ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
3, Ρωμανού, Χαλέπα, 73133 Χανιά – tel: +30 2821023006, fax: +30 2821023003

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

“ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΦΡΑΣΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΜΕΤΡΗΣΗ”

Μικές Νικόλαος & Σφυράκης Νικόλαος

Επιβλέπων Καθηγητής
Ιωάννης Π. Μακρής

Χανιά
Ιούνιος 2018

Ευχαριστίες

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εκπονήθηκε από τους φοιτητές Σφυράκη Νίκο και Μικέ Νίκο του τμήματος Ηλεκτρονικών Μηχανικών του Τ.Ε.Ι. Κρήτης κατά το ακαδημαϊκό έτος 2016-2017 υπό την επίβλεψη και καθοδήγηση του καθηγητή Ιωάννη Π. Μακρή.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά τον καθηγητή κ. Ιωάννη Π. Μακρή για την εμπιστοσύνη που μας έδειξε και την υπομονή που έκανε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της Πτυχιακής Εργασίας, όπως επίσης και για τη βοήθεια, τις οδηγίες και τις χρήσιμες συμβουλές για την επίλυση διαφόρων θεμάτων που ανέκυψαν.

Επιπλέον, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τις οικογένειές μας και τους φίλους μας, που ένθερμα μας στήριξαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών και έδωσαν όλη τη θετική τους ενέργεια για την επίτευξη αυτού του στόχου.

Περίληψη

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία παρουσιάζονται οι βασικές οδηγίες για την έκφραση και αξιολόγηση της αβεβαιότητας στις μετρήσεις.

Σκοπός αυτής της πτυχιακής εργασίας είναι να χρησιμεύει ως ένας συνοπτικός οδηγός αξιολόγησης και έκφρασης της αβεβαιότητας των αποτελεσμάτων μέτρησης του Διεθνούς Ινστιτούτου Προτύπων και Τεχνολογίας (NIST), για τους επιστήμονες του NIST, τους μηχανικούς, και τους τεχνικούς που κάνουν μετρήσεις και χρησιμοποιούν αποτελέσματα μετρήσεων.

Η εργασία αυτή αποτελείται από επτά κεφάλαια:

Στο **πρώτο κεφάλαιο** βρίσκεται το Θεωρητικό Μέρος αυτής της πτυχιακής εργασίας, όπου συνοψίζονται κάποια ιστορικά γεγονότα, καθώς και η έννοια της Μέτρησης και του Μετρούμενου Μεγέθους.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** περιγράφεται πως προέκυψε η Αβεβαιότητα στις Μετρήσεις, τι είναι το σφάλμα και σε ποιες κατηγορίες χωρίζεται, και οι βασικές διαφορές μεταξύ αβεβαιότητας και σφάλματος. Επίσης, παρουσιάζονται οι μέθοδοι Monte Carlo & Bayesian.

Στο **τρίτο κεφάλαιο** παρουσιάζεται η ταξινόμηση και η αξιολόγηση των στοιχείων αβεβαιότητας, και περιγράφονται οι βασικές κατανομές πιθανότητας που θα μας χρησιμεύσουν για να εκφράσουμε μία αβεβαιότητα σε ένα αποτέλεσμα μέτρησης.

Στο **τέταρτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται συνοπτικά τα είδη των αβεβαιοτήτων και πως πρέπει να αναφέρεται σωστά μία αβεβαιότητα. Επίσης, περιγράφεται το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα και παρουσιάζεται κι ένα διάγραμμα ροής για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας στις μετρήσεις.

Στο **πέμπτο κεφάλαιο** γίνεται αναφορά και παρουσιάζεται η διαφορά μεταξύ αβεβαιότητας οργάνου και αβεβαιότητας μέτρησης. Έπειτα, αναλύονται οι όροι "απόλυτο" και "σχετικό σφάλμα".

Στο **έκτο και τελευταίο κεφάλαιο** γίνεται πειραματισμός, όπου γίνονται μετρήσεις και καταλήγουμε στα αποτελέσματα αυτών των μετρήσεων.

Abstract

In this thesis some basic instructions are presented for expression and evaluation of uncertainty in measurement results.

The aim of this thesis is to serve as a brief guide for the evaluation and expression of uncertainty in measurement results of the National Institute of Standards and Technology (NIST), to scientists of NIST, engineers, and technicians who make measurements and use measurements results.

This paper consists of seven chapters:

The **first chapter** is the theoretical part of this thesis exercise, where some historical events and the concepts of Measurement and Measurand are summarized.

The **second chapter** describes how the Uncertainty resulting in Measurement, what is the problem and what classes divided, and the main differences between uncertainty and error. Also, the methods Monte Carlo & Bayesian are presented.

The **third chapter** presents the classification and the evaluation of uncertainty components and describes the basic probability distributions that will serve us, to express an uncertainty to a measurement result.

The **fourth chapter** summarizes the types of uncertainties and how to correctly refer an uncertainty. Also, the Central Limit Theorem is described, and a flow chart is presented for the calculation of Uncertainty in Measurement.

The **fifth chapter** is a reference and the difference between the instrument uncertainty and measurement uncertainty is presented. Then, the terms "absolute" and "relative error" are being analyzed.

In **the sixth and last chapter** we did experimentation, where measurements are made and end up on the results of these measurements.

Πίνακας περιεχομένων

"…Οι αριθμοί καθορίζουν την τάξη και την αρμονία στο σύμπαν…"

- *Πυθαγόρας*

"… Στις περισσότερες εμπειρικές επιστήμες, το ημίφως είναι στην αρχή εμφανές και γίνεται λιγότερο σημαντικό και πιο λεπτό καθώς η ακρίβεια της φυσικής μέτρησης αυξάνεται. Στην μηχανική, για παράδειγμα, το ημίφως είναι αρχικά σαν ένα παχύ αποκρυπτόμενο πέπλο στο στάδιο όπου μετράμε δυνάμεις μόνο από τις μυϊκές μας αισθήσεις και σταδιακά εξασθενεί καθώς η ακρίβεια των μετρήσεων αυξάνεται…"

- *Bridgman*

Εισαγωγή

Η διαδικασία των μετρήσεων είναι τόσο παλιά όσο και η ανθρώπινη ύπαρξη. Οι απαιτήσεις όμως, που αφορούν την ακρίβεια και τις δυνατότητες αυξήθηκαν κι αυξάνονται συνεχώς, παράλληλα με την εξέλιξη της τεχνολογίας και τις απαιτήσεις στην ποιότητα της ζωής μας.

Οι **μετρήσεις** αποτέλεσαν την βάση για την ανάπτυξη του τεχνολογικού μας πολιτισμού. Τα πρώτα όργανα μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν ήταν τα μηχανικά όργανα. Στη συνέχεια κατασκευάστηκαν τα ηλεκτρομηχανικά όργανα, τα οποία εξακολουθούν να είναι σε ευρεία χρήση. Το κύριο μειονέκτημα των οργάνων αυτών είναι ότι, δεν μπορούν να μετρήσουν μεγέθη που μεταβάλλονται με υψηλή ταχύτητα, εξαιτίας της αδράνειας του κινητού τους μέρους. Έτσι, επινοήθηκαν τα ηλεκτρονικά όργανα μέτρησης.

Ηλεκτρονικά Όργανα Μέτρησης

Οι **μετρήσεις** που γίνονται καθημερινά δεν αποτελούν μόνο το μέσο προαγωγής της επιστημονικής έρευνας και των τεχνολογικών κατακτήσεων, αλλά επηρεάζουν βαθύτατα τη ζωή του κάθε ανθρώπου. Φανερά παραδείγματα είναι οι εμπορικές συναλλαγές, η εξασφάλιση της ποιότητας προϊόντων, η εκμετάλλευση φυσικών πόρων, η δημόσια υγεία κλπ.

Στην καθημερινή ζωή, οι **μετρήσεις** θεωρούνται δεδομένες και συνήθως δεν αμφισβητεί κανείς την αξιοπιστία τους. Παραδείγματος χάρη, οι ζυγοί της αγοράς τροφίμων, οι μετρητές στο βενζινάδικο, οι μετρητές του ηλεκτρικού ρεύματος και πολλά άλλα όργανα μέτρησης, θεωρούνται ελεγχόμενα όργανα ακρίβειας.

Στην πραγματικότητα όμως, ***δεν υπάρχουν μετρήσεις που δεν περιλαμβάνουν έστω κι ένα μικρό σφάλμα***. Σφάλματα κι αποκλίσεις μετρήσεων πάντα συνοδεύουν τις μετρήσεις, δεδομένου ότι ποτέ δεν είναι δυνατόν να υπάρχει πλήρης ταύτιση τόσο μεταξύ δύο ίδιων μετρήσεων, όσο κι ανάμεσα στη μετρούμενη τιμή και στην πραγματική τιμή ενός μεγέθους.

Συντομογραφίες

AIC: Κριτήριο Πληροφοριών Akaike

ARMA: Αυτοπαλινδρομικές κινητές μέσου όρου χρονοσειρές

GUM: Οδηγός για την έκφραση της αβεβαιότητας στη μέτρηση

GUM-S1: Συμπλήρωμα Οδηγού 1

MQA: Διασφάλιση Ποιότητας Μέτρησης

NIST: Διεθνές Ινστιτούτο Προτύπων και Τεχνολογίας

NUM: Μηχανή Αβεβαιότητας NIST

ΤΣ1297: Τεχνική Σημείωση 1297

VIM: Διεθνές Λεξιλόγιο Βασικών και Γενικών Όρων στη Μετρολογία

CIPM: Διεθνής Επιτροπή Μέτρων & Σταθμών

BIPM: Διεθνές Γραφείο Μέτρων & Σταθμών

IEC: Διεθνής Ηλεκτροτεχνική Επιτροπή

ISO: Διεθνής Οργανισμός Τυποποίησης

OIML: Διεθνής Οργανισμός Νόμιμης Μετρολογίας

Κ.Ο.Θ: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

M.C: Monte Carlo

Δ.Ε: Διάστημα Εμπιστοσύνης

Κεφάλαιο 1: Θεωρητικό Μέρος

1.1 Ιστορικά γεγονότα

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων και τα συμπεράσματα που προέρχονται από αυτά, αποτελούν μεγάλο μέρος των τεχνικών πληροφοριών που παράγονται από το **Διεθνές Ινστιτούτο Προτύπων & Τεχνολογίας** (**NIST**). Η χρησιμότητα των αποτελεσμάτων μέτρησης και πολλές από αυτές τις πληροφορίες, καθορίζονται σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα των καταστάσεων της αβεβαιότητας. Για παράδειγμα, μόνο όταν ποσοτικές και καλά τεκμηριωμένες *καταστάσεις της αβεβαιότητας* συνοδεύουν τα αποτελέσματα των διακριβώσεων του **NIST**, μπορούν τότε οι χρήστες των υπηρεσιών διακρίβωσης να καθορίσουν το επίπεδο ιχνηλασιμότητας τους στα πρότυπα μέτρησης των Η.Π.Α, που διατηρούνται στο **NIST**.

Κεντρική Είσοδος του NIST στο Boulder, Colorado

Αν και η συντριπτική πλειοψηφία των αποτελεσμάτων μέτρησης του **NIST** συνοδεύεται από ποσοτικές καταστάσεις της αβεβαιότητας, δεν υπήρξε ποτέ μία ομοιόμορφη προσέγγιση στο **NIST** για την έκφραση της αβεβαιότητας. Η χρήση μίας μονάχα προσέγγισης αντί για παρά πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις, θα εξασφαλίσει την συνοχή των αποτελεσμάτων. Για την αντιμετώπιση αυτού του θέματος, διορίστηκε από τον **John W.Lyons**, διευθυντή του **NIST**, μία Ειδικού Σκοπού Επιτροπή για *Καταστάσεις Αβεβαιότητας* (Ιούλιος 1992).

John W. Lyons, director of NIST

Τα μέλη της Επιτροπής αυτής ήταν:

- D.C Cranmer (*Εργαστήριο Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών*)
- K. R. Eberhardt (*Εργαστήριο Πληροφορικής και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*)
- R.M Judish (*Εργαστήριο Ηλεκτρονικών και Ηλεκτρολόγων Μηχανικών*)
- R.A. Kamper (*Γραφείο Διευθυντή, Εργαστήρια NIST/ Boulder*)
- C.E. Kuyatt (*Εργαστήριο Φυσικής*)
- J.R. Rosenblatt (*Εργαστήριο Πληροφορικής και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*)
- J.D. Simmons (*Υπηρεσίες Τεχνολογίας*)
- L.E. Smith (*Γραφείο Διευθυντή του NIST*)
- B.N Taylor (*Εργαστήριο Φυσικής*)
- R.L. Watters (*Εργαστήριο Χημικής Επιστήμης και Τεχνολογίας*)

Η δράση αυτή, υποκινήθηκε εν μέρει από την *αναδυόμενη διεθνώς παραδοχή* σχετικά με την προσέγγιση για την έκφραση της αβεβαιότητας στην μέτρηση, που συνιστάται από την **Διεθνής Επιτροπή Μέτρων και Σταθμών** (**CIPM**). Η παγκόσμια χρήση της προσέγγισης αυτής, θα επιτρέψει στις μετρήσεις που εκτελέστηκαν σε διαφορετικές χώρες και σε διαφορετικά τμήματα, όπως η επιστήμη, η μηχανική, το εμπόριο, και η βιομηχανία να είναι πιο εύκολα κατανοητές, ερμηνεύσιμες και συγκρίσιμες.

Η **Ειδικού Σκοπού Επιτροπή** κατέληξε στο συμπέρασμα, ότι η προσέγγιση **CIPM** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παρέχει ποσοτικές εκφράσεις της αβεβαιότητας της μέτρησης. Τότε, η Επιτροπή, πρότεινε στον **John W.Lyons** μία συγκεκριμένη πολιτική για την εφαρμογή αυτής της προσέγγισης στο **NIST**, η οποία αργότερα ενσωματώθηκε στο *Διοικητικό Εγχειρίδιο* του ***NIST***.

Έτσι, δύο μέλη της Επιτροπής αυτής, προετοίμασαν την **Τεχνική Σημείωση 1297** (**ΤΣ1297**) για να βοηθήσουν το προσωπικό του **NIST** στην τοποθέτηση αυτής της πολιτικής στην πράξη. Ο **John W.Lyons**, πιστεύει ότι αυτή η πολιτική, παρέχει μία χρήσιμη συζήτηση της προσέγγισης **CIPM**, κι ότι μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς υπερβολική δυσκολία και να βοηθήσει στο να αυξηθεί η ανταγωνιστικότητα στις εθνικές και διεθνείς αγορές.

1.1.1 Τεχνική Σημείωση 1297

Τον Οκτώβριο του ‘92, μία νέα πολιτική για την έκφραση της αβεβαιότητας της μέτρησης συστάθηκε στο **NIST**. Αυτή η πολιτική εκτίθεται στο “***Καταστάσεις της Αβεβαιότητας που σχετίζονται με τα Αποτελέσματα Μέτρησης***”.

Η νέα πολιτική του **NIST** βασίζεται στην προσέγγιση για την *έκφραση της αβεβαιότητας στην μέτρηση* που προτείνεται από την προσέγγιση **CIPM** το 1981 **[1]** και στην εκπόνηση της εν λόγω προσέγγισης που δίνεται από τον *Οδηγό για την Έκφραση της Αβεβαιότητας στην Μέτρηση* (**GUM**), ο οποίος προετοιμάστηκε από άτομα που διορίστηκαν από τα **BIPM, IEC, ISO και OIML [1]**. Παρά το γεγονός ότι αυτά τα άτομα διορίστηκαν από αυτούς τους οργανισμούς, ο *Οδηγός* έχει δημοσιευθεί από το **ISO** (Διεθνής Οργανισμός που τυποποιεί τον τρόπο που οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί λειτουργούν, παράγουν και εμπορεύονται τα προϊόντα και τις υπηρεσίες τους) στο όνομα όλων των επτά οργανισμών.

Οι επτά οργανισμοί που προετοίμασαν τον Οδηγό για την Έκφραση της Αβεβαιότητας στην Μέτρηση (GUM).

Η προσέγγιση **CIPM** βρίσκεται στην Σύσταση INC-1 της Ομάδας Εργασίας για την Κατάσταση των Αβεβαιοτήτων **[2]**. Η Ομάδα Εργασίας συγκλήθηκε το 1980 από το **BIPM** ως συνέπεια ενός αιτήματος (1972) από την **CIPM**. Το αίτημα, έλεγε ότι, το **BIPM** μελετάει την ερώτηση για την επίτευξη μίας *διεθνούς παραδοχής* για την έκφραση της αβεβαιότητας στην μέτρηση. Αυτό το αίτημα ξεκίνησε από το τότε μέλος της **CIPM** και Διευθυντή του **NIST E.Ambler**.

Το 1985, ένα αίτημα από την **CIPM** στο **ISO** ζητώντας του να αναπτύξει ένα ευρέως εφαρμόσιμο έγγραφο καθοδήγησης βασισμένο στην Σύσταση INC-1 (1980), οδήγησε στην ανάπτυξη του **GUM** που είναι η πιο πλήρης αναφορά, σχετικά με τη εφαρμογή της προσέγγισης **CIPM** για την έκφραση της αβεβαιότητας της μέτρησης. Η ανάπτυξή της δίνει περαιτέρω ώθηση στην παγκόσμια υιοθέτηση αυτής της προσέγγισης.

Η πρώτη **ΤΣ1297** του **NIST** δημοσιεύτηκε τον Ιανουάριο του ‘93. Μία δεύτερη εκτύπωση ακολούθησε σύντομα έκτοτε και συνολικά περίπου 10.000 αντίτυπα διανεμήθηκαν σε ιδιώτες στο **NIST** και τόσο στις Η.Π.Α, όσο και στο εξωτερικό σε μετρολόγους, επιστήμονες, μηχανικούς, στατιστικολόγους και σε άλλους, οι οποίοι ασχολούνταν με τη μέτρηση και την αξιολόγηση και την έκφραση της αβεβαιότητας του αποτελέσματος μίας μέτρησης.

Η **ΤΣ1297** εκπονήθηκε με *στόχο* την συνοπτική παρουσίαση εκείνων των πτυχών του **GUM**, που θα χρησιμοποιούνται περισσότερο στο προσωπικό του **NIST** για την εφαρμογή αυτής της πολιτικής.

Οι οδηγίες που δίνονται στην **ΤΣ1297** προορίζονται να είναι εφαρμόσιμες στα περισσότερα αποτελέσματα μέτρησης του **NIST**, που συνδέονται με:

- **i.** διεθνείς συγκρίσεις προτύπων μέτρησης
- **ii.** βασική έρευνα
- **iii.** εφαρμοσμένη έρευνα και μηχανική
- **iv.** βαθμονόμηση προτύπων μέτρησης του πελάτη
- **v.** πιστοποίηση των πρότυπων υλικών αναφοράς, και
- **vi.** παραγωγή πρότυπου αναφοράς δεδομένων

1.1.2 Τεχνική Σημείωση 1900

Αυτό το έγγραφο, συμπληρώνει αλλά δεν αντικαθιστά την **ΤΣ1297** της οποίας, οι οδηγίες και οι τεχνικές μπορούν να συνεχίσουν να χρησιμοποιούνται, όταν είναι κατάλληλες για το σκοπό και δεν υπάρχει κανένας επιτακτικός λόγος να αμφισβητηθεί η εφαρμογή τους.

Ο *σκοπός* αυτού του *Απλού Οδηγού* **[4]**, είναι *πολύ ευρύτερος* από τον σκοπό και της **ΤΣ1297** και του **GUM**, επειδή προσπαθεί να αντιμετωπίσει πολλές από τις προκλήσεις της αξιολόγησης της αβεβαιότητας που έχουν προκύψει στο **NIST** από την δεκαετία του ‘90, π.χ. περιλαμβάνει τη μοριακή βιολογία, το φαινόμενο του θερμοκηπίου και κλιματικές επιστημονικές μετρήσεις, και την εγκληματολογική επιστήμη.

Διευρύνει τον σκοπό της **ΤΣ1297** αναγνωρίζοντας **εξισώσεις παρατήρησης** (δηλαδή, στατιστικά μοντέλα) ως μοντέλα μέτρησης. Αυτά τα μοντέλα είναι απαραίτητα για να μειώσουμε δεδομένα από συγκρίσεις κλειδί, για να συνδυάσουμε αποτελέσματα μέτρησης για το ίδιο μετρούμενο μέγεθος που αποκτάται από διαφορετικές μεθόδους, και για να χαρακτηρίσουμε την αβεβαιότητα των συναρτήσεων βαθμονόμησης και ανάλυσης που χρησιμοποιούνται στην μέτρηση της δύναμης, της θερμοκρασίας, ή της σύνθεσης των μειγμάτων αερίων.

1.1.3 Μηχανή Αβεβαιότητας NIST

Η διαθεσιμότητα της **Μηχανής Αβεβαιότητας του NIST** (**NUM**) **[4]** ως μία υπηρεσία στο Διαδίκτυο (uncertainty.nist.gov), διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό την εφαρμογή των συμβατικών τύπων για την διάδοση της αβεβαιότητας, κι επίσης την εφαρμογή της μεθόδου **Monte Carlo (M.C)**, η οποία χρησιμοποιείται για τον ίδιο σκοπό. Η **NUM** μπορεί να αναπαράγει τα αποτελέσματα **όλων** των παραδειγμάτων της **ΤΣ 1297** και του **GUM**.

Σημείωση: Όταν η μέθοδος **M.C** και ο τύπος του **Gauss** για τη διάδοση της αβεβαιότητας, παράγουν αποτελέσματα τα οποία είναι διαφορετικά, τότε προτιμώνται τα αποτελέσματα από την μέθοδο **Monte Carlo**.

1.2 Μέτρηση

Μέτρηση είναι μία ενημερωτική εκχώρηση της τιμής σε ποσοτικές ή ποιοτικές ιδιότητες που αφορούν την σύγκριση με ένα πρότυπο.

Οι **μετρήσεις** είναι εξαιρετικά σημαντικές στην επιστήμη, στη τεχνολογία και στη βιομηχανία. Η ανάπτυξη τεχνικών για την ακριβή μέτρηση μεγεθών, όπως η μάζα και ο χρόνος, αποτελεί προϋπόθεση για τη λεπτομερή και προσεκτική παρατήρηση της φύσης και την ανάπτυξη της επιστήμης της φυσικής.

Η Μέτρηση, ωστόσο, είναι κατανοητή σε μία πολύ ευρύτερη έννοια από ότι προβλέπεται στην τρέχουσα έκδοση του *Διεθνούς Λεξιλογίου Βασικών και Γενικών Όρων στη Μετρολογία* (**VIM**) (Παράρτημα Β), και είναι σύμφωνη με τους ορισμούς που προτείνονται για την αντιμετώπιση των αναγκών της μέτρησης:

Μέτρηση είναι μία πειραματική ή υπολογιστική διαδικασία που σε σύγκριση με ένα πρότυπο, παράγει μία εκτίμηση της πραγματικής τιμής μίας ιδιότητας ενός υλικού ή ενός εικονικού αντικειμένου ή ενός συνόλου αντικειμένων, ή μίας διαδικασίας εκδήλωσης, ή μίας σειράς γεγονότων, μαζί με μία αξιολόγηση αβεβαιότητας που σχετίζεται με αυτήν την εκτίμηση και προορίζεται για χρήση στην υποστήριξη της λήψης αποφάσεων.

1.3 Μετρούμενο Μέγεθος

Μια συγκεκριμένη ποσότητα που υπόκειται σε μέτρηση. Το μετρούμενο μέγεθος που πρόκειται να μετρηθεί μπορεί να είναι:

- <u>ποιοτικό</u> (π.χ. η ταυτότητα της νουκλεοβάσεως σε μία συγκεκριμένη θέση ενός κλώνου του DNA),
- ή <u>ποσοτικό</u> (π.χ. η συγκέντρωση μάζας 25-υδροξυβιταμίνη D3 στο NIST Πρότυπο Υλικό Αναφοράς 972a, Επίπεδο 1, της οποίας η πιστοποιημένη τιμή είναι 28.8ng/mL).

Το **μετρούμενο μέγεθος** μπορεί, επίσης, να είναι <u>μία τακτική ιδιότητα</u> (π.χ. η σκληρότητα Rockwell C ενός υλικού), ή <u>μία συνάρτηση</u> της οποίας, οι τιμές μπορεί να είναι *ποσοτικές* (π.χ. η απόκριση του αισθητήρα δυνάμεων σε μία εφαρμοζόμενη δύναμη) ή *ποιοτικές* (π.χ. η προέλευση ενός θραύσματος γυαλιού που προσδιορίζεται σε μία ιατροδικαστική έρευνα).

Οι τιμές των **μετρούμενων μεγεθών** είναι εκτιμήσεις πραγματικών τιμών. Το **VIM** ορίζει *πραγματική τιμή* μίας ιδιότητας, ως κάθε τιμή της ιδιότητας που είναι συνεπής με τον ορισμό της ιδιότητας.

<u>**Παράδειγμα**</u>: Η <u>*ταχύτητα του φωτός στο κενό*</u> και η <u>*μάζα του ήλιου*</u> έχουν πολλές κατανοητές τιμές: οποιοσδήποτε θετικός αριθμός μέτρων ανά δευτερόλεπτο και οποιοσδήποτε θετικός αριθμός χιλιόγραμμων αντίστοιχα. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει ακριβώς μία πραγματική τιμή, επειδή μία και μόνο μία τιμή είναι συνεπής με τον ορισμό της στο **SI**. Η μάζα του ήλιου αλλάζει συνεχώς, καθώς εξαρτάται από το πόσο μεγάλο μέρος της ατμόσφαιράς του περιλαμβάνεται στον ορισμό του.

