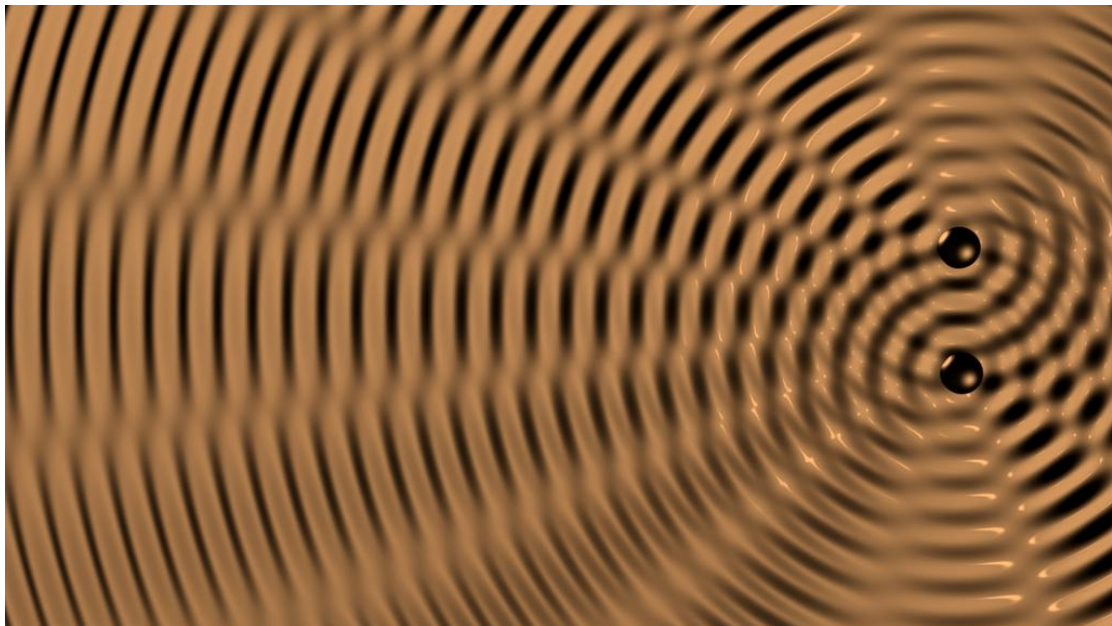




ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ  
ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ

## ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεωρία και εφαρμογή της μεθόδου των συνοριακών  
στοιχείων στην ακουστική



Φοιτητής: Θεόδωρος Μπαντούνας, Α.Μ. : 694

Επιβλέπων καθηγητής: Δρ.Σπύρος Κουζούπης

Μάιος 2016

## Ευχαριστίες

Η γνώση όπως αναφέρει ο Πλάτων είναι γνώση για κάτι. Και αυτό το κάτι για να συλληφθεί στον κόσμο των ιδεών, όχι ως κάτι φθαρτό ή μεταβλητό, ούτε σαν κάτι εξαρτώμενο από την οπτική γωνία που εξετάζεται ή από την χρονική συγκυρία, αλλά ως *αντικείμενο*, ως *μορφή*, πρέπει να πληρεί τους πλατωνικούς όρους που το σημερινό οικοδόμημα της επιστήμης θέτει ως αξίες. Αυτές της καθολικότητας της γνώσης και της αμετάβλητης φύσης της.

Στο επίπεδο της θεώρησης των μορφών, ο Πλάτων, αναφέρει πως φτάνει κανείς μέσω των μαθηματικών και πρωτίτερα αυτών μέσω των στοχασμών. Η ακουστική ως εργασία σχετίζεται με αυτό το μονοπάτι το οποίο οδηγεί στην γνώση μέσω των θετικών επιστημών που εκφράζει. Με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων να δείχνει ως επιτομή του *τώρα* μιας και αφορά μέθοδο η οποία φέρει αναγνωρισιμότητα τις τελευταίες δύο δεκαετίες.

Σε αυτό σημείο θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή κ.Σπύρο Κουζούπη για την δυνατότητα που μου έδωσε για να περιηγηθώ μεταξύ φυσικών εννοιών και μαθηματικών όρων. Επίσης ευχαριστώ τους επιστήμονες Vicente Cutanda Henriquez και Peter Møller Juhl για το δικαίωμα χρήσης για εκπαιδευτικούς σκοπούς της εφαρμογής Orenbem που παρέχουν καθώς και για την δημιουργία της εφαρμογής.

## Περίληψη

Μέσω της εργασίας αυτής και των απλών προβλημάτων ακουστικής που περιέχονται παρουσιάζεται η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων για τον μηχανικό που αναζητά λύσεις σε προβλήματα ακουστικής με την χρήση αριθμητικών μεθόδων. Στο κείμενο που ακολουθεί καταγράφονται τα ιστορικά στοιχεία που αφορούν την μέθοδο, εξιστορείται η χρονική περίοδος κατά την οποία δημιουργήθηκαν τα βασικά θεμέλια της μεθόδου.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βασικότερα είδη αριθμητικών μεθόδων προκειμένου να υπάρξει μια ευρύτερη κατανόηση του επιστημονικού πεδίου καθώς και προσδιορισμός χρήσης της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων. Η μέθοδος στην πορεία αναλύεται στις βασικές μορφές επίλυσης της με εκτενέστερη αναφορά σε επιμέρους βήματα λύσης. Ακολούθως παρουσιάζεται ο τρόπος μοντελοποίησης που ακολουθείται για προβλήματα ακουστικής.

Στο δεύτερο και κυριότερο μέρος της εργασίας γίνεται νύξη στα προγράμματα που χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή και επεξεργασία των δεδομένων, παρουσιάζεται συνοπτικά η αλυσίδα δημιουργίας αποτελεσμάτων και γίνεται εισαγωγή του χρήστη στο αντικείμενο μέσω κλιμακωτής ανάπτυξης παραδειγμάτων.

Το προγραμματιστικό περιβάλλον στο οποίο λαμβάνουν χώρα η διαδικασία επεξεργασίας των δεδομένων είναι η μαθηματική γλώσσα προγραμματισμού Matlab μέσω του κώδικα Openbem. Η εισαγωγή δεδομένων γίνεται μέσω του προγράμματος Gid.

## Περιεχόμενα

1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	
1.1 Ιστορική εξέλιξη	1
1.2 Κύριοι τύποι αριθμητικών μεθόδων	4
1.2.1 Η μέθοδος της διαφοράς των πεπερασμένων στοιχείων (FDTD)	4
1.2.2 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM)	5
1.2.3 Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (BEM)	5
1.3 Τρόποι υπολογισμού της μεθόδου συνοριακών στοιχείων	
1.3.A Άμεση μέθοδος υπολογισμού	7
1.3.B Έμμεση μέθοδος υπολογισμού	9
1.4 Στάδια ανάπτυξης της άμεσης μεθόδου υπολογισμού των συνοριακών στοιχείων	
1.4.1 Η εξίσωση Helmholtz	9
1.4.2 Η θεμελιώδης λύση	10
1.4.3 Συνοριακές συνθήκες	11
1.4.4 Προβλήματα εσωτερικού τύπου	11
1.4.5 Προβλήματα εξωτερικού τύπου	14
1.5 Διακριτοποίηση στη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων	
1.5.1 Διακριτοποίηση του συνόρου	17
1.5.1 Στοιχεία και κομβικά σημεία	18
1.5.2 Τρισδιάστατο δικτύωμα	22
2. ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΣΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ OPENBEM	
2.1 Διαδικασία εισαγωγής-επεξεργασίας δεδομένων και αποτελεσμάτων	25
2.2 Η εφαρμογή Openbem	26
2.3 Παραδείγματα χρήσης της εφαρμογής Openbem	26
<i>Πρώτο παράδειγμα</i>	28
<i>Δεύτερο παράδειγμα</i>	30
<i>Τρίτο παράδειγμα</i>	32
<i>Τέταρτο παράδειγμα</i>	35
<i>Πέμπτο παράδειγμα</i>	37
2.4 Εισαγωγή δεδομένων μέσω προγράμματος σχεδιασμού	39
<i>Πρώτο παράδειγμα</i>	41
<i>Δεύτερο παράδειγμα</i>	43
<i>Τρίτο παράδειγμα</i>	45

<i>Τέταρτο παράδειγμα</i>	47
<i>Πέμπτο παράδειγμα</i>	50
2.5 Προγραμματισμός	
2.5.1 Αρχείο ReadgeomGIDMSH.m	51
2.5.2 Κώδικας επιλογής αρχείου εισαγωγής	53
Βιβλιογραφία	54

# 1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

## 1.1 Ιστορική εξέλιξη της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων

Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων ως αριθμητική μέθοδος άρχισε να υλοποιείται την εποχή της δεκαετίας του '60. Σε αυτό συνέβαλε το ότι οι υπολογιστές ήρθαν στο προσκήνιο<sup>1</sup>. Τα πρώτα βήματα για την δημιουργία της μεθόδου έγιναν στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα.

Το 1886 ο Carlo Somigliana υπολόγισε το ολοκλήρωμα το οποίο σχετίζει τις συνοριακές συνθήκες της μετατόπισης και των συνιστωσών τάσεως. Το ολοκλήρωμα αυτό αποτελεί βάση για την μετέπειτα εξέλιξη του άμεσου τρόπου επίλυσης της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων (ΜΣΣ)<sup>2</sup>.

Το 1903 ο Erik Fredholm συμπληρώνει τους τρόπους υπολογισμού της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων με τη διακριτοποίηση ολοκληρωμάτων δυναμικού. Οι τιμές που χρησιμοποιεί σε ότι αφορά τις πηγές ή την πυκνότητα είναι φανταστικές, δίχως φυσική υπόσταση. Οι τιμές αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των μεγεθών της μετατόπισης ή των συντελεστών τάσης. Η προσέγγιση αυτή θεωρείται ως η αρχή χρήσης της μεθόδου σε ότι αφορά τον έμμεσο τρόπο υπολογισμού της<sup>3</sup>.

Στο πρώιμο αυτό στάδιο έγιναν αρκετές δημοσιεύσεις και εκδόσεις βιβλίων, οι οποίες αφορούν τη λύση ολοκληρωμάτων για προβλήματα δυναμικού και ελαστικότητας. Κατά αυτή την εποχή μπορεί κανείς να συναντήσει ονόματα διακεκριμένων μαθηματικών, όπως οι Oliver Kellogg (1929) και Nikolai Muskhelishvili (1953), Solomon Mikhlin (1957) και Viktor Kupradze (1965). Οι δημοσιεύσεις τους είχαν την ιδιαιτερότητα ότι τα ολοκληρώματα λύνονταν μέχρι τότε με τον αναλυτικό τρόπο. Κάτι το οποίο, όπως ήταν φυσικό, αποτέλεσε τροχοπέδη για την περαιτέρω χρήση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων<sup>3</sup>.

Την δεκαετία του 1960, με τη διάδοση του ηλεκτρονικού υπολογιστή στους ευρύτερους ερευνητικούς κύκλους (μέχρι τότε οι υπολογιστές είχαν πειραματικό περισσότερο χαρακτήρα), οι επιστήμονες άρχισαν να λύνουν τα προβλήματα με την αριθμητική μέθοδο<sup>4</sup>.

---

<sup>1</sup> *Heritage and early history of the boundary element method*. Alexander –Daisy Cheng, 2005. Engineering Analysis with Boundary Elements, σ.268

<sup>2</sup> *The boundary element method in engineering, A complete course*. A.A. Becker (1992). McGraw-Hill, σ.7

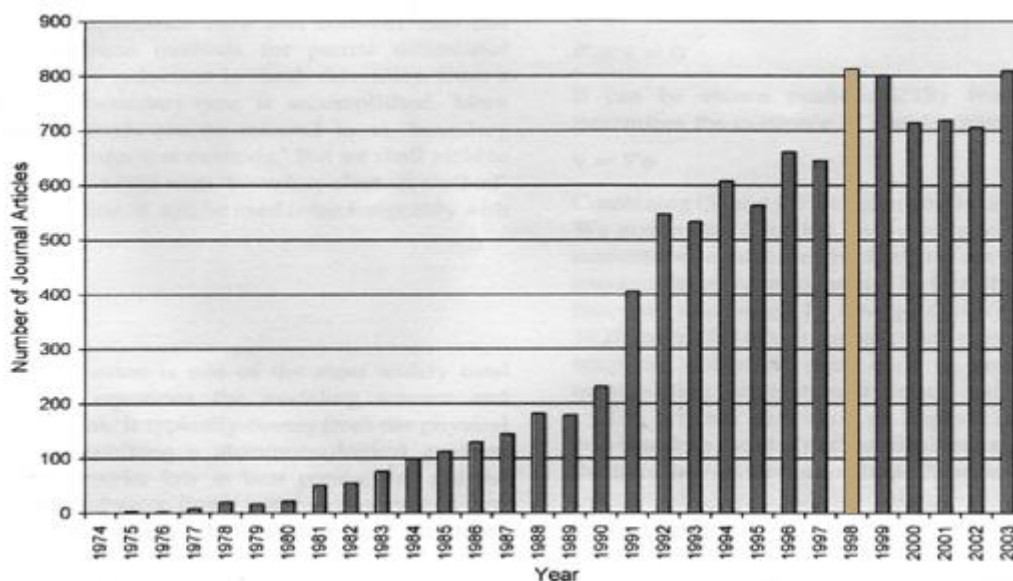
<sup>3</sup> A.A.Becker, 1992, οπ.π. σ.7

<sup>4</sup> Alexander H.-D. Cheng, 2005, οπ.π. σ. 268

Το 1967 ο Frank Rizzo δημοσίευσε εργασία στην οποία εισήγαγε τον άμεσο τρόπο υπολογισμού της μεθόδου. Η μεθοδολογία αυτή ακολουθείται ως έχει μέχρι σήμερα. Η προσέγγιση του αφορούσε μετατοπίσεις και συνιστώσες τάσεως, τις οποίες τις συνέδεε με το σύνορο μέσω ολοκληρώματος. Το 1969 ο Thomas Cruse κάνει ένα βήμα πιο πέρα, λύνοντας πρόβλημα άμεσης μεθοδολογίας για τις τρεις διαστάσεις. Ο τρόπος λύσης που ακολουθούσε ήταν με διακριτοποίηση στην επιφάνεια. Χώριζε την επιφάνεια σε επίπεδα τριγωνικά στοιχεία με τις μετατοπίσεις και τις συνιστώσες τάσης να θεωρούνται συνεχείς σε κάθε στοιχείο<sup>5</sup>.

Κατά το διάστημα των ετών 1967-1972, σε αυτό το αρχικό στάδιο θέσπισης της μεθόδου, δημοσιεύθηκαν μια σειρά εργασίες οι οποίες επέκτειναν τους τομείς υλοποίησης της. Υπήρξαν δημοσιεύσεις για προβλήματα με μη ομογενή<sup>6</sup> υλικά (F.J.Rizzo & D.J.Shippy, 1968), για ελαστοστατικά προβλήματα (T.A.Cruse-1968, T.A.Cruse & F.J.Rizzo-1968), για ελαστοπλαστικά προβλήματα (J.L.Swedlow & T.A.Cruse-1971), προβλήματα δυναμικού σε ανισότροπα σώματα (Swedlow & T.A.Cruse-1971) καθώς και για προβλήματα θραύσεως σε τρισδιάστατα αντικείμενα (T.A.Cruse & A.L.Van Buren-1971, T.A.Cruse-1972)<sup>7</sup>.

Στον Πίνακα 1<sup>8</sup>, καταγράφεται η πορεία της μεθόδου με τις δημοσιεύσεις που γίνονται ανά χρονιά.



Πίνακας 1. Δημοσιευμένα επιστημονικά άρθρα με θέμα την ΜΣΣ κατά έτος

<sup>5</sup> A.A.Becker, 1992, οπ.π. σ.7

<sup>6</sup> Ομογενές υλικό: Σύμφωνα με τον συγγραφέα T.W.Wu όταν σε ένα ρευστό την χρονική στιγμή  $t_0$  υπάρχει παντού η ίδια τιμή πίεσης και πυκνότητας, δηλαδή όταν η τιμή της πίεσης και της πυκνότητας δεν εξαρτάται από την θέση του σημείου, τότε το υλικό χαρακτηρίζεται ως ομογενές. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει ίδια τιμή για την αρχική πυκνότητα ( $P_0$ ) και πίεση ( $p_0$ ) τότε το υλικό χαρακτηρίζεται ως ετερογενές.

<sup>7</sup> A.A.Becker, 1992, οπ.π. σ.7

<sup>8</sup> AlexanderH.-D. Cheng, 2005, οπ.π. σ.269

Table 1  
Bibliographic database search based on the Web of Science

Numerical method	Search phrase in topic field	No. of entries
FEM	'Finite element' or 'finite elements'	66,237
FDM	'Finite difference' or 'finite differences'	19,531
BEM	'Boundary element' or 'boundary elements' or 'boundary integral'	10,126
FVM	'Finite volume method' or 'finite volume methods'	1695
CM	'Collocation method' or 'collocation methods'	1615

Πίνακας 2. Δημοσιεύσεις αριθμητικών μεθόδων

Σύμφωνα με τον πίνακα 2 η **ΜΣΣ** (επίσης γνωστή ως **BEM**) αποτελεί μια από τις δημοφιλείς αριθμητικές μεθόδους. Αν συγκριθεί με τις εξίσου (και περισσότερο) γνωστές αριθμητικές μεθόδους, τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (**FEM**) και τη μέθοδο πεπερασμένης διαφοράς (**FDM**), φαίνεται ότι μπορεί να γίνει ένας διαχωρισμός, όπου σε αυτόν η **FEM** και η **FDM** μπορούν να χαρακτηριστούν ως μέθοδοι οι οποίες λαμβάνουν χώρα σε μια περιοχή, ενώ η **BEM** μπορεί να χαρακτηριστεί ως συνοριακή μέθοδος<sup>9</sup>.

Τα στοιχεία που ώθησαν τη **ΜΣΣ** να γίνει τόσο δημοφιλής μεταξύ των αριθμητικών μεθόδων που αφορούν τη λύση *Μερικών Διαφορικών εξισώσεων*, Πίνακας 2<sup>10</sup>, είναι ότι, ως μέθοδος, όταν χρησιμοποιείται για προβλήματα στα οποία είναι ξεκάθαρο το πλεονέκτημα της (π.χ. σε εξωτερικού τύπου πρόβλημα με άπειρη διάσταση χωρίου), αποτελεί ισχυρό εργαλείο υπολογισμού. Επίσης μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει επάρκεια σε ότι αφορά την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της μεθόδου αυτής. Για το λόγο αυτό κάθε μηχανικός θα πρέπει να τη θεωρεί ένα ισχυρό μέσο λύσης προβλημάτων ακουστικής.

Επιπλέον στοιχείο για την εξέλιξη της μεθόδου και τη σημασία που είχε τότε ο τρόπος χρήσης του ολοκληρώματος στον υπολογισμό των τιμών δυναμικού ( $v, p$  ή  $z$ ) είναι η ονομασία που είχε καθιερωθεί πριν η μέθοδος ονομαστεί **BEM**. Η βιβλιογραφία της τότε εποχής την αναφέρει ως **BIEM** (τα αρχικά της οποίας στα αγγλικά μεταφράζονταν ως *Μέθοδος Συνοριακού Ολοκληρώματος*), μια ονομασία η οποία διατηρήθηκε για μερικές δεκαετίες και συναντάται ακόμα στη βιβλιογραφία.

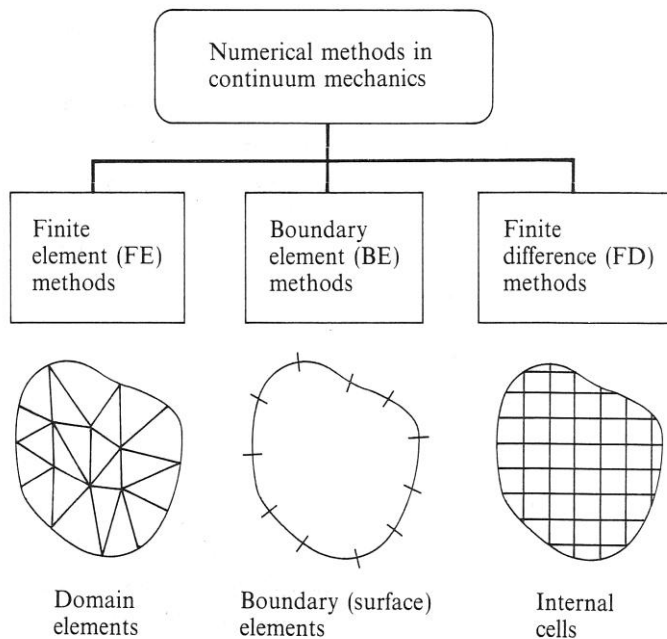
<sup>9</sup> Alexander H.-D. Cheng, 2005, σπ.π. σ.268

<sup>10</sup> Alexander H.-D. Cheng, 2005, σπ.π. σ.269



## 1.2 Κύριοι τύποι αριθμητικών μεθόδων

Προκειμένου να υπάρξει βαθύτερη κατανόηση της μεθόδου και να μπορεί να είναι εύκολα κατανοητό το πότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδο αυτή θα παρουσιαστούν παρακάτω οι βασικές αριθμητικές μέθοδοι οι οποίες μπορούν να επιλεγθούν από τον μηχανικό για να λύσει προβλήματα ακουστικής.



Σχήμα 1.1 Ταξινόμηση των αριθμητικών μεθόδων στην ακουστική μηχανική

### 1.2.1 Η μέθοδος της διαφοράς των πεπερασμένων στοιχείων (FDM)

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή τα παράγωγα των εφαρμοσμένων Μερικών Διαφορικών εξισώσεων γράφονται με όρους διαφορικών εξισώσεων. Για παράδειγμα, σε μια δισδιάστατη επιφάνεια ένα δικτύωμα συνιστώμενο από κυψέλες τοποθετείται στο εσωτερικό του χωρίου προς εξέταση και η κατά προσέγγιση διαφορά τοποθετείται σε κάθε σημείο.

Εν συγκρίσει με τις άλλες μεθόδους μπορεί να ειπωθεί πως ως μέθοδος χαρακτηρίζεται από απλότητα, κυρίως λόγω της ευκολίας που υπάρχει στον προγραμματισμό της. Στον αντίποδα βρίσκεται η δυσχέρεια που παρουσιάζει σε προβλήματα που αφορούν αντικείμενα με πολύπλοκες γεωμετρίες. Επίσης όταν υπάρχει ταχεία εναλλαγή τιμών των μεταβλητών η μέθοδος δεν ανταποκρίνεται λόγω της δυσκολίας που παρουσιάζει στη ρύθμιση διαφορετικού μεγέθους μεταξύ των κελιών.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται κυρίως για προβλήματα μεταφοράς θερμότητας και ροής ρευστών<sup>11</sup>.

<sup>11</sup> A.A.Becker, 1992, σπ.π. σ.2

### 1.2.2 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM)

Με την μέθοδο αυτή, η επιφάνεια προς λύση (όντας αναλυμένη σε δικτύωμα), χωρίζεται σε σημεία πεπερασμένων συντεταγμένων. Κάθε σημείο στην ουσία είναι ένα στοιχείο και η συμπεριφορά που μπορεί να το χαρακτηρίζει μπορεί να περιγραφεί από τις διαφορικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στο συγκεκριμένο στοιχείο. Λόγω του ότι τα στοιχεία αθροίζονται, τα απαιτούμενα της συνέχειας (ενότητα διακριτοποίησης) και της ισορροπίας ικανοποιούνται στην περίπτωση των γειτονικών στοιχείων.

