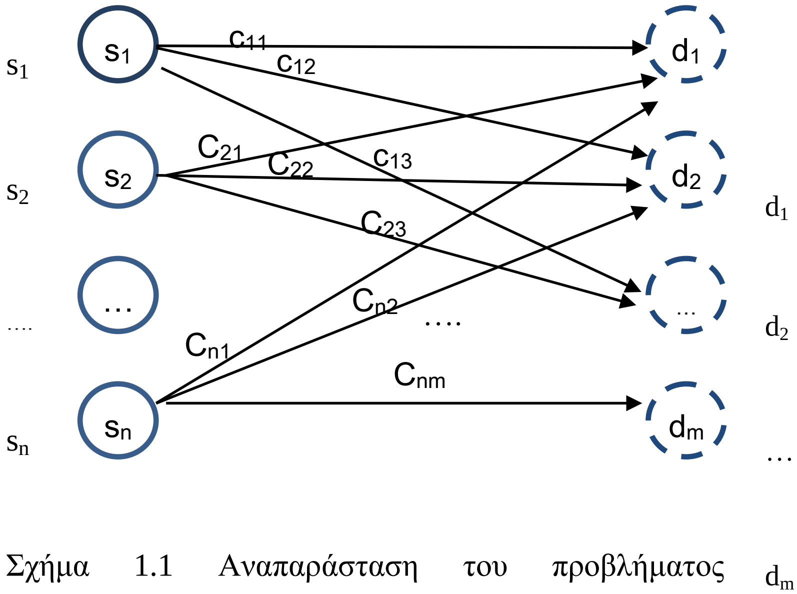
Με βάση τα ανωτέρω μεγέθη σχηματίζεται ο τυπικός πίνακας δεδομένων του προβλήματος μεταφοράς. Ο πίνακας αυτός έχει τη μορφή :

**Πίνακας 1.1**

**Γενική Μορφή Πίνακα Μεταφοράς**

| | Προορισμός 1 | Προορισμός 2 | .... | Προορισμός m | Προσφορά (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| Προέλευση 1 | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{21}$ $x_{12}$ | .... | $c_{1m}$ $x_{1m}$ | $s_1$ |
| Προέλευση 2 | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | | $c_{2m}$ $x_{2m}$ | $s_2$ |
| .... | .... | .... | .... | .... | .... |
| Προέλευση n | $c_{n1}$ $x_{n1}$ | $c_{n2}$ $x_{n2}$ | .... | $c_{nm}$ $x_{nm}$ | $s_n$ |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | $d_1$ | $d_2$ | .... | $d_m$ | |

Εναλλακτικά , αντί για τον ανωτέρω τυπικό πίνακα δεδομένων , ένα πρόβλημα μεταφοράς είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί ισοδύναμα με γράφημα . Στο γράφημα αυτό κάθε σχήμα του τύπου $s_n$ αντιπροσωπεύει τις πηγές – αφετηρίες , το σχήμα $D_m$ τους προορισμούς και το βέλος $\longrightarrow$ τη διαδρομή από την πηγή στον προορισμό . Το κόστος μεταφοράς εκφράζεται με τον αριθμό $C_{ij}$ ο οποίος χαρακτηρίζει κάθε βέλος που δηλώνει την μεταφορά. Η ποσότητα $s_i$ εκφράζει την συνολική προσφορά της πηγής i ενώ η ποσότητα $d_j$ τη συνολική ζήτηση του προορισμού j.




Σχήμα 1.1 Αναπαράσταση του προβλήματος μεταφοράς με γράφημα.

Το συνολικό κόστος μεταφοράς των προϊόντων μεταξύ όλων των δυνατών προελεύσεων και προορισμών εκφράζεται με το διπλό άθροισμα $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij}$ , το οποίο αναλόγως της σημασίας του κόστους ζητείται να ελαχιστοποιηθεί ή να μεγιστοποιηθεί.

Οι περιορισμοί του προβλήματος μεταφοράς που τίθενται είναι :

Η συνολική ποσότητα που μεταφέρεται προς τους προορισμούς είναι μικρότερη ή ίση με τη συνολική ποσότητα που μπορεί να διαθέσει η πηγή i.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq s_i \qquad (i = 1, \dots\dots, n)$$

Στον κάθε προορισμό j προσφέρεται συνολική ποσότητα ίση ή μεγαλύτερη από αυτήν που έχει ζητήσει.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j \qquad j = 1, \dots\dots, m)$$

Όλες οι μεταβλητές που εκφράζουν ποσότητα δέχονται μη αρνητικές τιμές

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n), (j = i, \dots, m)$$

Συνολικά , το πρόβλημα της μεταφοράς στη γενικευμένη του μορφή διατυπώνεται με το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα :

Η έκφραση του γενικού προβλήματος μεταφοράς ως γραμμικό πρόγραμμα.

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq s_i \qquad (i = 1, \dots\dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j \qquad j = 1, \dots\dots, m)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n), (j = i, \dots, m)$$

Ελέγχουμε εάν το πρόβλημα είναι ισορροπημένο, δηλαδή εάν το άθροισμα της προσφοράς είναι ίσο με το άθροισμα της ζήτησης. Διαφορετικά προσθέτουμε εικονικές προελεύσεις ή εικονικούς προορισμούς με μηδενικό μοναδιαίο κόστος . Επομένως το μοντέλο του προβλήματος μεταφοράς στη γενικευμένη του μορφή διατυπώνεται με το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα :

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ii}\ x_{ii}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = s_i \qquad (i = 1, \dots\dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j \qquad (j = 1, \ldots\ldots, m)$$

περιορισμοί μη αρνητικότητας

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (\, i = 1, \ldots., n\,), (j = 1, \ldots\ldots, m\,)$$

Η πρώτη ομάδα των περιορισμών αναφέρεται στο ότι το άθροισμα των μονάδων του προϊόντος που αναχωρούν από το κέντρο προέλευσης i προς τα διάφορα κέντρα προορισμού θα ισούται με την προσφορά του. Η δεύτερη ομάδα των περιορισμών αναφέρεται στο ότι το άθροισμα των μονάδων προϊόντος που μεταφέρονται στο κέντρο προορισμού j από τα διάφορα κέντρα προέλευσης θα ισούται με τη ζήτησή του . Σχετικά με το ανωτέρω γραμμικό πρόγραμμα οι περιορισμοί δηλώνουν ότι $\sum_{i=1}^{n} d_j = \sum_{j=1}^{m} s_i$ που σημαίνει ότι όλη η παραγόμενη ποσότητα διατίθεται στους προορισμούς και απορροφάται. Τα προβλήματα που ικανοποιούν τη συνθήκη αυτή ονομάζονται ισορροπημένα προβλήματα ( balanced transportation problems).

Το παραπάνω μοντέλο του προβλήματος μεταφοράς με n προελεύσεις και m προορισμούς έχει n + m περιορισμούς. Επειδή όμως το πρόβλημα μεταφοράς είτε είναι ή το μετατρέπουμε σε ισορροπημένο, το μοντέλο έχει n + m - 1 (περιορισμούς) ανεξάρτητες περιοριστικές εξισώσεις. Επομένως μια αρχική βασική εφικτή λύση αποτελείται από n + m - 1 βασικές μεταβλητές, με τιμές διαφορετικές του μηδενός. Οι υπόλοιπες nm - (n + m - 1) μεταβλητές θα είναι μη βασικές με μηδενικές τιμές. Στην περίπτωση που μία ή περισσότερες από τις βασικές μεταβλητές έχουν μηδενικές τιμές η λύση θεωρείται εκφυλισμένη.

Για την κατανόηση του προβλήματος παρουσιάζεται το ακόλουθο παράδειγμα ενός τυπικού προβλήματος μεταφοράς.

**Παράδειγμα**

Μια επιχείρηση παράγει τα προϊόντα της σε τρία εργοστάσια που βρίσκονται στις πόλεις $E_1$, $E_2$, και $E_3$ από τα οποία διανέμει τα προϊόντα της, χρησιμοποιώντας τα δικά της οχήματα σε τέσσερα κέντρα διανομής που βρίσκονται στις πόλεις $K_1$, $K_2$, $K_3$ και $K_4$. Τα προϊόντα της μεταφέρονται συσκευασμένα σε κιβώτια τα οποία έχουν τυποποιημένες διαστάσεις. Το κόστος μεταφοράς ανά κιβώτιο εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των κόμβων μεταφοράς. Η εβδομαδιαία παραγωγική δυναμικότητα των εργοστασίων είναι 200, 260 και 340 αντίστοιχα και η εβδομαδιαία ζήτηση των κέντρων διανομής είναι 300, 240, 160 και 100 αντίστοιχα, σε μονάδες κιβωτίων προϊόντος. Στον πίνακα 1.2 δίνεται το κόστος μεταφοράς ενός κιβωτίου προϊόντος, σε χρηματικές μονάδες από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής καθώς και οι ποσότητες της προσφοράς και ζήτησης.

**Πίνακας 1.2**

**Πίνακα Μεταφοράς Παραδείγματος**

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Προσφορά (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | K1 | K2 | K3 | K4 | |
| E 1 | **4** | **6** | **8** | **12** | **200** |
| E 2 | **2** | **5** | **7** | **4** | **260** |
| E 3 | **6** | **9** | **13** | **8** | **340** |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | **300** | **240** | **160** | **100** | **800** |

Ζητείται να προσδιοριστεί ο βέλτιστος αριθμός κιβωτίων του προϊόντος που πρέπει να μεταφερθεί από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος μεταφοράς, το οποίο εκφράζεται σε ευρώ ανά κιβώτιο προϊόντων, ενώ συγχρόνως να πληρούνται οι περιορισμοί της παραγωγικής δυναμικότητας και της ζήτησης.

***Επίλυση***

Ζητείται να προσδιορισθούν οι τιμές των μεταβλητών $X_{IJ}$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος μεταφοράς. Οι μεταβλητές $x_{IJ}$ συμβολίζουν τις ποσότητες του προϊόντος που θα μεταφερθούν από το i εργοστάσιο στο j κέντρο διανομής

(π.χ. $x_{11}$ είναι η ποσότητα του προϊόντος που μεταφέρεται από το 1° εργοστάσιο $E_1$ στο 1° κέντρο διανομής $K_1$,

.

.

.

$x_{34}$ η ποσότητα του προϊόντος που μεταφέρεται από το $3^o$ εργοστάσιο $E_3$ στο $4^o$ κέντρο διανομής $K_4$).

Μία βασική εφικτή λύση θα περιλαμβάνει n + m – 1 = 3 + 4 – 1 = 6 βασικές μεταβλητές $x_{ij}$ και τις υπόλοιπες 12 – 6 = 6 μη βασικές.

Ο πίνακας 1.2 είναι ο πίνακας μεταφοράς του παραδείγματος όπου φαίνεται το μοναδιαίο κόστος ( σε χρηματικές μονάδες ) από κάθε εργοστάσιο σε κάθε κέντρο διανομής, οι παραγωγικές δυναμικότητες των εργοστασίων ( σε μονάδες προϊόντος ) και η ζήτηση των κέντρων διανομής ( σε μονάδες προϊόντος ).

Το μοναδιαίο κόστος από κάθε εργοστάσιο σε κάθε κέντρο διανομής είναι $c_{IJ}$.

Π.χ. το κόστος ανά μονάδα προϊόντος από το 1° εργοστάσιο στο 1° κέντρο διανομής είναι $c_{11}$ = 4 χρηματικές μονάδες,

.

.

το κόστος ανά μονάδα προϊόντος από το 3° εργοστάσιο στο 4° κέντρο διανομής είναι $c_{34}$ = 8 χρηματικές μονάδες.

Οι ποσότητες $s_i$ του προϊόντος που διαθέτουν (προσφέρουν) τα εργοστάσια είναι $s_1 = 200$, $s_2 = 260$, $s_3 = 340$.

Οι ποσότητες $d_j$ του προϊόντος που ζητούν τα κέντρα διανομής είναι $d_1 = 300$, $d_2 = 240$, $d_3 = 160$, $d_4 = 100$.

Από τον πίνακα 1.2 προκύπτει ότι όλη η διαθέσιμη προσφερόμενη ποσότητα (δηλαδή τα 800 κιβώτια) αποστέλλεται ακριβώς στα τέσσερα κέντρα διανομής τα οποία απορροφούν όλες τις ποσότητες.

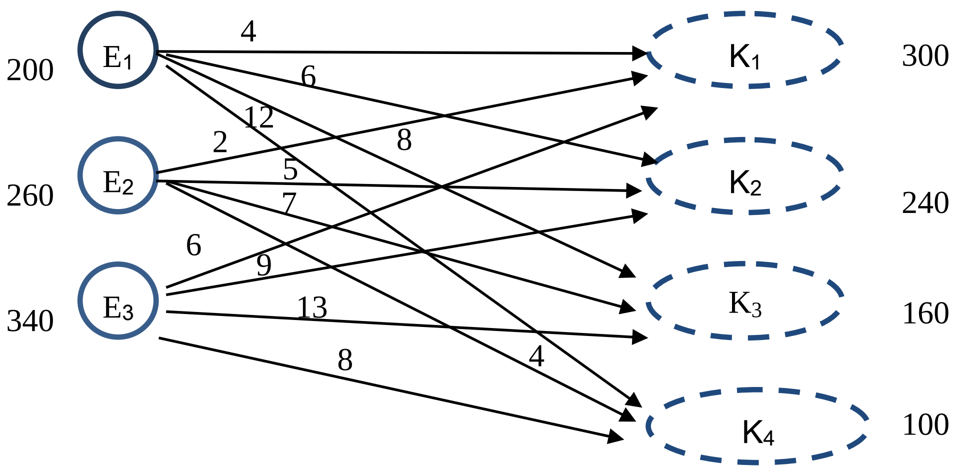
Από την υπόθεση ότι όλη η διαθέσιμη ποσότητα αποστέλλεται ακριβώς στα τέσσερα κέντρα διανομής τα οποία απορροφούν όλες τις ποσότητες των κιβωτίων (τα αθροίσματα των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης και της τελευταίας γραμμής είναι ίσα) προκύπτει ότι το πρόβλημα είναι ισορροπημένο.

$$200 + 260 + 340 = 300 + 240 + 160 + 100 = 800.$$

Ακόμη, το πρόβλημα μεταφοράς μπορεί να απεικονισθεί σε διάγραμμα δικτύου, όπου τα εργοστάσια και τα κέντρα διανομής θεωρούνται κόμβοι (nodes), ενώ οι διαδρομές μεταξύ τους ακμές ή κλάδοι (arcs). Στο σχήμα 1.2 φαίνονται οι κόμβοι προέλευσης (π.χ. εργοστάσια) και οι κόμβοι προορισμού (π.χ. κέντρα διανομής), η παραγωγική δυναμικότητα των εργοστασίων $s_i$ και η ζήτηση των κέντρων διανομής dj και οι ποσότητες του προϊόντος $x_{ij}$ που θα παραχθούν στο i εργοστάσιο και θα μεταφερθούν στο j κέντρο διανομής, (i = 1, 2, 3 και j = 1, 2, 3, 4).

Παρακάτω, θα επιλυθεί το παράδειγμα , βρίσκοντας μια αρχική βασική εφικτή λύση (και με τις 3 μεθόδους) και τη βέλτιστη λύση με τη μέθοδο MODI.

Για το ανωτέρω παράδειγμα το αντίστοιχο γράφημα είναι :




Σχήμα 1.2: Το δίκτυο του Προβλήματος Μεταφοράς.

Για τη διατύπωση του γραμμικού προγράμματος θεωρούμε τη μεταβλητή $x_{ij}$ να δηλώνει τη ποσότητα που θα πρέπει να μεταφερθεί από το εργοστάσιο ί στο κέντρο διανομής j, με i=l,2,3 και j=l,2,3,4. Οι άγνωστες μεταβλητές $x_{ij}$ είναι 12 το πλήθος. Οι ποσότητες $d_j$ της ζήτησης των κέντρων διανομής είναι $d_1$= 300, $d_2$ = 240, $d_3$=160, $d_4$ =100 ενώ οι ποσότητες $s_i$ που διαθέτουν οι αποθήκες είναι αντιστοίχως $s_1$=200, $s_2$ =260, $s_3$ =340.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, το γραμμικό πρόγραμμα μεταφοράς για το πρόβλημα του παραδείγματος διαμορφώνεται σε :

$$\min z = 4x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 12x_{14} + 2x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 6x_{31} + 9x_{32} + 13x_{33} + 8x_{34}$$

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 260\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 340\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 300\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 240\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} = 160\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100\\
&x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0
\end{aligned}$$

Οι τιμές των $x_{ij}$ προσδιορίζουν τη βέλτιστη λύση, δηλαδή τις ποσότητες οι οποίες πρέπει να διακινηθούν από τα εργοστάσια στις πόλεις με το ελάχιστο κόστος μεταφοράς.

## 1.3 Ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων μεταφοράς

### 1.3.1 Μη ισορροπημένα προβλήματα

Σε πολλά πραγματικά προβλήματα παραγωγής και διανομής προϊόντων συμβαίνει η συνολική προσφορά των προς διακίνηση προϊόντων που διαθέτουν οι μονάδες παραγωγής (πηγές) να μην ταυτίζεται με τη ζήτηση των καταστημάτων, αποθηκών κλπ (προορισμοί). Στις περιπτώσεις αυτές το πρόβλημα μεταφοράς ονομάζεται

**μη ισορροπημένο πρόβλημα** (unbalanced problem). Τα προβλήματα του είδους αυτού, με συγκεκριμένη τεχνική μετατρέπονται σε ισορροπημένα και επιλύονται πλέον όπως τα τυπικά προβλήματα μεταφοράς.

Συγκεκριμένα, είναι δυνατόν μια αποθήκη ή ένα εργοστάσιο, λόγω αυξημένων αποθεμάτων να διαθέτει προς διακίνηση περισσότερη ποσότητα από εκείνη που ζητούν τα καταστήματα. Η συνθήκη αυτή σε μαθηματική μορφή εκφράζεται ως

$\sum_{i=1}^{n} s_i > \sum_{j=1}^{m} d_j$ , Η πλεονάζουσα ποσότητα προϊόντων που παραμένει στις πηγές

και δεν διακινείται είναι η $\sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{j=1}^{m} d_j$ Στις περιπτώσεις αυτές , για τη μετατροπή του προβλήματος σε ισορροπημένο εισάγεται ένας **εικονικός προορισμός** (dummy destination) ο οποίος απορροφά την πλεονάζουσα ποσότητα των πηγών. Επειδή στην πραγματικότητα δεν διακινούνται ποσότητες προς τον εικονικό προορισμό, το αντίστοιχο κόστος μεταφοράς ορίζεται σε μηδέν.

Σε άλλη περίπτωση είναι δυνατόν η συνολική ποσότητα που διαθέτουν οι πηγές, λόγω αυξημένης ζήτησης, να είναι μικρότερη από εκείνη που ζητούν να απορροφήσουν συνολικά οι προορισμοί. Η αυτή συνθήκη εκφράζεται με τη σχέση

$\sum_{i=1}^{n} s_i < \sum_{j=1}^{m} d_j$ .Στη περίπτωση αυτή υπάρχει η ελλείπουσα ποσότητα η οποία υπολογίζεται από τη σχέση $\sum_{j=1}^{m} d_j - \sum_{i=1}^{n} s_i$ . Στις περιπτώσεις αυτές , προκειμένου το πρόβλημα να μετατραπεί σε ισορροπημένο, η ελλείπουσα ποσότητα αντιστοιχίζεται σε μια εικονική πηγή η οποία υποτίθεται πως διακινεί τη ποσότητα αυτή. Η εικονική πηγή εισάγεται στο πρόβλημα και αντιμετωπίζεται όπως και οι πραγματικές πηγές. Επειδή και στη περίπτωση αυτή δεν υπάρχει πραγματική μεταφορά προϊόντων, η τιμή του κόστους μεταφοράς από την εικονική πηγή είναι μηδέν.