ταχύτητα φωτός στο κενό

μάζα ήλιου

1.4 Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων

Τα **μεγέθη** είναι ποσότητες που αντιστοιχούν σε φυσικά φαινόμενα και χωρίζονται σε *μονόμετρα* και *διανυσματικά*.

Μονόμετρα: τα μεγέθη που για να οριστούν χρειάζονται μόνο έναν αριθμό και μια μονάδα μέτρησης (μάζα, χρόνος, θερμοκρασία, ηλεκτρικό φορτίο κ.λπ.).

Διανυσματικά: τα μεγέθη που για να οριστούν απαιτούν κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά), μέτρο και σημείο εφαρμογής (ταχύτητα, επιτάχυνση, μετατόπιση κ.λπ.).

Η τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους εκφράζεται συνήθως ως *το γινόμενο ενός αριθμού και μίας μονάδος*. Η μονάδα μέτρησης είναι απλά μια συγκεκριμένη ποσότητα του μεγέθους, η οποία χρησιμοποιείται ως τιμή αναφοράς, κι ο αριθμός είναι το πηλίκο της μετρούμενης ποσότητας με την μονάδα μέτρησης.

Για την μέτρηση των μεγεθών καθιερώθηκε ένα κοινά αποδεκτό σύστημα μονάδων, που έχει ως στόχο την καλύτερη επικοινωνία και επεξεργασία δεδομένων μεταξύ ανθρώπων από άλλες χώρες. Το σύστημα αυτό ονομάζεται **Systéme International** και συνήθως χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία **SI**. Χρησιμοποιεί *εφτά θεμελιώδη μεγέθη*, από τα οποία μπορούν να παραχθούν όλα τα άλλα.

Τα **θεμελιώδη μεγέθη** και οι μονάδες τους είναι:

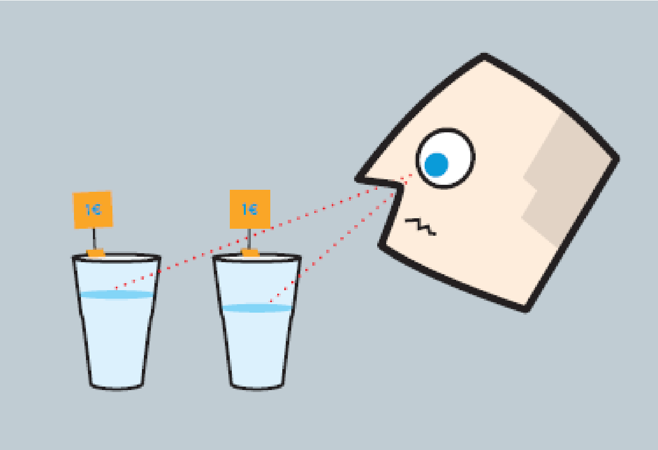
Μέγεθος	Σύμβολο	Μονάδα	Σύμβολο
Μήκος	l	μέτρο	m
Μάζα	m	χιλιόγραμμο	kg
Χρόνος	t	δευτερόλεπτο	s
Θερμοκρασία	T	Κέλβιν	K
Ποσότητα ύλης	n	μολ	mol
Ένταση ηλεκτρικού φορτίου	I	Αμπέρ	A
Φωτεινή ένταση	I_u	καντέλα	cd

Το **Διεθνές Σύστημα Μονάδων** (**SI**) δεν είναι στατικό, αλλά εξελίσσεται ώστε να ανταποκρίνεται στις όλο και πιο απαιτητικές προδιαγραφές των μετρήσεων της σύγχρονης κοινωνίας μας.

Κεφάλαιο 2: Η Αβεβαιότητα στις Μετρήσεις

2.1 Αβεβαιότητα Μέτρησης

Η **Αβεβαιότητα της Μέτρησης** είναι *η αμφιβολία για την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους που παραμένει μετά την πραγματοποίηση μίας μέτρησης*. Περιγράφεται πλήρως και ποσοτικά από μία κατανομή πιθανοτήτων για το σύνολο των τιμών του μετρούμενου μεγέθους.



Η **αβεβαιότητα της μέτρησης** σημαίνει ότι, οι πολλαπλές τιμές του μετρούμενου μεγέθους μπορεί να είναι σύμφωνες με την υπάρχουσα γνώση για την πραγματική του τιμή, που προκύπτουν από παρατηρήσεις που έγιναν κατά την διάρκεια της μέτρησης και πιθανώς από προϋπάρχουσα γνώση: όσο περισσότερο διεσπαρμένες είναι εκείνες οι πολλαπλές τιμές, τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα της μέτρησης.

Σημείωση: Τυπικά, *διαφορετικοί μετρολόγοι* θα διεκδικήσουν *διαφορετικές αβεβαιότητες μέτρησης* όταν μετράνε το ίδιο μετρούμενο μέγεθος, ακόμη κι όταν λαμβάνουν την ίδια ανάγνωση χρησιμοποιώντας την ίδια συσκευή μέτρησης.

2.1.1 Αβεβαιότητα Μέτρησης για βαθμωτά μεγέθη

Για **βαθμωτά μετρούμενα μεγέθη**, η *αβεβαιότητα της μέτρησης* μπορεί να συνοψιστεί από την *τυπική απόκλιση* (τυπική αβεβαιότητα) της αντίστοιχης κατανομής πιθανότητας, ή από *παρόμοιες ενδείξεις διασποράς* (π.χ. η μέση απόλυτη απόκλιση από την διάμεσο). Μία σειρά από επιλεγμένα ποσοστημόρια αυτής της κατανομής παρέχει μία πιο λεπτομερή περιληπτική παρουσίαση.

- **Τυπική Απόκλιση** (**standard deviation**): Το μέτρο της διασποράς των δεδομένων που υπολογίζεται από την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης τους. Έτσι, η *τυπική απόκλιση* για πλήθος μετρήσεων **N** και **i** = **1**,…,**N**, υπολογίζεται από την σχέση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

και η **τυπική απόκλιση δείγματος** (**sample standard deviation**) δίνεται από την σχέση:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

όπου $\overline{x}$ ο **σταθμισμένος μέσος όρος** (ή αλλιώς μέση τιμή) ενός συνόλου τιμών ή μιας κατανομής πιθανοτήτων, ο οποίος δίνεται από την σχέση:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

2.1.2 Αβεβαιότητα Μέτρησης για διανυσματικά μεγέθη

Για **διανυσματικά μετρούμενα μεγέθη**, μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατάλληλες γενικεύσεις αυτών των περιληπτικών παρουσιάσεων. Για ονομαστικές ιδιότητες, η εντροπία της αντίστοιχης κατανομής της πιθανότητας είναι μία από τις πολλές πιθανές συνοπτικές περιγραφές της μέτρησης της αβεβαιότητας.

2.2 Αβεβαιότητα και Σφάλμα Μέτρησης

Η **αβεβαιότητα** και το **σφάλμα** είναι διαφορετικές έννοιες **[4]**. Η πρώτη μεταφέρει μία αίσθηση αμφιβολίας, ενώ η δεύτερη προτείνει ένα λάθος.

- ✓ Η **αβεβαιότητα** της μέτρησης, είναι ένα ιδιαίτερο είδος αβεβαιότητας, δηλαδή είναι σύμφωνη με το πώς η αβεβαιότητα γίνεται αντιληπτή στην καθημερινή χρήση.

- ✓ Το **σφάλμα** της μέτρησης δεν είναι αναγκαστικά η συνέπεια ενός λάθους. Αντ’ αυτού, ορίζεται ως η διαφορά, ή η απόσταση μεταξύ μίας μετρούμενης τιμής και της αντίστοιχης πραγματικής τιμής. Όταν η πραγματική τιμή είναι γνωστή, το σφάλμα της μέτρησης γίνεται αναγνωρίσιμο και μπορεί να διορθωθεί.

$$\textbf{Σφάλμα} = \left| \textit{μετρούμενη τιμή} - \textit{πραγματική τιμή} \right|$$

<u>Παράδειγμα</u>: Εάν τα 114V, 212V, 117V, 121V και 113V αναφέρονται ως ενδείξεις, οι οποίες έγιναν στην πορεία μίας ημέρας από την τάση στην ίδια πρίζα σε μία κατοικία, τότε η δεύτερη τιμή πιθανώς να είναι ένα λάθος καταγραφής που οφείλεται στην μεταφορά των δύο πρώτων ψηφίων του, ενώ η διασπορά των άλλων αντικατοπτρίζει την συνδυασμένη επίδραση των κανονικών διακυμάνσεων της πραγματικής τάσης και της αβεβαιότητας της μέτρησης.

<u>Σημειώσεις</u>:

(i) Η διαφορά ανάμεσα στο **σφάλμα** και την **αβεβαιότητα** είναι ότι, το *σφάλμα* μπορεί να διορθωθεί, ώστε το αποτέλεσμα να είναι πιο κοντά στην αληθή τιμή, ενώ η *αβεβαιότητα* παραμένει λόγω της αμφιβολίας (τυχαίου σφάλματος) που υπάρχει για το πειραματικό αποτέλεσμα.

(ii) Ο όρος *αβεβαιότητα* προτιμάται σε σχέση με τον όρο *σφάλμα*, επειδή ο δεύτερος δεν μπορεί ποτέ να είναι γνωστός.

<u>Συμπέρασμα:</u> Η <u>διαφορά</u> μεταξύ ***σφάλματος*** και ***αβεβαιότητας*** πρέπει πάντα να λαμβάνεται υπόψη. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα μίας μέτρησης μετά τη διόρθωση μπορεί να είναι πολύ κοντά στην άγνωστη τιμή του μετρούμενου μεγέθους, κι έτσι, μπορεί να έχει αμελητέο σφάλμα, ακόμη κι αν έχει μία μεγάλη αβεβαιότητα**.**

2.3 Σφάλματα μέτρησης

Το αποτέλεσμα της μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους είναι κατά κανόνα ακαθόριστο σε μικρό ή μεγάλο βαθμό, δηλαδή αν επαναλάβουμε τη μέτρηση δε θα πάρουμε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα. Ακόμη κι αν επαναλάβουμε ένα πείραμα διατηρώντας τις ίδιες ακριβώς συνθήκες, κάποιος παράγοντας που δεν ελέγχουμε μπορεί να επηρεάζει λίγο ή πολύ το αποτέλεσμα της μέτρησης. Θα θέλαμε λοιπόν να εκτιμήσουμε τις πειραματικές αυτές αποκλίσεις στη μέτρηση και το πρώτο βήμα είναι να εντοπίσουμε τους διαφορετικούς τύπους σφάλματος μέτρησης. Το **σφάλμα** αναγράφεται με τη μορφή:

Τιμή ±αβεβαιότητα

<u>**Παράδειγμα**</u>: Έστω, ότι σε ένα πείραμα μετράμε την τάση στα άκρα μιας αντίστασης και βρίσκουμε ότι είναι μεταξύ **20.2V** και **20.4V**. Θα γράψουμε την εκτίμησή μας ως **20.3V± 0.1V**, όπου **20.3** είναι η περισσότερο πιθανή τιμή της τάσης και **±0.1** το **σφάλμα** (η αβεβαιότητα) της μέτρησης.

2.3.1 Ταξινόμηση Σφαλμάτων Μέτρησης

Οι μετρήσεις διαφέρουν μεταξύ τους για διαφόρους λόγους αλλά κυρίως ως προς την προέλευσή τους και ακολούθως, συνοψίζονται σε δύο κατηγορίες. Οι δύο τύποι **σφαλμάτων μέτρησης** είναι τα *συστηματικά σφάλματα* (systematic errors) και τα *τυχαία σφάλματα* (random errors) που προσδίδουν και αντίστοιχα χαρακτηριστικά στις μετρήσεις.

2.3.2 Συστηματικά Σφάλματα

Τα **συστηματικά σφάλματα [5]** επαναλαμβάνονται και υπάρχει κάποιο αίτιο που τα δημιουργεί. Πολλές φορές είναι δύσκολο να εντοπισθούν, αλλά μπορούν να εξουδετερωθούν με κατάλληλη *βαθμονόμηση* (calibration), συγκρίνοντας με κάποιον τρόπο, μετρήσεις και πραγματικές τιμές. Τα **συστηματικά σφάλματα** ορίζουν την <u>ορθότητα (accuracy) της μέτρησης</u>, δηλαδή κατά πόσο οι μετρήσεις είναι κοντά στις πραγματικές τιμές ή υπάρχουν συστηματικές αποκλίσεις.

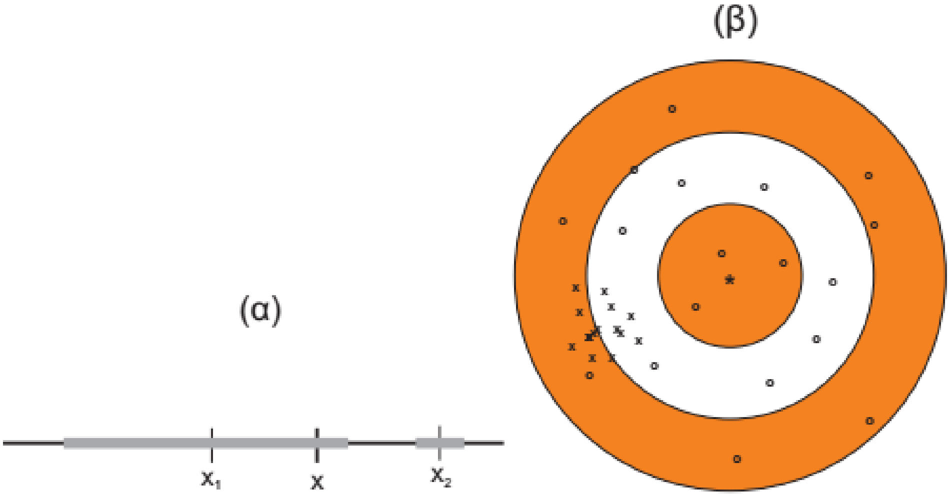
2.3.2.1 Βαθμονόμηση

Η **Βαθμονόμηση** είναι μία διαδικασία που καθιερώνει μία σχέση μεταξύ των τιμών ενός φυσικού μεγέθους που πραγματοποιήθηκαν στα πρότυπα μέτρησης και των ενδείξεων που προβλέπονται από συσκευές μέτρησης, ή τιμές της ιδιότητας των αντικειμένων ή των δειγμάτων υλικού μέτρησης, λαμβάνοντας υπόψη τις αβεβαιότητες μέτρησης των συμμετεχόντων προτύπων, συσκευών, αντικειμένων ή δειγμάτων.

2.3.3 Τυχαία Σφάλματα

Τα **τυχαία σφάλματα [5]** δεν επαναλαμβάνονται με το πείραμα, αλλά αντιπροσωπεύουν την τυχαιότητα που χαρακτηρίζει το μέγεθος που μετράμε. Για αυτό και αυτού του τύπου τα σφάλματα δε μπορούν να απαλειφούν. Τα **τυχαία σφάλματα**, ορίζουν την ακρίβεια επανάληψης (precision) της μέτρησης, δηλαδή το μέγεθος της μεταβολής των τιμών μέτρησης σε κάθε επανάληψη της μέτρησης (για τις ίδιες συνθήκες του πειράματος).

Παράδειγμα: Η ορθότητα και η ακρίβεια επανάληψης της μέτρησης δίνονται στο ***Σχήμα 1***, και σε μια και σε δύο διαστάσεις αντίστοιχα.



Σχήμα 1. Σχηματική παράσταση της ορθότητας και ακρίβειας επανάληψης της μέτρησης σε μια διάσταση στο (α) και σε δύο διαστάσεις στο (β). Στο (α) για το μέγεθος x, η μέτρηση x_1 έχει μεγάλο τυχαίο σφάλμα, ενώ η μέτρηση x_2 έχει μεγάλο συστηματικό σφάλμα. Στο (β) το μέγεθος x είναι στο κέντρο των κύκλων, ενώ η μέτρηση με μεγάλο τυχαίο σφάλμα δίνεται με ανοιχτούς κύκλους και με συστηματικό σφάλμα με σύμβολα 'x'.

2.4 Αποτέλεσμα Μέτρησης

Κάθε **αποτέλεσμα μίας μέτρησης** αποτελεί μία εκτίμηση της «πραγματικής» αλλά άγνωστης τιμής μιας μετρούμενης φυσικής ποσότητας. Συνεπώς, το **αποτέλεσμα μίας μέτρησης** πρέπει να συνοδεύεται και από μία παράμετρο που καθορίζει την ποιότητα (ακρίβεια) της εκτίμησης αυτής **[6]**.

Η παράμετρος αυτή ονομάζεται *αβεβαιότητα* της μέτρησης, συνοδεύει το **αποτέλεσμα της μέτρησης** και χαρακτηρίζει τη διασπορά των τιμών που μπορεί να αποδοθεί σε αυτό. Επίσης, περιλαμβάνει ένα ή περισσότερα από τα ακόλουθα:

- ***Τυπική αβεβαιότητα*** (standard uncertainty, **u**) ορίζεται η αβεβαιότητα μιας ποσότητας, εκφρασμένη ως τυπική απόκλιση (για βαθμωτά μεγέθη), ή μία ανάλογη σύνοψη της διασποράς των τιμών που αποδίδονται στο μετρούμενο μέγεθος (για μη βαθμωτά μετρούμενα μεγέθη).
- ***Περιοχή κάλυψης***: το σύνολο των πιθανών τιμών για το μετρούμενο μέγεθος, το οποίο πιστεύεται ότι περιλαμβάνει την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους.
- ***Κατανομή πιθανότητας*** για την τιμή του μετρούμενου μεγέθους, που χαρακτηρίζεται είτε αναλυτικά (ακριβώς ή περίπου), είτε από ένα κατάλληλα μεγάλο δείγμα που προέρχεται από αυτό. **Κατανομή πιθανότητας** είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο που μπορεί να απεικονιστεί με αναλογία, με μία κατανομή συχνότητας ενδείξεων σε μία περιοχή του διαστήματος και παρέχει ένα πλήρη χαρακτηρισμό της μέτρησης της αβεβαιότητας.

Παράδειγμα: Μετρώντας το βάρος ενός αντικειμένου σε ένα ζυγό, αν η ένδειξη του ζυγού είναι 1.500g και η αβεβαιότητα στη μέτρηση αυτή είναι 1g, αυτό σημαίνει ότι η πραγματική τιμή του βάρους του αντικειμένου εκτιμάται ότι βρίσκεται μεταξύ 1.499 και 1.501g με μία συγκεκριμένη πιθανότητα.

Συμπέρασμα: Χωρίς την **αβεβαιότητα**, δε μπορεί κανείς να καταλήξει σε συμπεράσματα που αφορούν την ορθότητα διαφορετικών και ανεξάρτητων μεταξύ τους μετρήσεων της ίδιας φυσικής ποσότητας.

2.5 Μοντέλα Μέτρησης

Τα μοντέλα μέτρησης περιγράφουν τη σχέση μεταξύ της τιμής του μετρούμενου μεγέθους (έξοδος) και τις τιμές των ποιοτικών ή ποσοτικών ιδιοτήτων (είσοδοι) που καθορίζουν ή επηρεάζουν την τιμή τους. Μπορεί να είναι *εξισώσεις μέτρησης* ή *εξισώσεις παρατήρησης* (στατιστικά μοντέλα).

$$Y = G\,(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i, \ldots, X_N)$$

Η εξαγόμενη εκτίμηση y του μεγέθους Υ υπολογίζεται από την παραπάνω συνάρτηση με βάση τις εκτιμήσεις των μεταβλητών εισόδου x_1, x_2, …., x_N.

2.5.1 Εξισώσεις Μέτρησης

Μία **εξίσωση μέτρησης [4]** εκφράζει το μετρούμενο μέγεθος ως μία συνάρτηση ενός συνόλου μεταβλητών εισόδου για την οποία, εκτιμήσεις και αξιολογήσεις αβεβαιότητας είναι διαθέσιμες

<u>Παράδειγμα</u>: Το δυναμικό ιξώδες $\boldsymbol{\mu_M = \mu_C[(P_B - P_M) / (P_B - P_C)](t_M/t_C)}$ ενός διαλύματος εκφράζεται ως μία συνάρτηση πυκνότητας της μάζας (**P_B**) και των χρόνων που ταξιδεύουν (**t_M, t_C**) μίας μπάλας φτιαγμένη για να πέσει μέσα στο διάλυμα και μέσα από ένα υγρό βαθμονόμησης, και των πυκνοτήτων μάζας του διαλύματος (**P_M**) και του υγρού βαθμονόμησης (**P_C**).

2.5.2 Εξισώσεις Παρατήρησης

Μία **εξίσωση παρατήρησης [4]** εκφράζει το μετρούμενο μέγεθος ως μία γνωστή συνάρτηση των παραμέτρων της κατανομής της πιθανότητας των εισόδων. Συνήθως ζητούνται, όταν πολλαπλές παρατηρήσεις της τιμής του ίδιου φυσικού μεγέθους γίνονται υπό συνθήκες επαναληψιμότητας, ή όταν πολλαπλές μετρήσεις γίνονται στο ίδιο μετρούμενο μέγεθος, και ο στόχος είναι να συνδυάσουμε εκείνες τις παρατηρήσεις ή αυτά τα αποτελέσματα παρατηρήσεων.

<u>Παράδειγμα</u>: Η **εξίσωση παρατήρησης** για το άγχος ρήξης **s** των κουπονιών αλουμίνας μπορεί να γραφτεί ρητά ως $\mathbf{\log s = \log \sigma_C + (1/a) \log \varepsilon}$, όπου το **$\sigma_C$**(μετρούμενο μέγεθος) υποδηλώνει την χαρακτηριστική αντοχή του υλικού, και το **ε** υποδηλώνει το σφάλμα μέτρησης που μοντελοποιείται ως μία εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή. Το μέσο άγχος ρήξης (ένα άλλο πιθανό μετρούμενο μέγεθος), είναι μία γνωστή συνάρτηση και των δύο παραμέτρων **α** και **σ_C**.

Σημείωση: Και οι δύο τύποι των μοντέλων μέτρησης (**εξισώσεις μέτρησης** και **εξισώσεις παρατήρησης**) περιλαμβάνουν μεταβλητές εισόδου, των οποίων οι τιμές πρέπει να εκτιμηθούν και των οποίων οι σχετικές αβεβαιότητες πρέπει να χαρακτηρίζονται.

2.5.2.1 Τύποι Εξισώσεων Παρατήρησης

Τα ακόλουθα τρία στατιστικά μοντέλα των **εξισώσεων παρατήρησης** μπορούν να εφαρμοστούν μόνο σε κατάλληλα εκ νέου εκφραζόμενα δεδομένα (π.χ. στους λογαρίθμους των παρατηρήσεων):

i. **Μοντέλο Πρόσθετου Σφάλματος Μέτρησης**. Κάθε παρατήρηση $\mathbf{x = g(y)+\varepsilon}$ είναι το άθροισμα μίας γνωστής συνάρτησης **g** της πραγματικής τιμής **y** του μετρούμενου μεγέθους και μίας τυχαίας μεταβλητής **ε** που αντιπροσωπεύει το σφάλμα μέτρησης. Τα σφάλματα μέτρησης που αντιστοιχούν σε διαφορετικές παρατηρήσεις μπορούν να συσχετίζονται ή να μην συσχετίζονται.
Το **μοντέλο πρόσθετου σφάλματος μέτρησης** μπορεί να εφαρμοστεί στους λογαρίθμους των μετρούμενων τιμών.

ii. **Μοντέλο Τυχαίων Επιδράσεων**. Η τιμή $\mathbf{x_i = y + \lambda_i + \varepsilon_i}$ που μετρήθηκε από το εργαστήριο **i**, ή χρησιμοποιώντας την μέθοδο μέτρησης **i**, είναι ίση με την πραγματική τιμή **y** του μετρούμενου μεγέθους, συν της τιμής $\mathbf{\lambda_i}$ μίας τυχαίας μεταβλητής που αντιπροσωπεύει ένα εργαστήριο ή μία μέθοδο επίδρασης, συν την τιμή $\mathbf{\varepsilon_i}$ μίας τυχαίας μεταβλητής που αντιπροσωπεύει το σφάλμα μέτρησης, για **i** = 1,…, m εργαστήρια ή μεθόδους.

> *Αυτό το μοντέλο θα πρέπει να χρησιμοποιείται, όταν συνδυάζουμε αποτελέσματα μέτρησης που λαμβάνονται από διαφορετικά εργαστήρια, συμπεριλαμβανομένων των διεργαστηριακών μελετών και των βασικών συγκρίσεων, ή με διαφορετικές μεθόδους μέτρησης, επειδή αναγνωρίζει και αξιολογεί ρητά το στοιχείο της αβεβαιότητας που οφείλεται στις διαφορές μεταξύ εργαστηρίων ή μεθόδων, τη λεγόμενη* ***σκοτεινή αβεβαιότητα****.*
>
> - *Thompson και Ellison, 2011*

iii. **Μοντέλο Παλινδρόμησης**. Το μετρούμενο μέγεθος **y** είναι μία συνάρτηση που αφορά αντίστοιχες τιμές δύο ποσοτήτων, τουλάχιστον μίας εκ των οποίων είναι κατεστραμμένη από το σφάλμα της μέτρησης. Για παράδειγμα, όταν το **y** είναι ένα πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού και η - ποσότητα - του - κλάσματος της ουσίας ενός αέριου είδους σε ένα μίγμα δίνεται από το $\mathbf{x = y(r)+\varepsilon}$, όπου το **r** υποδηλώνει μία καθοριστική ένδειξη και η τυχαία μεταβλητή **ε** υποδηλώνει το σφάλμα μέτρησης.