Σε αντίθεση με την προαναφερόμενη μέθοδο, αυτή των πεπερασμένων στοιχείων είναι χρήσιμη για προβλήματα με περίπλοκες γεωμετρίες. Προκειμένου δε ο μηχανικός να αποκτήσει αποτελέσματα ακρίβειας για περιοχές ταχείας εναλλαγής τιμών των μεταβλητών, ένας μεγάλος όγκος δεδομένων, επιλέγοντας ομαδοποιημένα σύνολα πεπερασμένων στοιχείων πρέπει να συνυπολογιστεί<sup>12</sup>.

### 1.2.3 Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (ΜΣΣ)

Κατά την μέθοδο αυτή, η οποία αποτελεί αντικείμενο αυτής της εργασίας, σε επίπεδο μαθηματικών όρων έχουμε μετασχηματισμούς από μερικές διαφορικές εξισώσεις σε ολοκληρώματα. Τα ολοκληρώματα εφαρμόζονται, κατόπιν αρίθμησης των στοιχείων στο σύνορο, σε κάθε ένα από τα στοιχεία του αντικειμένου προς εξέταση. Εφόσον και οι συνοριακές συνθήκες<sup>13</sup> που απαιτούνται ικανοποιούνται, ένα σύνολο από γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις προκύπτει για το οποίο εφαρμόζεται η μοναδική λύση.

Βρίσκοντας τις τιμές των μεταβλητών στο σύνορο, μπορεί να βρεθεί η τιμή σε οποιοδήποτε σημείο εντός του όγκου του χωρίου που μπορεί να απασχολεί.

Τα μεγέθη των συνοριακών συνθηκών είναι:

i) Η συνοριακή συνθήκη ταχύτητας,  $\frac{\partial p}{\partial n} = -\omega p_0 v_n$

ii) Η συνοριακή συνθήκη πίεσης,  $p$

iii) Η συνοριακή συνθήκη εμπέδησης,  $z = p/v_n$

<sup>12</sup> A.A.Becker, 1992, οπ.π. σ.2

<sup>13</sup> Συνοριακές συνθήκες: Οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες, στις παθητικές και στις ενεργές. Ενεργές συνοριακές συνθήκες είναι αυτές στις οποίες η μετατόπιση ή η ηχητική πίεση (στο σύνορο ή μέρος του συνόρου), είναι γνωστές. Παθητικές συνοριακές συνθήκες υπάρχουν όταν, για παράδειγμα, ο ήχος αντανακλάται από μια παθητική επιφάνεια (στην συγκεκριμένη περίπτωση με απορροφητική ιδιότητα) που βρίσκεται σε επαφή με το μέσο, π.χ. αέρας.

Τα προβλήματα που συναντώνται στην μέθοδο των συνοριακών στοιχείων είναι είτε εσωτερικού τύπου, είτε εξωτερικού. Σε ότι αφορά τις τιμές που δίνονται για την ταχύτητα ή την πίεση στο σύνορο, όπου ένα από τα δύο μεγέθη δίνεται ως γνωστό σε κάθε σημείο στο σύνορο, χωρίζονται τα προβλήματα σε υποπεριπτώσεις<sup>14</sup>.

Η κατηγοριοποίηση γίνεται ως εξής<sup>15</sup>:

Πρόβλημα τύπου Dirichlet  $\nabla^2 u = f$  στο  $\Omega$ ,  $u = \bar{u}$  στο  $\Gamma$

Πρόβλημα τύπου Neumann  $\nabla^2 u = f$  στο  $\Omega$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{u}_n$  στο  $\Gamma$

Πρόβλημα μικτού τύπου  $\nabla^2 u = f$  στο  $\Omega$ ,  $u = \bar{u}$  στο  $\Gamma_1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{u}_n$  στο  $\Gamma_2$ ,

όπου  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\emptyset\}$

Πρόβλημα τύπου Robin  $\nabla^2 u = f$  στο  $\Omega$ ,  $u + k(s) \frac{\partial u}{\partial n} = 0$

Στις παραπάνω περιπτώσεις του συνόρου οι συναρτήσεις είναι γνωστές. Όσο αφορά τα προβλήματα εσωτερικού τύπου η περίπτωση Dirichlet δεν χρειάζεται και μπορεί να εφαρμοστεί συνθήκη ομογένειας, έτσι ώστε  $u=0$ , προκειμένου να προσδιοριστούν οι φυσικές συχνότητες που προκύπτουν από το ακουστικό πεδίο προς εξέταση<sup>16</sup>.

Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων προκύπτει από την διακριτοποίηση ολοκληρώματος το οποίο είναι ίσο με αρχική διαφορική εξίσωση. Η διαφορική εξίσωση που εκφράζει το σύνορο μετατρέπεται σε α) ένα ολοκλήρωμα το οποίο καθορίζεται στο σύνορο του χωρίου και β) από ένα ολοκλήρωμα το οποίο συνδέει τα αποτελέσματα που παράγονται πάνω στο σύνορο με το οποιοδήποτε σημείο εντός της προ εξέταση περιοχής<sup>17</sup>.

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι γνωστό με την ονομασία *ολοκληρωματική εξίσωση συνόρου* (**BI**E, Boundary Integral Equation). Αυτός είναι και ο λόγος που η ονομασία της μεθόδου μπορεί να παρουσιαστεί και με την παραλλαγή **BIEM** (βλ. ενότητα ιστορικής αναδρομής) ή σε συντομογραφία **BIM**<sup>17</sup>.

Η μετατροπή που έχει αναφερθεί παραπάνω (από μερική διαφορική εξίσωση να προκύπτει το χρησιμοποιούμενο ολοκλήρωμα) μπορεί να ισχύσει για συγκεκριμένες τάξεις τέτοιων εξισώσεων.

<sup>14</sup> Boundary Element Acoustics. Fundamentals and computer codes, T.W. Wu, 2000, σ.13

<sup>15</sup> Συνοριακά στοιχεία στην επιστήμη του Μηχανικού. Θεωρία και εφαρμογή, Ιωάννης Κατσικαδέλης, 1999. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμεών, σ.30

<sup>16</sup> *Boundary Element Methods in Acoustics*, Carlos A. Brebbia, Jeferson Rego J. Silva, & Paul W. Partridge, 1994. Southampton: Computational Mechanics, σ.38

<sup>17</sup> *The BEM in acoustics*, Stephen Kirkup, 1998. Integrated Sound Software, σ.2

Γίνεται σαφές λοιπόν πως η παραπάνω πρόταση δηλώνει ένα μειονέκτημα της μεθόδου και από την άλλη ένα από τους βασικούς λόγους επικράτησης των μεθόδων **FEM** και **FDM**, οι οποίες μπορούν να προσαρμοσθούν, σε αντίθεση με την μέθοδο που απασχολεί αυτή την εργασία, σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων. Σε αυτό το σημείο χρήσιμο είναι να τονιστεί ότι στα προβλήματα τα οποία μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων παρουσιάζονται σημαντικά πλεονεκτήματα (ευκολία στη χρήση και επεξεργασία περιορισμένης υπολογιστικής ισχύος), ώστε να μπορούν να φέρουν την συγκεκριμένη μέθοδο στο προσκήνιο. Κατά την μέθοδο **BEM** η διακριτοποίηση γίνεται μόνο στο σύνορο. Ενώ στις άλλες δύο μεθόδους, **FEM** και **FDM**, η διακριτοποίηση γίνεται σε όλο το χωρίο. Αυτός ο περιορισμός της μεθόδου στην ανάλυση μόνο της επιφάνειας του συνόρου, σε ότι αφορά τους υπολογισμούς, δηλώνει ότι υπάρχει μείωση των διαστάσεων κατά μία, δηλαδή απλοποίηση της διαδικασίας. Ένα ακόμα πλεονέκτημα της μεθόδου το οποίο μπορεί να θεωρηθεί και ως ένδειξη περίπτωσης χρήσης αυτής είναι ο τρόπος λύσης των προβλημάτων των οποίων ο χώρος αποτελεσμάτων βρίσκεται εκτός του συνόρου, κάτι που συναντάται σε προβλήματα ακουστικής εκπομπής και ανάκλασης του ήχου, όπου η έκταση της περιοχής προς εξέταση θεωρείται άπειρη<sup>18</sup>.

Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων επιτρέπει την μείωση των βαθμών ελευθερίας που χρειάζονται για την περιγραφή του χωρίου. Μια δυνατότητα η οποία μεταφράζεται σε μείωση του πλήθους δεδομένων και κατ' επέκταση σε μικρότερους χρόνους υπολογισμού<sup>19</sup>.

Η μέθοδος αυτή αφορά το σύνορο ενός χωρίου και για το λόγο αυτό επιτρέπει να υπάρχει άμεσο αποτέλεσμα σε αντίθεση, για παράδειγμα, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

### **1.3 Τρόποι υπολογισμού της μεθόδου συνοριακών στοιχείων**

Οι δυο πιο γνωστοί τρόποι για να παραχθούν οι απαιτούμενες εξισώσεις είναι:

#### *A. Άμεση μέθοδος υπολογισμού.*

Κατά την άμεση μέθοδο το ολοκλήρωμα διαμορφώνεται σε σχέση με τους όρους του συνόρου που είναι άγνωστοι ( $n$ ,  $p$ ,  $z$ ), με πιθανά μεγέθη ή γενικές μετατοπίσεις, καθώς και σε σχέση με τα παράγωγα τους (μεγέθη ρευστότητας ή τάσεων ασκούμενων δυνάμεων)<sup>20</sup>.

Ως σημείο εκκίνησης για να δημιουργηθεί το κύριο ολοκλήρωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των συντελεστών βάρους (μέθοδος

<sup>18</sup> Stephen Kirkup, 1998, σπ.π. σελ.2-3

<sup>19</sup> Carlos A. Brebbia, Jeferson Rego J. Silva, & Paul W. Partridge, 1994, σπ.π. σ.14

<sup>20</sup> An introduction to boundary elements, tutorial 1.Rashed, Youssef F. (2001).

Boundary Element Communication, 12(1), σ. 50

Galerkin) ή να παραχθεί το ολοκλήρωμα βάση του θεωρήματος αμοιβαιότητας του Betti. Μπορεί, επίσης, να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος σημειακής συγκριτικής παράθεσης (point collocation) για τον ίδιο σκοπό<sup>21</sup>.

Οι εξισώσεις για τα εσωτερικά σημεία υπολογίζονται με την χρήση μιας ολοκληρωματικής εξίσωσης η οποία βασίζεται στα παράγωγα του κύριου ολοκληρώματος. Λόγω των διαφορικών εξισώσεων, η τάξη της ιδιομορφίας της λύσης ( το λεγόμενο singularity) στο αρχικό ολοκλήρωμα είναι υψηλή (κατά συνέπεια προκύπτει υπερ-ιδιομορφία, hyper-singularity). Πρέπει να ειπωθεί ότι αυτού του είδους η ανωμαλία δεν παρουσιάζεται λόγω του ότι μια τέτοια εξίσωση χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό εσωτερικών σημείων. Επίσης στην περίπτωση που τα σημεία βρίσκονται κοντά στο σύνορο μπορεί να υπάρξει μια σχετική ανακρίβεια στα αποτελέσματα. Εάν το ολοκλήρωμα χρησιμοποιηθεί για το σύνορο τότε σε μερικούς από τους όρους πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η λεγόμενη επισήμανση “Hadamard, μέθοδος πεπερασμένων ολοκληρωμάτων” ή η προσθήκη των λεγόμενων chief points. Παρούσης της επισήμανσης αυτής το ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε υπερ-ιδιομορφή ολοκληρωτική συνοριακή εξίσωση<sup>21</sup>.

Ο τύπος αυτός είναι πολύ χρήσιμος στη περίπτωση που ο μηχανικός αντιμετωπίζει προβλήματα τα οποία αφορούν ρωγμές. Επίσης οι όροι αυτοί θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για ακριβείς υπολογισμούς σε συντελεστές ( όπως  $\nu$ ,  $\rho$ ) συνεχούς μεταβολής ή σημειακής άσκησης δύναμης. Άλλη μια περίπτωση χρήσης θα ήταν σε προβλήματα με πολλαπλά επίπεδα όπου θα μπορούσαν να δημιουργήσουν νέες εξισώσεις για γωνίες που προκύπτουν<sup>21</sup>.

Για λόγους κατανόησης της εξέλιξης της μεθόδου αναφέρουμε πως η πρώτη δημοσίευση εργασίας με χρήση της άμεσης μεθόδου για μετατοπίσεις και δυνάμεις, με ολοκληρώματα τα οποία συνδέονταν με το σύνορο έγινε από τον Rizzo το 1967<sup>22</sup>.

Σε ότι αφορά καθεαυτό την μέθοδο το κύριο πλεονέκτημα της είναι ότι η διαδικασία της διακριτοποίησης περιορίζεται στο σύνορο του χωρίου δίχως να περιλαμβάνει επιπλέον δεδομένα για αυτό. Είναι, δηλαδή, δυνατό χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους μετασχηματισμούς ολοκληρωμάτων (παράδειγμα: τα θεωρήματα Green) να μειώσουμε τις διαστάσεις κατά μία (κάτι το οποίο συνεπάγεται την μείωση της τάξης της εξίσωσης) και ο όγκος ενός αντικειμένου να μετατρέπεται στην επιφάνεια του συνόρου<sup>23</sup>. Ιδιαίτερη προτίμηση στη χρήση αυτής προκύπτει σε

---

<sup>21</sup> Youssef F. Rashed, 2001, οπ.π. σ.50

<sup>22</sup> A.A.Becker, 1992, οπ.π. σ.7

<sup>23</sup> A.A.Becker, 1992, οπ.π. σ.22-23

προβλήματα τα οποία το χωρίο εκτείνεται στην εξωτερική επιφάνεια του συνόρου και θεωρείται ότι φτάνει στο άπειρο (προβλήματα εσωτερικού τύπου, όπως μοντέλα λειτουργίας της ακουστικής διάχυσης και αντανάκλασης του ήχου)<sup>24</sup>. Η εξίσωση η οποία περιγράφει το χωρίο που εκτείνεται στο άπειρο περιορίζεται σε μια εξίσωση στο πεπερασμένο σύνορο<sup>25</sup>.

#### *B. Έμμεση μέθοδος υπολογισμού.*

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται έχουν φανταστικά μεγέθη. Οι εξισώσεις τους δεν έχουν κάποια φυσική υπόσταση, μπορούν όμως να λυθούν ως προς το ολοκλήρωμα προκειμένου να αποδώσουν μετατοπίσεις και αλλαγές πίεσης. Θεωρείται λοιπόν έμμεσος τρόπος διότι ακριβώς δεν χρησιμοποιεί φυσικά μεγέθη μετατόπισης και πίεσης για το επιβλεπόμενο χωρίο<sup>26</sup>. Η λογική στοιχειοθέτησης των παραγόντων της πίεσης ή της σωματιδιακής ταχύτητας στο σύνορο δημιουργείται με την υπέρθεση του συνεχώς μεταβαλλόμενου συντελεστή έντασης τάσης (traction). Σε περίπτωση που αυτή η λογική χρησιμοποιηθεί για την περίπτωση ασυνεχών μετατοπίσεων, το αποτέλεσμα που θα δώσει θα περιέχει ολοκληρώματα υπερ-ιδιόμορφου τύπου<sup>27</sup>.

Τέλος ο έμμεσος τρόπος λύσης της μεθόδου της ασυνεχούς μετατόπισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μοντελοποιηθούν ανοίγματα που έχουν χαρακτηριστικά ρωγμής καθώς μπορεί να θεωρηθεί ως μια αντίστοιχη περίπτωση με αυτή των υπερ-ιδιόμορφων άμεσου τύπου ολοκληρωμάτων<sup>27</sup>.

### **1.4 Στάδια ανάπτυξης της άμεσης μεθόδου υπολογισμού των συνοριακών στοιχείων**

#### **1.4.1 Η εξίσωση Helmholtz**

Στην περίπτωση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων για την ακουστική η μερική διαφορική εξίσωση που χρησιμοποιείται προκειμένου να προκύψει το κατάλληλο συνοριακό ολοκλήρωμα είναι η εξίσωση Helmholtz :

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \text{ για ομογενές υλικό}$$

Οι τιμές της πίεση αφορούν μιγαδικούς αριθμούς μιας και η ηχητική πίεση δεν έχει μόνο μέγεθος αλλά και γωνία φάσης<sup>28</sup>.

---

<sup>24</sup> Youssef F. Rashed, 2001, σπ.π. σ.50

<sup>25</sup> The Boundary Element Method Vol.1, L.C.Wrobel, M.H.Alibadi, 2002. John Wiley & Sons,Ltd, σ.163-165

<sup>26</sup> A.A.Becker, 1992,σπ.π. σ.22-23

<sup>27</sup> Youssef F. Rashed, 2001, σπ.π. σ.51

<sup>28</sup> T.W. Wu, 2000, σπ.π. σ.10  
Wit Press, σ.10

### 1.4.2 Η θεμελιώδης λύση

“Από φυσικής άποψης η θεμελιώδης λύση εκφράζει τις μετατοπίσεις που παράγονται σ’ένα απείρως εκτεινόμενο επίπεδο σώμα, όταν αυτό φορτίζεται με μια συγκεκριμένη δύναμη”<sup>29</sup>.

Προκειμένου να προκύψει το συνοριακό ολοκλήρωμα πρέπει αρχικά να βρεθεί η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz. Έτσι η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$\nabla^2\psi + \kappa^2\psi = -\delta(Q - P)$$

όπου  $-\delta(Q - P)$  είναι η συνάρτηση δέλτα (ή Dirac)<sup>30</sup> με σημείο Q βρισκόμενο στο χώρο (εντός του ακουστικού πεδίου) και σημειακή πηγή στο P. Το  $\psi$  αποτελεί την θεμελιώδη λύση στο σημείο Q<sup>31</sup>.

Με αλλαγή των συντεταγμένων, από καρτεσιανό σύστημα σε κυκλικό  $(r, \theta, \phi)$ , στο οποίο τίθεται ως κέντρο το σημείο P προκύπτει η συμμετρική θεμελιώδης λύση  $\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \kappa^2\psi = 0$ , η οποία ισχύει για οπουδήποτε εκτός του σημείου P. Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι  $\psi = A\frac{e^{-i\kappa r}}{r} + B\frac{e^{i\kappa r}}{r}$ . Τα A και B είναι άγνωστοι συντελεστές. Αλλάζοντας το  $e^{-i\kappa r}$  σε  $e^{i\omega t}$  με  $i = \sqrt{-1}$  ο πρώτος όρος της γενικής λύσης της εξίσωσης αφορά κύμα εκτεινόμενο από το σημείο P, ενώ ο δεύτερος όρος αφορά κύμα το οποίο κατευθύνεται προς το P. Ο συντελεστής A μπορεί να προσδιοριστεί παίρνοντας το ολοκλήρωμα της εξίσωσης του Helmholtz για την θεμελιώδη λύση  $\nabla^2\psi + \kappa^2\psi = -\delta(Q - P)$ , για μικρό σφαιρικό όγκο  $\Omega_\varepsilon$  ο οποίος εμπεριέχει το P. Το αποτέλεσμα είναι ο τύπος  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \cdot \nabla\psi + \kappa^2\psi)dV = -1$ , (ο όγκος που αφορά την συνάρτηση Dirac είναι 1)<sup>31</sup>.

Εφόσον το  $dV$  γίνεται μηδέν ταχύτερα απ’ ότι το  $\psi$  τείνει στο άπειρο όταν γίνεται υπολογισμός του ορίου του  $\varepsilon \rightarrow 0$  τότε ο δεύτερος όρος του ολοκληρώματος αφαιρείται από την εξίσωση. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss-Ostrogradsky (divergence theorem), στον όρο του ολοκληρώματος που παραμένει, για να γίνει η μετατροπή του σε ολοκλήρωμα επιφάνειας, έχουμε:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial n} dS = -1$$

όπου  $\partial\Omega_\varepsilon$  είναι η συνοριακή επιφάνεια του μικρού σφαιρικού όγκου  $\Omega_\varepsilon$  και  $n$  είναι το μοναδιαίο, προς τα έξω κατευθυνόμενο, διάστημα στο  $\partial\Omega_\varepsilon$ <sup>31</sup>.

Διαφοροποιώντας το  $\psi$  στην κατεύθυνση του  $r$  και λύνοντας την εξίσωση στην επιφάνεια βρίσκουμε το  $A = \frac{1}{4} \cdot \pi$ . Καταλήγει η θεμελιώδης λύση<sup>31</sup> σε ένα τρισδιάστατο ελεύθερο χώρο να είναι :

<sup>29</sup> Ιωάννης Κατσικαδέλης, 1999, σπ.π. σελ.228

<sup>30</sup> Συνάρτηση δέλτα: Παρουσιάστηκε από τον Paul Dirac και σχετίζεται με περιπτώσεις συγκέντρωσης φορτίων. Σε οποιοδήποτε σημείο εκτός του  $x$  η συνάρτηση ισούται με μηδέν. Για  $x=0$  η ολοκλήρωση της ισούται με 1 (Boundary Element Methods in Acoustics, Carlos A. Brebbia, Jefferson R. Silva, Paul W. Partridge, 1994. Computational Mechanics, σ.17

<sup>31</sup> T.W. Wu, 2000, σπ.π. σ.11

$$\psi = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

### 1.4.3 Συνοριακές συνθήκες

Ο γενικός τύπος των συνοριακών συνθηκών είναι  $\alpha \cdot p + \beta v_n = \gamma$  (i), προκειμένου να δημιουργηθούν τα συνοριακά ολοκληρώματα χρησιμοποιείται η δεύτερη ταυτότητα Green, η οποία και εφαρμόζεται στο φυσικό μέγεθος της πίεσης  $p$  και στη θεμελιώδη λύση  $\psi$ <sup>31</sup>.

Σε συνέχεια του διαχωρισμού (ενότητα 1.2.3) των προβλημάτων που προκύπτουν στην ΜΣΣ σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με την θέση του ακουστικού πεδίου σχετικά με το χωρίο, μπορεί να ειπωθεί ότι τα προβλήματα εσωτερικού τύπου εξετάζουν λύσεις για σημεία στο ρευστό που βρίσκονται εντός του χωρίου. Ενώ για τα προβλήματα εξωτερικού τύπου ότι εξετάζουν λύσεις για σημεία τα οποία περιβάλλουν το χωρίο.

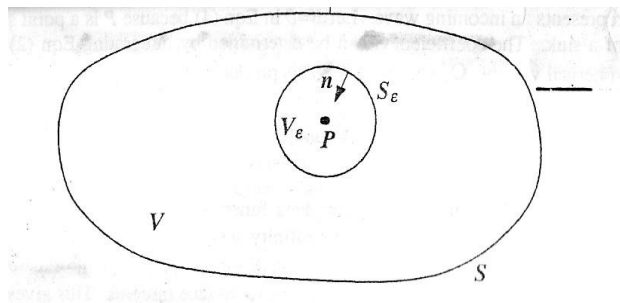
### 1.4.4 Προβλήματα εσωτερικού τύπου

Στην περίπτωση αυτή η εύρεση λύσης αφορά ακουστικό πεδίο το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό χωρίου έχοντας τοποθετημένο και το ιδιάζων σημείο  $P$  εντός αυτού. Το σημείο  $P$  αντιστοιχεί σε σημειακή πηγή και σχετίζεται με την θεμελιώδη λύση.