Οι ανωτέρω συνθήκες για τα μη ισορροπημένα προβλήματα μεταφοράς ενσωματώνονται στο αρχικό γραμμικό πρόγραμμα , το οποίο λαμβάνει τη ακόλουθη γενική μορφή.

Η έκφραση του γενικού μη ισορροπημένου προβλήματος μεταφοράς ως γραμμικό πρόγραμμα.

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq s_i \qquad (i = 1, \ldots\ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j \qquad j = 1, \ldots\ldots, m)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), (j = i, \ldots, m)$$

Στη πρώτη περίπτωση της πλεονάζουσας ποσότητας εισάγεται ένας εικονικός προορισμός m+1 ο οποίος έχει τη δυνατότητα απορρόφησης της συνολικής ποσότητας $d_{m+1}$. Έστω $x_{im+1}$ η ποσότητα που μεταφέρεται από την κάθε πηγή i στον εικονικό αυτό προορισμό. Το αντίστοιχο κόστος μεταφοράς ορίζεται σε μηδέν, δηλαδή $c_{im+1}=0$ . Με τη ρύθμιση αυτή το πρόβλημα μεταφοράς λαμβάνει τη μορφή :

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} 0x_{im+1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} + x_{im+1} = s_i \text{ , } i=1,2,..,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + x_{im+1} = d_j \text{ , } j=1,2,..,m$$

$x_{ij} \geq 0$ , i= 1,2,..,n j= 1,2,…., m

Ομοίως στη περίπτωση της ελλείπουσας ποσότητας ορίζεται μια εικονική πηγή n+1 η οποία διαθέτει τη συνολική ποσότητα $s_{n+1}$ . Εάν $x_{m+1j}$ είναι οι αντίστοιχες ποσότητες από την εικονική πηγή για κάθε προορισμό , το γραμμικό πρόγραμμα λαμβάνει τη ακόλουθη μορφή :

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} 0x_{m+1j}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} + x_{m+1j} = s_i \ , \ i=1,2,..,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + x_{m+1j} = d_j \ , \ j=1,2,..,m$$

$x_{ij} \geq 0$ , i= 1,2,..,n   j= 1,2,…., m

Για την κατανόηση των μετασχηματισμών των μη ισορροπημένων προβλημάτων σε ισορροπημένα , στο πρόβλημα της μεταφοράς του παραδείγματος μας υποθέτουμε ότι η ζήτηση του 4^ου^ κέντρου διανομής $K_4$ είναι 50 μονάδες προϊόντος αντί 100. Στη περίπτωση αυτή η συνολική ζήτηση διαμορφώνεται στις 750 μονάδες ενώ η αντίστοιχη συνολική προσφορά των εργοστασίων είναι 800. Η πλεονάζουσα ποσότητα των 50 μονάδων αποδίδεται σε ένα εικονικό προορισμό για το οποίο το κόστος μεταφοράς είναι μηδέν. Για το πρόβλημα αυτό , ο αντίστοιχος πίνακας δεδομένων λαμβάνει την μορφή :

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3**

**Πίνακα Μεταφοράς Παραδείγματος**

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | | Προσφορά (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | K1 | K2 | K3 | K4 | K5 | |
| E 1 | **4** | **6** | **8** | **12** | **0** | **200** |
| E 2 | **2** | **5** | **7** | **4** | **0** | **260** |
| E 3 | **6** | **9** | **13** | **8** | **0** | **340** |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | **300** | **200** | **160** | **50** | **50** | **800** |

Ομοίως εάν η ζήτηση ήταν μεγαλύτερη , όπως π.χ. όταν τα κέντρα διανομής $K_3$ ζητούσαν 200 μονάδες και το $K_4$ 170 μονάδες , η συνολική ελλείπουσα ποσότητα των ( 200 – 160 ) + ( 170 – 100 ) = 110 μονάδων μπορεί να αποδοθεί σε ένα εικονικό εργοστάσιο που διαθέτει τη συνολική ποσότητα αυτή ώστε το πρόβλημα να μετατραπεί σε ισορροπημένο. Για τη περίπτωση αυτή ο αντίστοιχος πίνακας δεδομένων λαμβάνει τη μορφή :

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.4**

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Προσφορά (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | K1 | K2 | K3 | K4 | |
| E 1 | **4** | **6** | **8** | **12** | **200** |
| E 2 | **2** | **5** | **7** | **4** | **260** |
| E 3 | **6** | **9** | **13** | **8** | **340** |
| E4 | **0** | **0** | **0** | **0** | **110** |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | **300** | **240** | **200** | **170** | **910** |

## 1.3.2 Μη επιτρεπτές διαδρομές

Μια άλλη ειδική περίπτωση προβλημάτων μεταφοράς αφορά εκείνα τα προβλήματα στα οποία μια ή περισσότερες διαδρομές μεταξύ πηγών και προορισμών είναι πρακτικά αδύνατες. Αυτό μπορεί να συμβαίνει λόγω αδυναμίας των μέσων μεταφοράς να εκτελέσουν δρομολόγια εξ’ αιτίας κυκλοφοριακών ή άλλων συνθηκών αλλά και λόγω ιδιαιτεροτήτων στην εφοδιαστική αλυσίδα.

Στις περιπτώσεις αυτές των μη επιτρεπτών διαδρομών , δεν υπάρχει ποσότητα που μεταφέρεται συνεπώς η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής $x_{ij}$ θα πρέπει να είναι μηδέν. Για να επιτευχθεί αυτό τεχνικά ορίζεται ως κόστος μεταφοράς $c_{ij}$ της αντίστοιχης μη επιτρεπτή διαδρομή ένας πολύ μεγάλος αριθμός Μ π.χ $c_{ij}=M=10^9$ . Επειδή στο τυπικό πρόβλημα της μεταφοράς επιδιώκεται ελαχιστοποίηση κόστους, ο παράγοντας $M\ x_{ij}$ που συμμετέχει στην συνάρτηση κόστους αυξάνει δραματικά τη τιμή της συνάρτησης , πρακτικά μηδενίζεται με την μεταβλητή $x_{ij}$ να λαμβάνει τιμή ίση με μηδέν , $x_{ij} = 0$ .

### 1.3.3 Προβλήματα μεταφοράς με μεγιστοποίηση κέρδους

Στα συνήθη προβλήματα μεταφοράς όπως διατυπώθηκαν ανωτέρω, το ζητούμενο ήταν να βρεθεί το βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος μεταφοράς. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που αντί της ελαχιστοποίησης του κόστους ζητείται η μεγιστοποίηση κέρδους που τυχόν προκύπτει από τη μεταφορά . Αυτή είναι η περίπτωση των εταιρειών ταχυμεταφοράς όπου αναλόγως των προορισμών υπάρχουν διαφορετικές χρεώσεις και συνεπώς διαφορετικά περιθώρια κέρδους.

Στις περιπτώσεις αυτές , αλλάζει η διατύπωση του γραμμικού προγράμματος και συγκεκριμένα η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται προς μεγιστοποίηση. Όταν το αντίστοιχο πρόβλημα είναι μη ισορροπημένο, το κέρδος πλέον της μεταφοράς είτε από τις εικονικές πηγές είτε στους εικονικούς προορισμούς είναι μηδέν αφού δεν πραγματοποιείται μεταφορά.

Στα προβλήματα μεταφοράς που ζητείται η μεγιστοποίηση του κέρδους ενώ ταυτοχρόνως υπάρχουν μη επιτρεπτές διαδρομές , σε αυτές αντί του μεγάλου αριθμού Μ ορίζεται ένα πολύ μικρό κέρδος Κ , της τάξης μεγέθους π.χ $K= 10^{-9}$ .

## 1.4 Επίλυση προβλημάτων μεταφοράς

Σχετικά με τα προβλήματα μεταφοράς παρατηρούμε ότι ο αριθμός των άγνωστων μεταβλητών $x_{ij}$ είναι της τάξης του αριθμού $m*n$ , δηλαδή σχετικά μεγάλος. Αντιθέτως το σύνολο των περιορισμών στα ισορροπημένα προβλήματα είναι $m+ n$ αφού για κάθε πηγή και προορισμό ορίζεται ένας περιορισμός.

Ένα πρόβλημα μεταφοράς μπορεί να επιλυθεί όπως και κάθε άλλο γραμμικό πρόγραμμα , είτε χειροκίνητα με τη μέθοδο SIMPLEX , είτε με μέσω υπολογιστή με το λογισμικό Excel – SOLVER και LINGO . Για μικρά προβλήματα , όταν δηλαδή οι διαστάσεις του βασικού πίνακα κόστους m , n είναι σχετικά μικροί αριθμοί , το αντίστοιχο πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί ακόμη και με απλούς υπολογισμούς , με τη χρήση των πινάκων της μεθόδου simplex. Παλαιότερα , ειδικά για τα προβλήματα μεταφοράς, είχαν επινοηθεί ειδικές υπολογιστικές μέθοδοι. Οι πλέον χαρακτηριστικές από αυτές παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

Στη συνέχεια , με τη βοήθεια του παραδείγματος επεξηγείται η επίλυση ενός τυπικού ισορροπημένου προβλήματος μεταφοράς με την χρήση του λογισμικού Excel – SOLVER .

Με βάση τα δεδομένα του παραδείγματος παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα :

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.5**

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Προσφορά (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | K1 | K2 | K3 | K4 | |
| E 1 | **4** | **6** | **8** | **12** | **200** |
| E 2 | **2** | **5** | **7** | **4** | **260** |
| E 3 | **6** | **9** | **13** | **8** | **340** |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | **300** | **240** | **160** | **100** | **800** |

Για την διατύπωση του γραμμικού προγράμματος θεωρούμε ότι $x_{11}$, $x_{12}$ , $x_{13}$ , $x_{14}$, $x_{21}$ , $x_{22}$ , $x_{23}$ , $x_{24}$, $x_{31}$ , $x_{32}$ , $x_{33}$ , $x_{34}$ είναι οι μεταβλητές που εκφράζουν τις ζητούμενες ποσότητες μεταφοράς. Ο πρώτος δείκτης δηλώνει το εργοστάσιο και ο δεύτερος το κέντρο διανομής . Σύμφωνα με το κόστος μεταφοράς το οποίο απεικονίζεται στον πίνακα, το συνολικό κόστος μεταφοράς είναι $z = 4x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 12x_{14} + 2x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 6x_{31} + 9x_{32} + 13x_{33} + 8x_{34}$ . Το κόστος αυτό είναι προς ελαχιστοποίηση.

Οι περιορισμοί που αντιστοιχούν στη προσφορά κάθε εργοστασίου είναι αντιστοίχως $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200$ , $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 260$, $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 340$. Η ισότητα δηλώνει την προϋπόθεση ότι κατά τη μεταφορά θα εξαντληθεί όλη η διαθέσιμη ποσότητα των εργοστασίων. Το ελάχιστο απόθεμα των κέντρων διανομής προσδιορίζει τους αντίστοιχους περιορισμούς $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 300$, $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 240$, $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 160$, $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100$.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, το γραμμικό πρόγραμμα που αντιστοιχεί στο πρόβλημα μεταφοράς του παραδείγματος είναι :

$$\min z = 4x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 12x_{14} + 2x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 6x_{31} + 9x_{32} + 13x_{33} + 8x_{34}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 260$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 340$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 300$$

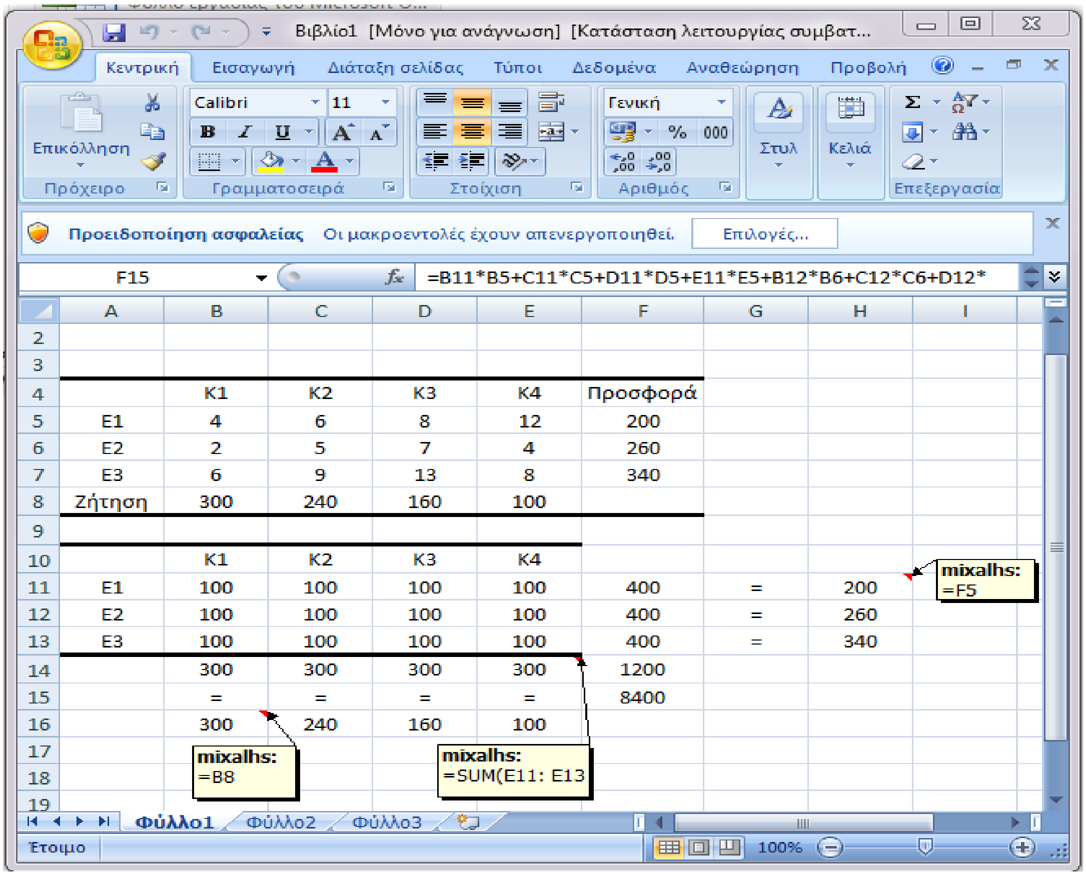
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 240$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 160$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

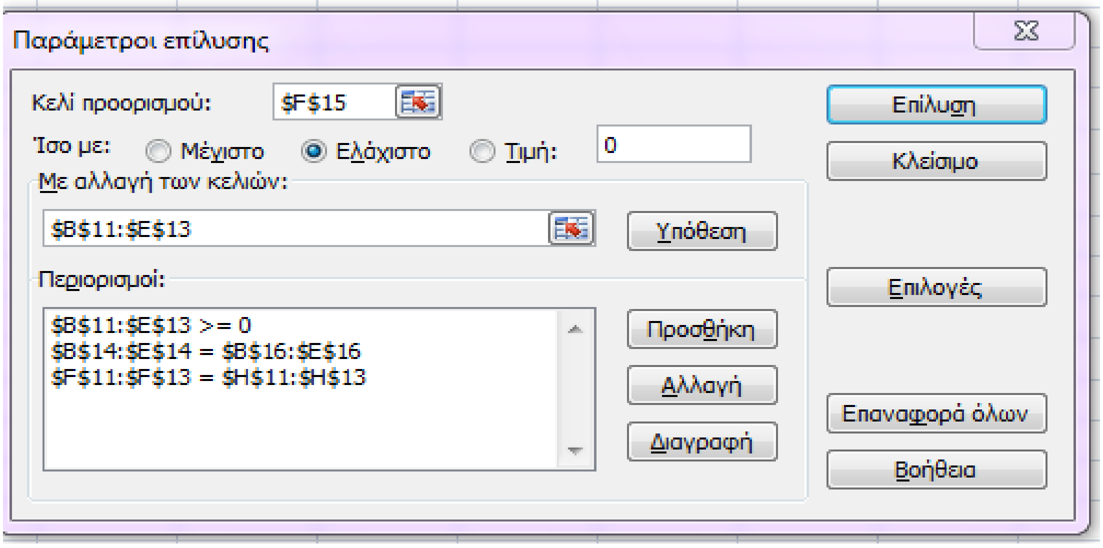
Ο ανωτέρω πίνακας κόστους και περιορισμών μεταφέρεται στο Excel στις γραμμές 4-8 και στις στήλες A-F, όπως φαίνεται από την ακόλουθη αποτύπωση .