2.6 Μέθοδοι Monte Carlo & Bayesian

Σε πολλές περιπτώσεις, διάφορα εναλλακτικά στατιστικά μοντέλα μπορούν να υιοθετηθούν, που σχετίζουν τις παρατηρήσεις με την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Ακόμη κι όταν ένα κριτήριο χρησιμοποιείται για να επιλέξουμε το “καλύτερο” μοντέλο, το γεγονός που παραμένει είναι ότι υπάρχει ένα μοντέλο αβεβαιότητας, το οποίο θα πρέπει να χαρακτηριστεί, να αξιολογηθεί και να πολλαπλασιαστεί με την αβεβαιότητα που σχετίζεται με την εκτίμηση του μετρούμενου μεγέθους, χρησιμοποιώντας μεθόδους **Monte Carlo (MC)** ή **Bayesian**.

2.6.1 Μέθοδος Monte Carlo

Το **BIMP (**2008**)** στο πρώτο συμπλήρωμα του Οδηγού (**GUM-S1**) που εξέδωσε, πρότεινε μία διαφορετική προσέγγιση για την εκτίμηση της αβεβαιότητας. Η μεθοδολογία αυτή, χρησιμοποιεί για την εκτίμηση της αβεβαιότητας, προσομοιώσεις **MC [7]**. Οι προσομοιώσεις **MC** βασίζονται στην παραγωγή μιας σειράς από ψευδοτυχαίους αριθμούς από μία υπολογιστική μηχανή. Η κύρια χρήση της μεθόδου αυτής στα μαθηματικά είναι στην εκτίμηση (υπολογισμό) πολύπλοκων σχέσεων. Στην περίπτωση της εκτίμησης της αβεβαιότητας, ο υπολογισμός της αβεβαιότητας γίνεται με την τυχαία δειγματοληψία μεγάλης ποσότητας αριθμών ($>10^6$) και την εφαρμογή καθενός στη σχέση υπολογισμού του μεγέθους. Από αυτό το μεγάλο αριθμό αποτελεσμάτων που θα προκύψουν μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά πλέον η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση, το διάστημα εμπιστοσύνης και η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μέσα στην οποία κυμαίνονται τα αποτελέσματα.

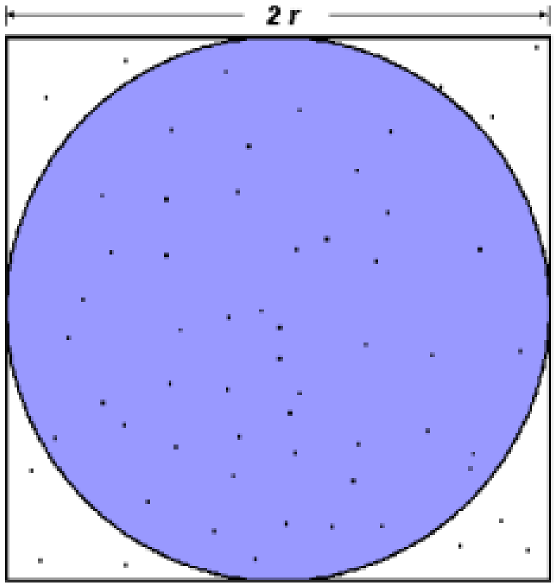
Σε ένα πείραμα **MC** χρησιμοποιείται προσομοίωση με μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Το όνομα **Monte Carlo** προέρχεται από την ομώνυμη πόλη του Μονακό, όπου εκεί υπάρχει ένα διάσημο καζίνο. Παρουσιάστηκε το 1949 με την δημοσίευση των N. Metropolis και S. Ulam “*Η μέθοδος Monte Carlo*" στο περιοδικό *Journal of the American Statistics Association*.

Τα πειράματα **MC** χρησιμοποιούνται για ανάλυση παιχνιδιών όπως το σκάκι ή το Γκο (ασιατικό παιχνίδι στρατηγικής όπως το σκάκι). Χρησιμοποιούμε γεννήτριες τυχαίων αριθμών και βάζουμε δύο εικονικούς παίχτες (υπολογιστές) να παίζουν στην "τύχη". Επαναλαμβάνοντας το πείραμα **Monte Carlo** πάρα πολλές φορές, είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε ποια επόμενη κίνηση είναι στατιστικά καλή για να κερδίσει το παιχνίδι ένα παίκτης.

<u>**Παράδειγμα**</u>: ***Ο Υπολογισμός του π* [8].**

(i) Περικλείουμε κύκλο με ένα τετράγωνο και δημιουργούμε **m** τυχαία σημεία μέσα στο τετράγωνο.

(ii) Βρίσκουμε τα σημεία **n** που εμπεριέχονται και μέσα στον κύκλο. Αν **r = n/m**, τότε ο αριθμός **π** προσεγγίζεται ως **π ≈ 4r**. Όσο περισσότερα τα σημεία **m**, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια του υπολογισμού.



$$A_S = (2r)^2 = 4r^2$$
$$A_C = \pi r^2$$
$$\pi = 4 \times \frac{A_C}{A_S}$$

<u>Σημείωση</u>: Όταν τα αποτελέσματα που παράγονται από την **NUM** χρησιμοποιώντας τον **τύπο του Gauss** και την μέθοδο **Monte Carlo** διαφωνούν σημαντικά, τα αποτελέσματα **Monte Carlo** θα πρέπει να προτιμώνται.

2.6.2 Μέθοδος Bayesian

Η **μέθοδος Bayesian [9]** είναι μια μέθοδος επαγωγικής στατιστικής, στην οποία το θεώρημα του Bayes χρησιμοποιείται για την ενημέρωση της πιθανότητας για μια υπόθεση, όπως περισσότερα στοιχεία ή πληροφορίες είναι διαθέσιμες. Είναι μια σημαντική τεχνική στον τομέα των στατιστικών, και ειδικότερα στη μαθηματική στατιστική Επίσης, είναι ιδιαίτερα σημαντική στη δυναμική ανάλυση μιας ακολουθίας δεδομένων. Η **μέθοδος Bayesian** έχει βρει εφαρμογή σε ένα ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων, συμπεριλαμβανομένης της επιστήμης, της μηχανικής, της φιλοσοφίας, της ιατρικής, του αθλητισμού και το δίκαιο.

Thomas Bayes

2.6.2.1 Θεώρημα Bayes

Το **θεώρημα του Bayes [10]** είναι απλό και αφορά υπό συνθήκη πιθανότητες:

Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα με P(A)>0, τότε η χρησιμότητα του **θεωρήματος του Bayes** σε εφαρμογές πιθανοτήτων είναι, ότι παρέχει την δυνατότητα αντιστροφής της «θέσης» των ενδεχομένων. Έτσι, γίνεται εμφανές πώς η πιθανότητα του B|A σχετίζεται με την πιθανότητα του A|B. Μια μικρή προέκταση του **θεωρήματος του Bayes** μπορεί να γίνει, αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα $C_1,\ldots,C_k$, τα οποία διαμερίζουν ένα δειγματικό χώρο **Ω**, έτσι ώστε τα $C_i \cap C_j = \varnothing$ για κάθε $i \neq j$ και $C_1 \cup \ldots \cup C_k = \Omega$. Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε:

$$P(C_i \mid A) = \frac{P(A \mid C_i)P(C_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A \mid C_j)P(C_j)} \quad ,i = 1,\ldots,k.$$

Παράδειγμα: Σε έναν πληθυσμό ο οποίος βρίσκεται σε μεγάλο κίνδυνο να προσβληθεί από τον ιό HIV, εφαρμόζεται μια μέθοδος εντοπισμού του ιού. Το 10% από τον πληθυσμό αυτό πιστεύεται πως έχει προσβληθεί από τον ιό. Από τα αποτελέσματα του τεστ προκύπτει ότι το τεστ είναι θετικό για το 90% των ατόμων τα οποία είναι στην πραγματικότητα προσβεβλημένα από τον ιό, και αρνητικό για το 85% των ατόμων τα οποία έχουν αρνητικό HIV. Ποιες είναι οι πιθανότητες να πάρουμε λανθασμένα θετικά και αρνητικά αποτελέσματα από το τεστ;

Λύση: Αν θεωρήσουμε Α το ενδεχόμενο ένα άτομο να έχει τον ιό HIV, και Β το ενδεχόμενο το τεστ να δείξει αποτέλεσμα θετικό, τότε θα είναι: $P(A)=0.1$, $P(B|A)=0.9$ και $P(B^c \mid A^c) = 0.85$. Οπότε:

- P(το τεστ να είναι λανθασμένα θετικό) $= P(A^c \mid B)$

$$= \frac{P(B \mid A^c)P(A^c)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.15 * 0.90}{(0.15 * 0.90) + (0.90 * 0.10)} = 0.6$$

- P(το τεστ να είναι λανθασμένα αρνητικό) $= P(A \mid B^c)$

$$= \frac{P(B^c \mid A)P(A)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{0.1 * 0.1}{(0.1 * 0.1) + (0.85 * 0.90)} = 0.0129$$

Σημείωση: Οι **μέθοδοι Bayesian** πρέπει να χρησιμοποιούνται, όταν υπάρχει πληροφορία σχετικά με το μετρούμενο μέγεθος ή σχετικά με την διαδικασία μέτρησης που είτε προέρχεται απ' έξω, ή προηγείται της μέτρησης του πειράματος, και αυτό θα πρέπει να συνδυαστεί με την πληροφορία που παρέχεται από νέα πειραματικά δεδομένα. Όπως καταλαβαίνετε, η εφαρμογή των **μεθόδων Bayesian** είναι προκλητική και συχνά απαιτείται η συνεργασία με έναν στατιστικολόγο.

Κεφάλαιο 3: Ταξινόμηση & Αξιολόγηση Στοιχείων Αβεβαιότητας

3.1 Σκοπός Ταξινόμησης Στοιχείων Αβεβαιότητας

Σε γενικές γραμμές, το αποτέλεσμα μίας μέτρησης είναι μόνο μία προσέγγιση ή εκτίμηση της τιμής της συγκεκριμένης ποσότητας, δηλαδή του μετρούμενου μεγέθους, κι έτσι το αποτέλεσμα είναι πλήρες μόνο όταν συνοδεύεται από μία ποσοτική κατάσταση της αβεβαιότητάς του. Ο σκοπός **της ταξινόμησης των στοιχείων αβεβαιότητας**, λοιπόν, είναι να <u>*υποδείξει*</u> τους διαφορετικούς τρόπους *αξιολόγησης των στοιχείων αβεβαιότητας*.

3.2 Κατηγορίες Στοιχείων Αβεβαιότητας

Η αβεβαιότητα του αποτελέσματος μίας μέτρησης αποτελείται από πολλά στοιχεία, τα οποία στην προσέγγιση **CIPM** μπορούν να ομαδοποιηθούν σε **δύο** κατηγορίες **[11]** σύμφωνα με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των αριθμητικών τιμών τους:

A. εκείνα που αξιολογούνται από <u>στατιστικές μεθόδους</u> και
B. εκείνα που αξιολογούνται από <u>άλλα μέσα</u>.

Μία εναλλακτική ονοματολογία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι

i. "*στοιχείο αβεβαιότητας που προκύπτει από μία τυχαία επίδραση",* και
ii. *"στοιχείο αβεβαιότητας που προκύπτει από μία συστηματική επίδραση"*

όπου μία *τυχαία επίδραση* είναι αυτή που δημιουργεί ένα πιθανό **τυχαίο σφάλμα** στην *τρέχουσα διαδικασία μέτρησης*, ενώ μία *συστηματική επίδραση* είναι αυτή που δημιουργεί ένα **συστηματικό σφάλμα** στην *τρέχουσα διαδικασία μέτρησης*.

3.2.1 Στοιχείο Αβεβαιότητας τύπου Α

Το **στοιχείο αβεβαιότητας** στην **κατηγορία Α** αντιπροσωπεύεται από μία στατιστική εκτιμώμενη τυπική απόκλιση s_i, ίση με τη θετική τετραγωνική ρίζα της στατιστικής εκτιμώμενης διακύμανσης s^2_i και τον σχετικό αριθμό των βαθμών ελευθερίας n_i. Για ένα τέτοιο στοιχείο, η τυπική αβεβαιότητα είναι $u_i = s_i$. Η αξιολόγηση της αβεβαιότητας από την στατιστική ανάλυση των σειρών των παρατηρήσεων ονομάζεται *αξιολόγηση Τύπου Α.*

3.2.2 Στοιχείο Αβεβαιότητας τύπου Β

Κατά παρόμοιο τρόπο, ένα **στοιχείο αβεβαιότητας** στην ***κατηγορία Β*** αντιπροσωπεύεται από μία ποσότητα u_j, η οποία μπορεί να θεωρείται μία προσέγγιση στην αντίστοιχη τυπική απόκλιση και είναι ίση με τη θετική τετραγωνική ρίζα του u^2_j. Η αξιολόγηση της αβεβαιότητας από άλλα μέσα ονομάζεται *αξιολόγηση τύπου Β*.

3.3 Αξιολόγηση Αβεβαιότητας

Η **αξιολόγηση της αβεβαιότητας** της μέτρησης είναι ένα ουσιαστικό μέρος της μέτρησης, επειδή σκιαγραφεί ένα όριο για την αξιοπιστία της εκχώρησης μίας τιμής στο μετρούμενο μέγεθος, και προτείνει τον βαθμό στον οποίο, τα αποτελέσματα μέτρησης μεταφέρουν τις ίδιες πληροφορίες για διαφορετικούς χρήστες σε διαφορετικά μέρη και σε διαφορετικούς χρόνους. Για αυτό το λόγο, ένα αποτέλεσμα μίας μέτρησης περιλαμβάνει, τόσο μία εκτίμηση του μετρούμενου μεγέθους, όσο και μία αξιολόγηση της σχετικής αβεβαιότητας.

3.3.1 Αξιολογήσεις Αβεβαιότητας με ή χωρίς εκτίμηση των πηγών της.

- ✓ Οι **Αξιολογήσεις αβεβαιότητας εκτιμώντας τις πηγές της (ή αλλιώς bottom-up uncertainty evaluations)** περιλαμβάνουν:

    i. πλήρη απαρίθμηση όλων των σχετικών πηγών της αβεβαιότητας,

    ii. περιγραφή της αλληλεπίδρασής τους και πως επηρεάζουν την αβεβαιότητα του αποτελέσματος που συχνά απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα αιτίας και αποτελέσματος, και

    iii. χαρακτηρισμό των συνεισφορών που κάνουν στην αβεβαιότητα του αποτελέσματος.

    Οι *εξισώσεις μέτρησης* χρησιμοποιούνται στις **bottom-up αξιολογήσεις [4]**. Για να εφαρμοσθεί αυτή η μεθοδολογία, πρέπει οι διεργασίες της μεθόδου να είναι γνωστές με λεπτομέρεια. Το πλεονέκτημά της προσέγγισης αυτής είναι, ότι οι διεργασίες της μεθόδου είναι κατανοητές και πλήρως ξεκαθαρισμένες.

- ✓ Οι **Αξιολογήσεις αβεβαιότητας δίχως εκτίμηση των πηγών της (ή αλλιώς top-down uncertainty evaluations),** παρέχουν αξιολογήσεις αβεβαιότητας της μέτρησης χωρίς να απαιτείται ή να στηρίζεται σε προηγούμενη ταυτοποίηση και χαρακτηρισμό των συμβαλλόμενων πηγών αβεβαιότητας.

    Οι *εξισώσεις παρατήρησης* χρησιμοποιούνται στις **top-down αξιολογήσεις [4]**. Το πλεονέκτημα των προσεγγίσεων αυτών είναι, ότι είναι πιο πρακτικές, απλές κι αποτελούν κυρίως εμπειρικές μεθόδους εκτίμησης της αβεβαιότητας.

3.3.2 Αξιολόγηση Τυπικής Αβεβαιότητας τύπου Α

Μία **αξιολόγηση Τύπου Α της τυπικής αβεβαιότητας [11]** βασίζεται σε κάθε έγκυρη *στατιστική μέθοδο* για την αντιμετώπιση των δεδομένων.

Παράδειγμα: Θεωρούμε μία ποσότητα εισόδου X_i, της οποίας η τιμή εκτιμάται από n ανεξάρτητες παρατηρήσεις $X_{i,k}$ του X_i που λαμβάνονται κάτω από τις ίδιες συνθήκες της μέτρησης. Σε αυτή τη περίπτωση η εκτίμηση εισόδου x_i είναι συνήθως η μέση τιμή δείγματος:

$$x_i = \overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k} ,$$

και η τυπική αβεβαιότητα $\boldsymbol{u(x_i)}$ που σχετίζεται με το x_i είναι η <u>*εκτιμώμενη τυπική απόκλιση*</u> της μέσης τιμής:

$$u(x_i) = s(\overline{X}_i) = \left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(X_{i,k}-\overline{X}_i)^2\right)^{1/2}.$$

3.3.3 Αξιολόγηση Τυπικής Αβεβαιότητας τύπου Β

Μία **αξιολόγηση Τύπου Β της τυπικής αβεβαιότητας [11]**, βασίζεται στην επιστημονική κρίση χρησιμοποιώντας όλες τις σχετικές διαθέσιμες πληροφορίες, οι οποίες μπορεί να περιλαμβάνουν:

- προηγούμενα δεδομένα μέτρησης,
- γενική γνώση της συμπεριφοράς και της ιδιότητας των σχετικών υλικών και οργάνων,
- προδιαγραφές του κατασκευαστή,
- δεδομένα που παρέχονται στη βαθμονόμηση και άλλων αναφορών,
- αβεβαιότητες που έχουν ανατεθεί για την αναφορά δεδομένων που λαμβάνονται από εγχειρίδια.

<u>Σημείωση</u>: Οι ***αξιολογήσεις αβεβαιότητας τύπου Α***, που βασίζονται σε περιορισμένα δεδομένα δεν είναι απαραίτητα πιο αξιόπιστες από ***αξιολογήσεις αβεβαιότητας τύπου Β***.

3.3.3.1 Παραδείγματα αξιολόγησης τύπου Β

Παρακάτω, δίνονται μερικά <u>*σημαντικά*</u> **παραδείγματα για αξιολογήσεις τύπου Β**:

i. Μετατροπή μίας εισηγμένης αβεβαιότητας που είναι ένα καθορισμένο πολλαπλάσιο μίας *εκτιμώμενης τυπικής απόκλισης* σε μία τυπική αβεβαιότητα διαιρώντας την εισηγμένη αβεβαιότητα από τον πολλαπλασιαστή.

ii. Μετατροπή μία εισηγμένης αβεβαιότητας που ορίζει ένα “διάστημα εμπιστοσύνης” έχοντας ένα καθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, όπως 95 ή 99%, σε μία τυπική αβεβαιότητα αντιμετωπίζοντας την εισηγμένη αβεβαιότητα σαν μία *κανονική κατανομή* που είχε χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της και διαιρώντας την με τον κατάλληλο συντελεστή για μία τέτοια κατανομή. Αυτοί οι συντελεστές είναι 1.960 και 2.576 για τα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης που δίνονται.

iii. Μοντελοποίηση της εν λόγω ποσότητας από μία *κανονική κατανομή* και εκτίμηση των κατώτερων και ανώτερων ορίων α_- και α_+, έτσι ώστε η καλύτερη εκτιμώμενη τιμή της ποσότητας να είναι $(α_+ + α_-)/2$ (δηλαδή, το κέντρο των ορίων) και να υπάρχουν 1 στις 2 πιθανότητες, ότι η τιμή της ποσότητας βρίσκεται στο διάστημα $α_-$ έως $α_+$. Τότε: $\boldsymbol{u_j \approx 1.48α}$, όπου $\boldsymbol{α = (α_+ - α_-)/2}$ το μισό του πλάτους του διαστήματος.

iv. Μοντελοποίηση την εν λόγω ποσότητας από μία *κανονική κατανομή* και εκτίμηση των κατώτερων και ανώτερων ορίων $α_-$ και $α_+$, έτσι ώστε η καλύτερη εκτιμώμενη τιμή της ποσότητας να είναι $(α_+ + α_-)/2$ (δηλαδή, το κέντρο των ορίων) και να υπάρχουν 2 στις 3 πιθανότητες, ότι η τιμή της ποσότητας βρίσκεται στο διάστημα $α_-$ έως $α_+$. Τότε: $\boldsymbol{u_j \approx α}$ όπου $\boldsymbol{α = (α_+ - α_-)/2}$.

v. Εκτίμηση των κατώτερων και ανώτερων ορίων $α_-$ και $α_+$ για την τιμή της εν λόγω ποσότητας, έτσι ώστε η πιθανότητα στην οποία η τιμή βρίσκεται μέσα στο διάστημα $α_-$ έως $α_+$ είναι για πρακτικούς σκοπούς 100%. Αφού δεν υπάρχουν αντιφατικές πληροφορίες, γίνεται μεταχείριση της ποσότητας σαν να είναι εξίσου πιθανό για την τιμή της να βρίσκεται οπουδήποτε μέσα στο διάστημα $α_-$ έως $α_+$. Δηλαδή, μοντελοποίηση της εν λόγω ποσότητας με μία *ομοιόμορφη ή τετραγωνική* κατανομή πιθανότητας. Τότε, η βέλτιστη εκτίμηση της τιμής της ποσότητας είναι: $(α_+ + α_-)/2$ με $\boldsymbol{u_j = α/\sqrt{3}}$ όπου $α = (α_+ + α_-)/2$.

3.4 Κατανομές Πιθανότητας

Ανεξάρτητα από την προέλευση τους και από το πώς αξιολογούνται, τα **στοιχεία αβεβαιότητας** θα πρέπει να αντιμετωπίζονται ομοίως και σε συνδυασμό επί ίσοις όροις. Χαρακτηρίζοντας αυτά μέσω πλήρως καθορισμένων κατανομών πιθανότητας, διευκολύνει την ομοιόμορφη μεταχείριση, ιδίως όταν τόσο οι ποσοτικές όσο και οι ποιοτικές είσοδοι μαζί, καθορίζουν την τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Παρακάτω, θα μιλήσουμε για **κατανομές πιθανότητας** που μας απασχολούν σημαντικά στην *έκφραση και αξιολόγηση της αβεβαιότητας στην μέτρηση*.

3.4.1 Κανονική Κατανομή

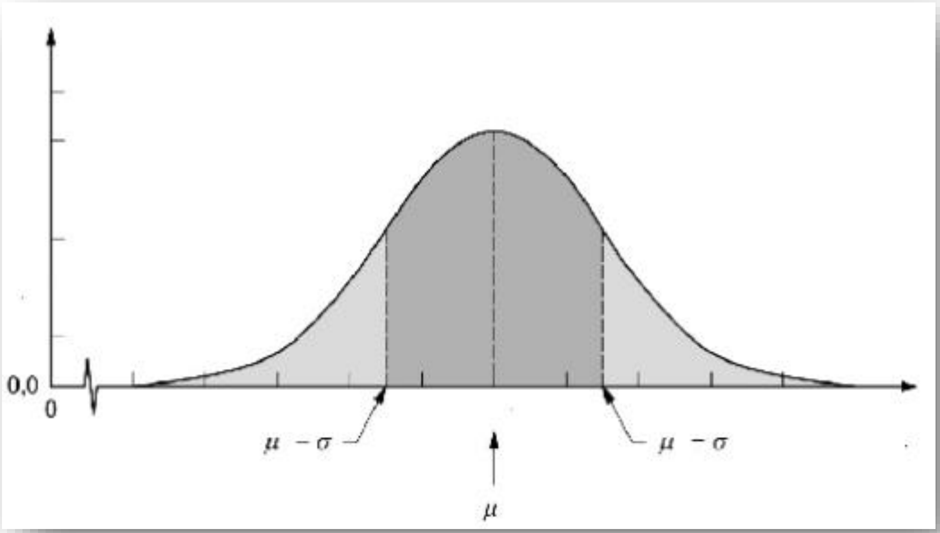
Κανονική κατανομή [12] (γνωστή κι ως *Γκαουσιανή* κατανομή): Αναφέρεται σε συνεχείς μεταβλητές αποτελώντας μία συνεχή *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*. Χρησιμοποιείται ως μία πρώτη προσέγγιση για να περιγραφούν τυχαίες μεταβλητές πραγματικών τιμών, οι οποίες τείνουν να συγκεντρώνονται γύρω από μια μέση τιμή. Η **κανονική κατανομή** αποτελεί την πιο σημαντική κατανομή της στατιστικής μεθοδολογίας για τους εξής βασικούς λόγους:

- Την **κανονική κατανομή** ακολουθούν, είτε με ακρίβεια, είτε με μεγάλη προσέγγιση τα περισσότερα συνεχή φαινόμενα.
- Πολλές ασυνεχείς κατανομές πιθανοτήτων μπορούν να προσεγγιστούν μέσω της **κανονικής κατανομής**. Για παράδειγμα πολλά πληθυσμιακά χαρακτηριστικά, όπως το ύψος, το βάρος η βαθμολογία σε διαγώνισμα, κ.λπ.
- Αποτελεί σύμφωνα με το *Κεντρικό Οριακό Θεώρημα* (**Κ.Ο.Θ)** τη βάση της στατιστικής συμπερασματολογίας ή επαγωγικής στατιστικής.
- Τυχαία σφάλματα που εμφανίζονται σε διάφορες μετρήσεις έχουν κανονική κατανομή. Γι' αυτό το λόγο η **κανονική κατανομή** αναφέρεται πολλές φορές και ως κατανομή σφαλμάτων.