Από την στιγμή που η θεμελιώδης λύση  $\psi$  παρουσιάζει ιδιομορφία στο  $P$  δημιουργείται όγκος σφαιρικής μορφής μικρού μεγέθους με κέντρο του το προαναφερόμενο σημείο. Ο όγκος αυτός ( $V_\epsilon$ ), αφαιρείται από τον συνολικό όγκο όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα 1.2. Το αποτέλεσμα είναι να δημιουργείται η εξίσωση:

$$\int_{V-V_\epsilon} (\psi \nabla^2 p - p \nabla^2 \psi) dV = \int_{S+S_\epsilon} \left( \psi \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (1)$$

στην οποία  $\mathbf{n}$  είναι το μοναδιαίο διάστημα με κατεύθυνση εκτός του ακουστικού πεδίου και  $S_\epsilon$  είναι η συνοριακή επιφάνεια του όγκου  $V_\epsilon$ . Το σημείο  $P$  το οποίο



Σχήμα 1.2 Πρόβλημα εσωτερικού τύπου με το σημείο  $P$  εντός επιφάνειας  $S_\epsilon$



παρουσιάζει ιδιομορφία αφαιρείται από τον συνολικό όγκο στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Για τον λόγο αυτό το  $\nabla^2 p$  γίνεται ίσο με  $-\kappa^2 p$  και αντίστοιχα για την θεμελιώδη λύση,  $\nabla^2 \psi = -\kappa^2 \psi$ . Με τον τρόπο αυτό δικαιολογείται και το ότι το αριστερό σκέλος της εξίσωσης γίνεται ίσο με το μηδέν, μιας και οι δυο όροι ακυρώνουν ο ένας τον άλλον. Το δεξί σκέλος είναι ένα συνοριακό ολοκλήρωμα το οποίο αποτελείται από δυο συνοριακές επιφάνειες, μια στην επιφάνεια της κοιλότητας και άλλη μια να περιβάλλει το σημείο P<sup>32</sup>.

Για την δεύτερη επιφάνεια ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \psi \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0 \quad (2),$$

στην οποία καθότι το  $\psi$  είναι της τάξεως του μηδενός ( $1/r$ ) και το  $dS$  είναι της τάξης του μηδενός ( $r^2$ ) καθώς το  $r$  τείνει στο μηδέν. Συνεχίζοντας την ολοκλήρωση για τον δεύτερο όρο της επιφάνειας  $S_\varepsilon$ , για σφαιρικές συντεταγμένες και θέτωντας το όριο καθώς το  $r$  τείνει στο μηδέν, προκύπτει:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} p \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = p(P) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = p(P) \quad (3)$$

Το μοναδιαίο διάστημα δείχνει προς τη πηγή P με αποτέλεσμα η κατεύθυνση του  $n$  είναι προς την αρνητική κατεύθυνση του  $r$ . Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις(2) και (3) στην (1) παίρνουμε την εξίσωση:

$$p(P) = \int_S \left( \psi \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS, \text{ για } P \text{ εντός του ακουστικού πεδίου}^{32} \quad (4)$$

Με βάση τον τύπο που συνδέει το μοναδιαίο παράγωγο της ηχητικής πίεσης με την μοναδιαία σωματιδιακή ταχύτητα:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -i\rho\omega v_n$$

η εξίσωση (4) γίνεται:

$$p(P) = - \int_S \left( i\rho\omega v_n \psi + p \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS, \text{ για } P \text{ εντός του ακουστικού πεδίου}^{32} \quad (5)$$

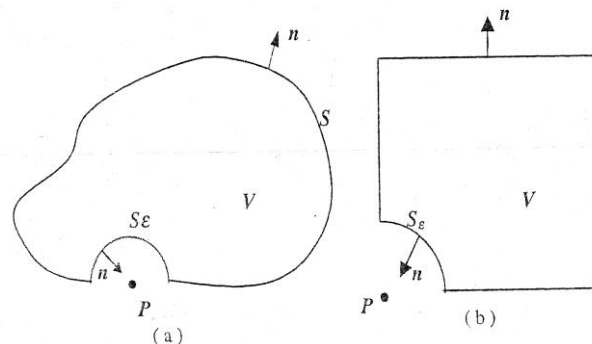
Η εξίσωση (5) συνδέει τη πίεση της πηγής P με το ολοκλήρωμα, με αποτέλεσμα η ηχητική πίεση για οποιοδήποτε σημείο P να μπορεί να βρεθεί με την λύση του ολοκληρώματος. Έκφραση η οποία αποτελεί ουσιαστικά την βάση ανάπτυξης της μεθόδου. Αν και το σημείο P, όπως έχει ήδη αναφερθεί, αποτελεί ιδιαίτων σημείο, αυτό συμβαίνει μόνο στην περίπτωση που στο στοιχείο το οποίο

<sup>32</sup> T.W. Wu, 2000, σπ.π. σ.13

περιγράφει το σύνορο συμπίπτει η σημειακή πηγή. Από την στιγμή που το σημείο P δεν βρίσκεται πάνω στο σύνορο η εξίσωση (5) δεν παρουσιάζει ιδιαίζουσα συμπεριφορά<sup>33</sup>.

Για να γίνει εφικτή η χρήση της εξίσωσης (5), μιας και τα προβλήματα που αφορούν την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων δίνουν τιμές ή για την σωματιδιακή ταχύτητα ή για την ηχητική πίεση στην εξίσωση των συνοριακών συνθηκών, γίνεται μεταφορά του σημείου P στο σύνορο. Η μέθοδος ονομάζεται μέθοδος σημειακής συγκριτικής παράθεσης<sup>33</sup>.

Όταν η σημειακή πηγή (σημείο P) βρίσκεται στο σύνορο τότε το περιβάλλει μικρής έκτασης όγκος  $V_\epsilon$ , ο οποίος αντιστοιχεί σε συνοριακή επιφάνεια. Η επιφάνεια αυτή αφαιρείται από το ακουστικό πεδίο<sup>34</sup>.



Σχήμα 1.3 Πρόβλημα εσωτερικού τύπου με σημειακή πηγή στο σύνορο

Η κύρια εξίσωση (δεύτερη ταυτότητα Green) παραμένει ως έχει, με το αριστερό της άκρο όμως να αντικαθίσταται από το μηδέν, καθώς εντός του όγκου  $(V-V_\epsilon)$ ,  $\nabla^2\psi = \nabla^2 p = 0$  σε όλα τα σημεία.

$$0 = \int_{S+S_\epsilon} (\psi \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS \quad (6)$$

Για την οποία εξίσωση το  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \psi \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0$  (7), με  $\frac{\partial p}{\partial n}$  να είναι το παράγωγο της πίεσης και το μηδέν να προκύπτει λόγω του ότι η θεμελιώδης λύση είναι της τάξης του  $O(1/r)$  και το  $dS$  είναι επίσης στην ίδια τάξη ( $r^2$ ) καθώς το  $r$  γίνεται μηδέν. Κατά την μέθοδο σημειακής συγκριτικής παράθεσης το σημείο P μεταφέρεται στο σύνορο και το  $p(P)$  γίνεται  $\frac{1}{2}$ .

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} p \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = p(P) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} p \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \frac{1}{2} p(P), \text{ για } P \text{ σε ομαλό σύνορο} \quad (8)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις εξισώσεις (7) και (8) και έχοντας ως βάση την εξίσωση (6) προκύπτει:

<sup>33</sup> T.W. Wu, 2000, σπ.π. σ.13

<sup>34</sup> T.W. Wu, 2000, σπ.π. σ.14

$$\frac{1}{2}p(P) = - \int_S (i\rho\omega v_n \psi + p \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS, \text{ για } P \text{ σε ομαλό σύνορο}^{35} \quad (9)$$

### Ολοκλήρωμα Helmholtz

Οι παραπάνω υπολογισμοί δίνουν την θέση τους στο συνοριακό ολοκλήρωμα (BIE), σε μια δηλαδή μορφή ολοκληρώματος που σε αυτή ενυπάρχουν ως εκφράσεις της οι εξισώσεις (5) και (9). Ο γενικός τύπος έκφρασης του συνοριακού ολοκληρώματος για εσωτερικά προβλήματα είναι<sup>35</sup>,

$$C^0(P)p(P) = - \int_S (i\rho\omega v_n \psi + p \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS$$

Σημείο P	Εντός ακουστικής Περιοχής	Τοποθετημένο στο σύνορο	Εκτός ακουστικής περιοχής
$C^0(P)$	1	1/2	0

Πίνακας 3

#### 1.4.5 Προβλήματα εξωτερικού τύπου

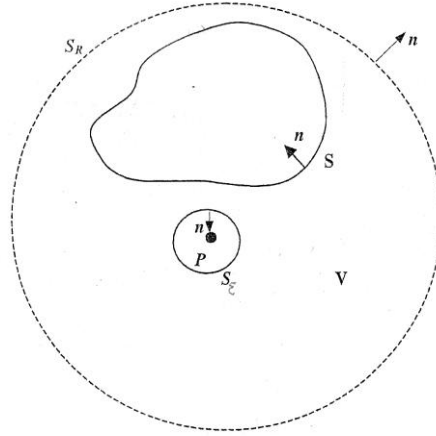
Το είδος των προβλημάτων που συγκαταλέγονται σε αυτή την κατηγορία αφορά ρευστό του οποίου το πεδίο έχει άπειρη έκταση. Το μοναδιαίο διάνυσμα στην περίπτωση αυτή δείχνει μακριά από το ακουστικό πεδίο, δηλαδή προς το εσωτερικό του χωρίου<sup>36</sup>.

Η διαδικασία που ακολουθείται για να προκύψουν τα συνοριακά ολοκληρώματα αφορά της εφαρμογή της δεύτερης ταυτότητας του Green στην ακουστική πίεση και στην θεμελιώδη λύση. Οι συνοριακές συνθήκες, όπως και στα προβλήματα εσωτερικού τύπου, εκφράζονται από τον τύπο  $\alpha \cdot p + \beta v_n = \gamma$ <sup>36</sup>.

Στο σχήμα 1.4 η πηγή P παρουσιάζεται εντός του ακουστικού πεδίου (V), το περιβάλλει επιφάνεια με σύνορο το  $S_e$ . Η επιφάνεια αυτή αφαιρείται από το ακουστικό πεδίο<sup>36</sup>.

<sup>35</sup> T.W. Wu, 2000, οπ.π. σ.14

<sup>36</sup> T.W. Wu, 2000, οπ.π. σ.15



Σχήμα 1.4 Πρόβλημα εξωτερικού τύπου με το  $V_\epsilon$  εκτός του συνολικού όγκου

Για να αντιμετωπιστεί το άπειρο μήκος του ακουστικού πεδίου, ορίζεται σύνορο  $S_R$  (ο δείκτης δηλώνει την απόσταση που έχει το σύνορο από το κέντρο του κύκλου που σχηματίζεται). Η συνθήκη Sommerfeld για εκπομπή κυμάτων πίεσης μηδενίζει το ολοκλήρωμα του  $S_R$ <sup>36</sup>.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η δεύτερη ταυτότητα του Green γίνεται

$$\int_{V-V_\epsilon} (\psi \nabla^2 p - p \nabla^2 \psi) dV = \int_{S+S_\epsilon+S_R} (\psi \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS \quad (10)$$

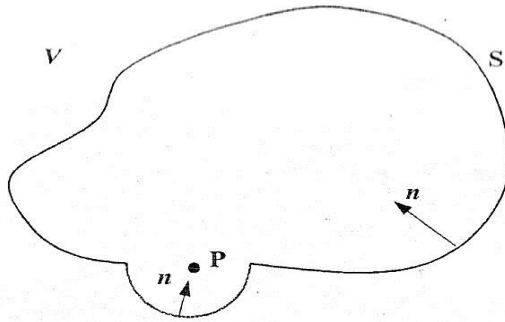
Εφόσον και το σημείο  $P$  έχει ήδη αφαιρεθεί από το ακουστικό πεδίο, η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (10) θεωρείται ίση με το μηδέν. Σε αντιστοιχία με τον τρόπο υπολογισμού των ολοκληρωμάτων για εσωτερικά προβλήματα προκύπτουν οι ακόλουθες συναρτήσεις<sup>36</sup>,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \psi \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0 \quad (11),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} p \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = p(P) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} p \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \frac{1}{2} p(P) \quad (12)$$

#### Μεταφορά της πηγής στο σύνορο

Για την περίπτωση που η πηγή  $P$  είναι τοποθετημένο στο σύνορο και δεδομένης της συνθήκης εκπομπής του Sommerfeld, όπου ισχύει  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} (\psi \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS = 0$



Σχήμα 1.5 Πρόβλημα με το P τοποθετημένο στο σύνορο

καθώς και των εξισώσεων (11) και (12), η εξίσωση (10) γίνεται

$$C(P)p(P) = - \int_S (i\rho\omega v_n \psi + p \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS$$

Όπου το  $C(P)$  ισούται με <sup>37</sup>

$$C(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial \psi_L}{\partial n} dS \quad (13)$$

Εκτός του συνόρου  $S_\epsilon$  που σχηματίζεται στο σύνορο του χωρίου, λαμβάνεται υπόψιν και το ημικύκλιο  $S'_\epsilon$  του οποίου η νοητή γραμμή συμπληρώνει και δημιουργεί ως συμπλήρωμα του  $S_\epsilon$  την κυκλική επιφάνεια  $S$ . Το ολοκλήρωμα της διαμορφώνεται ως εξής:

$$\int_{S_\epsilon + S'_\epsilon} \frac{\partial \psi_L}{\partial n} dS = 1, \text{ με σφαιρικές συντεταγμένες}$$

Το ολοκλήρωμα σε ότι αφορά την συμπληρωματική επιφάνεια  $S'_\epsilon$  είναι ίσο με το  $C^0(P)$  σύμφωνα με την εξίσωση (13). Δηλαδή προκύπτει

$$C(P) = 1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S'_\epsilon} \frac{\partial \psi_L}{\partial n} dS = 1 - C^0(P) \quad (14)$$

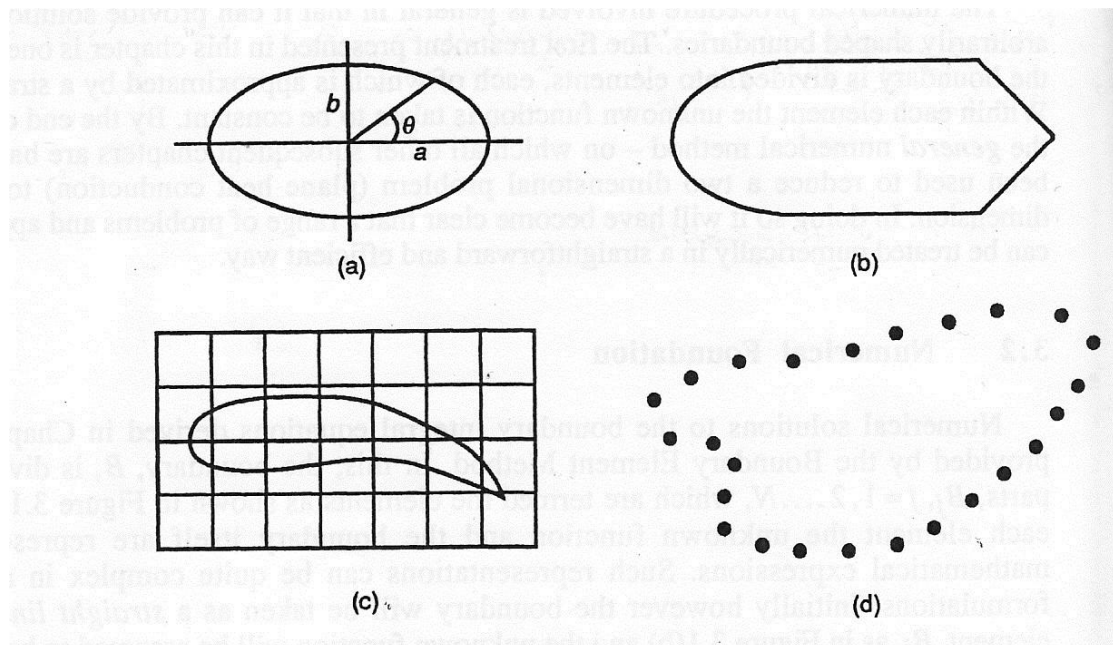
Γνωρίζοντας ότι  $C^0(P) = - \int_S \frac{\partial \psi_L}{\partial n} dS$ , γίνεται η αντικατάσταση στην εξίσωση (14) και προκύπτει  $C(P) = 1 - \int_S \frac{\partial \psi_L}{\partial n} dS$ . Οι τιμές που παίρνει το  $C(P)$  εμφανίζονται στον πίνακα 3 <sup>38</sup>.

<sup>37</sup> T.W. Wu, 2000, οπ.π. σ.18

<sup>38</sup> T.W. Wu, 2000, οπ.π. σ.19

## 1.5 Διακριτοποίηση στη μέθοδο συνοριακών στοιχείων

### 1.5.1 Διακριτοποίηση του συνόρου



Σχήμα 1.6 Διάφοροι τρόποι διακριτοποίησης του συνόρου

Καθότι το σύνορο αποτελεί το σημείο στο οποίο επικεντρώνονται οι υπολογισμοί της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων, μια ξεχωριστή επισκόπηση δίνεται σε αυτή την ενότητα για το σύνορο και το πώς σχεδιάζεται. Θέτωντας υπόψη την πολυπλοκότητα που μπορεί να έχει ένα χωρίο, παράδειγμα: χωρίο με πολλαπλά επίπεδα, πρέπει να ξεκαθαριστεί ότι ένας αποκλειστικός τρόπος παραμετροποίησης μπορεί να μην είναι θεμιτός ή και εφικτός. Η παραμετροποίηση εξαρτάται από τον τρόπο που γίνεται ο προσδιορισμός του συνόρου. Το σχήμα 1.6 δείχνει μερικά παραδείγματα παραμετροποίησης. Ο τρόπος προσδιορισμού του συνόρου είναι κοινός για όλα τα παραδείγματα. Το σύνορο προσδιορίζεται μέσω σημείων στα οποία αντιστοιχούν οι τιμές των φυσικών μεγεθών. Στα παραδείγματα που παρουσιάζονται στο σχήμα 1 οι τιμές στα σημεία υπολογίζονται κατά περίπτωση<sup>39</sup>.

<sup>39</sup> *The boundary element method*, G.M. Gladwell, 1994. Netherlands: Kluwer Publications, σ.62

Στο πρώτο παράδειγμα ο υπολογισμός γίνεται με την παραμετροποίηση συναρτήσεως έλλειψης. Στο δεύτερο παράδειγμα, μέσω της γεωμετρίας, γίνεται ο υπολογισμός. Η χρήση στοιχείων της γεωμετρίας αφορά διάφορα τμήματα του συνόρου. Το τρίτο παράδειγμα δίνει την δυνατότητα μετρήσεων μέσω του μηχανικού σχεδίου του χωρίου για να προκύψουν οι τιμές των φυσικών μεγεθών στα σημεία. Τέλος, σε ότι αφορά το τέταρτο παράδειγμα, χρησιμοποιούνται τα σημεία τα οποία προσδιορίζουν το σύνορο στην απεικόνιση του<sup>40</sup>.

Αυτό το οποίο προκύπτει είναι ότι το σύνορο προσδιορίζεται βάση του τέταρτου παραδείγματος, με τα επιπλέον στοιχεία για το σχήμα του συνόρου μεταξύ των κομβικών σημείων να ολοκληρώνουν τον προσδιορισμό του συνόρου. Η διαδικασία αυτή μπορεί να περιγραφεί ως προσέγγιση ή απεικόνιση του πραγματικού συνόρου. Απλούστερη μορφή σύνδεσης των κομβικών σημείων στη διακριτοποίηση του συνόρου θεωρείται η γραμμική, κατά την οποία η σύνδεση γίνεται με ευθείες<sup>40</sup>.

### 1.5.2 Στοιχεία και κομβικά σημεία

Μετά τον σχηματισμό των συνοριακών ολοκληρωμάτων (Boundary Integral Equation) δημιουργείται ένα αριθμητικό πλάνο λύσης του συστήματος των εξισώσεων **BIE**. Για να προκύψει κάτι τέτοιο το σύνορο που παρουσιάζεται στο πρόβλημα διακριτοποιείται σε στοιχεία, στα οποία οι συναρτήσεις πολυωνυμικής παρεμβολής των φυσικών μεγεθών θεωρούνται πως μεταβάλλονται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα (συνεχή, γραμμικά, τετραγωνικά). Των πολυωνύμων αυτών τα στοιχεία θεωρούνται εικονικά (ενώ φυσικά θεωρούνται αυτά της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων)<sup>41</sup>.

Εντός κάθε στοιχείου βρίσκονται τα κομβικά σημεία στα οποία κατά προσέγγιση προσδιορίζονται οι τιμές των φυσικών μεγεθών. Η μέθοδος ονομάζεται μέθοδος σημειακής συγκριτικής παράθεσης. Στην περίπτωση που το σύνολο του συνόρου χρησιμοποιείται η μέθοδος ονομάζεται συνεχούς συγκριτικής παράθεσης. Είναι επίσης γνωστή ως μέθοδος Galerkin. Η μέθοδος συνεχούς συγκριτικής παράθεσης εν συγκρίσει με την μέθοδο σημειακής συγκριτικής παράθεσης παρουσιάζει μικρότερο σφάλμα<sup>41</sup>.

Σημειώνεται πως στην περίπτωση της άμεσης μεθόδου συνοριακών στοιχείων και σε ότι αφορά ανώμαλη συμπεριφορά η οποία προκύπτει όταν τα σημεία της μεθόδου συγκριτικής παράθεσης συμπίπτουν με το σύνορο, γίνεται μεταφορά των σημείων αυτών παρακείμενα του συνόρου. Τόσο κατά την συγκριτική παράθεση σημείου όσο και κατά την συνεχή συγκριτική παράθεση χρησιμοποιείται αυτός ο τρόπος προκειμένου να αντιμετωπίζεται το θέμα της ιδιομορφίας των συναρτήσεων υπολογισμού<sup>41</sup>.

<sup>40</sup> G.M. Gladwell, 1994, οπ.π. σ.63

<sup>41</sup>Youssef F. Rashed, 2001. Tutorial 1, οπ.π. σ. 51

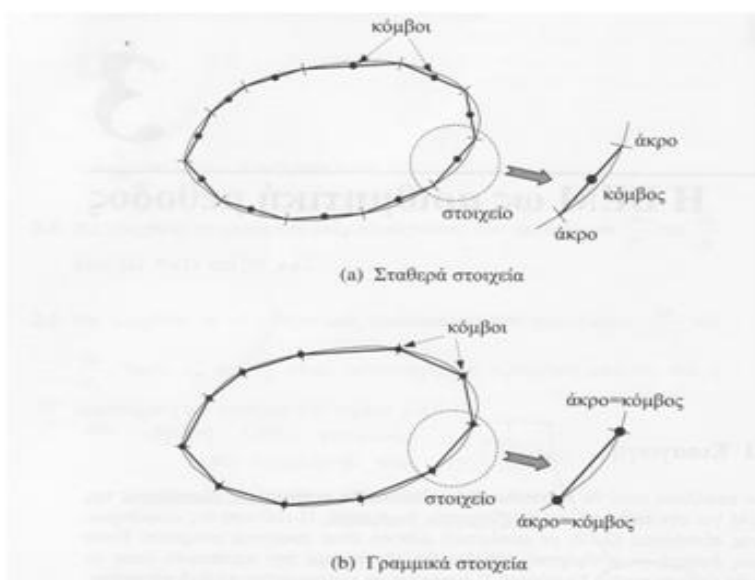
“Το σύνορο  $\Gamma$  διαιρείται σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, όχι κατ’ ανάγκη ίσων τα οποία τα ονομάζουμε συνοριακά στοιχεία”<sup>42</sup>. Σε κάθε στοιχείο γίνονται δύο προσεγγίσεις. Ως πρώτη ορίζεται η γεωμετρία του συνόρου στο συγκεκριμένο σημείο ενώ ως δεύτερη η κατανομή της άγνωστης συνοριακής ποσότητας στο στοιχείο<sup>42</sup>.