***Εικόνα 1.1*** *Η διαμόρφωση του προβλήματος μεταφοράς στο Excel*

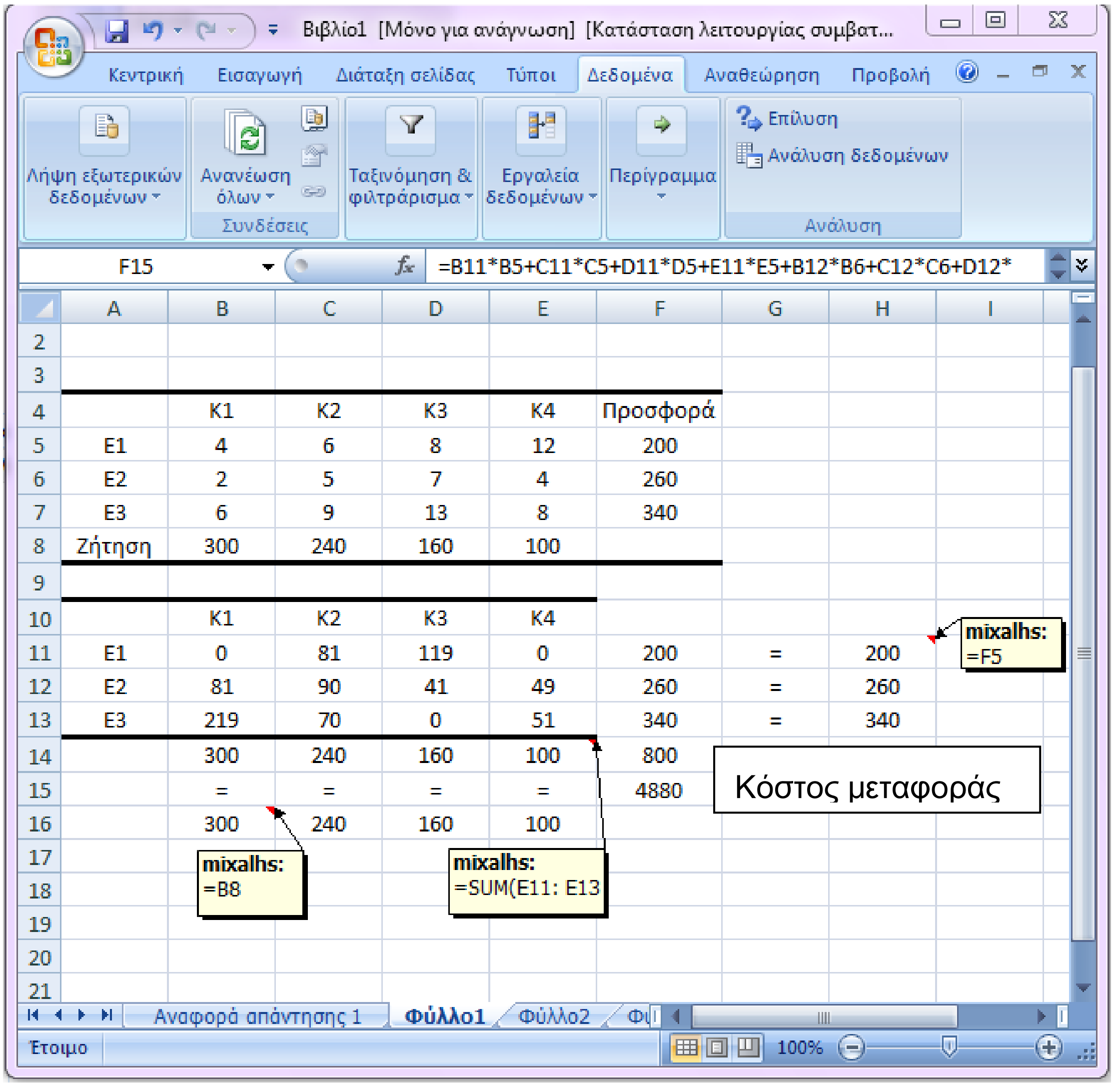
Στις γραμμές 10-16 ορίζεται ένας ταυτόσημος πίνακας ο οποίος περιέχει τις μεταβλητές $x_{11}$, $x_{12}$ , $x_{13}$ , $x_{14}$, $x_{21}$ , $x_{22}$ , $x_{23}$ , $x_{24}$, $x_{31}$ , $x_{32}$ , $x_{33}$ , $x_{34}$ καθώς επίσης και τους τύπους των υπολογισμών του συνολικού κόστους (κελί F15) και περιορισμών διάθεσης (κελιά F11-F13) και απορρόφησης (κελιά B14-D14). Για την έναρξη της διαδικασίας επίλυσης ορίζονται αυθαίρετα για τις μεταβλητές αρχικές τιμές ίσες με 100.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, στη συνέχεια καθορίζονται οι παράμετροι του λογισμικού Solver που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος ως ακολούθως:




***Εικόνα 1.2*** *Οι παράμετροι του solver για την επίλυση.*

Η επίλυση του γραμμικού προγράμματος δίνει τα αποτελέσματα : $x_{11}$=0, $x_{12}$=81 , $x_{13}$=119 , $x_{14}$ =0, $x_{21}$ =81 , $x_{22}$ =90 , $x_{23}$ =41 , $x_{24}$ =49, $x_{31}$ =219 , $x_{32}$ =70 , $x_{33}$ =0 , $x_{34}$ =50 ενώ το συνολικό κόστος μεταφοράς υπολογίζεται σε 4880 . Η αντίστοιχη οθόνη των αποτελεσμάτων έχει ως εξής:




| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | K1 | K2 | K3 | K4 | Προσφορά | | |
| 5 | E1 | 4 | 6 | 8 | 12 | 200 | | |
| 6 | E2 | 2 | 5 | 7 | 4 | 260 | | |
| 7 | E3 | 6 | 9 | 13 | 8 | 340 | | |
| 8 | Ζήτηση | 300 | 240 | 160 | 100 | | | |
| 10 | | K1 | K2 | K3 | K4 | | | |
| 11 | E1 | 0 | 81 | 119 | 0 | 200 | = | 200 |
| 12 | E2 | 81 | 90 | 41 | 49 | 260 | = | 260 |
| 13 | E3 | 219 | 70 | 0 | 51 | 340 | = | 340 |
| 14 | | 300 | 240 | 160 | 100 | 800 | | |
| 15 | | = | = | = | = | 4880 | | |
| 16 | | 300 | 240 | 160 | 100 | | | |

***Εικόνα 1.3** Τα αποτελέσματα της επίλυσης.*

### 1.4.1 Επίλυση του Προβλήματος Μεταφοράς με ειδικές υπολογιστικές τεχνικές

Για την επίλυση των γραμμικών προγραμμάτων που αντιστοιχούν σε προβλήματα μεταφοράς έχουν επινοηθεί στο παρελθόν ειδικές τεχνικές και αλγόριθμοι οι οποίοι επιτρέπουν τον εντοπισμό εφικτών και βέλτιστων λύσεων. Οι υπολογιστικές αυτές τεχνικές βασίζονται σε απλούς υπολογισμούς που μπορεί να γίνουν ακόμη και χωρίς τη χρήση ειδικού λογισμικού. Οι πλέον γνωστές μέθοδοι είναι η **μέθοδος της βορειοδυτικής γωνίας** και η **μέθοδος Vogel**.

Η διαδικασία επίλυσης που ακολουθούν οι μέθοδοι αυτοί είναι μια επαναληπτική διαδικασία που ξεκινά από μια αρχική βασική εφικτή λύση η οποία με τη βοήθεια ενός κριτήριου ελέγχεται εάν αποτελεί και βέλτιστη λύση. Εάν δεν αποτελεί βέλτιστη λύση, εντοπίζεται μια επόμενη καλύτερη λύση κοκ έως ότου η διαδικασία να καταλήξει στη βέλτιστη λύση. Γενικά το πρόβλημα μεταφοράς επιλύεται σε δύο βήματα ως εξής:

***Βήμα 1***

Πρώτα, βρίσκουμε μια **αρχική βασική εφικτή λύση**. Οι μέθοδοι εύρεσης της αρχικής βασικής εφικτής λύσης είναι:

1. Μέθοδος της Βορειο -Δυτικής γωνίας
2. Μέθοδος του ελαχίστου κόστους
3. Προσεγγιστική Μέθοδος Vogel

Από τις παραπάνω μεθόδους η μέθοδος Vogel θεωρείται η καλύτερη, διότι απαιτούνται λιγότερες επαναληπτικές διαδικασίες για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Αντίθετα, η μέθοδος της Β-Δ γωνίας είναι η χειρότερη αρχική λύση διότι δεν στηρίζεται στα μοναδιαία κόστη.

***Βήμα 2:***

Βάσει της αρχικής βασικής εφικτής λύσης, που βρήκαμε στο βήμα 1, προχωρούμε για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Οι μέθοδοι εύρεσης της βέλτιστης λύσης είναι:

1. Stepping Stone
2. Modified Multipliers (MODI), η οποία είναι συνδυασμός των μεθόδων MODI και Stepping Stone.

Οι μέθοδοι αυτές επεξηγούνται με τη βοήθεια του κατωτέρω παραδείγματος :

***Παράδειγμα***

Μια επιχείρηση παράγει τα προϊόντα της σε τρία εργοστάσια που βρίσκονται στις πόλεις $E_1$, $E_2$, και $E_3$ από τα οποία διανέμει τα προϊόντα της, χρησιμοποιώντας τα δικά της οχήματα σε τέσσερα κέντρα διανομής που βρίσκονται στις πόλεις $K_1$, $K_2$, $K_3$ και $K_4$. Τα προϊόντα της μεταφέρονται συσκευασμένα σε κιβώτια τα οποία έχουν τυποποιημένες διαστάσεις. Το κόστος μεταφοράς ανά κιβώτιο εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των κόμβων μεταφοράς. Η εβδομαδιαία παραγωγική δυναμικότητα των εργοστασίων είναι 200, 160 και 340 αντίστοιχα και η εβδομαδιαία ζήτηση των κέντρων διανομής είναι 300, 240, 160 και 100 αντίστοιχα, σε μονάδες κιβωτίων προϊόντος. Στον πίνακα 1.6 δίνεται το κόστος μεταφοράς ενός κιβωτίου προϊόντος, σε χρηματικές μονάδες από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής καθώς και οι ποσότητες της προσφοράς και ζήτησης.

**Πίνακας 1.6**

**Πίνακα Μεταφοράς Παραδείγματος**

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Προσφορά (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | K1 | K2 | K3 | K4 | |
| E 1 | 4 | 6 | 8 | 12 | 200 |
| E 2 | 2 | 5 | 7 | 4 | 260 |
| E 3 | 6 | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 300 | 240 | 160 | 100 | 800 |

Ζητείται να προσδιοριστεί ο βέλτιστος αριθμός κιβωτίων του προϊόντος που πρέπει να μεταφερθεί από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος μεταφοράς, το οποίο εκφράζεται σε ευρώ ανά κιβώτιο προϊόντων, ενώ συγχρόνως να πληρούνται οι περιορισμοί της παραγωγικής δυναμικότητας και της ζήτησης.

Το αντίστοιχο γραμμικό πρόγραμμα του προβλήματος μεταφοράς είναι :

$$\min z = 4x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 12x_{14} + 2x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 6x_{31} + 9x_{32} + 13x_{33} + 8x_{34}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 260$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 340$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 300$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 240$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 160$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ , i= 1, 2, 3 j= 1, 2, 3, 4}$$

### 1.4.1.1 Εύρεση Αρχικής Βασικής Εφικτής Λύσης με τη μέθοδο της Βορειο -Δυτικής Γωνίας

Η μέθοδος αυτή είναι σε θέση να προσδιορίσει μόνο μία εφικτή λύση του προβλήματος μεταφοράς, χωρίς όμως να εντοπίσει τη βέλτιστη. Με τη μέθοδο αυτή αρχίζουμε με την μεταβλητή που βρίσκεται στο κελί της Βόρειο-Δυτικής (Β-Δ) γωνίας (επάνω αριστερά) του πίνακα μεταφοράς, δηλαδή την $x_{11}$ . Τα βήματα του αλγορίθμου της βορειοδυτικής γωνίας είναι :

**Βήμα $1^0$**

Από τον βασικό πίνακα των δεδομένων του προβλήματος και ξεκινώντας από το πάνω αριστερά κελί ( άνω βορειοδυτική γωνία ) του πίνακα δεδομένων του προβλήματος, επιλέγουμε τη πρώτη διαδρομή και σε αυτήν εκχωρούμε τη μέγιστη δυνατή ποσότητα ανάλογα με τη ζήτηση της αντίστοιχης σειράς. Προσαρμόζουμε τη προσφορά και τη ζήτηση σε κάθε γραμμή και στήλη αντιστοίχως.

Έστω ότι το κελί (i, j) βρίσκεται στη Β-Δ γωνία του πίνακα μεταφοράς. Η τιμή που θα λάβει η μεταβλητή $x_{ij}$ είναι :

$x_{ij}$ = min ( αντίστοιχης προσφοράς της i γραμμής , αντίστοιχης ζήτησης της j στήλης).

Αναπροσαρμόζεται η προσφορά της i γραμμής και η ζήτηση της j στήλης αφαιρώντας την εκχωρημένη ποσότητα στη $x_{ij}$ από την προσφορά της i γραμμής και τη ζήτηση της j στήλης.

**Βήμα $2^0$ :**

Διαγράφουμε είτε τη γραμμή της οποίας η προσφορά έχει εξαντληθεί είτε τη στήλη η ζήτηση της οποίας έχει ικανοποιηθεί.

Εάν μια γραμμή ή μια στήλη εξαντλούνται ταυτοχρόνως, μόνο η μία διαγράφεται, ενώ στην άλλη τοποθετούμε μηδέν προσφορά ή ζήτηση.

**Βήμα $3^0$ :**

Ελέγχουμε εάν έχει ικανοποιηθεί όλη η προσφορά και όλη η ζήτηση. Εάν όχι, η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου μείνει μόνο ένα κελί μιας γραμμής ή στήλης χωρίς να διαγραφεί, οπότε η υπόλοιπη ποσότητα προσφορά ή ζήτησης εκχωρείται στην αντίστοιχη μεταβλητή. Εκεί σταματάμε.

Διαφορετικά , πηγαίνουμε στο κελί προς τα δεξιά, εάν μόλις μια στήλη έχει διαγραφεί ή στο κελί μιας γραμμής παρακάτω, εάν μια γραμμή έχει διαγραφεί. Οπότε επαναλαμβάνονται τα βήματα 1 και 2 μέχρι να ικανοποιηθεί όλη η προσφορά και όλη η ζήτηση.

Η εφαρμογή της μεθόδου στο πρόβλημα του παραδείγματος έχει ως ακολούθως :

**• Εύρεση Αρχικής Βασικής Εφικτής Λύσης με τη Μέθοδο της Βόρειο - Δυτικής Γωνίας Παραδείγματος**

**Παράδειγμα**

Η αρχική βασική εφικτή λύση με τη μέθοδο της Β-Δ γωνίας βρίσκεται ως εξής:

Με τη μέθοδο αυτή αρχίζουμε με τη μεταβλητή που βρίσκεται στο κελί της Βόρειο-Δυτικής (Β-Δ) γωνίας (επάνω αριστερά) του πίνακα μεταφοράς, δηλαδή την $x_{11}$. Τοποθετούμε στη μεταβλητή της Β-Δ γωνίας όση ποσότητα επιτρέπουν η προσφορά και η ζήτηση που αντιστοιχούν στο κελί ($E_{1,}$ $K_1$), δηλαδή το κελί που αντιστοιχεί στη $1^η$ γραμμή και στη $1^η$ στήλη. Αναλυτικά, τοποθετούμε στη μεταβλητή:

$$X_{11}= \min (200,300) = 200 \text{ μονάδες προϊόντος.}$$

Η πρώτη διαδρομή είναι $E_1K_1$. Το εργοστάσιο $E_1$ μπορεί να διαθέσει ολόκληρη την ποσότητα του, δηλαδή τις 200 μονάδες προϊόντος στο $1^0$ κέντρο διανομής $K_1$. Με αυτόν τον τρόπο, της μεταφοράς των 200 μονάδων προϊόντος από το εργοστάσιο $E_1$ στο κέντρο διανομής $K_1$ εξαντλείται η ποσότητα προσφοράς του $1^0$ εργοστασίου $E_1$, και διαγράφεται η $1^η$ γραμμή.

Το υπόλοιπο της ζήτησης της $1^{ης}$ στήλης (κέντρο διανομής $K_1$) είναι 300 - 200 = 100 μονάδες προϊόντος.

Οι παραπάνω ενέργειες φαίνονται στον πίνακα 1.7 και 1.8.

### *Πίνακας 1.7*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4<br>$X_{11}$= 200 | 6 | 8 | 12 | ~~200~~ 0 |
| $E_2$ | 2 | 5 | 7 | 4 | 260 |
| $E_3$ | 6 | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~300~~ 100 | 240 | 160 | 100 | |

### *Πίνακας 1.8*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_2$ | 2 | 5 | 7 | 4 | 260 |
| $E_3$ | 6 | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 100 | 240 | 160 | 100 | |

Στον πίνακα 1.8 που προκύπτει επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Το επόμενο κελί της Β-Δ γωνίας είναι το ($E_2$, $K_1$). Τοποθετούμε στη μεταβλητή:

$$X_{21} = \min(100, 260) = 100 \text{ μονάδες προϊόντος.}$$

Εξετάζοντας την μονάδα παραγωγής στο εργοστάσιο $E_2$ παρατηρείται ότι θα πρέπει να σταλούν στο κέντρο διανομής $K_1$ άλλες 100 μονάδες προϊόντος προκειμένου να καλυφθεί η ζήτηση. Με την επιλογή αυτή εφόσον καλύπτεται η ζήτηση του 1ου κέντρου διανομής $K_1$ η 1η στήλη διαγράφεται. Επιπλέον θα περισσέψουν 260-100=160 μονάδες προϊόντος από την παραγωγή του εργοστασίου $E_2$, οι οποίες θα σταλούν σε άλλο προορισμό. Με τις παραπάνω ενέργειες ο πίνακας 1.8 παίρνει την μορφή:

***Πίνακας 1.9***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_2$ | 2<br>$X_{21}$= 100 | 5 | 7 | 4 | ~~260~~ 160 |
| $E_3$ | 6 | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~100~~<br>0 | 240 | 160 | 100 | |

***Πίνακας 1.10***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|
| | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_2$ | 5 | 7 | 4 | 160 |
| $E_3$ | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 240 | 160 | 100 | |

Στον πίνακα 1.10 που προκύπτει επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Το επόμενο κελί Β-Δ γωνίας είναι το ($E_2$, $K_2$). Τοποθετούμε στη μεταβλητή:

$X_{22}$ = min (160, 240) = 160 μονάδες προϊόντος.

Οι 160 μονάδες προϊόντων που έχουν μείνει αδιάθετες από την παραγωγή του εργοστασίου $E_2$ αποστέλλονται στο κέντρο διανομής $K_2$. Με αυτόν τον τρόπο καλύπτεται εν μέρει η ζήτηση του $K_2$ ενώ εξαντλούνται οι διαθέσιμες ποσότητες του εργοστασίου $E_2$. Εφόσον η προσφερόμενη ποσότητα του $E_2$ εξαντλήθηκε διαγράφεται η 2η γραμμή ενώ το κέντρο διανομής $K_2$ έχει υπόλοιπο ζήτησης 240-160=80 μονάδες προϊόντος.

Οι παραπάνω ενέργειες φαίνονται στον πίνακα 1.11 και 1.12.

### *Πίνακας 1.11*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|
| | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_2$ | 5<br>$X_{22}$= 160 | 7 | 4 | ~~160~~ 0 |
| $E_3$ | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~240~~<br>80 | 160 | 100 | |

### *Πίνακας 1.12*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|
| | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_3$ | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 80 | 160 | 100 | |

Στον πίνακα που προκύπτει επαναλαμβάνεται η διαδικασία. Το επόμενο κελί Β-Δ γωνίας είναι το ($E_3$, $K_2$). Τοποθετούμε στη μεταβλητή:

$X_{32}$ = min(80, 340) = 80 μονάδες προϊόντος

Από την τελευταία γραμμή του προηγούμενου πίνακα στη στήλη $K_2$ διαπιστώνεται ότι υπάρχει υπόλοιπο 80 μονάδων προϊόντων. Αυτό καλύπτεται από την μονάδα παραγωγής $E_3$. Με αυτόν τον τρόπο ικανοποιείται η ζήτηση του 2ου κέντρου διανομής οπότε διαγράφεται η στήλη του (Κ2). Οπότε προκύπτουν οι εξής πίνακες:

***Πίνακας 1.13***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|
| | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_3$ | 9<br>$X_{32}$= 80 | 13 | 8 | ~~340~~ 260 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~80~~<br>~~0~~ | 160 | 100 | |

***Πίνακας 1.14***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|
| | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_3$ | 13 | 8 | 260 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 160 | 100 | |

Από την παραγωγή του εργοστασίου $E_3$ θα καλυφθούν οι υπόλοιπες απαιτήσεις των κέντρων διανομής. Στη μεταβλητή $x_{31}$=min (260,160) = 160 μονάδες προϊόντος. Απομένει προσφερόμενη ποσότητα 260-160= 100 μονάδες προϊόντος οπότε και η διαδικασία ολοκληρώθηκε. Οι παραπάνω ενέργειες φαίνονται στον πίνακα 1.15.

### *Πίνακας 1.15*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|
| | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_3$ | 13<br>$X_{33}$= 160 | 8<br>$X_{34}$= 100 | ~~260~~ ~~100~~ 0 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~160~~<br>0 | ~~100~~<br>0 | |

Η αρχική βασική εφικτή λύση με τη μέθοδο της Β-Δ γωνίας φαίνεται στον πίνακα 1.16.