Όταν τα δεδομένα ακολουθούν **κανονική κατανομή**, θα πρέπει να αναφέρεται μία *δεδομένη στάθμη εμπιστοσύνης* **[13]**. Η συνήθης μορφή της αβεβαιότητας είναι **x ± α για στάθμη εμπιστοσύνης p%**. Για να θεωρήσουμε την **κανονική κατανομή** θα πρέπει να αναφέρεται η *στάθμη εμπιστοσύνης*. Ανάλογα με τη *στάθμη εμπιστοσύνης* διαιρούμε το εύρος/ανοχή (**±α**) και με τον αντίστοιχο συντελεστή. Οι συντελεστές στην περίπτωση της **κανονικής κατανομής** αποτελούν τους συντελεστές κάλυψης που χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστεί το εύρος/ανοχή της τιμής και ταυτίζονται με αυτούς που αναφέρθηκαν παραπάνω. Οι συντελεστές κάλυψης για τις αντίστοιχες *στάθμες εμπιστοσύνης* αναφέρονται στον **Πίνακα 1**, ενώ η γραφική αναπαράσταση της **κανονικής κατανομής** απεικονίζεται στο **Σχήμα 2**.

Πίνακας 1: Ο συντελεστής κάλυψης ανάλογα με τη στάθμη εμπιστοσύνης της **κανονικής κατανομής**.

Στάθμη εμπιστοσύνης (%)	68	90	95	95,45	99	99,73
Συντελεστής κάλυψης	1	1,645	1,960	2	2,576	3

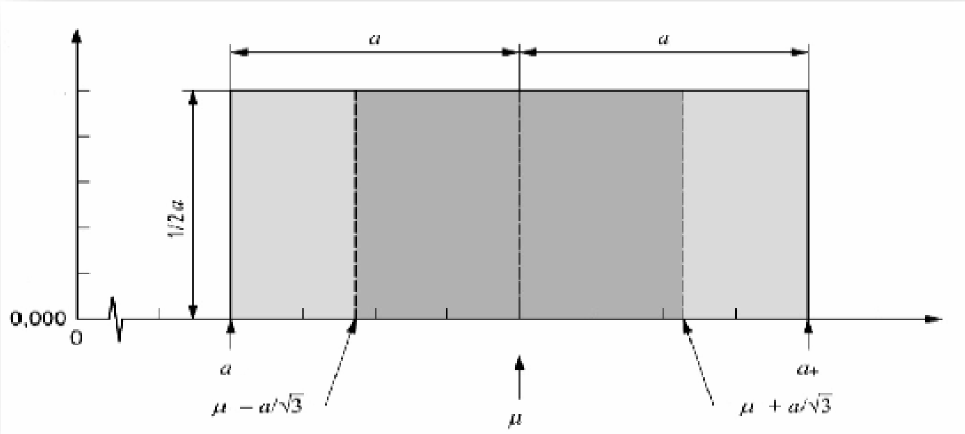


Σχήμα 2: Καμπύλη Ομαλής Κατανομής Gauss

3.4.2 Τετραγωνική Κατανομή

Σε περιπτώσεις που δίνεται το εύρος/ανοχή (±**α**) χωρίς να δίνεται η *στάθμη εμπιστοσύνης*, τότε θεωρούμε, ότι ακολουθείται **τετραγωνική κατανομή** στα αποτελέσματα **[13]**. Θεωρούμε, ότι όλες οι τιμές εντός του εύρους τιμών έχουν την ίδια πιθανότητα να είναι η αληθής τιμή όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 3**. Η τυπική αβεβαιότητα υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



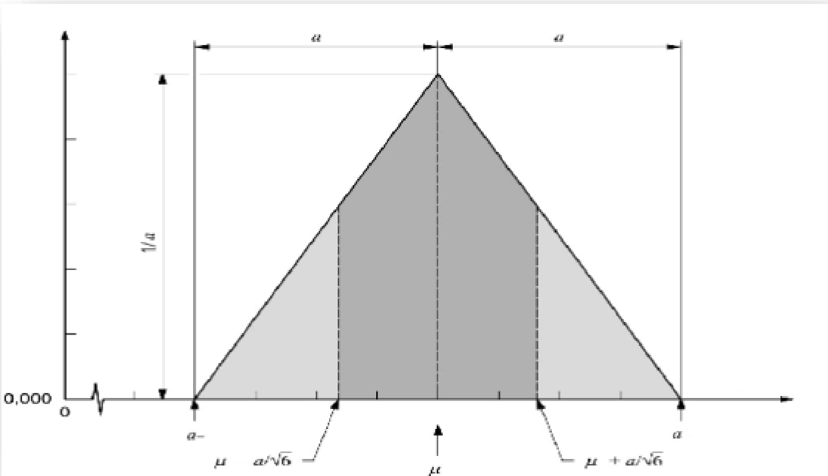
Σχήμα 3: Γραφική Αναπαράσταση Τετραγωνικής Κατανομής

3.4.3 Τριγωνική Κατανομή

Όταν η αναφερόμενη (κεντρική) τιμή έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι η αληθής τιμή, σε σχέση με τα άκρα, τότε χρησιμοποιούμε την **τριγωνική κατανομή [13]**. Χρησιμοποιείται πιο σπάνια από τις άλλες δύο και πρακτικά εφαρμόζεται, όταν ο χρήστης ρυθμίζει και ελέγχει την τιμή του μεγέθους, π.χ. σε ένα κλίβανο ή ένα υδατόλουτρο. Σε αυτές τις περιπτώσεις η **τριγωνική κατανομή** υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Η γραφική της αναπαράσταση φαίνεται στο **Σχήμα 4**.



Σχήμα 4: Γραφική Αναπαράσταση Τριγωνικής Κατανομής

<u>Συμπέρασμα</u>: Αν είναι γνωστό, ότι οι τιμές της εν λόγω ποσότητας κοντά στο κέντρο των ορίων είναι πιο πιθανές απ’ ότι οι τιμές κοντά στα όρια, τότε μία **τριγωνική** ή μία **κανονική κατανομή** προτιμάται.

3.4.4 Κατανομή *t*-Student

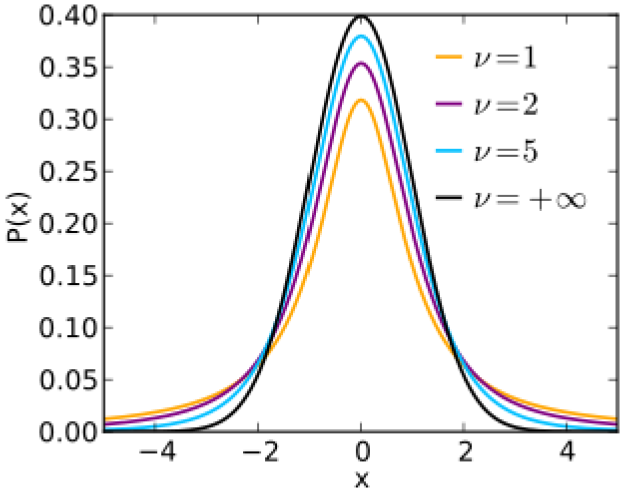
Στις Πιθανότητες και στην Στατιστική, η **κατανομή *t*-Student** (ή απλά *t*-κατανομή) **[14]** είναι οποιοδήποτε μέλος μιας οικογένειας συνεχών κατανομών πιθανότητας που προκύπτει κατά την εκτίμηση της μέσης τιμής της κανονικής κατανομής του πληθυσμού σε καταστάσεις, όπου το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό και η τυπική απόκλιση πληθυσμού άγνωστη. Λαμβάνοντας υπόψη ότι μία *κανονική κατανομή* περιγράφει έναν πλήρη πληθυσμό, οι ***t*-κατανομές** περιγράφουν δείγματα που ελήφθησαν από έναν πλήρη πληθυσμό. Κατά συνέπεια, η ***t*-κατανομή** για κάθε μέγεθος δείγματος είναι διαφορετική, και όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα, τόσο περισσότερο η κατανομή μοιάζει με *κανονική κατανομή*.

Αν πάρουμε ένα δείγμα **n** παρατηρήσεων από μια κανονική κατανομή, τότε η ***t*-κατανομή** με **ν = n-1** βαθμούς ελευθερίας, μπορεί να οριστεί ως η κατανομή όπως θέσης όπως αληθινής μέσης τιμής, σε σχέση με την μέση τιμή δείγματος και διαιρείται με την τυπική απόκλιση του δείγματος, μετά τον πολλαπλασιασμό από τον ομαλοποιημένο όρο$\sqrt{\boldsymbol{n}}$. Με τον τρόπο αυτό, η ***t*-κατανομή** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμηθεί πόσο πιθανό είναι ότι η πραγματική μέση τιμή βρίσκεται σε οποιαδήποτε δεδομένη περιοχή.

Η ***t*-κατανομή** χαρακτηρίζεται από την παρακάτω *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*:

$$f(t) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\left[1+\frac{t^2}{\nu}\right]^{-(\nu+1)/2}$$

όπου **ν** ο ***αριθμός των βαθμών ελευθερίας*** και **Γ** η ***συνάρτηση Γάμμα*** [**Γ(k)=(k-1)(k-2)…(2)(1)**] **[15]**, και είναι συμμετρική με σχήμα καμπάνας (**Σχήμα 5**), όπως και η *κανονική κατανομή*.



Σχήμα 5: Γραφική Αναπαράσταση t-κατανομής

<u>Συμπέρασμα</u>: Όσο οι βαθμοί ελευθερίας αυξάνονται, τόσο η ***t*-κατανομή** προσεγγίζει την *κανονική κατανομή*.

<u>Παράδειγμα</u>: Αν θέλουμε την τιμή της ***t*-κατανομής** με **ν =10** βαθμούς ελευθερίας, έτσι ώστε το εμβαδό κάτω από την καμπύλη ***t*** να είναι **0.05** χρησιμοποιούμε τον παρακάτω **Πίνακα 2**:

Student t-Table

Alpha	0.250	0.200	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0005
df									
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	636.578
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850

Πίνακας 2: Η πρώτη κάθετη στήλη από αριστερά συμβολίζει τους βαθμούς ελευθερίας ενώ η πρώτη οριζόντια στήλη συμβολίζει το εμβαδό κάτω από την καμπύλη t.

Λύση: Στην περίπτωσή μας, η σωστή απάντηση είναι $\mathbf{t_{0.05,10}=1.812}$.

Κεφάλαιο 4: Είδη Τυπικής Αβεβαιότητας

4.1 Συνδυασμένη Τυπική Αβεβαιότητα

Η Συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα u_c [11] (combined standard uncertainty) ενός αποτελέσματος αβεβαιότητας, θεωρείται ότι αντιπροσωπεύει την *εκτιμώμενη τυπική απόκλιση* του αποτελέσματος και ορίζεται ως η αβεβαιότητα του μετρούμενου μεγέθους που προκύπτει από το μαθηματικό συνδυασμό των διαφορετικών τυπικών αβεβαιοτήτων. Η **συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα u_c**, ισούται με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των τυπικών αβεβαιοτήτων κάθε συνιστώσας που συνεισφέρει στην αβεβαιότητα.

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_{xi}^{2}}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Η εξίσωση υπολογισμού μιας παραμέτρου είναι **y = (p-q+r)**, όπου **p**=5,02, **q**=6,45 και **r** =9,04 (ίδιες μονάδες) με τυπικές αβεβαιότητες **u**(**p**)=0,13, **u**(**q**)=0,05, και **u**(**r**)=0,22 . Να υπολογιστεί η συνδυασμένη αβεβαιότητα.

Λύση: Με βάση αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω, έχουμε:

$$y = \sqrt{(0{,}13)^2 + (0{,}05)^2 + (0{,}22)^2} = 0{,}26$$

Η **συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα u_c**, είναι ένα ευρέως εφαρμοζόμενο μέτρο της αβεβαιότητας της μέτρησης. Η πολιτική του **NIST**, εκφράζοντας την αβεβαιότητα δηλώνει ότι:

Συνήθως, το u_c χρησιμοποιείται για την αναφορά αποτελεσμάτων των προσδιορισμών των θεμελιωδών σταθερών, για θεμελιώδη μετρολογική έρευνα και για διεθνείς συγκρίσεις των επιτευγμάτων των μονάδων του SI.

<u>Παράδειγμα</u>: Εκφράζοντας την αβεβαιότητα της πρωτογενής τυπικής συχνότητας καισίου του **NIST** ως μία εκτιμώμενη τυπική απόκλιση, είναι ένα παράδειγμα για την χρήση του u_c σε θεμελιώδη μετρολογική έρευνα.

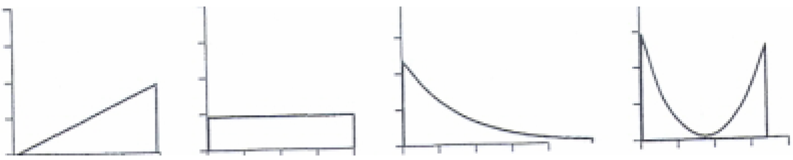
4.1.1 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις μετρήσεων, η *κατανομή της πιθανότητας* που χαρακτηρίζεται από το αποτέλεσμα μέτρησης ***y*** και της **συνδυασμένης τυπικής αβεβαιότητας $u_c(y)$** είναι περίπου *κανονική* (Γκαουσιανή), όταν οι συνθήκες του **Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος** πληρούνται. Σύμφωνα με το **Κ.Ο.Θ. [16]** το άθροισμα και η μέση τιμή, μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων παρατηρήσεων, ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική κατανομή, ανεξαρτήτως από το ποια κατανομή ακολουθούν οι παρατηρήσεις.

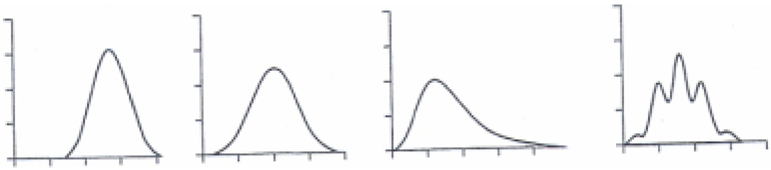
Ας δούμε τώρα μία πληρέστερη διατύπωσή του:

Αν από έναν πληθυσμό που ακολουθεί ***οποιαδήποτε κατανομή*** *με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, επιλέξουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n και υπολογίσουμε τους μέσους τους, τότε, για μεγάλα n (θεωρητικά $n \to \infty$) η κατανομή αυτών των μέσων (των δειγματικών) είναι κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με μέση τιμή επίσης μ και διασπορά σ^2/n.*

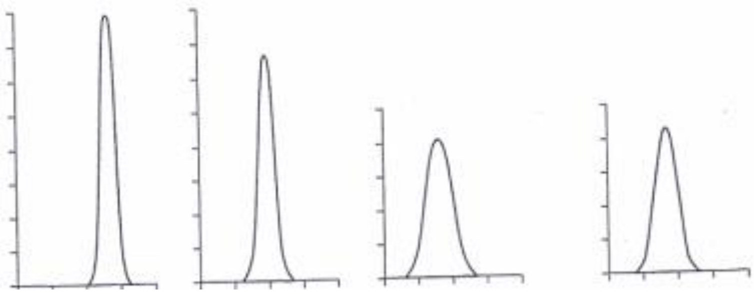
Έτσι, αν για παράδειγμα, θεωρήσουμε τις παρακάτω κατανομές τεσσάρων πληθυσμών:



τότε, οι κατανομές των δειγματικών μέσων είναι αντίστοιχα για ***n* = 4**:



και για ***n* = 25**:



<u>Συμπέρασμα</u>: Όσο πιο μεγάλο είναι το μέγεθος ***n*** των δειγμάτων, τόσο καλύτερη (ακριβέστερη) είναι η προσέγγιση της κατανομής των δειγματικών μέσων από την *κανονική κατανομή*.

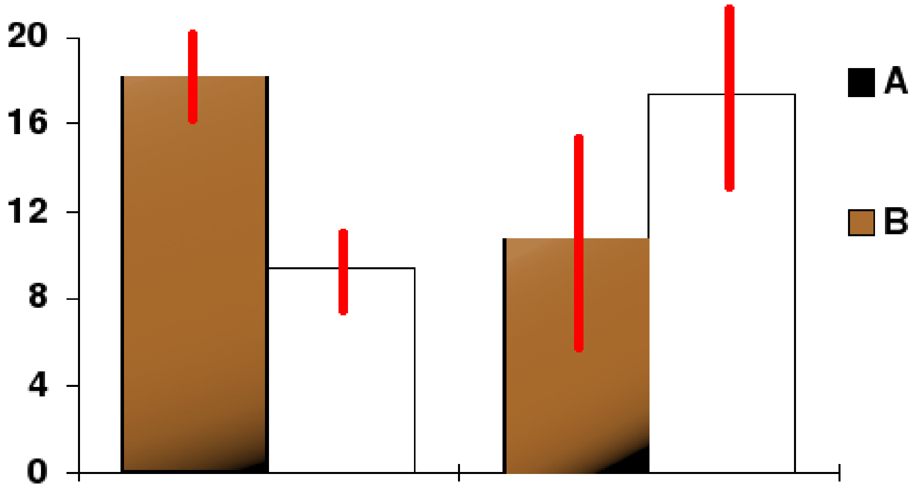
4.1.2 Διάστημα Εμπιστοσύνης

Όταν ισχύει το **Κ.Ο.Θ**, το $u_c(y)$ ορίζει ένα **διάστημα** $y - u_c(y)$ έως $y + u_c(y)$ για το αποτέλεσμα μέτρησης y μέσα στο οποίο, η τιμή του μετρούμενου μεγέθους Y που εκτιμάται από το y πιστεύεται ότι βρίσκεται με ένα επίπεδο εμπιστοσύνης περίπου 68%. Δηλαδή, πιστεύεται με ένα κατά προσέγγιση *επίπεδο εμπιστοσύνης* του 68%, ότι:

$y - u_c(y) < Y < y + u_c(y)$, το οποίο συνήθως γράφεται ως $Y = y \pm u_c(y)$.

Στη στατιστική, ένα **διάστημα εμπιστοσύνης (Δ.Ε) [17]** είναι ένας τύπος διαστήματος εκτίμησης μιας παραμέτρου του πληθυσμού. Είναι ένα παρατηρήσιμο διάστημα (δηλαδή, υπολογίζεται από τις παρατηρήσεις), το οποίο διαφέρει από δείγμα σε δείγμα, που συχνά περιλαμβάνει την αξία της μη παρατηρήσιμης παραμέτρου ενδιαφέροντος, αν επαναληφθεί το πείραμα. Το πόσο συχνά παρατηρείται το διάστημα να περιέχει την παράμετρο, καθορίζεται από το *επίπεδο εμπιστοσύνης* ή το *συντελεστή εμπιστοσύνης*. Ένα **Δ.Ε** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει πόσο αξιόπιστα είναι τα αποτελέσματα της έρευνας.

Πιο συγκεκριμένα, η έννοια του όρου "*επίπεδο εμπιστοσύνης*" είναι ότι, αν τα **Δ.Ε** είναι κατασκευασμένα σε πολλές ξεχωριστές αναλύσεις δεδομένων από επανειλημμένα (και ενδεχομένως διαφορετικά) πειράματα, το ποσοστό αυτών των διαστημάτων που περιέχουν την πραγματική τιμή της παραμέτρου θα ταιριάζει με το δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης.



Σχήμα 6: Σε αυτό το γράφημα ράβδων, τα κορυφαία άκρα των ράβδων υποδεικνύουν τα μέσα των παρατηρήσεων και τα κόκκινα ευθύγραμμα τμήματα αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα εμπιστοσύνης γύρω τους.

Ο όρος “**διάστημα εμπιστοσύνης**” έχει έναν συγκεκριμένο ορισμό στην στατιστική και ισχύει μόνο σε διαστήματα βασισμένα στο u_c, όταν πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις, συμπεριλαμβανομένου ότι όλα τα στοιχεία στο u_c αποκτούνται από τις *αξιολογήσεις τύπου Α*. Έτσι, ένα **διάστημα** βασισμένο στο u_c, θεωρείται ότι περιλαμβάνει ένα κλάσμα p της κατανομής της πιθανότητας, χαρακτηρισμένο από το αποτέλεσμα μέτρησης. Το p είναι η *πιθανότητα κάλυψης* ή το *επίπεδο εμπιστοσύνης* **του διαστήματος**.

4.2 Διευρυμένη Τυπική Αβεβαιότητα

Παρά το γεγονός, ότι η **συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα u_c [11]** χρησιμοποιείται για την έκφραση της αβεβαιότητας πολλών αποτελεσμάτων μέτρησης του NIST, για εμπορικές, βιομηχανικές και κανονιστικές εφαρμογές, αυτό που συνήθως απαιτείται είναι ένα μέτρο αβεβαιότητας που ορίζει ένα διάστημα για το αποτέλεσμα της μέτρησης y, μέσα στο οποίο η τιμή του μετρούμενου μεγέθους Y πιστεύεται ότι βρίσκεται. Το μέτρο της αβεβαιότητας που προορίζεται να συναντήσει αυτήν την απαίτηση ονομάζεται **διευρυμένη αβεβαιότητα** (***U***) και αποκτάται πολλαπλασιάζοντας το $u_c(y)$ με ένα **συντελεστή κάλυψης *k***. Έτσι: $U = ku_c(y)$. Το αποτέλεσμα πλέον μπορεί να γραφτεί ως:

$$Y = y \pm U$$

Γενικά, η τιμή του συντελεστή κάλυψης ***k*** επιλέγεται με βάση το επιθυμητό επίπεδο εμπιστοσύνης να σχετίζεται με το διάστημα που ορίζεται από το $U = ku_c$. Τυπικά, το ***k*** είναι στο εύρος 2 έως 3. Όταν η *κανονική κατανομή* ισχύει και το u_c έχει αμελητέα αβεβαιότητα, το $U = ku_c$ ορίζει ένα διάστημα έχοντας επίπεδο εμπιστοσύνης περίπου 95% και το $U = 3u_c$ (π.χ. $k=3$) ορίζει ένα διάστημα έχοντας επίπεδο εμπιστοσύνης μεγαλύτερο από 99%.

<u>Παράδειγμα</u>: Για μία ποσότητα **z** που περιγράφεται από μία *κανονική κατανομή* με αναμενόμενη τιμή μ_z και τυπική απόκλιση σ, το διάστημα $\mu_z \pm k\sigma$ περιβάλλει 68.27, 90, 95.45, 99 και 99.73% της κατανομής για $k = 1$, $k = 1.645$, $k = 2$, $k = 2.576$ *και* $k = 3$ αντίστοιχα.

<u>Σημείωση</u>: Η προσέγγιση **CIPM** δεν διευκρινίζει πως η σχέση μεταξύ ***k*** και ***p*** είναι να καθιερωθεί. Ο **GUM [2]** και ο Dietrich **[18]** δίνουν μία προσεγγιστική λύση σε αυτό το πρόβλημα και είναι πιθανόν να εφαρμόσουν άλλες λύσεις οι οποίες, επίσης, προσεγγίζουν το αποτέλεσμα του συνδυασμού των κατανομών πιθανότητας που αναλήφθηκαν για κάθε ποσότητα κατά την οποία το μετρούμενο μέγεθος εξαρτάται (π.χ. λύσεις που βασίζονται σε αριθμητικές μεθόδους).

4.2.1 Συμπεράσματα

(**a**) Στην ιδανική περίπτωση, κάποιος θα ήθελε να είναι σε θέση να διαλέξει μία συγκεκριμένη τιμή του ***k*** που παράγει ένα διάστημα που να αντιστοιχεί σε ένα καλά ορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης ***p***, όπως 95% ή 99%. Αυτό όμως είναι δύσκολο να γίνει στην πράξη, επειδή χρειάζεται να γνωρίζουμε λεπτομερώς την κατανομή της πιθανότητας της κάθε ποσότητας κατά την οποία, το μετρούμενο μέγεθος εξαρτάται και συνδυάζει εκείνες τις κατανομές για να αποκτήσει την κατανομή του μετρούμενου μεγέθους.

(**b**) Όσο πιο εμπεριστατωμένη η έρευνα της πιθανής ύπαρξης μη τετριμμένων συστηματικών επιδράσεων και όσο πιο πλήρης τα δεδομένα που βασίζονται οι εκτιμήσεις των διορθώσεων για τέτοιες επιδράσεις, τόσο πιο κοντά μπορεί κανείς να φτάσει σε αυτό το ιδανικό.

4.3 Αναφορά Αβεβαιότητας

Τα βήματα που ακολουθούμε για την καθορισμένη πολιτική του **NIST** σχετικά με την έκθεση της αβεβαιότητας είναι τα εξής:

1. Αναφέρετε το ***U*** μαζί με τον συντελεστή κάλυψης ***k*** που χρησιμοποιείται για να το αποκτήσει ή αναφέρετε το $\boldsymbol{u_c}$.
2. Όταν αναφέρουμε ένα *αποτέλεσμα μέτρησης* και *της αβεβαιότητάς του,* περιλαμβάνουμε τις ακόλουθες πληροφορίες στην ίδια την αναφορά:
   - Μία λίστα με όλα τα στοιχεία της τυπικής αβεβαιότητας, μαζί με τους βαθμούς ελευθερίας τους όπου ενδείκνυται, και την προκύπτουσα τιμή του $\boldsymbol{u_c}$. Τα στοιχεία θα πρέπει να προσδιορίζονται, σύμφωνα με την μέθοδο που χρησιμοποιείται για να εκτιμήσουμε τις αριθμητικές τιμές τους:

     A. εκείνα που αξιολογούνται από στατιστικές μεθόδους,

     B. εκείνα που αξιολογούνται από άλλα μέσα.
   - Μία λεπτομερής περιγραφή για το πως κάθε στοιχείο της τυπικής αβεβαιότητας αξιολογήθηκε.
   - Μία περιγραφή για το πώς το ***k*** διαλέχτηκε, όταν $\boldsymbol{k\neq 2}$.