Τα στοιχεία διακρίνονται, ανάλογα με τον αριθμό των κόμβων που χρησιμοποιούνται σε σταθερά, γραμμικά και παραβολικά ή τετραγωνικά στοιχεία. Το κάθε στοιχείο διακρίνεται χωρικά για τα άκρα του (σημεία ορισμού του) και τους κόμβους, σημεία στα οποία ορίζονται τα συνοριακά μεγέθη<sup>42</sup>.

Σταθερά στοιχεία : Το είδος των στοιχείων αυτών χαρακτηρίζεται από την χρήση ενός κομβικού σημείου και του τόξου του οποίου συνδέει τα άκρα του συνόρου. Η τιμή της συνοριακής ποσότητας θεωρείται σταθερή και ίση με αυτή του κομβικού σημείου, το οποίο σε ότι αφορά τα σταθερά στοιχεία βρίσκεται στο μέσο του στοιχείου<sup>42</sup>.

Γραμμικά στοιχεία : Στην περίπτωση πάλι των γραμμικών στοιχείων υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που εκτείνεται από το ένα άκρο στο άλλο ενώ τα κομβικά σημεία είναι δύο και τοποθετούνται στα άκρα του. Η τιμή της συνοριακής ποσότητας καθορίζεται σε αναλογία με την θέση της στη γραμμή του τόξου, δηλαδή έχουμε γραμμική κατανομή της ποσότητας. Ο προσδιορισμός της τιμής αυτής συνδέεται με τις τιμές των κομβικών σημείων<sup>42</sup>. Για παράδειγμα ο υπολογισμός της τιμής στο μέσο του τόξου γίνεται μέσω του τύπου  $x=(x_1 +x_2)/2$ .

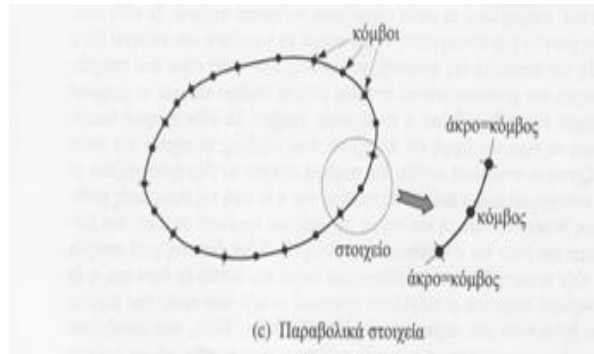
Παραβολικά στοιχεία : Σε ότι αφορά τα στοιχεία αυτού του τύπου, εμφανίζεται η χρήση τριών κομβικών σημείων, δύο στα άκρα και ένα στο μέσο. “Στην περίπτωση αυτή η κατανομή της συνοριακής ποσότητας που ακολουθείται είναι παραβολική και ορίζεται από τις τιμές των τριών κόμβων”<sup>42</sup>.



<sup>42</sup> Ιωάννης Κατσικαδέλης, 1999, σπ.π. σ.53

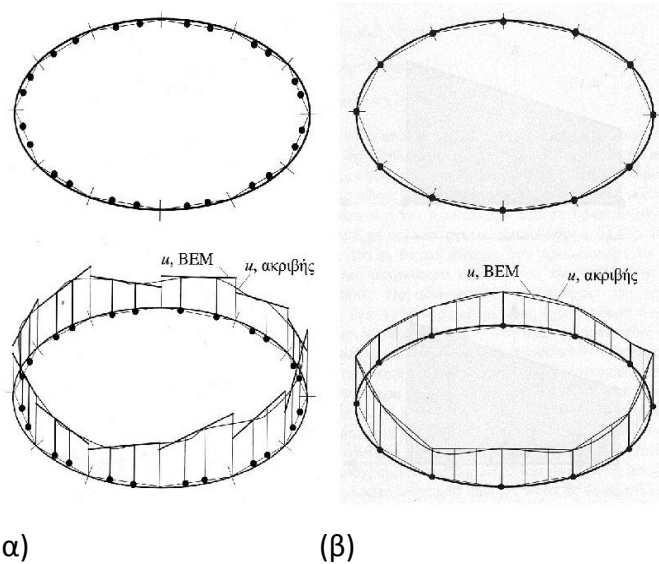


Σχήμα 1.7 Σταθερά και γραμμικά συνοριακά στοιχεία



Σχήμα 1.8 Παραβολικά συνοριακά στοιχεία

Σύμφωνα με τον Κατσιακαδέλη στα γραμμικά και παραβολικά στοιχεία η γεωμετρία του τόξου καθορίζεται με τον ίδιο τρόπο, ισοπαραμετρικά. Τα σταθερά στοιχεία απεικονίζουν τα συνοριακά μεγέθη ασυνεχώς από στοιχείο σε στοιχείο σε αντίθεση με τα γραμμικά ή παραβολικά τα οποία απεικονίζουν αυτά με συνεχή τρόπο<sup>43</sup>. Η συνέχεια ως τρόπος σύνδεσης μεταξύ των στοιχείων προσεγγίζει καλύτερα την κατανομή των συνοριακών μεγεθών, όπου έχουμε έντονες μεταβολές όμως στην γεωμετρία του χωρίου παρουσιάζεται σχετικό σφάλμα, π.χ. γωνιακά σημεία.



Σχήμα 1.9 Ελλειπτικό σύνορο χωρισμένο σε 12 ασυνεχή (α) και συνεχή (β) γραμμικά στοιχεία

<sup>43</sup> Ιωάννης Κατσιακαδέλης, 1999, οπ.π. σ.112-116

\* Συνεχή και ασυνεχή στοιχεία: Ο προσδιορισμός τους γίνεται με βάση την θέση των κομβικών σημείων. Όταν αυτά βρίσκονται στο μέσο του στοιχείου τότε το στοιχείο ανήκει στην κατηγορία των στοιχείων με ασυνέχεια. Στην περίπτωση που τα κομβικά σημεία βρίσκονται (και) στα άκρα του στοιχείου, τότε θεωρείται συνεχές

Ως αριθμητική μέθοδος η **ΜΣΣ** μπορεί και υπολογίζει τιμές μεγεθών όπως η σωματιδιακή ταχύτητα και η πίεση του αέρα στο σύνορο. Η προσέγγιση αυτή γίνεται βάση εξισώσεων και τρόπων διακριτοποίησης του συνόρου που παρουσιάζονται μέσω των δεδομένων που υπάρχουν στο πρόβλημα. Προκειμένου όμως να υπάρχουν όσο το δυνατόν ακριβή αποτελέσματα ο κανόνας λέει ότι όσο δυσκολότερο, από άποψη γεωμετρίας (τουτέστιν θα μπορούσε να γίνει αναφορά σε καμπύλα σύνορα) είναι το στοιχείο, τόσο πρέπει να χρησιμοποιούνται πολυώνυμα των οποίων η τάξη καθορίζεται με βάση τις παρακάτω τρεις κατηγορίες<sup>44</sup>:

α) Υποπαραμετρικά στοιχεία

β) Ισοπαραμετρικά στοιχεία

γ) Υπερπαραμετρικά στοιχεία

Υποπαραμετρικά στοιχεία : Στην περίπτωση αυτή το πολυώνυμο που αφορά τη γεωμετρία του στοιχείου έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό που προσεγγίζει την κατανομή του συνοριακού μεγέθους. Παράδειγμα: Ευθύγραμμο στοιχείο με παραβολική κατανομή του συνοριακού μεγέθους<sup>44</sup>.

Ισοπαραμετρικά στοιχεία : Όπως προϋποθέτει και η ονομασία η αναφορά γίνεται στα στοιχεία εκείνα στα οποία η γεωμετρία του στοιχείου και η κατανομή του συνοριακού μεγέθους γίνονται με πολυώνυμο του ίδιου βαθμού<sup>44</sup>.

Υπερπαραμετρικά στοιχεία : Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζουν πολυώνυμο μεγαλύτερου βαθμού για τον προσδιορισμό της γεωμετρίας τους από εκείνου που προσδιορίζει την κατανομή του συνοριακού μεγέθους. Παράδειγμα: Στοιχείο που προσεγγίζεται με παραβολικό τόξο, ενώ το συνοριακό μέγεθος έχει σταθερή ή γραμμική κατανομή<sup>45</sup>.

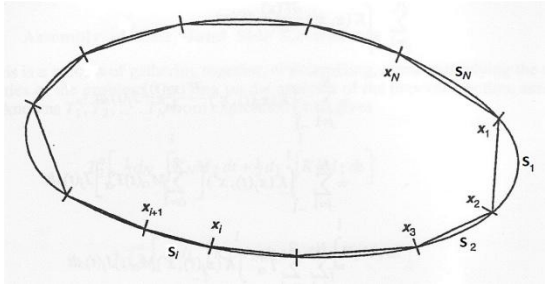
Η χρήση των υποπαραμετρικών και υπερπαραμετρικών στοιχείων είναι περιορισμένη. Επίσης η χρήση στοιχείων ανωτέρων τάξεων είναι περιορισμένη στις απολύτως απαραίτητες περιπτώσεις καθότι υπάρχει ανάλογη αύξηση του χρόνου υπολογισμού με το πλήθος των στοιχείων αυτών που περιέχεται στην επεξεργασία του προβλήματος<sup>45</sup>.

---

<sup>44,45</sup> Ιωάννης Κατσικαδέλης, 1999, οπ.π. σ.111-112

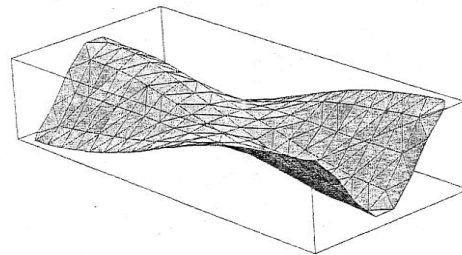
### 1.5.3 Τρισδιάστατο δικτύωμα

Κατά την διακριτοποίηση συναντώνται τόσο δισδιάστατα όσο και τρισδιάστατα μοντέλα (σχήματα 1.10.α,1.10.β). Τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στην εργασία αυτή περιέχουν τρισδιάστατα δικτύωμα.



Σχήμα 1.10.α

Δικτύωμα στις δύο διαστάσεις



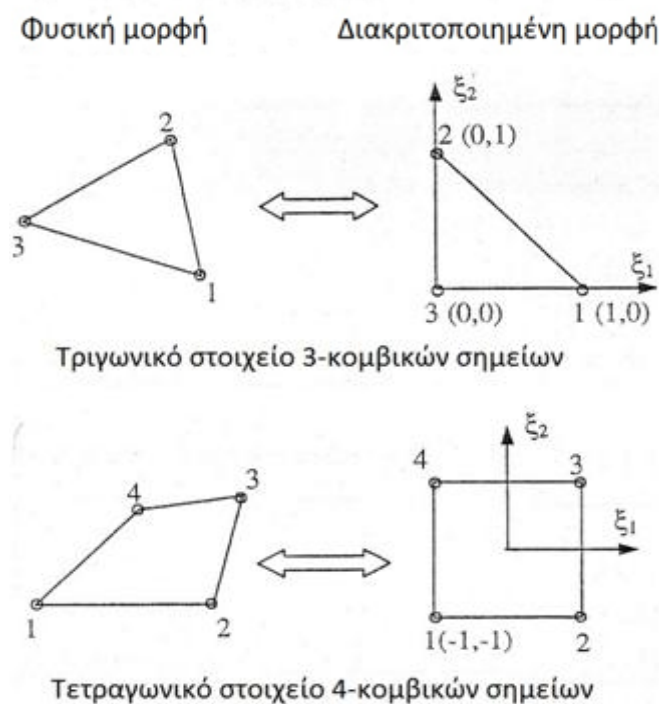
Σχήμα 1.10.β

Δικτύωμα στις τρεις διαστάσεις

Για εμβαδό  $S$  το άθροισμα των επιμέρους ευθύγραμμων τμημάτων δίνει κατά προσέγγιση το μέγεθος του πραγματικού συνόρου σύμφωνα και με τον τύπο,

$$\sum_{i=1}^N S_i \approx S$$

Σε ότι αφορά τα τρισδιάστατα δικτύωμα η πιο απλή μορφή στοιχείου στις τρεις διαστάσεις είναι το τρίγωνο το οποίο αποτελείται, κατ' ελάχιστο, από τρία κομβικά σημεία.



Σχήμα 1.11 Απεικόνιση τριγωνικών και τετραγωνικών στοιχείων

Τα τρισδιάστατα αντικείμενα κατά την διακριτοποίηση της επιφάνειας του συνόρου τους μπορούν να εμφανίσουν στο δικτύωμα τους τόσο τριγωνικά όσο και τετραγωνικά στοιχεία. Καθότι τα παραδείγματα που παρουσιάζονται έχουν την απλούστερη δυνατή μορφή για λόγους κατανόησης και για λόγους αποφυγής τυχόν πολυπλοκότητας τα στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν θα έχουν την παραπάνω μορφή (σχήμα 1.11). Γεωμετρικά το κάθε στοιχείο, μέσω της μεθόδου της παρεμβολής μεταξύ των κομβικών σημείων, μπορεί να απεικονιστεί μέσω των εξισώσεων που αντιστοιχούν στις τρεις διαστάσεις<sup>46</sup>,

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^n x_i N_i(\xi_1, \xi_2) \\y &= \sum_{i=1}^n y_i N_i(\xi_1, \xi_2) \\z &= \sum_{i=1}^n z_i N_i(\xi_1, \xi_2)\end{aligned}$$

όπου  $n$  ο αριθμός των κομβικών σημείων και  $x_i, y_i, z_i$  οι συντεταγμένες στα κομβικά σημεία  $N_i(\xi_1, \xi_2)$  οι οποίες αντιστοιχούν στις γραμμικές συναρτήσεις σχήματος.

Η έκφραση των γραμμικών συναρτήσεων σχήματος για τα τριγωνικά και τα τετραγωνικά στοιχεία είναι<sup>47</sup>:

*Τριγωνικό στοιχείο τριών κομβικών σημείων*

$$N_1 = \xi_1 \quad N_2 = \xi_2 \quad N_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$$

*Τετραγωνικό στοιχείο τεσσάρων κομβικών σημείων*

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \\N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)\end{aligned}$$

<sup>46</sup> T.W. Wu, 2000, οπ.π. σ.51

<sup>47</sup> T.W. Wu, 2000, οπ.π. σ.52

Η επιφάνεια του χωρίου στις τρεις διαστάσεις θα είναι<sup>48</sup> :

$$dS = |J| d\xi_1 d\xi_2$$

Όπου J η Ιακωβιανή , η οποία υπολογίζεται  $|J| = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}$  με τα επιμέρους στοιχεία να είναι :

$$J_1 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}$$

$$J_2 = \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}$$

$$J_3 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$$

με το η να υπολογίζεται από τον γενικό τύπο  $n_i = J_i/|J|$ ,  $i = 1,2,3$ . Οι εξισώσεις  $J_1, J_2, J_3$  προκύπτουν μετά την διαφοροποίηση των συναρτήσεων σχήματος<sup>49</sup>,

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2}$$

Οι εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών παραμένουν με την ίδια μορφή που εμφανίζουν για τη γεωμετρία. Με το δυναμικό να εκφράζεται μέσω των παρακάτω γενικών τύπων για την σωματιδιακή ταχύτητα και την πίεση<sup>50</sup>.

$$p = \sum_{i=1}^n p_i N_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$v_n = \sum_{i=1}^n v_n N_i(\xi_1, \xi_2)$$

<sup>48</sup> T.W. Wu, 2000, οπ.π. σ.53

<sup>49</sup> T.W. Wu, 2000, οπ.π. σ.54

<sup>50</sup> T.W. Wu, 2000, οπ.π. σ.55

## 2. ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΣΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ORENDEM

### 2.1 Διαδικασία εισαγωγής-επεξεργασίας δεδομένων και αποτελεσμάτων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην εισαγωγή βασικός λόγος που διαδόθηκαν οι αριθμητικές μέθοδοι είναι η ραγδαία ανάπτυξη στον τομέα των ηλεκτρονικών και κατ'επέκταση των υπολογιστών. Χάρη στην εξέλιξη των προσωπικών υπολογιστών και την πρόοδο της τεχνολογίας μπόρεσαν οι αριθμητικές μέθοδοι να έχουν ευρεία αναγνώριση και αποδοχή στους επιστημονικούς κύκλους.

Η ΜΣΣ αποτελείται από τα εξής στάδια:

#### Προεπεξεργασία

Το στάδιο αυτό αφορά την δημιουργία δεδομένων γεωμετρίας του αντικειμένου που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του προβλήματος. Τα προγράμματα που αναλαμβάνουν τον σχεδιασμό της αντίστοιχης επιφάνειας είναι προγράμματα τύπου **CAD**. Ως παράδειγμα αναφέρονται τα προγράμματα Ansys και GiD. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται το τελευταίο ως πρόγραμμα για την δημιουργία δικτύματος.

#### Διαδικασία επεξεργασίας δεδομένων

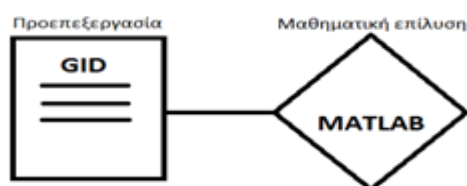
Κατά το στάδιο αυτό προστείνονται τα δεδομένα για τις συνθήκες του προβλήματος καθώς και η μαθηματική προσέγγιση για την παραγωγή αποτελεσμάτων.

Με τον κατάλληλο προγραμματισμό γίνεται εισαγωγή των δεδομένων που έχει δημιουργήσει ο χρήστης, από το πρόγραμμα τύπου **CAD** στο μαθηματικό περιβάλλον Matlab. Προϋπόθεση αποτελεί η χρήση των κατάλληλων εξισώσεων με βάση το είδος προβλήματος που αντιμετωπίζεται. Η επεξεργασία γίνεται μέσω της εφαρμογής Orenbem στο ίδιο προγραμματιστικό περιβάλλον. Με την ολοκλήρωση αυτής γίνεται εμφάνιση των αποτελεσμάτων καθώς και τρισδιάστατη απεικόνιση του χωρίου .

#### Προβολή αποτελεσμάτων

Έχοντας ήδη υπολογίσει την πίεση ή τη σωματιδιακή ταχύτητα του εκάστοτε προβλήματος, γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων με την μορφή εικόνας όπου εμφανίζονται με χρωματικό κώδικα οι μεταβολές στις τιμές των φυσικών μεγεθών.

Η προβολή των αποτελεσμάτων γίνεται στο περιβάλλον της μαθηματικής γλώσσας προγραμματισμού Matlab.



Σχήμα 2.1 Σχεδιάγραμμα ροής προγραμμάτων

## 2.2 Η εφαρμογή Openbem

Η εφαρμογή Openbem έχει υλοποιηθεί σε περιβάλλον Matlab<sup>51</sup> και αποτελεί λογισμικό ανοιχτού κώδικα. Ο κώδικας χρήσης της δηλαδή είναι ανοιχτός προς ανάγνωση καθώς και προσθήκη ή αλλαγή ανάλογα με τις ανάγκες χρήσης. Δημιουργοί της εφαρμογής Openbem είναι οι Vicente Cutanda Henriquez και Peter Møller Juhl<sup>52</sup>.

Η εργασία αυτή συνοδεύεται από οπτικό δίσκο με περιεχόμενο τα αρχεία που χρησιμοποιούνται στα προβλήματα που παρουσιάζονται στο δεύτερο μέρος της εργασίας και αφορούν την παρουσίαση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων μέσω της εφαρμογής Openbem.

Τα αρχεία χωρίζονται σε τρεις φακέλους. Οι δύο πρώτοι αφορούν τα προβλήματα που παρουσιάζονται στην εργασία ενώ ο τρίτος φάκελος περιέχει τα αρχεία εισαγωγής δεδομένων που ζητούνται κατά την ανάπτυξη των προβλημάτων.

Πιο συγκεκριμένα, ο φάκελος 3DBEM αφορά τα προβλήματα καθ'εαυτό της εφαρμογής Openbem ενώ ο φάκελος 3DBEM\_gid αφορά τα ίδια προβλήματα με εισαγωγή των δεδομένων από εξωτερικό πρόγραμμα σχεδιασμού CAD.

Για να υπολογίσει τα αποτελέσματα της ΜΣΣ έχει χρησιμοποιηθεί ο άμεσος τρόπος υπολογισμού συγκριτικής παράθεσης. Θεωρείται ο κατάλληλος δε τρόπος υπολογισμού καθότι ασχολείται άμεσα με τα φυσικά μεγέθη της πίεσης ( $p$ ) και της σωματιδιακής ταχύτητας ( $v_n$ ), καθώς και με τις συνοριακές συνθήκες. Επίσης, ως τρόπος, είναι απλούστερος στην χρήση καθώς και στην κατανόηση<sup>52</sup>. Ο άμεσος τρόπος υπερέχει χάρις σε βελτιώσεις, οι οποίες ισοσταθμίζουν αδύναμα σημεία όπως το πρόβλημα της μη μοναδικότητας ή προβλήματα με λεπτά αντικείμενα<sup>52</sup>.

<sup>51</sup> Αντί του Matlab μπορεί να χρησιμοποιηθεί το Octave (πρόγραμμα με άδεια χρήσης τύπου Open source)

<sup>52</sup> *Openbem- An open source Boundary Element Method software in Acoustics*, Henriquez, Vicente C., & Juhl, Peter M.(2010). Lisbon: Internoise 2010, σ.1-3

## 2.3 Παραδείγματα χρήσης της εφαρμογής Openbem

Αρχικά γίνεται εισαγωγή στην λύση προβλημάτων ακουστική που αφορούν την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων με τα παραδείγματα που περιέχονται στην εφαρμογή Openbem. Σκοπός των παραδειγμάτων είναι η λύση προβλημάτων που αφορούν την εξίσωση Helmholtz. Συνοπτικά στον πίνακα 4 παρουσιάζονται τα παραδείγματα που περιέχει η εφαρμογή και αφορούν την ακουστική.

Πίνακας 4

1 <sup>ο</sup> παράδειγμα	Το αντικείμενο έχει σχήμα σφαίρας. Το πρόβλημα που λύνεται είναι εξωτερικού τύπου. Υπάρχει επίσης δυνατότητα να λύθει και σαν εσωτερικό πρόβλημα. Το πρόβλημα αφορά τιμες επιφανειακής ταχύτητας για επίπεδο κύμα στη αρνητική πλευρά του άξονα z και σφαίρα σε ταλάντωση με άξονα συμμετρίας το z.
2 <sup>ο</sup> παράδειγμα	Αποτελεί συνέχεια του πρώτου παραδείγματος με την προσθήκη chief points για λόγους ομαλότητας του κώδικα με σκοπό την αποφυγή καταστάσεων μη μοναδικότητας*.
3 <sup>ο</sup> παράδειγμα	Εκπομπή ηχητικών κυμάτων: α) μιας παλλόμενης σφαίρας, β) μιας ταλαντώμενης σφαίρας πρώτης τάξης, γ) πιστονιού που εδράζει σε σφαίρα Επιπλέον του υπολογισμού υπάρχει και θεωρητικός υπολογισμός των λύσεων.
Προβλήματα παραδειγμάτων 4, 5	α) Εκπομπή παλλόμενης σφαίρας β) Εκπομπή πρώτης τάξεως σφαίρας σε ταλάντωση γ) Διάχυση επιπέδου κύματος
4 <sup>ο</sup> παράδειγμα	Υπολογισμός πίεσης με σημεία μέτρησης τοξοειδούς σχηματισμού
5 <sup>ο</sup> παράδειγμα	Υπολογισμός πίεσης με σημεία μέτρησης ακτινωτής χωροτοποθέτησης

\*Μη μοναδικότητα: Προκύπτει κατά την περίπτωση που το σημείο υπολογισμού ταυτίζεται με κάποιο από τα στοιχεία που αποτελούν το σύνορο. Παρουσιάζεται δε μόνο στην περίπτωση των εξωτερικού τύπου προβλημάτων.