### *Πίνακας 1.16*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4<br>$X_{11}$= 200 | 6<br>$X_{12}$= 0 | 8<br>$X_{13}$= 0 | 12<br>$X_{14}$= 0 | 200 |
| $E_2$ | 2<br>$X_{21}$=100 | 5<br>$X_{22}$=160 | 7<br>$X_{23}$= 0 | 4<br>$X_{24}$= 0 | 260 |
| $E_3$ | 6<br>$X_{31}$= 0 | 9<br>$X_{32}$=80 | 13<br>$X_{33}$= 160 | 8<br>$X_{34}$= 100 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 300 | 240 | 160 | 100 | 800 |

Παρατηρούμε ότι η αρχική βασική εφικτή λύση (με τη μέθοδο της Β-Δ γωνίας) αποτελείται από έξι βασικές μεταβλητές:

$x_{11}$ = 200, $x_{21}$ = 100, $x_{22}$ = 160, $x_{32}$ = 80, $x_{33}$ = 160, $x_{34}$ = 100 μονάδες προϊόντος.

Οι υπόλοιπες 6 μη βασικές μεταβλητές θα έχουν μηδενικές τιμές.

Αναλυτικά, θα μεταφερθούν:

από το εργοστάσιο $E_1$ στο κέντρο διανομής $K_1$ 200 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_2$ στο κέντρο διανομής $K_1$ 100 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_2$ στο κέντρο διανομής $K_2$ 160 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_3$ στο κέντρο διανομής $K_2$ 80 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_3$ στο κέντρο διανομής $K_3$ 160 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_3$ στο κέντρο διανομής $K_4$ 100 μονάδες προϊόντος

Το ελάχιστο συνολικό κόστος που προκύπτει βάσει της παραπάνω αρχικής βασικής εφικτής λύσης υπολογίζεται στον ακόλουθο πίνακα:

| ΜΕΤΑΦΟΡΑ | ΠΟΣΟΤΗΤΑ | ΚΟΣΤΟΣ | ΚΟΣΤΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ |
|---|---|---|---|
| $E_1K_1$ | 200 | 4 | 800 |
| $E_2K_1$ | 100 | 2 | 200 |
| $E_2K_2$ | 160 | 5 | 800 |
| $E_3K_2$ | 80 | 9 | 720 |
| $E_3K_3$ | 160 | 13 | 2080 |
| $E_3K_4$ | 100 | 8 | 800 |
| ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ | | | 5400€ |

Σημειώνεται ότι η μέθοδος της βορειοδυτικής γωνίας αν και είναι πολύ απλή στην εφαρμογή της, δεν έχει μεγάλη πρακτική σημασία αφού δεν δίνει την βέλτιστη λύση στο πρόβλημα της μεταφοράς. Αυτό γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι στη διαδικασία της εφαρμογής του αλγορίθμου δεν λαμβάνεται υπόψη το κόστος της διαδρομής που επιλέγεται κάθε φορά. Το μειονέκτημα αυτό όπως θα δούμε παρακάτω το καλύπτει η μέθοδος vogel.

#### 1.4.1.2 Εύρεση Αρχικής Βασικής Εφικτής Λύσης με τη Μέθοδο τον Ελαχίστου Κόστους

Βρίσκουμε το κελί του πίνακα μεταφοράς με το ελάχιστο κόστος και τοποθετούμε στην αντίστοιχη μεταβλητή τη μέγιστη επιτρεπόμενη ποσότητα ανάλογα με την αντίστοιχη προσφορά και ζήτηση. Αναπροσαρμόζουμε την αντίστοιχη προσφορά και ζήτηση (αφαιρώντας τη ποσότητα που έχουμε θέσει στη μεταβλητή) και διαγράφουμε τη στήλη ή τη γραμμή της οποίας η ζήτηση ή προσφορά αντίστοιχα εξαντλείται.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου μείνει μόνο ένα κελί μιας γραμμής ή στήλης χωρίς να διαγραφεί, οπότε η υπόλοιπη ποσότητα προσφοράς ή ζήτησης εκχωρείται στην αντίστοιχη μεταβλητή.

- **Εύρεση Αρχικής Βασικής Εφικτής Λύσης με τη Μέθοδο του Ελαχίστου Κόστους Παραδείγματος**

Αρχίζουμε με το κελί με το ελάχιστο κόστος, δηλαδή το ($E_2$, $K_1$) και εκχωρούμε στη μεταβλητή $x_{21}$ = min(260,300) = 260 μονάδες προϊόντος. Η παραγωγή του εργοστασίου $E_2$ εξαντλείται από το $1^0$ κέντρο διανομής $K_1$ και διαγράφεται η $2^η$ γραμμή ($E_2$). Το υπόλοιπο της ζήτησης του κέντρου διανομής $K_1$ είναι 300 – 260 =40 μονάδες προϊόντος (πίνακας 1.17).

***Πίνακας 1.17***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4 | 6 | 8 | 12 | 200 |
| $E_2$ | 2<br>$X_{21}$=260 | 5 | 7 | 4 | ~~260~~ 0 |
| $E_3$ | 6 | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~300~~<br>40 | 240 | 160 | 100 | 800 |

Στον πίνακα που προκύπτει 1.18 επαναλαμβάνεται η διαδικασία με κελί ελαχίστου κόστους το ($E_1$, $K_1$). Εκχωρούμε στη μεταβλητή:

$$X_{11} = \min(200, 40) = 40 \text{ μονάδες προϊόντος.}$$

Το υπόλοιπο προσφοράς του $1^{ου}$ εργοστασίου $E_1$ είναι 200 - 40 = 160 μονάδες προϊόντος. Με αυτόν τον τρόπο ικανοποιείται η ζήτηση του $1^{ου}$ κέντρου διανομής και διαγράφεται η $1^η$ στήλη του κέντρου διανομής $K_1$ (πίνακας 1.18).

***Πίνακας 1.18***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | Παραγωγική |
|---|---|---|

| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | 4<br>$X_{11}$=40 | 6 | 8 | 12 | ~~200~~ 160 |
| $E_3$ | 6 | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~40~~<br>0 | 240 | 160 | 100 | 800 |

Στον πίνακα που προκύπτει 1.19 επαναλαμβάνεται η διαδικασία με κελί ελαχίστου κόστους το ($E_1$, $K_2$). Εκχωρούμε στη μεταβλητή:

$$X_{12} = \min(160, 240) = 160 \text{ μονάδες προϊόντος.}$$

Το υπόλοιπο ζήτησης του 2ου κέντρου διανομής είναι 240 - 160 = 80 μονάδες προϊόντος. Εξαντλείται η προσφορά του 1ου εργοστασίου και διαγράφεται η 1η γραμμή $E_1$ (πίνακας 1.19).

## *Πίνακας 1.19*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|
| | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 6<br>$X_{12}$= 160 | 8 | 12 | ~~160~~ 0 |
| $E_3$ | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~240~~<br>80 | 160 | 100 | |

Στον πίνακα που προκύπτει 1.20 επαναλαμβάνεται η διαδικασία με κελί ελαχίστου κόστους το ($E_3$, $K_4$). Εκχωρούμε στη μεταβλητή:

$$X_{34} = \min(340, 100) = 100 \text{ μονάδες προϊόντος.}$$

Το υπόλοιπο προσφοράς του 3ου εργοστασίου είναι 340 - 100= 240 μονάδες προϊόντος.

Ικανοποιείται η ζήτηση του 4ου κέντρου διανομής και διαγράφεται η 4η στήλη $K_4$ (πίνακας 1.20) .

### *Πίνακας 1.20*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|
| | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_3$ | 9 | 13 | 8<br>$X_{34}$= 100 | ~~340~~ 240 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 80 | 160 | ~~100~~<br>0 | |

Στον πίνακα που προκύπτει 1.21 επαναλαμβάνεται η διαδικασία με κελί ελαχίστου κόστους το ($E_3$, $K_2$) και εκχωρούμε στη μεταβλητή:

$X_{32}$ =min(240, 80) = 80 μονάδες προϊόντος.

Το υπόλοιπο της προσφοράς του 3ου εργοστασίου $E_3$ είναι 240 - 80 = 160 μονάδες προϊόντος και διαγράφεται η 2η στήλη, διότι ικανοποιείται η ζήτηση του 2ου κέντρου διανομής $K_2$ (πίνακας 1.21).

### *Πίνακας 1.21*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|
| | $K_2$ | $K_3$ | |
| $E_3$ | 9<br>$X_{32}$= 80 | 8 | ~~240~~ 160 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~80~~<br>0 | 160 | |

Στον Πίνακα 1.22 στο κελί που απέμεινε τοποθετούμε στη μεταβλητή:

$X_{33}$ = 160 μονάδες προϊόντος και η διαδικασία σταματά.

Πίνακας 1.22

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|
| | $K_3$ | |
| $E_3$ | 8<br>$X_{33}$=160 | ~~160~~ 0 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~160~~<br>0 | |

Η αρχική βασική εφικτή λύση με τη μέθοδο του ελαχίστου κόστους φαίνεται στον πίνακα 1.23.

### *Πίνακας 1.23*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4<br>$X_{11}$= 40 | 6<br>$X_{12}$= 160 | 8<br>$X_{13}$= 0 | 12<br>$X_{14}$= 0 | 200 |
| $E_2$ | 2<br>$X_{21}$=260 | 5<br>$X_{22}$=0 | 7<br>$X_{23}$= 0 | 4<br>$X_{24}$= 0 | 260 |
| $E_3$ | 6<br>$X_{31}$= 0 | 9<br>$X_{32}$=80 | 13<br>$X_{33}$= 160 | 8<br>$X_{34}$= 100 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 300 | 240 | 160 | 100 | 800 |

Παρατηρούμε ότι η αρχική βασική εφικτή λύση με τη μέθοδο ελαχίστου κόστους αποτελείται από τις έξι βασικές μεταβλητές :

$X_{11}$ = 40 , $X_{12}$ = 160 , $X_{21}$= 260 , $X_{32}$ = 80 , $X_{33}$= 160 , $X_{34}$= 100 μονάδες προϊόντος.

Οι υπόλοιπες 6 μη βασικές μεταβλητές θα έχουν μηδενικές τιμές.

Αναλυτικά θα μεταφερθούν:

από το εργοστάσιο $E_1$ στο κέντρο διανομής $K_1$ 40 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_1$ στο κέντρο διανομής $K_2$ 160 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_2$ στο κέντρο διανομής $K_1$ 260 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_3$ στο κέντρο διανομής $K_2$ 80 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_3$ στο κέντρο διανομής $K_3$ 160 μονάδες προϊόντος
από το εργοστάσιο $E_3$ στο κέντρο διανομής $K_4$ 100 μονάδες προϊόντος

Το ελάχιστο συνολικό κόστος που προκύπτει βάσει της παραπάνω αρχικής βασικής εφικτής λύσης υπολογίζεται στον ακόλουθο πίνακα :

| ΜΕΤΑΦΟΡΑ | ΠΟΣΟΤΗΤΑ | ΚΟΣΤΟΣ | ΚΟΣΤΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ |
|---|---|---|---|
| $E_1K_1$ | 40 | 4 | 160 |
| $E_1K_2$ | 160 | 6 | 960 |
| $E_2K_1$ | 260 | 2 | 520 |
| $E_3K_2$ | 80 | 9 | 720 |
| $E_3K_3$ | 160 | 13 | 2080 |
| $E_3K_4$ | 100 | 8 | 800 |
| ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ | | | 5240€ |

Παρατηρούμε ότι σε σύγκριση με την προηγούμενη μέθοδο της βορειοδυτικής γωνίας με την μέθοδο του ελαχίστου κόστους έχουμε ένα όφελος 5400-5240=160€ στο κόστος μεταφοράς των προϊόντων.

### 1.4.1.3 Εύρεση Αρχικής Βασικής Εφικτής Λύσης με τη Μέθοδο Vogel

Η μέθοδος vogel , σε σύγκριση με τις δύο προηγούμενες μεθόδους (βορειοδυτική γωνία και του ελαχίστου κόστους) πλεονεκτεί καθώς χρησιμοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση του κόστους προκειμένου να εντοπίσει τη βέλτιστη λύση και όχι απλώς μία εφικτή λύση. Η μέθοδος αυτή ακολουθεί τον κανόνα « για κάθε πηγή και προορισμό υπολογίζεται η αύξηση του κόστους που θα προέκυπτε αν αντί της πιο οικονομικής διαδρομής είχε επιλεγεί η αμέσως πιο οικονομική από αυτή».

Τα βήματα της προσεγγιστικής μεθόδου Vogel είναι:

**Βήμα 1**

Σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη του πίνακα μεταφοράς (με θετική προσφορά ή ζήτηση αντίστοιχα), υπολογίζονται οι διαφορές μεταξύ του μικρότερου μοναδιαίου κόστους και του αμέσως επόμενου μικρότερου μοναδιαίου κόστους της ίδιας γραμμής ή στήλης

**Βήμα 2**

Επιλέγετε η γραμμή ή στήλη με τη μεγαλύτερη διαφορά. Στην επιλεγμένη γραμμή ή στήλη τοποθετείται η μέγιστη επιτρεπόμενη ποσότητα (ανάλογα με την αντίστοιχη προσφορά και ζήτηση) στη μεταβλητή του κελιού με το μικρότερο κόστος. Αναπροσαρμόζεται η αντίστοιχη προσφορά και ζήτηση αφαιρώντας την ποσότητα που τέθηκε στη μεταβλητή, και διαγράφεται η στήλη της οποίας η ζήτηση ικανοποιείται ή η γραμμή της οποίας η προσφορά εξαντλείται.

Εάν μια γραμμή ή στήλη εξαντλούνται ταυτοχρόνως μόνο μια διαγράφεται και στην άλλη τοποθετούμε «μηδέν» προσφορά ή ζήτηση. Οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη με «μηδέν» στην προσφορά ή ζήτηση δεν χρησιμοποιείται στον υπολογισμό των μελλοντικών διαφορών. Χρησιμοποιούνται στο τέλος τα «μηδέν» ως λύσεις στις βασικές μεταβλητές (εκφυλισμένη λύση) ώστε να έχουμε:

$$m + n - 1 \text{ βασικές μεταβλητές}$$

**Βήμα 3**

Εάν μόνο μια γραμμή ή στήλη με θετική προσφορά ή ζήτηση αντίστοιχα δεν έχει διαγραφεί, προσδιορίζονται οι βασικές μεταβλητές στη γραμμή ή στήλη με τη μέθοδο του ελαχίστου κόστους.

Εάν όλες οι μη διαγραμμένες γραμμές και στήλες έχουν «μηδέν» στην προσφορά ή ζήτηση, προσδιορίζονται οι βασικές μεταβλητές ίσες με μηδέν στα κελιά με τη μέθοδο του ελάχιστου κόστους

Διαφορετικά επαναλαμβάνεται το βήμα 1.

## •Εύρεση Αρχικής Βασικής Εφικτής Λύσης με τη Μέθοδο Vogel Παραδείγματος

***Παράδειγμα***

Τα δεδομένα του παραδείγματος απεικονίζονται στον εξής πίνακα :

***Πίνακας 1.24***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4 | 6 | 8 | 12 | 200 |
| $E_2$ | 2 | 5 | 7 | 4 | 260 |
| $E_3$ | 6 | 9 | 13 | 8 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 300 | 240 | 160 | 100 | |

Η εφαρμογή της μεθόδου στο πρόβλημα του παραδείγματος έχει ως ακολούθως :

Στον πίνακα 1.24 βρίσκουμε τη διαφορά του μικρότερου κόστους από το αμέσως επόμενο μικρότερο κόστος για κάθε γραμμή και στήλη. Συγκρίνουμε τις διαφορές των γραμμών και των στηλών και παρατηρούμε ότι στη στήλη 4 παρουσιάζεται η μεγαλύτερη διαφορά 4. Άρα, επιλέγουμε στη $4^{η}$ στήλη το κελί με το ελάχιστο κόστος δηλαδή το κελί (2,4) που έχει κόστος 4. Τοποθετούμε τη μέγιστη επιτρεπόμενη ποσότητα στη μεταβλητή:

$$X_{24} = \min(260,100) = 100 \text{ μονάδες προϊόντος.}$$

Η ζήτηση του $4^{ου}$ κέντρου διανομής ($4^{ης}$ στήλης) ικανοποιείται, η $4^{η}$ στήλη διαγράφεται και μένει υπόλοιπο προσφοράς 260 - 100 = 160 μονάδες προϊόντος του $2^{ου}$ εργοστασίου. Η ενέργεια αυτή απεικονίζεται στον ακόλουθο πίνακα:

***Πίνακας 1.25***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | Παραγωγική | ΔΙΑΦΟΡΕΣ |
|---|---|---|---|

| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | 4 | 6 | 8 | 12 | 200 | 6-4=2 |
| $E_2$ | 2 | 5 | 7 | 4<br>$X_{24}$=100 | ~~260~~ 160 | 4-2=2 |
| $E_3$ | 6 | 9 | 13 | 8 | 340 | 8-6=2 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 300 | 240 | 160 | ~~100~~<br>0 | | |
| ΔΙΑΦΟΡΕΣ | 4-2=2 | 6-5=1 | 8-7=1 | 8-4=4 | | |

Στον πίνακα που προκύπτει 1.26, η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Υπολογίζουμε εκ νέου τις διαφορές. Συγκρίνουμε τις διαφορές των γραμμών και των στηλών και παρατηρούμε ότι στις γραμμές 2 και 3 παρουσιάζεται η μεγαλύτερη διαφορά 3. Άρα, επιλέγουμε τη 3η γραμμή και το κελί με το ελάχιστο κόστος δηλαδή το κελί (3,1) που έχει κόστος 6. Τοποθετούμε τη μέγιστη επιτρεπόμενη ποσότητα στη μεταβλητή: $x_{31}$ = min(300,340) = 300 μονάδες προϊόντος.

Η ζήτηση του 1ου κέντρου διανομής δηλαδή η 1η στήλη ικανοποιείται γι’ αυτό διαγράφεται και μένει υπόλοιπο προσφοράς 340-300=40 μονάδες προϊόντος του 3ου εργοστασίου $E_3$ (πίνακας).

***Πίνακας 1.26***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) | ΔΙΑΦΟΡΕΣ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | | |
| $E_1$ | 4 | 6 | 8 | 200 | 6-4=2 |
| $E_2$ | 2 | 5 | 7 | 160 | 5-2=3 |
| $E_3$ | 6<br>$X_{13}$=300 | 9 | 13 | ~~340~~ 40 | 9-6=3 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~300~~<br>0 | 240 | 160 | | |
| ΔΙΑΦΟΡΕΣ | 4-2=2 | 6-5=1 | 8-7=1 | | |

Στον πίνακα που προκύπτει 1.27 η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Υπολογίζουμε εκ νέου τις διαφορές και επιλέγουμε ξανά τη 3η γραμμή, διότι παρουσιάζει τη μεγαλύτερη διαφορά 3 και τοποθετούμε στη μεταβλητή:

$$X_{32} = \min(40,240) = 40 \text{ μονάδες προϊόντος}$$

Διαγράφεται η 3η γραμμή διότι η προσφορά του 3ου εργοστασίου εξαντλείται και το υπόλοιπο της ζήτησης του 2ου κέντρου διανομής $K_2$ είναι 240-40= 200 μονάδες προϊόντος.