Συμπέρασμα: Είναι συνήθως επιθυμητό λοιπόν, να παρέχουμε μία *ερμηνεία πιθανότητας*, όπως ένα επίπεδο εμπιστοσύνης, για το διάστημα που ορίζεται από το ***U***, ή από το $\boldsymbol{u_c}$.

4.3.1 Παραδείγματα με ερμηνεία πιθανότητας

Τα ακόλουθα παραδείγματα δείχνουν πώς αυτό μπορεί να γίνει, όταν το αριθμητικό αποτέλεσμα μίας μέτρησης και της ανατεθειμένης αβεβαιότητας αναφέρεται, υποθέτοντας ότι, η δημοσιευμένη λεπτομερής περιγραφή της μέτρησης παρέχει μία σταθερή βάση για τις δηλώσεις που γίνονται (και στις τρεις περιπτώσεις, η ποσότητα της οποίας η τιμή αναφέρεται, θεωρείται ότι είναι 100g πρότυπο της μάζας $\boldsymbol{m_s}$).

- $\boldsymbol{m_s = (100.02147 \pm 0.00070)g}$, όπου ο αριθμός που ακολουθεί το σύμβολο ± είναι η αριθμητική τιμή μίας ***διευρυμένης αβεβαιότητας*** $\boldsymbol{U = ku_c}$, με το ***U*** να προσδιορίζεται από μία *συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα* (δηλαδή, μία εκτιμώμενη τυπική απόκλιση) $\boldsymbol{u_c = 0.35\ mg}$, και από ένα συντελεστή κάλυψης $\boldsymbol{k = 2}$. Δεδομένου ότι μπορεί να υποτεθεί, ότι οι πιθανές εκτιμώμενες τιμές του προτύπου είναι περίπου κανονικά μοιρασμένες με την αναμενόμενη τυπική απόκλιση $\boldsymbol{u_c}$, η άγνωστη τιμή του προτύπου πιστεύεται ότι βρίσκεται στο διάστημα, που ορίζεται από το ***U***, με ένα επίπεδο εμπιστοσύνης περίπου 95%.
- $\boldsymbol{m_s = (100.02147 \pm 0.00079)g}$, όπου ο αριθμός που ακολουθεί το σύμβολο ± είναι η αριθμητική τιμή μίας ***διευρυμένης αβεβαιότητας*** $\boldsymbol{U = ku_c}$, με το ***U*** να προσδιορίζεται από μία *συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα* (δηλαδή, μία εκτιμώμενη τυπική απόκλιση) $\boldsymbol{u_c = 0.35\ mg}$, και από έναν συντελεστή κάλυψης $\boldsymbol{k = 2.26}$ βασισμένο στην *t*-κατανομή

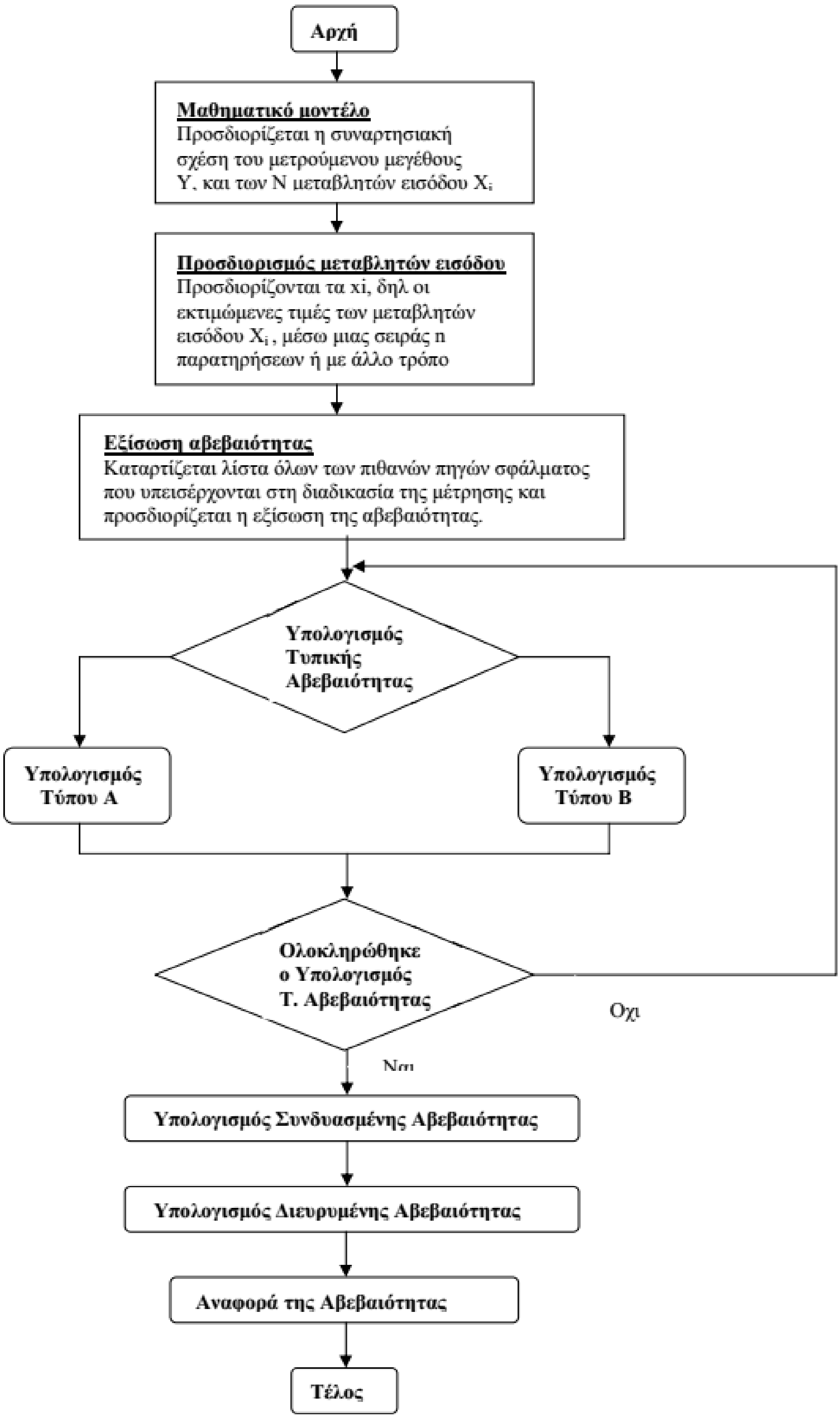
για ν = 9 βαθμούς ελευθερίας, και ορίζει ένα διάστημα μέσα στο οποίο, η άγνωστη τιμή του προτύπου πιστεύεται ότι βρίσκεται με ένα επίπεδο εμπιστοσύνης περίπου 95%.

- $\boldsymbol{m_s}$ ***= 100.02147g*** με μία ***συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα*** (δηλαδή, μία εκτιμώμενη τυπική απόκλιση) $\boldsymbol{u_c}$ ***= 0.35 mg***. Δεδομένου ότι μπορεί να υποτεθεί ότι, οι πιθανές εκτιμώμενες τιμές του προτύπου είναι περίπου κανονικά μοιρασμένες με την αναμενόμενη τυπική απόκλιση $\boldsymbol{u_c}$, η άγνωστη τιμή του προτύπου πιστεύεται ότι βρίσκεται στο διάστημα $\boldsymbol{m_s} \pm \boldsymbol{u_c}$ με ένα επίπεδο εμπιστοσύνης περίπου 68%.

4.3.2 Συμπέρασμα

Σε γενικές γραμμές, δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε λεπτομερώς όλες τις χρήσεις για τις οποίες, ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα μέτρησης **NIST** θα τεθεί. Έτσι, είναι συνήθως ακατάλληλο να συμπεριλάβουμε στην αβεβαιότητα, αναφερόμενη για ένα αποτέλεσμα του **NIST**, κάποιο στοιχείο πού προκύπτει από μία αξιολόγηση του **NIST** για το πώς το αποτέλεσμα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί. Μια τεκμηριωμένη αβεβαιότητα θα πρέπει κανονικά να είναι η πραγματική αβεβαιότητα που αποκτάται στο **NIST**.

4.4 Διάγραμμα Ροής για τον Υπολογισμό της Αβεβαιότητας στην Μέτρηση



- ✓ **Στάδιο 1**: Διαμόρφωση μοντέλου μέτρησης που συνδέει το μετρούμενο μέγεθος *Y* και τις τιμές του *y* με τις μεταβλητές εισόδου X_1, X_2,…., δηλ. $Y= f(X_1, X_2,…, X_N)$. Αναζήτηση των μεταβλητών εισόδου $X_1,X_2,…,X_N$ και του τρόπου με τον οποίο υπεισέρχονται στο μοντέλο π.χ. $L = Lo\,[1 + k(T-To)]$.
- ✓ **Στάδιο 2**: Διαμόρφωση της σχέσης υπολογισμού της συνδυασμένης αβεβαιότητας (προσδιορισμός συντελεστών ευαισθησίας, κλπ.).
- ✓ **Στάδιο 3**: Επιλογή των κατανομών των μεταβλητών εισόδου $X_1,X_2,…$ και υπολογισμός των αβεβαιοτήτων $u(x_1)$, $u(x_2)$,…,$u(x_N)$.
- ✓ **Στάδιο 4**: Υπολογισμός της συνδυασμένης αβεβαιότητας $u_c(y)$.
- ✓ **Στάδιο 5**: Υπολογισμός διευρυμένης αβεβαιότητας $U= ku_c(y)$.
- ✓ **Στάδιο 6**: Έκφραση αποτελέσματος μέτρησης.

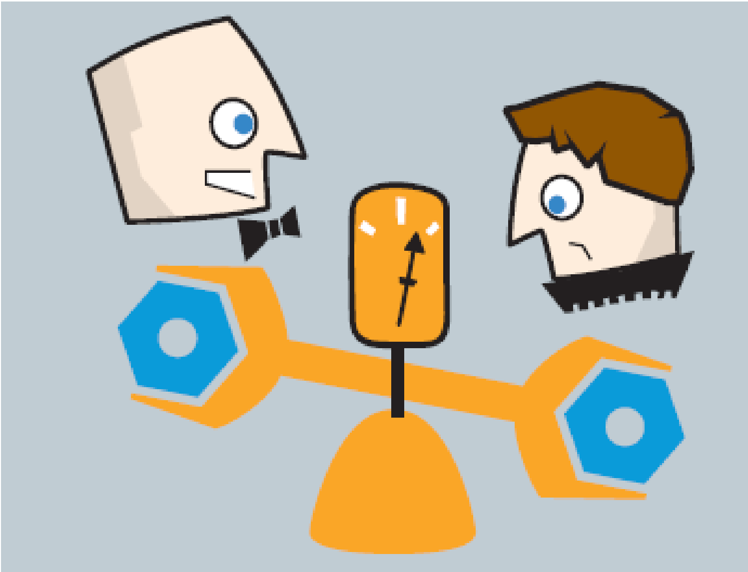
Κεφάλαιο 5: Αβεβαιότητα οργάνου & μέτρησης

5.1 Διαφορά μεταξύ αβεβαιότητας οργάνου και μέτρησης

Πρέπει να σημειωθεί ότι, ***η αβεβαιότητα δεν αποδίδεται σε όργανο αλλά σε μετρούμενο μέγεθος*** **[6]**. Συνεπώς η έκφραση που χρησιμοποιούμε πολλές φορές ως "**αβεβαιότητα οργάνου**" δεν είναι απόλυτα ορθή. Όταν αναφερόμαστε στην "**αβεβαιότητα οργάνου**", ουσιαστικά αναφερόμαστε στην αβεβαιότητα προσδιορισμού του μετρούμενου μεγέθους κατά τη διακρίβωση του εν λόγω οργάνου, όπως αποτυπώνεται στο πιστοποιητικό διακρίβωσής του.

Η *αβεβαιότητα κατά τη χρήση του μετρητικού οργάνου* θα διαφέρει από την αντίστοιχη "αβεβαιότητα οργάνου", δηλ. την αβεβαιότητα προσδιορισμού του μετρούμενου μεγέθους κατά την διακρίβωση του, δεδομένου ότι υπάρχουν επιπλέον συνεισφορές που μπορεί να οφείλονται:

- σε περισσότερους ή λιγότερο ελεγχόμενους εξωτερικούς παράγοντες επίδρασης. Για παράδειγμα, κατά τη χρήση του στο χώρο της μέτρησης, μπορεί να υπάρχουν μεγαλύτερες διακυμάνσεις θερμοκρασίας σε σχέση με αυτές του χώρου όπου αυτό διακριβώθηκε.
- στην αντίληψη του χρήστη για το πως ακριβώς ορίζεται το μετρούμενο μέγεθος. Για παράδειγμα, κατά τη χρήση ενός παχυμέτρου μπορεί να ασκείται διαφορετική πίεση από τον ίδιο ή διαφορετικούς χειριστές από μέτρηση σε μέτρηση.



5.2 Ακρίβεια μετρήσεων: Απόλυτο και Σχετικό Σφάλμα

Όπως ξέρουμε, κάθε μέτρηση εμπεριέχει και κάποιο σφάλμα. Επομένως ο τρόπος με τον οποίο θα παρουσιάζουμε τις μετρήσεις μας θα πρέπει να αντανακλά την **ακρίβεια της μέτρησης [19]**.

Παράδειγμα: Αν μετρήσουμε ένα μήκος **15.5cm** με σφάλμα **0.5cm**, τότε γράφουμε **(15.5 ± 0.5)cm**. Δηλαδή, η πραγματική τιμή του μήκους κυμαίνεται μεταξύ **15.0** και **16.0 cm**. Εάν κάνουμε την παραπάνω μέτρηση με ένα όργανο μεγαλύτερης ακρίβειας, τότε θα βρούμε **15.62cm** με σφάλμα **0.05cm**, ή **(15.62±0.05)cm**. Δηλαδή, τώρα γνωρίζουμε ότι η πραγματική τιμή είναι πιο κοντά στο 15.6cm, και μάλιστα βρίσκεται μεταξύ του 15.57cm και 15.67 cm. Τα *τυχαία σφάλματα* 0.5cm και 0.02cm λέγονται **απόλυτα σφάλματα**.

- Στην περίπτωση μετρήσεων με *αναλογικά όργανα,* το **απόλυτο σφάλμα** της κάθε μέτρησης, ισούται με το μισό της ελάχιστης υποδιαίρεσης, καθώς μέσα σε αυτά τα όρια βρίσκεται η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της μέτρησης.
- Στην περίπτωση μετρήσεων με *ψηφιακά όργανα,* το **απόλυτο σφάλμα** του οργάνου μας δίνεται από τον κατασκευαστή.

Το **σφάλμα των οργάνων** είναι το ελάχιστο σφάλμα που μπορεί να έχει μια μέτρηση. Παράγοντες όπως η γωνία παρατήρησης της μετρητικής συσκευής, ο χρόνος αντίδρασης, τυχαίοι περιβαλλοντικοί παράγοντες, συνεισφέρουν επιπλέον στα πειραματικά σφάλματα. Με βάση τα παραπάνω η τυπική απόκλιση του δείγματος θα πρέπει να είναι ίση ή μεγαλύτερη από το σφάλμα του οργάνου, αφού ακόμη κι αν αποκλείσουμε όλες τις άλλες πηγές σφάλματος, η ακρίβεια των μετρήσεων θα καθορίζεται κατ' ελάχιστο από την ακρίβεια του οργάνου μέτρησης. Από την παραπάνω σύγκριση είναι προφανές ότι η μέτρηση **(15.62±0.05)cm** είναι πιο ακριβής από τη μέτρηση **(15.5 ±0.5)cm**, αφού έχει μικρότερο σφάλμα.

Ισχύει όμως το ίδιο εάν συγκρίνουμε δύο υποθετικές μετρήσεις **(1587.5 ±0.5)cm** *και* **(15.25 ±0.05)cm**;

Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας το γεγονός ότι, ένα σφάλμα της τάξεως του **0.5cm** έχει πολύ μικρότερη σημασία σε μία μέτρηση με μεγάλη αριθμητική τιμή όπως **1587.5cm** απ' ότι μια μέτρηση με σφάλμα **0.05cm** που αναφέρεται σε μία κατά πολύ μικρότερη αριθμητική τιμή. Επομένως, ένας πιο ποσοτικός τρόπος για να εκτιμήσουμε την ακρίβεια μιας μέτρησης είναι να δούμε το **σχετικό της σφάλμα** που ορίζεται ως:

Σχετικό σφάλμα: $\delta x / x \times 100\%$

όπου δx το σφάλμα και x η τιμή της μέτρησης.

Συμπέρασμα: Προφανώς, **όσο μικρότερο είναι το σχετικό σφάλμα τόσο ακριβέστερη είναι η μέτρησή μας**.

Κεφάλαιο 6: Πειραματισμός

Το **EUnit** είναι μία ζώνη δοκιμής για την υλοποίηση μονάδων δοκιμής στο Excel. Είναι ειδικά για το Excel και υλοποιείται στο πλαίσιο του Excel, έτσι ώστε να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί με άλλα υπολογιστικά πακέτα.

Μία *ζώνη δοκιμής* είναι ένα κομμάτι του λογισμικού που επιτρέπει να τρέξει μία επιλογή δοκιμών, και τα αποτελέσματα καταγράφονται, χωρίς περαιτέρω αλληλεπίδραση με τον δοκιμαστή. Η *μονάδα δοκιμής* είναι μία μέθοδος δοκιμών, όπου κάθε μονάδα κώδικα (ενότητα, συνάρτηση, κλπ.) δοκιμάζεται. Το **EUnit** είναι σχέδιο για τον έλεγχο μονάδων εφαρμογών Excel, αλλά μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για δοκιμή συστήματος.

Οι δοκιμές γράφονται ως διαδικασίες που ονομάζονται *assert διαδικασίες* και χρησιμοποιούνται για να αναφέρουμε αν οι δοκιμές πέτυχαν ή απέτυχαν. Οι διαδικασίες δοκιμής διαμένουν σε ενότητες κώδικα, οι οποίες μπορεί να περιέχουν διαδικασίες *set-up* & *tear-down* που εκτελούνται πριν και μετά από κάθε δοκιμή στην μονάδα. Αφού έχουμε γράψει τις δοκιμές, αυτές αυτόματα τρέχουν χρησιμοποιώντας το **EUnit GUI**. Το γραφικό περιβάλλον **GUI** μας επιτρέπει να επιλέξουμε τις δοκιμές, να εκτελέσουμε τις δοκιμές και να εμφανίσουμε τα αποτελέσματα.

Παρακάτω δίνεται ένα απλό παράδειγμα στο λογισμικό που αναφέραμε πιο πριν καθώς και ένα-ένα τα βήματα που ακολουθήσαμε για την υλοποίηση αυτού του παραδείγματος:

- **Βήμα 1ο**: Ανοίγουμε το EUnit.xls. Εάν η Προειδοποίηση Ασφαλείας δηλώνοντας ότι “Οι Μακροεντολές έχουν απενεργοποιηθεί” εμφανίζεται, πατήστε “Ενεργοποίηση Περιεχομένου”. Αποθηκεύστε το αρχείο.

- **Βήμα 2ο**: Ανοίγουμε το Example.xls. Εάν η Προειδοποίηση Ασφαλείας δηλώνοντας ότι “Οι Μακροεντολές έχουν απενεργοποιηθεί” εμφανίζεται, πατήστε “Ενεργοποίηση Περιεχομένου”.

- **Βήμα 3ο**: Ανοίγουμε το Microsoft Virtual Basic για εφαρμογές επεξεργασίας πιέζοντας Alt-F11.

- **Βήμα 4ο**: Δημιουργούμε μία αναφορά στο EUnit.xls ως εξής:
  - Click on Tools > References... > Check the EUnit reference > Press Ok

- **Βήμα 5ο**: Ανοίγουμε το γραφικό περιβάλλον EUnit GUI ως εξής:
  - Click on Tools > Macros...,
  - Select "Eunit (Eunit.xls)" from the "Macros In:" dropdown menu,
  - Click on "showallresults", and then click on "Run".

- **Βήμα 6ο**: Επιλέγουμε την μονάδα δοκιμής “Tests” και κάνουμε κλικ στο “Run tests”. Αυτό το απλό test πρέπει να περάσει.

<u>Παράδειγμα</u>:

i. Αρχικά, γράφουμε τον κύριο κώδικά μας που στην προκειμένη περίπτωση είναι μία συνάρτηση $Y=f(x_1*x_2)$ με $x_1=2$ και $x_2=3$.

```
Public Sub testMultiply()
    On Error GoTo traperrors
        Range("A1").Value = 2
        Range("B1").Value = 3
        Range("C1").Formula = "=A1*B1"
        Call assertEquals(Range("C1").Value, _
                6, , "Multiply two numbers")
    Exit Sub
```

ii. Η παγίδευση λαθών μέσα στο test είναι πολύ **σημαντική** και <u>πρέπει</u> να ενσωματωθεί στη συνέχεια του κώδικα, αλλιώς η ζώνη δοκιμής μπορεί να αποτύχει. Έτσι ο κώδικας γίνεται:

```
Public Sub testMultiply()
    On Error GoTo traperrors
        Range("A1").Value = 2
        Range("B1").Value = 3
        Range("C1").Formula = "=A1*B1"
        Call assertEquals(Range("C1").Value, _
                6, , "Multiply two numbers")
    Exit Sub
traperrors:
    Call fail("Failed executing the test", _
                Err.Description, _
                Err.Source, _
                Err.Number)
End Sub
```

iii. Δύο άλλες διαδικασίες μπορεί να είναι μέρος του κώδικα: η διαδικασία **setUp** και η διαδικασία **tearDown**. Αυτές εκτελούνται αντίστοιχα <u>πριν</u> και <u>μετά</u> από κάθε δοκιμή στην τρέχουσα μονάδα που εκτελείται. Η δομή τους είναι παρόμοια με τις διαδικασίες δοκιμής και παρουσιάζεται παρακάτω:

```
Public Sub setUP()
    On Error GoTo traperrors
        ' initialisation code goes here
    Exit Sub
traperrors:
    Call fail("Failed set up", _
                Err.Description, _
                Err.Source, _
                Err.Number)
End Sub
```

διαδικασία setUP

<u>Σημείωση</u>: Η διαδικασία setUP αποθηκεύει τις υπάρχουσες τιμές και καθαρίζει τα περιεχόμενα των κελιών για μία σωστή μέτρηση.

```
Public Sub tearDown()
    On Error GoTo traperrors
        ' termination code goes here
    Exit Sub
traperrors:
    Call fail("Failed tear down", _
              Err.Description, _
              Err.Source, _
              Err.Number)
End Sub
```

διαδικασία tearDown

<u>Σημείωση</u>: Η διαδικασία tearDown ουσιαστικά κάνει το ανάποδο. Καθαρίζει τα περιεχόμενα των κελιών και αποκαθιστά τις προϋπάρχουσες τιμές.

Παραδείγματα

Τα παρακάτω παραδείγματα μπορείτε να τα βρείτε, επίσης, στην αναφορά **[4]** του Απλού Οδηγού για την *έκφραση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων μέτρησης του NIST*.

Ε1. Σωλήνας Pitot

Ένας **σωλήνας Pitot** χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας του αέρα. Έχει ένα στόμιο που αντιμετωπίζει άμεσα τη ροή του αέρα για τη μέτρηση της συνολικής πίεσης κι άλλο ένα στόμιο του οποίου, η επιφάνεια κανονικά είναι ορθογώνια στη ροή για τη μέτρηση της στατικής πίεσης (βλ. εικόνα).

Η ταχύτητα του αέρα **u**, καθορίζεται από τη διαφορά **Δ** ανάμεσα στις συνολικές και στατικές πιέσεις και στην πυκνότητα του αέρα $\boldsymbol{\rho}$, σύμφωνα με την εξίσωση μέτρησης **u**= $\sqrt{2\Delta/\rho}$. Αφού το $\boldsymbol{\rho}$ συνήθως εκτιμάται από την εφαρμογή του ιδανικού νόμου των φυσικών αερίων, η εξίσωση μέτρησης γίνεται $\boldsymbol{u} = \sqrt{2\Delta R s T/p}$, όπου $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{T}$ υποδηλώνουν την πίεση και θερμοκρασία του αέρα και το $\boldsymbol{R_s}$ **= 287.058 J kg^{-1} K^{-1}** είναι η ειδική σταθερά του αερίου για το ξηρό αέρα.

Σωλήνας Pitot, τοποθετημένος σε ένα ελικόπτερο, εμφανίζοντας προς τα εμπρός ένα μεγάλο κυκλικό στόμιο για τη μέτρηση της συνολικής πίεσης καθώς και αρκετές μικρές κυκλικές οπές πίσω από το δαχτυλίδι για τη μέτρηση της στατικής πίεσης.