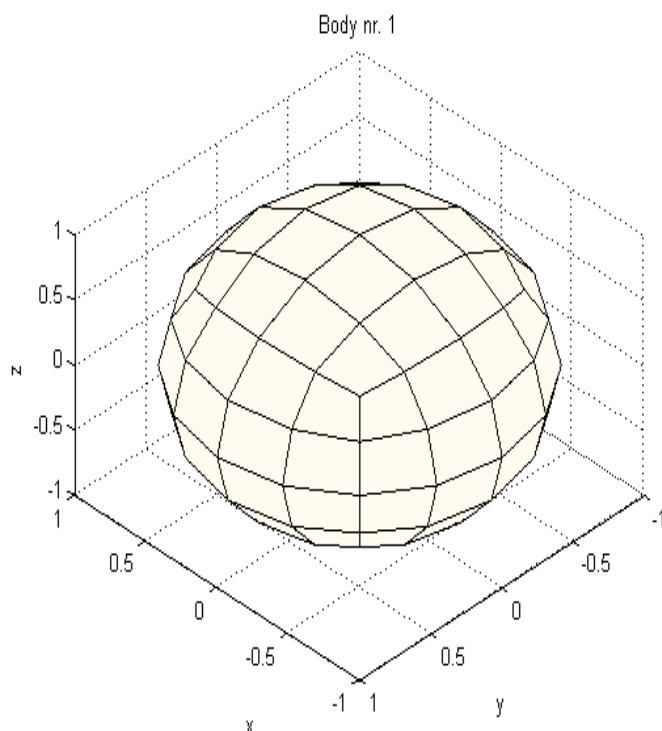
## Παράδειγμα 1ο

### Προσπίπτων επίπεδο κύμα σε σφαίρα, σφαίρα σε ταλάντωση

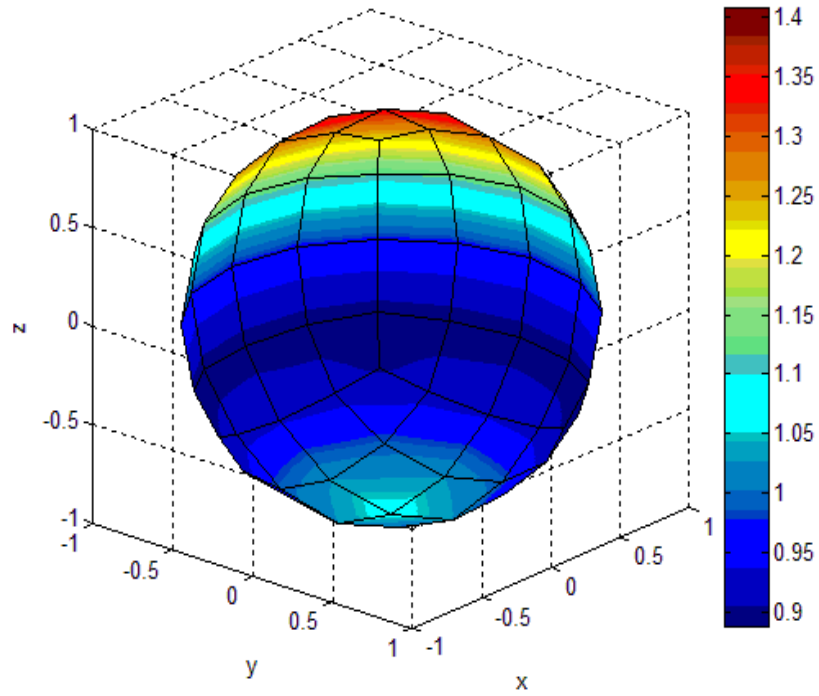
Στο παράδειγμα αυτό το αντικείμενο που χρησιμοποιείται είναι σφαίρα. Το πρόβλημα το οποίο λύνεται είναι εξωτερικού τύπου, υπάρχει όμως δυνατότητα στον υπάρχον κώδικα να λύθει και ως πρόβλημα εσωτερικού τύπου.

Ο χρήστης ενώ βρίσκεται στο πρόγραμμα Matlab, και αφότου επιλέξει το φάκελο Αρχεία\_πτυχιακής\3DBEM θα «τρέξει» το αρχείο run\_me.m που προσθέτει τους απαιτούμενους φακέλους στο χώρο εργασίας του Openbem. Στη συνέχεια επιλέγει τον φάκελο testcases. Στο φάκελο αυτό βρίσκονται τα πέντε παραδείγματα που πρόκειται να παρουσιαστούν παρακάτω. Τα αποτελέσματα τα οποία θα προκύψουν από αυτά τα παραδείγματα αφορούν τιμές επιφανειακής ταχύτητας. Γίνεται επιλογή του παραδείγματος test\_spheres1, εκτελείται ο κώδικας και δίνονται σαν αποτέλεσμα τα τρία παρακάτω σχήματα.

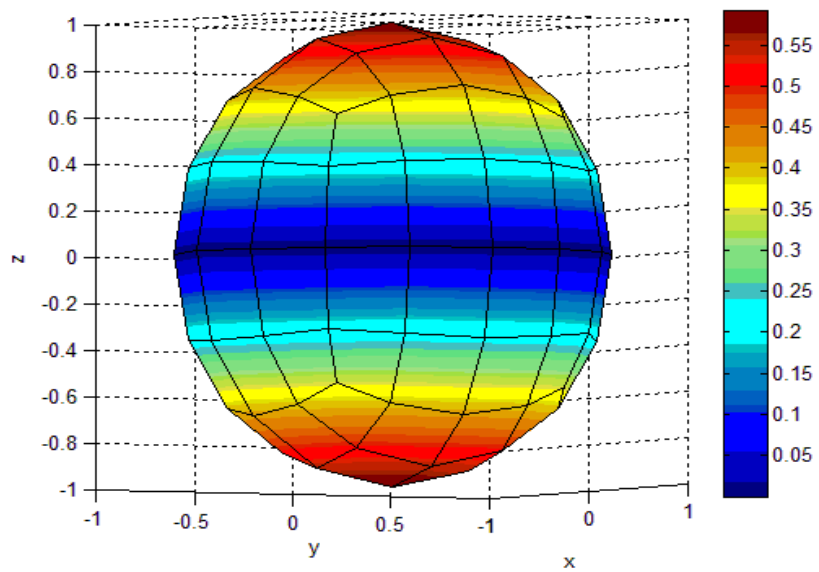
Το πρώτο σχήμα εμφανίζει την γεωμετρία του αντικειμένου. Το δεύτερο υπολογίζει την επιφανειακή ταχύτητα η οποία δημιουργείται απο προσπίπτων επίπεδο κύμα στη μια πλευρά του αντικειμένου με κατεύθυνση τον αρνητικό πόλο στον άξονα Z. Ενώ το τρίτο διάγραμμα παρουσιάζει τι προκύπτει όταν η σφαίρα βρίσκεται σε ταλάντωση.



Σχήμα 2.2 Απεικόνιση χωρίου



Σχήμα 2.3 Επίπεδο κύμα (άξονας Z, προσιπτούσα επιφάνεια Z+ )

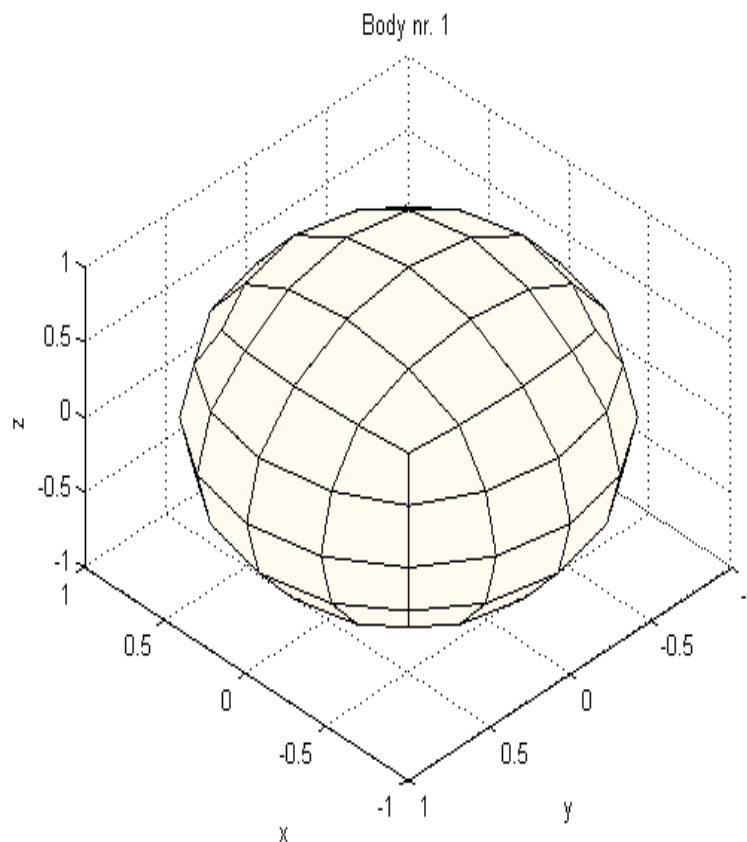


Σχήμα 2.4 Σφαίρα σε ταλάντωση με άξονα συμμετρίας Z

## Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>

### Προσπίπτων επίπεδο κύμα σε σφαίρα, σφαίρα σε ταλάντωση με χρήση της μεθόδου των CHIEF points

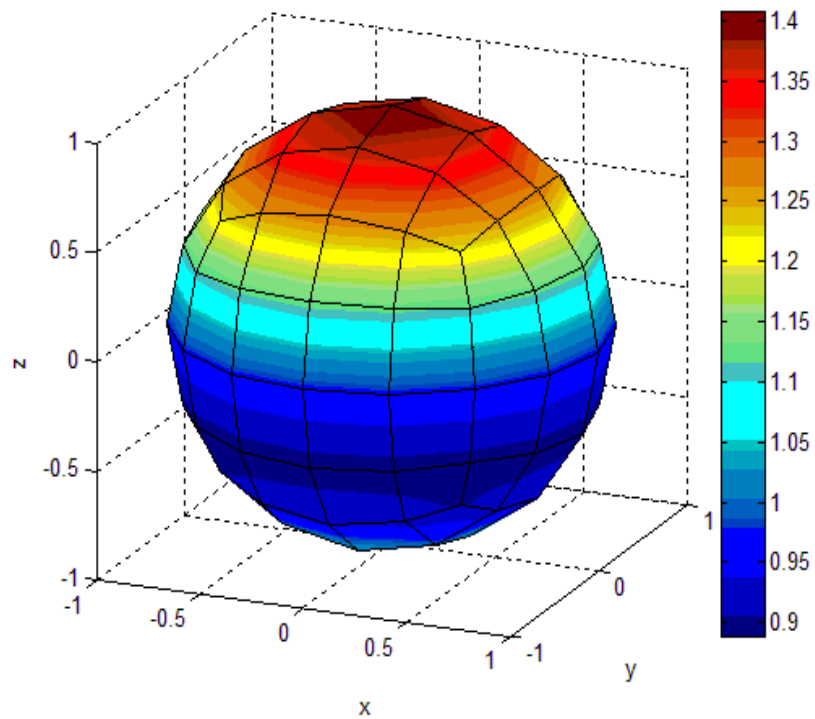
Το δεύτερο παράδειγμα αποτελεί συνέχεια του πρώτου παραδείγματος, με την προσθήκη **CHIEF Points**, η χρήση των οποίων γίνεται μόνο σε εξωτερικού τύπου προβλήματα και για την αντιμετώπιση προβλημάτων ιδιομορφίας (singularity). Μέσω του φακέλου testcases, στο χώρο εργασίας της Matlab επιλέγεται το αρχείο test\_spheres2\_CHIEF και εκτελείται ο κώδικας για να παραχθούν τα αποτελέσματα. Η γεωμετρία μαζί με τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα ακόλουθα σχήματα.



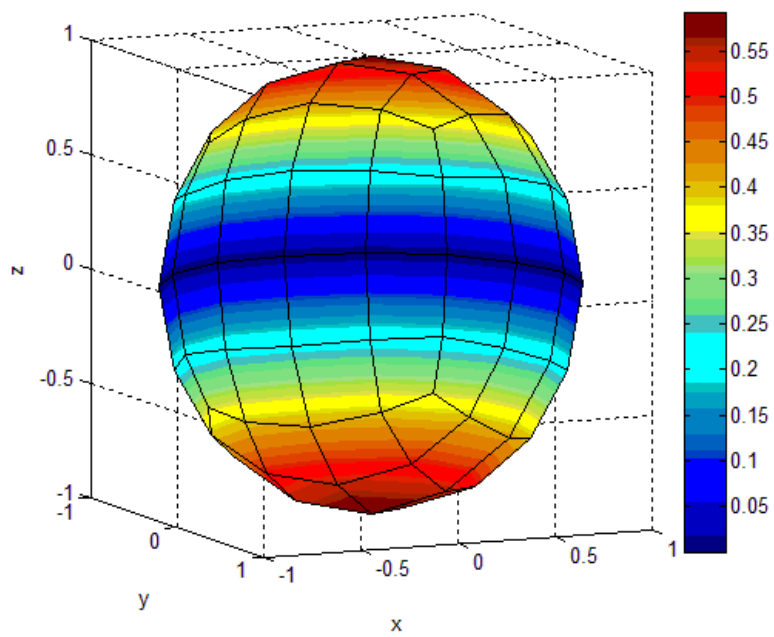
Σχήμα 2.5 Απεικόνιση χωρίου

---

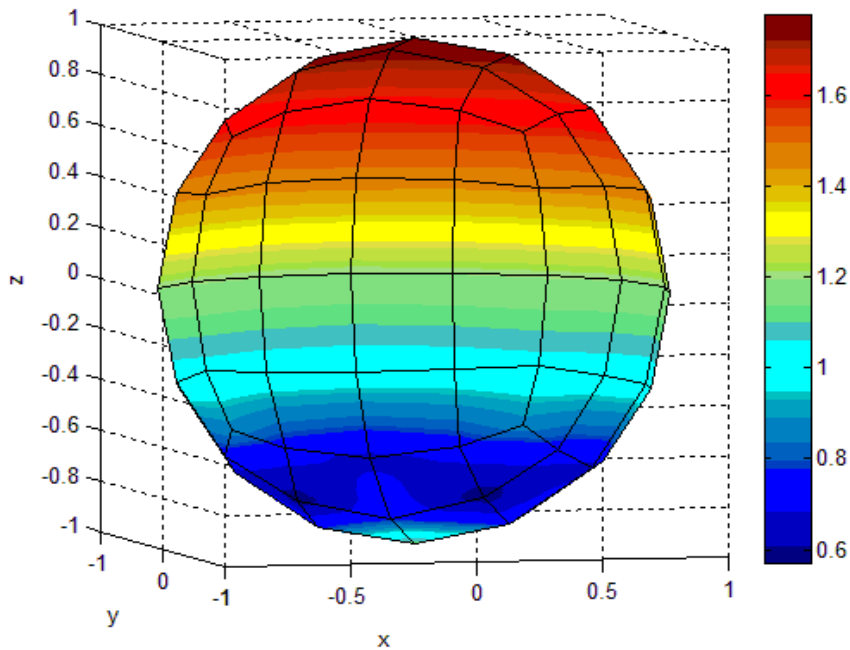
Μέθοδος **CHIEF** : Χρησιμοποιείται για την αποφυγή περιπτώσεων μη μοναδικότητας στο σύνορο μεταφέροντας την λύση της εξίσωσης Helmholtz μερικά σημεία εντός του όγκου του χωρίου. T.W. Wu, 2000, σπ.π. σ.27



Σχήμα 2.6 Επίπεδο κύμα (άξονας Z, προσιπτουσα επιφάνεια Z)



Σχήμα 2.7 Σφαίρα σε ταλάντωση με άξονα συμμετρίας Z

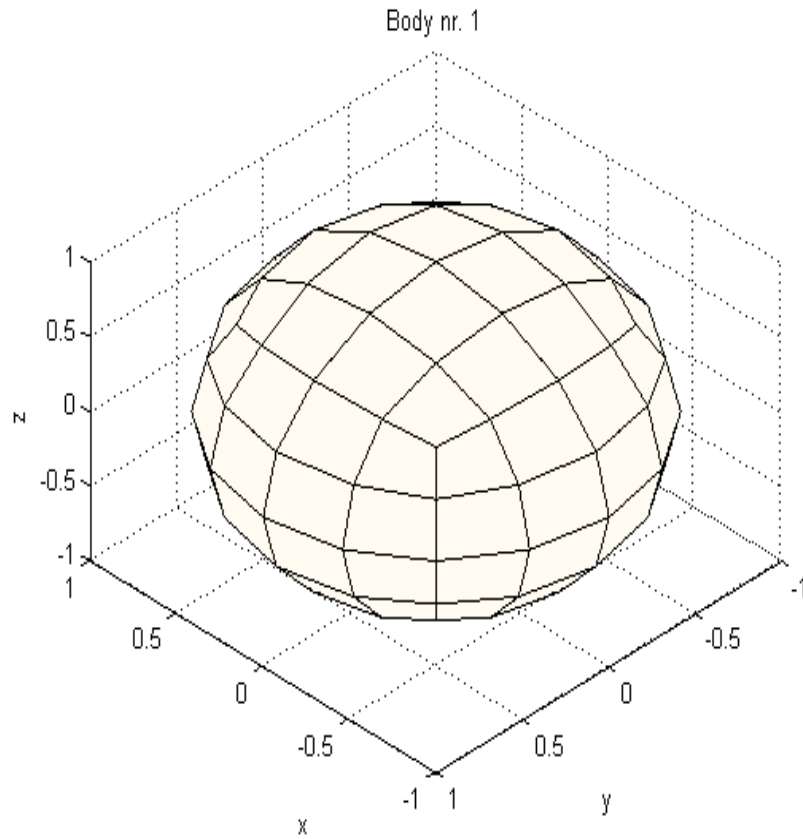


Σχήμα 2.8 Υπολογισμός επιφανειακής ταχύτητας με χρήση CHIEF Points, σε συχνότητα συντονισμού

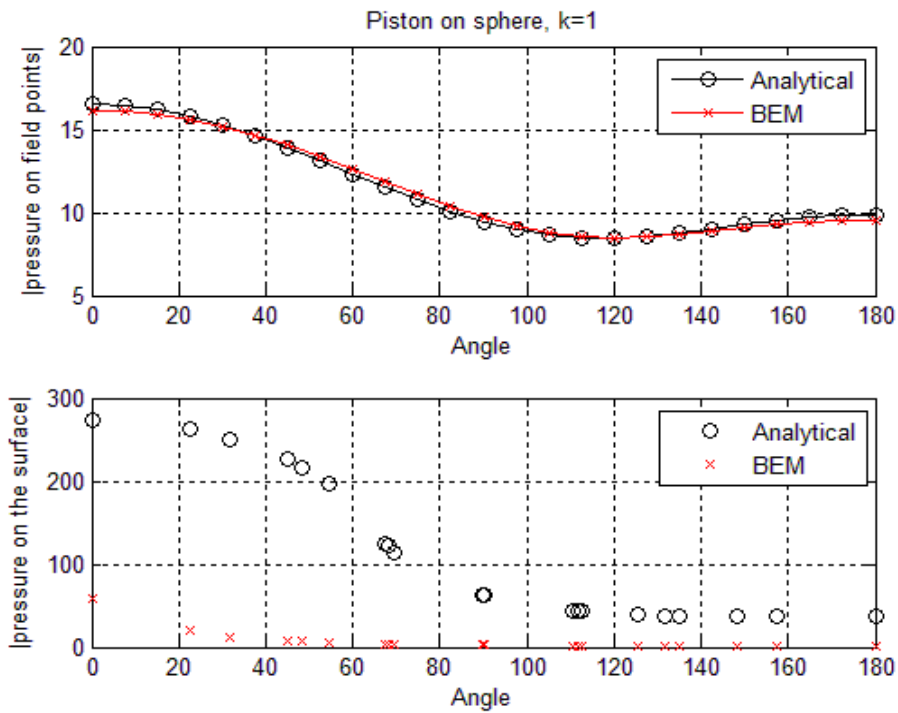
### Παράδειγμα 3ο

#### Εκτομή ηχητικών κυμάτων παλλόμενης σφαίρας, σφαίρας σε ταλάντωση πρώτης τάξης, πιστονιού εδραζόμενου σε σφαίρα

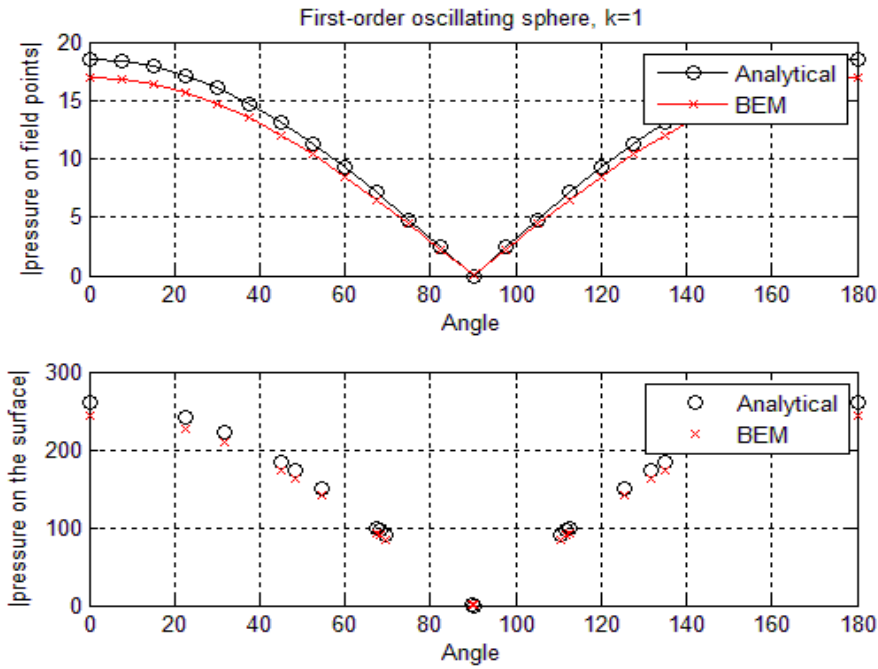
Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάζεται η περίπτωση εκτομής ηχητικών κυμάτων απο: α) μια παλλόμενη σφαίρα, β) μια σφαίρας σε ταλάντωση πρώτης τάξης και από γ) πιστόνι που εδράζει σε σφαίρα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα πέρα του αποτελέσματος υπάρχει και θεωρητικός υπολογισμός των λύσεων. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η ίδια με τα προηγούμενα παραδείγματα. Μέσω του φακέλου testcases επιλέγεται το αρχείο test\_spheres3 ενώ στη συνέχεια εκτελείται ο κώδικας που δίνει ως αποτέλεσμα τα παρακάτω διαγράμματα.