Από τα ανωτέρω προκύπτει ο παρακάτω πίνακας :

### *Πίνακας 1.27*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) | ΔΙΑΦΟΡΕΣ |
|---|---|---|---|---|
| | $K_2$ | $K_3$ | | |
| $E_1$ | $\boxed{6}$ | $\boxed{8}$ | 200 | 8-6=2 |
| $E_2$ | $\boxed{5}$ | $\boxed{7}$ | 160 | 5-7=2 |
| $E_3$ | $\boxed{9}$ $X_{14}$=40 | $\boxed{13}$ | ~~40~~ 0 | 13-9=5 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~240~~ 200 | 160 | | |
| ΔΙΑΦΟΡΕΣ | 6-5=1 | 8-7=1 | | |

Στον πίνακα που προκύπτει 1.28 η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Υπολογίζουμε τις νέες διαφορές για της γραμμές και στήλες που έχουν απομείνει. Επιλέγουμε τη 2η γραμμή $E_2$ και τοποθετούμε στη μεταβλητή :

$$X_{22} = \min(160,200) = 160 \text{ μονάδες προϊόντος.}$$

Διαγράφεται η 2η γραμμή, διότι η προσφορά του 2ου εργοστασίου εξαντλήθηκε, ενώ μένει υπόλοιπο ζήτησης 200 - 160 = 40 μονάδες του 2ου κέντρου διανομής (πίνακας) .

## *Πίνακας 1.28*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) | ΔΙΑΦΟΡΕΣ |
|---|---|---|---|---|
| | $K_2$ | $K_3$ | | |
| $E_1$ | 6 | 8 | 200 | 8-6=2 |
| $E_2$ | 5<br>$X_{14}$=160 | 7 | ~~160~~ 0 | 5-7=2 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~200~~<br>40 | 160 | | |
| ΔΙΑΦΟΡΕΣ | 6-5=1 | 8-7=1 | | |

Στον πίνακα που προκύπτει 1.29 μόνο μια γραμμή με θετική προσφορά ή ζήτηση δεν έχει διαγραφεί, έτσι προσδιορίζουμε τις βασικές μεταβλητές στη 1$^η$ γραμμή με τη μέθοδο του ελαχίστου κόστους Αναλυτικά, εκχωρούμε στη μεταβλητή:

$X_{12}$ = min(200,40) = 40 μονάδες προϊόντος.

Διαγράφεται η 2$^η$ στήλη, διότι ικανοποιήθηκε η ζήτηση του 2$^{ου}$ κέντρου διανομής $K_2$ και το υπόλοιπο προσφοράς του 1$^{ου}$ εργοστασίου είναι 200-40 = 160 μονάδες προϊόντος. Στη συνέχεια τοποθετούμε στη μεταβλητή:

$X_{13}$ = 160 μονάδες προϊόντος (πίνακας 1.29).

Με τις δύο αυτές τοποθετήσεις το πρόβλημα της μεταφοράς λύθηκε καθώς ικανοποιήθηκε και η ζήτηση των δυο τελευταίων κέντρων διανομής (πίνακας).

## *Πίνακας 1.29*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|
| | $K_2$ | $K_3$ | |
| $E_1$ | 6<br>$X_{12}$=40 | 8<br>$X_{13}$=160 | ~~200 160~~ 0 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | ~~40~~<br>0 | ~~160~~<br>0 | |

Η αρχική βασική εφικτή λύση με τη μέθοδο Vogel φαίνεται στον πίνακα 1.30.

## *Πίνακας 1.30*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4 <br> $X_{11}= 0$ | 6 <br> $X_{12}= 40$ | 8 <br> $X_{13}= 160$ | 12 <br> $X_{14}= 0$ | 200 |
| $E_2$ | 2 <br> $X_{21}=0$ | 5 <br> $X_{22}=160$ | 7 <br> $X_{23}= 0$ | 4 <br> $X_{24}= 100$ | 260 |
| $E_3$ | 6 <br> $X_{31}=300$ | 9 <br> $X_{32}=40$ | 13 <br> $X_{33}= 0$ | 8 <br> $X_{34}= 0$ | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 300 | 240 | 160 | 100 | 800 |

Παρατηρούμε ότι η αρχική βασική εφικτή λύση (με τη μέθοδο Vogel) είναι: $x_{12} = 40$, $x_{13} = 160$, $x_{22} = 160$, $x_{24} = 100$, $x_{31} = 300$, $x_{32} = 40$ μονάδες προϊόντος.

Οι υπόλοιπες έξι μη βασικές μεταβλητές θα έχουν μηδενικές τιμές.

Αναλυτικά, θα μεταφερθούν:

από το εργοστάσιο $E_1$ στο κέντρο διανομής $K_2$ 40 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_1$ στο κέντρο διανομής $K_3$ 160 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_2$ στο κέντρο διανομής $K_2$ 160 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_2$ στο κέντρο διανομής $K_4$ 100 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_3$ στο κέντρο διανομής $K_1$ 300 μονάδες προϊόντος

από το εργοστάσιο $E_3$ στο κέντρο διανομής $K_2$ 40 μονάδες προϊόντος

Το ελάχιστο συνολικό κόστος που προκύπτει βάσει της παραπάνω αρχικής βασικής εφικτής λύσης δίνεται από τον πίνακα :

| ΜΕΤΑΦΟΡΑ | ΠΟΣΟΤΗΤΑ | ΚΟΣΤΟΣ | ΚΟΣΤΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ |
|---|---|---|---|
| $E_1K_2$ | 40 | 6 | 240 |
| $E_1K_3$ | 160 | 8 | 1280 |
| $E_2K_2$ | 160 | 5 | 800 |
| $E_2K_4$ | 100 | 4 | 400 |
| $E_3K_1$ | 300 | 6 | 1800 |
| $E_3K_2$ | 40 | 9 | 360 |
| ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ | | | 4880€ |

Παρατηρούμε ότι με την μέθοδο του vogel έχουμε ένα όφελος στο κόστος μεταφοράς 520 € ή 360 € σε σύγκριση με το κόστος που προκύπτει από την μέθοδο της βορειοδυτικής γωνίας ( 5400-4880=520) και την μέθοδο του ελαχίστου κόστους (5240-4880=360) αντίστοιχα.

### 1.4.1.4 Εύρεση Βέλτιστης Λύσης με τη Μέθοδο Modified Multipliers (MODI)

Θα αναπτύξουμε τη μέθοδο MODI η οποία αποτελείται από τα εξής βήματα: **Βήμα 1**

Με κάθε κελί (i, j), που περιλαμβάνει βασική μεταβλητή της αρχικής εφικτής λύσης συνδέουμε τους πολλαπλασιαστές $u_i$ και vj με τη γραμμή i και τη στήλη j αντίστοιχα, έτσι ώστε το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς για κάθε βασική μεταβλητή να είναι:

$c_{ij}= u_i + v_j$

Βρίσκουμε τις τιμές των πολλαπλασιαστών $u_i$ και $v_j$ από το σύστημα που προκύπτει θέτοντας $u_1 = 0$ (εφόσον έχουμε m + n μεταβλητές και m + n - 1 εξισώσεις).

**Βήμα 2**

Για κάθε μη βασική μεταβλητή $X_{IJ}$ υπολογίζουμε την ποσότητα:

$$c_{ij}-u_i-v_j$$

η οποία καλείται δείκτης βελτίωσης.

**Συνθήκη βελτιστοποίησης**

Εάν για κάθε μη βασική μεταβλητή $x_{ij}$, οι δείκτες βελτίωσης $c_{ij}$ - $u_i$ – $v_j$ είναι μη αρνητικοί τότε η βασική εφικτή λύση είναι βέλτιστη.

**Συνθήκη εφικτότητας**

Εάν για κάθε μη βασική μεταβλητή $x_{ij}$ οι δείκτες βελτίωσης $c_{ij}$ - $u_i$ - $v_j$ είναι αρνητικοί τότε επιλέγουμε ως εισερχόμενη μεταβλητή τη μη βασική μεταβλητή με την πιο μικρή αρνητική τιμή $c_{ij}$ - $u_i$ - $v_j$.

Για την επιλογή της εξερχόμενης μεταβλητής κατασκευάζουμε ένα βρόγχο. Ο βρόγχος αποτελείται από ένα κλειστό κύκλο διαδοχικών οριζοντίων και καθέτων ευθυγράμμων τμημάτων των οποίων τα ακραία σημεία είναι κελιά βασικών μεταβλητών εκτός από το τελευταίο που συνδέεται με το κελί της εισερχόμενης μεταβλητής. Στη συνέχεια, αυξάνουμε και μειώνουμε τις τιμές των βασικών μεταβλητών του βρόγχου, ώστε να διατηρείται η αντίστοιχη προσφορά και ζήτηση. Εξερχόμενη μεταβλητή θα είναι εκείνη με τη μικρότερη τιμή από αυτές που μειώνονται.

### *Εύρεση Βέλτιστης Λύσης με τη Μέθοδο MODI Παραδείγματος*

Παράδειγμα

Για την εύρεση της βέλτιστης λύσης με τη μέθοδο MODI, θα χρησιμοποιήσουμε ως αρχική βασική εφικτή λύση αυτή που βρήκαμε με τη μέθοδο του ελαχίστου κόστους του παραδείγματος (πίνακας 1.31).

***Πίνακας 1.31***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4<br>$X_{11}$= 40 | 6<br>$X_{12}$= 160 | 8<br>$X_{13}$= 0 | 12<br>$X_{14}$= 0 | 200 |
| $E_2$ | 2<br>$X_{21}$=260 | 5<br>$X_{22}$=0 | 7<br>$X_{23}$= 0 | 4<br>$X_{24}$= 0 | 260 |
| $E_3$ | 6<br>$X_{31}$= 0 | 9<br>$X_{32}$=80 | 13<br>$X_{33}$= 160 | 8<br>$X_{34}$= 100 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 300 | 240 | 160 | 100 | 800 |

Συνδέουμε το κελί κάθε βασικής μεταβλητής, με τους πολλαπλασιαστές $u_i$ και $v_j$ και βρίσκουμε τις τιμές τους από το σύστημα $c_{ij} = u_i + v_j$. Αναλυτικά,

Για τη βασική μεταβλητή $x_{11}$, $c_{11}= u_1 + v_1$ ή $4= u_1 + v_1$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{12}$, $c_{12}= u_1 + v_2$ ή $6= u_1 + v_2$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{21}$, $c_{21}= u_2 + v_1$ ή $2= u_2 + v_1$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{32}$, $c_{32}= u_3 + v_2$ ή $9= u_3 + v_2$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{33}$, $c_{33}= u_3 + v_3$ ή $13= u_3 + v_3$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{34}$, $c_{34}= u_3 + v_4$ ή $8= u_3 + v_4$.

Θέτουμε $u_1 = 0$ και λύνουμε το παραπάνω σύστημα ως προς $u_i$ και $v_j$. Οι τιμές των πολλαπλασιαστών είναι:

$$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = 3, v_1 = 4, v_2 = 6, v_3 = 10, v_4 = 5$$

Για κάθε μη βασική μεταβλητή υπολογίζουμε τους δείκτες βελτίωσης $c_{ij}$-$u_i$ - $v_j$.

Αναλυτικά:

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{13}$ $c_{11}$- $u_1$- $v_1$= 8-0-10 = -2.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{14}$ $c_{14}$- $u_1$- $v_4$= 12-0-5 = 7.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{22}$ $c_{22}$- $u_2$- $v_2$= 5-(-2)-6 = 1.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{23}$ $c_{23}$- $u_2$- $v_3$= 7-(-2)-10 =-1.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{24}$ $c_{24}$- $u_2$- $v_4$= 4-(-2)-5 = 1.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{32}$ $c_{31}$- $u_3$- $v_1$= 6-3- 4 =-1.

Εφόσον υπάρχει αρνητικός δείκτης βελτίωσης, η παραπάνω αρχική βασική εφικτή λύση δεν είναι η βέλτιστη.

Εισερχόμενη μεταβλητή είναι η μη βασική μεταβλητή με το μικρότερο αρνητικό δείκτη βελτίωσης, δηλαδή η μεταβλητή $x_{13}$.

Σχηματίζουμε ένα κλειστό βρόγχο με άκρα το κελί (1, 3) της εισερχόμενης μεταβλητής και τα κελιά (1,2), (3,2), (3,3) των βασικών μεταβλητών (πίνακας 1.32).

*Πίνακας 1.32*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ - | $K_3$ + | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4 $X_{11}$= 40 | 6 $X_{12}$= 160 | 8 $X_{13}$= 0 | 12 $X_{14}$= 0 | 200 |
| $E_2$ | 2 $X_{21}$=260 | 5 $X_{22}$=0 | 7 $X_{23}$= 0 | 4 $X_{24}$= 0 | 260 |
| $E_3$ | 6 $X_{31}$= 0 | 9 $X_{32}$=80 | 13 $X_{33}$= 160 | 8 $X_{34}$= 100 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 300 | + 240 | 160 - | 100 | 800 |

Εάν αυξηθεί η τιμή της εισερχόμενης μεταβλητής $x_{13}$ σε θετικό επίπεδο (συμβολίζουμε με +) τότε για να διατηρηθεί η αντίστοιχη προσφορά και ζήτηση θα πρέπει να μειωθούν οι τιμές των μεταβλητών $x_{12}$ (συμβολίζουμε με -) και $x_{33}$ (συμβολίζουμε με -) και να αυξηθεί η τιμή της μεταβλητής $x_{32}$ (συμβολίζουμε με +).

Εξερχόμενη μεταβλητή είναι εκείνη με τη μικρότερη τιμή από αυτές που μειώνονται. Στο παράδειγμα μας επειδή οι τιμές των μεταβλητών που μειώνονται είναι ίσες επιλέγουμε για εξερχόμενη την μεταβλητή $x_{33}$. Συγκεκριμένα, η εξερχόμενη μεταβλητή $x_{33}$ γίνεται μη βασική με μηδενική τιμή. Αναπροσαρμόζουμε τις τιμές των βασικών μεταβλητών, προσθέτοντας και αφαιρώντας την τιμή της εξερχόμενης μεταβλητής (=160). Επομένως, οι τιμές των μεταβλητών αναπροσαρμόζονται σε:

$x_{13}$ = 160, $x_{12}$ = 0, $x_{32}$ = 240 μονάδες προϊόντος.

Οι υπόλοιπες βασικές μεταβλητές (εκτός του βρόγχου) παραμένουν οι ίδιες $x_{11}$ = 40, $x_{21}$ = 260, $x_{34}$ = 100. Οι παραπάνω ενέργειες φαίνονται στον πίνακα 1.33.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται στον πίνακα που προκύπτει 1.33.

*Πίνακας 1.33*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4<br>$X_{11}$= 40 | 6<br>$X_{12}$= 0 | 8<br>$X_{13}$= 160 | 12<br>$X_{14}$= 0 | 200 |
| $E_2$ | 2<br>$X_{21}$=260 | 5<br>$X_{22}$=0 | 7<br>$X_{23}$= 0 | 4<br>$X_{24}$= 0 | 260 |
| $E_3$ | 6<br>$X_{31}$= 0 | 9<br>$X_{32}$=240 | 13<br>$X_{33}$= 0 | 8<br>$X_{34}$= 100 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 300 | 240 | 160 | 100 | 800 |

Συνδέουμε το κελί κάθε βασικής μεταβλητής, με τους πολλαπλασιαστές $u_i$ και $v_j$ και βρίσκουμε τις τιμές τους από το σύστημα $c_{ij} = u_i + v_j$. Αναλυτικά,

Για τη βασική μεταβλητή $x_{11}$, $c_{11}= u_1 + v_1$ ή $4= u_1 + v_1$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{12}$, $c_{12}= u_1 + v_2$ ή $6= u_1 + v_2$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{13}$, $c_{13}= u_1 + v_3$ ή $8= u_1 + v_3$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{21}$, $c_{21}= u_2 + v_1$ ή $2= u_2 + v_1$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{32}$, $c_{32}= u_3 + v_2$ ή $9= u_3 + v_2$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{34}$, $c_{34}= u_3 + v_4$ ή $8= u_3 + v_4$.

Θέτουμε $u_1 = 0$ και λύνουμε το παραπάνω σύστημα ως προς $u_i$ και $v_j$. Οι τιμές των πολλαπλασιαστών είναι:

$$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = 3, v_1 = 4, v_2 = 6, v_3 = 8, v_4 = 5.$$

Για κάθε μη βασική μεταβλητή υπολογίζουμε τους δείκτες βελτίωσης $c_{ij}-u_i - v_j$.

Αναλυτικά:

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{14}$ $c_{14}- u_1- v_4= 12-0-5 = 7$.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{22}$ $c_{22}- u_2- v_2= 5-(-2)-6 = 1$.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{23}$ $c_{23}- u_2- v_3= 7-(-2)-8 = 1$.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{24}$ $c_{24}- u_2- v_4= 4- (-2) - 5= 1$.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{31}$ $c_{31}- u_3- v_1= 6 - 3 - 4 =-1$.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{33}$ $c_{33}- u_3- v_3= 13-3- 8 = 2$.

Εφόσον υπάρχει αρνητικός δείκτης βελτίωσης, η παραπάνω αρχική βασική εφικτή λύση δεν είναι η βέλτιστη.

Εισερχόμενη μεταβλητή είναι η μη βασική μεταβλητή με το μικρότερο αρνητικό δείκτη βελτίωσης, δηλαδή η μεταβλητή $x_{31}$.

Σχηματίζουμε ένα κλειστό βρόγχο με άκρα το κελί (3, 1) της εισερχόμενης μεταβλητής και τα κελιά (1,1), (3,1), (3,2) των βασικών μεταβλητών (πίνακας 1.34).

***Πίνακας 1.34***

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ - | $K_{2+}$ + | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4 $X_{11}$= 40 | 6 $X_{12}$= 0 | 8 $X_{13}$= 160 | 12 $X_{14}$= 0 | 200 |
| $E_2$ | 2 $X_{21}$=260 | 5 $X_{22}$=0 | 7 $X_{23}$= 0 | 4 $X_{24}$= 0 | 260 |
| $E_3$ | 6 $X_{31}$= 0 | 9 $X_{32}$=240 | 13 $X_{33}$= 0 | 8 $X_{34}$= 100 | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | + 300 | - 240 | 160 | 100 | 800 |

Εάν αυξηθεί η τιμή της εισερχόμενης μεταβλητής $x_{31}$ σε θετικό επίπεδο (συμβολίζουμε με +) τότε για να διατηρηθεί η αντίστοιχη προσφορά και ζήτηση θα πρέπει να μειωθούν οι τιμές των μεταβλητών $x_{11}$ (συμβολίζουμε με -) και $x_{32}$ (συμβολίζουμε με -) και να αυξηθεί η τιμή της μεταβλητής $x_{12}$ (συμβολίζουμε με +).

Εξερχόμενη μεταβλητή είναι εκείνη με τη μικρότερη τιμή από αυτές που μειώνονται, δηλαδή η μεταβλητή $x_{11}$. Συγκεκριμένα, η εξερχόμενη μεταβλητή $x_{11}$ γίνεται μη βασική με μηδενική τιμή. Αναπροσαρμόζουμε τις τιμές των βασικών μεταβλητών, προσθέτοντας και αφαιρώντας την τιμή της εξερχόμενης μεταβλητής (=40). Επομένως, οι τιμές των μεταβλητών αναπροσαρμόζονται σε:

$x_{12}$ = 40, $x_{31}$ = 40, $x_{32}$ = 200 μονάδες προϊόντος.

Οι υπόλοιπες βασικές μεταβλητές (εκτός του βρόγχου) παραμένουν οι ίδιες $x_{21}$ = 260, $x_{13}$ =160, $x_{34}$ = 100. Οι παραπάνω ενέργειες φαίνονται στον πίνακα 1.35.