Η πρωτοποριακή εργασία των Kline και McClintock (1953) περιγράφει την μέθοδο για την εκτίμηση της αβεβαιότητας που συνδέεται με το $\boldsymbol{u}$ σε μία περίπτωση, όπου το **Δ=1.993 kPa** μετρήθηκε με ένα *μανόμετρο σωλήνα U*, το $\boldsymbol{p}$ **=101.4 kPa** μετρήθηκε με ένα *διαμέτρημα Bourdon* και το $\boldsymbol{T}$ **= 292.8 K** μετρήθηκε με ένα *θερμόμετρο υδραργύρου*.

Οι διευρυμένες αβεβαιότητες (που χαρακτηρίζονται ως διαστήματα κάλυψης 95%) ήταν: $\boldsymbol{U_{95\%}}$**(Δ) = 0.025 kPa**, $\boldsymbol{U_{95\%}}$**(p) = 2.1 kPa** και $\boldsymbol{U_{95\%}}$**(T) = 0.11 K**.

<u>Προσοχή</u>: Το $\boldsymbol{R_s}$ λαμβάνεται υπόψη ως έχει, γεγονός που οφείλεται στην έλλειψη γνώσης σχετικά με τη πραγματική υγρασία του αέρα.

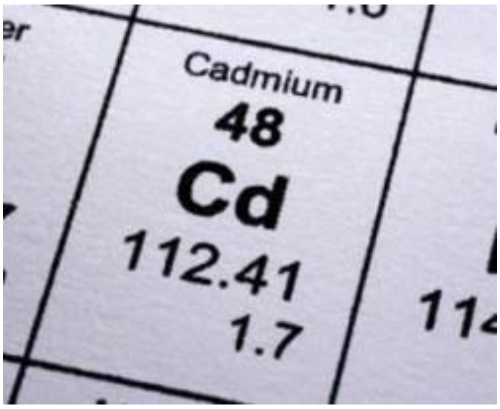
Λαμβάνοντας τις αντίστοιχες τυπικές αβεβαιότητες ως τις μισές από αυτές τις διευρυμένες αβεβαιότητες, η **NUM** παράγει τα αποτελέσματα ***u* = 40.64m/s** και ***u*(u) = 0.25m/s** σύμφωνα και με τον τύπο του **Gauss** και με τη μέθοδο **Monte Carlo**.

Ένα περίπου 95% διάστημα κάλυψης ορίζεται ως $u \pm 2u(u)$ και κυμαίνεται από **40.15m/s** έως **41.14m/s**.

Το αντίστοιχό του με βάση τα αποτελέσματα της μεθόδου **Monte Carlo**, με τα άκρα του να δίνονται από τα 2.5° και 97.5° εκατοστημόρια ενός δείγματος μεγέθους 1 x 10^6 προέρχεται από την κατανομή του *u*, και κυμαίνεται από **40.17 m/s** έως **41.13 m/s**.

Ε2. Πρότυπο Βαθμονόμησης Καδμίου

Ένα **πρότυπο βαθμονόμησης** για φασματοσκοπία ατομικής απορρόφησης παρασκευάζεται με την προσθήκη μίας μάζας καδμίου ***m***, με καθαρότητα ***P*** σε έναν όξινο διαλύτη για να αποκτηθεί ένα διάλυμα όγκου ***V*** (Ellison & Williams, Παράδειγμα).



Η *εξίσωση μέτρησης* εκφράζει τη συγκέντρωση του καδμίου ως $\mathbf{c_{Cd}}$ **=1000mP/V**. Οι ποσότητες εισόδου έχουν τις ακόλουθες τιμές και τυπικές αβεβαιότητες: ***m*=100.28 mg**, ***u*(*m*)=0.05 mg**, **P = 0.9999**, ***u*(*P*) = 0.000058**, ***V* = 100.0mL** , ***u*(*V*) = 0.07mL**.

Επομένως: $\mathbf{c_{Cd}}$ **= 1002.7 mg/L.**

Εάν, ο στόχος είναι απλά να υπολογίσουμε μία προσέγγιση του $\mathbf{u(c_{Cd})}$ και δεδομένου ότι οι ποσότητες εισόδου συνδυάζονται χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις μόνο, τότε, σύμφωνα με τον **GUM,** το τετράγωνο της σχετικής αβεβαιότητας του $\mathbf{c_{Cd}}$ είναι περίπου ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των σχετικών αβεβαιοτήτων των ποσοτήτων εισόδου:

$$\left(u(c_{Cd})/c_{Cd}\right)^2 \approx \left(u(m)/m\right)^2 + \left(u(P)/P\right)^2 + \left(u(V)/V\right)^2$$

ως εκ τούτου $\boldsymbol{u(c_{Cd}) \approx 0.9}$ **mg/L**.

Λόγω απουσίας συγκεκριμένων επιπρόσθετων πληροφοριών για αυτές τις ποσότητες, για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο **MC** μπορούμε να υποθέσουμε, ότι οι αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές έχουν *κανονικές κατανομές* με τις μέσες τιμές και τις τυπικές αποκλίσεις ίσες με τις τιμές και τις τυπικές αβεβαιότητες που δίνονται παραπάνω. Υπό αυτές τις συνθήκες, η μέθοδος **MC** παράγει αποτελέσματα σχεδόν πανομοιότυπα με εκείνα που αναφέρονται παραπάνω.

Τα αποτελέσματα είναι τα ίδια, ακόμα και εάν τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται αντ’ αυτού περιγράφονται για $\boldsymbol{P}$ (ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 0.9998 & 1) και για $\boldsymbol{V}$ (συμμετρική τριγωνική κατανομή με μέση τιμή **100mL** και τυπική απόκλιση **0.7mL**).

Ένα 95% διάστημα κάλυψης βασισμένο σε ένα **MC** δείγμα μεγέθους 10^6 κυμαίνεται από **1001.0mg/L** έως **1004.4mg/L**.

Ε3. Συντελεστής Θερμικής Διαστολής

Ο **συντελεστής θερμικής διαστολής** μίας μπάρας χαλκού δίνεται από την *εξίσωση μέτρησης*:

$$\boldsymbol{\alpha = (L_1 - L_0)/(L_0(T_1 - T_0))}$$

ως μία συνάρτηση με μήκη $\boldsymbol{L_0}$ **= 1.4999m** και $\boldsymbol{L_1}$ **= 1.5021m** που μετρήθηκαν σε θερμοκρασίες $\boldsymbol{T_0}$ **= 288.15K** και $\boldsymbol{T_1}$ **= 373.10K**. Οι αντίστοιχες τυπικές αβεβαιότητες είναι $\boldsymbol{u(L_0)}$ **= 0.0001 m**, $\boldsymbol{u(L_1)}$ **= 0.0002 m**, $\boldsymbol{u(T_0)}$ **= 0.02 K** και $\boldsymbol{u(T_1)}$ **= 0.05 K**.

Μπάρες Χαλκού

<u>Γκαουσιανοί Είσοδοι</u>: Λόγω απουσίας πληροφοριών για την προέλευση αυτών των εκτιμήσεων και αξιολογήσεων αβεβαιότητας, υποθέτουμε *γκαουσιανές κατανομές* σε αυτές, με τις μέσες τιμές ίσες με τις εκτιμήσεις και τις τυπικές αποκλίσεις ίσες με τις τυπικές αβεβαιότητες και εφαρμόζουμε την **NUM**. Ο τύπος του **Gauss** και η μέθοδος **MC** δίνουν την ίδια εκτίμηση και τυπική αβεβαιότητα για το συντελεστή θερμικής διαστολής: $\boldsymbol{\hat{\alpha}}$**= 1.73x10^{-5} K^{-1}** και $\boldsymbol{u(\alpha)}$ **= 0.18x10^{-5} K^{-1}**.

Ένα 95% διάστημα κάλυψης για το $\boldsymbol{\alpha}$ μπορεί να προέρχεται από το **MC** δείγμα προερχόμενο από την κατανομή πιθανότητας του μετρούμενου μεγέθους επιλέγοντας το 2.5^{o} και το 97.5^{o} εκατοστημόριο του δείγματος (μεγέθους 1x10^{7}) ως τελικά σημεία: (**1.38x10^{-5} K^{-1}**, **2.07x10^{-5} K^{-1}**).

Ένα 99% διάστημα κάλυψης κατασκευάστηκε παρομοίως και κυμαίνεται από **1.27x10^{-5} K^{-1}** έως **2.18x10^{-5} K^{-1}**.

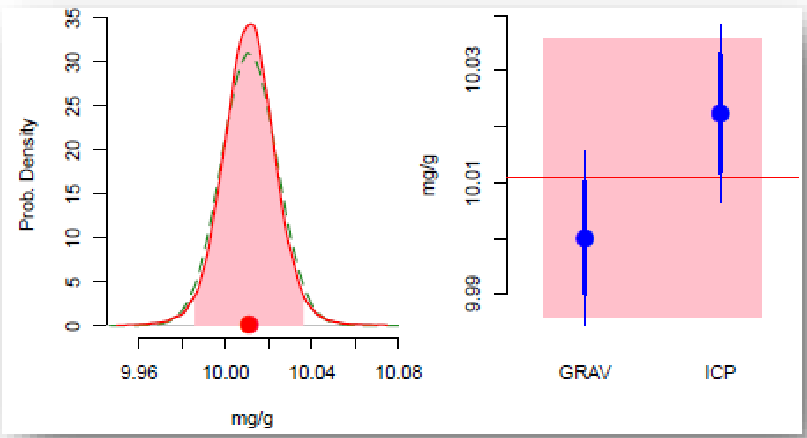
<u>Είσοδοι *t*-κατανομής</u>: Ας υποθέσουμε ότι οι εκτιμήσεις των μηκών και των θερμοκρασιών έγιναν κατά μέσο όρο από τέσσερις παρατηρήσεις που έγιναν κάτω από συνθήκες επαναληψιμότητας, και οι αντίστοιχες τυπικές αβεβαιότητες είναι τα τυπικά σφάλματα αυτών των μέσων όρων.

Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορεί να είναι πιο κατάλληλο να εκχωρήσουμε τις ***t*-κατανομές** με τρεις βαθμούς ελευθερίας σε όλες τις εισόδους, που μετατοπίστηκαν και κλιμακώθηκαν για να έχουν μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις ίσες με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις και τυπικές αβεβαιότητες.

Ο λόγος είναι ο εξής: αν το $\bar{\boldsymbol{x}}$ και το $\boldsymbol{s}$ υποδηλώνουν το *μέσο όρο* και την *τυπική απόκλιση* του δείγματος του μεγέθους $\boldsymbol{m}$ που προέρχεται από μία *γκαουσιανή κατανομή* με άγνωστη *μέση τιμή* **μ** και άγνωστη *τυπική απόκλιση* $\boldsymbol{\sigma}$, τότε το $(\bar{x}-\mu)/(s/\sqrt{m})$ έχει μία *t*-κατανομή με m - 1 βαθμό ελευθερίας. Τόσο το $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ όσο και το ***u(α)*** έχουν τις ίδιες τιμές, όπως όταν οι είσοδοι έχουν εκχωρηθεί ως γκαουσιανές κατανομές, αλλά τα διαστήματα κάλυψης διαφέρουν από εκείνα που δίνονται παραπάνω: το 95% διάστημα κάλυψης που κατασκευάζεται, κυμαίνεται από **1.40×10^{-5} K^{-1}** έως **2.05×10^{-5} K^{-1}** και το 99% διάστημα κάλυψης, κυμαίνεται από **1.15×10^{-5} K^{-1}** έως **2.30×10^{-5} K^{-1}**.

Η παρακάτω εικόνα δείχνει τις πυκνότητες πιθανότητας του μετρούμενου μεγέθους που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές παραδοχές μοντέλων για τις εισόδους. Όταν αυτά διαμορφωθούν ως t_3 τυχαίες μεταβλητές του, η κατανομή του μετρούμενου μεγέθους είναι περισσότερο συγκεντρωμένη γύρω από τη μέση τιμή. Το γεγονός αυτό βοηθά να εξηγήσουμε γιατί το 95% διάστημα που αντιστοιχεί στις *Student εισόδους* είναι μικρότερο από το ομόλογό του για τις *Γκαουσιανές εισόδους* και ότι το αντίθετο ισχύει για το 99% διάστημα.

Πραγματική Τιμή



*Το **αριστερό πάνελ** δείχνει μία εκτίμηση της πυκνότητας της πιθανότητας της ομόφωνης τιμής, η οποία χαρακτηρίζει πλήρως την αβεβαιότητας της μέτρησης. Η πραγματική τιμή $\hat{\omega}$ υποδεικνύεται από μία μεγάλη κόκκινη κουκίδα. Η ροζ περιοχή περιλαμβάνει το 95% της περιοχής κάτω από την καμπύλη: το αποτύπωμά της στον οριζόντιο άξονα είναι το αντίστοιχο διάστημα κάλυψης. Το **δεξί πάνελ** δείχνει τα αποτελέσματα μέτρησης για τις δύο μεθόδους που χρησιμοποιούνται, σταθμική ανάλυση και ICP – OES, όπου οι μεγάλες μπλε κουκίδες δείχνουν τις μετρούμενες τιμές, οι παχιές μπλε γραμμές δείχνουν τις αντίστοιχες τυπικές αβεβαιότητες της μέτρησης και οι μικροσκοπικές λεπτές γραμμές που εκτείνουν τις παχιές γραμμές δείχνουν τις συνεισφορές από τη σκοτεινή αβεβαιότητα (μεταξύ-μεθόδων αβεβαιότητα*

(Thompson και Ellison)). Το ροζ ορθογώνιο αντιπροσωπεύει το $\widehat{\omega} \pm U_{95\%}(\omega)$ όπου το $U_{95\%}(\omega)$, υποδηλώνει την διευρυμένη αβεβαιότητα που αντιστοιχεί στην καθορισμένη πιθανότητα κάλυψης.

Ε4. Η Χαρακτηριστική Αντοχή της Αλουμίνας

Οι αδελφοί Quinn (2010) παρατήρησαν τις εξής τιμές της τάσης (εκφράζονται σε **MPa**) όταν $\boldsymbol{m}$ = 32 δείγματα αλουμίνας που έπαθαν ρήξη σε μία δοκιμή κάμψης: 265, 272, 283, 309, 311, 320, 323, 324, 326, 334, 337, 351, 361, 366, 375, 380, 384, 389, 390, 390, 391, 392, 396, 396, 396, 396, 398, 401, 401, 429, 430, 435.

Μία *εξίσωση παρατήρησης* περιγράφει τα δεδομένα ως τα αποτελέσματα των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με την ίδια κατανομή **Weibull** με σχήμα $\boldsymbol{\alpha}$ και κλίμακα $\boldsymbol{\sigma_C}$. Μία λογαριθμοκανονική κατανομή θα είναι επίσης ένα αποδεκτό μοντέλο, αλλά η **Weibull** κατανομή προτιμάται περισσότερο. Το μοντέλο **Weibull** μπορεί να χαρακτηριστεί λέγοντας ότι η τάσης θραύσης $\boldsymbol{S}$ ενός δοκιμίου αλουμίνας είναι τέτοια, ώστε $\mathbf{log}\ \boldsymbol{S} = \mathbf{log}\ \boldsymbol{\sigma_C} + \mathbf{(1/\alpha)}\ \mathbf{log}\ \boldsymbol{Z}$, όπου το $\boldsymbol{Z}$ υποδηλώνει ένα σφάλμα μέτρησης που υποτίθεται ότι έχει μία εκθετική κατανομή με *μέση τιμή* 1. Τόσο η παράμετρος κλίμακας $\boldsymbol{\sigma_C}$, όσο και η παράμετρος του σχήματος $\boldsymbol{\alpha}$, χρειάζεται να εκτιμηθούν από τα δεδομένα.

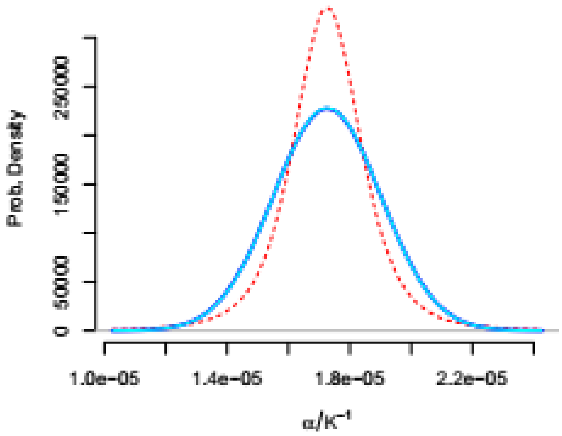
Το μετρούμενο μέγεθος είναι το $\boldsymbol{\sigma_C}$, που ονομάζεται επίσης και *χαρακτηριστική αντοχή* του υλικού. Αρκετές διαφορετικές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση των παραμέτρων σχήματος και κλίμακας. Οι μέγιστες εκτιμήσεις πιθανότητας είναι οι τιμές που μεγιστοποιούν τον λογάριθμο της συνάρτησης της πιθανότητας, και λαμβάνει τη μορφή:

$$\ell(\alpha, \sigma_C) = m \log \alpha - m\alpha \log \sigma_C + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{m} \log s_i - \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i}{\sigma_C} \right)^{\alpha}$$

όπου τα $\boldsymbol{s_1}, \ldots, \boldsymbol{s_m}$ υποδηλώνουν τις καταπονήσεις θραύσης που αναφέρονται παραπάνω.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ	ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ	95% ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΚΑΛΥΨΗΣ
AVE	10.011	0.007	(9.997, 10.026)
WAVE	10.011	0.007	(9.996, 10.025)
GUM	10.011	0.007	(9.997, 10.026)
GUM-S1	10.011	0.007	(9.997, 10.026)
DL	10.011	0.011	(9.869, 10.153)
DL-B	10.011	0.013	(9.986, 10.036)

Εκτίμηση του κλάσματος μάζας του κασσίτερου σε ένα τυπικό διάλυμα που βασίζεται σε δύο ανεξάρτητα αποτελέσματα μέτρησης, που λαμβάνονται ως ένας απλός μέσος όρος (AVE), ως ένας σταθμισμένος μέσος όρος (WAVE), χρησιμοποιώντας τις μεθόδους του GUM και του GUM-S1, και η διαδικασία συναίνεσης (DL) προτείνεται από τους DerSimonian και Laird (1986), καθώς και η ίδια διαδικασία αλλά με αξιολόγηση της αβεβαιότητας μέσω της παραμετρικής στατιστικής εκκίνησης (DL-B) [Οι τιμές στον Πίνακα εκφράζονται σε mg/g].



Εκτιμήσεις της πυκνότητας της πιθανότητας του συντελεστή θερμικής διαστολής υποθέτοντας ότι οι είσοδοι έχουν t_3-κατανομές, μετατοπισμένες και ξανά κλιμακωμένες για να αναπαράγουν τις εκτιμώμενες τιμές και σχετικές τυπικές αβεβαιότητες τους (διακεκομμένη, λεπτή κόκκινη γραμμή), ή Γκαουσιανές κατανομές (στερεή , παχιά μπλε γραμμή). Η στερεή, λεπτή κυανή γραμμή που ουσιαστικά ακολουθεί την μπλε γραμμή είναι η πυκνότητας της πιθανότητας μίας Γκαουσιανής κατανομής με την ίδια μέση τιμή και τυπική απόκλιση όπως το μετρούμενο μέγεθος.

Ε5. Συντελεστής Αντανάκλασης Τάσης

Ο Tsui και άλλοι (2012), θεωρούν τον **συντελεστή αντανάκλασης της τάσης**:

$$\mathbf{\Gamma} = S_{22} - S_{12}S_{23} / S_{13}$$

ενός διαχωριστή ισχύος μικροκυμάτων, που ορίζεται ως μία συνάρτηση των στοιχείων της αντίστοιχης μήτρας σκέδασης τριών θυρών (*S*-παράμετροι). Αφού οι S-παράμετροι είναι μιγαδικοί, θα είναι και το **Γ**. Έτσι, το μοντέλο μέτρησης είναι μία *εξίσωση μέτρησης* με μία διανυσματική πολύτιμη ποσότητα εξόδου $(\Re(\Gamma),\Im(\Gamma))$ της οποίας, τα στοιχεία είναι *πραγματικά* και *φανταστικά* μέρη του **Γ**.

Οι *S*-παράμετροι είναι ανεξάρτητες και μιγαδικές τυχαίες μεταβλητές. Το μέτρο και το επιχείρημα της κάθε S-παραμέτρου, μοντελοποιούνται ως ανεξάρτητες τυχαίες Γκαουσιανές μεταβλητές, με *μέση τιμή* και *τυπική απόκλιση* ίση με την τιμή και την τυπική αβεβαιότητα.

Η εφαρμογή της μεθόδου **MC** περιλαμβάνει την αφαίρεση των δειγμάτων μεγέθους **K** από τις κατανομές πιθανότητας των τεσσάρων *S*-παραμέτρων και την χρησιμοποίηση αντίστοιχων τιμών από αυτά τα δείγματα, για να υπολογίσουμε το **K** που αναπαράγει το **Γ**.

Αφού τα *πραγματικά* και τα *φανταστικά* μέρη του **Γ** μπορούν να γραφτούν ως συναρτήσεις των οκτώ ίδιων μεταβλητών εισόδου (οι οποίες είναι τα μέτρα και τα ορίσματα των *S*-παραμέτρων), η **NUM** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία “συζευγμένων” δειγμάτων των *πραγματικών* και *φανταστικών μερών* κατά την επεξεργασία τους ως στοιχεία ενός διανυσματικού πολύτιμου μετρούμενου μεγέθους.

Μόλις τα δείγματα **MC** που παράγονται από την **NUM** σωθούν, μπορούν να εισαχθούν σε οποιαδήποτε εφαρμογή στατιστικού υπολογισμού για να υπολογίσουμε τις κατάλληλες περιλήψεις της κοινής κατανομής των *πραγματικών* και των *φανταστικών μερών* του **Γ**.

Η εκτίμηση του **$\Re$(Γ)** είναι **0.0074** και του ***u*($\Re$(Γ)) = 0.0050**. Η εκτίμηση του **$\Im$(Γ)** είναι **0.0031** και το ***u*($\Im$(Γ)) = 0.0045**. Η συσχέτιση μεταξύ του **$\Re$(Γ)** και του **$\Im$(Γ)** είναι **0.0323**.

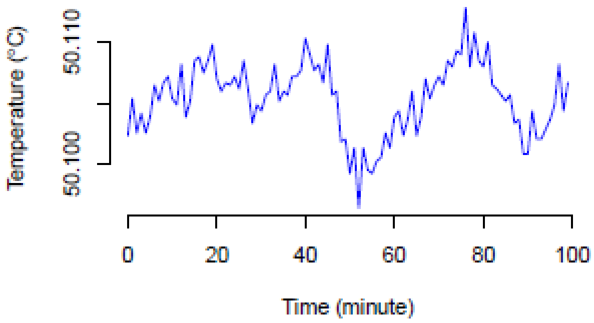
	μέτρο(*S*)	*u*(μέτρο(*S*))	όρισμα(*S*)	*u*(όρισμα(*S*))
S_{22}	0.024776	0.00337	4.88683	0.01392
S_{12}	0.49935	0.00340	4.78595	0.00835
S_{23}	0.24971	0.00170	4.85989	0.00842
S_{13}	0.49952	0.00340	4.79054	0.00835

S-παράμετροι *που εκφράζονται σε πολική μορφή, και* ***σχετικές τυπικές αβεβαιότητες****, με μέτρο(S) και όρισμα(S) που εκφράζεται σε ακτίνια.*

Ε6. Ιαματικά Λουτρά

Οι καταγραφές που αναφέρονται κι απεικονίζονται παρακάτω, λήφθηκαν κάθε λεπτό με ένα θερμοστοιχείο βυθισμένο σε ένα **ιαματικό λουτρό** κατά τη διάρκεια μίας περιόδου 100 λεπτών, για να χαρακτηριστεί η κατάσταση της θερμικής ισορροπίας και να υπολογιστεί η *μέση θερμοκρασία* του λουτρού.

0.1024	0.1054	0.1026	0.1042	0.1026	0.1039	0.1065	0.1052	0.1067	0.1072
0.1054	0.1049	0.1082	0.1039	0.1052	0.1085	0.1088	0.1075	0.1085	0.1098
0.1070	0.1060	0.1067	0.1065	0.1072	0.1062	0.1085	0.1062	0.1034	0.1049
0.1044	0.1057	0.1060	0.1082	0.1052	0.1060	0.1057	0.1072	0.1072	0.1077
0.1103	0.1090	0.1077	0.1082	0.1067	0.1098	0.1057	0.1060	0.1019	0.1021
0.0993	0.1014	0.0965	0.1014	0.0996	0.0993	0.1003	0.1006	0.1026	0.1014
0.1039	0.1044	0.1024	0.1037	0.1060	0.1024	0.1039	0.1070	0.1054	0.1065
0.1072	0.1065	0.1085	0.1080	0.1093	0.1090	0.1128	0.1080	0.1108	0.1085
0.1080	0.1100	0.1065	0.1062	0.1057	0.1052	0.1057	0.1034	0.1037	0.1009
0.1009	0.1044	0.1021	0.1021	0.1029	0.1037	0.1049	0.1082	0.1044	0.1067



Χρονοσειρές των αναγνώσεων θερμοκρασίας *(εκφράζονται ως αποκλίσεις από 50^{o}C) που παράγονται κάθε λεπτό από ένα θερμοστοιχείο βυθισμένο σε ένα ιαματικό λουτρό.*

Η *εξίσωση παρατήρησης* $t_i = \tau + \varepsilon_i + \varphi t_{i-1} + \theta_1\, \varepsilon_{i-1} + \theta_2\, \varepsilon_{i-2}$ μοντελοποιεί τη σειρά των παρατηρήσεων ως αυτοπαλινδρομικές κινητές μέσου όρου χρονοσειρές (**ARMA**), όπου τα $\{\varepsilon_i\}$ είναι ανεξάρτητα και Γκαουσιανά με *μέση τιμή* 0 και *τυπική απόκλιση σ*.