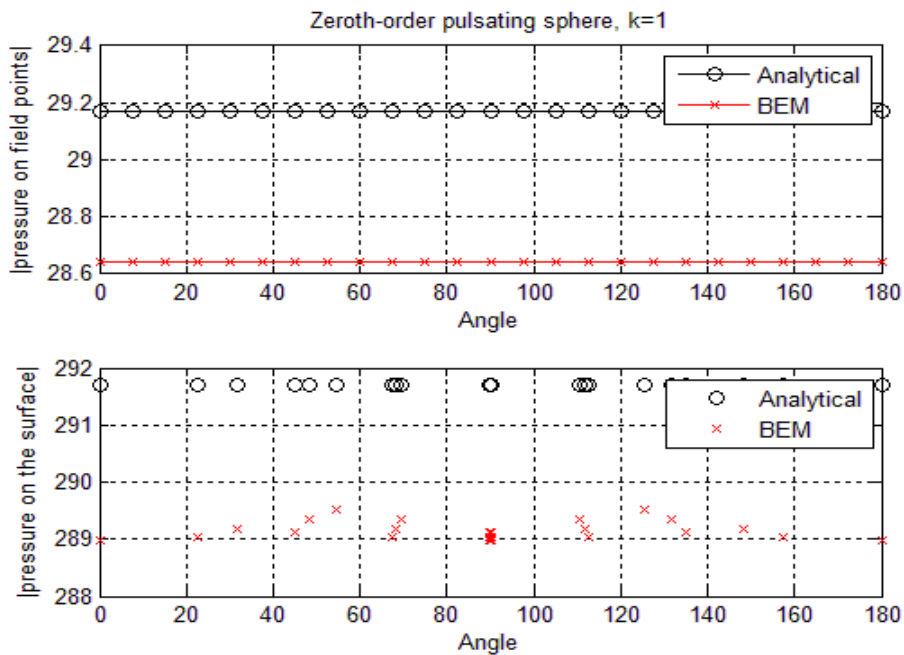
Σχήμα 2.9 Απεικόνιση χωρίου



Σχήμα 2.10 Τιμές πίεσης προβλήματος πιστονιού σε σφαίρα



Σχήμα 2.11 Τιμές πίεσης προβλήματος σφαίρας πρώτης τάξης σε ταλάντωση



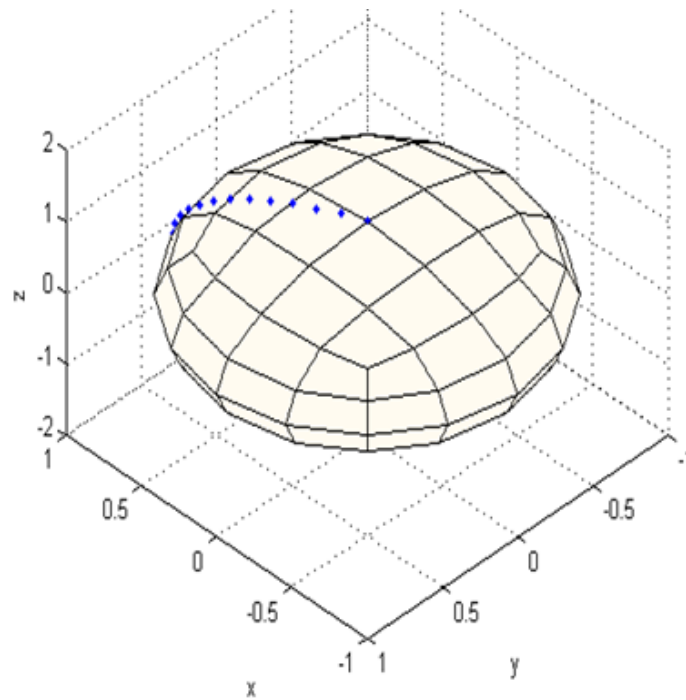
Σχήμα 2.12 Τιμές πίεσης προβλήματος παλλόμενης σφαίρας μηδενικής τάξης

Στο σχήμα 2.8 φαίνεται το σχήμα του αντικειμένου. Τα διαγράμματα που προκύπτουν από το πρόβλημα αφορούν τιμές πίεσης σε δυο συνθήκες, στην επιφάνεια και στο ευρύτερο πεδίο. Σε κάθε συνθήκη υπάρχουν δύο τιμές, η τιμή που προκύπτει μετά τον υπολογισμό και η τιμή που υπολογίζεται θεωρητικά. Η απόκλιση στις τιμές βρίσκεται εντός ορίου 5% που συγκλίνει στην εγκυρότητα της λύσης.

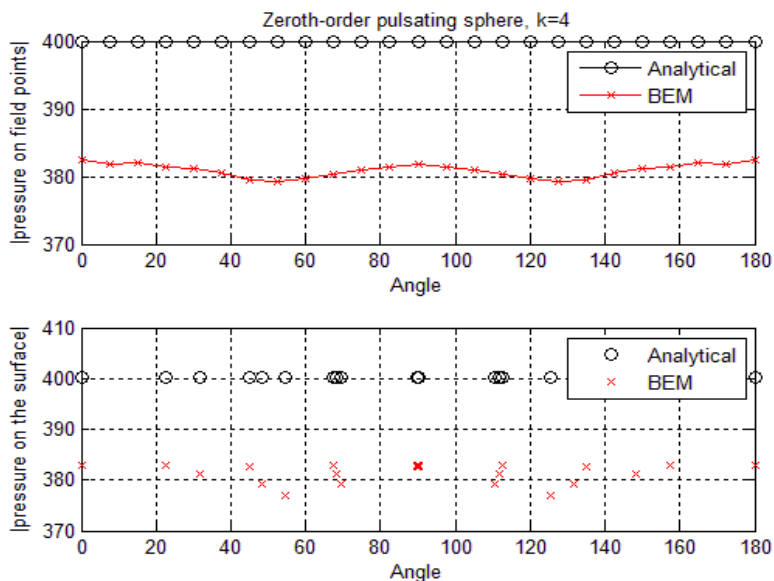
#### Παράδειγμα 4<sup>ο</sup>

Εκπομπή ηχητικών κυμάτων παλλόμενης σφαίρας, σφαίρας σε ταλάντωση πρώτης τάξης, διάχυση επίπεδου κύματος από σφαίρα. Σημεία υπολογισμού σχηματίζουν τόξο

Επιλέγεται από τον φάκελο testcases το αρχείο test\_spheres4. Στο παράθυρο του κώδικα του παραδείγματος επιλέγεται η εκτέλεση του. Στη συνέχεια εμφανίζονται τα παρακάτω αποτελέσματα.

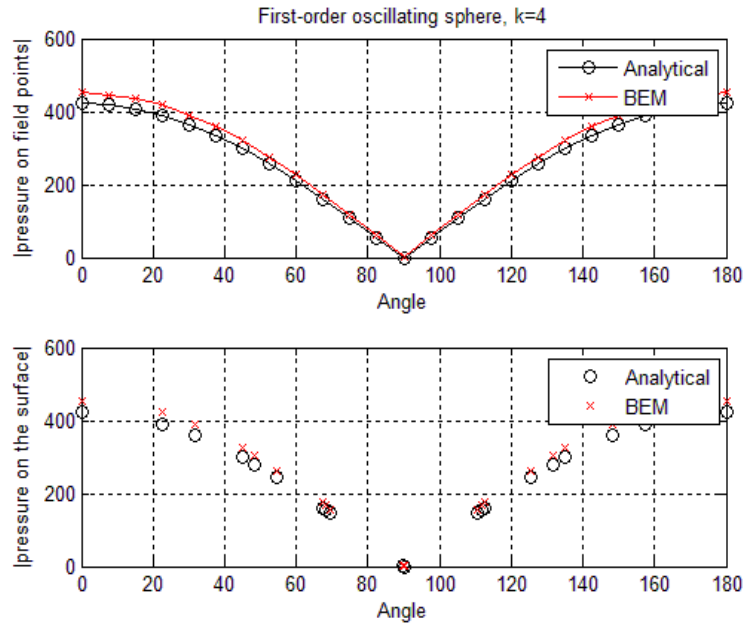


Σχήμα 2.13 Πλέγμα χωρίου με χρήση chief points

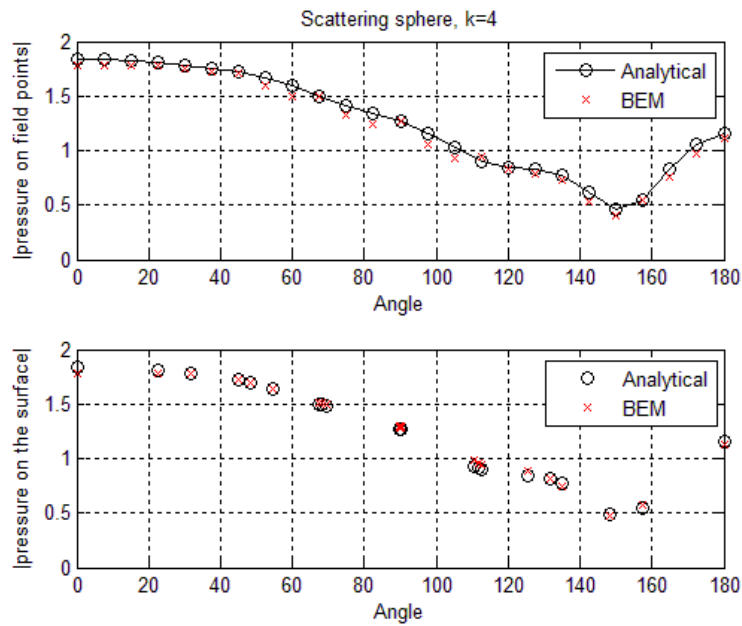


Σχήμα 2.14 Τιμές πίεσης προβλήματος παλλόμενης σφαίρας μηδενικής τάξης





Σχήμα 2.15 Τιμές πίεσης προβλήματος σφαίρας σε ταλάντωση πρώτου βαθμού



Σχήμα 2.16 Τιμές πίεσης προβλήματος σκέδασης σφαίρας

Στο σχήμα 2.13 φαίνεται η σφαίρα σχηματισμένη. Στα διαγράμματα που ακολουθούν εμφανίζονται οι τιμές που παίρνει η πίεση στην επιφάνεια του αντικειμένου και στο πεδίο γύρω από αυτό. Οι τιμές συγκρίνονται με τις αντίστοιχες θεωρητικές.

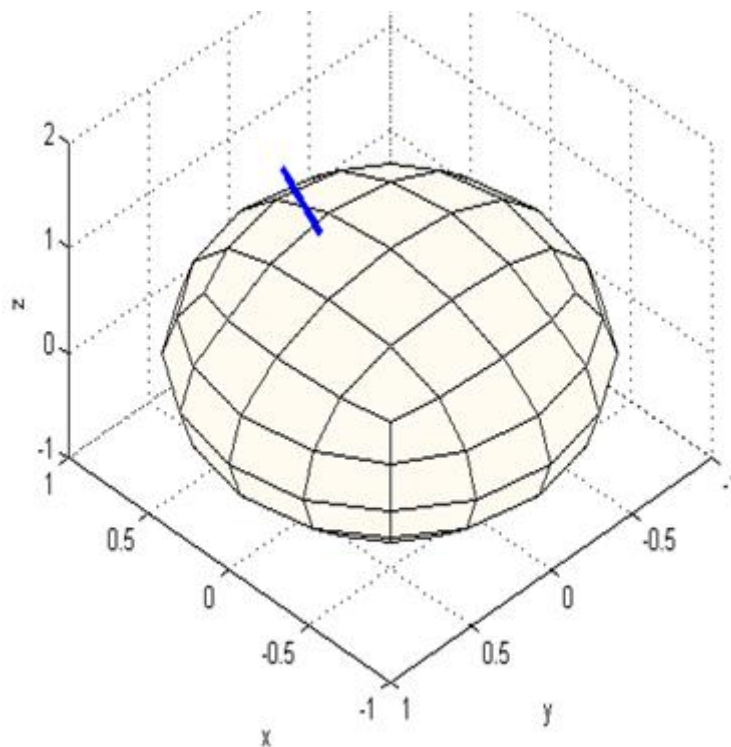
Στο σχήμα 2.14 ορισμένες από τις τιμές έχουν απόκλιση οριακά μεγαλύτερη του 5% που σημαίνει ότι οι υπολογισμοί πρέπει να λαμβάνονται υπόψη με επιφύλαξη. Στο παράδειγμα αυτό τα σημεία για τα οποία γίνονται οι μετρήσεις έχουν σχήμα τοξοειδούς καμπύλης. Οι περιπτώσεις των μετρήσεων είναι :

- α. εκπομπή παλλόμενης σφαίρας
- β. εκπομπή πρώτης τάξεως σφαίρας σε ταλάντωση
- γ. σκέδαση επιπέδου κύματος

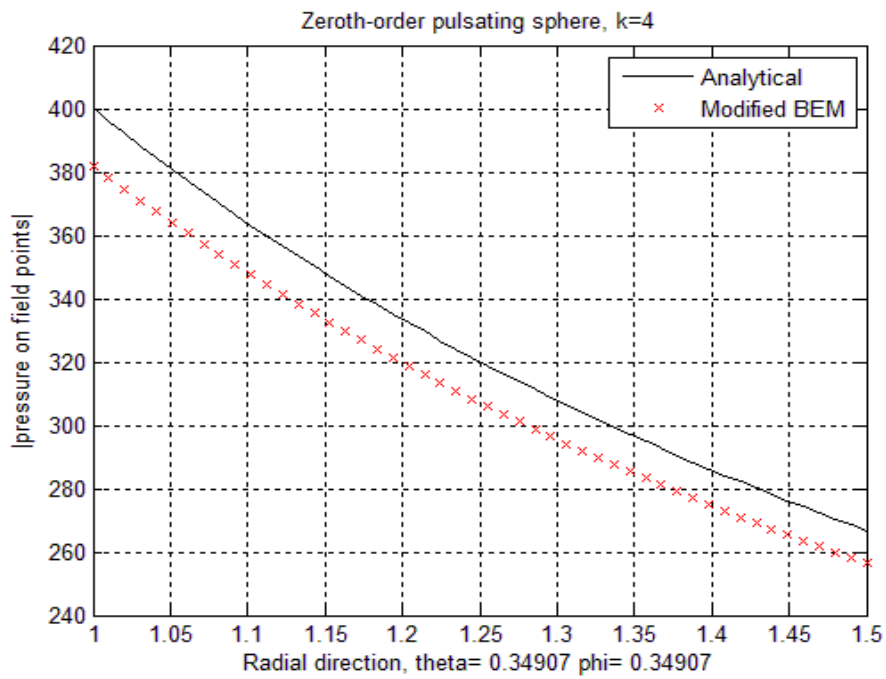
### Παράδειγμα 5°

**Εκπομπή ηχητικών κυμάτων παλλόμενης σφαίρας, σφαίρας σε ταλάντωση πρώτης τάξης, διάχυση επίπεδου κύματος από σφαίρα. Σημεία υπολογισμού πίεσης σχηματίζοντα ακτίνα**

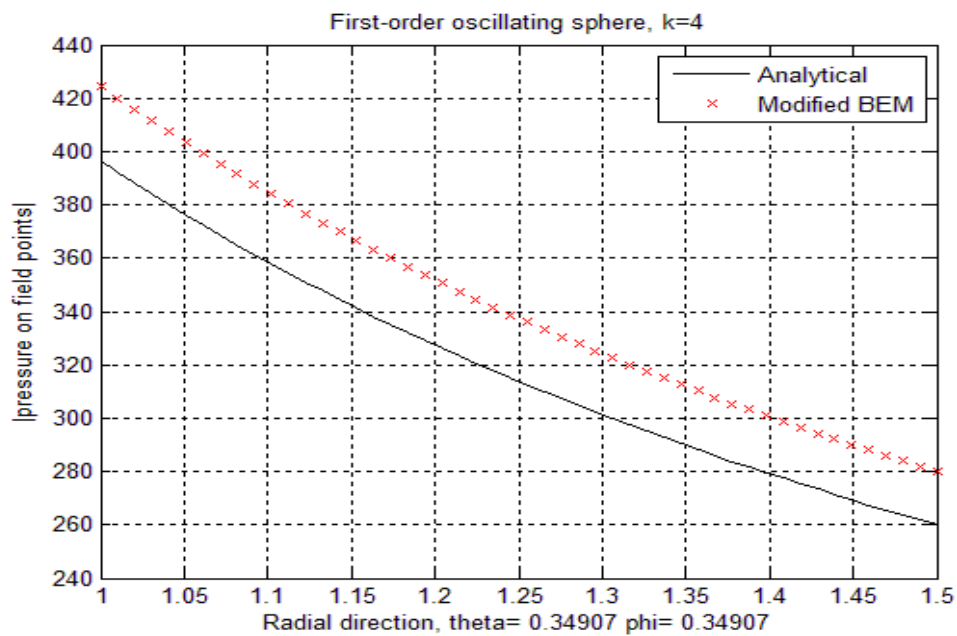
Αποτελεί το ίδιο παράδειγμα με το προηγούμενο με μόνη διαφορά ότι ο υπολογισμός γίνεται σε σημεία τα οποία είναι τοποθετημένα σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο εκτείνεται ως ακτίνα από την επιφάνεια της σφαίρας προς το ελεύθερο πεδίο (σχήμα 2.17).



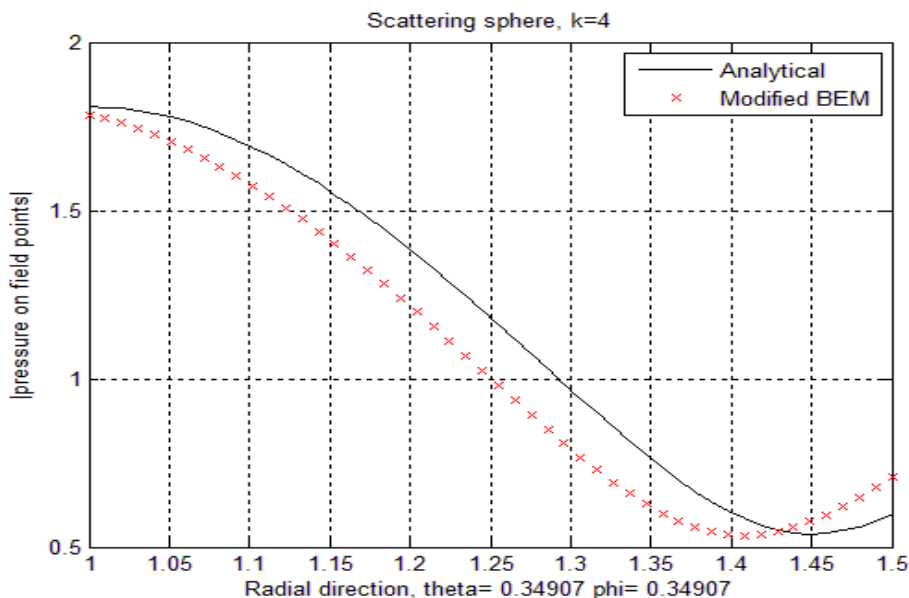
Σχήμα 2.17 Πλέγμα χωρίου με απεικόνιση ακτινικής μορφής σημείων υπολογισμού



Σχήμα 2.18 Τιμές πίεσης προβλήματος παλλόμενης σφαίρας μηδενικής τάξης



Σχήμα 2.19 Τιμές πίεσης προβλήματος σφαίρας πρώτης τάξης σε ταλάντωση



Σχήμα 2.20 Τιμές πίεσης προβλήματος σκέδασης σφαίρας

Παρατηρείται πως υπάρχει οριακή διαφορά τιμών στο σχήμα 2.19 που είναι πέρα από την επιτρεπόμενη συνθήκη του 5% για την εγκυρότητα του αποτελέσματος. Στα τρία διαγράμματα τα σημεία που έχουν επιλεγεί στο πεδίο αφορούν τιμές πίεσης για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

- α. εκπομπή παλλόμενης σφαίρας
- β. εκπομπή πρώτης τάξεως σφαίρας σε ταλάντωση
- γ. σκέδαση επιπέδου κύματος

## 2.4 Εισαγωγή δεδομένων μέσω προγράμματος σχεδιασμού

Έχοντας ολοκληρωθεί η διαδικασία των παραδειγμάτων της Openbem, θα γίνει από τον χρήστη εισαγωγή των γεωμετρικών δεδομένων που περιγράφουν την επιφάνεια του χωρίου. Τα δεδομένα αυτά αποκτούν την μορφή πίνακα προτού σταλούν για επεξεργασία.

Ο κώδικας της Openbem δέχεται τα αρχεία που εισάγονται με τη μορφή *όνομα\_αρχείου.msh* με χρήση υπορουτίνας κώδικα που επιτρέπει την διαχείριση και εισαγωγή των δεδομένων (*ReadgeomGiDMSH.m*). Το διάγραμμα για την ροή των δεδομένων παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1

Αρχικά με το πρόγραμμα σχεδιασμού GiD θα φτιαχτεί η γεωμετρία της σφαίρας και στη συνέχεια θα εισαχθεί στην εφαρμογή Openbem .

Για να γίνει η σχεδίαση της σφαίρας στο πρόγραμμα GiD ακολουθείται η διαδρομή “Geometry\Create\Object\Sphere” στο μενού επιλογών του προγράμματος. Επιλέγεται σημείο το οποίο θα οριστεί ως κέντρο της σφαίρας και θα είναι μηδέν και για τους τρεις άξονες. Για να πραγματοποιηθεί η επιλογή ακολουθείται η διαδρομή Utilities\Tools\Coordinates window, όπου όταν εμφανιστεί το παράθυρο με τις τιμές του κάθε άξονα επιβεβαιώνει ο χρήστης την επιλογή με το “Apply”. Στη συνέχεια, στη γραμμή εντολών που βρίσκεται στο κάτω μέρος του προγράμματος, εισάγεται η επιθυμητή ακτίνα (ίση με 1), επικυρώνοντας την επιλογή με το πλήκτρο Enter. Στο σχήμα που θα εμφανιστεί ο χρήστης θα πρέπει να σβήσει τον γαλάζιο κύκλο μιας και αυτός παραπέμπει σε όγκο αφού πρώτα μεγενθύνει το σχήμα για ευκολία. Η μεγέθυνση γίνεται με το εικονίδιο του φακού που περιέχει ένα τετράγωνο Ο κύκλος που απομακρύνεται αφορά όγκο ο οποίος χρησιμεύει μόνο στην μέθοδο των πεπερασμένων συνοριακών στοιχείων. Για να γίνει αυτό ο χρήστης θα επιλέξει από την πλαϊνή μπάρα το σύμβολο του X και από εκεί τον κύβο με τις γαλάζιες ακμές. Με την επιλογή θα αλλάξει ο κέρσορας και με την νεα αυτή μορφή του θα επιλεγεί ο κύκλος του σχήματος που προαναφέρθηκε. Για να επικυρωθεί η διαδικασία μετά την επιλογή θα πρέπει να πατηθεί το Esc.