### *Πίνακας 1.35*

| Εργοστάσια | Κέντρα Διανομής | | | | Παραγωγική Δυναμικότητα (Μονάδες Προϊόντος) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_{2+}$ | $K_3$ | $K_4$ | |
| $E_1$ | 4<br>$X_{11}= 0$ | 6<br>$X_{12}= 40$ | 8<br>$X_{13}= 160$ | 12<br>$X_{14}= 0$ | 200 |
| $E_2$ | 2<br>$X_{21}=260$ | 5<br>$X_{22}=0$ | 7<br>$X_{23}= 0$ | 4<br>$X_{24}= 0$ | 260 |
| $E_3$ | 6<br>$X_{31}=40$ | 9<br>$X_{32}=200$ | 13<br>$X_{33}= 0$ | 8<br>$X_{34}= 100$ | 340 |
| Ζήτηση (Μονάδες Προϊόντος) | 300 | 240 | 160 | 100 | 800 |

Συνδέουμε το κελί κάθε βασικής μεταβλητής, με τους πολλαπλασιαστές $u_i$ και $v_j$ και βρίσκουμε τις τιμές τους από το σύστημα $c_{ij} = u_i + v_j$.

Αναλυτικά,

Για τη βασική μεταβλητή $x_{12}$, $c_{12}= u_1 + v_2$ ή $6= u_1 + v_2$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{13}$, $c_{13}= u_1 + v_3$ ή $8= u_1 + v_3$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{21}$, $c_{21}= u_2 + v_1$ ή $2= u_2 + v_1$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{31}$, $c_{31}= u_3 + v_1$ ή $6= u_3 + v_1$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{32}$, $c_{32}= u_3 + v_2$ ή $9= u_3 + v_2$.

Για τη βασική μεταβλητή $x_{34}$, $c_{34}= u_3 + v_4$ ή $8= u_3 + v_4$.

Θέτουμε $u_1 = 0$ και λύνουμε το παραπάνω σύστημα ως προς $u_i$ και $v_j$. Οι τιμές των πολλαπλασιαστών είναι:

$$u_1 = 0,\ u_2 = -1,\ u_3 = 3,\ v_1 = 3,\ v_2 = 6,\ v_3 = 8,\ v_4 = 5.$$

Για κάθε μη βασική μεταβλητή υπολογίζουμε τους δείκτες βελτίωσης $c_{ij}-u_i - v_j$.

Αναλυτικά:

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{11}$ $c_{11}- u_1- v_1= 4 - 0 - 3 = 1$.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{14}$ $c_{14}- u_1- v_4= 12-0-5 = 7$.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{22}$ $c_{22}- u_2- v_2= 5-(-1)-6 = 0$.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{23}$ $c_{23}- u_2- v_3= 7-(-1)-8 = 0$.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{24}$ $c_{24}- u_2- v_4= 4- (-1) - 5= 0$.

Για τη μη βασική μεταβλητή $x_{33}$ $c_{33}- u_3- v_3= 13-3- 8 = 2$.

Εφόσον για κάθε μη βασική μεταβλητή, οι τιμές των δεικτών βελτίωσης $c_{ij}$-$u_i$ - $v_j$ είναι μη αρνητικές , η βασική εφικτή λύση $x_{12}$ = 40, $x_{13}$ =160, $x_{21}$ = 260, $x_{31}$ = 40, $x_{32}$ = 200, $x_{34}$ = 100 μονάδες προϊόντος είναι η βέλτιστη.

Το ελάχιστο συνολικό κόστος που προκύπτει βάσει της παραπάνω αρχικής βασικής εφικτής λύσης δίνεται από τον πίνακα :

| ΜΕΤΑΦΟΡΑ | ΠΟΣΟΤΗΤΑ | ΚΟΣΤΟΣ | ΚΟΣΤΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ |
|---|---|---|---|
| $E_1K_2$ | 40 | 6 | 240 |
| $E_1K_3$ | 160 | 8 | 1280 |
| $E_2K_1$ | 260 | 2 | 520 |
| $E_3K_1$ | 40 | 6 | 240 |
| $E_3K_2$ | 200 | 9 | 1800 |
| $E_3K_4$ | 100 | 8 | 800 |
| ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ | | | 4880€ |

Παρατηρούμε ότι η αρχική βασική εφικτή λύση που βρήκαμε με τη μέθοδο Vogel και με την μέθοδο Modi έχουν ίσο συνολικό κόστος , 4.880€. Επομένως οι λύσεις των δύο μεθόδων είναι η βέλτιστη.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Πρόβλημα καταμερισμού

## 2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα από τα χαρακτηριστικά προβλήματα της επιχειρησιακής έρευνας, το **πρόβλημα του καταμερισμού** γνωστό και ως πρόβλημα της ανάθεσης (assignment problem).

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί μια ειδική κατηγορία προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού και αφορά στην ανάπτυξη σχεδίου καταμερισμού εκτέλεσης εργασιών σε εντολοδόχους ή γενικότερα τη κατανομή πόρων σε διαφορετικές επιμέρους δραστηριότητες ώστε να βελτιστοποιείται η συνολική απόδοση ενός έργου, ο χρόνος διεκπεραίωσης του κλπ.

Παραδείγματα προβλημάτων καταμερισμού είναι τα ακόλουθα :

- Δεδομένης της απόδοσης διαφορετικών συνεργείων εργατών σε διαφορετικά έργα, ζητείται να οριστεί ποιο συνεργείο θα απασχοληθεί σε ποιο έργο ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος
- Κατά τη διαδικασία παραγωγής ενός προϊόντος και με δεδομένο ότι διαφορετικές μηχανές μπορούν να διεκπεραιώσουν τη παραγωγή ενός τύπου προϊόντος, ζητείται να οριστεί ποια μηχανή θα πρέπει να απασχοληθεί σε ποια φάση παραγωγής ώστε η συνολική παραγόμενη ποσότητα να είναι η μέγιστη δυνατή
- Ζητείται να προσδιοριστεί με ποιο τρόπο πρέπει να κατανεμηθούν οι πωλητές σε γεωγραφικές περιοχές ώστε η εταιρεία να έχει συνολικά τις μεγαλύτερες δυνατές πωλήσεις
- Δεδομένης της διαθεσιμότητας πολλών φορτηγών για τη διανομή προϊόντων σε διαφορετικούς προορισμούς, ζητείται να οριστεί ποια φορτηγά θα αναλάβουν τα δρομολόγια προς τους προορισμούς

Το πρόβλημα του καταμερισμού, όπως θα επεξηγηθεί στη συνέχεια, σχετίζεται με το πρόβλημα της μεταφοράς και είναι δυνατόν να εκφραστεί ως ειδική περίπτωσή του. Το πρόβλημα αυτό όπως και αυτό της μεταφοράς, διατυπώνεται με τη μορφή μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού. Στη συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζονται ειδικές περιπτώσεις του καθώς επίσης και παραδείγματα με τα οποία επεξηγείται η διατύπωση και η επίλυσή του.

## 2.2 Η τυπική μορφή του προβλήματος καταμερισμού

Για τη διατύπωση ενός προβλήματος καταμερισμού θεωρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις:

- Διατίθενται n τον αριθμό εντολοδόχοι (υπάλληλοι, εργάτες, φορτηγά, μηχανές κλπ) οι οποίοι είναι σε θέση ισοδύναμα να αναλάβουν m το πλήθος εργασίες.
- Κάθε εντολοδόχος αναλαμβάνει μια μόνο και μόνο εργασία
- Κάθε εργασία ανατίθεται σε έναν και μόνο εντολοδόχο
- Για κάθε επιμέρους ανάθεση είναι γνωστό εκ των προτέρων το κόστος που αυτή συνεπάγεται, ή το κέρδος που επιφέρει, ο χρόνος διεκπεραίωσης της κλπ.

Για την έκφραση ενός τυπικού προβλήματος καταμερισμού ως προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θεωρούμε :

n τον αριθμό των εντολοδόχων

m τον αριθμό των εργασιών

$x_{ij}$ τη μεταβλητή που καθορίζει εάν ο εντολοδόχος ί θα αναλάβει την εργασία j

$c_{ij}$ το κόστος ή το κέρδος που προκύπτει από την ανάθεση στον εντολοδόχο ί της εργασίας j

Σημειώνεται ιδιαίτερα ότι κύριο χαρακτηριστικό των προβλημάτων καταμερισμού είναι ότι **οι μεταβλητές $x_{ij}$ είναι δίτιμες,** δηλαδή επιδέχονται δύο μόνο τιμές : τιμή ίση με 1 εάν ο εντολοδόχος i θα αναλάβει τελικά την εργασία j και τιμή ίση με 0 εάν δεν την αναλάβει.

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i=1,2,..,n\ ,\ j=1,2,\ldots,m$$

Για το πρόβλημα του καταμερισμού ο αντίστοιχος πίνακας των δεδομένων θα έχει την ακόλουθη μορφή :

| | ΕΡΓΑΣΙΕΣ | | |
|---|---|---|---|
| ΕΝΤΟΛΟΔΟΧΟΙ | ΕΡΓΑΣΙΑ 1 | …. | ΕΡΓΑΣΙΑ m |
| 1 | $C_{11}$ | …. | $C_{1m}$ |
| …. | …. | …. | …. |
| N | $C_{n1}$ | | $C_{nm}$ |

Από τον ορισμό του προβλήματος προκύπτει ότι, επειδή μόνο ένας εντολοδόχος πρόκειται να αναλάβει την εργασία *j*, μόνο μια μεταβλητή από τις $x_{ij}$ , i = 1,.., n θα λάβει τιμή ίση με 1 ενώ όλες οι άλλες θα λάβουν τιμή μηδέν. Η συνθήκη εκφράζεται με τον περιορισμό, $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, j=1,2,…,m. Ομοίως, επειδή η εργασία i πρόκειται να ανατεθεί σε έναν μόνο από τους εντολοδόχους, μόνο μια μεταβλητή από τις $x_{ij}$ , j = 1 ,..,m θα λάβει τιμή ίση με 1 ενώ όλες οι άλλες θα λάβουν τιμή μηδέν . Η αντίστοιχη συνθήκη θα λάβει τη μορφή $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$, i=1,2,…,n . Στη περίπτωση όπου η απόδοση του καταμερισμού εκφράζεται με κόστος, το συνολικό , προς ελαχιστοποίηση κόστος είναι $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = 1$.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, το πρόβλημα του καταμερισμού εκφράζεται ως γραμμικό πρόγραμμα ως εξής :

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots\ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots\ldots, m)$$

$$x_{ij}\ \delta\acute{\iota}\tau\iota\mu\eta\ (binary)\ (i = 1,.,n), (j = i,.,m)$$

Η έκφραση του γενικού προβλήματος καταμερισμού ως γραμμικό πρόγραμμα.

Εάν η μορφή του ανωτέρω γραμμικού προγράμματος συγκριθεί με το αντίστοιχο γραμμικό πρόγραμμα του προβλήματος μεταφοράς, με εξαίρεση τον τελευταίο περιορισμό για τις δίτιμες μεταβλητές, διαπιστώνεται ότι το πρόβλημα καταμερισμού αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς. Πράγματι, εάν στη θέση των πηγών του προβλήματος μεταφοράς τεθούν οι εντολοδόχοι και στη θέση των προορισμών οι προς ανάθεση εργασίες, η προσφορά και η ζήτηση μπορεί να ερμηνευθεί ως η απαίτηση για ανάληψη και εκτέλεση εργασίας. Υπό αυτή την οπτική γωνία, τα δεδομένα προσφοράς και ζήτησης ορίζονται ως $s_i = 1$, dj =1 , i = l,2,..,n , j=1,2,..,m.

Στη γενική μορφή του προβλήματος καταμερισμού θεωρούμε ότι ο αριθμός των εντολοδόχων είναι διαφορετικός από τον αριθμό των προς ανάθεση εργασιών, δηλαδή $m \neq n$. Η περίπτωση ίσου αριθμού εντολοδόχων και εργασιών κατά την οποία οι εργασίες αντιστοιχούν μια προς μια προς τους εντολοδόχους, όταν δηλαδή $m=n$ , το πρόβλημα καταμερισμού ονομάζεται **ισορροπημένο πρόβλημα καταμερισμού** (balanced problem).

Σχετικά με τον περιορισμό δύο τιμών 0, 1 ($x_{ij}=\{0,1\}$) στις μεταβλητές καταμερισμού, παρατηρούμε ότι ο περιορισμός αυτός είναι δυνατόν να αντικατασταθεί από τους περιορισμούς:

$$x_{ij} \geq 0 \text{ , } x_{ij} \leq 1, \ x_{ij} \text{ ακέριος}$$

οι οποίοι μετατρέπουν το πρόβλημα καταμερισμού σε πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού.

Για τη κατανόηση του προβλήματος παρουσιάζεται το ακόλουθο παράδειγμα ενός τυπικού προβλήματος καταμερισμού.

Παράδειγμα

Μια εταιρεία μεταφοράς διαθέτει τρία φορτηγά αυτοκίνητα A1, A2, A3 προκειμένου να καλύψει, τρεις διαφορετικές μεταφορές Ml, M2, M3. Υποθέτουμε ότι το κόστος της απασχόλησης των φορτηγών είναι ανάλογο του χρόνου που απαιτεί κάθε μεταφορά και ότι όλα τα έργα έχουν την ίδια προτεραιότητα. Οι αναμενόμενοι χρόνοι διεκπεραίωσης ανά φορτηγό και μεταφορά δίνονται στον πίνακα:

| ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΑ | ΜΕΤΑΦΟΡΑ M1 | ΜΕΤΑΦΟΡΑ M2 | ΜΕΤΑΦΟΡΑ M3 |
|---|---|---|---|
| A1 | 7 | 7 | 4 |
| A2 | 6 | 5 | 5 |
| A3 | 5 | 8 | 3 |

Ζητείται να βρεθεί το σενάριο καταμερισμού με το ελάχιστο κόστος.

Για την διατύπωσή του ορίζονται οι μεταβλητές $x_{i\,j}$ , $i=1,\ldots,3$ $j=1,\ldots,3$ δηλαδή οι μεταβλητές $x_{11}$, $x_{12}$ , $x_{13}$ , $x_{21}$ , $x_{22}$ , $x_{23}$ , $x_{31}$ , $x_{32}$ , $x_{33}$ οι οποίες επιδέχονται τιμή 1 εάν το αυτοκίνητο i απασχοληθεί στη μεταφορά j και τιμή 0 εάν δεν απασχοληθεί.

Η συνάρτηση κόστους για ολόκληρο το έργο της μεταφοράς, βάσει του ανωτέρω πίνακα δεδομένων είναι:

$$Z= x_{11}+7x_{12}+4x_{13}+6x_{21}+5x_{22}+5x_{23}+5x_{31}+8x_{32}+3x_{33}$$

Οι περιορισμοί $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$, i=1,2,…,n $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, j=1,2,…,m λαμβάνουν τη μορφή :

για τα αυτοκίνητα: $x_{11}+x_{12}+x_{13} = 1$, $x_{21}+x_{22}+x_{23} =1$, $x_{31}+x_{32}+x_{33} =1$

για τις μεταφορές : $x_{11}+x_{21}+x_{31} = 1$, $x_{12}+x_{22}+x_{32} =1$, $x_{13}+x_{23}+x_{33} =1$.

Επιπλέον ζητείται να ισχύει

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} =\{0,1\}$.

$$\text{Min } Z= x_{11}+7x_{12}+4x_{13}+6x_{21}+5x_{22}+5x_{23}+5x_{31}+8x_{32}+3x_{33}$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13} =1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23} =1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33} =1$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31} = 1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32} =1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33} =1$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} =\{0,1\}$$

## 2.3 Ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων

### 2.3.1 Μη ισορροπημένα προβλήματα καταμερισμού

Σε πολλά προβλήματα καταμερισμού συμβαίνει το πλήθος m των ατόμων εργατών, μηχανών κλπ που αναλαμβάνουν εργασίες να είναι διαφορετικό από το πλήθος n των εργασιών που απαιτείται να ολοκληρωθούν, ισχύει δηλαδή $m \neq n$. Στις περιπτώσεις αυτές σε κάποια άτομα, εργάτες μηχανές κλπ δεν θα ανατεθεί εργασία ενώ κάποιες εργασίες, εφόσον είναι περισσότερες, δεν θα πραγματοποιηθούν καθόλου. Όπως και για το πρόβλημα της μεταφοράς, οι περιπτώσεις αυτές αντιστοιχούν σε **μη ισορροπημένα προβλήματα καταμερισμού.** Στα προβλήματα αυτά, ο πίνακας κόστους δεν είναι τετραγωνικός. Για την αντιμετώπισή τους εισάγονται στο πρόβλημα εικονικά άτομα ή εικονικές εργασίες ώστε να συμπληρωθεί τετραγωνικός πίνακας ενώ το κόστος καταμερισμού ορίζεται μηδέν.

Για την περίπτωση του μη ισορροπημένου προβλήματος παρουσιάζεται το ακόλουθο παράδειγμα :

<u>Παράδειγμα</u>

Η εταιρεία ταξί EXPRESS, μια δεδομένη χρονική στιγμή, έχει τέσσερα αυτοκίνητα ελεύθερα και τρεις *πελάτες* έχουν ζητήσει άμεση μεταφορά σε διάφορους προορισμούς. Η εταιρεία διαφημίζεται ως η «γρηγορότερη» συνεπώς η έννοια του κόστους μεταφοράς περιορίζεται μόνο ως προς τον χρόνο μεταφοράς του πελάτη στον προορισμό του. Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει το εκτιμώμενο χρόνο μεταφοράς του κάθε πελάτη από τα τέσσερα ταξί, αναλόγως της θέσης που βρίσκεται αυτό την δεδομένη χρονική στιγμή σε σχέση με τη θέση και τον προορισμό του πελάτη

| | ΤΑΞΙ 1 | ΤΑΞΙ 2 | ΤΑΞΙ 3 | ΤΑΞΙ 4 |
|---|---|---|---|---|
| ΠΕΛΑΤΗΣ 1 | 12΄ | 17΄ | 25΄ | 8΄ |
| ΠΕΛΑΤΗΣ 2 | 23΄ | 45΄ | 35΄ | 12΄ |
| ΠΕΛΑΤΗΣ 3 | 48΄ | 15΄ | 15΄ | 14΄ |

Ζητείται να βρεθεί το σενάριο μεταφοράς των πελατών στον ελάχιστο χρόνο.

Το ανωτέρω πρόβλημα είναι μη ισορροπημένο επειδή ο ανωτέρω πίνακας δεν είναι τετραγωνικός. Αυτό σημαίνει ότι κάποιο ταξί δεν θα μετακινηθεί να εξυπηρετήσει πελάτη. Για τη διατύπωσή του εισάγεται ένας εικονικός πελάτης 4 με μηδενικό κόστος χρόνου. Ο πίνακας κόστους λαμβάνει τη μορφή :

| | ΤΑΞΙ 1 | ΤΑΞΙ 2 | ΤΑΞΙ 3 | ΤΑΞΙ 4 |
|---|---|---|---|---|
| ΠΕΛΑΤΗΣ 1 | 12΄ | 17΄ | 25΄ | 8΄ |
| ΠΕΛΑΤΗΣ 2 | 23΄ | 45΄ | 35΄ | 12΄ |
| ΠΕΛΑΤΗΣ 3 | 48΄ | 15΄ | 15΄ | 14΄ |
| ΠΕΛΑΤΗΣ 4 | 0΄ | 0΄ | 0΄ | 0΄ |

Για το πρόβλημα καταμερισμού που αντιστοιχεί στον ανωτέρω πίνακα ορίζονται οι μεταβλητές $x_{ij}$ με $x_{ij}$= 1 εάν το ταξί i θα μεταφέρει τον πελάτη j και 0 διαφορετικά. Ο δείκτης i (i=1,…,4) προσδιορίζει τα ταξί ενώ ο δείκτης j (j=1,..,3) τους πελάτες.