Συσχετίσεις μεταξύ του $\{t_i\}$ προκύπτουν, επειδή κάθε ένδειξη της θερμοκρασίας εξαρτάται από προηγούμενες αναγνώσεις και από λάθη που τις αφορά. Το συγκεκριμένο μοντέλο **ARMA** επιλέχθηκε, σύμφωνα με το **Κριτήριο Πληροφορίας Akaike (AIC)** που διορθώνεται για το πεπερασμένο μήκος της σειράς (AICc).

Οι εκτιμήσεις μέγιστης πιθανότητας των παραμέτρων, που λαμβάνονται με τη χρήση της λειτουργίας *R arima*, είναι: $\hat{\tau} = 50.1054℃$, $\hat{\varphi} = 0.8574$, $\widehat{\theta 1} = -0.5114$, $\widehat{\theta 2}$ = 0.3369, $\hat{\sigma} = 0.002℃$

Επίσης, $\boldsymbol{u(\tau)}$ **= 0.001°C**, το οποίο είναι περίπου τρεις φορές μεγαλύτερο από την αφελή αξιολόγηση που θα είχε προκύψει αν οι αυτοσυσχετίσεις είχαν παραμεληθεί.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι, η μεταβλητότητα της θερμοκρασίας του λουτρού περιλαμβάνει ένα επίμονο τύπο ταλαντώσεων, που χαρακτηρίζεται από την αυτοπαλινδρομική παράμετρο $\boldsymbol{\varphi}$, που πιθανώς οδηγείται από ατελή μόνωση και μεταγωγή. Επιπλέον, υπάρχουν προεξέχουσες άστατες επιδράσεις, που χαρακτηρίζονται από τους κινούμενους μέσου όρου παραμέτρους $\boldsymbol{\theta_1}$ και $\boldsymbol{\theta_2}$ και από την τυπική απόκλιση σ.

Ε7. Χαλκός σε Αλεύρι Ολικής Άλεσης

Η Επιτροπή Αναλυτικών Μεθόδων (1989) του *Royal Society of Chemistry* αναφέρει τους ακόλουθους προσδιορισμούς του κλάσματος μάζας **χαλκού** (εκφράζεται σε **mg/g**) σε **αλεύρι ολικής άλεσης** που λαμβάνονται κάτω από συνθήκες επαναληψιμότητας:

2.9, 3.1, 3.4, 3.4, 3.7, 3.7, 2.8, 2.5, 2.4, 2.4, 2.7, 2.2, 5.28, 3.37, 3.03, 3.03, 28.95, 3.77, 3.4,2.2, 3.5, 3.6, 3.7, 3.7.

Αυτή η Επιτροπή, πρότεινε να χρησιμοποιείται ένας Huber M-εκτιμητής της θέσης αντί του απλού αριθμητικού μέσου όρου, όταν οι προσδιορισμοί δεν φαίνεται να είναι ένα δείγμα από μία *κανονική κατανομή*, και το τεστ *Anderson-Darling* απορρίπτει την υπόθεση του σχήματος *κανονικής κατανομής* (Anderson & Darling,1952).

Η συνάρτηση *huberM* που ορίζεται στο R πακέτο **robustbase** (Rousseeuw κι άλλοι, 2012), υλοποιεί μία ισχυρή εναλλακτική λύση για τον αριθμητικό μέσο όρο που παράγει τόσο μία εκτίμηση του εν λόγω κλάσματος μάζας όσο και μία αξιολόγηση της σχετικής τυπικής αβεβαιότητας. Η συνάρτηση αυτή που εφαρμόζεται με τις προεπιλεγμένες τιμές των ορισμάτων της, παράγει **3.21 μg/g** ως μία εκτίμηση του μετρούμενου μεγέθους και τυπική αβεβαιότητα **0.14 μg/g**.

Αφού οι ακραίες τιμές μπορεί να περιέχουν πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με την ποσότητα ενδιαφέροντος, μπορεί να είναι προτιμότερο να τις διαμορφώσουμε ρητά αντί να τις ζυγίσουμε-κάτω αυτόματα.

Η συνάρτηση *BESTmcmc* που ορίζεται στο R πακέτο **BEST** (Kruschke & Meredith, 2013) υλοποιεί ένα μοντέλο που βασίζεται στην εναλλακτική Bayesian: τα δεδομένα μοντελοποιούνται ως ένα δείγμα από την t-κατανομή με v βαθμούς ελευθερίας, εκ νέου κλιμακωμένο για να έχει τυπική *απόκλιση σ* , και μετατοπισμένο για να έχει μία μέση τιμή ίση με το μετρούμενο μέγεθος, χρησιμοποιώντας ελάχιστες πληροφοριακές προγενέστερες κατανομές. Η συνάρτηση αυτή, που εφαρμόζεται με τις προεπιλεγμένες τιμές των ορισμάτων της, παράγει μία μεταγενέστερη κατανομή για το κλάσμα μάζας της οποίας η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι 3.22 μg/g και 0.15 μg/g.

Αυτό το μοντέλο **Bayesian** είναι παρόμοιο με ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται από τον Possolo και επιλέγει αποτελεσματικά την ένταση των ουρών της κατανομής της δειγματοληψίας για τα δεδομένα, με έναν τρόπου βασίζεται σε δεδομένα. Η αντίστοιχη μεταγενέστερη κατανομή για το κλάσμα μάζας περιγράφει τη σχετική αβεβαιότητα πλήρως: η μέση τιμή της κατανομής αυτής είναι μία εκτίμηση του μετρούμενου μεγέθους και η τυπική απόκλισή του είναι μία αξιολόγηση της σχετικής τυπικής αβεβαιότητας.

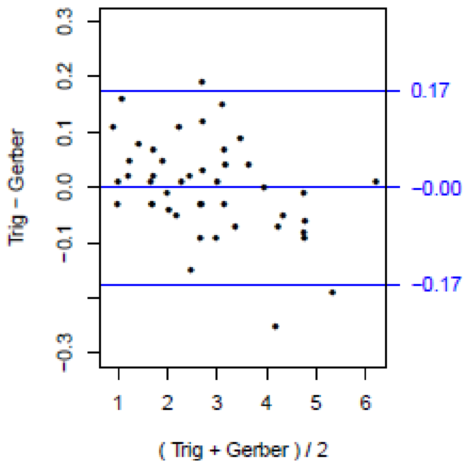
Συγκρίνετε αυτά με το συμβατικό μέσο όρο 4.28 μg/g και το τυπικό σφάλμα του μέσου όρου $s/\sqrt{,m} = 5.3/\sqrt{24} \approx 1.08$ μg/g, όπου το s υποδηλώνει την τυπική απόκλιση των $m = 24$ προσδιορισμών. Ωστόσο τα αποτελέσματα της ανάλυσης **Bayesian** βρίσκονται σε στενή συμφωνία με τα αποτελέσματα της κλασικής ανάλυσης **robust** χρησιμοποιώντας τη διαδικασία *HuberM* που συζητήθηκε παραπάνω.

Τα διαστήματα κάλυψης μπορούν επίσης να προέρχονται από την μεταγενέστερη κατανομή: για παράδειγμα, το διάστημα από **2.92 μg/g** έως *3.51 μg/g* περιλαμβάνει το 95% του δείγματος που η λειτουργία *BESTmcmc* έσυρε από την μεταγενέστερη κατανομή, ως εκ τούτου, είναι κατά προσέγγιση 95% κάλυψη για το κλάσμα μάζας του χαλκού.

E8. Λιπαρές Ουσίες του Γάλακτος

Η παρακάτω εικόνα περιλαμβάνει τιμές της συγκέντρωσης λίπους σε δείγματα ανθρώπινου γάλακτος που καθορίζονται από δύο μεθόδους μέτρησης, και μας δείχνει ένα *Bland-Altman διάγραμμα* των δεδομένων αυτών: η μία μέθοδος βασίζεται στην μέτρηση της γλυκερόλης που απελευθερώνεται από την ενζυματική υδρόλυση των τριγλυκεριδίων και η άλλη είναι η μέθοδος *Gerber*.

T	G	T	G	T	G
0.96	0.85	2.28	2.17	3.19	3.15
1.16	1.00	2.15	2.20	3.12	3.15
0.97	1.00	2.29	2.28	3.33	3.40
1.01	1.00	2.45	2.43	3.51	3.42
1.25	1.20	2.40	2.55	3.66	3.62
1.22	1.20	2.79	2.60	3.95	3.95
1.46	1.38	2.77	2.65	4.20	4.27
1.66	1.65	2.64	2.67	4.05	4.30
1.75	1.68	2.73	2.70	4.30	4.35
1.72	1.70	2.67	2.70	4.74	4.75
1.67	1.70	2.61	2.70	4.71	4.79
1.67	1.70	3.01	3.00	4.71	4.80
1.93	1.88	2.93	3.02	4.74	4.80
1.99	2.00	3.18	3.03	5.23	5.42
2.01	2.05	3.18	3.11	6.21	6.20



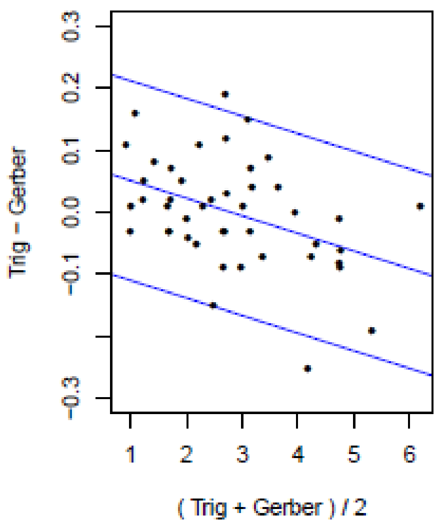
*Στο **αριστερό πάνελ**, οι τιμές της συγκέντρωσης του λίπους στο ανθρώπινο γάλα (εκφράζεται σε εκατοστόγραμμα ανά χιλιοστόλιτρα) που προσδιορίστηκαν από την μέτρηση της γλυκερόλης που απελευθερώθηκε από την ενζυματική υδρόλυση των τριγλυκεριδίων (**T**) και από την μέθοδο Gerber (**G**), όπως αναφέρεται από τους Bland & Altman. Στο **δεξί πάνελ**, το διάγραμμα Bland-Altman, με το μέσο όρο της διαφοράς και τα όρια της συμφωνίας που υποδεικνύονται από οριζόντιες (μπλε) γραμμές.*

Οι Bland και Altman (1986) επισημαίνουν, ότι μία πολύ υψηλή συσχέτιση μεταξύ των ζευγαρωμένων τιμών που μετρούνται είναι μία παραπλανητική ένδειξη της συμφωνίας μεταξύ δύο μεθόδων μέτρησης, επειδή μία τέλεια συσχέτιση δείχνει μόνο ότι η τιμή που μετρήθηκε από μία μέθοδο είναι μία γραμμική συνάρτηση της τιμής που μετρήθηκε από την άλλη, όχι ότι οι αντίστοιχες μετρούμενες τιμές είναι εντελώς οι ίδιες. Ο συντελεστής συσχέτισης για αυτές τις δύο ομάδες των μετρούμενων τιμών είναι **0.998**.

Ένα ζεύγος *t*-test δείχνει ότι η μέση διαφορά δεν διαφέρει σημαντικά από το μηδέν. Αυτό, επίσης, υπολείπεται της θέσπισης της ισοδυναμίας μεταξύ των δύο μεθόδων μέτρησης. Αν τα ζεύγη δείγματα είναι μικρού μεγέθους, τότε υπάρχει μία δίκαιη ευκαιρία, ότι ένας στατιστικός έλεγχος θα αποτύχει να ανιχνεύσει μία διαφορά που είναι σημαντική στην πράξη. Κι αν αυτά τα δείγματα είναι μεγάλα, τότε μία στατιστική δοκιμή πολύ πιθανό θα κρίνει σημαντικά μία διαφορά η οποία έχει σημασία στην πράξη.

Για τους λόγους αυτούς, οι Bland και Altman προτείνουν οι γραφικές μέθοδοι να είναι ιδιαίτερα κατατοπιστικές για το θέμα της συμφωνίας μεταξύ των μεθόδων. Καθώς είναι το πιο συχνά αναφερόμενο έγγραφο, μας δείχνει το εξαιρετικό ενδιαφέρον που τα θέματα μέτρησης απολαμβάνουν στην ιατρική.

Το διάγραμμα *Bland-Altman* (βλ. παραπάνω εικόνα) δείχνει πως η διαφορά μεταξύ των ζευγαρωμένων μετρούμενων τιμών ποικίλλει με τους μέσους όρους τους. Η διαφορά μεταξύ των μεθόδων τείνει να είναι θετικό για τις μικρές τιμές του μετρούμενου μεγέθους και αρνητικό για τις μεγάλες τιμές.



Η διπλανή εικόνα μας δείχνει ένα *διάγραμμα Bland-Altman* που αναγνωρίζει αυτή τη τάση. Η συνάρτηση *BA.plot* από το R πακέτο **MethComp** χρησιμοποιήθηκε για να εξαχθούν τα *διαγράμματα Bland-Altman* και για να προσδιοριστεί η εξίσωση “μετατροπής” που εδώ.

Το διάγραμμα Bland-Altman αναγνωρίζει ότι οι διαφορές μεταξύ των ζευγαρωμένων μετρούμενων τιμών εξαρτώνται από τους μέσους όρους των ίδιων τιμών. Η αντίστοιχη εξίσωση που “μετατρέπει” μία τιμή που παράγεται από τη μέθοδο Gerber στην τιμή που το Trig θα αναμενόταν να παραχθεί είναι **Trig = 0.0779 + 0.9721 x Gerber**, με τυπική αβεβαιότητα 0.0792 cg/ mL. Η κλίση είναι σύμφωνα με το γεγονός ότι περίπου το 98% του λίπους στο ανθρώπινο γάλα παρουσιάζεται ως τριγλυκερίδια, τα οποία είναι ο στόχος του Trig.

Παράρτημα Α

Νόμος Διάδοσης Αβεβαιότητας

Α.1 Σε πολλές περιπτώσεις ένα μετρούμενο μέγεθος $\boldsymbol{Y}$ δεν μετριέται άμεσα, αλλά προσδιορίζεται από $\boldsymbol{N}$ άλλες ποσότητες $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_N}$ μέσω μίας συνάρτησης-σχέσης $\boldsymbol{f}$:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N). \qquad \text{(A-1)}$$

Περιλαμβανομένου ότι, οι ποσότητες $\boldsymbol{X_i}$ είναι διορθώσεις, καθώς επίσης και ποσότητες που λαμβάνουν κι άλλες πηγές της μεταβλητότητας, όπως διαφορετικοί παρατηρητές, όργανα, δείγματα, εργαστήρια και χρόνους μέσα στους οποίους γίνονται οι παρατηρήσεις. Έτσι η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ της **Εξ.(Α-1)** πρέπει να εκφράζει όχι απλώς έναν φυσικό νόμο, αλλά μία διαδικασία μέτρησης και πιο συγκεκριμένα πρέπει να περιέχει όλες τις ποσότητες που μπορεί να συμβάλει μία σημαντική αβεβαιότητα για το αποτέλεσμα της μέτρησης.

Α.2 Μία εκτίμηση του μετρούμενου μεγέθους ή της *ποσότητας εξόδου* $\boldsymbol{Y}$, συμβολίζεται με $\boldsymbol{y}$, λαμβάνεται από την **Εξ.(Α-1)** χρησιμοποιώντας εκτιμήσεις εισόδου $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_N}$ για τις τιμές των N ποσοτήτων εισόδων $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_N}$. Έτσι η εκτίμηση εξόδου $\boldsymbol{y}$, η οποία είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης, δίνεται από:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N). \qquad \text{(A-2)}$$

Α.3 Η *συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα* του αποτελέσματος της μέτρησης $\boldsymbol{Y}$, που σχεδιάστηκε από το $\boldsymbol{u_c(y)}$ και πάρθηκε για να αντιπροσωπεύει την εκτιμώμενη τυπική απόκλιση του αποτελέσματος, είναι η θετική τετραγωνική ρίζα της εκτιμώμενης διακύμανσης $\boldsymbol{u^2_c(y)}$ που λαμβάνεται από την **Εξ.(Α-3)**,

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j). \qquad \text{(A-3)}$$

βασίζεται σε μία προσέγγιση πρώτης τάξης σειράς Taylor του $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ και αναφέρεται ως ο <u>*νόμος διάδοσης της αβεβαιότητας*</u>. Οι μερικοί παράγωγοι $\partial f/\partial xi$ (συντελεστές ευαισθησίας) είναι αυτοί που υπολογίζονται στο $X_i = x_i$ και το $u(x_i, x_j)$ είναι η εκτιμώμενη συνδιακύμανση που σχετίζεται με τα x_i και x_j.

Παράρτημα Β

Αποσαφήνιση και Επιπλέον Οδηγίες

Στη δεύτερη έκδοση της **ΤΣ1297**, το **Παράρτημα Β** έχει προστεθεί για την **αποσαφήνιση** και τη **παροχή πρόσθετων οδηγιών** σχετικά με μια σειρά θεμάτων, και ετοιμάστηκε ως απάντηση σε ερωτήσεις που τέθηκαν από τη δημοσίευση της πρώτης έκδοσης.

Β.1 Ορολογία

Υπάρχει ένας αριθμός όρων που κοινώς χρησιμοποιούνται σε σχέση με το αντικείμενο της αβεβαιότητας της μέτρησης, όπως η ακρίβεια της μέτρησης, η επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων των μετρήσεων και η διόρθωση. Μπορεί κανείς να αποφύγει τη σύγχυση χρησιμοποιώντας τέτοιους όρους κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι συνεπής με άλλα διεθνή έγγραφα.

Ορισμοί του Διεθνούς Λεξιλογίου Βασικών και Γενικών Όρων στη Μετρολογία

Β.1.1 Ακρίβεια της μέτρησης

Η εγγύτητα της συμφωνίας μεταξύ του αποτελέσματος της μέτρησης και της τιμής του μετρούμενου μεγέθους.

ΤΣ1297 Σχόλια:

1. Η φράση "*μία πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους*", έχει αντικατασταθεί με την φράση "*η τιμή του μετρούμενου μεγέθους*". Αυτό έχει γίνει για να αντανακλάται η άποψη του **GUM**, ότι "*μια αληθινή τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους*" είναι απλά η τιμή του μετρούμενου μεγέθους.
2. Επειδή η "**ακρίβεια**" είναι μια ποιοτική έννοια, θα πρέπει κανείς να μην την χρησιμοποιεί ποσοτικά. Οι αριθμοί θα πρέπει να σχετίζονται με τα μέτρα της αβεβαιότητας αντ' αυτού. Έτσι, μπορεί κανείς να γράψει "*η τυπική αβεβαιότητα είναι 2 μΩ*" αλλά όχι "*η ακρίβεια είναι 2 μΩ*".
3. Για να αποφευχθεί η σύγχυση, η λέξη "ανακρίβεια" δεν χρησιμοποιείται.
4. Το **VIM** δεν δίνει έναν ορισμό για την **ακρίβεια** λόγω των πολλών ορισμών που υπάρχουν για αυτή τη λέξη.

Β.1.2 Επαναληψιμότητα (των αποτελεσμάτων των μετρήσεων)

Η εγγύτητα της συμφωνίας μεταξύ των αποτελεσμάτων των διαδοχικών μετρήσεων του ίδιου μετρούμενου μεγέθους, διεξάγονται κάτω από τις ίδιες συνθήκες μέτρησης. Οι συνθήκες αυτές, ονομάζονται **συνθήκες επαναληψιμότητας** και περιλαμβάνουν:

- ίδια διαδικασία μέτρησης
- ίδιο παρατηρητή
- ίδιο όργανο μέτρησης

- ίδια τοποθεσία
- επανάληψη σε σύντομο διάστημα.

B.1.3 Αναπαραγωγιμότητα (των αποτελεσμάτων των μετρήσεων)

Η εγγύτητα της συμφωνίας μεταξύ των αποτελεσμάτων των μετρήσεων του ίδιου μετρούμενου μεγέθους. διεξάγεται κάτω από μεταβαλλόμενες συνθήκες μέτρησης.

Σημειώσεις:

1. Μια έγκυρη κατάσταση **αναπαραγωγιμότητας** απαιτεί προδιαγραφές των συνθηκών που άλλαξαν.
2. Οι μεταβαλλόμενες συνθήκες μέτρησης μπορεί να περιλαμβάνουν:
    - αρχή της μέτρησης
    - μέθοδο μέτρησης
    - παρατηρητή
    - εργαλείο μέτρησης
    - πρότυπο αναφοράς
    - τοποθεσία
    - όρους χρήσης
    - χρόνος.
3. Τα αποτελέσματα είναι συχνά κατανοητά ως διορθωμένα αποτελέσματα.

B.1.4 Σφάλμα (μέτρησης)

Το αποτέλεσμα μιας μέτρησης μείον την τιμή του μετρούμενου μεγέθους.

Σημειώσεις:

1. Αφού η τιμή του μετρούμενου μεγέθους δεν μπορεί να προσδιοριστεί, στην πράξη μια συμβατική τιμή χρησιμοποιείται.
2. Όταν είναι απαραίτητο να διακρίνουμε το "σφάλμα" από το "σχετικό σφάλμα", το πρώτο μερικές φορές ονομάζεται **απόλυτο σφάλμα μέτρησης**. Αυτό δεν πρέπει να συγχέεται με την *απόλυτη τιμή του σφάλματος*, η οποία είναι το μέτρο του σφάλματος.

ΤΣ1297 Σχόλια:

1. Εάν το αποτέλεσμα μιας μέτρησης εξαρτάται από τις τιμές των ποσοτήτων, εκτός από το μετρούμενο μέγεθος, τα σφάλματα των μετρούμενων τιμών των εν λόγω ποσοτήτων συμβάλλουν στο σφάλμα του αποτελέσματος της μέτρησης.
2. Το σφάλμα μέτρησης είναι άγνωστο επειδή, η τιμή του μετρούμενου μεγέθους είναι άγνωστη. Ωστόσο, η αβεβαιότητα του αποτελέσματος μιας μέτρησης μπορεί να αξιολογείται.
3. Αν μια συσκευή δοκιμαστεί μέσω μίας σύγκρισης με ένα γνωστό πρότυπο αναφοράς, και οι αβεβαιότητες που συνδέονται με το πρότυπο και τη διαδικασία σύγκρισης μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες σε σχέση με την απαιτούμενη αβεβαιότητα της

δοκιμής, η σύγκριση μπορεί να θεωρηθεί καθώς καθορίζουμε το σφάλμα της συσκευής.

Β.1.5 Τυχαίο σφάλμα

Το αποτέλεσμα μιας μέτρησης μείον την μέση τιμή που θα προέκυπτε από έναν άπειρο αριθμό μετρήσεων του ίδιου μετρούμενου μεγέθους, διεξάγεται κάτω από συνθήκες επαναληψιμότητας.

<u>Σημείωση</u>: Επειδή μπορεί να γίνει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός μετρήσεων, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί μόνο μια εκτίμηση του τυχαίου σφάλματος.

Η έννοια του **τυχαίου σφάλματος** συχνά εφαρμόζεται, όταν οι συνθήκες μέτρησης αλλάξουν. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να συλλάβει την απόκτηση των αποτελεσμάτων της μέτρησης από πολλούς διαφορετικούς παρατηρητές, κρατώντας όλες τις άλλες προϋποθέσεις σταθερές, και στη συνέχεια υπολογίζοντας τη μέση τιμή των αποτελεσμάτων, καθώς και το κατάλληλο μέτρο της διασποράς τους.

Β.1.6 Συστηματικό σφάλμα

Η μέση τιμή που θα προέκυπτε από έναν άπειρο αριθμό μετρήσεων του ίδιου μετρούμενου μεγέθους, διεξάγεται υπό συνθήκες επαναληψιμότητας μείον την τιμή του μετρούμενου μεγέθους

<u>Σημείωση</u>: Το **συστηματικό σφάλμα** και τα αίτιά του δεν μπορούν να είναι εντελώς γνωστά.

<u>ΤΣ1297 Σχόλια</u>:

1. Το σφάλμα του αποτελέσματος μίας μέτρησης μπορεί συχνά να θεωρηθεί ως προερχόμενο από ένα αριθμό τυχαίων και συστηματικών επιδράσεων που συμβάλλουν μεμονωμένα στοιχεία του σφάλματος με το σφάλμα του αποτελέσματος.
2. Αν και ο όρος **συστηματική απόκλιση** (bias) χρησιμοποιείται συχνά ως συνώνυμο για τον όρο **συστηματικό σφάλμα**, επειδή το **συστηματικό σφάλμα** ορίζεται με έναν ευρύ εφαρμόσιμο τρόπο στο **VIM**, ενώ η **συστηματική απόκλιση** ορίζεται μόνο σε σχέση με ένα όργανο μέτρησης, προτείνουμε τη χρήση του όρου "συστηματικό σφάλμα".

Β.1.7 Διόρθωση

Η τιμή που προστίθεται αλγεβρικά με το μη διορθωμένο αποτέλεσμα μιας μέτρησης για να αντισταθμίσει το συστηματικό σφάλμα.

<u>Σημείωση</u>: Αφού το συστηματικό σφάλμα δεν μπορεί να είναι τελείως γνωστό, η αντιστάθμιση δεν μπορεί να είναι πλήρης.