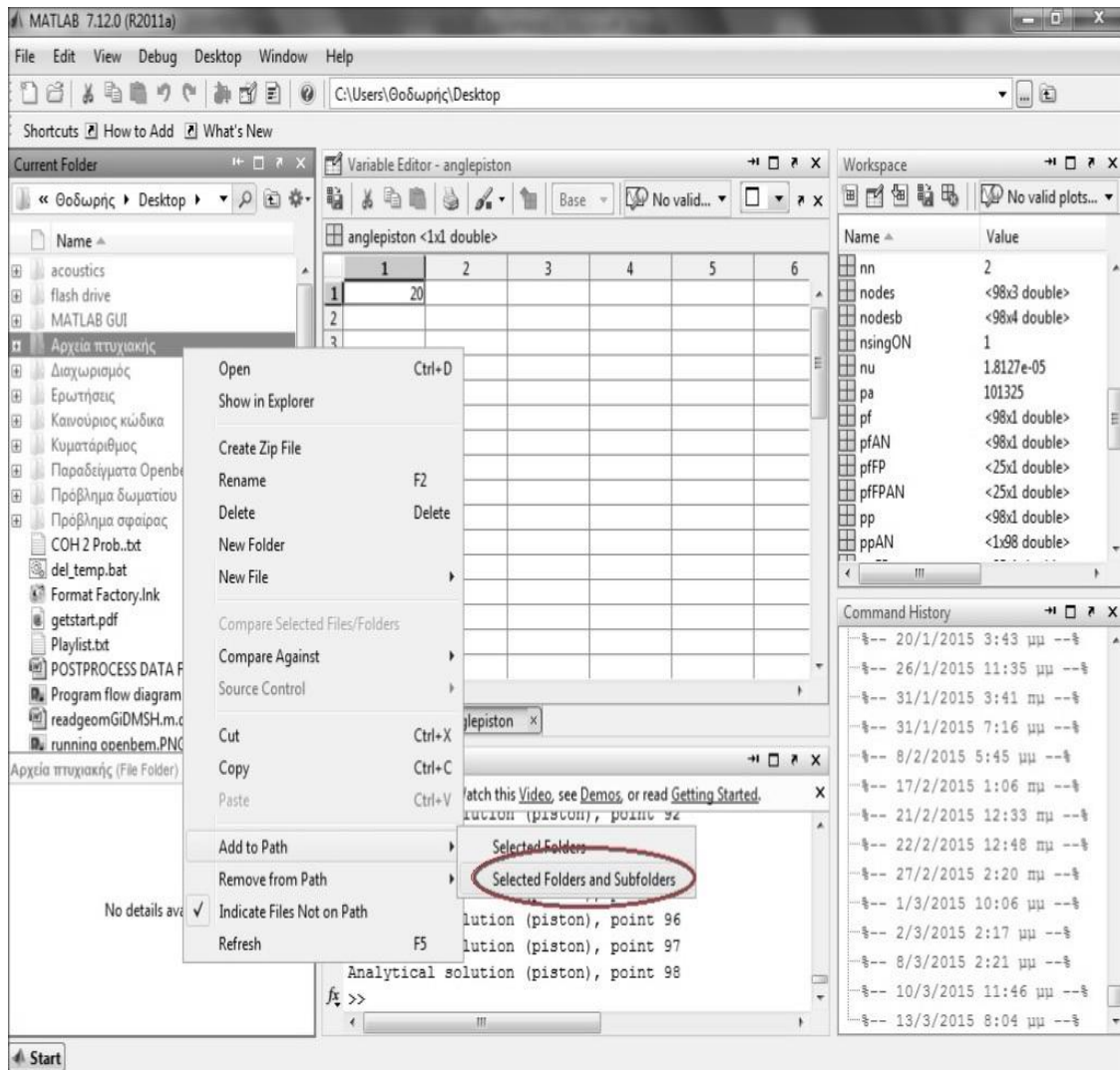
Στη συνέχεια θα δηλωθεί στο πρόγραμμα το είδος των στοιχείων που ζητούνται για την διαμόρφωση του δικτύωματος. Η διαδρομή για στοιχεία τριγωνικού τύπου είναι στη γραμμή ενεργειών mesh\element type\Triangle. Μετά από αυτό μένει να δημιουργηθεί το δίκτυωμα, η διαδρομή είναι mesh\Generate mesh. Στο παράθυρο που θα αναδυθεί ορίζεται το μέγεθος των στοιχείων να είναι 0.145. Έχοντας ολοκληρώσει την διαδικασία δημιουργίας της σφαίρας και των στοιχείων που αποτελούν το δίκτυωμα της επιφάνειας ο χρήστης εξάγει το αρχείο (Files\Export\GID mesh) το οποίο φέρει την ονομασία “spheregd\_a1.msh”.

Στη συνέχεια, στο στάδιο της επεξεργασίας δεδομένων θα χρησιμοποιηθεί η εφαρμογή Orenbem μέσω του προγράμματος Matlab.

Ξεκινώντας το πρόγραμμα θα πρέπει να επιλεγεί ο φάκελος “Αρχεία\_πτυχιακής” που βρίσκονται τα δεδομένα και να οριστεί ως το περιβάλλον εργασίας (σχήμα 2.21).

Έχοντας σε χρήση το πρόγραμμα Matlab και μέσω του φακέλου εργασίας επιλέγεται ο φακέλος 3DBEM\_gid. Εντός του βρίσκονται αριθμημένα τα παραδείγματα που πρόκειται να εξεταστούν.

Λόγω του ότι το αρχείο εισαγωγής spheregd\_a1.msh έχει διαφορετική μορφή από αυτή των αρχικών παραδειγμάτων ο κώδικας έχει τροποποιηθεί ανάλογα. Έχει γίνει εισαγωγή της υπορουτίνας ReadgeomGiDMSH της οποίας ο ρόλος είναι να εισάγει τα δεδομένα που έχουν δημιουργηθεί στο GiD. Τα δεδομένα αυτά αποτελούνται από τα *στοιχεία* και τα *κομβικά σημεία*. Τα δεδομένα σε αντίθεση με την πρώτη μορφή παραδειγμάτων περιέχονται σε ένα τύπο αρχείου *όνομα\_αρχείου.msh*. Λόγω της αλλαγής αυτής έχει αλλαχθεί και η παράμετρος των στοιχείων στην υπορουτίνα meshcheck σε ElementsTri. Οι αλλαγές αυτές έχουν εφαρμοστεί σε όλα τα παραδείγματα.

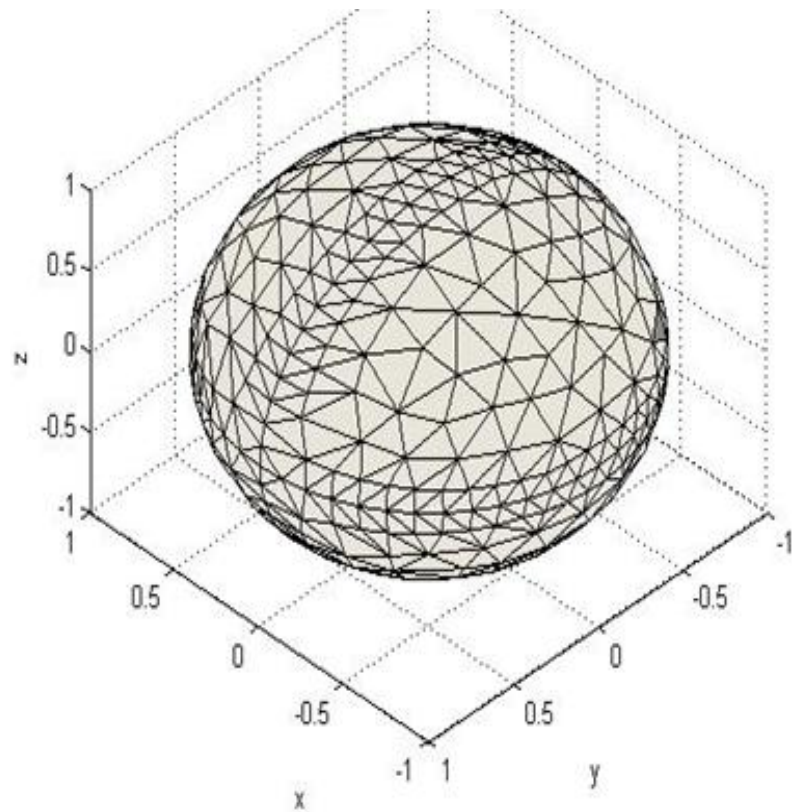


Σχήμα 2.21 Περιβάλλον εργασίας Matlab

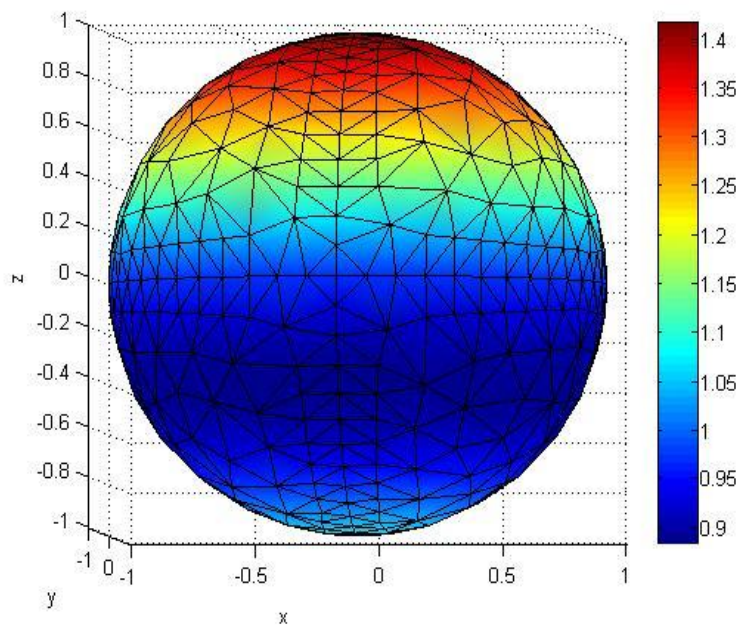
## Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>

### Προσπίπτων επίπεδο κύμα σε σφαίρα, σφαίρα σε ταλάντωση

Έχοντας ξεκινήσει το προγράμματο Matlab και στη συνέχεια έχοντας ορίσει ως περιβάλλον εργασίας ότι φάκελο και αρχείο υπάρχει εντός του φακέλου «Αρχεία\_πτυχιακής» γίνεται επιλογή του φακέλου 3DBEM\_gid. Από εκεί επιλέγεται το αρχείο test\_spheres1\_dif\_input.m. Στη συνέχεια με το παράθυρο επεξεργασίας του κώδικα σε προβολή εκτελείται το πρόγραμμα (F5). Με την εκτέλεση του κώδικα εμφανίζονται τα αποτελέσματα της κάθε περίπτωσης. Η απεικόνιση της γεωμετρίας του χωρίου και η προβολή του χωρίου με χρωματική διακύμανση της επιφάνειας ανάλογη του μεγέθους πίεσης που αντιστοιχεί στο κάθε σημείο.

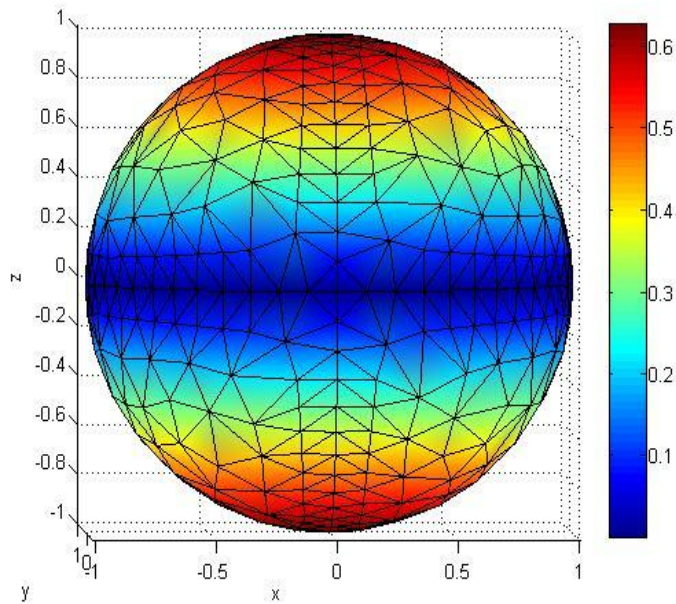


Σχήμα 2.22 Γεωμετρική απεικόνιση αντικειμένου



Σχήμα 2.23.α Επίπεδο κύμα (άξονας Z, προσιπτουσα επιφάνεια Z )





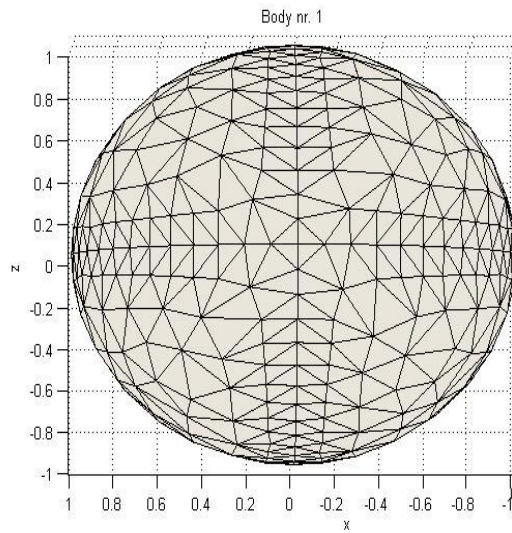
Σχήμα 2.23.β Τιμές επιφανειακής ταχύτητας για σφαίρα σε ταλάντωση στον άξονα z

## Παράδειγμα 2°

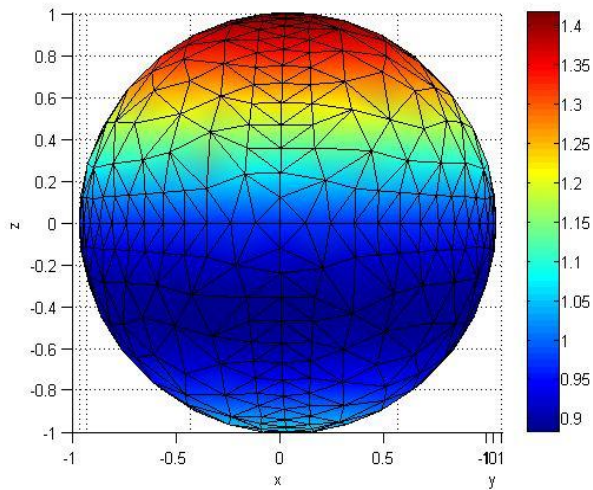
**Προσπίπτων επίπεδο κύμα σε σφαίρα και σφαίρα σε ταλάντωση, με την χρήση της μεθόδου των CHIEF points**

Στον φάκελο 3DBEM\_gid γίνεται επιλογή του αρχείου "test\_spheres2\_dif\_input.m". Στη συνέχεια και αφότου εμφανιστεί το παράθυρο επεξεργασίας του κώδικα, εκτελείται ο κώδικας (F5) προκειμένου να προκύψουν τα αποτελέσματα. Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάζεται ως περαιτέρω βήμα η προσθήκη σημείων "chief point" στις ήδη υπάρχουσες περιπτώσεις του παραδείγματος 1. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν αφορούν την γεωμετρία του χωρίου καθώς και την πίεση στην επιφάνεια της σφαίρας στην περίπτωση επίπεδου κύματος να προσκρούει σε αυτή και σφαίρας σε ταλάντωση.

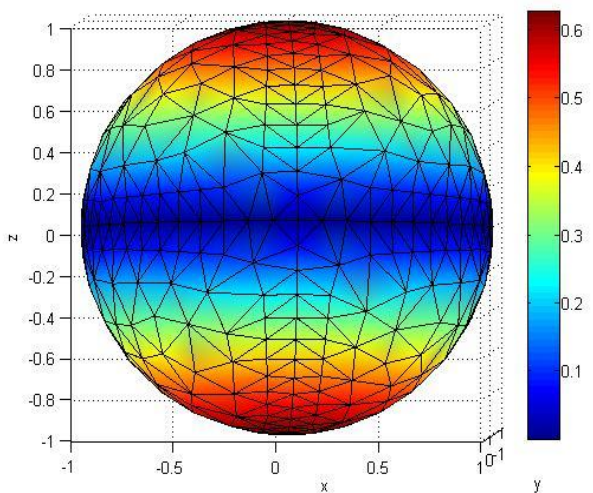




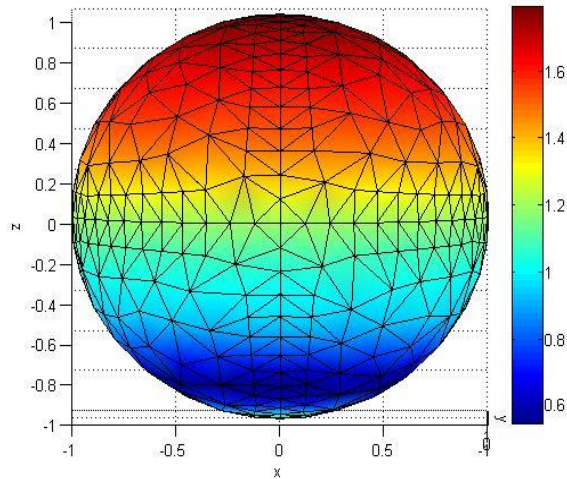
Σχήμα 2.24 Απεικόνιση χωρίου



Σχήμα2.25.α Τιμές επιφανειακής ταχύτητας για επίπεδο κύμα από αρνητικό άξονα z



Σχήμα2.25.α Τιμές επιφανειακής ταχύτητας για σφαίρα σε ταλάντωση στον άξονα z

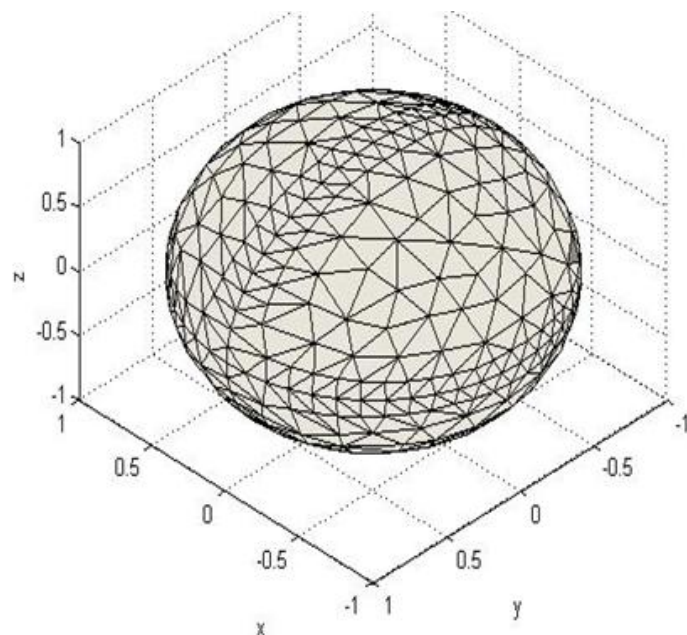


Σχήμα 2.26 Τιμές επιφανειακής ταχύτητας για την περίπτωση ιδιοσυχνότητας της σφαίρας

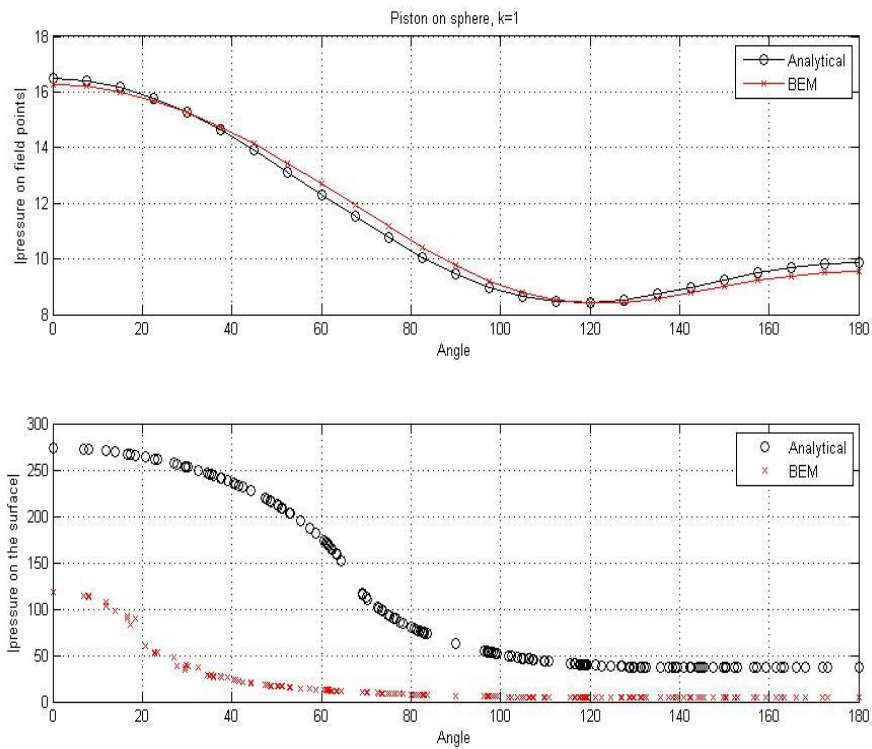
### Παράδειγμα 3ο

#### Εκπομπή ηχητικών κυμάτων παλλόμενης σφαίρας, σφαίρας σε ταλάντωση πρώτης τάξης και πιστονιού εδραζόμενου σε σφαίρα

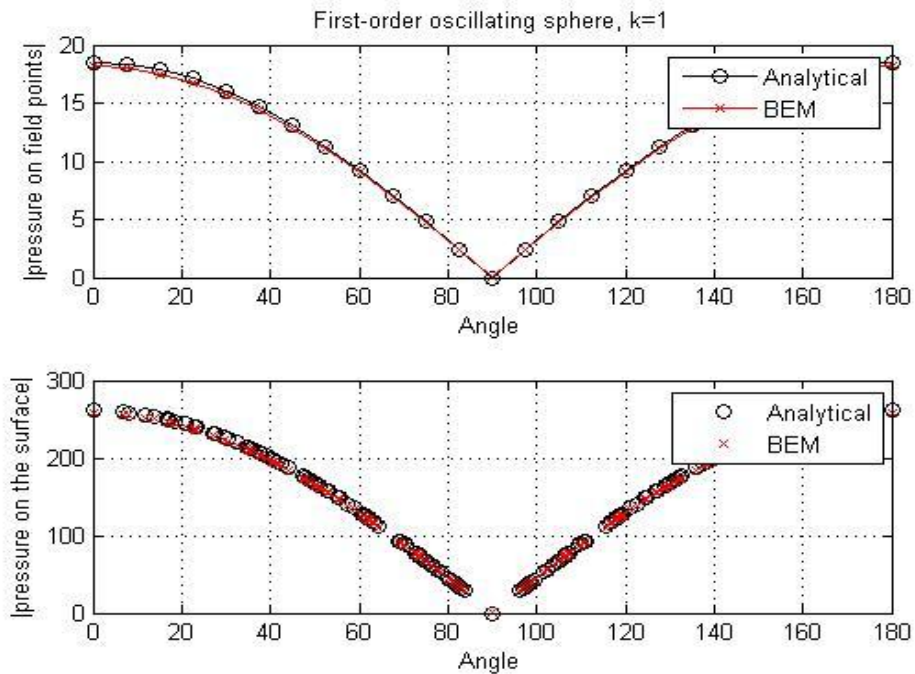
Από τον φάκελο 3DBEM\_gid επιλέγεται το αρχείο "test\_spheres3\_dif\_input.m". Εν συνεχεία και εφόσον έχει εμφανιστεί το παράθυρο επεξεργασίας κώδικα γίνεται επιλογή να τρέξει ο κώδικας για παραχθούν τα αποτελέσματα. Τα σχήματα που προκύπτουν, σε σειρά, είναι: το γεωμετρικό σχήμα του χωρίου καθώς και οι λύσεις των περιπτώσεων: εκπομπή ηχητικών κυμάτων παλλόμενης σφαίρας, σφαίρας σε ταλάντωση πρώτης τάξης και πιστονιού εδραζόμενου σε σφαίρα για τιμές πίεσης.