Το γραμμικό πρόγραμμα για το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως ακολούθως:

Min Z= $12x_{11}+23x_{12}+48x_{13}+0x_{14}+17x_{21}+45x_{22}+15x_{23}+0x_{24}+25x_{31}+35x_{32}+15x_{33}+0x_{34}+8x_{41}+12x_{42}+14x_{43}+0x_{44}$

Περιορισμοί :

ταξί :

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1$$

πελάτες :

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{44}=1$$

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} =\{0,1\}$

### 2.3.2 Αναθέσεις που αποκλείονται

Μια ειδική περίπτωση προβλημάτων καταμερισμού αφορά εκείνα τα προβλήματα στα οποία μια ή περισσότερες αναθέσεις σε εντολοδόχους αποκλείονται ή είναι πρακτικά αδύνατες. Για παράδειγμα μια εταιρεία μεταφοράς που διαθέτει δύο τύπους φορτηγών, μικρά και μεγάλα, με τα μικρά φορτηγά δεν μπορεί να εξυπηρετήσει απαιτητικές σε μέγεθος μεταφορές. Σε άλλη περίπτωση, ένας υπάλληλος επειδή δεν γνωρίζει καλά το χειρισμό υπολογιστή, δεν μπορεί να αναλάβει μια συγκεκριμένη εργασία. Ομοίως, ένας πωλητής, λόγω των συνθηκών μετακίνησης δεν μπορεί να εξυπηρετήσει μια ή περισσότερες γεωγραφικές περιοχές.

Για το χειρισμό των περιπτώσεων αυτών, η μεταβλητή $x_{ij}$ που αντιστοιχεί στον εντολοδόχο και στη εργασία που δεν είναι δυνατόν να ανατεθεί, θα πρέπει να λάβει τιμή ίση με το 0. Για να επιτευχθεί αυτό, τεχνικά ορίζεται το αντίστοιχο κόστος καταμερισμού $c_{ij}$ ένας πολύ μεγάλος αριθμός M, π.χ. $c_{ij}=M=10^9$. Αποτέλεσμα αυτού είναι ο παράγοντας $Mx_{ij}$.που συμμετέχει στην συνάρτηση του προς ελαχιστοποίηση κόστους να μηδενίζεται και να μην λαμβάνεται υπόψη η αντίστοιχη ανάθεση αυτή.

### 2.3.3 Προβλήματα καταμερισμού με μεγιστοποίηση κέρδους

Στα συνήθη προβλήματα καταμερισμού όπως διατυπώθηκαν ανωτέρω, το ζητούμενο ήταν να βρεθεί το βέλτιστο σχέδιο καταμερισμού ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που αντί της ελαχιστοποίησης του κόστους ζητείται η μεγιστοποίηση κέρδους που τυχόν προκύπτει από τη ανάθεση. Για παράδειγμα αυτή είναι η περίπτωση των εταιρειών που αναλαμβάνουν υπηρεσίες προς πελάτες στους οποίους διαθέτουν συνεργεία καθαριότητος, φύλαξης, οικοδομικών εργασιών κλπ. όπου αναλόγως του έργου υπάρχουν διαφορετικές χρεώσεις και συνεπώς διαφορετικά περιθώρια κέρδους.

Στις περιπτώσεις αυτές, αλλάζει η διατύπωση του γραμμικού προγράμματος και συγκεκριμένα η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται προς μεγιστοποίηση. Όταν το αντίστοιχο πρόβλημα είναι μη ισορροπημένο, το κέρδος του καταμερισμού είτε στους εικονικούς εντολοδόχους είτε στις εικονικές εργασίες είναι μηδέν αφού δεν πραγματοποιείται ανάθεση.

Στα προβλήματα καταμερισμού που ζητείται η μεγιστοποίηση του κέρδους ενώ ταυτοχρόνως υπάρχουν μη επιτρεπτές, αποκλειόμενες αναθέσεις, σε αυτές αντί του μεγάλου αριθμού Μ ορίζεται ένα πολύ μικρό κέρδος Κ, της τάξης μεγέθους π.χ. $K=10^{-9}$.

## 2.4 Επίλυση προβλημάτων Καταμερισμού με τη χρήση του λογισμικού excel-solver.

Σχετικά με τα προβλήματα καταμερισμού, όπως συμβαίνει και για τα προβλήματα μεταφοράς, παρατηρούμε ότι ο αριθμός των άγνωστων μεταβλητών είναι της τάξης του αριθμού m*n, δηλαδή σχετικά μεγάλος. Αντιθέτως το σύνολο των περιορισμών στα ισορροπημένα προβλήματα είναι m+n αφού για κάθε εντολοδόχο και εργασία ορίζεται ένας περιορισμός.

Η επίλυση ενός προβλήματος καταμερισμού μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη μέθοδο SIMPLEX, όπως αυτή υλοποιείται από το αντίστοιχο λογισμικό (π.χ. Excel - SOLVER). Για μικρά προβλήματα, όταν δηλαδή οι διαστάσεις του βασικού πίνακα κόστους m, n είναι σχετικά μικροί αριθμοί, το αντίστοιχο πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί ακόμη και με απλούς υπολογισμούς, με τη χρήση των πινάκων της μεθόδου SIMPLEX. Όμως για μεγαλύτερα πραγματικά προβλήματα έχουν επινοηθεί ειδικές υπολογιστικές μέθοδοι.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται αρχικά, μέσω ενός παραδείγματος, η επίλυση ενός τυπικού ισορροπημένου προβλήματος καταμερισμού με τη χρήση του λογισμικού Excel-Solver. Σημειώνεται ότι η διατύπωση του προβλήματος καταμερισμού στο Excel είναι η ίδια, όπως και στη περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς.

Δίνεται το ακόλουθο παράδειγμα :

Μια επιχείρηση διαθέτει τρία συνεργεία καθαρισμού τα οποία διαθέτει καθημερινά σε πελάτες της. Θεωρούμε ότι τα συνεργεία από άποψη δυναμικότητας είναι ίδια. Το κόστος εργασίας ανά συνεργείο και πελάτη διαφέρει λόγω διαφορετικών ωρομισθίων, χρόνου απασχόλησης και χρήσης υλικών καθαρισμού. Το κόστος αυτό ανά ημέρα απασχόλησης περιγράφεται στον ακόλουθο πίνακα :

| | Συνεργείο 1 | Συνεργείο 2 | Συνεργείο 3 |
|---|---|---|---|
| Πελάτης 1 | 88€ | 68€ | 72€ |
| Πελάτης 2 | 95€ | 75€ | 85€ |
| Πελάτης 3 | 105€ | 81€ | 108€ |

Ζητείται να βρεθεί το βέλτιστο σενάριο καταμερισμού που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος των συνεργείων καθαρισμού. Να διατυπωθεί το αντίστοιχο γραμμικό πρόγραμμα και να επιλυθεί στο Excel-SOLVER.

**Διατύπωση του γραμμικού προγράμματος**.

Ορίζονται οι μεταβλητές $x_{ij}$ , i= 1,..,3 j=1,..,3 δηλαδή οι μεταβλητές $x_{11}$, $x_{12}$ , $x_{13}$ , $x_{21}$ , $x_{22}$ , $x_{23}$ , $x_{31}$ , $x_{32}$ , $x_{33}$ οι οποίες επιδέχονται τιμή =1 εάν το συνεργείο i αναλάβει τον πελάτη j και τιμή = 0 εάν δεν τον αναλάβει.

Η συνάρτηση κόστους για ολόκληρο το έργο, βάσει του πίνακα δεδομένων του προβλήματος είναι :

$$z = 88x_{11}+68x_{12}+72x_{13}+$$
$$+95x_{21} + 75x_{22}+85x_{23}+$$
$$+102x_{31}+81x_{32}+108x_{33}$$

Οι περιορισμοί για τους πελάτες είναι : $x_{11}+x_{12}+x_{13} =1$ , $x_{21}+x_{22}+x_{23} =1$ , $x_{31}+x_{32}+x_{33} =1$ και για τα συνεργεία $x_{11}+x_{21}+x_{31} = 1$, $x_{12}+x_{22}+x_{32} =1$, $x_{13}+x_{23}+x_{33} =1$.

Επιπλέον ζητείται να ισχύει $x_{11}$, $x_{12}$ , $x_{13}$ , $x_{21}$ , $x_{22}$ , $x_{23}$ , $x_{31}$ , $x_{32}$ , $x_{33}$ ={0,1}.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, το γραμμικό πρόγραμμα που αντιστοιχεί στο πρόβλημα καταμερισμού του παραδείγματος είναι:

$$\text{Min } Z= 88x_{11}+68x_{12}+72x_{13}++95x_{21} + 75x_{22}+85x_{23}++102x_{31}+81x_{32}+108x_{33}$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} =1$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23} =1$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33} =1$$

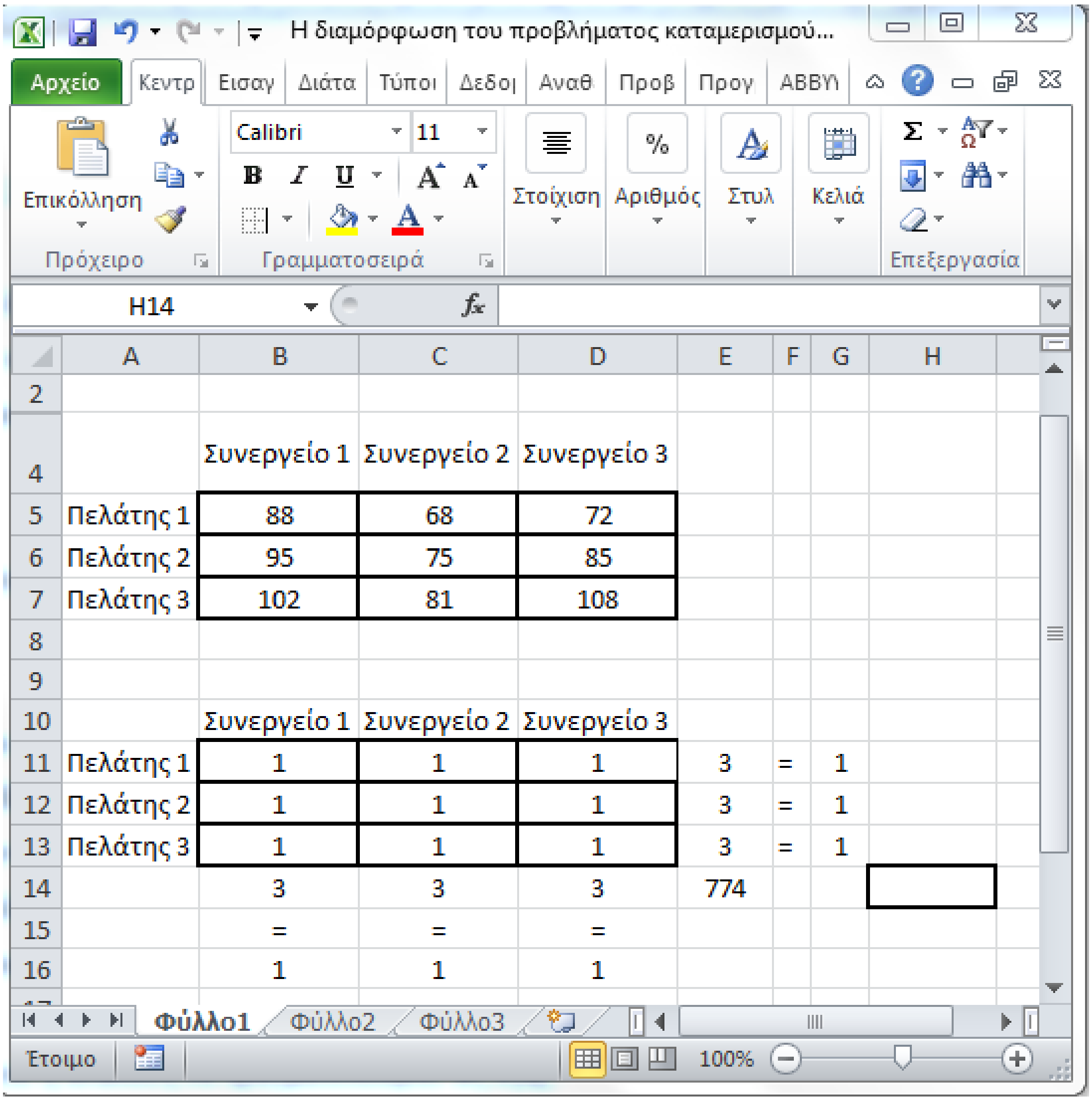
$$x_{11}+x_{21}+x_{31} = 1$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32} =1$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33} =1$$

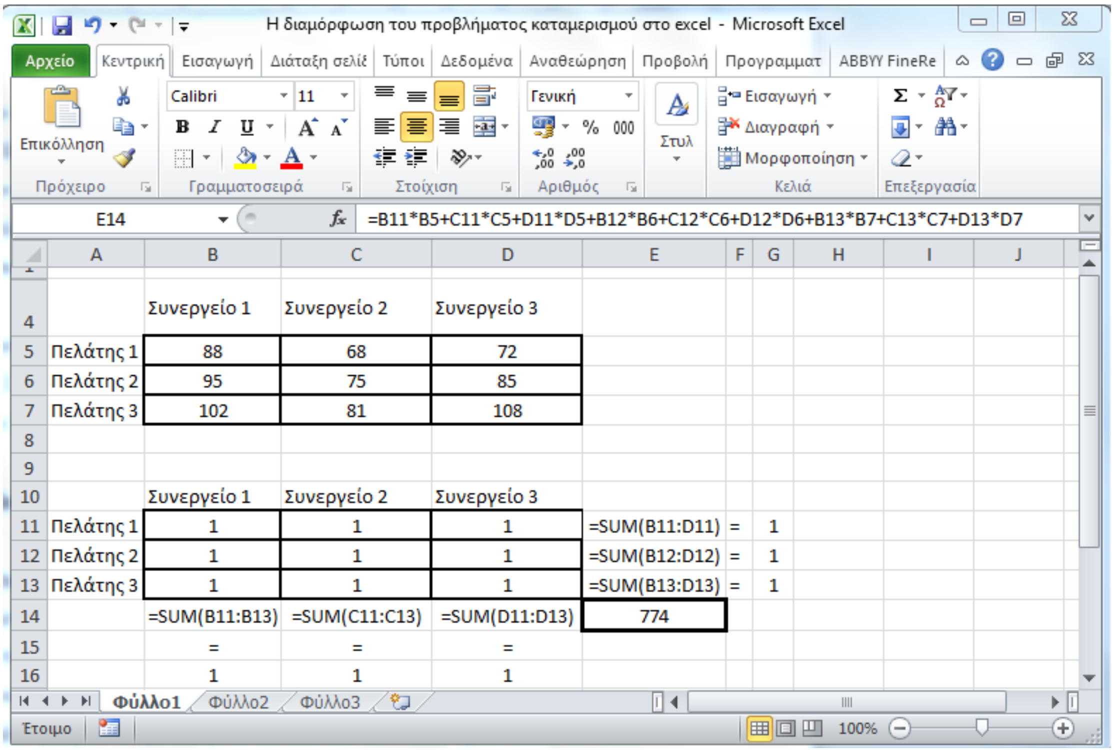
$$x_{11}, x_{12} , x_{13} , x_{21} , x_{22} , x_{23} , x_{31} , x_{32} , x_{33} =\{0,1\}$$

Για την επίλυσή του, αρχικά διαμορφώνεται ο αντίστοιχος πίνακας δεδομένων και μεταφέρεται στο Excel στις γραμμές 4-7 και στις στήλες A-D όπως φαίνεται από την ακόλουθη αποτύπωση.




Εικόνα 2.1 Η διαμόρφωση του προβλήματος καταμερισμού στο excel.

Κατά τη διαμόρφωση, προκειμένου να εκφραστούν οι περιορισμοί του προβλήματος, ορίζονται με τη συνάρτηση =SUM() του Excel οι συναρτήσεις αθροισμάτων και συνολικού κόστους, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.2.



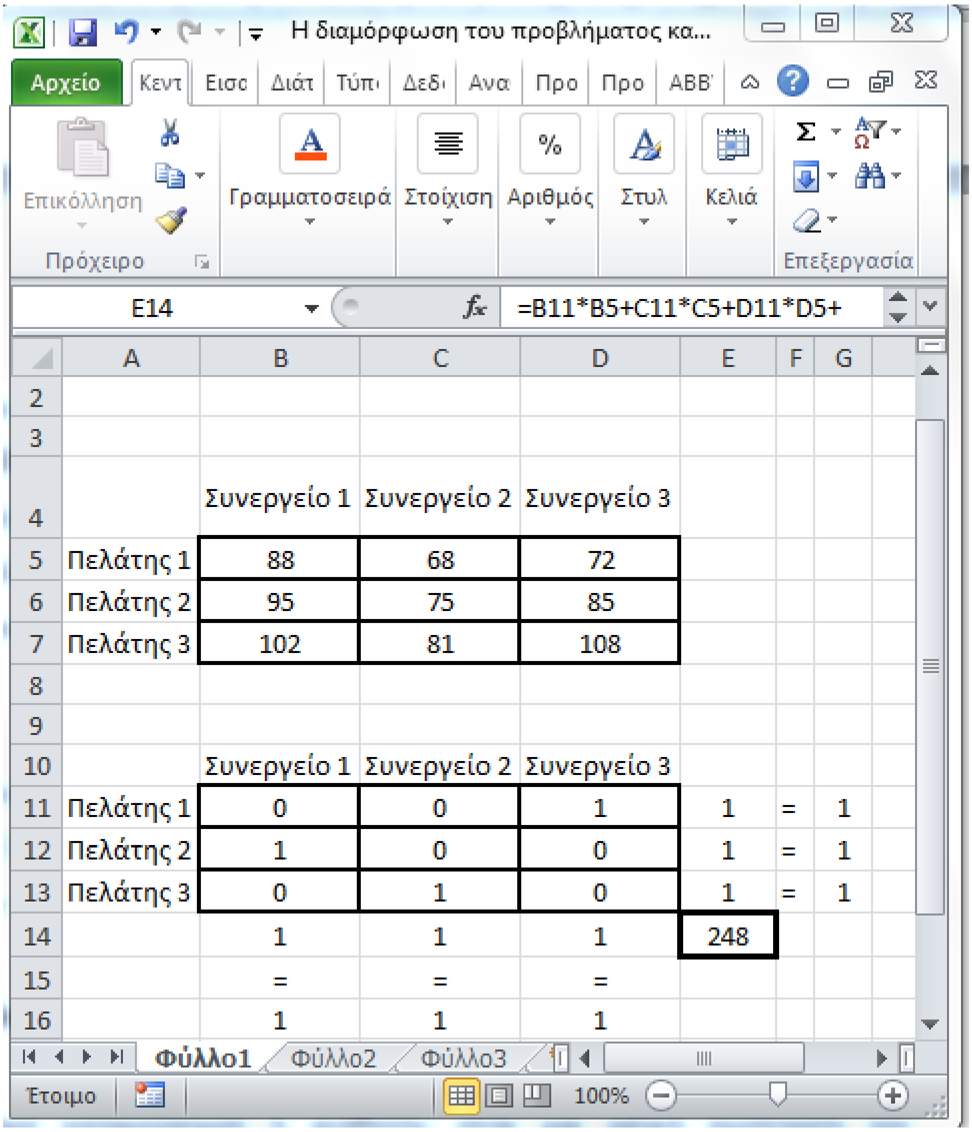

Εικόνα 2.2 Ορισμός των εκφράσεων των περιορισμών μέσω της συνάρτησης = SUM()

Στη συνέχεια ορίζονται οι παράμετροι του Solver, όπως δείχνει η ακόλουθη Εικόνα 2.3:

Εικόνα 2.3 Ορισμός των εκφράσεων των περιορισμών μέσω της συνάρτησης =SUM()

Σημειώνεται ιδιαιτέρως ότι για τις άγνωστες προς εκτίμηση μεταβλητές ορίζεται ο περιορισμός «$B$ll:$D$13=δυαδικός» (βλ. ανωτέρω εικόνα) να είναι τύπου δυαδικού ( binary ) δηλαδή να δέχονται μόνο τις τιμές 0 και 1.