Β.1.8 Συντελεστής διόρθωσης

Ο αριθμητικός συντελεστής με τον οποίο, το μη διορθωμένο αποτέλεσμα μιας μέτρησης πολλαπλασιάζεται για να αντισταθμίσει το συστηματικό σφάλμα.

B.2 Η έννοια της Ακρίβειας

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, το **VIM** δεν δίνει έναν ορισμό για τη λέξη "ακρίβεια". Ωστόσο, το πρότυπο **ISO 3534-1 [21]** καθορίζει την ακρίβεια ως "η εγγύτητα της συμφωνίας μεταξύ των ανεξάρτητων αποτελεσμάτων δοκιμής που λαμβάνονται σύμφωνα με τους προβλεπόμενους όρους". Επιπλέον, θεωρεί ότι η έννοια της ακρίβειας περιλαμβάνει και επαναληψιμότητα και αναπαραγωγιμότητα, αφού καθορίζει την επαναληψιμότητα ως "ακρίβεια υπό συνθήκες επαναληψιμότητας" και την αναπαραγωγιμότητα ως "ακρίβεια υπό συνθήκες αναπαραγωγιμότητας". Παρ 'όλα αυτά, η ακρίβεια λαμβάνεται συχνά να σημαίνει απλώς <u>επαναληψιμότητα</u>.

Ο όρος **ακρίβεια**, καθώς και οι όροι *επαναληψιμότητα*, *αναπαραγωγιμότητα*, *μεταβλητότητα* και *αβεβαιότητα*, είναι παραδείγματα των όρων που αντιπροσωπεύουν ποιοτικές έννοιες και έτσι θα πρέπει να χρησιμοποιούνται με προσοχή. Ειδικότερα, συνιστάται να μη χρησιμοποιούνται τέτοιοι όροι ως συνώνυμα ή ετικέτες για ποσοτικές εκτιμήσεις. Για παράδειγμα, η κατάσταση "*η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της μέτρησης, που εκφράζεται ως η τυπική απόκλιση που λαμβάνεται υπό συνθήκες επαναληψιμότητας, είναι 2 μΩ*" είναι αποδεκτή, αλλά η κατάσταση "*η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της μέτρησης είναι 2 μΩ*" δεν είναι.

Αν και η αναφορά **[21]** αναφέρει ότι, "το μέτρο της ακρίβειας εκφράζεται συνήθως με όρους ασάφειας και υπολογίζεται ως μία τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων της δοκιμής", προτείνεται για να αποφεύγεται η σύγχυση, η λέξη "**ασάφεια**" να μη χρησιμοποιείται. Η <u>*τυπική απόκλιση*</u> και η <u>*τυπική αβεβαιότητα*</u> προτιμώνται, ανάλογα με την περίπτωση.

Θα πρέπει, επίσης, να ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι, η πολιτική NIST για την έκφραση της αβεβαιότητας των αποτελεσμάτων της μέτρησης κανονικά απαιτεί τη χρήση των όρων τυπική αβεβαιότητα, συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα, διευρυμένη αβεβαιότητα, ή τις "σχετικές" μορφές τους και τη λίστα όλων των στοιχείων της τυπικής αβεβαιότητας. Ως εκ τούτου, η χρήση των όρων όπως ακρίβεια, ακριβολογία και συστηματική απόκλιση θα πρέπει κανονικά να είναι ως επιπρόσθετη στους απαιτούμενους όρους και η σχέση τους με τους απαιτούμενους όρους θα πρέπει να καταστεί σαφής. Η κατάσταση αυτή είναι παρόμοια με την πολιτική **NIST** σχετικά με τη χρήση των μονάδων που δεν είναι μέρος του **SI**: οι μονάδες **SI** πρέπει να αναφέρονται πρώτα, με τις μονάδες που δεν αποτελούν μέρος του **SI** σε παρενθέσεις.

B.3 Χαρακτηρισμοί “A” και “B”

Οι χαρακτηρισμοί “**A**” και “**B**” ισχύουν για τις δύο διαφορετικές μεθόδους, με τις οποίες τα στοιχεία της αβεβαιότητας μπορούν να αξιολογούνται. Ωστόσο, για λόγους ευκολίας, μια τυπική αβεβαιότητα που λαμβάνεται από μία ***αξιολόγηση τύπου A*** μπορεί να ονομαστεί *τυπική αβεβαιότητα τύπου A*, και μία τυπική αβεβαιότητα που λαμβάνεται από μία ***αξιολόγηση τύπου B*** μπορεί να ονομαστεί *τυπική αβεβαιότητα τύπου B*. Αυτό σημαίνει ότι:

1. Τα “**A**” και “**B**” δεν έχουν καμία σχέση με τους παραδοσιακούς όρους "τυχαίο" και "συστηματικό".
2. Δεν υπάρχουν “*τύπου A σφάλματα*” ή “*τύπου B σφάλματα*”, και
3. Η "τυχαία αβεβαιότητα" (στοιχείο αβεβαιότητας που προκύπτει από μια τυχαία επίδραση) δεν είναι συνώνυμο μίας τυπικής αβεβαιότητας τύπου **A** και “συστηματική αβεβαιότητα” (στοιχείο αβεβαιότητας που προκύπτει από διόρθωση για ένα συστηματικό σφάλμα) δεν είναι συνώνυμο για μία τυπική αβεβαιότητα τύπου **B**.

Στην πραγματικότητα, προτείνετε οι όροι “τυχαία αβεβαιότητα” και “συστηματική αβεβαιότητα" να αποφεύγονται, διότι τα επίθετα “τυχαίο” και “συστηματικό”, και οι κατάλληλες τροποποιήσεις για τη λέξη “σφάλμα”, δεν είναι κατάλληλες τροποποιήσεις για τη λέξη “αβεβαιότητα”.

B.4 Εναλλακτικοί όροι αβεβαιοτήτων

Όπως επισημάναμε πριν, η χρήση του όρου τυπική αβεβαιότητα, συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα, διευρυμένη αβεβαιότητα, ή οι ισοδύναμες “σχετικές” μορφές τους, απαιτείται κανονικά από την πολιτική **NIST**.

Εναλλακτικοί όροι θα πρέπει επομένως να διαδραματίσουν δευτερεύοντα ρόλο σε κάθε δημοσίευση του **NIST** που αναφέρει το αποτέλεσμα μιας μέτρησης και της αβεβαιότητας της. Ωστόσο, δεδομένου ότι θα πάρει κάποιο χρόνο προτού οι έννοιες των όρων αυτών γίνουν καλά γνωστές, θα πρέπει να ορίζονται στην αρχή ενός εγγράφου ή όταν χρησιμοποιείται για πρώτη φορά. Για παράδειγμα, “η τυπική αβεβαιότητα (εκτιμώμενη τυπική απόκλιση) είναι $u(R)$=2 μΩ" ή "η διευρυμένη αβεβαιότητα (συντελεστής κάλυψης $\boldsymbol{k}$=**2**) είναι U=4 μΩ”.

Θα πρέπει επίσης να αναγνωριστεί ότι, ενώ μία εκτιμώμενη τυπική απόκλιση, η οποία είναι ένα στοιχείο αβεβαιότητας ενός αποτελέσματος μίας μέτρησης ονομάζεται "τυπική αβεβαιότητα", δεν είναι κάθε εκτιμώμενη τυπική απόκλιση απαραίτητα μία τυπική αβεβαιότητα.

B.5 Η φύση της αβεβαιότητας

Λέξεις όπως “εκτιμώμενο” ή “όρια” κανονικά δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται για να τροποποιήσουμε την "τυπική αβεβαιότητα", την “συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα", την "διευρυμένη αβεβαιότητα", τις “σχετικές” μορφές αυτών των όρων, ή γενικότερα την “αβεβαιότητα”. Η λέξη “αβεβαιότητα” από την φύση της, υποδηλώνει ότι η αβεβαιότητα του αποτελέσματος μιας μέτρησης είναι μία εκτίμηση και γενικά δεν έχει σαφές καθορισμένα όρια.

B.6 Ταυτοποίηση στοιχείων αβεβαιότητας

B.6.1 Η πολιτική του **NIST** για την *έκφραση της αβεβαιότητας της μέτρησης* δηλώνει ότι, όλα τα στοιχεία της τυπικής αβεβαιότητας θα πρέπει να προσδιορίζονται σύμφωνα με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των αριθμητικών τιμών τους:

A. εκείνα τα οποία αξιολογούνται με <u>στατιστικές μεθόδους</u>,

B. εκείνα που αξιολογούνται με <u>άλλα μέσα</u>.

Ο προσδιορισμός συνήθως θα είναι εύκολα εμφανής στη “λεπτομερή περιγραφή για το πώς κάθε στοιχείο της τυπικής αβεβαιότητας εκτιμήθηκε” που απαιτείται από την πολιτική του **NIST**. Ωστόσο, η αναγνώριση αυτή μπορεί επίσης να δοθεί σε ένα πίνακα που παραθέτει τα στοιχεία της <u>τυπικής αβεβαιότητας</u>. Οι **πίνακες B.1** & **B.2** που ακολουθούν βασίζονται στον **τυπικό τελικό – μετρητή**.

Πίνακας B.1 – Συνολικός Υπολογισμός Αβεβαιότητας: Βαθμονόμηση Τυπικού Τελικού Μετρητή

Πηγή Αβεβαιότητας	**Τυπική Αβεβαιότητα (nm)**
Διαμέτρηση του πρότυπου τελικού μετρητή	**25 (B)**
Μετρούμενες διαφορές μεταξύ των τελικών μετρητών:	
επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις	**5.8 (A)**
τυχαίες επιδράσεις του συγκριτή	**3.9 (A)**
συστηματικές επιδράσεις του συγκριτή	**6.7 (B)**
Θερμική διαστολή του πρότυπου τελικού μετρητή	**1.7 (B)**
Θερμοκρασία της κλίνης δοκιμών:	
μέση θερμοκρασία της κλίνης	**5.8 (A)**
κυκλική μεταβολή της θερμοκρασίας του δωματίου	**10.2 (B)**
Διαφορά στους συντελεστές διαστολής των τελικών μετρητών	**2.9 (B)**
Διαφορά στις θερμοκρασίες των τελικών μετρητών	**16.6 (B)**
Συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα: $u_c(l)$ = 34 nm	

Πίνακας Β.2 – Συνολικός Υπολογισμός Αβεβαιότητας: ΔιαμέτρησηΤυπικού Τελικού Μετρητή

Πηγή Αβεβαιότητας	**Τυπικές αβεβαιότητες από τυχαίες επιδράσεις στην τρέχουσα διαδικασία μέτρησης (nm)**		**Τυπικές αβεβαιότητες από συστηματικές επιδράσεις στην τρέχουσα διαδικασία μέτρησης (nm)**	
	Αξιολόγηση τύπου Α	**Αξιολόγηση τύπου Β**	**Αξιολόγηση τύπου Α**	**Αξιολόγηση τύπου Β**
Διαμέτρηση του πρότυπου τελικού μετρητή				**25**
Μετρούμενες διαφορές μεταξύ των τελικών μετρητών:				
επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις	**5.8**			
τυχαίες επιδράσεις του συγκριτή			**3.9**	
συστηματικές επιδράσεις του συγκριτή				**6.7**
Θερμική διαστολή του πρότυ-που τελικού μετρητή				**1.7**
Θερμοκρασία της κλίνης δοκιμών:				
μέση θερμοκρασία της κλίνης	**5.8**			
κυκλική μεταβολή της θερμοκρασίας δωματίου				**10.2**
Διαφορά στους συντελεστές διαστολής των τελικών μετρητών				**2.9**
Διαφορά στις θερμοκρασίες των τελικών μετρητών		**16.6**		
Συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα: $u_c(l)$ = 34 nm				

B.6.2 Στον **πίνακα B.1**, η μέθοδος που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση μιας συγκεκριμένης τυπικής αβεβαιότητας εμφανίζεται σε παρενθέσεις. Στον **πίνακα B.2**, η μέθοδος υποδεικνύεται με τη χρήση διαφορετικών στηλών. Ο τελευταίος πίνακας δείχνει επίσης, πώς μπορεί κανείς να υποδείξει εάν ένα στοιχείο προέκυψε από μία τυχαία ή συστηματική επίδραση στην τρέχουσα διαδικασία μέτρησης.

Αν μια τυπική αβεβαιότητα λαμβάνεται από μία εξωτερική πηγή της τρέχουσας διαδικασίας μέτρησης, και η φύση των μεμονωμένα στοιχείων της είναι άγνωστη, μπορεί να χαρακτηριστεί ότι έχει ληφθεί από μία *αξιολόγηση τύπου B*.

Εάν η τυπική αβεβαιότητα από μία εξωτερική πηγή αποτελείται από τα στοιχεία που λαμβάνονται και από τις **δύο αξιολογήσεις τύπου A και B**, και τα μεγέθη των μεμονωμένων στοιχείων είναι άγνωστα, τότε μπορεί κανείς να το αναφέρει, χρησιμοποιώντας τα (A,B) και αντί του (B).

Από την άλλη πλευρά, αν μια τυπική αβεβαιότητα αποτελείται από τα στοιχεία που λαμβάνονται από τις **αξιολογήσεις τύπου A** και μόνο, θα πρέπει να ταξινομείται ως *τυπική αβεβαιότητα τύπου A*, ενώ αν μία τυπική αβεβαιότητα αποτελείται από στοιχεία που λαμβάνονται από τις **αξιολογήσεις τύπου B** και μόνο, θα πρέπει να χαρακτηριστεί ως μία *τυπική αβεβαιότητα τύπου B*.

Στο ίδιο πνεύμα, αν η **συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα $u_c(y)$** του αποτελέσματος της μέτρησης y λαμβάνεται μόνο από *τυπικές αβεβαιότητες τύπου A*, μπορεί επίσης να θεωρηθεί **τύπου A**, ακόμη κι αν δεν έγιναν άμεσες παρατηρήσεις του μετρούμενου μεγέθους Y του οποίου, το αποτέλεσμα της μέτρησης y είναι μια εκτίμηση.

Ομοίως, εάν μία **συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα** λαμβάνεται μόνο από τις τυπικές αβεβαιότητες τύπου B, επίσης μπορεί να θεωρηθεί **Τύπου B**.

B.7 Το μετρούμενο μέγεθος που ορίζεται από τη μέθοδο μέτρησης, ο χαρακτηρισμός των μεθόδων δοκιμής, απλή βαθμονόμηση.

B.7.1 Η προσέγγιση για την αξιολόγηση και την έκφραση της αβεβαιότητας του αποτελέσματος της μέτρησης, κατά την οποία, η πολιτική του **NIST** και η **ΤΣ 1297** βασίζονται είναι εφαρμόσιμη για την αξιολόγηση και την έκφραση της αβεβαιότητας της εκτιμώμενης τιμής ενός μετρούμενου μεγέθους που ορίζεται από μία τυπική μέθοδο μέτρησης. Σε αυτήν την περίπτωση, η αβεβαιότητα δεν εξαρτάται μόνο από την επαναληψιμότητα και την αναπαραγωγιμότητα των αποτελεσμάτων της μέτρησης, αλλά επίσης και από το πόσο καλά πιστεύει κανείς ότι η τυπική μέθοδος της μέτρησης έχει εφαρμοστεί.

Όταν αναφέρουμε την εκτιμώμενη τιμή και αβεβαιότητα του εν λόγω μετρούμενου μεγέθους, θα πρέπει κανείς πάντα να καταστήσει σαφές ότι το μετρούμενο μέγεθος ορίζεται από μία συγκεκριμένη μέθοδο μέτρησης και να δείχνει ποια μέθοδος είναι αυτή. Κάποιος πρέπει επίσης, να δώσει στο μετρούμενο μέγεθος ένα όνομα που υποδηλώνει ότι ορίζεται από μια μέθοδο μέτρησης, για παράδειγμα, με την προσθήκη ενός τροποποιητή όπως “συμβατικό”.

B.3.2 Υπάρχουν εθνικά και διεθνή πρότυπα που συζητούν τον χαρακτηρισμό των μεθόδων δοκιμής από διεργαστηριακές συγκρίσεις. Η εκτέλεση των μεθόδων δοκιμής σύμφωνα με αυτά τα πρότυπα, τόσο στο στάδιο του χαρακτηρισμού όσο και σε μεταγενέστερα προγράμματα μέτρησης, καλεί συχνά για την έκφραση των αβεβαιοτήτων σε όρους των ορισμένων μετρήσεων της επαναληψιμότητας και της αναπαραγωγιμότητας.

Όταν οι συγγραφείς του **NIST**, συμμετέχουν σε τέτοιου είδους χαρακτηρισμούς ή σε προγράμματα μέτρησης, η πολιτική του **NIST** επιτρέπει για τα αποτελέσματα να εκφράζονται όπως απαιτείται από τα σχετικά πρότυπα. Ωστόσο, όταν οι συγγραφείς του **NIST** τεκμηριώνουν εργασία σύμφωνα με τα πρότυπα αυτά, θα πρέπει να εξετάσουν το ενδεχόμενο η προκύπτουσα δημοσίευση να είναι κατανοητή σε ένα ευρύ κοινό. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εν μέρει δίνοντας ορισμούς των όρων που χρησιμοποιούνται, ίσως σε μια υποσημείωση. Εάν είναι δυνατόν, οι συγγραφείς του **NIST** θα πρέπει να αναφέρουν αυτούς τους όρους με εκείνους της **ΤΣ1297** και του **GUM**.

Αν μια μέθοδος δοκιμής χρησιμοποιείται στο **NIST** για τη λήψη αποτελεσμάτων μέτρησης για λόγους άλλους από αυτούς που περιγράφονται παραπάνω, αναμένεται οι αβεβαιότητες αυτών των αποτελεσμάτων μέτρησης να αξιολογηθούν και να αναφερθούν. Για παράδειγμα, εάν τα αποτελέσματα μέτρησης που χαρακτηρίζονται από μία μέθοδο δοκιμής συγκρίνονται με εκείνα από μία νέα μέθοδο μέτρησης, η οποία δεν έχει χαρακτηριστεί από διεργαστηριακές συγκρίσεις.

B.3.3 Όταν ένα άγνωστο πρότυπο έχει βαθμονομηθεί σε όρους ενός γνωστού προτύπου αναφοράς σε χαμηλότερα επίπεδα από την ιεραρχία μέτρησης, η αβεβαιότητα του αποτελέσματος της βαθμονόμησης μπορεί να έχει δύο συνιστώσες:

i. μια ενιαία **τυπική αβεβαιότητα τύπου Α** που αξιολογήθηκε από την συγκεντρωμένη πειραματική τυπική απόκλιση που χαρακτηρίζει τη διαδικασία βαθμονόμησης και

ii. μια ενιαία **τυπική αβεβαιότητα τύπου Β** που λαμβάνεται από το πιστοποιητικό βαθμονόμησης του γνωστού προτύπου αναφοράς.

<u>Σημείωση</u>: Η δυνατότητα των ανύποπτων συστηματικών επιδράσεων στην διαδικασία βαθμονόμησης που χρησιμοποιούνται για τη βαθμονόμηση του άγνωστου πρότυπου, δεν θα πρέπει να αγνοηθεί.

B.4 t_p και ποσοστημόριο $t_{1-\alpha}$

Η ***t*-κατανομή** συχνά συνοψίζεται σε ποσοστιαία σημεία. Δηλαδή, οι τιμές του ποσοστημόριου $t_{1-\alpha}$ δίδονται, όπου το **1-α** υποδηλώνει την *αθροιστική πιθανότητα* και η σχέση:

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha}} f(t, \nu)\,\mathrm{d}t$$

ορίζει το ποσοστημόριο, όπου το f είναι η συνάρτηση πυκνότητας της πιθανότητας του t. Έτσι το t_p και το $t_{1-\alpha}$ σχετίζονται με $p = 1-2\alpha$.

Για παράδειγμα, η τιμή του ποσοστημόριου $\boldsymbol{t_{0.975}}$, για την οποία **1-α = 0.975** και **α = 0.025**, είναι η ίδια με του $\boldsymbol{t_p(\nu)}$ για $\boldsymbol{p}$ **= 0,95**.

Το σύμβολο ***p*** χρησιμοποιείται για την αθροιστική πιθανότητα **1-α** και το προκύπτον $\boldsymbol{t_p\ (\nu)}$ ονομάζεται "ποσοστημόριο τάξης ***p*** της ***t*** μεταβλητής με **ν** βαθμούς ελευθερίας" **[21]**.

B.5 Η αβεβαιότητα και οι μονάδες του SI, η ορθή χρήση του SI και η ποσότητα και τα σύμβολα μονάδας

Το αποτέλεσμα μιας μέτρησης μερικές φορές εκφράζεται σε όρους της υιοθετημένης τιμής ενός προτύπου μέτρησης ή σε όρους της συμβατικής τιμής της αναφοράς και όχι σε όρους της σχετικής μονάδας του **SI**. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το μέγεθος της αβεβαιότητας που αποδίδεται στο αποτέλεσμα της μέτρησης μπορεί να είναι σημαντικά μικρότερο από όταν το αποτέλεσμα εκφράζεται στη σχετική μονάδα **SI**. Η πρακτική αυτή δεν έχει απορριφθεί από την πολιτική του **NIST**, αλλά θα πρέπει πάντα να γίνεται σαφής η πρακτική που ακολουθείται. Επιπλέον, θα πρέπει κανείς πάντα να δίνει κάποια ένδειξη των τιμών των στοιχείων της αβεβαιότητας οι οποίες δεν λαμβάνονται υπόψη.

Βιβλιογραφία

[1] CIPM, BIPM Proc.-Verb.Com. Int. Poids et Mesures 49, 8-9, 26 (1981) P. Giacomo, "*News from the BIPM*" *Metrologia* 18, 41-44 (1982).

[2] ISO, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (ISO, Geneva, Switzerland, 1993).

[3] R. Kaarls, "*Rapport du Groupe de Travail sur l'Expression des Incertitudes au Comité International des Poids et Mesures*", Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures 49, A1-A12 (1981) P. Giacomo, "News from the BIPM" *Metrologia* **17**, 69-74 (1981).

[4] http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/TechnicalNotes/NIST.TN.1900.pdf "*Technical Note 1900*" Simple Guide for *Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results* (Antonio Possolo, October, 1995)

[5] http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/DataAnalysis/Chp4.pdf "*Αβεβαιότητα και Σφάλμα Μέτρησης*", κεφάλαιο 4 (Δημήτρης Κουγιουμτζής)

[6] http://www.eim.gr/language/el/ (*Ιστοσελίδα Ελληνικού Ινστιτούτου Μετρολογίας*)

[7] http://dimitris.apeiro.gr/files/na/mc/MonteCarlo.pdf "*Αριθμητική Ανάλυση*", (Καλαμαράς Δημήτρης, Π.Μ.Σ Μαθηματικού, 2001-2002)

[8] https://opencourses.uoc.gr/courses/pluginfile.php/16563/mod_resource/content/0/Monte_Carlo_Unit_2.pdf "*Εισαγωγή σε μεθόδους Monte Carlo*" Ενότητα 2: Ολοκλήρωση Monte Carlo, γεννήτριες τυχαίων αριθμών (Βαγγέλης Χαρμανδάρης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών)

[9] Box, G.E.P. and Tiao, G.C. (1973) *Bayesian Inference in Statistical Analysis*, Wiley

[10] http://www.stat-athens.aueb.gr/~ptd/Notes_2006.pdf "*Στατιστική κατά Bayes*", (Πέτρος Δελλαπόρτας - Παναγιώτης Τσιαμυρτζής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2004)

[11] https://www.nist.gov/sites/default/files/documents/pml/pubs/tn1297/tn1297s.pdf "NIST Technical Note 1297" Guidelines for *Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results* (Barry N. Taylor and Chris E. Kuyatt, September, 1994)

[12] *https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution* “*Normal Distribution*” (Βικιπαιδεία)

[13] *http://trams.chem.uoa.gr/docs/U_new_2012.pdf* “*Εκτίμηση Αβεβαιότητας στις Χημικές Μετρήσεις”*, (Μ. Κωστάκης, Ν. Θωμαΐδης, Μ. Κουππάρης, Εργαστήριο Αναλυτικής Χημείας, Τμ. Χημείας, ΕΚΠΑ)

[14] *https://el.wikipedia.org/wiki/Κατανομή_t-Student* “*Κατανομή t-Student*” (Βικιπαιδεία)

[15] http://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/PHS115/assignments/ass1/ND2.pdf “*Εισαγωγή στην Στατιστική των Επιχειρήσεων*” κεφάλαιο 8: Συνεχείς Κατανομές Πιθανοτήτων (Ι. Μητρόπουλος, Αλέκα Καλαπόδη)

[16] http://www.aua.gr/gpapadopoulos/files/clt-09-2.pdf “*Κεντρικό Οριακό Θεώρημα*”, (Γ. Παπαδόπουλος, Εργαστήριο Μαθηματικών και Στατιστικής)

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Confidence_interval “*Confidence Interval*” (Wikipedia)

[18] F. Dietrich, “*Uncertainty, Calibration and Probability”*, second printing (Adam Hilger, Bristol, U.K., 1991), chapter 7.

[19] https://www.materials.uoc.gr/el/undergrad/courses/ETY203/askiseis/errors_zezas.pdf “*Εργαστηριακός Οδηγός για Μετρήσεις και Σφάλματα*” (Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Φυσικής)

[20] ISO, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, second edition (I.S.O, Geneva, Switzerland, 1993)

[21] ISO 3534-1:1993, *Statistics - Vocabulary and symbols - Part 1: Probability and general statistical terms* (I.S.O, Geneva, Switzerland, 1993).