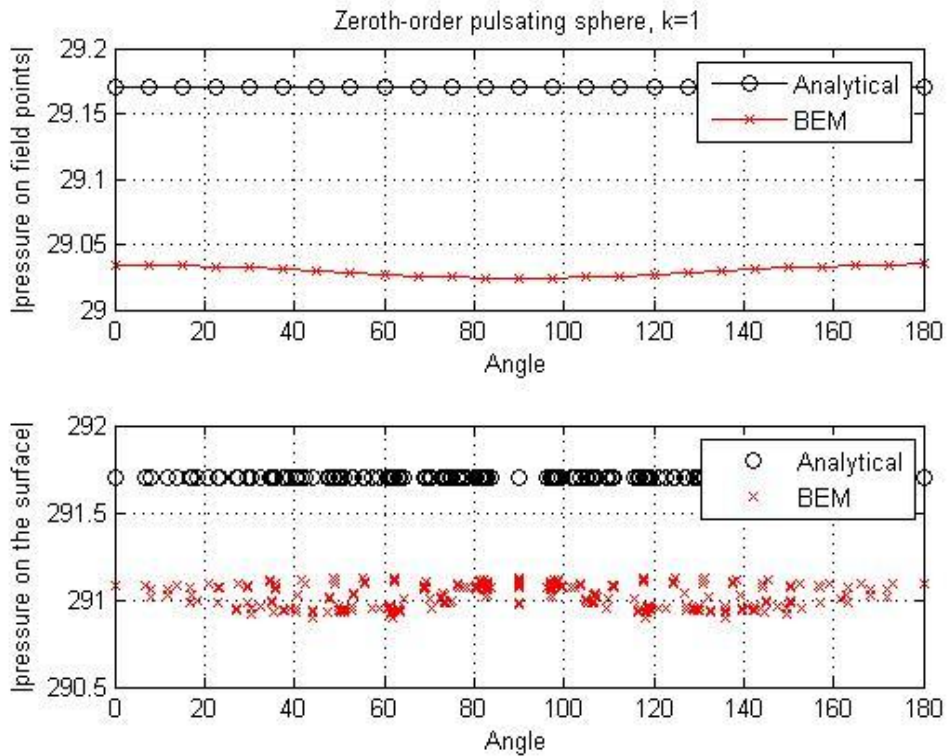
Σχήμα 2.27 Απεικόνιση χωρίου



Σχήμα 2.28 Τιμές πίεσης προβλήματος πιστονιού σε σφαίρα



Σχήμα 2.29 Τιμές πίεσης προβλήματος σφαίρας πρώτου βαθμού σε ταλάντωση



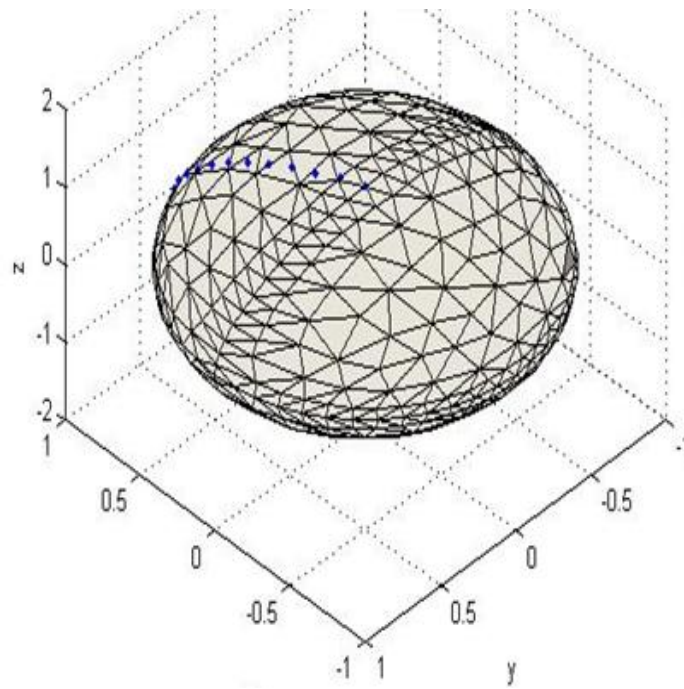
Σχήμα 2.30 Τιμές πίεσης προβλήματος παλλόμενης σφαίρας μηδενικής τάξης

#### Παράδειγμα 4<sup>ο</sup>

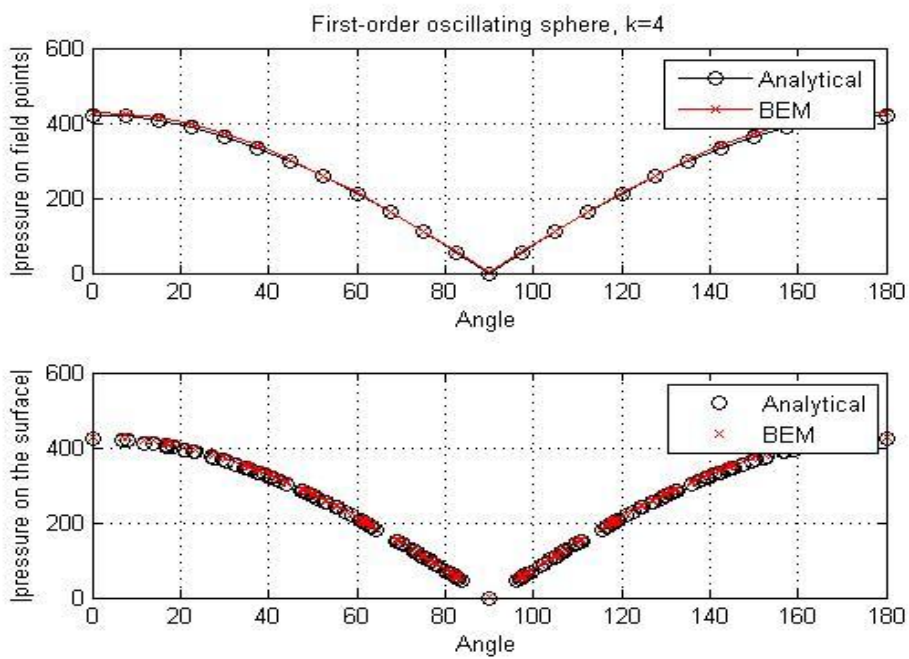
**Εκπομπή ηχητικών κυμάτων παλλόμενης σφαίρας, σφαίρας σε ταλάντωση πρώτης τάξης, διάχυση επίπεδου κύματος από σφαίρα με σημεία υπολογισμού σχηματίζοντα τόξο**

Απο τον φάκελο 3DBEM\_gid επιλέγεται το αρχείο "test\_spheres4\_dif\_input.m". Με την εμφάνιση του παράθυρου επεξεργασίας του κώδικα, εκτελείται και προβάλλονται τα αποτελέσματα. Τα σχήματα που εμφανίζονται, σε σειρά είναι: το γεωμετρικό σχήμα του χωρίου και στη συνέχεια αυτού προσαρμοσμένες στη σφαίρα οι τιμές πίεσης για εκπομπή ηχητικών κυμάτων από παλλόμενη σφαίρα, από σφαίρα σε ταλάντωση πρώτης τάξης και διάχυση επίπεδου κύματος από σφαίρα με τα σημεία υπολογισμού πίεσης να σχηματίζουν τόξο.

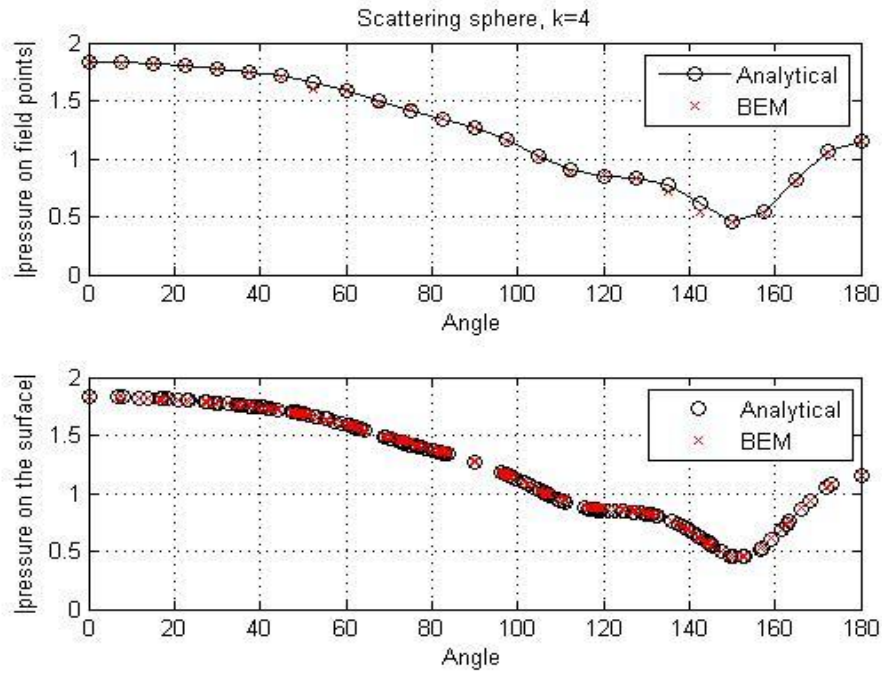




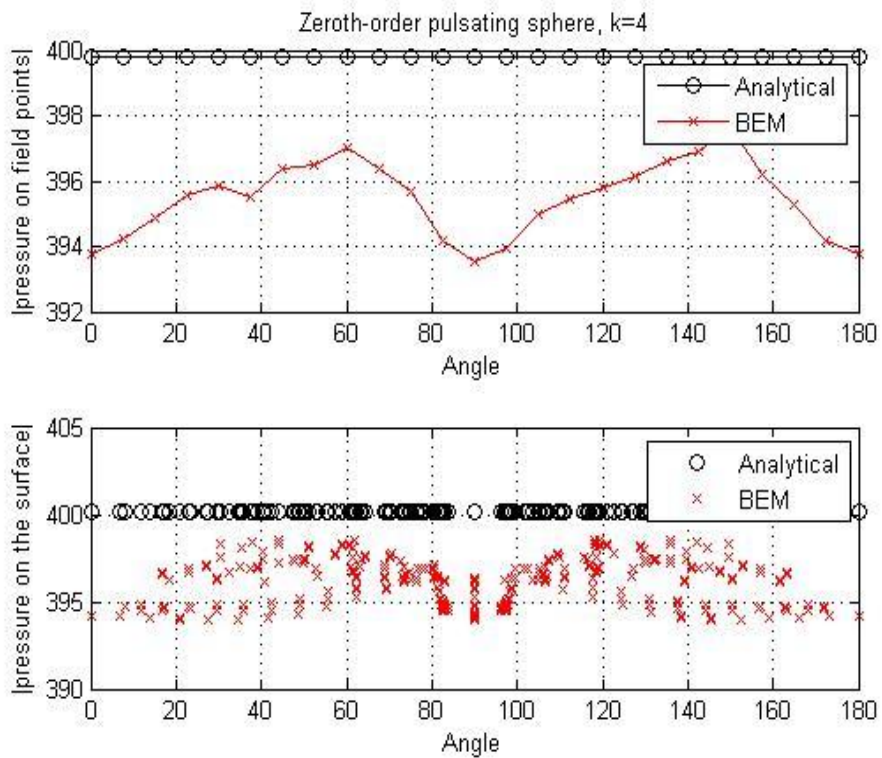
Σχήμα 2.31 Απεικόνιση χωρίου



Σχήμα 2.32 Τιμές πίεσης προβλήματος σφαίρας πρώτης τάξεως σε ταλάντωση



Σχήμα 2.33 Τιμές πίεσης προβλήματος σκέδασης σε σφαίρα

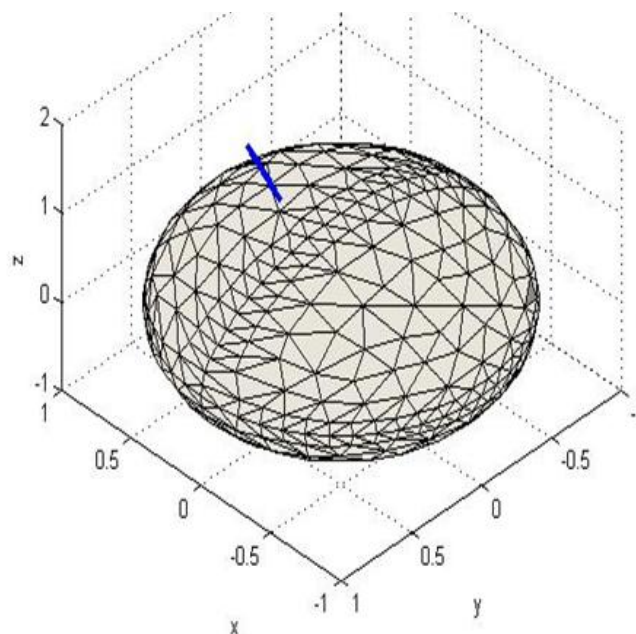


Σχήμα 2.34 Τιμές πίεσης προβλήματος παλλόμενης σφαίρας μηδενικής τάξης

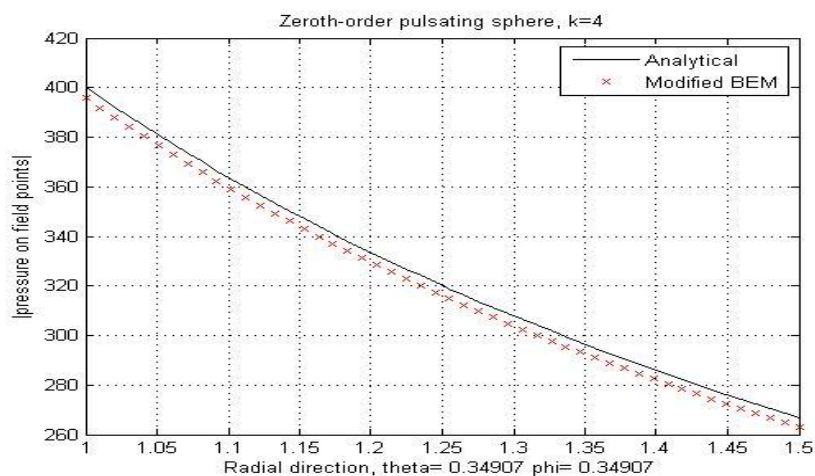
## Παράδειγμα 5°

Εκπομπή ηχητικών κυμάτων παλλόμενης σφαίρας, σφαίρας σε ταλάντωση πρώτης τάξης και διάχυση επίπεδου κύματος από σφαίρα με σημεία υπολογισμού σχηματίζοντα ακτίνα

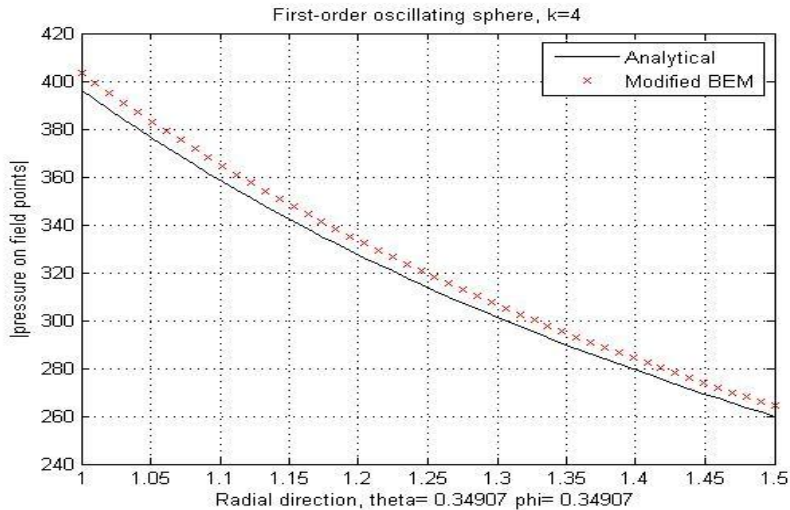
Από τον φάκελο 3DBEM\_gid επιλέγεται το αρχείο "test\_spheres5\_dif\_input.m". Στη συνέχεια, αφού εμφανιστεί το παράθυρο επεξεργασίας του κώδικα, εκτελείται ο κώδικας (F5). Τα σχήματα που εμφανίζονται αφορούν κατά σειρά το γεωμετρικό σχήμα του χωρίου και τις τιμές πίεσης στην επιφάνεια του χωρίου για τις περιπτώσεις: i)εκπομπή ηχητικών κυμάτων παλλόμενης σφαίρας, ii)σφαίρα σε ταλάντωση πρώτης τάξης και iii) διάχυση επίπεδου κύματος από σφαίρα.



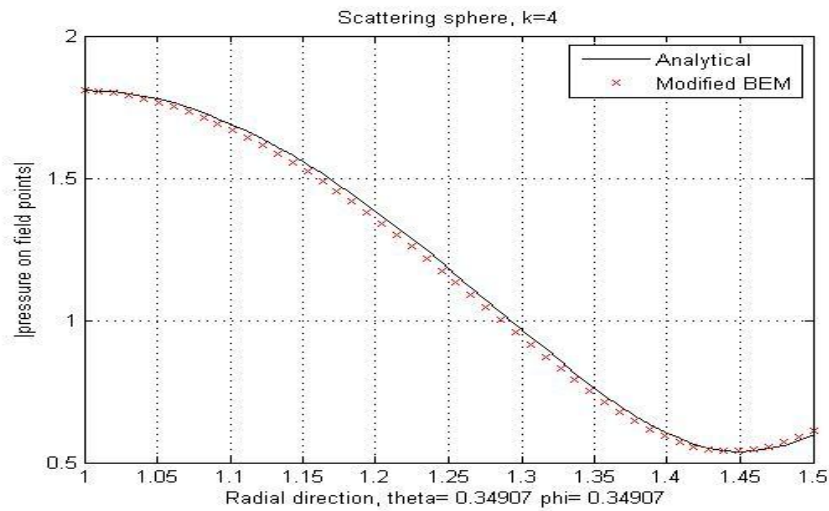
Σχήμα 2.35 Απεικόνιση χωρίου



Σχήμα 2.36 Τιμές πίεσης προβλήματος παλλόμενης σφαίρας μηδενικής τάξης



Σχήμα 2.37 Τιμές πίεσης προβλήματος σφαίρας πρώτης τάξης σε ταλάντωση



Σχήμα 2.38 Τιμές πίεσης προβλήματος σκέδασης σφαίρας

## 2.5 Προγραμματισμός

### 2.5.1 Αρχείο ReadgeomGidMSH.m

Η εφαρμογή Openbem χρειάζεται συμπληρωματικά προγραμματισμό για την εισαγωγή των δεδομένων σχεδιασμού του χωρίου. Το φορμά των αρχείων τύπου .msh που αποθηκεύονται τα δεδομένα στο πρόγραμμα σχεδιασμού GiD αναλύεται βάση της δομής του και χρησιμοποιείται ο προγραμματισμός για την εισαγωγή τους στο περιβάλλον Matlab. Παρακάτω παρουσιάζεται ο κώδικας για την μεταφορά των δεδομένων.

ReadgeomGIDMSH

```
function [nodes,elementsTRI,elementsQUAD]=readgeomGidMSH(filename)

% [nodes,elementsTRI,elementsQUAD]=readgeomGidMSH(filename);
```



```

%
% reads nodes (x,y,z) and elements into matrices
% Version able to read from a GMSH format file
[fid,message] = fopen(filename);
message= 'Cannot process';
M=[];
N=[];

% Εύρεση του πλήθους των κομβικών σημείων
fseek(fid, 57, 'bof');
line=fgetl(fid);
while length(line) ~= 15
    nodesum=sscanf(line,'%d%f%f%f');
    line=fgetl(fid);
end
if length(line)==15 & line=='End Coordinates'
    M= nodesum(1)
end

%Εναρξη καταγραφής συντεταγμένων στον πίνακα
fseek(fid, 44, 'bof');
fin=0;
while feof(fid) == 0 & fin==0
    line=fgetl(fid);
    if length(line)==11
        if line == 'Coordinates'
            fin=1;
        end
    end
end
end

%Τελικό στάδιο για τα κομβικά σημεία
for jj=1:M
    line=fgetl(fid);
    goodline=sscanf(line,'%d%f%f%f');
    nodes(jj,:)=[goodline(2) goodline(3) goodline(4)];
end

position=ftell(fid)
%Εύρεση του πλήθους των στοιχείων
fseek(fid, 29, 'cof');
line=fgetl(fid);
while ~isletter(line(1))
    elementsum=sscanf(line,'%d%f%f%f');
    line=fgetl(fid);
end
if length(line)==12 & line=='End Elements'
    N=elementsum(1)
end
x=position
%Εναρξη καταγραφής στοιχείων σε πίνακα
fseek(fid, x, 'bof')
fin=0;
while feof(fid) == 0 & fin==0
    line=fgetl(fid);
    if length(line)==8
        if line=='Elements'
            fin=1;
        end
    end
end
end
elementsTRI=[];elementsQUAD=[];
fin=0;

```

```

while feof(fid) == 0 & fin==0
    line=fgetl(fid);
    if length(line)==12 & line=='End Elements'
        fin=1;
    else
        [goodline,count]=sscanf(line,'%d');
        if count==4 % 3-node triangle
            elementsTRI=[elementsTRI ; goodline(end-2:end)'];
        end
        if count==5 % 4-node quadrangle
            elementsQUAD=[elementsQUAD ; goodline(end-3:end)'];
        end
    end
end
fclose(fid);

```

### 2.5.2 Κώδικας επιλογής αρχείου εισαγωγής

```

prompt={'Enter the file name:'};
box_title = 'Data input ';
num_lines=1;
def={'sphereg_d_1.msh'};
% Define the label for the entry
entry = {'Filename'};
% Creating the dialog box with the inputdlg command
input = inputdlg(entry, box_title,num_lines,def);
filename=char(input);
[path,name,ext]=fileparts(filename);

```

## Βιβλιογραφία

Banerjee, P.K. , (1994), *The Boundary Element Method in Engineering*, State University of New York at Buffalo, McGraw-Hill

- Becker, A.A. (1992). *The boundary element method in engineering, A complete course*. Cambridge: McGraw-Hill
- Brebbia, Carlos A., & Silva, Jeferson Rego J., & Partridge, Paul W. (1994), *Boundary Element Methods in Acoustics*, Southampton: Computational Mechanics
- Cartwright, D.J. , (2001) *Underlying principles of the Boundary Element Method*, WIT Press
- Γεωργίου, Γιώργος (1999) *Αγγλοελληνικό λεξικό μαθηματικής ορολογίας*. Λευκωσία: Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Cheng & Cheng, Alexander H.-D., Daisy T. (2005), Heritage and early history of the boundary element method , *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, σσ. 268-302.
- Gladwell, G.M., (1994) *The boundary element method*. Netherlands: Kluwer publications
- Henriquez, Vicente C., & Juhl, Peter M.(2010) *Openbem- An open source Boundary Element Method software in Acoustics*. Lisbon: Internoise 2010
- Holmström, Fredrik (2001), *Structure-acoustic analysis using BEM/FEM; Implementation in Matlab*, Sweden, Lund university
- Κατσικαδέλης, Ιωάννης Θ. (1999), *Συνοριακά στοιχεία στην επιστήμη του Μηχανικού. Θεωρία και εφαρμογή*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών
- Kirkup, Stephen ( 1998). *The BEM in acoustics*. Integrated Sound Software
- Παπαγιαννακόπουλος, Παναγιώτης Ι., (1993). *Αγγλο-ελληνικόν λεξικόν μαθηματικών όρων*. Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα
- Rashed, Youssef F. (2001). An introduction to boundary elements, tutorials 1 & 2. *Boundary Element Communication*, 12(1), pgs 49-54 &12(2-3), pgs 34-43
- Wrobel, L.C. (2002). *The boundary element method, Volume 1, Applications in ThermoFluids and Acoustics*. Chippenham, UK: John Wiley & Sons,Ltd.
- Wu, T.W., (2000) *Boundary Element Acoustics. Fundamentals and computer*

*codes.* Λονδίνο: Wit Press