Μετά την επίλυση, το αποτέλεσμα εμφανίζεται στα κελιά των άγνωστων μεταβλητών, όπως δείχνει η Εικόνα 2.4.




Εικόνα 2.4 Τα αποτελέσματα της επίλυσης.

Σύμφωνα με αυτό ο καταμερισμός θα πραγματοποιηθεί ως εξής :

Το συνεργείο 1 θα αναλάβει τον πελάτη 2, το συνεργείο 2 τον πελάτη 3 και το συνεργείο 3 τον πελάτη 1. Το συνολικό ελάχιστο κόστος καταμερισμού είναι 248€.

## 2.5 Επίλυση Προβλημάτων Καταμερισμού με τον Ουγγρικό Αλγόριθμο.

Το πρόβλημα καταμερισμού ή ανάθεσης είναι μια ειδική περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς, όπου ο αριθμός των κέντρων προέλευσης είναι ίσος με τον αριθμό των κέντρων προορισμού, και η προσφορά του κάθε κέντρου προέλευσης και η ζήτηση του κάθε κέντρου προορισμού ισούται με τη μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι μόνο μια μονάδα μπορεί να μεταφερθεί (ανατεθεί) από κάθε προέλευση σε κάθε προορισμό και αντίστροφα. Το πρόβλημα καταμερισμού μπορεί να επιλυθεί με τις μεθόδους επίλυσης του προβλήματος μεταφοράς, αλλά έχει αναπτυχθεί ένας πιο αποτελεσματικός αλγόριθμος από τον Ούγγρο μαθηματικό Konig, ονομαζόμενος Ουγγρικός αλγόριθμος. Παρακάτω θα δούμε την επίλυση προβλημάτων καταμερισμού με τον Ουγγρικό αλγόριθμο σε περιπτώσεις ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους.

Ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος καταμερισμού μετατρέπει τον αρχικό πίνακα κόστους σε ένα ισοδύναμο πίνακα που αποτελείται από θετικά και μηδενικά στοιχεία, έτσι ώστε όλες οι αναθέσεις να γίνονται δυνατές σε μηδενικά στοιχεία.
Τα μηδενικά στοιχεία βρίσκονται ως εξής :

**Βήμα 1**

(α) Βρείτε το ελάχιστο στοιχείο της κάθε γραμμής του αρχικού πίνακα κόστους Σχηματίστε ένα νέο πίνακα αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο κόστους της κάθε γραμμής από όλα τα στοιχεία της ίδιας γραμμής.
(β) Στον πίνακα που προκύπτει επαναλαμβάνεται το ίδιο για κάθε στήλη. Δηλαδή, βρείτε το ελάχιστο στοιχείο της κάθε στήλης Σχηματίστε ένα νέο πίνακα αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο κόστους της κάθε στήλης από όλα τα στοιχεία της ίδιας στήλης.

**Βήμα 2**

Καλύπτουμε όλα τα μηδενικά με τον ελάχιστο αριθμό οριζοντίων ή καθέτων γραμμών. Εάν το άθροισμα των οριζοντίων και καθέτων γραμμών είναι ίσο με τον αριθμό των γραμμών ή στηλών του πίνακα, τότε η ανάθεση είναι η βέλτιστη. Οι

αντιστοιχίσεις ή ο καταμερισμός των δραστηριοτήτων στα άτομα γίνεται μεταξύ των μηδενικών του πίνακα.
Εάν το άθροισμα των οριζοντίων και καθέτων γραμμών είναι μικρότερο του αριθμού των γραμμών ή στηλών του πίνακα, τότε προχωρήστε στο βήμα 3.

**Βήμα 3**

Στον πίνακα του βήματος 2, βρείτε το μικρότερο μη μηδενικό στοιχείο, το οποίο δεν έχει καλυφθεί από οριζόντιες ή κάθετες γραμμές. Αφαιρείτε το στοιχείο αυτό από κάθε στοιχείο που δεν έχει καλυφθεί και το προσθέτετε στα στοιχεία που βρίσκονται στις τομές των οριζοντίων και καθέτων γραμμών. Τα υπόλοιπα στοιχεία παραμένουν τα ίδια. Ο αλγόριθμος επανέρχεται στο βήμα 2
Όπως αναφέραμε στο βήμα 2, εφόσον η ανάθεση είναι η βέλτιστη, οι αντιστοιχίσεις των δραστηριοτήτων στα άτομα γίνεται μεταξύ των μηδενικών του πίνακα. Αναλυτικά, οι αντιστοιχίσεις των δραστηριοτήτων στα άτομα γίνονται ως εξής:
Εξετάζονται οι γραμμές και οι στήλες διαδοχικά και εντοπίζεται η γραμμή ή στήλη με ένα μόνο μηδενικό στοιχείο, έστω στη θέση ( i , j ) το οποίο κρατείται για «ανάθεση» (ή καταμερισμό) της δραστηριότητας i στο άτομο j . Τα υπόλοιπα μηδενικά της γραμμής i και της στήλης j διαγράφονται, εφόσον έγινε η ανάθεση της δραστηριότητας i στο άτομο j. Συνεχίζουμε όμοια με τις υπόλοιπες γραμμές ή στήλες του πίνακα, ώστε να γίνουν τόσες αναθέσεις όσες και ο αριθμός των γραμμών ή στηλών του αρχικού πίνακα.

**Παράδειγμα Περίπτωσης ελαχιστοποίησης.**

Μία εταιρεία θέλει να αναθέσει σε κάθε έναν από πέντε (5) υπαλλήλους της (Υ1, Υ2, Υ3, Υ4, Υ5) ένα από τα πέντε (5) τμήματά της (Α, Β. Γ, Δ, Ε). Ο διευθυντής προσωπικού κατήρτισε τον πίνακα 2.1, όπου φαίνεται το κόστος εκπαίδευσης (σε χρηματικές μονάδες) που απαιτείται για τον κάθε υπάλληλο στο κάθε τμήμα, ανάλογα με τις ικανότητες του κάθε υπαλλήλου και τις ιδιαιτερότητες του κάθε τμήματος. Να προσδιορισθούν τα τμήματα που θα ανατεθούν στους υπαλλήλους έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος εκπαίδευσης.

Πίνακας 2.1

Πίνακας Κόστους Εκπαίδευσης ανά Τμήμα και Υπάλληλο

| Τμήματα Εταιρίας | Υπάλληλοι | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Υ1 | Υ2 | Υ3 | Υ4 | Υ5 |
| Α | 28 | 34 | 25 | 33 | 37 |
| Β | 26 | 24 | 29 | 23 | 32 |
| Γ | 30 | 33 | 32 | 29 | 33 |
| Δ | 38 | 41 | 34 | 45 | 43 |
| Ε | 31 | 27 | 29 | 28 | 32 |

Βήμα 1α)

Αφαιρούμε το μικρότερο στοιχείο της κάθε γραμμής από όλα τα στοιχεία της ίδιας γραμμής. Αναλυτικά:

το μικρότερο στοιχείο της 1ης γραμμής είναι το 25 το οποίο αφαιρούμε από όλα τα στοιχεία της 1η γραμμής ,

το μικρότερο στοιχείο της 2ης γραμμής είναι το 23 το οποίο αφαιρούμε από όλα τα στοιχεία της 2ης γραμμής ,

το μικρότερο στοιχείο της 3ης γραμμής είναι το 29 το οποίο αφαιρούμε από όλα τα στοιχεία της 3ης γραμμής ,

το μικρότερο στοιχείο της 4ης γραμμής είναι το 34 το οποίο αφαιρούμε από όλα τα στοιχεία της 4ης γραμμής,

το μικρότερο στοιχείο της 5ης γραμμής είναι το 27 το οποίο αφαιρούμε από όλα τα στοιχεία της 5ης γραμμής

Έτσι, σχηματίζεται ο πίνακας 2.2 ο οποίος καλείται πίνακας κόστους ευκαιρίας.

Βήμα 1β)

Στον πίνακα που προκύπτει 2.2, αφαιρούμε το μικρότερο στοιχείο της κάθε στήλης από όλα τα στοιχεία της ίδιας στήλης . Αναλυτικά:

το μικρότερο στοιχείο της 1ης στήλης είναι το 1 το οποίο αφαιρούμε από όλα τα στοιχεία της 1ης στήλης,

το μικρότερο στοιχείο της 2ης , 3ης και 4ης στήλης είναι το 0, επομένως μετά την αφαίρεση του μηδενός οι στήλες 2, 3, και 4 παραμένουν οι ίδιες ,
το μικρότερο στοιχείο της 5ης στήλης είναι το 4 το οποίο αφαιρούμε από όλα τα στοιχεία της 5ης στήλης.

Έτσι. προκύπτει ο πίνακας 2.3.

Πίνακας 2.2

Πίνακας Κόστους Ευκαιρίας Παραδείγματος

| Τμήματα Εταιρίας | Υπάλληλοι | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Υ1 | Υ2 | Υ3 | Υ4 | Υ5 |
| Α | 3 | 9 | 0 | 8 | 12 |
| Β | 3 | 1 | 6 | 0 | 9 |
| Γ | 1 | 4 | 3 | 0 | 4 |
| Δ | 4 | 7 | 0 | 11 | 9 |
| Ε | 4 | 0 | 2 | 1 | 5 |

Πίνακας 2.3

| Τμήματα Εταιρίας | Υπάλληλοι | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Υ1 | Υ2 | Υ3 | Υ4 | Υ5 |
| Α | 2 | 9 | 0 | 8 | 8 |
| Β | 2 | 1 | 6 | 0 | 5 |
| Γ | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 |
| Δ | 3 | 7 | 0 | 11 | 5 |
| Ε | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 |

## Βήμα 2

Καλύπτουμε όλα τα μηδενικά με τον ελάχιστο αριθμό οριζοντίων ή καθέτων γραμμών (πίνακας 2.4). Οι οριζόντιες και κάθετες γραμμές είναι 4, αριθμός μικρότερος του 5 που είναι ο αριθμός των γραμμών ή στηλών του πίνακα. Επομένως, η ανάθεση δεν είναι η βέλτιστη και προχωρούμε στο βήμα 3.

Πίνακας 2.4

| Τμήματα Εταιρίας | Υπάλληλοι | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Υ1 | Υ2 | Υ3 | Υ4 | Υ5 |
| Α | 2 | 9 | 0 | 8 | 8 |
| Β | 2 | 1 | 6 | 0 | 5 |
| Γ | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 |
| Δ | 3 | 7 | 0 | 11 | 5 |
| Ε | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 |

Βήμα 3

Το μικρότερο μη μηδενικό στοιχείο που δεν έχει καλυφθεί από οριζόντιες ή κάθετες γραμμές είναι το 2, το οποίο αφαιρούμε από κάθε στοιχείο που δεν έχει καλυφθεί και το προσθέτουμε στα στοιχεία που βρίσκονται στις τομές των οριζοντίων και καθέτων γραμμών. Τα υπόλοιπα στοιχεία παραμένουν τα ίδια. Έτσι προκύπτει ο πίνακας 2.5.

Πίνακας 2.5

| Τμήματα Εταιρίας | Υπάλληλοι | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Υ1 | Υ2 | Υ3 | Υ4 | Υ5 |
| Α | 0 | 7 | 0 | 6 | 6 |
| Β | 2 | 1 | 8 | 0 | 5 |
| Γ | 0 | 4 | 5 | 0 | 0 |
| Δ | 1 | 5 | 0 | 9 | 3 |
| Ε | 3 | 0 | 4 | 1 | 1 |

Επανερχόμαστε στο βήμα 2. 0 ελάχιστος αριθμός οριζοντίων και καθέτων γραμμών είναι 5 , ίδιος με τον αριθμό των γραμμών (ή στηλών) του πίνακα (πίνακας 2.6).

**Πίνακας 2.6**

| Τμήματα Εταιρίας | Υπάλληλοι | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Υ1 | Υ2 | Υ3 | Υ4 | Υ5 |
| Α | 0 | 7 | 0 | 6 | 6 |
| Β | 2 | 1 | 8 | 0 | 5 |
| Γ | 0 | 4 | 5 | 0 | 0 |
| Δ | 1 | 5 | 0 | 9 | 3 |
| Ε | 3 | 0 | 4 | 1 | 1 |

Επομένως, η ανάθεση είναι η βέλτιστη. Οι αναθέσεις (καταμερισμός) φαίνονται στον πίνακα 2.34, θέτοντας τα μηδενικά των κελιών της ανάθεσης σε τετράγωνο( $\boxed{0}$ ) και γίνονται ως εξής:

- Παρατηρούμε ότι στη $2^{\eta}$ γραμμή υπάρχει μόνο ένα μηδενικό, επομένως αναθέτουμε το τμήμα Β στον υπάλληλο Υ4. Διαγράφουμε τα υπόλοιπα μηδενικά της $2^{\eta\varsigma}$ γραμμής και της 4ης στήλης, π.χ. το μηδενικό στο κελί (Γ, Υ4) εφόσον στον υπάλληλο Υ4 έχει ανατεθεί το τμήμα Β.
- Στην $4^{\eta}$ γραμμή υπάρχει ένα μόνο μηδενικό, επομένως αναθέτουμε το τμήμα Δ στον υπάλληλο Υ3, διαγράφοντας το μηδενικό στο κελί (Α, Υ3).
- Αναθέτουμε το τμήμα Ε στον υπάλληλο Υ2.
- Αναθέτουμε το τμήμα Α στον υπάλληλο Υ1, διαγράφοντας το μηδενικό στο κελί (Γ, Υ1).
- Αναθέτουμε το τμήμα Γ στον υπάλληλο Υ5.

Πίνακας 2.7

| Τμήματα Εταιρίας | Υπάλληλοι | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Υ1 | Υ2 | Υ3 | Υ4 | Υ5 |
| Α | $\boxed{0}$ | 7 | ~~0~~ | 6 | 6 |
| Β | 2 | 1 | 8 | $\boxed{0}$ | 5 |
| Γ | ~~0~~ | 4 | 5 | ~~0~~ | $\boxed{0}$ |
| Δ | 1 | 5 | $\boxed{0}$ | 9 | 3 |
| Ε | 3 | $\boxed{0}$ | 4 | 1 | 1 |

Δηλαδή, η βέλτιστη ανάθεση σύμφωνα με τη μαθηματική διατύπωση του μοντέλου του Γ.Π. (παράδειγμα 2.7) είναι:

$x_{11} = 1$, $x_{24}=1$, $x_{35}=1$ , $x_{43} =1$, $x_{52}=1$

Το συνολικό ελάχιστο κόστος εκπαίδευσης υπολογίζεται από το άθροισμα του κόστους των κελιών του αρχικού πίνακα κόστους , στα οποία έχει γίνει ανάθεση , 28 + 23 + 33 + 34 + 27 = 145 χρηματικές μονάδες.

Εάν έχουμε πρόβλημα **μεγιστοποίησης** (π.χ. κέρδους ή αποτελεσματικότητας) τότε στο βήμα 1α βρίσκουμε το μεγαλύτερο στοιχείο της κάθε γραμμής και αφαιρούμε τα υπόλοιπα στοιχεία της ίδιας γραμμής από αυτό. Βάσει του πίνακα που προκύπτει, το πρόβλημα συνεχίζεται από το βήμα 1β, όπως και στο πρόβλημα ανάθεσης, περίπτωση ελαχιστοποίησης.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βασιλείου, Π.Χ., Τσακλίδης, Γ. και Τσάντας,Ν (2000). *Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Τόμος 1 Γραμμικός Προγραμματισμός*, Εκδόσεις Ζήτη.

Βασιλείου, Π.Χ., Τσακλίδης, Γ. και Τσάντας,Ν (2003). *Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Τόμος 2 Δυναμικός Προγραμματισμός, Μη Γραμμικές μέθοδοι Βελτιστοποίησης, Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα,* Εκδόσεις Ζήτη.

Δρακάτος, Κ.Γ., Δονάτος, Γ.Σ., Χομπάς, Β.Χ. (1981). *Μέθοδοι και Προβλήματα Προγραμματισμού,* Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα.

Κουνιάς, Σ., και Φακίνος, Δ. (1989) *Γραμμικός Προγραμματισμός Θεωρία και Ασκήσεις*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Κιόχος, Π. , Θάνος, Γ., Σαλαμούρης, Δ., Κιόχος, Α. (1994). *Επιχειρησιακή Έρευνα: Μέθοδοι και Τεχνικές Λήψης επιχειρηματικών αποφάσεων*, Εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.

Κιόχος, Π. , Θάνος, Γ., Σαλαμούρης, Δ., Κιόχος, Α. (2002). *Επιχειρησιακή Έρευνα,* Εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.

Κωστογλου, Β., (1992). *Επιχειρησιακή Έρευνα : Μεθοδολογία Εφαρμογές και Προβλήματα Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης*, εκδ. Τζιόλας, Θεσσαλονίκη.

Ξηρόκωστας, Δ (1991). *Επιχειρησιακή Έρευνα. Αντικείμενο και Μεθοδολογία. Γραμμικός Προγραμματισμός*, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Οικονόμου, Γ. και Τσιότρας, Γ. (1994). *Ποσοτική Ανάλυση Περιπτώσεων*, Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.

Πραστάκος, Γ. (1992). *Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού με τη Χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή*, Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς.

Πραστάκος, Γ. (2002). *Διοικητική Επιστήμη στην Πράξη*, Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς.

Πραστάκος, Γ. (2000). *Διοικητική Επιστήμη, Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων στην Κοινωνία της Πληροφορίας*, Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς.

Τσάντας, Ν., (1995), *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Εκδόσεις Ζήτης, Θεσσαλονίκη.

Υψηλάντης, Π.(2006). *Επιχειρησιακή Έρευνα Εφαρμογές στη Σημερινή Επιχείρηση*, α΄ έκδ., Εκδόσεις Προπομπός, Αθήνα.

Υψηλάντης, Π.(2008). *Επιχειρησιακή Έρευνα Εφαρμογές στη Σημερινή Επιχείρηση*, β΄ έκδ., Εκδόσεις Προπομπός, Αθήνα.

Υψηλάντης, Π.(2010). *Επιχειρησιακή Έρευνα Εφαρμογές στη Σημερινή Επιχείρηση*, γ΄ έκδ., Εκδόσεις Προπομπός, Αθήνα.

Φράγκος, Χ.Κ. (2006) *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Λήψη Αποφάσεων με Εφαρμογή Μαθηματικών Μοντέλων*, Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα.